
Tarea # 1

- 1) Determine si el conjunto dado, junto con las operaciones especificadas de adición y multiplicación por escalares, es un espacio vectorial. Si no lo es, explique ¿por qué no lo es?

a)

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalares.

b)

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$$

con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalares.

c)

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$$

con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalares.

- d) \mathbb{R}^2 con la operación habitual de adición pero con la multiplicación escalar definida por $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$.

- e) \mathbb{R}^2 con la operación habitual de multiplicación escalar pero con la adición definida por

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1).$$

f)

$$\mathcal{S} = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$$

con las operaciones matriciales habituales de adición y multiplicación por escalares.

- g) El conjunto de todas las matrices de tamaño 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad = 0$, con las operaciones matriciales habituales de adición y multiplicación por escalares.

h)

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{F}) : A^t = -A\}$$

con las operaciones matriciales habituales de adición y multiplicación por escalares.

II) Sea $\mathcal{S} = \{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{C}\}$ con las operaciones habituales de adición y multiplicación por escalares. ¿ \mathcal{S} es un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{R} ? ¿ \mathcal{S} es un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{C} ?

III) Determinar si \mathcal{W} es un subespacio de \mathcal{V} .

a) $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{W} = \{(a, -a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

b) $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{W} = \{(a, b, |a|) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

c) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

d) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, \mathcal{W} es el conjunto de matrices diagonales de $n \times n$.

e) $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : AB = BA\}$, donde B es una matriz (fija) dada.

f) $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 : a + b + c = 0\}$.

g) $\mathcal{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 : abc = 0\}$.

h) $\mathcal{V} = \mathcal{F}$, $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = f(x)\}$.

i) $\mathcal{V} = \mathcal{F}$, $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{F} : f(-x) = -f(x)\}$.

IV) Sean $\mathcal{V} = \mathcal{F}$, $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{V} : f \text{ es continua}\}$ y $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{V} : f \text{ es derivable}\}$

a) Mostrar que \mathcal{C} es un subespacio vectorial de \mathcal{V}

b) Mostrar que \mathcal{D} es un subespacio vectorial de \mathcal{V}

v) Sean $\mathcal{V} = \mathcal{D}$ y $\mathcal{W} = \{f \in \mathcal{D} : f'(x) \geq 0 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}\}$. ¿ \mathcal{W} es un subespacio vectorial de \mathcal{V} ?

vi) Sea \mathcal{V} un espacio vectorial con subespacios \mathcal{U} y \mathcal{W} . Demuestre que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ es un subespacio de \mathcal{V} .

Puebla, Pue., a 24 de agosto de 2014