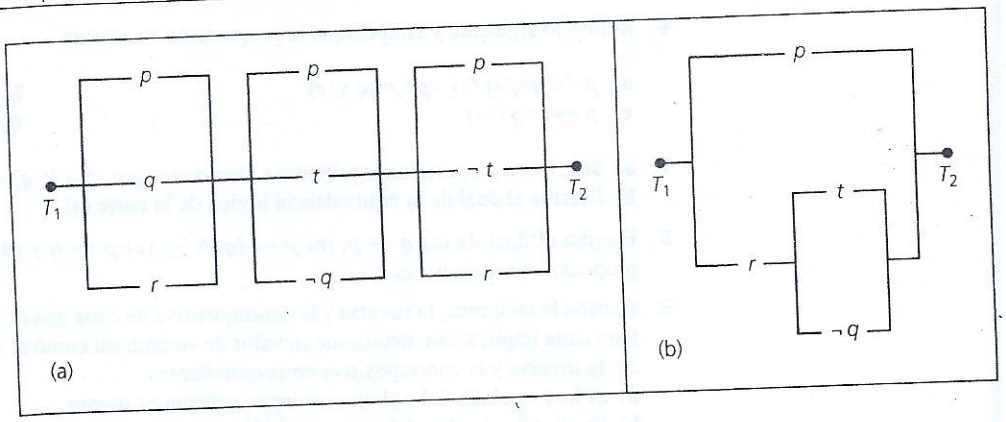

Figura 2.3

Por lo tanto, $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg t \vee r) \Leftrightarrow p \vee [r \wedge (t \vee \neg q)]$, y la red que se muestra en la figura 2.3 (b) es equivalente a la red original, en el sentido de que la corriente fluye de T_1 a T_2 en la red (a) exactamente cuando hace lo mismo en la red (b). Pero en (b), la red sólo tiene cuatro interruptores, cinco menos que en la red (a).

EJERCICIOS 2.2

1. Sean p, q, r proposiciones primitivas.
   a) Use las tablas de verdad para verificar las siguientes equivalencias lógicas.
   i) $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$
   ii) $[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$
   iii) $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [\neg r \to (p \to q)]$
   b) Use las reglas de sustitución para ver que $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r]$.
2. Verifique la primera ley de absorción mediante una tabla de verdad.
3. Use las reglas de sustitución para verificar que cada una de las siguientes proposiciones es una tautología. (En este caso p, q y r son proposiciones primitivas.)
   a) $[p \vee (q \wedge r)] \vee \neg[p \vee (q \wedge r)]$
   b) $[(p \vee q) \to r] \leftrightarrow [\neg r \to \neg(p \vee q)]$
   c) $[[(p \vee q) \to r] \vee (s \wedge t)] \leftrightarrow [[[(p \vee q) \to r] \vee s] \wedge [[(p \vee q) \to r] \vee t]]$
4. Para las proposiciones primitivas p, q, r y s, simplifique la proposición compuesta

$$[[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r]] \vee \neg q] \to s.$$

5. Refute y exprese cada una de las siguientes proposiciones en español.
   a) Karina tendrá una buena educación si pone sus estudios antes que su interés en ser estrella de cine.
   b) Norma está haciendo su tarea de matemáticas y Claudia está practicando sus lecciones de piano.
   c) Si Lorenzo se va de vacaciones, entonces él se divertirá si no le preocupa viajar en avión.
   d) Si Homero aprueba su curso de Pascal y termina su proyecto de estructura de datos, se graduará al final del semestre.

6. Refute lo siguiente y simplifique la proposición resultante.

a) $p \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
b) $(p \wedge q) \rightarrow r$
c) $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$
d) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

7. a) Si p, q son proposiciones primitivas, demuestre que $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$.
b) Escriba el dual de la equivalencia lógica de la parte (a).

8. Escriba el dual de (a) $q \rightarrow p$, (b) $p \rightarrow (q \wedge r)$, (c) $p \leftrightarrow q$ y (d) $p \veebar q$, donde p, q y r son proposiciones primitivas.

9. Escriba la recíproca, la inversa y la contrapositiva de cada una de las siguientes implicaciones. Para cada implicación, determine su valor de verdad, así como el valor de verdad de la recíproca, la inversa y la contrapositiva correspondientes.
a) Si hoy es el día del trabajo, entonces mañana es martes.
b) Si $-1 < 3$ y $3 + 7 = 10$, entonces $\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.
c) Si Paco vive en Nueva Inglaterra, entonces Paco vive en Vermont.

10. Determine si lo siguiente es verdadero o falso. Aquí, p, q y r son proposiciones arbitrarias.
a) Una forma equivalente para expresar la recíproca de "p es suficiente para q" es "p es necesaria para q".
b) Una forma equivalente para expresar la inversa de "p es necesaria para q" es "$\neg q$ es suficiente para $\neg p$".
c) Una forma equivalente para expresar la contrapositiva de "p es necesaria para q" es "$\neg q$ es necesaria para $\neg p$".
d) Una forma equivalente para expresar la recíproca de $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ es $(\neg q \vee r) \rightarrow p$.

11. Sean p, q y r proposiciones primitivas. Encuentre una forma de la contrapositiva de $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ con (a) sólo una aparición de la conectiva $\rightarrow$; (b) sin que aparezca la conectiva $\rightarrow$.

12. Escriba la recíproca, la inversa, la contrapositiva y la negación de la siguiente proposición: "Si Sandra termina su trabajo, entonces irá al juego de baloncesto, a menos que nieve".

13. Considere los dos segmentos de programa en Pascal de la figura 2.1 (ejemplo 2.16). Determine el número total de comparaciones ejecutadas en cada segmento si, en vez de asignarle el valor 4, z toma el valor (a) 2; (b) 6; (c) 9; (d) 10; (e) 15; (f) n, un entero mayor que 10.

14. Muestre que para p, q proposiciones primitivas,

$$p \veebar q \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q).$$

15. Verifique que $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)]$, para las proposiciones primitivas p, q y r.

16. Para las proposiciones primitivas p, q,
a) verifique que $p \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$ es una tautología.
b) verifique que $(p \vee q) \rightarrow [q \rightarrow q]$ es una tautología, usando el resultado de la parte (a), las reglas de sustitución y las leyes de la lógica.
c) ¿es $(p \vee q) \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$ una tautología?

17. Defina la conectiva "Nand" o "no. . . y . . ." como $(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$, para las proposiciones p, q. Represente lo siguiente utilizando solamente esta conectiva.

a) $\neg p$
b) $p \vee q$
c) $p \wedge q$
d) $p \rightarrow q$
e) $p \leftrightarrow q$

18. La conectiva "Nor" o "No. . . o . . ." se define para las proposiciones p, q como $(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$. Represente las proposiciones de las partes (a) a (e) del ejercicio 17, utilizando solamente esta conectiva.

d) Si Tomás juega baloncesto después de mediodía, entonces no verá el televisor por la tarde.

∴ Tomás no jugó baloncesto después de mediodía.

e) Si María Luisa no rompe las fotos de Jorge, entonces tendrá que mostrarlas en el tablero de avisos.
María Luisa no mostró las fotos de Jorge en el tablero.

∴ ______________________________

5. Considere cada uno de los siguientes argumentos. Si el argumento es válido, identifique la regla de inferencia que establece su validez. Si no, indique si el error se debe a un intento de argumentación por la recíproca o por la inversa.

a) Andrea puede programar en Pascal y puede programar en FORTRAN.
Por lo tanto, Andrea puede programar en Pascal.

b) Una condición suficiente para que Berta gane el torneo de golf es que su oponente Mirna no haga un *birdie* en el último hoyo.
Mirna no hizo un *birdie* en el último hoyo.
Berta ganó el torneo de golf.
Por lo tanto Mirna, la oponente de Berta, no hizo un *birdie* en el último hoyo.

c) Si el programa de Ronaldo es correcto, entonces podrá terminar su tarea de ciencias de la computación en menos de dos horas.
Ronaldo tarda más de dos horas en terminar su tarea de ciencias de la computación.
Por lo tanto, el programa de Ronaldo es incorrecto.

d) Las llaves del auto de Elisa están en su bolso o sobre la mesa de la cocina.
Las llaves del auto de Elisa no están sobre la mesa de la cocina.
Por lo tanto, las llaves del auto de Elisa están en su bolso.

e) Si bajan los tipos de interés, entonces subirán las acciones de la bolsa.
Los tipos de interés no están bajando.
Por lo tanto, no subirán las acciones de la bolsa.

f) Si Alejandro recibe un aguinaldo, entonces viajará al suroeste de Estados Unidos.
Si Alejandro viaja al suroeste de Estados Unidos, entonces visitará el Gran Cañón.
Por lo tanto, si Alejandro recibe un aguinaldo, entonces visitará el Gran Cañón.

6. Para las proposiciones primitivas p, q y r, sean P la proposición

$$[p\wedge(p\rightarrow q)\wedge(s\vee r)\wedge(r\rightarrow\neg q)]\rightarrow(s\vee t)$$

y P_1 la proposición $[p \wedge (q \vee r)] \vee \neg[p \vee (q \vee r)]$.

a) Use las reglas de inferencia para mostrar que $q \wedge r \Rightarrow q \vee r$.

b) ¿Es cierto que $P \Rightarrow P_1$?

+ **7.** Justifique cada uno de los pasos necesarios para mostrar que el siguiente argumento es válido.

$$[p\wedge(q\wedge r)]\vee\neg[p\vee(q\wedge r)], \quad \text{X}$$

Pasos	**Razones**
1) p	p
2) $p\rightarrow q$	$p \Rightarrow q$
3) q	$r \Rightarrow \neg q$
4) $r\rightarrow\neg q$	$s \vee r$
5) $q\rightarrow\neg r$	$\therefore s \vee t$
6) $\neg r$	
7) $s\vee r$	
8) s	
9) $\therefore\ s\vee t$	

8. Dé las razones para los pasos que verifican el siguiente argumento.

$$\begin{array}{l} (\neg p \vee q) \rightarrow r \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \neg s \wedge \neg u \\ \neg u \rightarrow \neg t \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

Pasos	Razones
1) $\neg s \wedge \neg u$	
2) $\neg u$	
3) $\neg u \rightarrow \neg t$	
4) $\neg t$	
5) $\neg s$	
6) $\neg s \wedge \neg t$	
7) $r \rightarrow (s \vee t)$	
8) $\neg(s \vee t) \rightarrow \neg r$	
9) $(\neg s \wedge \neg t) \rightarrow \neg r$	
10) $\neg r$	
11) $(\neg p \vee q) \rightarrow r$	
12) $\neg r \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$	
13) $\neg r \rightarrow (p \wedge \neg q)$	
14) $p \wedge \neg q$	
15) $\therefore\ p$	

9. a) Dé las razones para los pasos que justifican el argumento

$$[(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (\neg q \rightarrow s).$$

Pasos	Razones
1) $\neg(\neg q \rightarrow s)$	
2) $\neg q \wedge \neg s$	
3) $\neg s$	
4) $\neg r \vee s$	
5) $\neg r$	
6) $p \rightarrow q$	
7) $\neg q$	
8) $\neg p$	
9) $p \vee r$	
10) r	
11) $\neg r \wedge r$	
12) $\therefore\ \neg q \rightarrow s$	

b) Realice una demostración directa del resultado de la parte (a).

c) Realice una demostración directa del resultado del ejemplo 2.33.

10. Establezca la validez de los siguientes argumentos.

a) $[(p \wedge \neg q) \wedge r] \rightarrow [(p \wedge r) \vee q]$

b) $[p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)] \rightarrow r$

c) $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \neg r \\ \hline \therefore\ \neg(p \vee r) \end{array}$

d) $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow \neg q \\ r \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$

e) $\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \neg q \rightarrow \neg p \\ p \\ \hline \therefore\ r \end{array}$

f) $p \wedge q$
$p \rightarrow (r \wedge q)$
$r \rightarrow (s \vee t)$
$\neg s$
$\therefore\ t$

g) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
$p \vee s$
$t \rightarrow q$
$\neg s$
$\therefore\ \neg r \rightarrow \neg t$

h) $p \vee q$
$\neg p \vee r$
$\neg r$
$\therefore\ q$

Definición 2.5

11. Muestre con un contraejemplo que ninguno de los siguientes argumentos es válido; es decir, dé una asignación de valores de verdad a las proposiciones primitivas p, q, r y s de modo que todas las premisas sean verdaderas (tengan el valor de verdad 1) y que la conclusión sea falsa (tenga el valor de verdad 0).

a) $[(p \wedge \neg q) \wedge [p \rightarrow (q \rightarrow r)]] \rightarrow \neg r$

b) $[[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge (\neg q \vee r)] \rightarrow p$

c) $p \leftrightarrow q$
$q \rightarrow r$
$r \vee \neg s$
$\neg s \rightarrow q$
$\therefore\ s$

d) p
$p \rightarrow r$
$p \rightarrow (q \vee \neg r)$
$\neg q \vee \neg s$
$\therefore\ s$

12. Escriba cada uno de los siguientes argumentos en forma simbólica. Establezca después la validez del argumento o dé un contraejemplo para mostrar que no es válido.

a) Si Rosa María obtiene el puesto de supervisor y trabaja mucho, entonces obtendrá un aumento. Si obtiene el aumento, entonces comprará un auto nuevo. Ella no ha adquirido un auto nuevo. Por lo tanto, Rosa María no ha obtenido el puesto de supervisor o no ha trabajado mucho.

b) Si Domingo va a la carrera de autos, entonces Elena se enojará. Si Rafael juega cartas toda la noche, entonces Carmen se enojará. Si Elena o Carmen se enojan, le avisarán a Verónica (su abogado). Verónica no ha tenido noticias de estas dos clientes. En consecuencia, ni Domingo fue a las carreras ni Rafael jugó cartas toda la noche.

c) Si Norma va a su reunión del martes por la mañana, entonces deberá levantarse muy temprano ese día. Si va al concierto de rock el lunes por la noche, entonces llegará a su casa después de las 11:00 P.M. Si Norma llega a su casa a esa hora y se levanta temprano al día siguiente, entonces tendrá que ir a trabajar después de dormir menos de siete horas. Por desgracia, Norma no puede trabajar con menos de siete horas de descanso. Norma no deberá ir al concierto de rock o deberá faltar a su reunión del martes por la mañana.

d) Si hay cierta probabilidad de lluvia o pierde su cinta roja para el cabello, entonces Loreta no cortará el césped. Siempre que la temperatura está por arriba de los 80°F, no hay probabilidad de lluvia. Hoy la temperatura es de 85°F y Loreta está usando su cinta roja. Por lo tanto (en algún momento del día), Loreta cortará el césped.

2.4 El uso de cuantificadores

En la sección 2.1 mencionamos el hecho de que los enunciados que contienen una variable como x no necesariamente son proposiciones. Por ejemplo, la frase "El número $x + 2$ es un entero par" no necesariamente es verdadera o falsa, a menos que conozcamos el valor que sustituirá a x. Si restringimos nuestra elección a los enteros, entonces, al reemplazar x por -5, -1 o 3, por ejemplo, la proposición resultante será falsa. De hecho, es falsa siempre que sustituyamos x con un entero impar. No obstante, cuando un entero par sustituye a x, la proposición resultante es verdadera.

9. Dé las razones para los pasos de verificación del siguiente argumento. (En este caso, a denota un elemento arbitrario pero específico del universo dado.)

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))] \\ \underline{\forall x[p(x) \wedge s(x)]} \\ \therefore \forall x[r(x) \wedge s(x)] \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))]$	
2) $\forall x[p(x) \wedge s(x)]$	
3) $p(a) \rightarrow (q(a) \wedge r(a))$	
4) $p(a) \wedge s(a)$	
5) $p(a)$	
6) $q(a) \wedge r(a)$	
7) $r(a)$	
8) $s(a)$	
9) $r(a) \wedge s(a)$	
10) $\therefore \forall x[r(x) \wedge s(x)]$	

10. Escriba las razones que faltan para los pasos de verificación del siguiente argumento:

$$\begin{array}{l} \forall x[p(x) \vee q(x)] \\ \exists x \neg p(x) \\ \forall x[\neg q(x) \vee r(x)] \\ \underline{\forall x[s(x) \rightarrow \neg r(x)]} \\ \therefore \exists x(\neg s(x)) \end{array}$$

Pasos	**Razones**
1) $\forall x[p(x) \vee q(x)]$	Premisa
2) $\exists x \neg p(x)$	Premisa
3) $\neg p(a)$	Paso (2) y definición de verdad para $\exists x\ \neg p(x)$. [En este caso, a es un elemento (reemplazo) del universo para el cual $\neg p(x)$ es verdadera.] La razón que justifica este paso también se conoce como la *regla de la especificación existencial.*
4) $p(a) \vee q(a)$	
5) $q(a)$	
6) $\forall x[\neg q(x) \vee r(x)]$	
7) $\neg q(a) \vee r(a)$	
8) $q(a) \rightarrow r(a)$	
9) $r(a)$	
10) $\forall x[s(x) \rightarrow \neg r(x)]$	
11) $s(a) \rightarrow \neg r(a)$	
12) $r(a) \rightarrow \neg s(a)$	
13) $\neg s(a)$	
14) $\therefore \exists x(\neg s(x))$	Paso 13 y la definición de verdad para $\exists x(\neg s(x))$. La razón de este paso también se conoce como *regla de generalización existencial.*

11. Escriba el siguiente argumento en forma simbólica. Verifique entonces la validez del argumento o explique por qué no es válido. [Supongamos que el universo abarca a todos los adultos

Resumen

(mayores de 18) que residen actualmente en la ciudad de Las Cruces, Nuevo México. Dos de estas personas son Roxana e Inés.]

Todos los empleados de una unión de crédito deben saber COBOL. Todos los empleados de la unión de crédito que se encargan de las solicitudes de préstamos deben conocer Quattro. Roxana trabaja para la unión de crédito, pero no sabe usar Quattro. Inés sabe Quattro pero no COBOL. Por lo tanto, Roxana no se encarga de solicitudes de préstamos e Inés no trabaja para la unión de crédito.

12. Dé una demostración directa (como en el teorema 2.3) de lo siguiente.
a) Para todos los enteros k y l, si k, l son pares, entonces $k + l$ es par.
b) Para todos los enteros k y l, si k, l son pares, entonces kl es par.

13. Realice una demostración indirecta [como en la parte (z) del teorema 2.4] para cada una de las siguientes proposiciones; hágalo estableciendo y demostrando la contrapositiva de cada proposición.
a) Para todos los enteros k y l, si kl es impar, entonces tanto k como l son impares.
b) Para todos los enteros k y l, si $k + l$ es par, entonces k y l son los dos pares o los dos impares.

14. Demuestre que para cualquier entero n, si n^2 es impar, entonces n es impar.

15. Realice una demostración por contradicción de lo siguiente: Para cualquier entero n, si n^2 es impar, entonces n es impar.

16. Demuestre que para todo entero n, n^2 es par si y sólo si n es par.

17. Demuestre el siguiente resultado de tres formas (como en el teorema 2.4): Si n es un entero impar, entonces $n + 11$ es par.

18. Sean m, n dos enteros positivos. Demuestre que si m, n son cuadrados perfectos, entonces el producto mn también es un cuadrado perfecto.

19. Demuestre, o demuestre que es falso: Si m, n son enteros positivos y m, n son cuadrados perfectos, entonces $m + n$ es un cuadrado perfecto.

20. Demuestre, o demuestre que es falso: Existen enteros positivos m, n tales que m, n y $m + n$ son cuadrados perfectos.

21. Demuestre que para todos los números reales x, y, si $x + y \geq 100$, entonces $x \geq 50$ o $y \geq 50$.

2.6 Resumen y repaso histórico

En este segundo capítulo se han introducido algunos fundamentos de la lógica; en particular, algunas de las reglas de inferencia y métodos de demostración necesarios para establecer teoremas matemáticos.

El primer estudio sistemático del razonamiento lógico se encuentra en la obra del filósofo griego Aristóteles (384–322 A.C.). En sus tratados de lógica, Aristóteles presentó una colección de principios para el razonamiento deductivo. Estos principios tenían por objeto ofrecer una base para el estudio de todas las ramas del conocimiento. En una forma modificada, este tipo de lógica se enseñó hasta y durante la Edad Media.

El matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) ha sido considerado frecuentemente como el primer filósofo que intentó desarrollar la lógica simbólica como un lenguaje científico universal. Así lo manifestó en su ensayo *De Arte Combinatoria*, publicado en 1666. Su investigación en el área de la lógica simbólica, realizada de 1679 a 1690, dio un gran impulso a la creación de esta disciplina matemática.