

---

**Tarea # 5**

**1) Determine si  $T$  es una transformación lineal**

**a)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por**

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y + z \\ 2x + y - 3z \end{bmatrix}.$$

**b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por**

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{bmatrix}.$$

**c)  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por**

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & c + d \end{bmatrix}.$$

**d)  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por**

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & a - d \\ b - c & 1 \end{bmatrix}.$$

**e)  $T : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  definida por  $T(A) = AB$  donde  $B$  es una matriz fija de tamaño  $n \times n$ .**

**f)  $T : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(A) = \text{tr}(A)$ .**

**g)  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  definida por**

$$T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2.$$

**h)  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  definida por**

$$T(a + bx + cx^2) = xp(x).$$

**i)  $T : \mathcal{MS}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  definida por**

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = (a - b) + (b - c)x + (c - a)x^2$$

**donde  $\mathcal{MS}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  es el espacio vectorial de las matrices simétricas de tamaño  $2 \times 2$ .**

---

II) Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación lineal para la cual

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Encuentre

$$T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \quad \mathbf{y} \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

III) Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  una transformación lineal para la cual

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1 - 2x \quad \mathbf{y} \quad T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = x + 2x^2.$$

Encuentre

$$T\left(\begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}\right) \quad \mathbf{y} \quad T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right).$$

IV) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

a) ¿Cuáles, si es el caso, de las siguientes matrices se encuentran en el  $\ker T$  ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) ¿Cuáles, si es el caso, de las matrices del inciso a) se encuentran en la  $\text{Im}T$  ?

c) Describa el  $\ker T$  y la  $\text{Im}T$ .

v) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  la transformación lineal definida por  $T(A) = \text{tr}(A)$ .

a) ¿Cuáles, si es el caso, de las siguientes matrices se encuentran en el  $\ker T$  ?

---

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) ¿Cuáles, si es el caso, de los siguientes escalares se encuentran en la  $ImT$  ?

$$0, -2, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) Describa el  $kerT$  y la  $ImT$ .

VI) Sea  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b \\ b + c \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuáles, si es el caso, de los siguientes polinomios se encuentran en el  $kerT$  ?

$$1 + x, x - x^2, 1 + x - x^2.$$

b) ¿Cuáles, si es el caso, de los siguientes vectores se encuentran en la  $ImT$  ?

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Describa el  $kerT$  y la  $ImT$ .

VII) Encuentre ya sea la nulidad o bien el rango de  $T$  y posteriormente utilice el teorema del rango para encontrar al otro.

a) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

b) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - b \\ c - d \end{bmatrix}.$$

---

**c) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por  $T(A) = AB$ , donde**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**d) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(A) = \text{tr}(A)$ .**

**e) Sea  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por**

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b \\ b + c \end{bmatrix}.$$

**f) Sea  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por  $T(A) = A - A^t$ .**

**Puebla, Pue., a 4 de octubre de 2016**