Prof. Carlos Alberto López Andrade
Materia: Álgebra Lineal I

Tarea # 2

I) Determine si el conjunto dado, junto con las operaciones especificadas de adición y multiplicación por escalares, es un espacio vectorial. Si no lo es, explique ¿por qué no lo es?

a)
$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$
con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalares.

b)
$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$$
con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalares.

c)
$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$$
con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalares.

d) $\mathbb{R}^2$ con la operación habitual de adición pero con la multiplicación escalar definida por $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$.

e) $\mathbb{R}^2$ con la operación habitual de multiplicación escalar pero con la adición definida por
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1).$$

f)
$$\mathcal{MTS}_{n\times n}(\mathbb{F}) = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$$
con las operaciones matriciales habituales de adición y multiplicación por escalares.

g) El conjunto de todas las matrices de tamaño 2×2 de la forma
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad = 0$, con las operaciones matriciales habituales de adición y multiplicación por escalares.

h)
$$\mathcal{MAS}_{n\times n}(\mathbb{F}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F}) : A^t = -A\}$$
con las operaciones matriciales habituales de adición y multiplicación por escalares.

II) Sea $\mathcal{S} = \{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{C}\}$ con las operaciones habituales de adición y multiplicación por escalares. ¿$\mathcal{S}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$? ¿$\mathcal{S}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$?

III) Determinar si $\mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$.

a) $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$,
$$\mathcal{W} = \{(a, -a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

b) $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$,
$$\mathcal{W} = \{(a, b, |a|) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

c) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{W} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

d) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{W}$ es el conjunto de matrices diagonales de tamaño $n \times n$.

e) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : AB = BA\}$, donde B es una matriz (fija) dada.

f) $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 : a + b + c = 0\}$.

g) $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 : abc = 0\}$.

h) $\mathcal{V} = \mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = f(x)\}$.

i) $\mathcal{V} = \mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = -f(x)\}$.

IV) Sean $\mathcal{V} = \mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y
$$\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{F} : \exists c_f \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } |f(x)| \leq c_f|x| \text{ para toda } x \in \mathbb{R}\}.$$
¿Es $\mathcal{W}$ un subespacio de $\mathcal{V}$?

V) Sean $\mathcal{V} = \mathcal{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{V} : f \text{ es continua }\}$ y $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{V} : f \text{ es derivable }\}$

a) Mostrar que $\mathcal{C}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$

b) Mostrar que $\mathcal{D}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$

VI) Sean $\mathcal{V} = \mathcal{D}$ y $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{D} : f'(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}\}$. ¿$\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$?

VII) Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial con subespacios $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$. Demuestre que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$.

Puebla, Pue., a 22 de agosto de 2019