



MEMOIRS

Third International Conference on Mathematics and its Applications

Puebla, 2016

Índice general

1. Two-dimensional perturbed stable systems	7
1.1. Robust stability under the action of permanent perturbation	7
1.2. Problems	8
1.3. Results	14
2. Una modificación del método de descomposición de Adomian	19
2.1. Introducción	19
2.2. El Método de Descomposición de Adomian	20
2.3. Una Modificación del Método de Descomposición de Adomian	22
2.4. Ejemplos	23
2.5. Conclusiones	27
3. EL PENSAMIENTO CRÍTICO DE LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA HACIA UN PROBLEMA MAL PLANTEADO: ¿QUÉ TANTO INFLUYE LA “AUTORIDAD” DEL SUPUESTO AUTOR?	31
3.1. Planteamiento del Problema	31
3.2. Marco Teórico	32
3.3. Método	33
3.3.1. Instrumentos	33
3.3.2. Población	34
3.3.3. Procedimiento	34
3.4. RESULTADOS	34
3.4.1. La primera fase	34
3.4.2. La segunda fase	35
3.4.3. La tercera fase	35
3.5. CONCLUSIONES	35
4. LOS EFECTOS INICIALES DE LA ENSEÑANZA EN LAS CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LAS MATEMÁTICAS	39
4.1. Resumen	39
4.2. Introducción	39
4.3. MARCO TEÓRICO	40
4.4. Método	43
4.4.1. Población	43
4.4.2. Instrumento	44
4.4.3. Propuesta de intervención	44

4.5.	ANÁLISIS DE RESULTADOS INICIALES	44
4.5.1.	CUESTIONARIO DE CREENCIAS	44
4.6.	ALGUNAS OBSERVACIONES	50
4.7.	CONCLUSIONES	51
4.8.	Referencias	51
5.	ESTRATEGIAS QUE LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA UTILIZAN PARA RESOLVER UN PROBLEMA HISTÓRICO DE MATEMÁTICAS	53
5.1.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	54
5.2.	MARCO TEÓRICO	54
5.3.	MÉTODO	55
5.3.1.	Solución experta del problema	56
5.3.2.	Instrumentos	57
5.3.3.	Población	58
5.3.4.	Procedimiento	58
5.4.	RESULTADOS	59
5.4.1.	Fase 1. Prueba piloto	59
5.4.2.	Fase 2. Aplicación	59
5.5.	CONCLUSIONES	60
6.	DINÁMICA DE LA CULTURA	65
6.1.	Justificación	65
6.2.	Hipótesis	65
6.3.	Dinámica de la Cultura (Definiciones)	65
6.3.1.	Sujeto Antrópico o Sujeto	65
6.3.2.	Objeto Antrópico	66
6.3.3.	Antropía de un Objeto	66
6.3.4.	Cognopía	67
6.3.5.	Energía	68
6.3.6.	Sistema Antrópico	68
6.3.7.	Antropía, Cognopía y Energía del Sistema	68
6.3.8.	Relaciones entre los Conceptos	68
6.4.	Planteamiento del Problema y Modelación	69
6.5.	Dinámica de una Cultura Particular: Depredadores Simples	74
6.5.1.	Depredadores Simples con Conducta Rígida	75
6.5.2.	Depredadores Simples con Capacidades Básicas de Adaptación	75
6.5.3.	Interacción entre dos Subgrupos de una Cultura	76
6.6.	CONCLUSIONES Y PREGUNTAS ABIERTAS	78
7.	Número cromático de algunas gráficas tipo Kneser	81
7.1.	Introducción	81
7.2.	Definiciones y resultados auxiliares	82
7.2.1.	Notación	84
7.3.	Demostración de la Proposición 10	89

8. La competencia formal de los profesores de matemáticas y la producción de sentido en educación básica	99
9. Assessing environmental and social factors to predict Dengue incidence risk	111
9.1. Introducción	111
9.2. Estudio de los efectos ambientales y sociales en la incidencia de Dengue .	113
9.2.1. Datos de estudio	113
9.2.2. Efecto de temperatura en la incidencia de Dengue en Baja California Sur	113
9.2.3. Efecto de la precipitación en la incidencia de Dengue en Baja California Sur	115
9.2.4. Retardo en la aparición de brotes epidemiológicos	116
9.2.5. Efecto de la temperatura y precipitación en la incidencia de Dengue en México	116
9.3. Inclusión de factores sociales en un modelo de regresión lineal múltiple de incidencia de Dengue	118
9.3.1. Análisis de componentes principales	120
9.3.2. Cálculo de los estimadores de mínimos cuadrados para el MRLM para México	120
9.3.3. Prueba de mejor ajuste entre modelo lineal y cuadrático	121
9.4. Conclusiones	122
10. Modelación bayesiana de Memoria de Trabajo y Control Inhibitorio	127
10.1. Introducción	127
10.2. Materiales y métodos	128
10.2.1. Muestra	128
10.2.2. Condiciones experimentales	128
10.2.3. Orden de realización de los bloques experimentales	128
10.2.4. Procesamiento de datos	129
10.2.5. Cómputo de respuestas correctas en los bloques experimentales . .	129
10.2.6. Modelación probabilística	130
10.2.7. Inferencia bayesiana	131
10.3. Resultados	132
10.4. Discusión	135

1 Two-dimensional perturbed stable systems

Konovalenko Iryna
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Coauthor(s): Alexandrov Vladimir

In present work a possibility of extending the concept of “rough dynamical system” by acting of the permanent perturbation defined up to a functional set will be considered. Constructivity of expansion achieved by the construction of limit cycles, giving the estimation of the attainability set for oscillating systems. A new problem of transition in a bistable system that possesses two attractors will be discussed.

1.1. Robust stability under the action of permanent perturbation

Let y^0 be the point attractor, $f(y^0, 0) = 0$ ($y^0 \in \text{int}(G), \phi^0(y^0) = 0$). We introduce the displacement $x = y - y^0$ and obtain a nonlinear equation in displacements with functional inclusion:

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi^0(y^0 + x) + \phi^1(y^0 + x)v_1(t) \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (1.1)$$

where $\phi^0(0, y^0) = 0$. For brevity the notation y^0 will be omitted. Definition of robust stability of the unperturbed state $x \equiv 0$ of the system (1) (under $x(0) = 0$ and $v(t) \equiv 0$) was obtained by Duboshin and Malkin in the 40th years of XX century.

Definition. Unperturbed ($x(0) = 0, v_1(t) \equiv 0$) state $x(t) \equiv 0$ of the system (1) is called robustly stable at initial $x(0)$ and permanent $v_1(t)$ perturbations, if, for any $\epsilon > 0$ exist $\delta_0 = \delta_0(\epsilon) > 0$ and $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$, such that the following condition holds:

if $\|x(0)\| \leq \delta_0$ and $|v_1(t)| \leq \delta_1$ for $t \geq 0$, then $\|x(t)\| \leq \epsilon$ for $\forall t \geq 0$.

1 Two-dimensional perturbed stable systems

Let us consider according to (1) a mathematical model:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + A_1 v_1(t))x + b v_1(t), \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (1.2)$$

where $A_0 = \frac{\partial \phi^0(0)}{\partial x}$, $A_1 = \frac{\partial \phi^1(0)}{\partial x}$, $b = \phi^1(0)$.

If $\phi^1(0) = 0$, we obtain a homogeneous system in the displacements with functional inclusion:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(v_1(t))x, \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (1.3)$$

where $A(v_1) = A_0 + A_1 v_1$.

In this particular case robust stability can be considered as an absolute stability. Despite the system (3) is behave as a linear system, it is a set of linear systems with parametric perturbation $v_1(t) \in V$.

Whene $\phi^1(0) \neq 0$ and the maximal characteristic Lyapunov's exponent of the system (3) exist and it is negative, we have bilinear variant of (2), where matrix $A(v_1)$ is Hurwitz for any permanent $v_1 \in [-\delta_1, \delta_1]$. Let $x(0) = 0$, then the solution of the system (2) can be represented as a Cauchy integral:

$$\begin{cases} x(t_1) = \int_0^{t_1} X_v(t_1) X_v^{-1}(t) b v_1(t) dt; \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (1.4)$$

where $X_v(t_1)$ is normalized fundamental ($X_v(0) = E_2$) matrix, which is corresponding perturbation $v_1(\cdot) \in V$ and every element $x_{ij}(t_1, v(\cdot))$ of the matrix is a functional defined on the set of functions $v_1(t)$, $t \in [0, t_1]$.

If the Cauchy integral for $t_1 \rightarrow \infty$ exists, it makes sense to introduce the set of attainability D_∞ of the perturbed system (2) for $t_1 \rightarrow \infty$ as a set of points $\cup_{0 \leq t_1 < \infty} D_{t_1}$ [3] with the addition of partial limits:

$$\begin{cases} x(v_1(\cdot)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{t_k} X_v(t_k) X_v^{-1}(t) b v_1(t) dt, \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Below three specific problems will be shown as the examples of this situation.

1.2. Problems

Let us consider the model of mathematical pendulum with movement of the support point on an inclined line. The support point lies in the origin of Cartesian system. Here l - length of string, m - mass of the bob, g - is acceleration due to gravity, ϕ - angle of y -axis displacement, $\alpha = \text{const}$ - angle of x -axis displacement. Coordinates of the support point can be described by next equations:

$$x_1 = z_1(t) \cos \alpha,$$

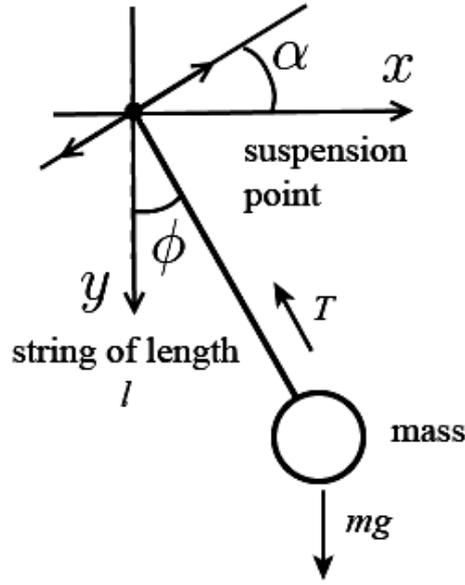


Figura 1.1: Mathematical pendulum

$$y_1 = z_1(t) \sin \alpha.$$

The expressions corresponding to the pendulum movement are:

$$x = l \sin \phi + z_1(t) \cos \alpha,$$

$$y = z_1(t) \sin \alpha - l \cos \phi.$$

Derivation of pendulum's movement equation is based on the Lagrange function L approach:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\phi}^2 l^2 + m \dot{\phi} l \dot{z}_1(t) (\cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha) + \frac{m}{2} \dot{z}_1^2(t) - mg z_1(t) \sin \alpha + mgl \cos \phi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = ml^2 \ddot{\phi} + ml \sin \phi (g + \ddot{z}_1(t) \sin \alpha) + ml \cos \phi \ddot{z}_1(t) \cos \alpha = 0$$

If the amplitude of angular displacement is small enough that the small angle approximation ($\sin \phi \equiv \phi$) holds true, then the equation of motion reduces to the next equation:

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g + \ddot{z}_1(t) \sin \alpha}{l} \right) \phi = -\frac{\cos \alpha}{l} \ddot{z}_1(t).$$

Let us consider the perturbed stable system corresponds to small oscillations of this mathematical pendulum, presented in dimensionless form:

$$\begin{cases} x_1'' + 2\mu_1 x_1' + (1 + av_1(\tau))x_1 = bv_1(\tau); \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(\tau)| \leq \delta_1 < 1\}, \end{cases} \quad (1.6)$$

1 Two-dimensional perturbed stable systems

Here v_1 is a limited acceleration, known up to a functional set V ; $a = \{0, 1\}$, $b = \{0, 1\}$ – coefficients of presence of parametric and additive perturbations in the system; $0 < \mu < \sqrt{1 - a\delta_1}$.

For any permanent $v_1(t) \equiv \text{const} \in [-\delta_1, \delta_1]$ homogeneous subsystem is oscillating.

Problem 1. Let $a = 1$, $b = 0$, then the system (6) becomes

$$x_1'' + 2\mu x_1' + (1 + v_1(\tau))x_1 = 0. \quad (1.7)$$

In this case, a necessary and sufficient condition for absolute stability can be written as follows [4]:

$$\ln \sqrt{k_1} < \phi_1(k_1, \beta)$$

or in the form of inequality:

$$\mu > \sqrt{\frac{1 - \delta_1}{\beta_0}}. \quad (1.8)$$

Here $k_1 = \frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$, $\beta = \frac{1-\delta_1}{\mu^2}$, $\phi_1(k_1, \beta) = \frac{\pi - \arctg \sqrt{k_1\beta-1}}{\sqrt{k_1\beta-1}} + \frac{\arctg \sqrt{\beta-1}}{\sqrt{\beta-1}}$, where β_0 – the only root of the transcendental equation (Figure 1):

$$\phi_1(k_1, \beta) = \ln \sqrt{k_1} \quad (1.9)$$

for $1 < \beta < \infty$.

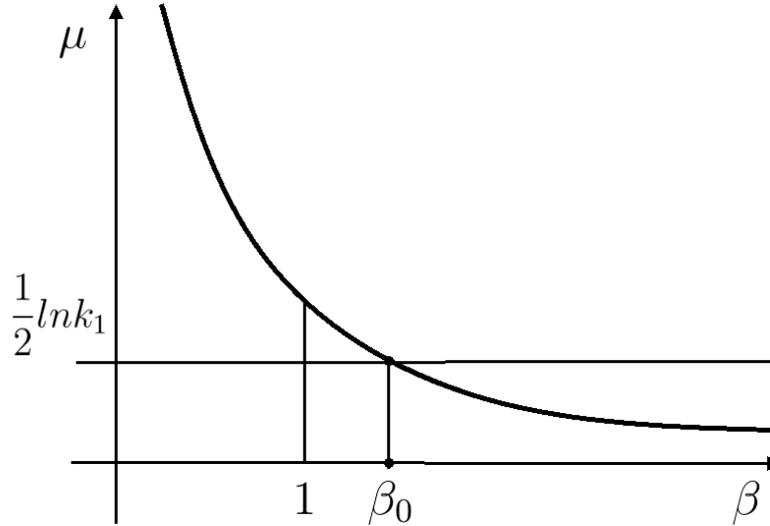


Figure 1.2: Solution of the equation (9)

The result was obtained by finding the worst parametric perturbation from considered functional set. It was done by solving the problem of the maximal displacement of "half-period" perturbation of absolutely perturbed system [4] employing Pontryagin's maximum principle.

Example 1. For $\delta_1 = 0, 1$ to fulfill the conditions of absolute stability of the system it is necessary and sufficient, that $\mu > 0,032$. Or if $0 < \mu \leq 0,032$ system (7) is not absolutely stable.

Problem 2. If $a = 0$, $b = 1$, then the system (6) can be redefine as

$$x_1'' + 2\mu x_1' + x_1 = v_1(\tau). \quad (1.10)$$

In this case, the asymptotic Lyapunov's stability is not possible due to the presence of the additive perturbation. Can be applied corollary of Malkin's Theorem [2], that claims: stationary imperturbable state $x_1 \equiv 0$ is robustly stable for permanent perturbations, if the matrix A_0 is a Hurwitz matrix. The system (6) in this case has the form (2), where $A_1 = 0$ and A_0 is a Hurwitz matrix ($\text{Re}\lambda = \alpha < 0$).

The exact quality's estimation of robust stability can be obtained by constructing global orbitally stable limit cycle and describing the attainability's set (4, 5) D_∞ (for $\tau_1 \rightarrow \infty$). To achieve that the solution of the problem of the maximum displacement on the " half-periods " of vibrations by x_1 will be purposed [5] and a limit cycle will be constructed. Finding the limit of the contraction mappings of Poincaré (when Poincaré section is the axis of x_1 in the phase plane) gives the amplitude of oscillation corresponding to the limit cycle. Thus, the set of points inside the cycle and the set of points on the cycle orbit is attainability set D_∞ (4, 5).

In the case, when the dependence $\epsilon = \epsilon(\delta_1)$ is known, the concept of quality of robust stability under permanent perturbations can be clarified:

$$\chi = \sup_{0 < \delta_1 < \delta_1^*} \frac{\epsilon(\delta_1)}{\delta_1} \quad (1.11)$$

where

$$\epsilon = \max_{0 \leq \tau \leq \tau_1} \|x(\tau, v_1^0(\tau))\| = \max_{0 \leq \tau \leq \tau_1} \max_{1 \leq i \leq 2} \{|x_i(\tau, v_1^0(\tau))|\};$$

$$v_1^0(\tau) = \delta_1 \text{sign} x_1'(\tau);$$

τ_1 – period of movement on the cycle orbit; δ_1^* determined from the statement and solution of the problem. In this case $\delta_1^* = 1$ and

$$\chi = \frac{(1 + e^{-\frac{\mu\pi}{\sqrt{1-\mu^2}}})}{(1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\sqrt{1-\mu^2}}})}. \quad (1.12)$$

Example 2. If $\mu = 0,1$ then quality of robust stability takes the value $\chi = 6,39$, if $\mu = 0,5$ then $\chi = 1,39$, if $\mu = 0,99$ then $\chi = 1,00$, that is, the increasing of dissipation gives rise to quality.

Making the synthesis of the worst perturbation ($v_1^0(\tau) = \delta_1 \text{sign} \psi_2 = \delta_1 \text{sign} x_1'$), we obtain for every $\mu \in (0, \sqrt{1 - \delta_1})$ autonomous self-oscillating linear system [7]

$$x_1'' + 2\mu x_1' + x_1 = \delta_1 \text{sign} x_1', \quad (1.13)$$

which is a rough (stable) system.

1 Two-dimensional perturbed stable systems

Problem 3. Let $a = b = 1$, then we will consider the general case

$$\begin{cases} x_1'' + 2\mu x_1' + (1 + v_1(\tau))x_1 = v_1(\tau), \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(\tau)| \leq \delta_1 < 1\}, \end{cases} \quad (1.14)$$

where $\delta_1 \equiv \text{const} \in (0, 1)$, $\mu \equiv \text{const} \in (0, \sqrt{1 - \delta_1})$.

For every constant v_1 system is perturbed. On the plane of parameters (δ_1, μ) of the system (5) there is an open area S (Figure 2), where each point corresponds to the perturbed stable system. We construct a curve corresponding to the inequality (8):

$$\mu = \sqrt{\frac{1 - \delta_1}{\beta_0}}. \quad (1.15)$$

There is an open subset $S_1 \cup S_2 \subset S$, where each point corresponds to the perturbed

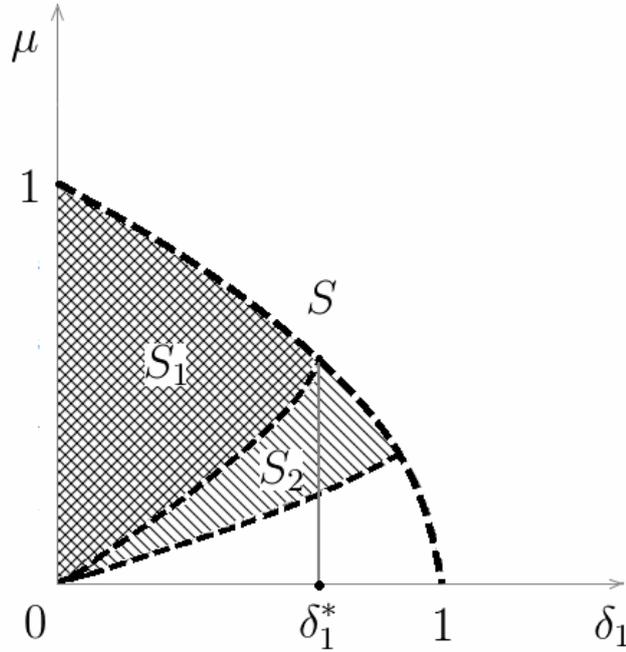


Figure 1.3: The regions of absolute stability of the system (7) and the robust stability of the system (14)

homogeneous stable subsystem (7), having one singular point $x_1 = x_1' = 0$, which is absolutely stable. The values δ_1 corresponding the next inequality will be used:

$$\delta_1 < \frac{1 - A(\mu, \delta_1) \cdot B(\mu, \delta_1)}{1 + 2B(\mu, \delta_1) + A(\mu, \delta_1) \cdot B(\mu, \delta_1)}, \quad (1.16)$$

where $A(\mu, \delta_1) = \exp\left(\frac{-\pi\mu}{\sqrt{1-\delta_1-\mu^2}}\right)$, $B(\mu, \delta_1) = \exp\left(\frac{-\pi\mu}{\sqrt{1+\delta_1-\mu^2}}\right)$.

Figure 3 shows open area S_1 , corresponding the inequality (16), doubly hatched, and area $\{S \setminus (S_1 \cup S_2)\}$ not hatched.

As a result, the general solution of (14)

$$x(\tau_1) = X_v(\tau_1)x(0) + \int_0^{\tau_1} X_v(\tau_1)X_v^{-1}(t)v_1(t)dt = \tilde{x}(\tau_1, v_1(\cdot)) + \tilde{\tilde{x}}(\tau_1, v_1(\cdot))$$

follows that the trivial solution of the homogeneous sub-system is absolutely stable under $(\delta_1, \mu) \in S_1 \cup S_2$. For the second component $\tilde{\tilde{x}}(\tau_1, v_1(\cdot))$ the set of attainability D_∞ (4, 5) will be constructed.

Solving the problem of the maximal displacement [8]: initial 'half period' $(0, t_0)$ $\{x_1(0) = \alpha_0 \in [0, 1), x_2(0) = 0, x_2(t) \neq 0, t \in (0, t_0), x_2(t_0) = 0\}$, which corresponds $k = 0$; second 'half period' (t_0, t_1) $\{x_1(t_0) = -\beta_0 = \min x_1(t_0), x_2(t_0) = 0, x_2(t) \neq 0, t \in (t_0, t_1), x_2(t_1) = 0\}$, which corresponds $k = 1$ and for $k = 2, 3, \dots$, we obtain the following discrete system (17), corresponding to the contraction mapping of Poincaré:

$$\begin{aligned} \beta_k &= A(\mu, \delta_1)\alpha_k + \frac{1+A(\mu, \delta_1)}{1-\delta_1} \cdot \delta_1, \\ \alpha_{k+1} &= B(\mu, \delta_1)\beta_k + \frac{1+B(\mu, \delta_1)}{1+\delta_1} \cdot \delta_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

As a result, there are two limits β^* and α^* ($\beta^* < \alpha^*$):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k &= \alpha^* = \frac{\delta_1}{1-A \cdot B} \left(\frac{(1+A)B}{1-\delta_1} + \frac{1+B}{1+\delta_1} \right), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k &= \beta^* = \frac{\delta_1}{1-A \cdot B} \left(\frac{1+A}{1-\delta_1} + \frac{(1+B)A}{1+\delta_1} \right), \end{aligned}$$

where $-\beta^* < 0 < \alpha^* < 1$, $\beta^* < \alpha^*$, and the global orbitally stable limit cycle [8], in contrast to the problem 2 is located not symmetrically with respect to axis x_2 . Here dependence A and B from μ and δ_1 omitted for brevity.

In the case of the worst perturbation synthesis $v_1^0 = \text{sign}(x_1')$ system (14) takes the form:

$$x_1'' + (2\mu x_1' - \delta_1 \text{sign}(x_1')) + (1 + \delta_1 \text{sign}(x_1'))x_1 = 0. \quad (1.18)$$

By $\delta_1 \in (0, \delta_1^*)$ (Figure 2) expression for $\max_{0 \leq \tau \leq \tau_1(\delta_1)} \|x(\tau, v_1(\cdot))\| = \max_{1 \leq i \leq 2} \{|x_i(\tau, v_1^0(\cdot))|\}$ was obtained analytically, which is not improving estimation D_∞ :

$$\|x(\tau, v_1(\cdot))\| \leq \frac{\delta_1 \left(1 + \frac{1+\delta_1}{1-AB} \left[\frac{1+A}{1-\delta_1} + \frac{(1+B)A}{1+\delta_1} \right] \right)}{\sqrt{1+\delta_1}} \cdot e^{-\frac{\mu}{\sqrt{1+\delta_1-\mu^2}} \cdot \text{arctg} \frac{\sqrt{1+\delta_1-\mu^2}}{\mu}} \quad (1.19)$$

Here $\tau_1(\delta_1)$ – the period of limit cycle and $\{x_1(\tau, v_1^0), x_2(\tau, v_1^0)\}$ – points located on it's orbit (18). For small δ_1 there is the following estimation of the quality of robust stability:

$$\chi = \left(1 + \frac{1 + e^{-\frac{\pi\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}}}{1 - e^{-\frac{\pi\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}}} \right) \cdot e^{-\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \text{arctg} \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}}. \quad (1.20)$$

The following statement holds for the system (14). Let us consider the perturbed stable oscillating system (14) with parameters μ, δ_1 , belonging to the open area S (Figure 2).

Theorem. For robust stability of unperturbed state $x_1(t) \equiv 0$ is necessary to satisfy conditions $(\mu, \delta_1) \in S_1 \cup S_2$, i. e. the absolute stability of subsystem (7) is required.

If $(\mu, \delta_1) \in S_1$, then the system (14) is robustly stable with the estimation of quality χ (20). Not improving estimate of the attainability set D_∞ can be find by the maximal norm (Figure 3):

$$\max_{0 \leq \tau \leq \tau_1(\delta_1^*)} \|x(\tau, v_1^0(\tau))\| = 2.$$

We can say that this statement is similar to the corollary to Malkin's Theorem [2].

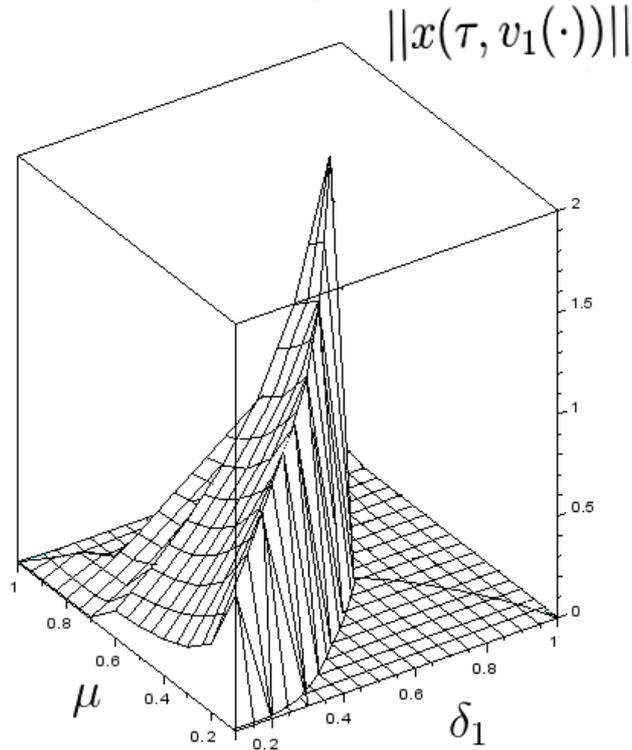


Figura 1.4: Estimation of attainability's set of the system (14)

Example 3. For $\delta_1 \in (0, \delta_1^*)$ the estimate of the attainability set (19) is shown on the Figure 3. For small δ_1 (20) there is next estimate of the quality of robust stability: $\chi = 6,37$ if $\mu = 0,1$, $\chi = 1,31$ if $\mu = 0,5$, $\chi = 0,74$ if $\mu = 0,99$.

1.3. Results

Bilinear system (18) and a system (14) can be considered as a rough bilinear systems when $(\mu, \delta_1) \in S_1$. Synthesis of systems (10), (14), (18) was done by solving the

Bulgakov's problem of maximal displacement at the moment of arrival of the perturbed system on a given manifold $x_1'(t_1) = 0$ [9].

In the perturbed system (14) (under $v_1(t) \equiv \text{const}$), unlike the unperturbed system (under $v_1(t) \equiv 0$), there is a rest interval $\{x_1 = \frac{v_1}{1+v_1}; v_1 \in [-\delta_1, 0) \cup (0, \delta_1]; \delta_1 \in (0, \delta_1^*)\}$, which contains an infinite number of singular points. Thus, the extension of the concept of rough dynamical systems under the presence of permanent perturbations can be useful for research into the mechanics of controlled systems.

Bibliografía

- [1] Leonid P. Shilnikov, Andrey L. Shilnikov, Dmitry V. Turaev, Leon O. Chua: Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part. 2. 2009, M. ISBN: 978-981-02-4072-1
- [2] Lev Elsgolts: Differential Equations and the Calculus of Variations. University Press of the Pacific, 2003, 444 p. ISBN: 978-141-02-1067-8
- [3] B. T. Polyak and P. S. Shcherbakov, Robust Stability and Control (Nauka, Moscow, 2002) [in Russian].
- [4] V. Alexandrov, V. Boltiansky, S. Lemak, N. Parusnikov, V. Tijomirov: Optimal Control of Motion - M.: FIZMATLIT, 2005.
- [5] V. N. Germolenko: Limit cycles in the phase plane. Digest " The problem of the maximum deviation of Bulgakov and its application " by V.V. Alexandrov. Moscow State University. 1993.
- [6] V. V. Aleksandrov, M. Reyes-Romero, G. Yu. Sidorenko, R. Temoltzi-Auila: Stability of controlled inverted pendulum under permanent horizontal perturbations of the supporting point. //al. Mech. Solids (2010) 45: 187. doi:10.3103/S0025654410020044
- [7] A. A. Andronov, A. A. Vitt and S. E. Khaikin: Theory of Oscillators. M.: FIZMATLIT, 1959. ISBN: 978-1-4831-6724-4
- [8] V. V. Aleksandrov, O. V. Aleksandrova, I. P. Prikhod'ko and R. Temoltzi-Avila, Synthesis of Self-Oscillations, Moscow University Mechanics Bulletin, Vol. 62, No. 3, pp. 65-68, 2007.
- [9] V. V. Aleksandrov, "On the Accumulation of Perturbations in Linear Systems in Two coordinates," Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1: Mat. Mekh., No. 3, 67-76 (1968).

2 Una Modificación del Método de Descomposición de Adomian para la Solución de Ecuaciones Diferenciales no Lineales

Oswaldo González-Gaxiola¹, José A. Santiago-García²
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas; UAM-Cuajimalpa^{1,2}
Cuajimalpa, Ciudad de México

En el presente trabajo proponemos una modificación del método estándar de descomposición de Adomian (ADM); además analizaremos su convergencia aplicando los resultados para obtener la solución de algunos problemas de aplicación, los cuales son modelados por medio de ecuaciones diferenciales no lineales.

2.1. Introducción

La mayor parte de los fenómenos que surgen en el mundo real son descritos por ecuaciones diferenciales no lineales (tanto ordinarias como parciales) y en algunos casos por ecuaciones integrales. Sin embargo, la mayoría de los métodos desarrollados hasta ahora en matemáticas se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales lineales. En la década de los 80, George Adomian introdujo un nuevo método para resolver ecuaciones diferenciales no lineales, tanto parciales como ordinarias. Este método ha sido denominado como el método de descomposición de Adomian (ADM) y ha sido el tema de muchas investigaciones en el campo de las matemáticas y sus aplicaciones [1], [2], [8] y [9]. ADM implica la separación de la ecuación bajo estudio en su parte lineal y no lineal y a través de la descomposición que se expondrá en la siguiente sección genera una solución en forma de una serie cuyos términos son determinados por una relación recursiva utilizando los polinomios Adomian.

El método de descomposición de Adomian (ADM) tiene la ventaja de que converge a la solución exacta en una gran mayoría de casos muy importantes en las aplicaciones y se puede manejar de manera fácil para una amplia clase de ecuaciones diferenciales tanto lineales como no lineales. Existen varios trabajos cuyo objetivo de estudio es hacer alguna mejora al método; algunos trabajos fundamentales sobre diversos aspectos de las modificaciones del método de descomposición de Adomian se pueden ver en [3], [4], [5] y [6]. En el presente trabajo proponemos una modificación de la versión estándar de

ADM para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales no lineal que surge en las aplicaciones.

2.2. El Método de Descomposición de Adomian

El método de Descomposición de Adomian (ADM) en la versión estándar permite encontrar una solución analítica en forma de serie [8] y éste consiste en identificar en la ecuación dada las partes lineal y no lineal, para luego invertir el operador diferencial de mayor orden que se encuentre en la parte lineal y después considerar la función por conocer como una serie cuyos sumandos, por el presente método quedarán bien determinados, en seguida se descompone la parte no lineal en términos de los polinomios de Adomian [9]. Definimos las condiciones iniciales y/o de frontera y los términos que involucran a la variable independiente como aproximación inicial. Así, se encuentran de manera sucesiva los términos de la serie que nos da la solución del problema estableciéndose una relación recursiva.

En general, el método a seguir es el siguiente: dada una ecuación diferencial ya sea ordinaria o parcial:

$$Fu(x, t) = g(x, t) \quad (2.1)$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2.2)$$

donde F representa un operador diferencial (en general, no lineal) que envuelve tanto términos lineales como no lineales y entonces la ecuación (2.1) puede escribirse como

$$L_t u(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t) \quad (2.3)$$

donde $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, R es un operador lineal que involucra derivadas parciales con respecto a x y N es un operador no lineal; g es un término no homogéneo independiente de u .

Despejando $L_t u(x, t)$,

$$L_t u(x, t) = g(x, t) - Ru(x, t) - Nu(x, t) \quad (2.4)$$

Como L es invertible, operando en (2.4) con el inverso $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ tenemos que,

$$L_t^{-1} L_t u(x, t) = L_t^{-1} g(x, t) - L_t^{-1} Ru(x, t) - L_t^{-1} Nu(x, t) \quad (2.5)$$

luego, una expresión equivalente a (2.5) es

$$u(x, t) = f(x) + L_t^{-1} g(x, t) - L_t^{-1} Ru(x, t) - L_t^{-1} Nu(x, t) \quad (2.6)$$

donde $f(x)$ es la constante de integración (con respecto a t) que satisface $L_t f = 0$. Para problemas con valor inicial en $t = t_0$, tendríamos convenientemente definido L^{-1} para $L = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$ como la integral n -veces iterada definida de t_0 a t .

El método (ADM) asume la solución de (2.1), (2.2) en forma de serie para la función desconocida $u(x, t)$ dada por,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.7)$$

El término no lineal $Nu(x, t)$ por medio de ADM se descompone como

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (2.8)$$

donde la sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, es la llamada sucesión de polinomios de Adomian y son dados por la fórmula

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} [N(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)]|_{\alpha=0}. \quad (2.9)$$

En [7] podemos ver que el cálculo explícito de cada uno de los A_n es realmente sencillo y se tiene:

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) \\ A_1(u_0, u_1) &= N'(u_0)u_1 \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= N'(u_0)u_2 + \frac{u_1^2}{2!}N''(u_0) \\ A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= N'(u_0)u_3 + N''(u_0)u_1u_2 + \frac{u_1^3}{3!}N'''(u_0) \\ A_3(u_0, \dots, u_4) &= u_4N'(u_0) + (\frac{1}{2!}u_2^2 + u_1u_3)N''(u_0) + \frac{u_1^2u_2}{2!}N'''(u_0) + \frac{u_1^4}{4!}N^{(iv)}(u_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo (2.7), (2.8) y (2.9) en la ecuación (2.6) obtenemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = f(x) + L_t^{-1}g(x, t) - L_t^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) - L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad (2.10)$$

de donde obtenemos el algoritmo recursivo

$$\begin{cases} u_0(x, t) = f(x) + L_t^{-1}g(x, t), \\ u_{n+1}(x, t) = L_t^{-1}Ru_n(x, t) - L_t^{-1}A_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.11)$$

Con el algoritmo recursivo establecido en la ecuación (2.11) podemos tener un aproximación a la solución de (2.1), (2.2) por medio de la serie

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k u_n(x, t), \quad \text{donde} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = u(x, t) \quad (2.12)$$

La descomposición de la solución en serie, generalmente converge muy rápido. La rapidez de esta convergencia hace que se necesiten pocos términos para el análisis de la solución. Las condiciones para las cuales el método converge han sido estudiadas en los trabajos [10], [11], [12] y [13] principalmente.

2.3. Una Modificación del Método de Descomposición de Adomian

Vamos a considerar el problema de valor inicial dado por la ecuación diferencial ordinaria (en general no lineal) de tercer orden de la forma

$$\begin{cases} y''' = p(x)y'' + N(x, y) + g(x), \\ y(0) = \alpha, y'(0) = \beta, y''(0) = \gamma. \end{cases} \quad (2.13)$$

Donde p y g son funciones integrables y α , β y γ son constantes arbitrarias dadas. Nosotros proponemos al operador diferencial L como:

$$L = e^{\int p(x)dx} \cdot \frac{d}{dx} \left(e^{-\int p(x)dx} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \right), \quad (2.14)$$

por lo tanto el operador inverso L^{-1} resulta ser

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \left(e^{\int p(x)dx} \cdot \left(\int_0^x e^{-\int p(x)dx} (\cdot) dx \right) dx dx. \quad (2.15)$$

Así, (2.13) puede escribirse como

$$Ly = N(x, y) + g(x), \quad (2.16)$$

aplicando L^{-1} a ambos lados de (2.16) obtenemos

$$y(x) = \Psi(x) + L^{-1}g(x) + L^{-1}N(x, y), \quad (2.17)$$

Ψ es tal que $L\Psi(x) = 0$.

Por ADM estándar tenemos que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \quad (2.18)$$

y

$$N(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n). \quad (2.19)$$

Ahora, sustituyendo (2.18) y (2.19) en (2.17), además considerando (2.11) tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \Psi(x) + L^{-1}g(x) + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, \dots, u_n). \quad (2.20)$$

De la relación anterior (2.20), identificando primero y_0 como $\Psi + L^{-1}g(x)$ podemos obtener las componentes restantes para así obtener:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \Psi + L^{-1}g(x), \\ y_1(x) &= L^{-1}A_0(u_0), \\ y_2(x) &= L^{-1}A_1(u_0, u_1), \\ &\vdots \\ y_{n+1}(x) &= L^{-1}A_n(u_0, \dots, u_n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Con la obtención de la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ la solución $y(x)$ del problema (2.13) queda completamente determinada. Para aproximaciones numéricas, el m -ésima suma parcial

$$S_m = \sum_{n=0}^m y_n(x) \quad (2.21)$$

puede ser usada para aproximar a la solución exacta. En algunos casos la convergencia de la serie es inmediata, pues (2.18) resulta ser una serie que representa a una función conocida.

2.4. Ejemplos

En esta sección, para ilustrar la capacidad, la fiabilidad y la sencillez del método, vamos a resolver un par de ejemplos con los cuales se ilustrará que la modificación de ADM propuesta puede ser usada para resolver tanto problemas singulares como no singulares y tanto lineales como no lineales.

Ejemplo 1 Consideremos el problema de valor inicial no lineal dado por la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden

$$\begin{cases} y''' - xy'' + x^2y^2 = x \operatorname{sen} x - \cos x + x^2 \operatorname{sen}^2 x, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Solución. A través de ADM estándar: Hacemos

$$L(\cdot) = \frac{d^3}{dx^3}(\cdot),$$

por lo tanto

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx dx.$$

Luego podemos escribir (2.22) en términos de L como

$$Ly = xy'' - x^2y^2 + x\text{sen}x - \text{cos}x + x^2\text{sen}^2x, \quad (2.23)$$

ahora, aplicando L^{-1} a ambos lados de (2.23) se obtiene

$$y = y(0) + y'(0)x + y''(0)x^2 + L^{-1}(xy'') - L^{-1}(x^2y^2) + L^{-1}(x\text{sen}x - \text{cos}x + x^2\text{sen}^2x).$$

De donde suponiendo (2.18), obtenemos la relación recursiva

$$\begin{cases} y_0 = x + L^{-1}(x\text{sen}x - \text{cos}x + x^2\text{sen}^2x), \\ y_{n+1}(x) = L^{-1}(xy_n'') - L^{-1}(A_n), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Los polinomios de Adomian correspondientes al término no lineal $N(x, y) = x^2y^2$ resultan ser

$$\begin{aligned} A_0 &= x^2y_0^2, \\ A_1 &= x^2(2y_0y_1), \\ A_2 &= x^2(2y_0y_2 + y_1^2), \\ A_3 &= x^2(2y_0y_3 + 2y_1y_2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (2.24), tenemos

$$\begin{aligned} y_0 &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{19}{5040}x^7 - \frac{233}{362880}x^9, \\ y_0 + y_1 &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^7 + \frac{121}{362880}x^9, \\ y_0 + y_1 + y_2 &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{7}{51840}x^9, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Solución. A través de ADM modificado: Tomando en cuenta que $p(x) = x$, de acuerdo con (2.14) tenemos

$$L(\cdot) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\cdot) \right),$$

y así,

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}} \left(\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}(\cdot) dx \right) dx dx.$$

Ahora, tomando en cuenta que en ADM modificado $g(x) = x\text{sen}x - \text{cos}x + x^2\text{sen}^2x$, tenemos

$$\begin{cases} y_0 = x + L^{-1}(x\text{sen}x - \text{cos}x + x^2\text{sen}^2x), \\ y_{n+1}(x) = -L^{-1}(A_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

donde los polinomios de Adomian A_n para cada $n \geq 0$, son los mismos calculados para la solución del problema usando solamente ADM. Considerando la serie de Taylor para $e^{\frac{x^2}{2}}$ y $e^{-\frac{x^2}{2}}$, es decir

$$e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{384}x^8 + \frac{1}{3840}x^{10} + \frac{1}{46080}x^{12} + O(x^{14})$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{384}x^8 - \frac{1}{3840}x^{10} + \frac{1}{46080}x^{12} + O(x^{14}),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} y_0 &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{23}{5040}x^7 - \frac{19}{72576}x^9, \\ y_0 + y_1 &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9, \\ y_0 + y_1 + y_2 &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la solución exacta es $y = \operatorname{sen}x$, podemos observar comparando con la serie de Taylor de la solución,

$$y = \operatorname{sen}x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + O(x^{12})$$

que la solución obtenida por medio del método de Adomian modificado es un mejor aproximador a la solución del problema (2.22).

Ejemplo 2 Consideremos el problema de valor inicial dado por la ecuación diferencial no lineal ordinaria de segundo orden

$$\begin{cases} y'' = (x-1)y' + y + 2y^3, \\ y(0) = 1, y'(0) = 1. \end{cases} \quad (2.25)$$

Solución. A través de ADM estándar: Hacemos

$$L(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot),$$

por lo tanto

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx.$$

Luego podemos escribir (2.25) en términos de L como

$$Ly = (x-1)y' + y + 2y^3, \quad (2.26)$$

ahora, aplicando L^{-1} a ambos lados de (2.26) se obtiene

$$y = y(0) + y'(0)x + L^{-1}((x-1)y' + y) + 2L^{-1}(y^3).$$

2 Una modificación del método de descomposición de Adomian

De donde suponiendo (2.18), obtenemos la relación recursiva

$$\begin{cases} y_0 = 1 + x, \\ y_{n+1}(x) = L^{-1}((x-1)y'_n + y_n) + 2L^{-1}(A_n), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Los polinomios de Adomian correspondientes al término no lineal $N(x, y) = y^3$ resultan ser

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^3, \\ A_1 &= 3y_0^2y_1, \\ A_2 &= 3y_0^2y_2 + 3y_0y_1^2, \\ A_3 &= 3y_0^2y_3 + 6y_0y_1y_2 + y_1^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (2.27) y los términos de la sucesión de los A_n antes obtenidos, tenemos

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + x, \\ y_0 + y_1 &= 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{10}x^5, \\ y_0 + y_1 + y_2 &= 1 + x + x^2 + \frac{9}{8}x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{76}{60}x^5 + \frac{9}{10}x^6, \\ y_0 + y_1 + y_2 + y_3 &= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{13}{14}x^4 + \frac{244}{240}x^5 + \frac{37}{40}x^6 + \frac{5}{4}x^7, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Solución. A través de ADM modificado: Tomando en cuenta que $p(x) = x-1$, de acuerdo con (2.14) adaptado a éste caso, tenemos

$$L(\cdot) = e^{\frac{x^2}{2}-x} \cdot \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}+x} \cdot \frac{d}{dx}(\cdot) \right),$$

y así,

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x e^{\frac{x^2}{2}-x} \left(\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}+x}(\cdot) dx \right) dx.$$

Ahora, tomando en cuenta lo anterior, tenemos

$$\begin{cases} y_0 = 1 + x, \\ y_{n+1}(x) = 2L^{-1}(A_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

donde los polinomios de Adomian A_n para cada $n \geq 0$, son los mismos calculados para la solución del problema usando ADM estándar.

Entonces usando la relación recursiva (2.28), obtenemos

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 1 + x, \\
 y_0 + y_1 &= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{10}x^5, \\
 y_0 + y_1 + y_2 &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{76}{60}x^5 + \frac{19}{20}x^6, \\
 y_0 + y_1 + y_2 + y_3 &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \frac{37}{40}x^6 + \frac{7}{6}x^7, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la solución exacta de la ecuación diferencial con las condiciones iniciales dadas en (2.25) es $y = \frac{1}{1-x}$, podemos observar comparando con la serie de Taylor de la solución,

$$y = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + O(x^{10})$$

que la solución obtenida por medio del método de Adomian modificado es un mejor aproximador a la solución del problema (2.25).

2.5. Conclusiones

En el presente trabajo hemos expuesto una modificación al método estándar, la modificación consiste en tomar en cuenta un cierto factor integrante involucrado en un operador diferencial invertible que marca la pauta de las derivadas con respecto a la variable independiente; haciendo con ello más sencillo el algoritmo proporcionado por ADM.

También hemos hecho notar a través de ejemplos sencillos que, el método de descomposición Adomian modificado es una poderosa herramienta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Aquí hemos utilizado el método para resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias; en particular, una de tercer orden y otra de segundo orden, los resultados muestran que la tasa de convergencia del método de Adomian con la modificación es más rápido que el método de Adomian estándar. En un trabajo reciente [14] hemos usado una modificación de ADM diferente a la aquí expuesta para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales que surgen de aplicaciones a la física.

Bibliografía

- [1] M. Tatari, M. Dehghan, The use of the Adomian decomposition method for solving multipoint boundary value problems, *The Royal Swedish Academy of Sciences* **73**, 672–676 (2006).
- [2] A. M. Wazwaz, *Partial Differential Equations: Methods and Applications*. Lisse, Netherlands: Balkema Publishers, (2002).
- [3] I. V. Andrianov, V. I. Olevskii, S. Tokarzewski; *A modified Adomian's decomposition method*; *Appl. Math. Mech.*, **62**, 309-314, (1998).
- [4] S. N. Venkatarangan, K. Rajalakshmi; *A modification of Adomian's solution for nonlinear oscillatory systems*; *Comput. Math. Appl.*, **29**, 67-73, (1995).
- [5] S. N. Venkatarangan, K. Rajalakshmi; *Modification of Adomian's decomposition method to solve equations containing radicals*; *Comput. Math. Appl.*, **29**, 75-80, (1995).
- [6] S. A. Khuri; *A Laplace decomposition algorithm applied to class of nonlinear differential equations*; *J. Math. Appl.*, **4**, 141-155, (2001).
- [7] A. M. Wazwaz, A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators; *Appl. Math. and Computation*; **111**, 1, 53-69, (2000).
- [8] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, (1994).
- [9] G. Adomian, A review of the decomposition method in applied mathematics; *J. Math. Anal. Appl.* **135**, Issue 2, 501-544 (1988).
- [10] Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method; *Kybernetes* **18**(2), 31-38 (1989).
- [11] Y. Cherruault, G. Adomian, Decomposition methods: a new proof of convergence; *Math. Comput. Modelling* **18**(12), 103-106 (1993).
- [12] K. Abbaoui, Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method applied to differential equations; *Comput. Math. Appl.* **28**(5), pp. 103-109 (1994).
- [13] K. Abbaoui, Y. Cherruault, New ideas for proving convergence of decomposition methods; *Comput. Math. Appl.* **29**(7), pp. 103-108 (1995).

Bibliografía

- [14] O. González-Gaxiola, J. Ruiz de Chávez, R. Bernal-Jaquez; *Solution of the Nonlinear Kompaneets Equation Through the Laplace-Adomian Decomposition Method*, Int. Journal of Applied and Comput. Math., **2**(4), 1-16; (2016).

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa,
Vasco de Quiroga 4871, Santa Fe, Cuajimalpa,
C.p. 05300, México D.F.
ogonzalez@correo.cua.uam.mx
jsantiago@correo.cua.uam.mx

3 EL PENSAMIENTO CRÍTICO DE LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA HACIA UN PROBLEMA MAL PLANTEADO: ¿QUÉ TANTO INFLUYE LA “AUTORIDAD” DEL SUPUESTO AUTOR?

Brenda Rosales Angeles
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Coautor(es): Domiciano Domínguez Campos, Itzel Medina Escalona y Josip Slisko Ignjatov

En esta investigación se explora qué tanto influye en el pensamiento crítico de los alumnos sobre un problema mal planteado (cuadro mágico), la información adicional sobre el supuesto autor del problema (un reconocido matemático o un alumno de secundaria). La encuesta contiene cuatro preguntas: ¿Se entienden plenamente los datos que se proporcionan en el cuadro mágico? ¿Queda entendido claramente qué condiciones deben cumplir los datos que se requieren encontrar? ¿El ejercicio está correctamente planteado? ¿El ejercicio es apto para jóvenes de primer grado de secundaria? La escala de calificación consiste de cinco opciones: (1) muy de acuerdo; (2) de acuerdo; (3) no sé; (4) desacuerdo y (5) muy en desacuerdo. Los resultados de esta exploración demuestran que los estudiantes creen que un problema creado por un reconocido matemático está bien estructurado o planteado. Esa creencia limita su pensamiento crítico. Tal limitación no se presenta cuando se les sugiere que el problema fue diseñado por un alumno de secundaria.

Palabras Clave: Cuadro mágico, errores matemáticos, pensamiento crítico, el efecto de la “creencia de autoridad”.

3.1. Planteamiento del Problema

Existe una fuerte necesidad de un cambio de paradigma acerca de los temas y métodos de investigación de libros de texto. Para avanzar en la investigación sobre los libros de

texto de matemáticas se debe centrar más en correlaciones, cuestiones y problemas causales, puesto que los métodos utilizados en la investigación de libros de texto han sido a menudo basados en el análisis del documento, con unos pocos que se basan empíricamente y experimentalmente con sus usuarios (Fan, 2013).

En Palop, García y Bravo (2013) se propone un esquema de clasificación para los errores encontrados en libros de texto de matemáticas de 6to. de distintas editoriales de Madrid, como sigue:

- Error de concepto
- Ambigüedad
- Problemas con enunciados absurdos
- Problemas en los que faltan datos o que contienen órdenes incompletas
- Enunciados de problemas con error en los datos o que contienen órdenes contradictorias
- Error en la respuesta a un problema

Al encontrarnos un error de dato en un problema en el libro de texto de matemáticas, sumado a una orden incompleta en un cuadro mágico y por ende contradictoria en el mismo problema, nos llevó a cuestionarnos lo siguiente:

¿Qué porcentaje de alumnos podrán detectar el error en el problema?

¿El mal planteamiento del problema será una limitante, para la resolución del mismo?

¿Qué porcentaje de alumnos tratarían de contestar el cuadro mágico, aun percatándose del error?

Al ser modificado el problema que originalmente tenía un error, ¿cuál es el porcentaje que obtiene el resultado correcto?

¿Cómo influye la “autoridad” del supuesto autor en la creencia del alumno de que el problema tiene solución, aunque no sea así?

“La pregunta fundamental no es ¿cuánto de bien estudia el niño el libro que tiene?, sino ¿cuánto de bien le hace al niño el libro que estudia?” (Palop, García y Bravo, 2013, p.146).

De entre todos los discursos, el matemático parece poder escapar a toda crítica. Pero no por su complejidad sino por la autoridad que hoy le presta la función religiosa que ha venido a cumplir (Lizcano, 1989). En atención a lo anterior uno de los objetivos de nuestra investigación es verificar la influencia que tiene la autoridad del supuesto autor sobre el pensamiento crítico del estudiante.

3.2. Marco Teórico

Robitaille y Travers (1992) argumentan que la dependencia de los libros de texto es una característica de la enseñanza de las matemáticas más que de otro tema.

Según Palop, García y Bravo (2013), estaremos frente a un error matemático en un libro de texto, cuando encontremos en la exposición de contenidos un enunciado que esté o conduzca a una contradicción con lo que afirma o niega la matemática.

Para hacer ciencia hay que dudar de lo que damos por supuesto sobre el mundo y sobre nosotros mismos. Pero, para los alumnos aprender ciencia supone con frecuencia certezas

Cuadro 3.1: Problema original

Completa el cuadro mágico de fracciones. Recuerda: al sumar cualquier grupo de tres cifras en la misma fila, columna o diagonal se debe obtener el mismo resultado

$7/5$	$3/5$	
3	1.2	5
1		

de las que no saben ni pueden dudar y que, sin embargo, resultan incompatibles y hasta increíbles con su experiencia. Hay autores sugieren que se necesita que los alumnos se enfrenten a la experiencia de confrontar un texto con otros textos, un texto consigo mismo, un texto con ellos mismos (Pozo y Gómez, 2010).

Los resolutores se justifican algunas veces con sus creencias por autoridad, que se dan cuando justifica su actuación teniendo como referente una fuente que goza de absoluta credibilidad, bien por creencias en la autoridad de la tarea, bien por creencias en la autoridad del profesor o bien por creencias en la autoridad del compañero competente (Noda y Domínguez, 2000).

3.3. Método

Esta investigación de tipo exploratorio se adscribe a un enfoque cualitativo, desde un paradigma interpretativo y descriptivo. Tiene su origen en una revisión de libros de texto del nivel de secundaria de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG).

Para la elección de los problemas de estudio, se revisaron las editoriales de CONALITEG: Fernández Editores, Ediciones SM y Larousse, de los tres grados de secundaria.

Para conocer el comportamiento de los estudiantes al presentarles un cuadro mágico con un error y un planteamiento confuso (Editores SM de la Colección Comunidad Matemática I pág. 20, Imagen 1).

La predicción que el equipo de investigación se planteó es que la mayoría de los alumnos no encontrarán el error, ni podrán resolverlo de forma satisfactoria, como lo espera el autor del libro.

3.3.1. Instrumentos

Entrevista cualitativa semiestructurada para pilotear este problema con los estudiantes y el del cuadro mágico con un profesor.

- El problema original “Cuadro mágico” que se encuentra en el libro “Comunidad

matemática I” ediciones SM, de primer grado de secundaria, de la página web de CO-NALITEG.

- El problema del cuadro mágico rediseñado habiendo eliminado el error y completado el faltante.
- Test tipo Likert, para calificar la efectividad del problema original, bajo la creencia de un supuesto autor.

3.3.2. Población

Se aplicó el instrumento con el problema original a 15 estudiantes de secundaria de primer grado, del estado de Puebla. Simultáneamente se aplicó el instrumento rediseñado (sin el error) a 15 alumnos de secundaria de primer grado de la misma escuela pero distinto grupo.

Se aplicó el instrumento tipo Likert a 38 estudiantes de secundaria de primer grado, del estado de Tlaxcala.

3.3.3. Procedimiento

Los instrumentos se aplicaron en 3 fases:

- En la primera fase se hizo una entrevista cualitativa semiestructurada para pilotear este problema con un profesor de secundaria del estado de Veracruz.
- Se elabora entonces un instrumento rediseñando el original, eliminando el error, y complementando datos faltantes.
- En la segunda fase se aplicó el problema original (con el error) a 15 estudiantes, y simultáneamente se aplicó el problema rediseñado (sin el error) a otros 15 estudiantes.
- En una tercera fase se aplicó una encuesta (de autoridad del supuesto autor) tipo Likert a 38 estudiantes en relación al planteamiento del problema.
- Se les dijo a 19 alumnos que el problema había sido diseñado por un Reconocido Matemático y a otros 19 alumnos que el autor del problema era un estudiante de secundaria como ellos.
- El supuesto autor que recibió un mayor valor en desacuerdo, fue el estudiante de secundaria.

3.4. RESULTADOS

3.4.1. La primera fase

El profesor opina de acuerdo a su experiencia que debe cambiarse la instrucción, porque el enunciado del problema es muy extenso y el alumno no se toma la molestia de leer el texto completo, y que el cuadro no cumple las condiciones de un cuadro mágico, pues no da el mismo resultado al sumar filas y columnas.

3.4.2. La segunda fase

De los 15 estudiantes a los que se les aplicó el instrumento con el diseño original ninguno obtuvo la respuesta correcta. Solo 5 completaron los cuadros vacíos correctamente, pero no tocaron los cuadros donde había que completar la fracción y mucho menos detectaron en donde estaba el error, aunque uno sí sugiere que hay un error, porque da resultados diferentes. De los 15 estudiantes a los que se les aplicó el problema rediseñado (sin el error) la mayoría contestaron correctamente, solo infieren que se les complica un poco el uso de fracciones, pero lo hicieron con éxito a excepción de uno. Con eso concluimos que, rediseñando el ejercicio, se reduce significativamente el número de los errores cometidos por el alumno, y el sentimiento de derrota por no resolverlo bien.

3.4.3. La tercera fase

Se aplicó una encuesta (sobre la “autoridad” del supuesto autor) tipo Likert a 38 estudiantes en relación al planteamiento del problema. Se les dijo a 19 alumnos que el problema había sido diseñado por un Reconocido Matemático y a otros 19 alumnos que el autor del problema era un estudiante de secundaria como ellos.

El resultado obtenido es que la mayoría de los estudiantes creen que un problema creado por un reconocido matemático está bien estructurado o planteado. Esa creencia limita su pensamiento crítico. Tal limitación no se presenta cuando se les sugiere que el problema fue diseñado por un alumno de secundaria. En el primer ítem “¿se entiende plenamente los datos que se proporcionan en el cuadro mágico?”, el 26.31 por ciento está en desacuerdo con el “reconocido matemático”. Este porcentaje aumenta a 47.36 cuando el autor se trata del “estudiante de secundaria”.

En el segundo ítem “¿queda entendido claramente qué condiciones deben cumplir los datos que se requieren encontrar?”, el 10.52 por ciento está en desacuerdo con el “reconocido matemático”. Tal porcentaje aumenta a 36.84 por ciento cuando el supuesto autor es el “estudiante de secundaria”.

En el tercer ítem “¿el ejercicio está correctamente planteado?”, el 10.52 por ciento está en desacuerdo con el “reconocido matemático”, pero este porcentaje aumenta a 26.31 por ciento cuando el supuesto autor es un “estudiante de secundaria”. En el cuarto ítem “¿El ejercicio es apto para jóvenes de primer grado de secundaria?”, el 0 por ciento está en desacuerdo con el “reconocido matemático”. Este porcentaje aumenta a 36.84 por ciento cuando el supuesto autor es un “estudiante de secundaria”.

3.5. CONCLUSIONES

En los libros de texto de matemáticas podemos encontrar un número significativo de errores ya sea de concepto, de redacción, de coherencia, de situación, de ambigüedad, de contradicción, de faltante de datos o de respuesta equivocada. La prueba de ello son las múltiples investigaciones que se han hecho al respecto, pero aún falta ampliar la investigación en cuánto y cómo afecta esto a los jóvenes estudiantes y cómo puede el profesor detectar estos errores y utilizarlos a beneficio del aprendiz.

Es importante advertir, tanto a profesores como a estudiantes, que el libro puede tener errores, que no está exento de ellos, y que al igual que el profesor puede errar. El estudiante puede aprovechar estos errores para beneficiar su pensamiento crítico, con guía del profesor, porque, como ha demostrado de cierta forma esta investigación, este pensamiento se ve limitado por la “creencia en autoridad”, la cual obliga al estudiante a no cuestionar el discurso matemático, proveniente del autor del libro de texto, del profesor o de un compañero destacado.

Bibliografía

- [1] Castrejón, A., Vicuña, A., Reyes, M. & Castrejón, O. (2016). Comunidad Matemática I. México, D.F., Ediciones SM., p. 20
- [2] Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45(5), pp.765-777.
- [3] Lizcano, E. (1989). ¿Es posible una crítica del discurso matemático?/1. Archipiélago: Cuadernos de Crítica de la Cultura, (2), 116-132.
- [4] Noda Herrera, M. A., & Domínguez, J. H. (2000). Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación.
- [5] Palop, P. F., García, P. A. C., & Bravo, J. A. F. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas?. *Números*, (83), 131-148.
- [6] Pozo, J. I., & Gómez Crespo, M. Á. (2010). Por qué los alumnos no comprenden la ciencia que aprenden: qué podemos hacer nosotros para evitarlo. *Alambique: didáctica de las ciencias experimentales*.
- [7] Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 687–709). New York: Macmillan.

4 LOS EFECTOS INICIALES DE LA ENSEÑANZA EN LAS CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LAS MATEMÁTICAS

Claudia Éthel Figueroa Suárez & Josip Slisko Ignjatov
Benemerita Universidad Autónoma de Puebla

4.1. Resumen

El aprendizaje es un proceso activo donde intervienen variables no solo cognitivas, también motivacionales y conductuales. Las creencias equivocadas que un estudiante tiene, pueden dar lugar a falsos o pobres aprendizajes. Estas creencias se originan por la cultura escolar, las tareas escolares y el papel del profesor, donde el estudiante es visto como una “página en blanco que hay que llenar”. Por lo tanto, el actuar del profesor es muy importante, ya que es él quien organiza la instrucción dentro de la clase. Se requiere entonces, para cambiar “creencias equivocadas”, que el docente propicie un aprendizaje autónomo, donde se facilite el uso de estrategias cognitivas, a través de la resolución de problemas. La intervención se hizo en estudiantes del primer año de Educación Media Superior, dos grupos control (52 estudiantes) y 2 grupos experimentales (63 estudiantes). Se tienen resultados del primer semestre lo cual nos muestra que un semestre no puede generar cambios significativos en las creencias de los estudiantes; pero estos resultados nos indican que sí es posible influenciar de manera positiva a algunos de ellos, y marcar una diferencia cualitativamente importante.

4.2. Introducción

La preocupación que genera el evaluar las creencias de los estudiantes es por la manera que éstas influyen en su quehacer en el aula. El desinterés y bajo rendimiento escolar, por lo menos en parte, se deben a creencias “equivocadas”. El cambio de creencias, a través de una intervención por parte del profesor, puede proporcionar información importante sobre una mejor práctica educativa y el papel del profesor en el aula.

El objetivo es demostrar que es posible cambiar las creencias de los estudiantes de manera positiva con la enseñanza que promueve el aprendizaje autorregulado. Las creencias de los estudiantes se determinarán, usando un instrumento validado, se aplicará el cuestionario “Mathematics- Related Beliefs Questionnaire” (Op ‘t Eynde y De Corte, 2003).

Se deja de lado la enseñanza tradicional, que concibe la enseñanza como un verdadero arte y al profesor/a como un artesano, donde su función es explicar claramente y exponer de manera progresiva sus conocimientos, enfocándose de manera central en el aprendizaje del alumno.

Se piensa que modificando la forma en la que los estudiantes aprenden matemáticas se genera en ellos un cambio positivo de creencias. Se pretende que, con una intervención adecuada del docente, se propicie un aprendizaje autónomo y permanente a lo largo de la vida. La intervención consiste en organizar la instrucción y actividades de modo que se facilite el uso de estrategias cognitivas y metacognitivas.

4.3. MARCO TEÓRICO

Para alcanzar los objetivos del aprendizaje, surge la necesidad de conocer y entender cuáles son las variables que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje, y cómo puede intervenir el profesor para lograr los aprendizajes esperados (éxito académico) en el estudiante.

Ser cognitivamente inteligente no garantiza el éxito académico (Extremera & Fernández-Berrocal, 2003). Este punto de vista da otra dirección las investigaciones en Educación Matemática. Por ello el papel del afecto sobre el rendimiento escolar ha sido tema de diferentes investigaciones. A pesar de que se piensa que el aprender matemáticas no tiene nada que ver con las emociones y es algo puramente intelectual, “sería un error el creer que la solución de un problema es un “asunto puramente intelectual”; la determinación, las emociones, juegan un papel importante” (Polya, 1984, pp. 80-81).

McLeod (1994) hace un análisis de las investigaciones hechas sobre dominio afectivo y aprendizaje de las matemáticas, de 1970 a esa fecha. Las investigaciones se centran en actitudes hacia las matemáticas y dentro de esos estudios se incluyen investigaciones acerca de las creencias. Estos estudios contribuyen a entender cómo las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas influyen en el aprendizaje. Muchas de las investigaciones se centran en las creencias a la hora de resolver problemas, y cómo creencias negativas pueden influir en la manera de resolver o no un problema.

En esos años se trataba de construir el concepto de afecto, aparte de consolidarlo como parte importante dentro del aprendizaje de las matemáticas. Creencias, actitudes y emociones, son las 3 áreas que McLeod (1992) distingue en la investigación de dominio afectivo, en educación matemática. Describe las emociones como más intensas y menos

estables, y las creencias como menos intensa y más estables; situando las actitudes entre ambas dimensiones. Actualmente se aceptan cuatro categorías de afecto (Gómez Chacón, 2010), incluyendo una más a la de McLeod (1992): emociones, actitudes, creencias y valores/éticos y morales.

Gómez Chacón (2010), posteriormente, hace un trabajo sobre las tendencias, hasta la fecha, en investigación sobre matemáticas y afecto. Sin llegar a definiciones concretas sobre los diferentes aspectos del dominio afectivo, las investigaciones son orientadas a desarrollar un constructo teórico sobre cuáles son las influencias afectivas en el contexto de la clase y la manera que se puede influir de manera efectiva en el proceso de enseñanza aprendizaje.

¿Cuál es entonces razón de determinar el tipo de creencias de los estudiantes a cerca de las matemáticas?

De acuerdo a la literatura revisada, es porque influyen en su forma de aprender esta disciplina, y se ven reflejadas en el rendimiento académico. A partir de este conocimiento, se pueden implementar técnicas de enseñanza y ambientes adecuados que contribuyan a mejorar el aprendizaje y, como consecuencia, el rendimiento académico.

Los estudiantes pueden poseer conocimientos y destrezas previas a la escuela o adquirirlas, durante sus años de estudio. El objetivo es que sepan usarlas de manera adecuada para lograr el aprendizaje esperado. De acuerdo a las últimas investigaciones, De Corte (2004) concluye que se han destacado cinco categorías de aptitud que el estudiante debería adquirir para tener una buena disposición en matemáticas:

- buena organización y accesibilidad de conocimiento matemático básicos;
- métodos heurísticos, destreza para resolver un problema;
- metaconocimientos, conocimiento de funciones cognitivas (metacognición);
- técnicas de autorregulación y
- creencias sobre sí mismo en relación con las matemáticas y la solución de problemas, sobre el contexto de clase y sobre las matemáticas y su aprendizaje.

Estas cinco categorías están relacionadas con los cinco aspectos mencionados por Schoenfeld (1989) que se deben tomar en cuenta para resolver un problema, lo cual no resulta extraño. Se puede partir de la idea de que las matemáticas son de las materias idóneas dentro del currículum escolar que propician el “aprender a pensar” (Corts, Vega, 2004). “Podemos hacer de los procesos de pensamiento objeto de aprendizaje, a través del enfrentamiento con situaciones problemáticas que se pueden abordar con las herramientas que ofrece la matemática” (Corts, Vega, 2004, p. 11-12). Es decir, se considera la “solución de problemas” como una herramienta para pensar matemáticamente, de aproximar

al estudiante al aprendizaje de las matemáticas.

La nueva forma de ver el proceso de aprendizaje de las matemáticas, la aproximación socio-constructivista, sustenta su visión en la resolución de problemas. Se observa en las investigaciones de Corts, Vega (2004) y Schoefeld (1985) la relación que existe entre aprender matemáticas y aprender matemáticas a través de la solución de problemas, como una herramienta efectiva para lograr los aprendizajes esperados. La aproximación socio-constructivista ve al profesor como facilitador del aprendizaje y al alumno como agente activo del aprendizaje.

En relación a la solución de problemas, un ejemplo de creencias de los estudiantes es: “Los estudiantes que creen que un problema puede ser resuelto en cinco minutos o menos, abandonarán aquellos problemas más complejos que demandan más tiempo” (Schoenfeld, 1989). La “solución de problemas” resulta un medio para crear un ambiente de aprendizaje adecuado para propiciar un cambio de creencias. Se considera que, con una intervención adecuada del docente, se propicie un aprendizaje autónomo y permanente a lo largo de la vida. La intervención consiste en organizar la instrucción y actividades de modo que se facilite el uso de estrategias cognitivas y metacognitivas.

Se debe pasar de la enseñanza a la práctica “autorreflexiva”. Para potenciar las creencias positivas, se pueden tomar en cuenta los estilos de aprendizaje. Si se pretende que los estudiantes sean un agente activo, una forma es que aprendan a ser sus propios maestros, fomentando el aprendizaje autorregulado: “Un proceso activo en el cual los estudiantes establecen los objetivos que guían su aprendizaje intentando monitorizar, regular y controlar su cognición, motivación y comportamiento con la intención de alcanzarlos” (Núñez et al, 2006, p. 140).

Se piensa que los estudiantes aumentan sus resultados académicos usando un método de aprendizaje de forma sistemática. Los resultados que obtienen son consecuencia de su esfuerzo. De esta forma se pretende cambiar las creencias de los estudiantes de manera positiva y que esto se vea reflejado en su rendimiento escolar.

Goerge Polya realiza estudios, sobre la solución de problemas, a partir de los cuales propone en su libro “Cómo plantear y resolver problemas”, los siguientes pasos:

- Aceptar y comprender las condiciones del problema.
- Planificar su solución.
- Llevar a cabo el plan planificado; y
- Comprobar, verificar la solución.

Schoenfeld (1992) realiza estudios sobre los caminos cognitivos que se siguen al resolver un problema, retoma las ideas de Polya y las integra; de esta manera distingue 5 aspectos en la solución de problemas:

- conocimientos básicos,
- estrategias de solución de problemas (heurística),
- monitoreo y control (autorregulación),
- creencias y afecto (estudiantes, profesores y sociedad) y
- práctica.

Los problemas se consideran tanto una herramienta como un objeto de aprendizaje en la Educación las Matemática. La solución de problemas se ha considerado, además de tema de enseñanza, tema de investigación. En relación a esto último, “existe una cierta tendencia en las clases de matemáticas a plantear a los estudiantes problemas artificiales. Este hecho ha llamado la atención de los investigadores, quienes han llegado a la conclusión de que el profesor debe dar a sus alumnos problemas más “reales” para que el estudiante se sienta comprometido de alguna forma” (Kilpatrick, et. al., 57).

Se proponen problemas “reales” en los que los estudiantes desarrollen estrategias de solución, el objetivo de la investigación es un análisis y sacar conclusiones sobre estas estrategias de solución. Pasar de la enseñanza a la práctica “autorreflexiva”.

Si bien el uso de la “Solución de Problemas” es considerado para fomentar el aprendizaje autogestivo, debe tenerse muy en cuenta que esos Problemas planteados deben cumplir ciertos criterios, no solo de “realidad”. Sino que deben igual, y más importante, cumplir con un objetivo de enseñanza.

4.4. Método

4.4.1. Población

La intervención se llevó a cabo con estudiantes de Educación Media Superior, que cursaban el primer año, de la Preparatoria “Lázaro Cárdenas del Río”, de la ciudad de Puebla, Puebla.

Dos de estos grupos (turno vespertino), con un total de 52 estudiantes, fueron los grupos control, llevaron una instrucción tradicional, en donde el profesor daba el tema a manera de cátedra, algunos ejercicios y las tareas y evaluaciones incluyeron ejercicios repetitivos.

Los otros 2 grupos (turno matutino), con un total de 63 estudiantes, fueron los grupos experimentales y llevaron una instrucción alternativa, la cual promovió el aprendizaje autorregulado (Zulma Lanz, 2006).

4.4.2. Instrumento

El Mathematics - Related Beliefs Questionnaire (MRBQ), está compuesto por 44 ítems, distribuidos en 4 subescalas: creencias sobre las matemáticas como actividad social, creencias sobre el significado y competencia en matemáticas, creencias sobre las matemáticas como un dominio de excelencia, creencias acerca del papel y el funcionamiento del profesor. Se aplicará en tres tiempos, al inicio del curso (Agosto), a la mitad del curso (Enero) y al finalizar el curso (Mayo).

4.4.3. Propuesta de intervención

En el transcurso del año escolar se dejarán varias tareas que deberán ser entregadas por el estudiante de manera digital y enviadas por correo electrónico. Las tareas consistirán en:

- Resolución de un problema relacionado con el tema.

Los problemas deben ser resueltos siguiendo los pasos propuestos por G. Polya para resolver un problema:

- Aceptar y comprender las condiciones del problema.
- Planificar su solución.
- Llevar a cabo lo planificado; y
- Comprobar, verificar la solución.

Posteriormente se discutirán las soluciones personales de manera grupal en el salón de clases y se entregará un reporte grupal igualmente de forma digital y por el mismo medio. Al final el profesor resuelve el problema y lo empata con los temas del programa de estudio, es decir, extrae la teoría relacionada con el problema y les muestra lo que ellos solos aprendieron, utilizando el lenguaje matemático para formalizar lo aprendido.

La forma de plantear y desarrollar las actividades se espera que propicie un mayor interés en el estudiante y le ayudará a desarrollar sus habilidades de manera adecuada. Sin sacrificar el contenido, los conocimientos que el alumno debe adquirir finalmente se les proporcionaran, y en el proceso el estudiante entenderá, que si bien las Matemáticas es un tema “difícil” no es imposible de aprender teniendo las herramientas, la guía y la disposición necesaria.

4.5. ANÁLISIS DE RESULTADOS INICIALES

4.5.1. CUESTIONARIO DE CREENCIAS

Los resultados presentados son de la primera y segunda aplicación, al final del primer semestre. Se analizan algunas preguntas que pertenecen a 2 de los 4 factores (no se analizan los ítems referentes a las matemáticas como dominio de excelencia ni a los referentes

4.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS INICIALES

al papel y funcionamiento del profesor). Las preguntas se seleccionaron de acuerdo a las características más importantes que se considera debe tener un estudiante con un aprendizaje autorreflexivo y colaborativo. El siguiente cuadro muestra los resultados de los 2 grupos experimentales en las preguntas 1, 2,4 y 6, en la primera (1a.) y segunda (2a.) aplicación del cuestionario.

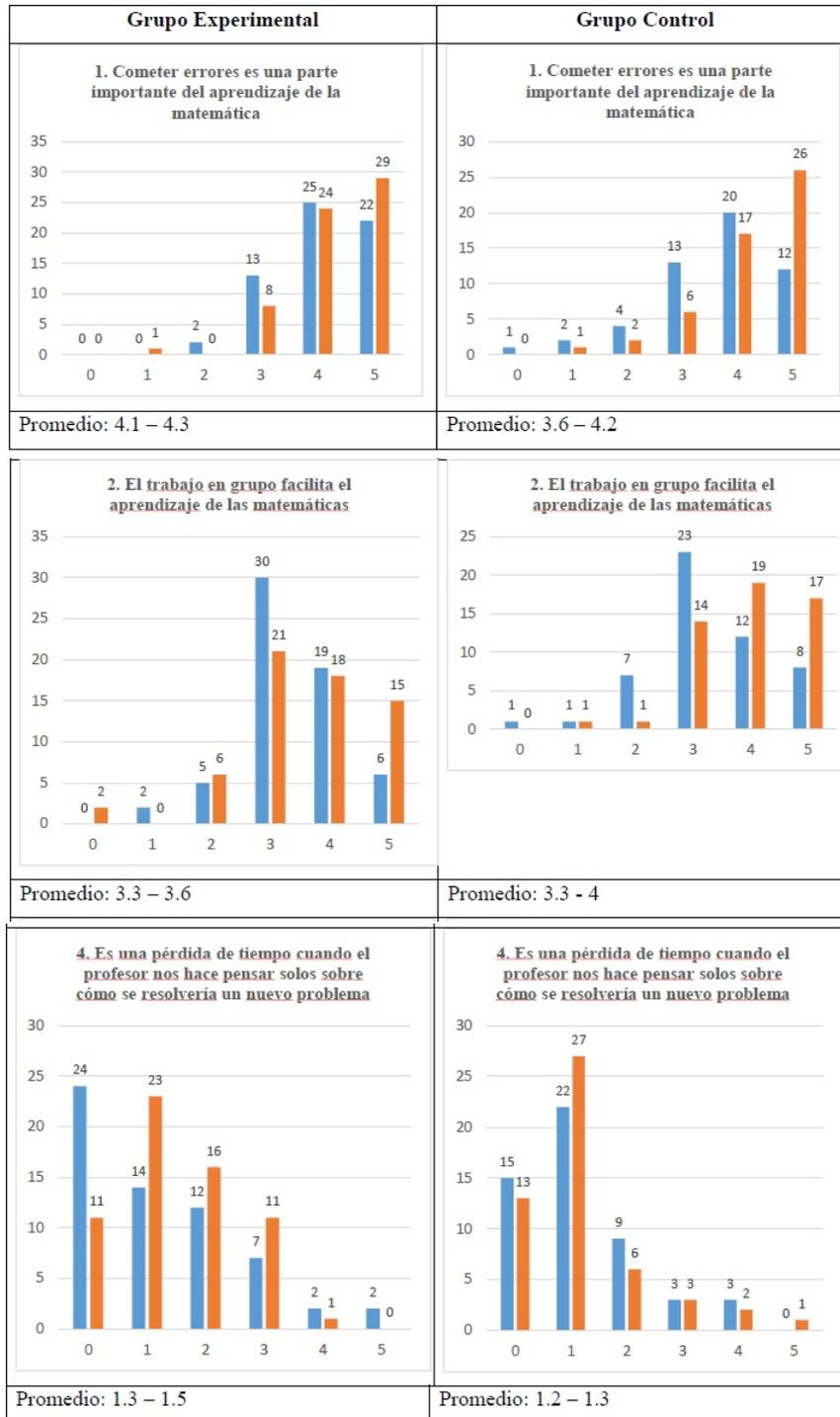
Puntos de la escala ¹	1.Cometer errores es una parte importante de las matemáticas		2. El trabajo en grupo facilita el aprendizaje de las matemáticas		4. Es una pérdida de tiempo cuando el profesor nos hace pensar solos sobre cómo se resolvería un nuevo problema		6. En los problemas de matemáticas hay diversas formas para llegar a encontrar una solución correcta	
	1a.	2a.	1a.	2a.	1a.	2a.	1a.	2a.
0	0	0	0	2	24	11	0	0
1	0	1	2	0	14	23	0	0
2	2	0	5	6	12	16	1	0
3	13	8	30	21	7	11	3	6
4	25	24	19	18	2	1	27	18
5	22	29	6	15	2	0	31	38

¹ 0 = totalmente en desacuerdo, 1 = no de acuerdo, 2 = más o menos en desacuerdo, 3 = más o menos de acuerdo, 4 = de acuerdo, 5 = totalmente de acuerdo.

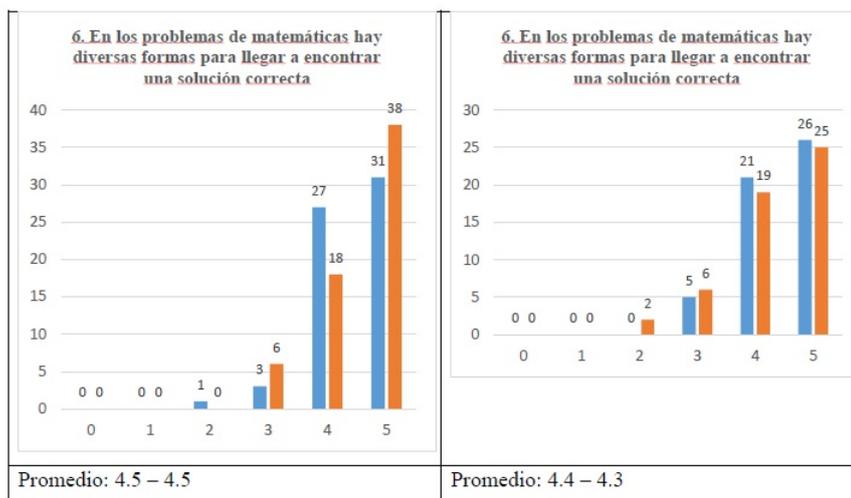
Se observa un cambio positivo sobre el control de la realización de tareas, resultado del esfuerzo y persistencia, apoyándose de sus pares, sin perder de vista el objetivo sin concentrarse en los errores. Aunque muestra una clara indecisión sobre la importancia de pensar en la solución de un problema, lo cual refleja en parte lo que ellos posiblemente consideran como un “problema” de matemáticas.

COMPARACION CON EL GRUPO CONTROL

4 LOS EFECTOS INICIALES DE LA ENSEÑANZA EN LAS CREENCIAS DE LOS ESTUDIANTES



4.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS INICIALES



TAREAS, EJEMPLIFICACIÓN DE CASOS

Se hace ahora una comparación entre los resultados del cuestionario y el desempeño de los estudiantes en clase.

El estudiante 38C.

- Contesto las dos aplicaciones del cuestionario, y en los resultados globales comparativos entre ambas aplicaciones, se observan más cambios negativos en la mayoría de sus respuestas. Lo importante del estudiante 38C es que su desempeño es regular bajo los estándares evaluables, porque cumple con sus tareas y asistencia; pero si es un estudiante poco participativo, que espera a que se dé la solución de un problema sin el proponer y pensar por el mismo en una solución. En la pregunta 4 su respuesta cambia de 0 a 3. Entrega las tareas y trabajos para cumplir con el requisito, lo cual se ve reflejado en la forma en la que resuelve los problemas, en la pregunta 21 su respuesta cambió de 4 a 1 (Para mí las matemáticas son una asignatura importante).

El estudiante 8B.

- Muestra más cambios positivos significativos al comparar ambas aplicaciones, ha mostrado un buen desempeño desde el inicio del curso; pero algunas dificultades con la tareas entregadas, a pesar de ello se observa su empeño y preocupación por aprender, ya que es participativo y activo en clases, y no solo en cumplir con requisitos; en cuanto al cuestionario en la pregunta 4 tiene un cambio de 3 a 0, y en la 13 (solo estoy satisfecho cuando logro buenas calificaciones en matemáticas) el cambio es de 5 a 3.

El estudiante 25B:

- Las creencias sobre las matemáticas que presentó en un principio son buenas; pero se pueden observar cosas interesantes, a pesar de tener buenas creencias de manera

general, determinan su comportamiento en clase. No estaba habituado a trabajar en equipo, lo cual se refleja en la pregunta 2, 36 y 43.

2. El trabajo en grupo facilita el aprendizaje de las matemáticas: Más o menos de acuerdo (3) a De acuerdo (4).

36. Nosotros realizamos bastantes trabajos en grupo durante la clase: Más o menos de acuerdo (3) a De acuerdo (4).

43. No está permitido preguntar a los compañeros para que me ayuden en las tareas de la clase: Totalmente de acuerdo (5) a Totalmente en desacuerdo (0).

- Para él aprender matemáticas es repetir y memorizar, lo cual se refleja en las preguntas 3, 25 y 42.

3. El aprendizaje matemático es principalmente memorización: De acuerdo (4) a Más o menos en desacuerdo (2).

25. Si trabajo duro, entonces puedo comprender toda la materia del curso de matemáticas: No de acuerdo (1) a Más o menos de acuerdo (3).

42. Nuestro profesor quiere que comprendamos el contenido del curso de matemáticas, no que lo memoricemos: Más o menos en desacuerdo (2) a Totalmente de acuerdo (5)

- En este punto era un poco frustrante para él no poder realizar las tareas que se presentaban en clase, sabía que tenía que trabajar para lograrlo y que sus compañeros lo podían apoyar; pero al final tenía que hacer las cosas él solo, si quería aprender.
- Disminución de su auto-confianza. Pensaba que sus resultados en matemáticas no serían buenos.

El estudiante 38B:

- En general tiene buenas creencias según la primera aplicación, sobre todo en cuanto a la autoeficacia, un estudiante con muy buena disposición a aprender; pero de la manera tradicional.

4.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS INICIALES

- No estaba habituado a trabajar en equipo, lo cual se refleja en la pregunta 2, 36 y 43: 2. El trabajo en grupo facilita el aprendizaje de las matemáticas: Más o menos de acuerdo(3) a Más o menos en desacuerdo (2).

36. Nosotros realizamos bastantes trabajos en grupo durante la clase: De acuerdo (4) a totalmente de acuerdo (5).

43. No está permitido preguntar a los compañeros para que me ayuden en las tareas de la clase: De acuerdo (4) a Más o menos en desacuerdo (2).

- Para él aprender matemáticas es repetir y memorizar, lo cual se refleja en las preguntas 3 y 4. 3. El aprendizaje matemático es principalmente memorización: Más o menos de acuerdo (3) a Totalmente en desacuerdo (0).

4. Es una pérdida de tiempo cuando el profesor nos hace pensar solos sobre cómo se resolvería un nuevo problema: De acuerdo (4) a Más o menos de acuerdo (3).

- Él no tiene problemas en esforzarse y trabajar duro; es bastante competitivo, y confía en sus conocimientos y habilidades para obtener buenos resultados.
- No le gusta trabajar en equipo, ni se integra al grupo.
- Algo que pude observar es que le preocupan sus calificaciones, aunque crea que no son lo más importante.

El estudiante 35C:

- Al principio del curso este estudiante se acercó, después del examen diagnóstico, muy preocupado porque sabía que le había ido muy mal, según me dice nunca ha sido “bueno en matemáticas”.
- Lo cual se corrobora en el primer cuestionario no tenía buena autoconfianza.

15. Creo que este año recibiré una excelente nota en matemáticas: No de acuerdo (1) a Más o menos en desacuerdo (2).

17. Me gusta hacer matemáticas: No de acuerdo (1) a Más o menos de acuerdo (3).

20. Puedo aprender el material del curso de matemáticas: No de acuerdo (1) a Más o menos de acuerdo (3)

22. Prefiero las tareas matemáticas, me esfuerzo por encontrar una solución: No de acuerdo (1) a Más o menos en desacuerdo (3).

- Consideraba que el papel del profesor era distante a ellos (los estudiantes), esas creencias cambiaron.

30. Nuestro profesor muestra atención a cómo nos sentimos en las clases de matemáticas: No de acuerdo (1) a De acuerdo (4).

34. Nuestro profesor comprende los problemas y las dificultades que experimentamos: No de acuerdo (1) a De acuerdo (4).

40. Nuestro profesor trata de hacer las lecciones de matemáticas interesantes: Totalmente en desacuerdo (0) a De acuerdo (4).

- Al aumentar su autoconfianza aumentó su rendimiento académico.
- No es muy participativo; pero entrega y cumple con sus tareas. Su actitud hacia las matemáticas ha cambiado, sabe que tienen que esforzarse para pasar el curso, y quiere obtener buenas calificaciones.

4.6. ALGUNAS OBSERVACIONES

Es muy difícil para ellos enfrentarse a un problema sin antes haber recibido alguna instrucción. Esperan un ejemplo para ellos poder realizar alguna tarea diferente. Fue complicado hacerles entender que con los conocimientos que ellos tenían era posible resolver los problemas que se les planteaban (motivarlos).

Puede resultar frustrante para la mayoría hacerse responsables de su propio aprendizaje. Por lo que eso se les debe de dejar claro todos los días. Ellos son los que están aprendiendo y por lo tanto de ellos depende lo que puedan o no aprender. Las condiciones pueden ser las ideales (que nunca los son); pero el nuevo conocimiento se genera de una genuina necesidad de aprender.

Los resultados antes presentados, pueden indicar que una enseñanza en la que no se les exija más que lo acostumbrado, las complicaciones “tradicionales” que para muchos son las matemáticas, en donde se les den indicaciones y ellos solo tienen que repetir y hacer ejercicios y no resolver problemas; los mantiene en una zona de estabilidad, porque es a lo que están acostumbrados.

4.7. CONCLUSIONES

Parece que un semestre no puede generar cambios significativos en las creencias de los estudiantes. Aunque hay claros cambios positivos en algunos de ellos, falta la última aplicación del instrumento. Sabemos que es imposible cambiar las creencias de todos los estudiantes de manera significativa, pero los resultados parciales obtenidos nos indican que sí es posible influenciar de manera positiva en algunos de ellos, y marcar una diferencia cualitativamente importante.

4.8. Referencias

1. Corts, A. V., & de la Vega, M. L. C. (2004). Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas (Vol. 100). Narcea Ediciones.
2. Extremera, N., & Fernández-Berrocal, P. (2003). La inteligencia emocional en el contexto educativo: hallazgos científicos de sus efectos en el aula. *Revista de educación*, 332, 97-116.
3. Gómez Chacón, I. M., Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 24(3), 309-324.
4. Gómez Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. In *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 121-140). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
5. Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1998). Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. una empresa docente.
6. McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 575-596.
7. McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for research in Mathematics Education*, 637-647.
8. Núñez Perez, J. C., Solano Pizarro, P., González-Pianda, J. A., & Rosário, P. (2006). El aprendizaje autorregulado como medio y meta de la educación. *Papeles del psicólogo*, 27(3), 139-146.
9. Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2003). Students' Mathematics-Related Belief Systems: Design and Analysis of a Questionnaire. *Annual Meeting of the American Educational Research Association* (pp. 21- 25). Chicago, Il.

10. Polya, G. (1987). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas. México. 11. Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for research in mathematics education*, 338-355.

12. Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. D. Gruows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: McMillan.

13. Zulma Lanz, M. (2006). Aprendizaje autorregulado: el lugar de la cognición, la metacognición y la motivación. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 32(2), 121-132.

5 ESTRATEGIAS QUE LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA UTILIZAN PARA RESOLVER UN PROBLEMA HISTÓRICO DE MATEMÁTICAS

Domiciano Domínguez Campos
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Coautor(es): Itzel Medina Escalona, Brenda Rosales Ángeles y Josip Slisko Ignjatov

RESUMEN. Se presenta el análisis de las soluciones que dan los estudiantes para la resolución del problema histórico “*El caballo y el burro*”, diseñado para el aprendizaje del “*Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*”, el cual también se puede resolver mediante operaciones aritméticas. Nos planteamos las siguientes preguntas: ¿qué tipos de pensamiento matemático surgen cuando se le presenta al alumno un problema algebraico?, ¿cuál es el porcentaje aproximado de los alumnos que utilizan el pensamiento rápido?, ¿en qué medida los estudiantes, resolverán el problema mediante operaciones algebraicas y/o aritméticas? La investigación se llevó a cabo con cuatro grupos de segundo grado de secundaria de tres escuelas públicas de los estados de Tlaxcala, Puebla y Veracruz, debido a que el problema mencionado se encuentra en un libro de texto del mismo grado en correspondencia con el programa de estudio de matemáticas II, emitido por la Secretaría de Educación Pública. Los resultados manifiestan, que de una población de 157 estudiantes, ninguno lo resolvió mediante operaciones algebraicas. 19 estudiantes (12%), lo resolvieron satisfactoriamente cumpliendo las dos condiciones, algunos mediante operaciones mentales y otros con el apoyo de representaciones esquemáticas, simbólicas y numéricas. 59 estudiantes (38%), emitieron una respuesta rápida, que cumple con una condición. 76 estudiantes (48%), no satisfacen ninguna condición. Por último 3 estudiantes (2%), reformularon el problema utilizando números enteros y fraccionarios buscando cumplir con las dos condiciones.

Palabras clave: Pensamiento rápido, pensamiento lento, operaciones mentales, representaciones simbólicas y numéricas, representaciones esquemáticas, dibujos pictóricos.

5.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Principalmente debemos de entender (1) por qué un método es mejor que otros para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en ciertos contextos (2) cómo es la forma de producir libros de texto para una mejor enseñanza y aprendizaje, que es sin duda el más importante objetivo de la investigación de libros de texto (Fan, 2013).

Álgebra es uno de los pilares básicos sobre los que se construye el edificio matemático. Además, su lenguaje, su modo de expresarse, para acceder a otras ramas de las matemáticas es preciso interpretar y comprender el lenguaje algebraico, así como para emplearlo para referirse a distintos mensajes matemáticos (Gavilán, 1996).

Es por ello, que nuestra investigación se centra en la resolución que dan los estudiantes a un problema de carácter algebraico planteado en los libros de texto, puesto que estos últimos son un intermediario que afecta las características del proceso Enseñanza - Aprendizaje. Es evidente que el alumnado no va a necesitar emplear complicadas expresiones algebraicas, ya que sus incursiones en geometría, análisis o probabilidad no lo requieren. Pero si es necesario que a su nivel, logre un correcto uso e interpretación del lenguaje matemático (Gavilán, 1996).

Lo que nos llevó a plantearnos las siguientes preguntas:

- ¿Qué tipos de pensamiento matemático, surgen cuando se le presenta al alumno un problema de tipo algebraico?
- ¿Cuál es el porcentaje aproximado de los alumnos que utilizan el pensamiento rápido?
- ¿En qué medida los estudiantes, resolverán el problema mediante operaciones algebraicas y/o aritméticas?

5.2. MARCO TEÓRICO

El libro de texto es un medio por el cual se construye el consenso educativo. Sirve por tanto, para introducir una ideología y para legitimar contenidos y formas específicas del conocimiento escolar. En este sentido, el análisis del libro de texto o manual escolar es un recurso fundamental para la investigación educativa en la medida en que brinda visiones institucionalizadas del conocimiento que con frecuencia suelen ser distantes de los estudiantes (Cantoral, Montiel & Reyes, 2015).

Escolano (2002), señala que el libro de texto encierra tres perspectivas. La primera alude al libro de texto como: objetivación cultural del currículo en todas sus dimensiones, la segunda como constructor de nuevas concepciones y prácticas sobre su uso en la educación, y finalmente, la tercera que concibe al libro de texto como aquel que objetiva las relaciones entre discursos y representaciones sociales.

Choppin (1992), insiste en la complejidad que tiene el concepto de libro de texto por su variedad de funciones: a) como herramienta pedagógica porque facilita el aprendizaje; b) como soporte de la verdad que se debe adaptar a cada generación, por lo que debe existir un cambio según el lugar, época y régimen político y c) como medio de comunicación muy potente. Los libros de texto son un material fabricado, producido y consumido.

Según Fan, Zhu & Miao (2013), las primeras investigaciones hacia los libros de texto de

matemáticas, empiezan aproximadamente en el año de 1980, antes de esta fecha no se presentan cambios considerables a los contenidos y al currículum de la materia. Estos estudios se han enfocado principalmente en el análisis de los libros de texto y el uso que se le da.

Fan & Kaeley (2000), encontraron que los profesores que utilizan diferentes tipos de libros de texto, muestran diferentes estilos de estrategias de enseñanza. Llegan a la conclusión de que los libros de texto, parecen desempeñar un papel en los maestros para que puedan emplear diferentes estrategias de enseñanza.

Según Puig & Cerdán (1990), en el proceso de resolución de un problema verbal, aritmético o algebraico, la fase crucial es la traducción del enunciado del problema a la expresión aritmética o algebraica que proporciona su solución. Las características del proceso de traducción será entonces lo que hay que dilucidar. Hemos visto que, tanto por lo que respecta a los problemas, como por lo que respecta a los métodos de resolución, no puede pensarse en establecer una separación nítida entre lo que es aritmético y lo que es algebraico.

Cerdán (2008) concluye que los estudiantes usan el modo de resolver aritmético y el tanteo para encontrar la respuesta del problema. Sin embargo para otra parte de ellos es inconcebible una solución sin el uso del algebra. Que la eficiencia del modo de resolver, depende de la complejidad relacional del problema. En los estudiantes de bachillerato, algunos encuentran soluciones aritméticas idénticas y que en dichas soluciones se emplean cantidades y relaciones que no constan en la lectura algebraica.

Por otra parte, durante la resolución de un problema matemático la mente trabaja de dos formas, los sujetos pueden revelar según Kahneman (2012), un pensamiento rápido (Sistema1) o un pensamiento despacio o lento (Sistema2). El sistema1, es lo que normalmente se denomina visión o pensamiento intuitivo y opera de manera rápida y automática con poco o ningún esfuerzo y sin sensación de control voluntario, genera impresiones y sentimientos que son las fuentes principales de las creencias. Las operaciones automáticas generan patrones de ideas sorprendentemente complejos. El Sistema2, centra la atención en las actividades mentales esforzadas que lo demandan, incluidos los cálculos complejos. Las operaciones de este sistema están a menudo asociadas a la experiencia subjetiva de actuar, elegir y concentrarse. Puede construir pensamientos en una serie ordenada de pasos, toma las riendas, anulando los irresponsables impulsos y asociaciones del Sistema1.

5.3. MÉTODO

Esta investigación de tipo exploratorio, se adscribe a un enfoque cualitativo, desde un paradigma interpretativo y descriptivo. Tiene su origen en una revisión de libros de texto del nivel de secundaria de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG), para conocer el comportamiento de los estudiantes ante la resolución de un problema histórico de matemáticas para el aprendizaje del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

El problema elegido e identificado como “*El caballo y el burro*”, se encuentra en la

página 222 del libro, Comunidad Matemática II, Editores SM. Su texto es: “Un burro y un caballo cargaban varios sacos del mismo peso. El caballo se quejaba:

–Ya no soporto tanta carga.

–¿De qué te quejas? Si me dieras un saco, yo llevaría el doble de sacos que tú; en cambio, si yo te diera un saco, tendríamos la misma carga –contestó el burro.

¿Cuántos sacos llevaba cada animal?

Las predicciones que el equipo de investigación se planteó, con respecto al desempeño de los alumnos, son las siguientes:

- (1) La mayoría de los alumnos intentarán resolver el problema histórico “El caballo y el burro” mediante una respuesta rápida;
- (2) Algunos lo intentarán por tanteo o llenado de tabla;
- (3) Muy pocos usarán un sistema de ecuaciones lineales.

5.3.1. Solución experta del problema

Sea “ x ” la carga del caballo y “ y ” la carga del burro.

1ª. Situación. Si el burro toma un saco del caballo, el burro llevará el doble.

Burro: $y + 1$

Caballo: $x - 1$

Por lo tanto, carga del burro, $y + 1 = 2(x - 1) \dots$ ecuación 1

2ª. Situación. Si el burro le da un saco al caballo, los dos llevan cargas iguales.

Burro: $y - 1$

Caballo: $x + 1$

Por lo tanto, carga del burro, $y - 1 = x + 1 \dots$ ecuación 2

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$y + 1 = 2(x - 1)$$

$$y - 1 = x + 1$$

Despejamos la segunda ecuación. $y = x + 2$

Sustituimos “ y ” en la primera ecuación. $x + 2 + 1 = 2(x - 1)$; $x = 5$

Sustituyendo “ x ” en la primera ecuación despejada. $y = x + 2$; $y = 7$

Carga de cada uno		Si me dieras un saco, yo llevaría el doble de sacos que tú		Si yo te diera un saco, tendríamos la misma carga	
burro	caballo	burro	caballo	burro	caballo
3	3	4	2	2	4
5	4	6	3	4	5
7	5	8	4	6	6

Figura 5.1: Tanteo utilizando dos cantidades, una el doble de otra

Carga de cada uno		Si me dieras un saco, yo llevaría el doble de sacos que tú		Si yo te diera un saco, tendríamos la misma carga	
burro	caballo	burro	caballo	burro	caballo
3	1	4	0	2	2
4	2	5	1	3	3
5	3	6	2	4	4
6	4	7	3	5	5
7	5	8	4	6	6

Figura 5.2: Tanteo utilizando dos cantidades iguales

5.3.2. Instrumentos

El problema original que se encuentra en el libro *“Comunidad Matemática II”*, ediciones SM, de segundo grado de secundaria, de la página web de CONALITEG.

El caballo y el burro

Un burro y un caballo cargaban varios sacos del mismo peso. El caballo se quejaba:

—Ya no soporto tanta carga.

—¿De qué te quejas? Si me dieras un saco, yo llevaría el doble de sacos que tú; en cambio, si yo te diera un saco, tendríamos la misma carga —contestó el burro.

¿Cuántos sacos llevaba cada animal?

El problema rediseñado como resultado de las entrevistas clínicas, considerando también que se trata de un problema histórico, del cual da cuenta el libro *“Siete ancianos van a Roma”* (Meavilla, 2015).

El caballo y el burro

Resuelve el siguiente problema histórico, atribuido al geómetra griego Euclides de Alejandría (siglo III a. de C).

Un burro y un caballo cargaban varios sacos del mismo peso.

El caballo se quejaba:

—Ya no soporto tanta carga.

El burro le contestó:

—¿De qué te quejas? Si me dieras un saco, yo llevaría el doble de sacos que tu; en cambio, si yo te diera un saco, tendríamos la misma carga.

¿Cuántos sacos llevaban cada animal?

Encuesta de recopilación de dudas de entendimiento, que se aplicó con la finalidad de apoyar a los estudiantes en caso de que no entendieran alguna palabra.

RECOPIACIÓN DE DUDAS DE ENTENDIMIENTO

Resolución del problema “El caballo y el burro”

Escuela: _____ Lugar: _____ Fecha: _____

Lea detenidamente el problema, si tiene dudas de entendimiento en alguna palabra, por favor anótela en el siguiente recuadro. Antes de proceder a su resolución, entregue este documento al aplicador.

--

5.3.3. Población

9 estudiantes de segundo de secundaria de tres escuelas diferentes para las entrevistas clínicas en la prueba piloto.

157 estudiantes (4 grupos) de las mismas escuelas, pero de grupos diferentes a los entrevistados. Las escuelas seleccionadas corresponden a los Estados de Veracruz, Puebla y Tlaxcala, con la finalidad de apreciar si existe diferencia significativa en el comportamiento de los estudiantes o similitud.

5.3.4. Procedimiento

Los instrumentos se aplicaron a estudiantes de segundo grado de secundaria, al final del ciclo escolar, en dos fases:

- En la primera fase, prueba piloto del problema original “*El caballo y el burro*”, se realizaron entrevistas clínicas a nueve estudiantes de las tres diferentes escuelas. Un grupo de tres estudiantes, el primero, de nivel académico destacado, el segundo de nivel regular y el tercero de bajo nivel, los otros seis estudiantes fueron elegidos al azar.
- Al momento de las entrevistas, se observó que los estudiantes se confundían cuando escuchaban el diálogo en el problema original, motivo por el cual se rediseño:
- Se le cambió la frase “*contestó el burro*” por “*El burro le contestó*” y se posicionó al principio de la intervención del burro, intentando separar y clarificar las dos intervenciones en el diálogo.
- También se incorporaron los datos: “*problema histórico atribuido al geómetra griego Euclides de Alejandría (siglo III a. de C)*”.
- En la segunda fase, se aplicó el problema rediseñado a tres grupos de segundo grado de secundaria.
- Posteriormente se aplicó el problema original a un grupo de segundo grado de secundaria. Esta segunda fase se acompañó de la aplicación de un instrumento de recopilación de dudas de entendimiento. No encontrándose duda alguna por parte de los estudiantes.

5.4. RESULTADOS

5.4.1. Fase 1. Prueba piloto

Derivado de las entrevistas clínicas que se realizaron a los nueve estudiantes y su comparación con las predicciones, se observa que las respuestas rápidas, no son la mayoría como se predijo. La mayoría lo realizó por tanteo mediante esquemas, uno de ellos intentó plantear una ecuación, esto último coincide con la predicción.

Respuesta rápida (44%)		Respuesta lenta (56%)	
Incorrectas	4 Estudiantes	Correctas (tanteo usando esquemas)	5 Estudiantes
		Tanteo usando tablas	0 Estudiantes
		Planteamiento de ecuaciones (intento)	1 Estudiante
Pensamiento rápido		Pensamiento lento	

Figura 5.3: Resultados de la prueba piloto

5.4.2. Fase 2. Aplicación

Las 157 respuestas de los estudiantes de los cuatro grupos de segundo grado de secundaria de tres estados del país, se analizaron y se clasificaron según la categorización en la figura 4. En donde se puede apreciar que un 12 % de los estudiantes, resolvió satisfactoriamente el problema cumpliendo con las dos condiciones. El 38 %, logró satisfacer solamente una condición. El 48 %, no satisface ninguna condición. El 2 %, realizó una reformulación del problema, incorporando números fraccionarios que les permitió a la mayoría de ellos, cumplir con las dos condiciones.

En esta segunda fase, nadie intentó resolver el problema mediante sistema de ecuaciones algebraicas, lo cual coincide con el resultado en la prueba piloto. En dicha prueba, solo uno de ellos intentó expresar una ecuación algebraica sin resultado alguno cuando se le preguntó, ¿de qué otra forma lo puedes resolver?

De la población integrada por 157 estudiantes, 19 de ellos (12 %), resolvieron satisfactoriamente el problema, cumpliendo con las dos condiciones solicitadas en su planteamiento, (de doble carga y de igual carga). La mayoría se apoyó de representaciones esquemáticas, simbólicas y numéricas, solo 7 lo hicieron con operaciones mentales.

Por otra parte, 59 estudiantes (38 %) de la población total, en sus respuestas satisfacen solo una condición (de doble carga o de igual carga), lo cual resulta lo mismo que no resolver el problema. Sin embargo se ha categorizado como un bloque porque se aprecia que realizaron un esfuerzo. La mayoría de estos estudiantes se apoyaron de representaciones esquemáticas, simbólicas y numéricas, solo ocho utilizaron el dibujo pictórico.

Aunado a lo que se menciona en el párrafo anterior, 76 estudiantes que representan el 48 % de la población, no satisfacen ninguna de las condiciones del problema (de doble carga o de igual carga), porque la mayoría no alcanza a comprenderlo (50 estudiantes).

El resto registró representaciones simbólicas o numéricas y dibujos pictóricos.

Es importante mencionar, que 3 estudiantes (2%) utilizaron números enteros y fraccionarios. Estos estudiantes reformularon el problema con creatividad, de tal forma que al realizar las operaciones, 2 de ellos cumplen con las dos condiciones. Definieron que la carga de intercambio fuera de medio saco, por lo tanto la diferencia entre las dos cantidades que eligieron es uno.

Categorías	Subcategorías	Veracruz	Puebla	Tlaxcala	Veracruz	Total
Satisfacen las dos condiciones	Operaciones mentales	2	3	2	0	7
	Símbolos y números	0	1	2	2	5
	Esquemas	7	0	0	0	7
Satisfacen una condición	Símbolos y números	4	2	6	12	24
	Esquemas	10	0	4	3	17
	Símbolos y números (confusión aritmética)	3	4	3	0	10
	Dibujos pictóricos o realistas	2	2	2	2	8
No satisfacen ninguna condición	Símbolos y números	3	5	4	0	12
	Dibujos pictóricos o realistas	0	4	5	5	14
	Sin comprensión	10	14	2	24	50
Números fraccionarios	Satisfacen las dos condiciones	2	0	0	0	2
	No satisfacen ninguna condición	0	1	0	0	1
Total		43	36	30	48	157

Figura 5.4: Categorización de respuestas en la segunda fase

5.5. CONCLUSIONES

Abordaremos las conclusiones de este trabajo en tres sentidos. El primero tiene que ver con lo esperado por los autores del libro y el programa de estudio de matemáticas II, el segundo con el comportamiento de los estudiantes y el tercero se relaciona con los alcances y limitaciones de esta investigación.

Existe discrepancia, entre lo que establece el programa de estudio de matemáticas II de segundo grado de secundaria, emitido por la Secretaría de Educación Pública. Dicho programa establece en el bloque V, eje “*Sentido numérico y pensamiento algebraico: Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2×2 con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución)*”. Como aprendizaje esperado se define “*Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*”. Por otra parte, lo esperado por los autores en correspondencia con el programa de estudio, es que dicho problema, sea uno de los instrumentos idóneos para el aprendizaje de tema. Lo ubican en el bloque V del libro Comunidad Matemáticas II y establecen

como aprendizaje esperado “*Resuelve problemas que implican el uso de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*”. Sin embargo, los resultados demuestran que ningún estudiante domina dicho tema y más aún, lo desconocen. Esto sugiere que existe un desfase entre el nivel cognitivo que propone el libro de texto y el programa de estudio, con relación al nivel cognitivo real de los estudiantes de segundo grado de secundaria sobre este tema.

Si consideramos lo que establece Kahneman (2012), acerca del pensamiento rápido, lo que él denomina visión o pensamiento intuitivo y que opera de manera rápida y automática con poco o ningún esfuerzo, podemos mencionar que el 38 % (59) de los estudiantes que cumplieron con una condición son de pensamiento rápido, porque emitieron una respuesta rápida definiendo dos cantidades con diferencia de dos números, ejemplo: caballo 3 y burro 5, se cumple la condición de igual carga pero no la de doble carga. Otro de los ejemplos frecuentes fue definir directamente dos números iguales: caballo 3 y burro 3, con éste se cumple la condición de doble carga, pero no la de cargas iguales, sin embargo ellos aseveran, si el caballo le da uno al burro, éste lleva el doble, y si el burro se lo regresa, quedan con cargas iguales. Estos estudiantes se conforman con una condición y no realizan el esfuerzo por encontrar la segunda.

El 38 % de respuestas rápidas, queda por debajo de lo obtenido en la prueba piloto, 44 %. En relación a las respuestas lentas, el 12 % de los estudiantes que cumplieron con las dos condiciones, se pueden considerar de pensamiento lento, ya que según Kahneman (2012), centran la atención en las actividades mentales esforzadas que lo demandan, incluidos los cálculos complejos, penetrando en la estructura matemática del problema. El 12 % queda muy por debajo del 56 % de respuestas lentas en la prueba piloto. La razón estriba en el acompañamiento que se les dio a los estudiantes a lo largo de la entrevista clínica. Dentro del grupo de pensadores rápidos, se encuentran estudiantes que revelan confusiones en las operaciones aritméticas. Definen dos cantidades con diferencias de dos números (caballo 3 y burro 5), al intercambiar carga, del burro al caballo, se cumple la condición de igual carga, viceversa, le suman al burro uno y no se lo restan al caballo, esta situación se presentó en las tres escuelas (tres estados del país).

Cabe mencionar que en los estudiantes que lograron satisfacer las dos condiciones (de doble carga y de igual carga), no existe alguno que se haya apoyado de dibujos pictóricos. Por otra parte una minoría de los dibujantes pictóricos se encuentra en el grupo de pensadores rápidos, siendo mayor cantidad en el grupo de estudiantes que no lograron ninguna condición.

No existe diferencia alguna entre el comportamiento de los estudiantes de las tres escuelas. Por el contrario, existe similitud a pesar de que se encuentran a distancias considerables y con diferentes contextos institucionales y socioculturales.

La investigación también revela respuestas no esperadas. Un 2 % de estudiantes reformularon el problema para estar en posibilidad de satisfacer las dos condiciones, lo que abre la posibilidad de iniciar una nueva investigación sobre reformulación de problemas, escenario quizás idóneo para que los estudiantes revelen su creatividad.

Bibliografía

- [1] Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socio epistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(8), pp. 9 – 28.
- [2] Castrejón, A., Vicuña, A., Reyes, M. & Castrejón, O. (2016). *Comunidad Matemática II*. México, D.F., Ediciones SM., p. 222.
- [3] Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos. 2008, 736f* (Doctoral dissertation, Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática)-Facultad de Magisterio, Universitat de Valencia: Servicio de Publicaciones de la Universitat de València, 2008.
- [4] Choppin, A. (1992). Los manuales escolares: Historia y actualidad. *París: Hachette*.
- [5] Escolano, A. (1994). La investigación histórico-educativa y la formación de profesores. *Revista de ciencias de la educación: Organo del Instituto Calasanz de Ciencias de la Educación*, Madrid (157), pp. 55-70.
- [6] Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45(5), pp. 765-777.
- [7] Fan, L., & Kaeley, G. S. (2000). The Influence of Textbooks on Teaching Strategies: An Empirical Study. *Mid-Western Educational Researcher*, 13(4), pp. 2-9.
- [8] Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, 45(5), pp. 633-646.
- [9] Gavilán, P. (1996). “Historia del álgebra en la educación secundaria: resolución de problemas históricos”. *SUMA*, N° 22, pp. 83-90.
- [10] Kahneman, D. (2012), *Pensar rápido, pensar despacio*. Los Ángeles, EUA. Editorial Debate.
- [11] Meavilla, V., (2015). *Siete ancianos van a Roma*. España, Editorial Guadalquivir, p. 15.
- [12] Puig, L., & Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. In *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48).

6 DINÁMICA DE LA CULTURA

La Cultura como Lagrangiana y su Evolución Temporal

Eduardo Alfonso Malagón Mosqueda

A fin de estudiar la evolución de la cultura humana y, extendiendo el concepto de cultura, el de otras especies, se propone una serie de conceptos que permiten definir el concepto Cultura de un Sistema. A partir de esto se postula un Principio de Optimización Cultural, que es tratado como principio de mínima acción y modelado mediante Cálculo de Variaciones. El trabajo establece un conjunto de ecuaciones diferenciales, ecuaciones de Euler Lagrange, que rigen la evolución temporal de la Cultura del Sistema como función Lagrangiana. Se explora la factibilidad del principio y del modelo teórico mediante su aplicación a tres casos particulares, uno de ellos es la dinámica de una población de presas y depredadores, en el que se obtiene como resultado la conocida ecuación de Lotka Volterra, lo que es indicativo de la plausibilidad de la propuesta.

6.1. Justificación

El trabajo se justifica por la posibilidad de realizar predicciones sobre la evolución temporal de un sistema cultural o de las relaciones entre sus subsistemas. El estudio de culturas reales implica criterios de modelación que el propio trabajo ofrece para proceder a su verificación empírica.

6.2. Hipótesis

La evolución temporal de la Cultura de un Sistema se rige por un Principio de Optimización Cultural que establece que la trayectoria real del sistema cultural, es la curva en el espacio de configuraciones que tiene longitud mínima. En términos llanos el principio indica que dado un estado de conocimiento o de creencias, un sistema cultural evolucionará de manera que maximizará los objetos reales o virtuales construidos por esta cultura.

6.3. Dinámica de la Cultura (Definiciones)

6.3.1. Sujeto Antrópico o Sujeto

Para los fines de este ensayo cualquier ser vivo con sistema nervioso es considerado un Sujeto Antrópico. Recíprocamente cualquier sujeto antrópico es un ser vivo con sis-

tema nervioso. En esta definición se da por supuesto el concepto de sistema nervioso en tanto materia de la Biología. Salvo indicación en contrario sólo nos referiremos a sujetos antrópicos y los podremos denominar simplemente sujetos.

6.3.2. Objeto Antrópico

Definimos un Objeto Antrópico como un objeto cuya producción o creación tiene como condición necesaria la intervención de un sistema nervioso, en consecuencia tiene como condición necesaria la intervención de un sujeto antrópico. La dificultad de esta definición radica en decidir si un determinado objeto es o no objeto antrópico, esta dificultad es irrelevante para los fines del trabajo. Según la definición, los objetos antrópicos no necesariamente tienen existencia material dado que productos del pensamiento como la música, deben ser considerados objetos antrópicos en tanto su creación requiere la intervención de un sistema nervioso. En consecuencia todos los objetos ideales, virtuales o materiales creados por una cultura son objetos antrópicos.

La producción de objetos antrópicos no es privativa de los seres humanos, los animales son productores de objetos antrópicos. De esta manera, nidos, colmenas y madrigueras son objetos antrópicos y podríamos incluso, aunque no es necesario, definir la Antropósfera como el total de objetos en el Planeta Tierra que existen por la mediación de seres con sistema nervioso.

Los seres vivos con sistema nervioso, incluidos los humanos, son y somos objetos antrópicos, dado que el sistema nervioso es necesario para su propia reproducción y sobrevivencia y por tanto para su creación y existencia. En particular el sistema nervioso es necesario para obtener los alimentos y sobrevivir, así como para realizar las prácticas que permiten la reproducción. Del mismo modo, el alimento de un ser vivo con sistema nervioso, es un objeto antrópico ya que es un sujeto antrópico quien lo identifica y se lo apropia como alimento y en ese acto lo convierte en objeto antrópico. De esta manera, las plantas en sí mismas no constituyen objetos antrópicos, pero en tanto alimentos de un ser vivo con sistema nervioso si lo son, al igual que las plantas cultivadas. Las plantas no cultivadas pueden ser o no objetos antrópicos.

Hemos elegido el término antrópico para articular los conceptos de anthropos (ser humano) y entropía, denotando que los seres humanos, principal pero no exclusivamente, son productores de objetos que reducen la entropía, es decir crean objetos estructurados que en forma natural no existirían y para hacerlo aplican su inteligencia sobre objetos naturales, creando así objetos artificiales.

6.3.3. Antropía de un Objeto

El concepto de Antropía de un Objeto sólo se aplica a los objetos antrópicos y se aplica en lo particular a los sujetos antrópicos ya que son al propio tiempo objetos antrópicos. Resulta entonces pertinente hablar de la antropía de un objeto y de la antropía de un

sujeto. Definimos la antropía de un objeto, como una función $A = F(I, E)$ donde I es la información total requerida para su existencia como objeto antrópico y E es la energía total requerida para producirlo y mantenerlo como objeto antrópico. Podemos justificar esta definición por el hecho de que dado un objeto antrópico es factible en principio establecer un conjunto de instrucciones (información) que permiten crear y mantener al objeto aplicando una determinada energía. En esta definición el uso de energía destinada a la creación del objeto conforme a una determinada información, requiere la intervención de un sistema nervioso y hace pertinente usar el término antropía.

6.3.4. Cognopía

Como noción la cognopía se refiere a la capacidad de un sujeto antrópico para crear objetos antrópicos y por ello definimos la Cognopía de un Sujeto como la suma de las antropías de los distintos objetos antrópicos que es capaz de producir, sin incluir la energía requerida. Esto da a la noción de cognopía un carácter mensurable y evita el carácter dicotómico de tener o no tener capacidad para producir objetos antrópicos.

De esta definición se deduce que la cognopía de un sujeto en lo general no permanece constante, ya que en un tiempo determinado el sujeto puede ser capaz de producir un objeto antrópico distinto a los que era capaz de producir en un tiempo anterior y por tanto su cognopía se incrementa. Este crecimiento representa una noción generalizada de lo que se denomina aprendizaje, del mismo modo que cognopía representaría una noción generalizada del concepto de conocimiento. De hecho podría considerarse generalizada y no antropomorfa, ya que el conocimiento humano sería cognopía, pero las capacidades animales a las que se suele rehusar denominar conocimiento, son cognopía.

Cabe destacar que el concepto de sujeto antrópico es una noción generalizada de sujeto inteligente y no es una noción antropomorfa. De esta manera, ser humano implica ser antrópico, pero la implicación inversa no es verdadera, los animales son seres antrópicos. La definición tiene un carácter incluyente que busca eludir conclusiones tautológicas que excluyen a los no humanos de la inteligencia y el aprendizaje por el hecho de definir ambos conceptos por sus características humanas.

Un sujeto antrópico puede crear un ser vivo de su misma especie por su simple reproducción biológica, en este caso en la definición de cognopía no se incluye la información genética contenida en el ser reproducido, es decir, no se incluye la información genética contenida en la célula fertilizada que da lugar al nuevo ser y sólo se incluye el conocimiento que emplea para aparearse. Tal es el caso de los recursos empleados por un macho frente a otros machos de su grupo para asegurar su reproducción y su descendencia, así como el caso de los recursos empleados por la hembra para elegir a los machos con qué copula.

6.3.5. Energía

El concepto de energía se da por definido en los términos de las ciencias físicas y químicas, a partir de esto se entiende por energía de un objeto antrópico, la energía empleada en la producción del objeto antrópico. En estricto sentido, al crear un objeto antrópico los sujetos antrópicos no crean energía ni materia, solamente emplean conocimiento, es decir cognopía, para transformar materia y energía disponibles. Esta disponibilidad depende de la cognopía de los sujetos, ya que una forma de energía puede no reconocerse como tal o no ser aprovechable por insuficiente cognopía de los sujetos.

6.3.6. Sistema Antrópico

Definimos Sistema Antrópico como el sistema social constituido por una comunidad de sujetos antrópicos, sus objetos antrópicos y sus recursos naturales o no antrópicos, incluyendo la energía disponible.

6.3.7. Antropía, Cognopía y Energía del Sistema

Definimos la antropía de un sistema antrópico como la suma de la antropía de los objetos antrópicos contenidos en este sistema. Del mismo modo, definimos la cognopía de un sistema antrópico como la suma de la cognopía del total de los sujetos antrópicos contenidos en el sistema. Finalmente, definimos la energía disponible por un sistema antrópico como la suma de la energía disponible para el total de sujetos antrópicos en el sistema.

6.3.8. Relaciones entre los Conceptos

El concepto de antropía de un objeto da lugar implícitamente al concepto de antropía, en tanto característica que se puede asignar a los objetos antrópicos, del mismo modo que el concepto peso en tanto propiedad asignable a un objeto en un campo gravitacional. En consecuencia, podemos emplear indistintamente el concepto de antropía en lugar de antropía de un objeto o antropía de un sistema.

El mismo razonamiento puede aplicarse a la cognopía de un sujeto o de un sistema, por tanto podemos hablar indistintamente de cognopía. Se puede considerar a la antropía, la cognopía y la energía como funciones aplicadas sobre los objetos, ya que podemos asociar a cada objeto o sistema la antropía del objeto o del sistema, a cada sujeto o sistema podemos asociarles también su cognopía y a cada objeto le podemos asociar la energía aplicada en su creación. Del mismo modo, podemos asociarle a cada sujeto o sistema la energía disponible para cada uno.

Conviene destacar destacar que la cognopía es una función no lineal, ya que se puede establecer que la cognopía genera cognopía y que la producción de cognopía en un sistema depende de la cognopía existente en el mismo. Daremos por establecida esta

característica basándonos en los resultados de la neurofisiología, la neuropsicología, la psicología del aprendizaje y la antropología cognitiva. Del mismo modo, podemos remitirnos a la Teoría de la Evolución para fundamentar que las capacidades cognitivas se retroalimentan en virtud de la selección natural y que la producción de cognopía depende de la cognopía existente.

Podemos establecer que la producción de cognopía depende de la antropía existente, para ello es suficiente comprender que el conocimiento es una forma particular de la cognopía y que está suficientemente fundado que la producción de conocimiento en una sociedad depende de los medios materiales y culturales que posee. Se puede establecer también que la cognopía depende de la energía disponible así como ésta depende de la cognopía existente.

6.4. Planteamiento del Problema y Modelación

Con base en estos conceptos, definimos la Cultura de un Sistema como una función $L = L(C, E, A, t)$ donde C, E y A representan la cognopía, la energía y la antropía del sistema respectivamente y t el tiempo. A partir de esto formulamos el problema a resolver:

¿Cuál es, si existe, el sistema de ecuaciones que establecen la evolución de L en el tiempo y por tanto la evolución de la cultura del sistema en el tiempo?

A fin de establecer las ecuaciones buscadas, es conveniente elegir el Campo de los Números Complejos como dominio de las funciones C, E y A ya que mediante esta elección podemos realizar las siguientes definiciones:

Definimos C_K como cognopía cortical, C_L como cognopía límbica y a partir de esto definimos la cognopía como $C = C_K + C_L$. En esta definición estamos asumiendo como cognopía cortical, las capacidades derivadas de la corteza cerebral, especialmente las que corresponden al neocortex, en tanto que por cognopía límbica estamos asumiendo las capacidades derivadas del sistema límbico, o incluso las capacidades derivadas de un sistema nervioso con menor desarrollo. En uno y otro caso, el significado de estas capacidades lo damos por supuesto y como derivado de la neurofisiología y la neuropsicología.

Definimos A_V como antropía virtual, entendida como la antropía de objetos virtuales, es decir objetos que no son materiales, tales como una sinfonía en tanto secuencia de sensaciones auditivas captadas e interpretadas por un sistema nervioso, una creencia religiosa, una teoría y todo objeto pensado. A_R como antropía material, entendida como la antropía de objetos materiales, tales como una casa, un cuchillo, o la secuencia de vibraciones reales en un medio que conforman la sinfonía. A partir de esto definimos la antropía como $A = A_V + iA_R$

6 DINÁMICA DE LA CULTURA

E representa la energía real, ya que para producir objetos antrópicos reales o virtuales y para generar cognopía cortical o límbica se consume energía del mundo físico.

Hemos establecido que la cultura de un sistema queda descrita mediante la función $L = L(C, E, A, t)$. Esta definición tiene el propósito de determinar la evolución en el tiempo de la cultura del sistema, mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de las funciones C, E, A, t a las que denominaremos ecuaciones de la dinámica del sistema o simplemente ecuaciones del sistema. El propósito sustantivo de este trabajo es generar y proponer tales ecuaciones. Conforme a esta definición, L asocia al vector

$$r = (C, E, A) = ((C_K + iC_L), E_R, (A_V + iA_R))$$

el vector $L = L(C, E, A) = L((C_K + iC_L), E_R, (A_V + iA_R))$

Aquí r y L pertenecen a \mathbb{C}^3 donde \mathbb{C} es el campo de los números complejos.

Partamos de observar que, conforme a su definición, la antropía del sistema es una función de la cognopía y de la energía y que estas funciones dependen a su vez del tiempo, es decir: $A(t) = (C(t), E(t))$

Del mismo modo, a cada instante t le corresponde un vector $r(t) = (C(t), E(t), A(t))$. Adicionalmente la función $A(t) = (C(t), E(t))$ asocia a cada instante t un valor $C(t)$ y un valor $E(t)$, a su vez estos dos valores asocian a cada instante t un valor $A(t)$, en consecuencia, la función $A(t) = (C(t), E(t))$ constituye la ecuación de una superficie en el espacio \mathbb{C}^3 .

Dos puntos r_1 y r_2 correspondientes a los tiempos t_1 y t_2 respectivamente, estarán unidos por una curva r sobre la superficie que corresponde a la función $A(t) = (C(t), E(t))$. Para establecer las ecuaciones buscadas partimos de establecer los siguientes postulados teóricos:

1) De todas las posibles curvas que están sobre la superficie y conectan los puntos r_1 y r_2 sólo una representa la trayectoria real del sistema, es decir los estados de la cultura que sucedieron o sucederán.

2) Esta curva es una función $r(t) = (C(t), E(t), A(t))$ que constituye la trayectoria del sistema entre los tiempos t_1 y t_2

3) Establecemos como Principio de Optimización Cultural la idea de que la curva correspondiente a la trayectoria real del sistema, es la curva sobre la superficie que tiene longitud mínima.

A partir de estos postulados, el problema consiste en deducir cuál es la curva que satisface lo que hemos denominado Principio de Optimización Cultural. Este es un problema estándar del Cálculo Variacional que trataremos con la funcional.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Aquí S es una función (una funcional) que asigna a cada función L el valor S . La condición necesaria para que la función L corresponda a un extremo de esta funcional es que la variación de S sea igual a cero, es decir: $\delta S = 0$.

Para obtener la variación de la funcional sin complicar la notación consideraremos que L depende de una sola variable r y realizaremos la variación a partir de un incremento δr y $\delta \dot{r}$, tenemos entonces $L = L(r, \dot{r}, t)$.

Supongamos que la funcional alcanza su mínimo en la función $r(t)$, entonces para cualquier función $\delta r = r(t) + r_0(t)$ (llamada variación), donde $r_0(t)$ es una pequeña función del mismo tipo que $r(t)$, la funcional S incrementará su valor en la función $r = r(t) + \delta r(t)$. Por construcción en los tiempos t_1 y t_2 las funciones $r(t)$ y $r(t) + \delta r(t)$ deben coincidir, ya que es el lugar de donde parten y donde terminan las trayectorias, si $r(t_1) = r(t_1) + \delta r(t_1)$ entonces $\delta r(t_1) = 0$ y si $r(t_2) = r(t_2) + \delta r(t_2)$ entonces $\delta r(t_2) = 0$.

En consecuencia la variación de S por el cambio $r(t) + \delta r(t)$ está dada por δS

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [L(r(t) + \delta r(t), \dot{r}(t) + \delta \dot{r}(t), t) - L(r(t), \dot{r}(t), t)] dt = 0.$$

Bajo el supuesto de que la variación por construcción es pequeña, podemos desarrollarla en serie de potencias de δr y $\delta \dot{r}(t)$. Este desarrollo incluye términos de orden 1, 2, 3, ..., n pero la condición de que la primera variación se anule implica que podemos conservar sólo el primer término, para expresar a partir de él la variación de S , tenemos entonces:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(r(t), \dot{r}(t), t) dt = 0.$$

Al realizar la variación indicada, suponiendo la continuidad de la función y de su primera derivada, tenemos:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(r(t), \dot{r}(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial r} \delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r} \right] dt = 0.$$

Simplificamos el integrando e integramos por partes mediante las identidades:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta r = \delta r \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad \frac{d}{dt} \delta r = \delta r \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta r \right] - \delta r \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}.$$

Sustituyendo en la integral tenemos:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial r} \delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r} \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial r} \delta r + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta r \right) - \delta r \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right] \delta r dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta r \right) \right] dt = 0\end{aligned}$$

La segunda integral al ser evaluada en t_1 y t_2 es igual a cero ya que la condición es que δr se anule en los extremos, es decir $\delta r(t_1) = \delta r(t_2) = 0$, tenemos entonces:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right] \delta r dt.$$

Esta igualdad debe ser cero para todas las posibles funciones δr lo cual sólo es posible si el término entre corchetes es cero -si pensamos la integral como producto escalar, la función entre corchetes resulta ortogonal a todo el espacio y es necesariamente la función cero-, por lo anterior tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0.$$

Establecidos arriba que a fin de no complicar la notación matemática realizaríamos el desarrollo considerando que la función L dependía sólo de una variable r y su derivada \dot{r} . En el caso general, la función L dependerá de varias variables y las variaciones se realizan sobre cada variable. En el caso general tenemos entonces no una ecuación sino un conjunto de ecuaciones, una por cada variable independiente o grados de libertad existentes. Esto implica de manera general el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial L_i}{\partial A_{ij}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_i}{\partial \dot{A}_{ij}} = 0 \qquad \frac{\partial L_i}{\partial C_{is}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_i}{\partial \dot{C}_{is}} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial E} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{E}_i} = 0. \quad (6.1)$$

El índice i corre sobre los subsistemas, en tanto que los índices j y s corren sobre las componentes de A y C respectivamente.

Estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de Euler. En la Física, como parte de la Mecánica son conocidas como ecuaciones de Lagrange y la función L se conoce como Lagrangiana. La condición de mínimo y las ecuaciones de Euler constituyen resultados bien establecidos en el Cálculo Variacional.

Procederemos a obtener una expresión de la Lagrangiana considerando una única dimensión para la antropía y la cognopía. Partimos entonces de una función Lagrangiana $L = L(C(t), E(t), A(t))$ y buscamos la funcional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Esta funcional debe representar la longitud de la curva Z entre los puntos inicial y final, la cual está dada por la expresión:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}| dt. \quad (6.2)$$

En esta expresión $|\dot{r}|$ representa el módulo o magnitud del vector \dot{r} , en el caso que nos interesa los puntos o vectores $r(t) = r(C(t), E(t), A(t))$ de la curva y por tanto esta misma, se encuentran sobre la superficie dada por la función $A(t) = (C(t), E(t))$. En este caso, podemos expresar la longitud del segmento de la curva Z , en términos de la ecuación de la superficie. Para ello consideramos que $r(t) = r(C(t), E(t))$, dado que sobre la superficie se cumple que $A(t) = (C(t), E(t))$ es decir A es función de C y de E y por tanto r depende en último término solamente de estas mismas dos variables. Tenemos entonces:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}| dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(C(t), E(t))| dt = \int_I |dr(C, E)|.$$

Si calculamos la diferencial tenemos

$$dr = \frac{\delta r}{\delta C} dC + \frac{\delta r}{\delta E} dE.$$

Entonces

$$|dr| = \sqrt{dr dr} = \sqrt{\left[\frac{\partial r}{\partial C} dC + \frac{\partial r}{\partial E} dE \right] \left[\frac{\partial r}{\partial C} dC + \frac{\partial r}{\partial E} dE \right]}.$$

Sustituyendo en la integral tenemos:

$$\begin{aligned} S &= \int_Z |dr(C, E)| = \int_Z \sqrt{\left[\frac{\partial r}{\partial C} \right]^2 dC^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial C} \frac{\partial r}{\partial E} dC dE + \left[\frac{\partial r}{\partial E} \right]^2 dE^2} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\left[\frac{\partial r}{\delta C} \right]^2 dC^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial C} \frac{\partial r}{\partial E} dC dE + \left[\frac{\partial r}{\partial E} \right]^2 dE^2}{dt^2}} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial C} \right)^2 \dot{C}^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial C} \frac{\partial r}{\partial E} \dot{C} \dot{E} + \left(\frac{\partial r}{\partial E} \right)^2 \dot{E}^2} dt. \end{aligned}$$

A partir de esta expresión, encontramos que la Lagrangiana que corresponde a la longitud del segmento de la curva Z es la raíz que aparece en la integral, es decir:

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial C} \right)^2 \dot{C}^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial C} \frac{\partial r}{\partial E} \dot{C} \dot{E} + \left(\frac{\partial r}{\partial E} \right)^2 \dot{E}^2}. \quad (6.3)$$

6.5. Dinámica de una Cultura Particular: Depredadores Simples

A fin de estudiar la pertinencia empírica de esta propuesta teórica y sus posibles resultados, realizaremos el análisis de un caso particular. Consideramos el caso hipotético de un grupo social integrado por sujetos que denominaremos depredadores simples, los cuales tienen una cognopía que se reduce exclusivamente a sus capacidades de caza y reproducción. Se trata de sujetos hipotéticos con características que serían similares a las de depredadores reales con diferencias interindividuales que pueden ser despreciadas, una corteza cerebral escasamente desarrollada y pocas o nulas capacidades para generar alternativas ante variaciones del medio, como consecuencia de una conducta poco flexible. Por las condiciones del problema y dada la escasa diferencia interindividual, supondremos que la cognopía cortical y la antropía virtual son cero. Al no considerar las diferencias interindividuales podemos asociar a cada individuo una cognopía C_0 y una antropía A_0 , así como un mismo consumo energético E_0 por individuo. A partir de esto, la cognopía, la antropía y el consumo de energía para una población con N individuos, están dadas respectivamente por:

$$C = iC_0N \quad A = iA_0N \quad \dot{E} = \frac{dE}{dt} = E_0N.$$

La escasa capacidad o cognopía de los depredadores simples, implica una cultura estática que tiene los mismos rasgos a lo largo de su historia. Esto significa que su Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, ya que a distintos tiempos les corresponde la misma expresión de la Lagrangiana, o sea la misma dinámica a lo largo de la historia de esta cultura. Del mismo modo, dado que todas las direcciones de cambio cultural deben considerarse equivalentes, la Lagrangiana tampoco depende de la dirección del vector $\dot{\mathbf{r}}$ y en consecuencia la Lagrangiana sólo depende de la rapidez de cambio $\dot{\mathbf{r}}^2$.

El vector r está dado por $r = (E, A, C) = (E, iA_0N, iC_0N)$ entonces

$$\dot{\mathbf{r}} = (E_0N_0, (iA_0N)', (iC_0N)) \text{ y } |\dot{\mathbf{r}}|^2 = E_0^2N^2 + [(iA_0N)']^2 + [(iC_0N)]^2$$

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = E_0^2N^2 - (\dot{A}_0^2 + \dot{C}_0^2)N^2 - (A_0^2 + C_0^2)\dot{N}^2 - 2(A_0\dot{A}_0 + C_0\dot{C}_0)N\dot{N}$$

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \xi_0^2N^2 - Q\dot{N}^2 - \dot{Q}N\dot{N}$$

donde $Q = A_0^2 + C_0^2$ y $\xi_0^2 = E_0^2 - \dot{A}_0^2 - \dot{C}_0^2$

tenemos: $\frac{\partial L}{\partial N} = 2\xi_0^2N - \dot{Q}\dot{N}$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = -2Q\dot{N} - \dot{Q}N$ además

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{N}} = -2\dot{Q}\dot{N} - 2Q\ddot{N} - \ddot{Q}N - \dot{Q}\dot{N} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}L_{\dot{N}} = -3\dot{Q}\dot{N} - 2Q\ddot{N} - \ddot{Q}N$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange son entonces:

$$2\xi_0^2 N + 2\dot{Q}\dot{N} + 2Q\ddot{N} + \ddot{Q}N = 0 \quad \text{o} \quad 2Q\ddot{N} + 2\dot{Q}\dot{N} + (2\xi_0^2 N + \ddot{Q})N = 0$$

dividiendo entre $2Q$ resulta finalmente

$$N + \frac{\dot{Q}}{Q}\dot{N} + \frac{2\xi_0^2 + \ddot{Q}}{2Q}N = 0. \quad (6.4)$$

6.5.1. Depredadores Simples con Conducta Rígida

El primer caso específico que consideramos es el de depredadores que tienen una conducta instintiva y rígida. la cual modelamos mediante el supuesto de que \dot{A}_0 y \dot{C}_0 son cero. Bajo esta condición tenemos que $\dot{Q} = \ddot{Q} = 0$ y $\xi_0^2 = E_0^2$ y la ecuación 4 se reduce a:

$$\ddot{N} + \frac{E_0^2}{A_0^2 + C_0^2}N = 0. \quad (6.5)$$

Esta ecuación puede ser expresada como $\ddot{N} + w^2N = 0$.

Este resultado es muy significativo ya que ésta es la ecuación de Lotka Volterra para la relación presa-depredador. Esta ecuación tiene como solución $N = a \cos(ut + b)$ donde a y b son constantes. La validez empírica de esta ecuación es ampliamente conocida, por ello al arribar a ella como caso particular de las ecuaciones de la dinámica del sistema, tenemos un elemento significativo a favor de la pertinencia y plausibilidad del enfoque propuesto.

6.5.2. Depredadores Simples con Capacidades Básicas de Adaptación

En el caso de una especie con una pequeña plasticidad en su conducta, tenemos una capacidad de aprendizaje aun cuando sea pequeña. Por ello consideramos posible un aprendizaje constante y entonces \dot{A}_0 y \dot{C}_0 no son cero, mientras que $\ddot{A}_0 = \ddot{C}_0 = 0$.

Tenemos entonces: $\dot{Q} = 2(A_0\dot{A}_0 + C_0\dot{C}_0) = 2(\dot{A}_0^2 + \dot{C}_0^2)$ y por ello

$$2\xi^2 + \ddot{Q} = 2(E_0^2 - \dot{A}_0^2 - \dot{C}_0^2) + 2(\dot{A}_0^2 + \dot{C}_0^2) = 2E_0^2$$

$$\ddot{N} + \frac{\dot{Q}}{Q}\dot{N} + \frac{E_0^2}{Q}N = 0. \quad (6.6)$$

Simplificamos esta ecuación empleando los parámetros α_1 y α_2 y tenemos:

$$\ddot{N} + 2\alpha_1\dot{N} + \alpha_2^2N = 0.$$

Esta ecuación se puede resolver proponiendo $N = e^{\Phi t}$ y al aplicarla obtenemos:

$$(\Phi^2 + 2\alpha_1\Phi + \alpha_2^2)e^{\Phi t} = 0 \quad \text{entonces} \quad \Phi = -\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}.$$

Esta ecuación característica tiene dos raíces dadas por

$$G_1 = -\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \quad \text{y} \quad G_2 = -\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}.$$

Estas dos raíces dan lugar en principio a dos soluciones particulares de la función $\delta = e^{\Phi t}$ que están dadas por $\delta_1 = e^{\Phi_1 t}$ y $\delta_2 = e^{\Phi_2 t}$. Estas soluciones particulares están determinadas por los parámetros Φ_1 y Φ_2 los cuales a su vez están determinados por los parámetros α_1 y α_2 , específicamente por la diferencia $\alpha_1^2 - \alpha_2^2$, ya que esta diferencia determinará si las raíces de la ecuación característica pertenecen a los números reales o a los imaginarios. Tenemos, en principio, tres alternativas.

- 1) El caso $\alpha_1^2 < \alpha_2^2$ para el cual la solución está dada por $\delta = a \cos(\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} + b)$.
- 2) El caso $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$ entonces $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi = -\alpha_1$ y $\delta = e^{-\alpha_1 t}$.
- 3) El caso $\alpha_1^2 > \alpha_2^2$ en el cual Φ_1 y Φ_2 son reales negativas y $\Phi = c_1 e^{\Phi_1 t} + c_2 e^{\Phi_2 t}$.

Estas tres soluciones representan oscilaciones armónicas decrecientes en el tiempo, entonces la perturbación del sistema implica una oscilación en torno al estado de equilibrio, que decrece paulatinamente para regresar al equilibrio. En consecuencia, **la capacidad de aprendizaje genera una conducta plástica que permite a la población regresar al equilibrio después de una perturbación.**

Cómo hemos visto, el factor $\alpha_1 = \frac{\dot{Q}}{Q}$ que aparece en la ecuación 6, produce un efecto de amortiguación de las oscilaciones correspondientes al caso de aprendizaje cero, esto representa que el efecto de una pequeña capacidad de aprendizaje consiste en la estabilización de la población, lo cual puede interpretarse como consecuencia de una conducta plástica que permite una mejor adaptación al medio.

En el caso específico que estamos abordando tenemos que:

$$2\alpha_1 = \frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{2(A_0\dot{A}_0 + C_0\dot{C}_0)}{A_0^2 + C_0^2} \quad \alpha_1^2 = \frac{(A_0\dot{A}_0 + C_0\dot{C}_0)^2}{(A_0^2 + C_0^2)^2} \quad \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \frac{A_0\dot{A}_0 + C_0\dot{C}_0 - E_0^2}{A_0^2 + C_0^2}.$$

Por esto resulta, como era natural, que el tipo de solución dependerá del tamaño relativo entre $(A_0\dot{A}_0 + C_0\dot{C}_0)$ y E_0 , es decir de la relación del consumo energético individual E_0 con el ritmo de aprendizaje \dot{C}_0 y el ritmo de producción de alimentos y descendientes \dot{A}_0 .

6.5.3. Interacción entre dos Subgrupos de una Cultura

Realizaremos una última aplicación, ahora referida a los efectos derivados de la competencia entre dos subgrupos de un mismo grupo de depredadores simples. Para hacer

este análisis consideraremos que las componentes de la Lagrangiana correspondientes a cada subgrupo o subsistema son independientes entre sí, por ello las ecuaciones relativas a los subsistemas pueden considerarse independientes y las derivadas parciales de la Lagrangiana de un subgrupo, respecto a las variables relativas al otro subsistema, se anulan. De esto se deriva que las soluciones correspondientes a cada subsistema se deducen independientemente.

Al aplicar este criterio a las soluciones $N = e^{\Phi t}$

$N_I = k_1 e^{\Phi_I t}$ y $N_{II} = k_2 e^{\Phi_{II} t}$ para los subgrupos I y II, resulta:

$$\ln N_I = \ln k_1 + \Phi_I t \quad \text{y} \quad \ln N_{II} = \ln k_2 + \Phi_{II} t.$$

Al igualar los tiempos obtenemos

$$\frac{\ln N_I - \ln k_1}{\lambda_I} = \frac{\ln N_{II} - \ln k_2}{\lambda_{II}} \quad \text{y} \quad \ln N_I = \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \ln N_{II} - \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \ln k_2 + \ln k_1.$$

Haciendo $r = \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}}$ y aplicando la función exponencial tenemos:

$$N_I = e^{\ln N_{II} - \ln k_2 + \ln k_1} \quad N_I = e^{(\ln N_{II})^r} e^{(\ln k_2)^{-r}} e^{\ln k_1}$$

$$N_I = N_{II}^r k_1 k_2^{-r} \quad N_I = \frac{k_1}{k_2^r} N_{II}^r.$$

Dado que $A = A_0 N$ tenemos $N = \frac{1}{A_0} A$ aplicando esto a ambos subsistemas:

$$A_I = \frac{k_1 A_{0I}}{(k_2 A_{0II})^r} A_{II}^r. \quad (6.7)$$

Esta ecuación es conocida en múltiples campos de estudio como fórmula alométrica y significa que los ritmos relativos de desarrollo de un subsistema en relación con otro se mantienen constantes, pero en este caso el significado debe ser interpretado con mayor profundidad. Debemos observar que en la ecuación alométrica el factor determinante de la relación entre los dos subsistemas es el exponente $r = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

$$\text{Dado que} \quad \lambda = \alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \quad \alpha_1 = \frac{\dot{Q}}{2Q} = \frac{A_0 \dot{A}_0 + C_0 \dot{C}_0}{A_0^2 + C_0^2} \quad \alpha_2^2 = \frac{E_0^2}{Q}.$$

Resulta que la relación entre los dos subsistemas depende fundamentalmente de estos dos factores, es decir, depende de la diferencia de las capacidades iniciales A_0 y C_0 en cada subsistema, así como del ritmo de crecimiento de \dot{A}_0 y \dot{C}_0 . En consecuencia, la relación depende de las distintas capacidades de aprendizaje entre los individuos de los dos subsistemas, lo relevante es que depende de forma exponencial. Resulta, en términos llanos, que una pequeña diferencia en las capacidades de aprendizaje de un subsistema respecto a otro, genera una diferencia sustancial, exponencial, en la capacidad de desarrollo de un subsistema a costa del otro. Es decir una pequeña diferencia genera una gran diferencia.

6.6. CONCLUSIONES Y PREGUNTAS ABIERTAS

El enfoque propuesto y su formalismo matemático tienen los siguientes criterios ontológicos y metodológicos que deben ser aplicados en el estudio de sistemas culturales:

1) Los objetos culturales y las relaciones entre los sujetos en estudio, deben ser pensados como objetos y sujetos antrópicos. De esta manera, catedrales, música o enredaderas deben ser consideradas como objetos antrópicos.

2) Cada objeto antrópico debe su existencia a la cognopía de los sujetos antrópicos que lo crearon y a la energía empleada para hacerlo. Esta cognopía corresponde al estado de conocimiento o de creencia de los sujetos antrópicos.

3) En el estudio de un sistema cultural, es factible establecer las particiones del sistema en subsistemas pertinentes al estudio, esta partición corresponde al papel del análisis en tanto que la relación de los diferentes subsistemas entre sí y con el sistema, corresponden a la síntesis o, si así se quiere ver, a una perspectiva holística. Debemos destacar que no se trata de una u otra perspectivas, sino de la presencia de ambas en el mismo acto de conocer. Estas particiones del sistema dependen del estudio en cuestión, podemos subdividirlo considerando subgrupos de sujetos antrópicos, clases de objetos antrópicos, relaciones entre subsistemas o respecto al sistema o subdividirlo en función de distintas clases de cognopía. La elección es un criterio metodológico fundamental.

4) La partición del sistema en subsistemas tiene el propósito de establecer las ecuaciones correspondientes a cada uno de ellos. Las ecuaciones del sistema y los subsistemas están dadas por la ecuación 1.

5) La dinámica de un sistema bajo esta teoría se expresa como pautas de crecimiento, intercambio y distribución de la antropía, la cognopía y la energía entre subsistemas. El modelo teórico predice la existencia de relaciones no lineales que dan lugar a intercambios y distribuciones con fenómenos recurrentes de concentración y realimentación, dependientes de las condiciones iniciales. Este es el caso de la ecuación alométrica encontrada para los crecimientos relativos de la población de dos subgrupos.

6) La dificultad metodológica sustancial consiste, más allá de las matemáticas requeridas, en la comprensión de las condiciones del fenómeno bajo estudio y su modelación como objeto o sistema teórico, ya que son estas condiciones las que hacen factible el establecimiento de las ecuaciones del sistema y los subsistemas y por tanto la deducción de su dinámica y evolución en el tiempo.

Este es el enfoque aplicado en los casos estudiados, de su tratamiento destaca que la especie de depredadores simples es estrictamente teórica, es decir no existe en la realidad. Sin embargo, al considerarla teóricamente es factible asignarle características también teóricas como una escasa diferencia interindividual, una cognopía y una antropía básicas

correspondientes exclusivamente a la casa y reproducción, o bien capacidades de aprendizaje nulas o pequeñas.

Estas consideraciones corresponden a la componente formal de la teoría. La componente empírica es resultado de su confrontación con la realidad, lo cual conlleva a responder preguntas sustanciales tales como: ¿existe una especie o grupo de animales cuyas características sean asimilables al concepto teórico de depredador simple? o al de depredador simple con capacidad de aprendizaje mínima? ¿estas especies reales son ranas y lobos respectivamente? ¿la dinámica poblacional de estos grupos o especies es igual o sustancialmente igual a la predicha por la teoría? Estas preguntas significan la exigencia del criterio de falzabilidad que es necesario en cualquier teoría de cualquier campo de estudio de la realidad.

Para concluir el presente trabajo y a fin de reflexionar sobre las posibilidades de la propuesta, proponemos el siguiente grupo de hipótesis o preguntas teóricas que nos limitamos a proponer para estudios posteriores:

1) En virtud del efecto de retroalimentación de la antropía, puede existir una Ley de Crecimiento antrópico, deducible de las ecuaciones del sistema.

2) Si construimos la noción de Diferencial Antrópico, entendida como la diferencia de antropía entre dos objetos y la noción de Diferencial Antrópico General como la suma de los diferenciales antrópicos de un sistema, podría suceder que el diferencial antrópico general crece con la antropía total, de lo cual derivaría una ley de crecimiento del diferencial antrópico general.

3) Es posible que cada subsistema tome del sistema una parte que dependa de la antropía y cognopía de sus sujetos, en una especie de relación alométrica, dando lugar a una ley de la concentración de la antropía.

4) La concentración inicial de antropía en un subsistema, podría tener como efecto una concentración creciente a costa de otros subsistemas, hasta puntos de inflexión que afecten la permanencia de alguno de ellos.

5) La distribución de la antropía y la cognopía entre los subsistemas, podría ser altamente dependiente de las condiciones iniciales.

6) El crecimiento de la cognopía de un subsistema, podría tener como efecto la modificación sustancial de la dinámica del sistema en su conjunto.

7) La modificación de estados de creencia y la consecuente modificación del tipo de objetos antrópicos que generan, podría implicar la modificación de la dinámica del sistema. En la terapia psicológica, la aceptación de un estado de creencia alternativo, por el reconocimiento de una nueva perspectiva, podría generar una modificación general de

6 DINÁMICA DE LA CULTURA

la conducta.

8) Las prácticas estereotipadas derivadas de estados de creencia, podrían constituir un fenómeno autocatalítico y de realimentación que consuma la energía del sistema y haga repetitivos los objetos antrópicos reales y virtuales.

9) En sistemas con alta cognopía, la retroalimentación entre antropía y cognopía podría generar una concentración de la antropía en un subsistema a costa de los demás, haciendo improbable o inestable una distribución uniforme de la antropía o de los objetos altamente antrópicos, este podría ser el caso de las sociedades humanas. Se podría producir también una concentración de objetos de antropías similares en un mismo subsistema, como serían casas del mismo tipo en una misma zona de una ciudad o la producción de un mismo tipo de música en una sociedad.

10) En sociedades de una alta cognopía, la posible concentración de antropía y de objetos altamente antrópicos, puede implicar que una mayor uniformidad sea posible sólo mediante la incorporación de cognopía cortical derivada del crecimiento de la cognopía promedio de los individuos o de una masa crítica de ellos. En el primer caso daría lugar a una redistribución estable e inestable en el segundo.

11) Una distribución uniforme de la antropía en sistemas con alta cognopía cortical, tales como las sociedades humanas, podría requerir una cognopía adicional superior a la del individuo promedio de la especie, por lo que una distribución uniforme sería inestable o sólo temporal.

Es importante reiterar finalmente, que este grupo de hipótesis sólo busca establecer una heurística que contribuya a la comprensión del modelo teórico propuesto así como al desarrollo de estudios posteriores derivados del mismo.

7 Número cromático de algunas gráficas tipo Kneser

Jesús Leños, Luis Manuel Ríos Castro, Luis Manuel Rivera
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas

Sea S un conjunto de n puntos en posición general en el plano, con $n \geq 3$ (i.e., no existen tres puntos colineales). Se define a $D(S)$ como la gráfica cuyos vértices son todos los subconjuntos de tamaño 2 de S , tal que dos vértices $\{x_1, x_2\}$ y $\{y_1, y_2\}$ en $D(S)$ son adyacentes si y sólo si el segmento de recta que une a x_1 con x_2 es disjunto del segmento de recta que une a y_1 con y_2 . En este trabajo diremos que la gráfica $D(S)$ es una *gráfica tipo Kneser*. Se define

$$d(n) := \text{máx} \{ \chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ en posición general, } |S| = n \},$$

en donde $\chi(D(S))$ es el número cromático de $D(S)$. En 2005, G. Araujo et al. [2] obtuvieron varias cotas para $d(n)$, en particular demostraron que $d(7) = 5$. A conocimiento de los autores este es el último valor exacto publicado. Calcular $d(n)$ de manera exacta parece un problema difícil en general. En este trabajo se propone una configuración S_{12} de 12 puntos en posición general en el plano tal que $\chi(D(S_{12})) = 10$, lo que, junto con algunos resultados previos, permiten demostrar que $d(n) = n - 2$ para $8 \leq n \leq 12$.

7.1. Introducción

Los primeros resultados sobre el número $d(n)$ se publicaron en el año 2005 por G. Araujo et al. [2], ellos estudiaron $d(n)$ para cualquier entero $n \geq 3$ y obtuvieron las siguientes cotas,

$$5 \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor \leq d(n) \leq \min \left\{ n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{2} \right\}, \quad (7.1)$$

En particular demostraron que $d(7) = 5$.

En 2011 en [4] y [5] mejoraron la cota superior e inferior, respectivamente, obteniendo

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \right\rfloor \leq d(n) \leq n - \sqrt{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{2}(\ln n) + 4.$$

Meses después, Jakob Jonsson [6] demostró que la cota inferior obtenida en [5] es la mejor posible para el caso en el que S está en posición general y convexa.

En 2011, R. Fabila, D. Wood y J. Jonsson [5,6] determinaron $d(|S|)$ de manera exacta para el caso en el que S está en posición general y convexa. En este trabajo se demuestra el siguiente

Teorema 1. *Para cada entero n , con $8 \leq n \leq 12$, se tiene que $d(n) = n - 2$.*

7.2. Definiciones y resultados auxiliares

Una **vértice coloración** de gráfica G es una función $c: V(G) \rightarrow C$, donde C es un conjunto finito cuyos elementos denominaremos **colores**. Una vértice coloración $c: V(G) \rightarrow C$ es **propia**, si para cualesquiera vértices adyacentes v y w se tiene que $c(v) \neq c(w)$. Si c es una vértice coloración propia de G y $|C| = k$, se dice que G es **k -coloreable**. El **número cromático** $\chi(G)$ de G es el menor entero positivo k para el cual existe una k -coloración propia de G . En tal caso se dice que G es **k -cromática**.

En [2] demostraron que $d(n) \leq n - 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. En este trabajo vamos a demostrar que $d(m) = m - 2$ para $3 \leq m \leq 12$.

Para un conjunto de S puntos en posición general en el plano, denotaremos por $K_n(S)$ a la gráfica completa geométrica inducida por S .

Notemos que como el conjunto de vértices $V(D(S))$ está en correspondencia uno a uno con el conjunto de aristas $E(K_n(S))$ de la gráfica $K_n(S)$, entonces cada vértice coloración propia de $D(S)$ induce, de manera natural, una coloración sobre el conjunto de aristas de $K_n(S)$.

Ilustraremos con un ejemplo una característica notable que poseen tales coloraciones de $E(K_n(S))$.

En la figura 7.1 tenemos a la izquierda un conjunto S de cuatro puntos en posición general y no convexa junto con su correspondiente $K_4(S)$ y a la derecha su respectiva gráfica $D(S)$. Ahora considere la siguiente vértice coloración $c: V(D(S)) \rightarrow C$ de $D(S)$: $c(12) = c(23) = \text{amarillo}$, $c(13) = c(14) = \text{verde}$ y $c(24) = c(34) = \text{rojo}$. Notemos que c es una 3-vértice coloración propia de $D(S)$. La correspondiente arista coloración de $K_4(S)$ inducida por c se muestra en la figura 7.1 (izquierda). Observe que si e y f son un par de aristas arbitrarias de una misma clase cromática en $K_4(S)$, entonces e y f se cruzan ó son adyacentes. A estas clases cromáticas de aristas en $K_n(S)$ se les conoce como **“trackles”**.

Recíprocamente, cada partición de las aristas de $K_n(S)$ en trackles, induce una vértice coloración propia de $D(S)$. Entonces, una manera de analizar las coloraciones propias de $D(S)$ es estudiar las arista coloraciones de $K_n(S)$ que inducen una partición de $E(K_n(S))$ por trackles. De ahora en adelante, en lugar de estudiar coloraciones propias de los vértices de $D(S)$, analizaremos arista coloraciones de $K_n(S)$ por trackles.

Comenzamos con algunos resultados auxiliares.

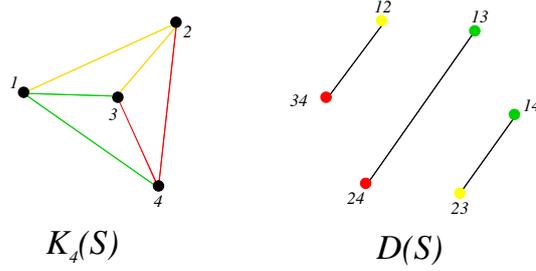


Figura 7.1: Una vértice coloración propia para $D(S)$ induce una arista coloración de $K_4(S)$.

Lema 2. *Sea S un conjunto de $k \geq 3$ puntos en posición general. Si $\chi(D(S)) = k - 2$ y S' es cualquier subconjunto de k' puntos de S con $k' \geq 3$, entonces $d(k') = \chi(D(S')) = k' - 2$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que $d(k') < k' - 2$. Entonces existe una $(k' - 3)$ -coloración propia de $D(S')$. Sea $\alpha: V(D(S')) \rightarrow \{c_1, \dots, c_{k'-3}\}$ tal coloración y sea α' la coloración inducida por α sobre las aristas de $K_{k'}(S')$. Sea $S'' = S \setminus S'$. Claramente, $K_{k'}(S')$ es subgráfica de $K_k(S)$.

Ahora, elegimos un vértice v de S'' y coloreamos, con el color c_v , a todas las aristas de $K_k(S)$ que son incidentes con v y que no han sido coloreadas. Aplicando este proceso a cada vértice de S'' se obtiene una coloración β' de las aristas de $K_k(S)$ con exactamente $(k' - 3) + |S''| = k - 3$ colores. Notemos que β' induce de manera natural una $(k - 3)$ -coloración propia de $D(S)$, lo cual contradice que $\chi(D(S)) = k - 2$. \square

Del lema 2 y la figura 7.2 se tiene la siguiente

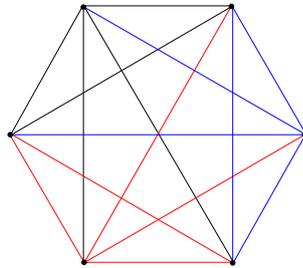


Figura 7.2: Si R_6 es un conjunto de seis puntos formando un hexágono convexo, entonces $\chi(D(R_6)) = 3$.

Proposición 3. *Sea R un conjunto de puntos en el plano en posición general. Si R contiene un subconjunto de seis puntos formando un hexágono convexo, entonces $\chi(D(R)) < |R| - 2$.*

En vista de la proposición 3, de ahora en adelante restringiremos nuestro estudio a configuraciones de puntos que no contengan hexágonos convexos. Sin embargo no existen conjuntos de puntos grandes que cumplan con tal propiedad. Para S conjunto de puntos

en posición general, sea

$$f_0(k) := \min\{f(k) : |S| = f(k), S \text{ contiene un } k - \text{ágono convexo}\}.$$

En 1935 Erdős y Szekeres en [3] demostraron que $f_0(k) \leq \binom{2k-4}{k-2}$ y conjeturaron que
Conjetura (Erdős-Szekeres, 1935) *Para cada entero $k \geq 3$, $f_0(k) = 2^{k-2}$.*

7.2.1. Notación

Consideremos la siguiente configuración de puntos en posición general

$$Q_{12} := \{(-130, 80), (-130, -80), (130, 80), (130, -80), (-70, 70), (70, 70), (-70, -70), (70, -70), (0, 60), (-8, -50), (0, 49), (8, 50)\},$$

que se puede observar en la figura 7.3.

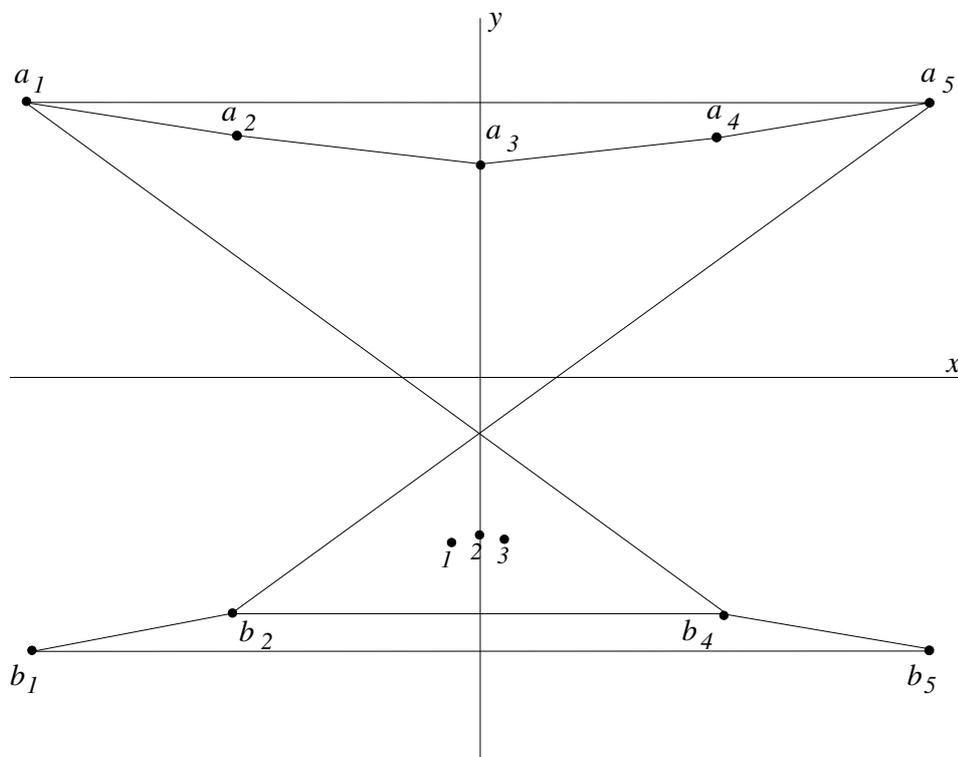


Figura 7.3: Esta configuración de puntos Q_{12} no contiene hexágonos convexos.

Notemos que Q_{12} no contiene hexágonos convexos. En lo sucesivo se denotarán a $(-8, -50)$, $(0, -49)$, y $(8, -50)$ simplemente por 1, 2 y 3 respectivamente. Además utilizaremos lo siguiente:

1. $a_1 := (-130, 80)$, $a_2 := (-70, 70)$, $a_3 := (0, 60)$, $a_4 := (70, 70)$, $a_5 := (130, 80)$,
 $b_1 := (-130, -80)$, $b_2 := (-70, -70)$, $b_4 := (70, -70)$ y $b_5 := (130, -80)$.

2. $A_5 := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B_4 := \{b_1, b_2, b_4, b_5\}$ e $I_1 := \{1, 2, 3\}$.
3. $A := K_5(A_5)$, $B := K_4(B_4)$ e $I := K_3(I_1)$, es decir, A , B e I serán las subgráficas de $K_{12}(Q_{12})$ inducidas por A_5 , B_4 e I_1 , respectivamente.
4. C será la subgráfica de $K_{12}(Q_{12})$ que consta, exactamente, de todas las $A_5 - B_4$ aristas (i.e., aristas con un extremo en A_5 y el otro en B_4), similarmente, D' (respectivamente, F') consta de todas las $I_1 - A_5$ aristas (respectivamente, $I_1 - B_4$ aristas). Notemos que (i) $V(C) = A_5 \cup B_4$ y que (ii) $\{E(A), E(B), E(C), E(D'), E(F')\}$ es una partición del conjunto de aristas de $K_{12}(Q_{12})$.
5. $\alpha: V(D(Q_{12})) \rightarrow \{c_1, \dots, c_q\}$ denotará una q -coloración propia (arbitraria pero fija) de $D(Q_{12})$; y α' denotará a la q -coloración inducida por α sobre las aristas de $K_{12}(Q_{12})$.
6. Se denotará, respectivamente, por $\alpha'(A)$, $\alpha'(B)$, \dots , $\alpha'(F')$ al subconjunto de $\{c_1, \dots, c_q\}$ que colorea a las aristas de A , B , \dots , F' .
7. Se denotará por $\star(A)$ (respectivamente, $\star(B)$) al número de clases cromáticas de α' que son estrellas en A (respectivamente, en B), en donde una estrella es una gráfica geométrica $K_{1,m}$, para algún $m \geq 1$.
8. Se denotará por $\eta(A)$ (respectivamente, $\neg\eta(A)$) al número de vértices de A que son centro de alguna estrella en α' (respectivamente, que no son centro de ninguna estrella en α'). De manera similar se define a $\eta(B)$ y $\neg\eta(B)$.

Todas las relaciones entre $\eta(A)$, $\eta(B)$, $\star(A)$, $\star(B)$, $\alpha'(A)$, etc., descritas en el siguiente lemma son fáciles de deducir a partir de las definiciones.

Lema 4. *Para $X \in \{A, B\}$ se cumple lo siguiente:*

- 1) Sea . (i) $\eta(A) + \neg\eta(A) = 5$ y $\eta(B) + \neg\eta(B) = 4$; (ii) $\eta(X) \geq \star(X)$, y la igualdad ocurre si y sólo si ninguna clase cromática de α' en X es una 2-estrella; y (iii) $\star(X) \leq |\alpha'(X)|$.
- 2) El número de aristas que cualquier clase cromática de α' tiene en la cerradura convexa de X es a lo más 2.
- 3) $|\alpha'(A)| \geq 3$ y $|\alpha'(B)| \geq 2$.
- 4) Si α' no contiene 2-estrellas en A (respectivamente, B), entonces $\neg\eta(A) \geq 5 - |\alpha'(A)|$ (respectivamente, $\neg\eta(B) \geq 4 - |\alpha'(B)|$).

Lema 5. *Sea $k := \neg\eta(A)$, $s := \neg\eta(B)$ y $\ell := \min\{k, s\}$, entonces*

$$|\alpha'(C) \setminus (\alpha'(A) \cup \alpha'(B))| \geq \ell.$$

Demostración. Sean a'_1, \dots, a'_k y b'_1, \dots, b'_s los puntos que no son centro de ninguna estrella en A y B , respectivamente. Sin perder generalidad podemos asumir que dichos puntos aparecen, respectivamente, en ese orden con respecto al eje x . Afirmamos que cada uno de $\alpha'(a'_1b'_1), \dots, \alpha'(a'_\ell b'_\ell)$ es un elemento de $\alpha'(C) \setminus (\alpha'(A) \cup \alpha'(B))$. Claramente, cada una de $a'_1b'_1, \dots, a'_\ell b'_\ell$ es una arista de C . Más aún, note que tales aristas son disjuntas por pares. Como consecuencia α' debe asignarles un color distinto a cada una de ellas.

Sea $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Dado que a'_i no es centro de estrella de A , en particular no puede ser extremo de una 2-estrella de A . Luego para cada color $c \in \alpha'(A)$ existe una arista e_c en A que es disjunta de $a'_i b'_i$ y tal que $\alpha'(e_c) = c$. Como consecuencia, $\alpha'(a'_i b'_i) \notin \alpha'(A)$. Similarmente se puede establecer que $\alpha'(a'_i b'_i) \notin \alpha'(B)$. \square

Lema 6. Si $|\alpha'(A)| = 3$, entonces $\neg\eta(A) \geq 3$.

Demostración. Sea $\alpha'(A) = \{\text{azul}, \text{rojo}, \text{negro}\}$. Se analizarán dos casos.

- 1) A contiene una 2-estrella, digamos e . Por el lema 4 2), e está en la cerradura convexa de A . Entonces $e = a_i a_{i+1}$ para algún $i \in \{1, \dots, 5\}$, donde la suma en el subíndice es tomada módulo 5. Supongamos que $\alpha'(e) = \text{azul}$. Note que $a_{i+1}a_{i+2}$ y $a_{i+2}a_{i+3}$ son del mismo color, digamos negro. Similarmente $a_{i+3}a_{i+4}$ y $a_{i+4}a_{i+5}$ son de color rojo, donde la suma en los subíndices también es tomada módulo 5. De lo anterior es fácil ver que, $a_{i+1}a_{i+3}$ debe ser negra y que $a_i a_{i+3}$ debe ser roja. De esto y $|\alpha'(A)| = 3$, se tiene que a_{i+2} , a_{i+3} y a_{i+4} son los vértices requeridos.
- 2) A no contiene 2-estrellas. Llegaremos a una contradicción por asumir que $\neg\eta(A) \leq 2$. Como $\eta(A) + \neg\eta(A) = 5$, entonces $\eta(A) \geq 3$. Puesto que A no contiene 2-estrellas, entonces $\star(A) = \eta(A) \geq 3$. Por lema 4 1) tenemos que $\star(A) \leq |\alpha'(A)| = 3$. Esto implica que el conjunto de aristas de A está particionado en, exactamente, tres estrellas: la estrella azul, la estrella roja y la estrella negra. Finalmente, no es difícil ver que cualquier terna de estrellas pueden cubrir a lo más 9 de las 10 aristas que tiene A , lo cual es una contradicción. \square

Lema 7. Si $|\alpha'(A)| \leq 4$ y $\eta(A) = 5$ entonces A contiene una 2-estrella, digamos $a'a''$, tal que ninguno de los vértices a' o a'' es centro de cualquier otra estrella de A .

Demostración. Por el lema 4 3), $|\alpha'(A)| \geq 3$. Si $|\alpha'(A)| = 3$, por los lemas 4 1) y 6 se tiene, respectivamente, que $\eta(A) + \neg\eta(A) = 5$ y $\neg\eta(A) \geq 3$, luego $\eta(A) \leq 2$, lo cual es una contradicción. Entonces $|\alpha'(A)| = 4$.

Ahora demostraremos que A contiene exactamente una 2-estrella. Si A no contiene 2-estrellas, por el lema 4 4) se tiene que

$$5 = \eta(A) = \star(A) \leq |\alpha'(A)| = 4.$$

Por otro lado, si A contiene al menos dos 2-estrellas, digamos e y e' , tenemos dos casos:

- 1) $|V(e) \cap V(e')| = 1$. Sea e'' la arista que forma un triángulo con e y e' . Como $|\alpha'(A)| = 4$ y $\eta(A) = 5$, entonces los dos vértices en $V(A) \setminus (V(e) \cup V(e'))$ son centro de estrella, las cuales emplean dos nuevos colores. Luego la arista e'' no se puede colorear.

2) $|V(e) \cup V(e'')| = 0$. Si e y e' se cruzan, entonces las aristas en la cerradura convexa de A emplean al menos tres nuevos colores. Esto implica, $|\alpha'(A)| > 4$, lo cual es una contradicción. Por lo anterior tenemos que e y e' no se cruzan. Luego, salvo simetría sólo existen dos formas de tener e y e' . Ver figura 7.4. En el caso de la figura 7.4 a), considere el camino azul formado por e_1, e_2, e_3 y e_4 . Como $|\alpha'(A)| \leq 4$, entonces e_1, e_2 deben ser de un tercer color, y las aristas e_3 y e_4 de un cuarto color. Pero entonces el vértice v_{34} no puede ser centro de ninguna estrella de A , lo cual es una contradicción. En el caso de la figura 7.4 b), aplicamos el argumento del caso anterior al camino rojo formado por e'_1, e'_2, e'_3 y e'_4 para obtener que v_{34} no puede ser centro de ninguna estrella de A , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto A contiene exactamente una 2-estrella. Sea $a'a''$ la única 2-estrella de A y sean s_1, s_2 y s_3 el resto de los vértices de A . Por hipótesis, para $i \in \{1, 2, 3\}$, s_i es el centro de una estrella de A , digamos S_i . Como $a'a''$ es la única 2-estrella, $|V(S_i)| > 2$ y como consecuencia ninguno de los puntos a' o a'' puede ser centro de S_i . Como $|\alpha'(A)| = 4$, entonces $\alpha'(A) = \{\alpha'(S_1), \alpha'(S_2), \alpha'(S_3), \alpha'(a'a'')\}$ y $A = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \{a'a''\}$. Luego ninguno de a' ó a'' puede ser centro de alguna estrella de A . \square

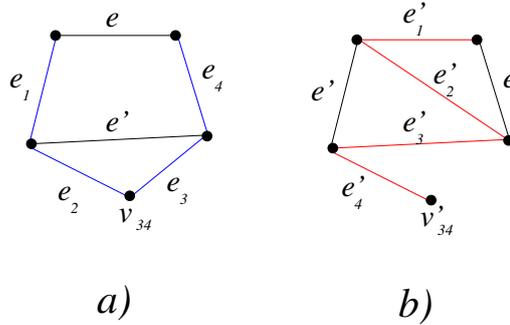


Figura 7.4: Salvo simetría estas son las únicas maneras de tener e y e' en A sin cruzarse.

Lema 8. Si $\alpha'(B) = 2$, entonces $\neg\eta(B) \geq 3$.

Demostración. Sean $b'_1 := b_1, b'_2 := b_2, b'_3 := b_3, b'_4 := b_4, b'_5 := b_5$ y c_1, c_2 los 2 colores en $\alpha(B)$. Por el lema 4 2) sabemos que la cerradura convexa de B tiene a lo más dos aristas con el mismo color. Por otro lado, puesto que cualquier terna de arista en la cerradura convexa de B contiene un par de aristas disjuntas y $\alpha(B) = \{c_1, c_2\}$, entonces $\alpha'(b'_i b'_{i+1}) = \alpha'(b'_{i+1} b'_{i+2}) = c_1$ y $\alpha'(b'_{i+2} b'_{i+3}) = \alpha'(b'_{i+3} b'_{i+4}) = c_2$ para algún $i \in \{1, \dots, 4\}$, en donde la suma en los subíndices es tomada módulo 4. En tal caso, es fácil ver que ninguno de b'_i o b'_{i+2} puede ser el centro de una estrella de B' . Por otro lado, si $\alpha'(b'_i b'_{i+2}) = c_1$ entonces b'_{i+1} no puede ser centro de estrella; y si $\alpha'(b'_i b'_{i+2}) = c_2$, entonces b'_{i+3} no puede ser centro de estrella. Por lo tanto $\eta(B) \leq 1$ y así $\neg\eta(B) = 4 - \eta(B) \geq 3$. \square

Lema 9. Si $|\alpha'(B)| \leq 3$ y $\eta(B) = 4$ entonces B contiene una 2-estrella, $b'b''$, tal que ninguno de b' o b'' es centro de cualquier otra estrella de B .

Demostración. Vamos a mostrar primero que $|\alpha'(B)| = 3$. Por el lema 4 3) tenemos que $|\alpha'(B)| \geq 2$. Si $|\alpha'(B)| = 2$, por los lemas 4 1) y 8 se tiene que $\eta(B) + \neg\eta(B) = 4$ y $\neg\eta(B) \geq 3$, respectivamente, por lo que $\eta(B) \leq 1$, lo cual es una contradicción.

Vamos a mostrar que B contiene exactamente una 2-estrella. Si B no contiene 2-estrellas, por el lema 4 4) se tiene que $4 = \eta(B) = \star(B) \leq |\alpha'(B)| = 3$, una contradicción. Ahora, suponga que B contiene al menos dos 2-estrellas, digamos e'_1, e'_2 . Si $|V(e'_1) \cap V(e'_2)| = 0$, entonces existen dos aristas disjuntas e'_3 y e'_4 en el casco convexo de B tales que $\{e'_1, e'_2\} \cap \{e'_3, e'_4\} = \emptyset$. Luego e'_3 y e'_4 emplean dos nuevos colores, lo cual implica, $|\alpha'(B)| > 3$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $|V(e'_1) \cap V(e'_2)| = 1$. Salvo simetría sólo se tienen los casos de la figura 7.5. Considere las aristas azules en (a) y (b) de la figura 7.5. Note que, en cada caso, las dos aristas azules tienen que estar coloreadas con el tercer color. Pero esto implica que el vértice v_1 no es centro de estrella. Esta es la contradicción requerida.

Sea $b'b''$ la única 2-estrella de B y sean s'_1, s'_2 los otros dos vértices de B . Por hipótesis, cada uno de s'_1, s'_2 es el centro de una estrella de B , digamos S'_1 y S'_2 . Dado que $b'b''$ es la única 2-estrella, $|V(S'_i)| > 2$ ($i = 1, 2$), entonces b' y b'' no son el centro de S'_1 ó S'_2 . Ahora, puesto que $|\alpha'(B)| = 3$, entonces $\alpha'(B) = \{\alpha'(S'_1), \alpha'(S'_2), \alpha'(b', b'')\}$ y $B' = S'_1 \cup S'_2 \cup \{b'b''\}$. Esto implica que b' y b'' no son centro de ninguna otra estrella (distinta de $b'b''$) en B . \square



Figura 7.5: Salvo simetría estas son las únicas maneras de tener e'_1 y e'_2 adyacentes en B .

Como veremos a continuación, la demostración de nuestro resultado principal se reduce a verificar la siguiente proposición, cuya demostración, por claridad, se presenta hasta la siguiente sección.

Proposición 10. *Para la configuración de puntos Q_{12} tenemos que $\chi(D(Q_{12})) = 10$.*

Demostración del Teorema 1. En [2] demostraron que $d(n) \leq n - 2$, y por tanto $\chi(D(Q_{12})) \leq n - 2$. La otra desigualdad se sigue inmediatamente de la proposición 10 y el lema 2. \square

Corolario 11. *Para cualquier $n \geq 3$ se tiene que*

$$d(n) \geq 10 \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor$$

Demostración. Se sigue inmediatamente del teorema 1 y de los resultados demostrados en [2]. \square

Note que si la conjetura de Erdős-Szekeres [3] es cierta, entonces $d(n) < n - 2$ para cualquier $n \geq 17$. En particular queda como problema abierto determinar si $d(n) = n - 2$ para $n = 13, 14, 15, 16$.

Conjetura Para cada entero $13 \leq n \leq 16$, $d(n) = n - 2$.

7.3. Demostración de la Proposición 10

Recordemos que $\alpha': V(D(Q_{12})) \rightarrow \{c_1, \dots, c_r\}$ es una coloración propia arbitraria y fija de $D(Q_{12})$. Por brevedad usaremos lo siguiente

$$\begin{aligned}\alpha'_{C'} &:= \alpha'(C') \setminus (\alpha'(A) \cup \alpha'(B)) \\ \alpha'_{D'} &:= \alpha'(D') \setminus (\alpha'(A) \cup \alpha'(I)) \\ \alpha'_{F'} &:= \alpha'(F') \setminus (\alpha'(B) \cup \alpha'(I)).\end{aligned}$$

Note que $\{\alpha'(I), \alpha'(A), \alpha'(B), \alpha'_{C'}, \alpha'_{D'}, \alpha'_{F'}\}$ es una partición de $\{c_1, \dots, c_r\}$. Luego, basta demostrar que

$$r = |\alpha'(I)| + |\alpha'(A)| + |\alpha'(B)| + c + d + f \geq 10,$$

donde $c := |\alpha'_{C'}|$, $d := |\alpha'_{D'}|$ y $f := |\alpha'_{F'}|$.

Por el lema 4 sabemos que $|\alpha'(A)| \geq 3$ y $|\alpha'(B')| \geq 2$, respectivamente. Analizaremos varios casos:

1) $|\alpha'(I)| = 1$. Luego $\neg\eta(I) = 3$.

1.1) $|\alpha'(A)| = 3$. Por el lema 6, A contiene 3 puntos, digamos a'_1, a'_2 y a'_3 , que no son centro de ninguna estrella de A . Sin perder generalidad supondremos que a'_1, a'_2 y a'_3 aparecen en ese orden respecto a su coordenada x .

1.1.1) $|\alpha'(B)| = 2$. Por el lema 8, B contiene 3 puntos, digamos b'_1, b'_2 y b'_3 , que no son centro de ninguna estrella de B' . Sin perder generalidad asumiremos que b'_1, b'_2 y b'_3 aparecen en ese orden respecto a su coordenada x . Por el lema 5 tenemos que $c \geq 3$. Note que I está ubicada entre, exactamente, dos aristas del conjunto $\{a'_1 b'_1, a'_2 b'_2, a'_3 b'_3\}$. Sea $e = a'_i b'_i$ una de tales aristas y $e' = xy$ una arista de I tal que el conjunto $\{a'_i, b'_i, x, y\}$ forma un cuadrilátero K simple cuyas aristas no cruzan a las aristas de I . La existencia de tal K implica que $d + f \geq 1$, y por tanto $r \geq 10$.

1.1.2) $|\alpha'(B)| \geq 3$. En este caso observe que $\alpha'(a'_1 1), \alpha'(a'_2 2)$ y $\alpha'(a'_3 3)$ son elementos distintos de $\alpha'_{D'}$. Así $d \geq 3$ y por lo tanto $r \geq 10$.

1.2) $|\alpha'(A)| = 4$

1.2.1) $\eta(A) = 5$. Por el lema 7, A contiene una 2-estrella $a'_1 a'_2$. Sin perder generalidad asumiremos que a'_1, a'_2 aparecen en ese orden respecto a su coordenada x .

1.2.1.1) $|\alpha'(B)| = 2$. Por el lema 8 existen b'_1, b'_2, b'_3 vértices que no son centro de estrella de B' en ese orden con respecto a su coordenada x . Entonces al menos una de $a'_1 b'_1$ ó $a'_2 b'_3$ contribuye 1 a c . Tenemos tres casos (i) Si $\alpha'(a'_1 b'_1) = \alpha'(a'_1 a'_2)$, entonces $b'_2 3$ y $b'_1 1$ contribuyen 2 a f , y así $r \geq 10$. (2) Si $\alpha'(a'_2 b'_3) = \alpha'(a'_1 a'_2)$, entonces $b'_1 1$ y $b'_2 3$ contribuyen 2 a f , y así $r \geq 10$. (3) Si $\alpha'(a'_1 a'_2) \notin \{\alpha'(a'_1 b'_1), \alpha'(a'_2 b'_3)\}$, entonces $a'_1 b'_1, a'_2 b'_3$ contribuyen 2 a c y $b'_2 1$ contribuye 1 a f y así $r \geq 10$.

1.2.1.2) $|\alpha'(B)| = 3$.

Aquí tenemos dos casos: (1) $\eta(B) = 4$. Por el lema 9, B contiene una 2-estrella, digamos $b'_1 b'_2$ con b'_1 a la izquierda de b'_2 . Si $b'_1 1, b'_2 3$ contribuyen 2 a f , hemos terminado. Por el otro lado, es fácil ver que dichas aristas contribuyen al menos 1 a f . Asumiremos pues que $b'_1 1, b'_2 3$ contribuyen, exactamente, 1 a f . Luego exactamente alguna de $b'_1 1$ ó $b'_2 3$ es de color $\alpha'(b'_1 b'_2)$. Si $\alpha'(b'_1 1) = \alpha'(b'_1 b'_2)$, entonces al menos una de $a'_1 1$ ó $a'_2 2$ contribuye 1 a d . En el otro caso $\alpha'(b'_2 3) = \alpha'(b'_1 b'_2)$, al menos una de $a'_1 2$ o $a'_2 3$ contribuye 1 a d . En ambos casos tenemos $r \geq 10$. (2) $\eta(B) < 4$. Entonces B contiene al menos un vértice no centro de estrella, digamos b'_1 . Esto implica que $b'_1 1$ contribuye 1 a f y alguna de $a'_1 2$ ó $a'_2 3$ contribuye 1 a d y así $r \geq 10$.

1.2.1.3) $|\alpha'(B)| \geq 4$. Alguna de $a'_1 1$ ó $a'_2 2$ contribuye 1 a d y así $r \geq 10$.

1.2.2) $\eta(A) < 5$. Entonces A contiene al menos un vértice no centro de estrella, digamos a'_1 .

1.2.2.1) $|\alpha'(B)| = 2$. Por el lema 8, B contine b'_1, b'_2, b'_3 vértices no centro de estrella en ese orden con respecto a su coordenada x . Entonces $a'_1 b'_3$ contribuye en 1 a c y $b'_1 1, b'_2 3$ contribuyen en 2 a f . Así tenemos que $r \geq 10$.

1.2.2.2) $|\alpha'(B)| = 3$. Tenemos dos casos: (1) $\eta(B) = 4$. Por el lema 9, B contiene una 2-estrella $b'_1 b'_2$. Entonces una de $b'_1 1$ o $b'_2 3$ contribuye en 1 a f y $a'_1 2$ contribuye en 1 a d . Así tenemos que $r \geq 10$. (2) $\eta(B) < 4$, entonces B contiene al menos un vértice no centro de estrella, digamos b'_1 . Entonces $a'_1 1$ contribuye en 1 a d y $b'_1 3$ contribuye en 1 a f . Así $r \geq 10$.

1.2.2.3) $|\alpha'(B)| \geq 4$. En este caso $a'_1 2$ contribuye en 1 a d y por lo tanto $r \geq 10$.

1.3) $|\alpha'(A)| \geq 5$.

1.3.1) $|\alpha'(B)| = 2$. Por el lema 8, B' contiene b'_1, b'_2, b'_3 vértices no centro de estrella en B' en ese orden con respecto a su coordenada x . Entonces $b'_1 1, b'_2 3$ contribuyen en 2 a f y por lo tanto $r \geq 10$.

1.3.2) $|\alpha'(B)| = 3$. Tenemos dos casos: (1) $\eta(B) = 4$. Por el lema 9, B contiene una 2-estrella $b'_1 b'_2$. Entonces una de $b'_1 1$ o $b'_2 3$ contribuye en 1

a f . Así $r \geq 10$. (2) $\eta(B) < 4$. Entonces B contiene al menos un vértice no centro de estrella, digamos b'_1 . Entonces $b'_1 1$ contribuye en 1 a f . Así $r \geq 10$.

1.3.3) $|\alpha'(B)| \geq 4$. Entonces $r \geq |\alpha'(A)| + |\alpha'(I)| + |\alpha'(B)| \geq 10$.

2) $|\alpha'(I)| = 2$. Luego I contiene una 2-estrella, digamos xy , con x a la izquierda de y .

2.1) $|\alpha'(A)| = 3$. Por el lema 6, A contiene tres vértices a'_1, a'_2, a'_3 que no son centro de estrella, los cuales aparecen en ese orden respecto a su coordenada x .

2.1.1) $|\alpha'(B)| = 2$. Por el lema 8, B contiene b'_1, b'_2, b'_3 vértices que no son centro de estrella de B , los cuales aparecen en ese orden respecto a su coordenada x . Por el lema 5, $a'_1 b'_1, a'_2 b'_2, a'_3 b'_3$ contribuyen en 3 a c . Así $r \geq 10$.

2.1.2) $|\alpha'(B)| = 3$.

2.1.2.1) $\eta(B) = 4$. Por el lema 9, B contiene una 2-estrella $b'_1 b'_2$, con b'_1 a la izquierda de b'_2 .

2.1.2.1.1) $b'_1 b'_2 = b_1 b_2$. Si $a'_1 b_1, a'_2 b_2$ contribuyen 2 a c , entonces $r \geq 10$. Por otro lado, es fácil ver que $a'_1 b_1, a'_2 b_2$ contribuyen al menos 1 a c . Asumiremos pues que, exactamente, una $a'_1 b_1$ ó $a'_2 b_2$ contribuye 1 a c . Luego $\alpha'(a'_2 b_2) = \alpha'(b_1 b_2)$ ó $\alpha'(a'_1 b_1) = \alpha'(b_1 b_2)$.

2.1.2.1.1.1) $\alpha'(a'_2 b_2) = \alpha'(b_1 b_2)$. Entonces $a'_1 b_1$ contribuye en 1 a c y una de $a'_2 x$ ó $a'_3 y$ contribuye en 1 a d . Así $r \geq 10$.

2.1.2.1.1.2) $\alpha'(a'_1 b_1) = \alpha'(b_1 b_2)$. Entonces $a'_2 b_2$ contribuye en 1 a c . Si xy es alguna de 13 ó 23 entonces $a'_3 x$ y $a'_3 y$ son del mismo color ó $r \geq 10$. Entonces al menos una de $a'_2 x$ ó $b_2 y$ contribuye 1 a $d + f$ y así $r \geq 10$.

Luego $xy = 12$. Entonces, $a'_3 1$ y $a'_3 2$ son del color $\alpha'(12)$ ó $r \geq 10$. Similarmente $a'_3 3$ es de color $\alpha'(13)$ ó $r \geq 10$. Esto implica que alguna de $a'_2 1, b_2 2$ contribuye 1 a $d + f$ y así $r \geq 10$.

2.1.2.1.2) $b'_1 b'_2 = b_4 b_5$. Por simetría este caso es análogo al caso 2.1.2.1.1).

2.1.2.1.3) b'_1 es alguno de b_1 ó b_2 ; y b'_2 es alguno de b_4 ó b_5 . Si $a'_1 b'_1, a'_3 b'_2$ contribuyen 2 a c , entonces $r \geq 10$. Por otro lado, es fácil ver que $a'_1 b'_1$ ó $a'_3 b'_2$ contribuye al menos 1 a c . Asumiremos pues que, exactamente, una de $a'_1 b'_1$ o $a'_3 b'_2$ contribuye en 1 a c . Si $a'_1 b'_1$ contribuye en 1 a c , entonces $\alpha'(a'_3 b'_2) = \alpha'(b'_1 b'_2)$ y una de $a'_2 x$ o $a'_3 y$ contribuye en 1 a d y así $r \geq 10$. El caso en el que $a'_3 b'_2$ contribuye en 1 a c es análogo.

2.1.2.2) $\eta(B) < 4$, entonces B contiene al menos un vértice no centro de estrella, digamos b'_1 . Si b'_1 es alguno de b_1 ó b_2 , entonces alguna de $a'_2 x$ ó $a'_3 y$ contribuye 1 a d y $a'_1 b'_1$ contribuye 1 a c , así $r \geq 10$.

Análogamente, si b'_1 es alguno de b_4 ó b_5 , entonces alguna de a'_1x ó a'_2y contribuye 1 a d y $a'_3b'_1$ contribuye 1 a c .

2.1.3) $|\alpha'(B)| \geq 4$. Entonces una de a'_1x o a'_2y contribuye 1 a d y consecuentemente $r \geq 10$.

2.2) $|\alpha'(A)| = 4$.

2.2.1) $\eta(A) = 5$. Por el lema 7, A contiene una 2–estrella $a'_1a'_2$. Sin perder generalidad asumiremos que a'_1, a'_2 aparecen en ese orden respecto a su coordenada x .

2.2.1.1) $|\alpha'(B)| = 2$. Por el lema 8, B contiene b'_1, b'_2, b'_3 vértices que no son centro de estrella de B , los cuales aparecen en ese orden respecto a su coordenada x . Sea xy la 2–estrella de I . Si $a'_1b'_1$ y $a'_2b'_3$ contribuyen 2 a c , entonces $r \geq 10$. Dado que el menos una de $a'_1b'_1$ ó $a'_2b'_2$ contribuye 1 a c , asumiremos que exactamente una de $a'_1b'_1$ y $a'_2b'_3$ contribuye 1 a c .

2.2.1.1.1) Si $a'_2b'_3$ es la que contribuye en 1 a c , entonces $\alpha'(a'_1b'_1) = \alpha'(a'_1a'_2)$.

2.2.1.1.1.1) $xy = 13$. Entonces alguna de b'_11 ó b'_23 contribuye 1 a f y así $r \geq 10$.

2.2.1.1.1.2) $xy = 12$. Entonces $\alpha'(b'_11) = \alpha'(12)$, $\alpha'(b'_22) = \alpha'(13)$ y $\alpha'(b'_33) = \alpha'(a'_2b'_3)$ ó $r \geq 10$. Luego a'_22 contribuye en 1 a d y así $r \geq 10$.

2.2.1.1.1.3) $xy = 23$. Entonces b'_33 es de color $\alpha'(23)$ ó $\alpha'(a'_2b'_3)$, ya que en otro caso $r \geq 10$.

Si $\alpha'(b'_33) = \alpha'(23)$, entonces $\alpha'(b'_22) = \alpha'(13)$ ó $r \geq 10$. Pero en tal caso b'_11 contribuye en 1 a f , y así $r \geq 10$. Luego $\alpha'(b'_33) = \alpha'(a'_2b'_3)$. Note que $\alpha'(a'_22) = \alpha'(23)$ ó $r \geq 10$. Pero entonces b'_23 contribuye en 1 a f y así $r \geq 10$.

2.2.1.1.2) Si $a'_1b'_1$ es la que contribuye en 1 a c . Entonces $\alpha'(a'_1a'_2) = \alpha'(a'_2b'_3)$ y el argumento es totalmente análogo al del caso 2.2.1.1.1).

2.2.1.2) $|\alpha'(B)| = 3$.

2.2.1.2.1) $\eta(B') = 4$. Por el lema 9, B contiene una 2–estrella, digamos $b'_1b'_2$ con b'_1 a la izquierda de b'_2 . Si alguna de $a'_1b'_1$ ó $a'_2b'_2$ contribuye 1 a c , entonces $r \geq 10$. Asumiremos pues que ninguna contribuye a c .

2.2.1.2.1.1) $b'_1b'_2 = b_1b_2$.

2.2.1.2.1.1.1) $\alpha'(a'_1b_1) = \alpha'(a'_1a'_2)$ y $\alpha'(a'_2b_2) = \alpha'(b_1b_2)$. Note que a'_2b_1 tiene el color de alguna de $a'_1a'_2, b_1b_2$ ó $r \geq 10$.

2.2.1.2.1.1.1.1) $\alpha'(a'_2b_1) = \alpha'(a'_1a'_2)$.

Si $xy = 12$, entonces $\alpha'(a'_21) = \alpha'(12)$, $\alpha'(a'_22) = \alpha'(12)$ y $\alpha'(a'_23) = \alpha'(23)$, ó $r \geq 10$. Luego, alguna de b_11 ó b_22 contribuye 1 a f y así $r \geq 10$.

Si $xy = 13$, entonces $\alpha'(a'_21) = \alpha'(13) = \alpha'(a'_23)$ ya que de otro modo $r \geq 10$. Entonces alguna de b_11 ó b_23 contribuye 1 a f y así $r \geq 10$.

Si $xy = 23$, $\alpha'(a'_21) = \alpha'(12) = \alpha'(13)$ y $\alpha'(a'_22) = \alpha'(23) = \alpha'(a'_23)$ ó $r \geq 10$. Pero entonces, alguna de b_12 ó b_23 contribuye 1 a f y así $r \geq 10$.

2.2.1.2.1.1.1.2) $\alpha'(a'_2b_1) = \alpha'(b_1b_2)$. Por otro lado, note que $x = 1$ ó $y = 3$.

Si $x = 1$ entonces alguna de b_2x ó a'_2y contribuye 1 a $d + f$. Ahora, si $y = 3$, entonces alguna de a'_2x ó b_2y contribuye 1 a $d + f$. En ambos casos tenemos que $r \geq 10$.

2.2.1.2.1.1.2) $\alpha'(a'_1b_1) = \alpha'(b_1b_2)$ y $\alpha'(a'_2b_2) = \alpha'(a'_1a'_2)$. Note que a'_2b_1 tiene el color de alguna de $a'_1a'_2, b_1b_2$ ó $r \geq 10$.

Si $xy = 12$, entonces b_21 y 12 son del mismo color ó $r \geq 10$. Entonces $\alpha'(b_22)$ tiene que ser alguno de $\alpha'(12), \alpha'(13)$ ó $r \geq 10$. Si $\alpha'(b_22) = \alpha'(12)$ entonces alguna de a'_11 ó a'_22 contribuye 1 a d y $r \geq 10$. En el otro caso, $\alpha'(b_22) = \alpha'(13)$, alguna de a'_12 ó a'_23 contribuye 1 a d y $r \geq 10$.

Si $xy = 13$, entonces $\alpha'(b_21) = \alpha'(13) = \alpha'(b_23)$ ya que de otro modo $r \geq 10$. Entonces alguna de a'_11 ó a'_23 contribuye 1 a d y así $r \geq 10$.

Si $xy = 23$, entonces b_23 y 23 son del mismo color ó $r \geq 10$. Entonces $\alpha'(b_22)$ tiene que ser alguno de $\alpha'(23), \alpha'(13)$ ó $r \geq 10$. Si $\alpha'(b_22) = \alpha'(23)$ entonces alguna de a'_12 ó a'_23 contribuye 1 a d y $r \geq 10$. En el otro caso, $\alpha'(b_22) = \alpha'(13)$, alguna de a'_11 ó a'_22 contribuye 1 a d y $r \geq 10$.

2.2.1.2.1.2) $b'_1b'_2 = b_4b_5$. El argumento es totalmente análogo al caso 2.2.1.2.1.1).**2.2.1.2.1.3)** b'_1 es alguno de b_1, b_2 y b'_2 es alguno de b_4, b_5 . Note que $x = 1$ ó $x = 2$.

Si las aristas del cuadrilátero L formado por a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 emplean al menos 3 colores, entonces $d \geq 1$ y $r \geq 10$. Asumiremos pues que $\alpha'(a'_1a'_2)$ y $\alpha'(b'_1b'_2)$ son los únicos colores en L . Sean v, w los vértices de L que son incidentes tanto con $\alpha'(a'_1a'_2)$ como con $\alpha'(b'_1b'_2)$. Claramente, exactamente uno de v, w esta en A_5 y el otro en B_4 . Sin perder generalidad supongamos que $w \in A_5$. Si $x = 1$, entonces

alguna de xv ó yw contribuye 1 a $d+f$ y así $r \geq 10$. En el otro caso, $x = 2$, alguna de xw ó yv contribuye 1 a $d+f$ y así $d+f \geq 10$.

2.2.1.2.2) $\eta(B) < 4$. Entonces B contiene al menos un vértice no centro de estrella, digamos b'_1 .

Si b_1 es alguno de b_1 ó b_2 , entonces $a'_1b'_1$ y $a'_1a'_2$ tienen el mismo color ó $r \geq 10$. Otra vez, como antes, note que $x = 1$ ó $y = 3$.

Si $x = 1$, alguna de a'_2y ó b'_1x contribuye 1 a $d+f$ y así $r \geq 10$. Ahora, si $y = 3$, entonces alguna de a'_2x ó b'_1y contribuye 1 a $d+f$. En ambos casos tenemos que $r \geq 10$.

El caso en que b'_1 es alguno de b_3 ó b_4 es totalmente análogo a este caso.

2.2.1.3) $|\alpha'(B)| \geq 4$. Este caso es inmediato, ya que $r \geq |\alpha'(A)| + |\alpha'(I)| + |\alpha'(B)| \geq 10$.

2.2.2) $\eta(A) < 5$. Entonces A contiene al menos un vértice no centro de estrella, digamos a'_1 .

2.2.2.1) $|\alpha'(B')| = 2$. Por el lema 8, B contiene b'_1, b'_2, b'_3 vértices que no son centro de estrella, los cuales aparecen en ese orden respecto a su coordenada x . Claramente $a'_1b'_1$ contribuye 1 a c . Luego $\alpha'(a'_1b'_3) = \alpha'(a'_1b'_1)$ ó $r \geq 10$.

Esto implica que alguna de b'_11, b'_22 ó b'_33 contribuye 1 a c y por lo tanto $r \geq 10$.

2.2.2.2) $|\alpha'(B)| = 3$.

2.2.2.2.1) $\eta(B) = 4$. Por el lema 9, B contiene una 2-estrella, digamos $b'_1b'_2$ con b'_1 a la izquierda de b'_2 .

Si b'_1 es b_1 ó b_2 , entonces, como antes, tenemos que $x = 1$ ó $y = 3$. Si $x = 1$, entonces alguna de $a'_1b'_1, a'_1y$ ó b'_2x contribuye 1 a $c+d+f$. Ahora, si $y = 3$, entonces alguna de $a'_1b'_1, a'_1x$ ó b'_2y contribuye 1 a $d+f$. En ambos casos tenemos que $r \geq 10$.

En el otro caso tenemos que $b'_1 = b_3$ y $b'_2 = b_4$. Igual que antes, tenemos que $x = 1$ ó $y = 3$. Si $x = 1$, alguna de $a'_1b'_2, a'_1y$ ó b'_1x contribuye 1 a $c+d+f$. Ahora, si $y = 3$, entonces alguna de $a'_1b'_2, a'_1x$ ó b'_1y contribuye 1 a $c+d+f$. En ambos casos tenemos que $r \geq 10$.

2.2.2.2.2) $\eta(B) < 4$. Entonces B contiene al menos un vértice no centro de estrella, digamos b'_1 . Entonces $a'_1b'_1$ contribuye en 1 a c y así $r \geq 10$.

2.2.2.3) $|\alpha'(B)| \geq 4$. Este caso es inmediato, ya que $r \geq |\alpha'(A)| + |\alpha'(I)| + |\alpha'(B')| \geq 10$.

2.3) $|\alpha'(A)| \geq 5$.

2.3.1) $|\alpha'(B)| = 2$. Por el lema 8, B contiene b'_1, b'_2, b'_3 vértices que no son centro de estrella, los cuales aparecen en ese orden respecto a su coordenada x . Entonces una de b'_1, b'_2 ó b'_3 contribuye en 1 a f y así $r \geq 10$.

2.3.2) $|\alpha'(B')| \geq 3$. En tal caso note que $r \geq |\alpha'(A')| + |\alpha'(I)| + |\alpha'(B')| \geq 10$.

3) $|\alpha'(I)| = 3$. Siguiendo las mismo razonamiento que en **1)** y **2)** para $S' := (A_5 \cup B_4)$ se demuestra que $\chi(D(S')) = 7$. Por lo tanto $r \geq |\alpha'(D(S'))| + |\alpha'(I)| \geq 10$, ya que ninguna arista de I es cruzada por las $A_5 - B_4$ aristas. \square

Bibliografía

- [1] M. KNESER, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, *Aufgabe No. 360*, 58 (2. Abteilung) (1955), 27.
- [2] G. ARAUJO, A. DUMITRESCU, F. HURTADO, M. NOY, J. URRUTIA, On the chromatic number of some geometric type Kneser graphs, In *Computational Geometry*, pages 59-69, 32 (2005).
- [3] P. ERDÖS AND G. SZEKERES, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.*, 2 (1935), 463-470.
- [4] VIDA DUJMOVIĆ AND DAVID R. WOOD, Thickness and antithickness. *In preparation*
- [5] R. FABILA-MONROY AND DAVID R. WOOD, The chromatic number of the convex segment disjointness graph, *CRM Documents, vol. 8, Centre de Recerca Matemàtica* 47-50, Barcelona, 2011.
- [6] JAKOB JONSSON, The exact chromatic number of the convex disjointness graph, In *CRM Documents, Vol. 8, Centre de Recerca Matemàtica*, pages 47-50, Bellaterra (Barcelona), 2011.

8 La competencia formal de los profesores de matemáticas y la producción de sentido en educación básica

María Leticia Rodríguez González
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Coautor(es): Juan Manuel Córdoba Medina

El impacto de la educación en México ha sido una preocupación histórica de la investigación educativa, aún no se ha logrado vincular el conocimiento matemático escolar y el conocimiento matemático de la vida cotidiana. A pesar de que se han diseñado currículos que proponen cambios en las formas de enseñanza y aprendizaje, donde a través de la acción se pretende que sea el propio sujeto quien se apropie y construya su conocimiento; use un Sistema Matemático de Signos (SMS) con sentido de aplicación y construcción. A esto le llamamos Competencia Formal (Filloy, 1999; Filloy, Rojano, & Puig, 2008).

La problemática de nuestro interés, está centrada en la formación de profesores de matemáticas de educación básica, la cual requiere de ciertos elementos, de acuerdo con Shulman (1987) está referida al Conocimiento del Contenido Matemático (CCM). No sólo se trata de dominar el contenido, sino de reflexionar sobre ¿cómo se construye el conocimiento matemático escolar en Educación Básica? Nos centraremos en la transición de la aritmética al álgebra, específicamente en quinto y sexto grados de educación primaria y en primer grado de educación secundaria. ¿Pero cómo se da esa transición? Para responder esta interrogante, se realiza un análisis de la literatura sobre cómo se propone abordar el estudio (enseñanza/aprendizaje) de contenidos matemáticos vinculados con el contenido de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, son varios los investigadores (Gallardo, 2002; Kieran, 2006; Solares, 2007; Rojano, 2010; Martínez, 2012; Filloy & Córdoba, 2013; Córdoba, 2016) quienes aseguran que los profesores han de considerar que los alumnos deben conocer las propiedades y relaciones del SMS de la aritmética (SMS1), y que, el insuficiente conocimiento de éste se traduce en dificultades de operatividad con el SMS del álgebra (SMS2).

Nos interesa que los profesores tengan un acercamiento sobre cómo se lleva a cabo el estudio de los contenidos matemáticos mencionados en primaria y secundaria. En palabras de Bourdieu es el habitus (Perrenoud, 2006): identificar la historicidad de su

conocimiento pedagógico, como la estructura que organiza y orienta las prácticas de los sujetos de acuerdo con su contexto histórico-social. Nos apoyaremos en los Modelos Teóricos Locales (MTL), centrándose en la componente de Competencia Formal y en el uso del SMS1 y del SMS2. Proponemos que los profesores aprovechen la riqueza de los errores que cometen los alumnos en matemáticas, es decir, cómo pueden hacer un uso didáctico de los mismos (por ejemplo Córdoba, 2005). Nos interesa comprender el uso que dan los profesores a los textos matemáticos, de acuerdo con Rojano (2010) “[...] la noción de texto se introduce para ser utilizada en el análisis de cualquier práctica de producción de sentido”. ¿Cómo pueden los profesores considerar la relación texto y espacio textual para desencadenar en los alumnos procesos de lectura/transformación de textos matemáticos y producir sentido?

La buena docencia de Shulman y el habitus de Bourdieu La buena docencia en palabras de Shulman (1987), está referida al Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC) Matemático en nuestro caso (CPCM), implica reflexionar: ¿Qué claridad tiene el profesor de educación primaria sobre la aritmética y lo que necesita hacer para que los niños logren establecer el vínculo entre aritmética y pre-álgebra?, ¿Cómo le hace el profesor para que los estudiantes de primer grado de secundaria, puedan comprender las relaciones entre la aritmética y el álgebra? ¿Qué conocimientos matemáticos requiere el docente para ejercer su práctica de forma eficiente?, ¿Cómo los profesores interpretan los contenidos de la aritmética en los programas y libros de texto y los transforman en la enseñanza, para que los niños puedan comprender? Es una tarea compleja en la investigación, pero sin duda una de las propuestas más importantes de este autor, resignificando el papel del profesor como un agente que entiende y que enseña. Nos explica que en el CPC, los conceptos, las ideas, analogías, ejemplos, demostraciones,... son transformadas en formas de enseñanza cuando han sido comprendidas por el profesor; entonces, construye un acercamiento considerando las características de sus estudiantes, a partir de sus nociones, concepciones, preconcepciones; su edad; referentes culturales; antecedentes escolares, entre otros. Los errores que presentan los alumnos, le van a permitir guiar sus procesos de enseñanza. Por ello, el profesor debe contar siete tipos de conocimientos: Conocimiento del contenido temático de la materia o asignatura (CA); Conocimiento Pedagógico General; Conocimiento Curricular (CC); Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC); Conocimiento de los aprendices y sus características; Conocimiento del contexto educativo; y conocimiento de los fines, propósitos y valores educacionales y sus bases filosóficas e históricas.

La propuesta de Shulman, la hemos articulado a la noción de habitus de Bourdieu, retomado por Perrenoud (2006); éste último asegura que en la formación de los profesores ... se conjugan: Una transmisión de saberes y su apropiación. Una imitación inteligente de los gestos profesionales. La construcción de competencias y de actitudes en función de un entrenamiento más o menos reflexivo. La creación del habitus profesional a través de la interiorización de disciplinas y la estabilización de esquemas de acción.

Este proceso es una construcción de experiencias formadoras. Siguiendo las ideas de Bourdieu (1981), la categoría teórica va a establecer un puente entre lo abstracto de la cultura y el código que va a orientar las conductas y los comportamientos de los individuos, es el habitus como: el sistema de disposiciones duraderas y transferibles (que

funcionan) como principios generadores y organizadores de prácticas y representaciones que pueden estar objetivamente adaptadas a su fin, sin suponer la búsqueda consciente de fines y el dominio expreso de las operaciones necesarias para alcanzarlos, [...].

Esta categoría de Bourdieu, nos permite comprender que no se trata de un paradigma, sino una forma de explicitar los procesos de formación de los profesores; así como las estructuras pedagógicas que han fundamentado las prácticas docentes. La hexis que retoma de Aristóteles, nos permite entender el sentido moral de estos actos, en donde el docente es pensado como el sujeto que posee el saber; en la escolástica se concreta esta figura. Al alumno sólo le resta apropiarse de esos códigos e ir construyendo su propia estructura conceptual. El problema que se observa en el contexto de la educación básica, son las carencias conceptuales que tienen los profesores para entender e interpretar los contenidos matemáticos; generando serias dificultades en la enseñanza de los números, sus propiedades y sus relaciones, así como con los procesos de generalización a través de modelos aritméticos, algebraicos, geométricos; en la mayoría de las veces se limitan a resolver los problemas que vienen propuestos en los libros de texto, sin comprender el sentido de los contenidos curriculares. Entonces, aparece lo que Bourdieu afirma el *ethos* weberiano, definido como un conjunto de creencias morales, es decir, el maestro únicamente se limita a seguir los textos sin profundizar. Sólo preparan a los alumnos para resolver cierto tipo de exámenes, cuando la situación cambia, los alumnos y docentes se frustran. Por esta razón, es que el *habitus*, lo relaciona cognitivamente a la construcción de las estructuras a partir de los esquemas interiorizados, lo que implica la reflexión teórica – práctica de los conceptos; un dominio del contenido matemático.

La escuela tiene la función de la reproducción de la cultura, pero debe hacerlo considerando la diversidad en sus estudiantes; por lo tanto, debe partir de que no todos cuentan con los mismos referentes, pues los valores morales y familiares van a favorecer u obstaculizar los procesos de enseñanza y aprendizaje. La escuela, requiere de su propia lógica de organización y reglas de operación. No se pueden estandarizar los procesos de enseñanza, los programas de estudio institucionales, son una guía flexible que puede ir construyendo esa estructura conceptual que la sociedad requiere. Por lo tanto, el sistema educativo va a jugar un papel de legitimación de la cultura. Lo que conlleva la extrema responsabilidad de sus maestros, autoridades y padres de familia. No se trata, sólo de que los alumnos sean buenos resolutores de problemas y que lo reflejen en los diversos exámenes; sino de que sean capaces de aplicar y potenciar el conocimiento matemático que van construyendo en la escuela. Así el *habitus*, será el producto de la interiorización de los conceptos aritméticos que les sirvan de base para construir la siguiente estructura: el pensamiento algebraico. La acción pedagógica, tendrá que identificar su efectividad y productividad en términos de durabilidad, transferencia y la capacidad de generalizar sus conocimientos algebraicos.

Los Modelos Teóricos Locales y la noción de sistemas matemáticos de signos Los Modelos Teóricos Locales (MTL) propuestos por Filloy (1999) ofrecen un marco de referencia teórico y metodológico para la investigación en matemática educativa, plantea un diseño metodológico distinto al tradicionalmente utilizado en la investigación educativa. Los MTL se caracterizan por la interconexión entre sus cuatro componentes: modelo de los procesos cognitivos, modelo de enseñanza, modelo de comunicación y modelo de

competencia formal. Un MTL, es recursivo, pues se orienta al significado dado por el uso, desde el cual se mira el problema original con una nueva perspectiva: se parte de la problemática, se plantea el MTL que se va a desarrollar en la experimentación, y los resultados de la misma inciden sobre la manera como se va a observar la problemática para replantear el MTL. Es local porque, sin pretender ser una teoría ni tener un carácter universal ni replicable en cualquier fenómeno educativo, sirve para explicar fenómenos específicos y también para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña un determinado contenido matemático en los sistemas educativos al tomar en cuenta las cuatro componentes.

La noción de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) surge de algunas consideraciones que Filloy (1997) hace con la finalidad de normar ciertos criterios para el diseño de modelos de enseñanza. Por otra parte Filloy (1999) afirma que “la matemática escolar se articula en una serie de redes conceptuales, relacionadas unas con otras y con la característica de que, con el tiempo, los estudiantes van logrando ser competentes en el uso de redes de conceptos cada vez más abstractos y generales; competencias que requieren de otras anteriormente dominadas . . .”, así también: . . . el sistema matemático de signos en el que se expresan y comunican los textos matemáticos correspondientes a tales redes conceptuales tiene una estratificación que se corresponde con los diversos usos, que van dando cuenta de acciones, operaciones y transformaciones cada vez más generales y provenientes de estratos del lenguaje (del SMS) cada vez más abstractos. . .”. (Filloy, 1999)

La construcción de los modelos teóricos locales utilizan la propuesta de Freudenthal; tienen como base un análisis fenomenológico que consiste en describir los fenómenos para los cuales este SMS es un medio de organización, en su relación actual con esos fenómenos; aquí los SMS se toman como productos cognitivos y sus relaciones con los fenómenos son las ya establecidas; la fenomenología pura se complementa con una fenomenología histórica, pues es indispensable considerar los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros. Así se define la componente formal.

Derivado de que los alumnos en muchas ocasiones no logran identificar las estructuras subyacentes a las expresiones algebraicas: estructura superficial y estructura sistémica en términos de Kieran (1989), es común que se generen diversos tipos de errores de sintaxis al manipular expresiones matemáticas, ya sean aritméticas o algebraicas, o bien, en la resolución de ecuaciones de primero y segundo grados, de tal forma que, aun no se les puede considerar a los alumnos “usuarios competentes” de un SMS, es decir, todavía no son capaces de poder leer los textos matemáticos de manera correcta y distinguir las transformaciones permitidas de las que no lo son. (Filloy & Córdoba, 2013).

Se ha argumentado que muchas de las dificultades de los estudiantes con el estudio del álgebra simbólica y las transformaciones en la misma son debidas a la falta de comprensión de los estudiantes sobre la estructura de las expresiones (Hoch y Dreyfus, 2004). Con respecto a la estructura de una expresión aritmética o algebraica cabe distinguir un significado doble: la estructura externa y la estructura interna. La estructura externa muestra los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y relaciones que existen entre ellos (Molina, 2012). Se trataría de la forma gramatical de las expresiones en términos de Esty (1992), la estructura su-

periferal de una expresión en palabras de Kieran (1989) o la estructura sintáctica, según Kirshner (1987). La estructura interna describe el valor de la expresión y las relaciones entre los componentes de la expresión con el mismo. Es necesario que los profesores como usuarios competentes del SMS2) tengan en cuenta que en “el proceso de reconocer, manejar o reproducir una estructura, hay muchas demandas cognitivas que el estudiante tiene que realizar para poder operar con símbolos algebraicos” (Sfard y Linchevski, 1994).

Por otra parte, Puig (2012) menciona que los alumnos a menudo manipulan las expresiones algebraicas siguiendo reglas aprendidas de manera mecánica, sin que le vean sentido a lo que hacen, esto puede atribuirse a su trabajo desligado de las situaciones que le dan sentido, en ejercicios en los que lo único que se plantea es la mera ejecución de reglas de transformación. Sin embargo, las transformaciones algebraicas tienen sentido para los alumnos, no en sí mismas, sino por la posibilidad que ofrecen de mostrar que expresiones distintas pueden representar una misma situación, de tal forma que se vean como un componente esencial del proceso que se está realizando. Un ejemplo de lo anterior es cuando se le pide a un alumno resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita del tipo completa, mediante el método de factorización, entonces se requiere que ésta sea transformada a otra ecuación equivalente, es decir, el alumno debe leer su estructura superficial, reconociendo los componentes del trinomio de segundo grado que se encuentra en el primer miembro que esta igualado con un segundo miembro que es cero, entonces recurriendo al uso del SMS1 (se buscan dos números con signo, cuyo producto sea el valor del término independiente y al mismo tiempo su suma sea el valor del coeficiente del término lineal) y así poder escribir la ecuación de en su forma factorizada utilizando el par de números con signo, para después utilizando el criterio de los factores nulos cada binomio se iguala con cero, formándose dos ecuaciones de primer grado que son resueltas de manera inmediata por transposición y finalmente encontrar los dos valores de la incógnita. Córdoba (2016).

Para dar cuenta de cómo los aprendices se convierten en “usuarios competentes” del SMS2, en la investigación experimental de corte cualitativo realizada por Córdoba (2016), se recurre al uso del marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (Fillooy, 1999), así como, al concepto semiótico llamado “intertextualidad”, propuesto por Fillooy, Rojano y Puig (2011). Cabe mencionar que, en álgebra, los espacios textuales están constituidos por SMS cuyos códigos y tradiciones provienen de los significados atribuidos a ellos por su uso social. Los textos matemáticos no tienen un sentido independiente, esto es lo que podemos llamar intertextuales (Fillooy, Rojano y Puig, 2011). Además, de manera implícita se recurre al uso didáctico de los errores de sintaxis en el desarrollo del pensamiento matemático algebraico, propuesto por Córdoba (2005) al momento de observar mediante entrevista clínica con enseñanza la actuación de los estudiantes en el estudio de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita (estudio piloto) y la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita (estudio final); en situaciones de enseñanza/aprendizaje como situaciones de comunicación y de producción de sentido, por lo que, se diseñó un modelo de enseñanza (espacio textual) apropiado.

Fillooy (1999) menciona que la mayor parte de los autores se han interesado exclusiva-

mente en el problema de la interpretación de los signos, partiendo de que la producción de sentido y la interpretación son procesos absolutamente reversibles. Así, se puede decir que si el productor es dueño del objeto que elige para comunicar su mensaje, el intérprete está obligado a efectuar un trabajo de reconstrucción de ese objeto (semiótica inferencial).

Como indica Puig, la noción semiótica de los SMS permite estudiar los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido. “Lo que hay que calificar de matemático (en el proceso de producción de un texto) no es sólo un tipo particular de signos, sino sobre todo determinados sistemas de signos; es decir, no hay que hablar de sistemas de signos matemáticos, sino de sistemas matemáticos de signos.” (Puig en Filloy, 1999). Así mismo la noción de SMS también nos permite analizar los sistemas de signos intermedios que generan los alumnos en la resolución de los problemas nuevos. Los diferentes SMS de que disponen (usan sus conocimientos previos) para resolver un problema en el cual necesitan “construir” un SMS nuevo, un problema en el cual sus conocimientos previos no son suficientes.

Filloy (1999) afirma que existen al menos cuatro fuentes de significado en la generación de los SMS: transformaciones dentro de un sistema matemático de signos de que dispone el aprendiz (SMS disponible) sin referencia a otro sistema matemático de signos del que también disponga (SMS disponible); traducciones a través de SMS disponibles distintos; traducciones entre SMS disponibles y Sistemas de Signos Matemáticos; consolidación, simplificación, generalización y rectificación de acciones, procedimientos y conceptos de los sistemas de signos intermedios creados durante el desarrollo de las secuencias de enseñanza/aprendizaje.

La lectura/transformación de textos matemáticos y la producción de sentido Otro de los elementos teóricos empleados en la presente investigación es la noción de producción de sentido. Filloy y Rojano (1984a, 1984b, 1985a, 1985b, 1989) mostraron que: en la transición del conocimiento aritmético al algebraico, la adquisición de los nuevos significados algebraicos se da a la par con la adquisición de los nuevos sentidos de uso de las operaciones para la solución de una ecuación. En general, diremos que en un nuevo sistema matemático de signos el sentido de los signos viene dado por el uso de los nuevos signos de las maneras requeridas por cada uno de los pasos del proceso de análisis y solución matemática descrita en ese SMS (Filloy, 1991). El sistema matemático de signos nuevo queda ligado por la concatenación de las acciones desencadenadas por el proceso de solución de los nuevos problemas, que desde el nuevo sistema de signos se resuelven con el mismo proceso. Lo que antes era una diversidad de problemas se convierte así en una familia de problemas (en el nuevo SMS).

Los sentidos y los significados intermedios contruidos para resolver los problemas nuevos, y los sistemas de signos intermedios correspondientes, constituyen estratos del sistema matemático de signos nuevo. En el acercamiento teórico propuesto por Filloy (Filloy, Rojano, & Puig, 2008; Kieran & Filloy, 1989; Puig, 2004) la noción de texto se introduce para ser utilizada en el análisis de cualquier práctica de producción de sentido; por ejemplo, cuando el estudiante o aprendiz interactúa con un modelo de enseñanza. Filloy, Rojano, & Puig (2008) afirman que en esta perspectiva, basada esencialmente en la semiótica de Pierce (1931), se hace la distinción entre texto (T) y espacio textual (ET),

la cual se corresponde con la distinción entre significado y sentido, por lo que, los textos no han de concebirse como manifestaciones del lenguaje matemático, ni identificarse con los textos escritos.

Talens & Company (1984) definen un texto como “el resultado de la lectura/transformación hecha sobre un espacio textual”, cuya intención no es extraer o desentrañar un significado inherente al espacio textual sino producir sentido. El espacio textual tiene existencia empírica, es un sistema que impone una restricción semántica a quien lo lee; el texto es la nueva articulación de ese espacio, individual e irrepetible, realizada por una persona como consecuencia de un acto de lectura. Así, un modelo de enseñanza es una sucesión de textos que son tomados como un espacio textual para ser leído/transformado en otro espacio textual conforme el aprendiz crea sentido en sus lecturas. (Rojano, 2010).

Se adjuntan a los SMS, los sistemas de signos o estratos de sistemas de signos que los aprendices producen con el fin de dar sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza. De acuerdo a Filloy, los textos producidos por lecturas que utilizan diferentes estratos pueden llegar a ser descritos en un SMS, pero cuando esto último no sucede, solamente la creación de un nuevo SMS lo hará posible. El proceso de crear nuevos SMSs para tal propósito es un proceso de abstracción y el nuevo sistema de signos es más abstracto que los anteriores. En nuestro caso, aquí nos ocupa el nuevo sistema matemático de signos del álgebra (SMS2), éste es más abstracto que el sistema matemático de signos de la aritmética (SMS1), el del modelo y el de los estratos intermedios constituidos por las producciones propias de los estudiantes como resultado de su interacción con el modelo propuesto.

Filloy, Rojano & Puig (2008) mencionan que es necesario producir sentido para las nuevas expresiones y las operaciones necesarias con el fin de utilizarlos y no solamente dar sentido solamente a los SMS, además de que, una forma de producir sentido es a través del proceso de verificación, así, los signos compuestos pueden ser nombrados y manipulados como las unidades y posteriormente en los procesos de significación para resolver las nuevas situaciones con que se enfrenta el alumno en las secuencias de enseñanza de la memoria a largo plazo. Además, la distinción entre ET y T es una distinción entre posiciones en un proceso, porque cualquier T, resultado de una lectura de un ET, está de inmediato en posición de ET para una nueva lectura (y así ad infinitum).

Tanto el trabajo de los profesores de matemáticas, como el de los estudiantes en las clases de matemáticas pueden describirse desde el punto de vista de este proceso reiterado de lectura/transformación de espacios textuales en textos. En particular, desde ese punto de vista un Modelo de Enseñanza es una secuencia de textos que se toman como ET para su lectura/transformación en otros T al crear sentido los estudiantes en sus lecturas. Ahora bien, como el modelo de enseñanza es una secuencia de textos, producidos tanto por el profesor como por el estudiante y estos textos son el resultado del trabajo de ambos en situaciones de enseñanza que son de hecho situaciones problemáticas (que se toman como espacios textuales).

El estudio del álgebra temprana Con respecto a la corriente llamada álgebra temprana o early algebra, Butto y Delgado (2012) refieren que surgió con la finalidad de estudiar la factibilidad de iniciar a los alumnos de primaria en conceptos básicos del álgebra, para de esta manera, garantizarles los antecedentes necesarios en su adquisición del lenguaje

algebraico en la escuela secundaria. Afirman también que hoy en día, la literatura en esta área es muy nutrida y abarca un espectro amplio de acercamientos, algunos de los cuales resultan antagónicos entre sí, como es el caso de quienes proponen una iniciación a través de experiencias conceptuales del álgebra (a partir de la generalización o de la modelación) sin el uso “prematureo” de una simbolización formal, o como el caso de quienes proponen una iniciación temprana al álgebra vía la utilización de su simbología para representar situaciones concretas o familiares para el estudiante.

El álgebra temprana se refiere a la introducción del pensamiento algebraico a edades que van del cuarto al sexto año de primaria y primero de secundaria. En el currículum mexicano, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra se pospone hasta la educación secundaria, se argumenta la dificultad inherente a los contenidos matemáticos, inaccesibles a edades tempranas. Desde la perspectiva piagetiana, el enfoque de álgebra temprana en el niño se sitúa en una etapa de su desarrollo cognitivo en la cual no se han desarrollado completamente el pensamiento lógico formal y la abstracción sobre lo concreto; en cambio la conservación de la cantidad, la reversibilidad y las operaciones concretas se hallan bien consolidadas. El tema parece contradecir las investigaciones originales que afirman que el pensamiento algebraico corresponde más bien a la etapa de las operaciones formales, situadas alrededor de los 15-16 años. Sin embargo, estudios posteriores a Piaget han permitido dilucidar etapas más finas en el desarrollo cognitivo del niño y entender otros factores que permitirían abordar el desarrollo del pensamiento algebraico a edades más tempranas, con los enfoques pertinentes y al tomar en cuenta otros factores que han demostrado influir en el desempeño de las tareas. (Butto y Delgado, 2012)

Hoy en día, el álgebra temprana es también un tema de investigación activa con contribuciones de diversas áreas tales como la psicología cognitiva o la matemática educativa. Los procesos de generalización consisten en descubrir un patrón o regla a partir de una secuencia de objetos, que pueden ser numéricos o geométricos. Las investigaciones al respecto muestran que un niño puede comprender una regla, aun cuando no pueda expresarla en lo que llamamos un lenguaje algebraico. Sin embargo, es capaz de construir una tabla y extrapolar o interpolar correspondencias fuera del dato.

Butto y Delgado (2012) en su obra “Rutas hacia el álgebra. Actividades en Excel y Logo” consideran importante distinguir los términos álgebra temprana y pre-álgebra. En el primero se hace énfasis en los procesos de pensamiento que conducen a las ideas algebraicas, incluso cuando no sean totalmente acabadas, pero que ofrezcan verdaderos medios para acceder con soltura a las ideas algebraicas más acabadas. Ello está fundamentado por la psicología piagetiana que señala los diversos estadios en el desarrollo del pensamiento matemático del niño. En el enfoque de pre-álgebra se hace énfasis en los contenidos matemáticos previos a la introducción formal de los conceptos algebraicos, tales como propiedades de exponentes, polinomios, productos notables, etcétera. Proponen además una opción alterna de acceso al álgebra por la ruta de la proporcionalidad, la cual se inspira en las investigaciones que conciben a la aritmética, de hecho a la matemática de la escuela elemental, como un piso firme sobre el cual pueden construirse conceptos algebraicos como el de incógnita y el de variable en una relación funcional.

La comprensión del razonamiento proporcional, por ejemplo, requiere del estudiante un cambio cualitativo en los esquemas cognitivos para que pueda transitar del pensa-

miento aditivo al pensamiento multiplicativo. La mayoría de los alumnos de educación primaria presenta dificultades para realizar ese cambio cualitativo. Butto y Delgado (2012) afirman que una de esas dificultades consiste precisamente en poder diferenciar situaciones de estructura multiplicativa de situaciones de estructura aditiva. Esto se manifiesta en el uso de métodos aditivos erróneos. En educación secundaria las relaciones de proporcionalidad se estudian vinculadas al pensamiento algebraico, como, funciones lineales. El estudio del pensamiento proporcional en educación básica forma un eje articulador de contenidos matemáticos diversos, que continúan y se generalizan en niveles de estudios posteriores.

Pensamiento algebraico temprano La transición de la aritmética al álgebra como ya se afirmó constituye un paso importante para acceder a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolares. Al respecto, Butto y Delgado (2012) afirman que una de las dificultades que la mayoría de los estudiantes enfrenta al iniciarse en el estudio del álgebra obedece a que ésta ha sido vista como una transición lineal, como una extensión de los cálculos numéricos a la operación con incógnitas y variables. Por otro lado, numerosos estudios en didáctica del álgebra han investigado y catalogado las dificultades y los errores que cometen los estudiantes al iniciarse en el estudio del álgebra elemental; autores como Booth (1984), Kieran (1980 y 1988), Mason et al. (1985); Filloy y Rojano (1989); Filloy, Rojano y Puig (2008); señalan que estos alumnos tienden a usar métodos aritméticos en lugar de métodos algebraicos para resolver problemas de enunciado y tienen dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra como el de despejar la incógnita en una ecuación, número general y variable, así como para comprender que las operaciones en álgebra pueden no llevar a un resultado numérico y que eventualmente pueden quedar como operaciones suspendidas. Estos estudios, además, evidenciaron que un bagaje predominantemente aritmético puede resultar un obstáculo para el aprendizaje del álgebra, ver por ejemplo, el estudio de Filloy y Rojano (1989) y Kieran, (1988). En ese sentido, algunos estudiosos afirman que para el desarrollo del pensamiento algebraico es imprescindible que los alumnos puedan pensar y percibir la simbología y las operaciones aritméticas de manera distinta a la que se cultiva tradicionalmente en la escuela primaria, para que sobre ese nuevo modo de pensamiento aritmético construyan las nociones básicas del álgebra.

Cabe mencionar que el acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, se enfatizan sus aspectos manipulativos y al final se resuelven problemas. La principal crítica a este acercamiento es que se introduce al estudiante a un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, no se considera que ya haya estudiado algunos contenidos de la aritmética, donde los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan en buena medida la manera de resolverlos. Por otra parte, los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y parece oportuno iniciarse en ese pensamiento a edades tempranas (7-11 años), al aprovechar las fuentes de significados que están presentes en los contenidos curriculares de la primaria.

Las ideas vertidas en el presente artículo constituyen un primer acercamiento para entender la importancia de que los profesores de matemáticas (no sólo de educación básica) desarrollen: la competencia formal y la construcción de su habitus con base en

el Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático, que les permita lograr incidir a través de la enseñanza en el aprendizaje de los alumnos sobre la construcción de significados y producción de sentido.

Bibliografía Bourdieu, P. & Passeron, J. C. (1981). *La Reproducción. Elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. Barcelona: Laia Butto, C. y Delgado, J. (2012). *Rutas hacia el álgebra: actividades en Excel y Logo*. México: UPN. Córdoba, J. (2005). *Uso didáctico de errores de sintáxis para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Tesis de Maestría inédita. México: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. Córdoba, J. (2016). *Intertextualidad y producción de sentido en la lectura/transformación de textos algebraicos en la enseñanza/aprendizaje en secundaria*. Tesis doctoral inédita. México: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. Esty, W.W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 14(4), 31-53. Filloy, Yagiüe E. (1991). Cognitive tendencies and abstraction processes in algebra learning. In Furinghetti (ed.). *Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 48-56. Assisi, Italy. Filloy, E. (1997). *La observación en matemática educativa. Modelos teóricos locales y sistemas de signos*. México. Filloy, Yagiüe E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa. Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, Filloy, E. & Córdoba, J. (2013). *La intertextualidad en el uso competente del sistema matemático de signos algebraico/Intertextuality in the competent use of mathematical system of algebraic signs*. In Preciado Babb, A.P., Solares Rojas, A., Sandoval Cáceres, I.T., & Butto Zarzar, C. (Eds.). *Proceedings of the Forts Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*, pp. 127-132. Calgary, Canada. Filloy, E. y Rojano T. (1989). *Solving Equations: The transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 12-25. Filloy, E. Rojano T., & Puig L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. USA: Springer. Filloy, E. Rojano T., & Puig L. (2011). *Intertextuality in Algebra. Empirical Evidence Concerning the Solution of Word Problems and of linear Equations Systems*. 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1. p. 296 Ankara, Turkia. Gallardo, A. (2002). *The extension of the natural number domain to the in the transition from arithmetic to algebra*. *Educational Studies in Mathematics* 49:171-192. Kluwer Academic Publishers. Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). *Structure sense in high school algebra: The effect of brackets*. En M. J. Hoines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, 3, pp. 49-56. Bergen, Norway: Bergen University College. Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra. A structural perspective*, en Wagner y Kieran, (eds.), p. 33-56 Kieran, C. (2006). *Research on the Learning and Teaching of Algebra: A broadening of sources of meaning*. In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.) (pp. 23-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. Kieran, C. y Filloy, E. (1989). *El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica*. *Enseñanza de las Ciencias*, (7) pp. 230-240. Kirshner, D. (1987). *The grammar of symbolic elementary algebra*. Unpublished doctoral disseertation, University of British Columbia, Vancouver. Martínez, M. (2012). *De la modelación*

concreta-dinámica al sistema matemático de signos del álgebra: lectura/transformación de textos en la resolución de ecuaciones lineales. Documento Pre-Doctoral. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México. Molina, M. (2012). Proyecto investigador. Plaza titular de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Perrenoud, P. (2006). Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar. España: Graó Puig, L. (1994). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.). La educación matemática en la enseñanza secundaria. pp. 61-94. Barcelona: Horsori/ICE. Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (Anexo, pp. 1-20). Jaén: SEIEM. Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas*. Vol. 75, Noviembre de 2010, pp. 5-20. Recuperado de <http://www.sinewton.org/numeros>. Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification-the Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228. Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform, *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22. Solares, A. (2007). Sistemas matemáticos de signos y distintos niveles de representación de la incógnita. Tesis doctoral inédita. México: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. Talens, J. & Company, J.M. (1984). The textual space: On the Notion of Text. *The Journal of the Midwest Language Association*, 17(2), 24-36.

9 Assessing environmental and social factors to predict Dengue incidence risk

Irene Marcelino Salvador
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP

Coauthor(s): Jorge Velázquez-Castro

Dengue disease is an important problem of public health in Mexico. Choosing the right strategies and public policies to minimize the damage caused by the expansion and propagation of Dengue is a priority. The development of models that can describe the observed incidence of Dengue can help in tanking such decisions. It has been observed that Dengue incidence depends not only in climate factors like mean temperature, but also in social factors like people habits and public services. In this work we propose a multiple linear regression model that estimates the risk of incidence by means of social and climate metrics. The model is useful to predict the risk of Dengue incidence at regional level and is calibrated with information at national scale.

El Dengue es una enfermedad que representa un problema importante de salud pública en México. Es por lo tanto prioritario que se elijan las estrategias y políticas adecuadas que minimicen el daño causado por la expansión y propagación del Dengue. El desarrollo de modelos capaces de describir la incidencia observada podrá ayudar tomar tales decisiones. Se ha observado que la incidencia de Dengue depende tanto de factores climáticos como la temperatura, como de factores sociales como los servicios públicos. En este trabajo se propone un modelo de regresión lineal múltiple para estimar el riesgo de incidencia al tomar en cuenta los factores sociales y climáticos.

9.1. Introducción

El dengue es una enfermedad que representa un problema importante de salud pública en México. Actualmente es considerado una de las enfermedades más importantes con respecto a su magnitud epidemiológica a nivel mundial.

Es una enfermedad transmitida por vectores, de los cuales la hembra del mosquito *Aedes Aegypti* es el principal. Cabe mencionar que este mosquito también es el vector que

transmite los virus de Zika y Chikungunya. Las hembras del mosquito *Aedes Aegypti* se alimentan de sangre, al picar infectan transmitiendo así el virus a los seres humanos que a su vez se contaminan al succionar la sangre de quienes tienen el virus.

“El virus infecta el intestino medio del mosquito y luego se extiende hasta las glándulas salivales en un período de entre 8 y 12 días. Tras este período de incubación, el mosquito puede transmitir el virus a las personas al picarlas con fines exploratorios o alimentarios”, Organización Mundial de la Salud (OMS). De aquí la importancia de controlar la población del mosquito. Algunos de los principales factores que influyen en el incremento de la población del mosquito y en consecuencia el desarrollo de epidemias, son la lluvia, la temperatura y los contenedores de agua [4]. Este último factor está fuertemente relacionado con los hábitos y costumbres de la población. También tiene relación con el acceso a servicios sanitarios, ya que en localidades donde no se cuenta con un servicio eficiente de agua potable entubada se acostumbra coleccionar agua en grandes recipientes.

El ciclo de vida del mosquito se inicia cuando las hembras se alimenten de sangre, después de esto ovipositan los huevos generalmente en el peridomicilio y en áreas con vegetación como macetas, jardines interiores, o bien en depósitos de aguas artificiales como bebederos de animales domésticos, floreros, canaletas de techos, botes, llantas, y en general residuos sólidos que pueden almacenar agua y sirven de criaderos. El ciclo completo del *Aedes aegypti* en óptimas condiciones de temperatura y alimentación se completa en 10 días. La longevidad de los mosquitos adultos depende de la temperatura, precipitación y alimentación. Aproximadamente a 10°C viven alrededor de 30 días. A 23°C y sin alimento viven aproximadamente 4 días. Por lo tanto, es de esperarse que tanto factores sociales como ambientales jueguen un papel importante en la reproducción del mosquito transmisor del virus.

Las primeras epidemias de Dengue reportadas datan de 1770 a 1780, casi simultáneamente en tres continentes Asia, África y América del Norte. Según la OMS en México durante el año 1941, se reportaron los primeros casos de Dengue, se notificaron 6,955 casos en toda la república. Este brote se logró extinguir en 1963 gracias a la campaña de eliminación del *Aedes Aegypti* que mantuvo el Dengue ausente durante 12 años. Sin embargo, en 1978 se reintrodujo en México y hubo un aumento de casos a partir de 1980, por lo cual el Dengue se convirtió en uno de los problemas actuales más importantes de salud pública a nivel nacional.

El virus del Dengue es del tipo ARN y pertenece a la familia Flaviviridae. Se han descubierto cuatro serotipos del virus: DEN1, DEN2, DEN3 y DEN4, cada uno corresponde a una población de cepas agrupadas en varios genotipos. El período de incubación del virus del Dengue es de siete a diez días, y los **síntomas** que presentan las personas infectadas por este virus son: un cuadro febril agudo de 3 a 5 días de duración, dolores articulares, musculares, náuseas, vómitos, diarrea, tos, sarpullidos. Más aun, si la persona infectada llega a presentar: inflamación de los ganglios linfáticos, cefaleas o dolor muy intenso detrás de los globos oculares, alteraciones gastrointestinales, ocasionalmente presentan diferentes manifestaciones hemorrágicas espontáneas como epistaxis o gingivorragias e hipotensión, es porque que el virus del Dengue a evolucionado a formas más severas como dengue hemorrágico y síndrome de choque de Dengue. Como consecuencia las personas infectadas presentan una convalecencia duradera, con fatiga y depresión

persistentes.

En este trabajo se analiza la influencia e importancia de diversos factores tanto sociales como ambientales en la incidencia de Dengue en México. La identificación y clasificación de los factores sociales y ambientales que potencian la transmisión de la enfermedad es la base para implementar políticas de salud pública y para la identificación de zonas de riesgo.

9.2. Estudio de los efectos ambientales y sociales en la incidencia de Dengue

9.2.1. Datos de estudio

Para este estudio se usaron datos recopilados y filtrados de incidencia de dengue reportados por la Dirección General de Epidemiología (DGA) [3], Sistema Nacional de Vigilancia Epidemiológica (SINAVE) , datos ambientales reportados por el Servicio Meteorológico Nacional (SMN), Secretaria de Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT), así como datos sociales reportados por Instituto Nacional de Estadísticas Geográficas (INEGI) [1], Secretaría de Desarrollo Social (SEDESOL) y Comisión nacional del agua (CONAGUA).

Los datos recopilados de incidencia de Dengue y factores ambientales corresponden al año 2014 y 2011, los datos recopilados para factores sociales corresponden al año 2011. Los datos sociales son los más actuales hasta el momento, debido a que el censo de población que realiza INEGI se lleva a cabo cada diez años.

9.2.2. Efecto de temperatura en la incidencia de Dengue en Baja California Sur

Se obtuvo un Modelo de Regresión Lineal Simple (MRLS) para el ajuste de un polinomio a una serie de tiempo. Para la serie de tiempo se empleó la incidencia de dengue del estado de Baja California Sur (BCS) como variable dependiente y temperatura mínima semanal como variable independiente, ya que la temperatura es un factor importante para la reproducción del mosquito *Aedes Aegypti* transmisor del virus del Dengue. Se estudia el caso de BCS debido a que se registró un brote de dengue en el 2014.

En la figura (1.a) se muestran los datos de casos de dengue representados por puntos y la línea sólida nos indica las temperaturas registradas semanalmente del año 2014, para este estado.

Se ajustó un polinomio de grado dos a estos datos por medio de regresión lineal simple. Es decir, se propuso un modelo de la forma:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X + \hat{\beta}_2 X^2 \quad (9.1)$$

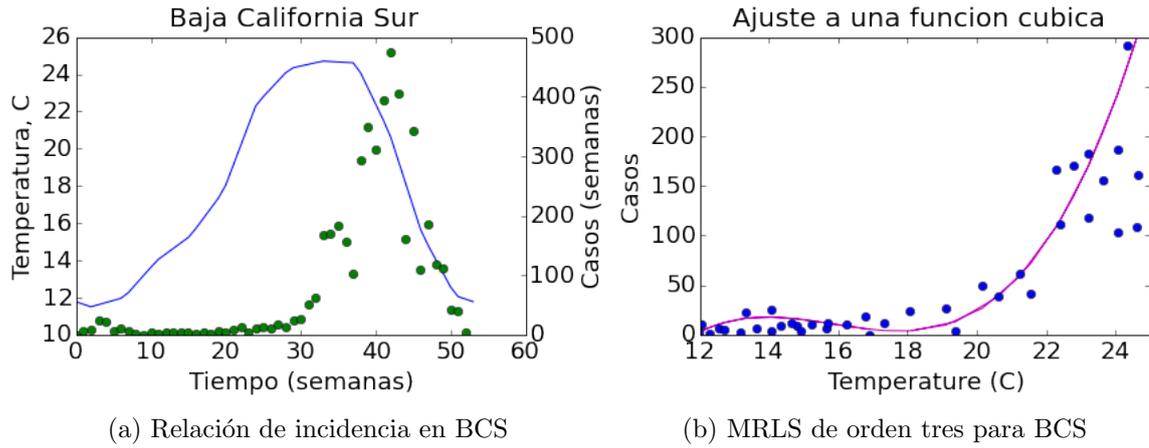


Figura 9.1: Modelo de Regresión Lineal para Baja California Sur

Donde $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ son coeficientes de regresión que se estiman por el método de mínimos cuadrados y se trata de minimizar la suma de cuadrados entre la ecuación y los puntos de los datos. Con este método se obtuvo que:

$$\hat{\beta}_0 = 741,195, \hat{\beta}_1 = -99,679, \hat{\beta}_2 = 3,277$$

así el Modelo de Regresión Lineal Simple (MRLS) de segundo orden está dado por:

$$\hat{Y} = 741,195 - 99,679X + 3,277X^2 \tag{9.2}$$

Para obtener un MRLS que ajuste mejor a los datos se hizo como función de prueba un polinomio de grado tres:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1X + \hat{\beta}_2X^2 + \hat{\beta}_3X^3 \tag{9.3}$$

Al realizar los cálculos los estimadores para este MRLS son:

$$\hat{\beta}_0 = -1,902 \times 10^3, \hat{\beta}_1 = 3,729 \times 10^2, \hat{\beta}_2 = -2,386 \times 10^1, \hat{\beta}_3 = 5,013 \times 10^{-1}$$

de tal modo que el MRLS para un polinomio de grado tres está dado por:

$$\hat{Y} = -1,902 \times 10^3 + 3,729 \times 10^2X - 2,386 \times 10^1X^2 + 5,013 \times 10^{-1}X^3 \tag{9.4}$$

A pesar de que la ecuación (9.4) ajusta mejor a los datos de incidencia influenciada por la temperatura mínima, hay que tomar en cuenta que tiene un parámetro mas. Este MRLS se representa gráficamente en la figura (1.b) por la línea solida la cual se superpone a los datos de correlación de incidencia y temperatura representados por los puntos.

9.2.3. Efecto de la precipitación en la incidencia de Dengue en Baja California Sur

También se obtuvo un MRLS para la incidencia de dengue como variable dependiente y la precipitación como variable independiente. Para lograr esto se emplearon los datos de incidencia de dengue y datos de precipitación mensual del 2014 en BCS. En la figura (2.a), se muestra con puntos la incidencia de dengue y mediante la línea sólida la precipitación media mensual para el estado de BCS.

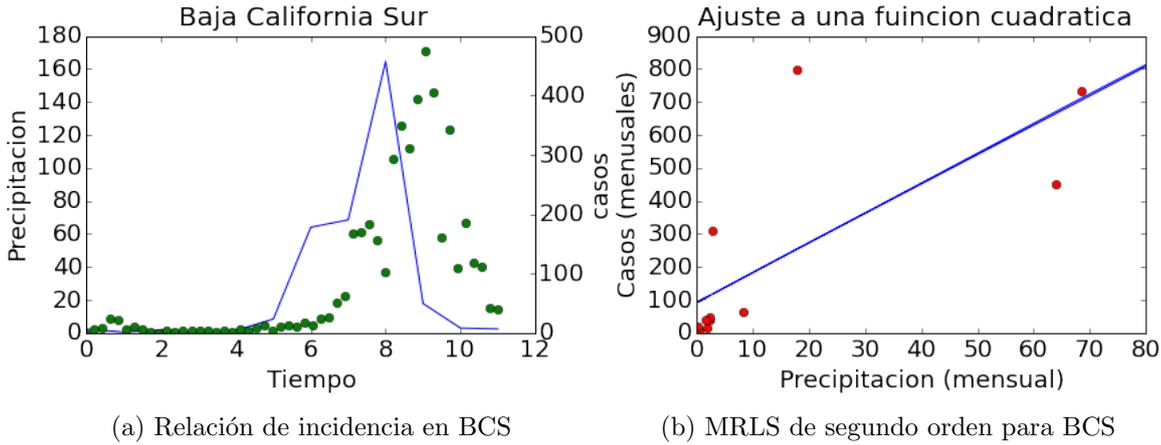


Figura 9.2: Efectos de la precipitación en la incidencia de Dengue para Baja California Sur

Debido a que la precipitación está dada en meses, se estima la incidencia de dengue mensualmente. Primero se ajustó un polinomio de segundo orden semejante al de la ecuación (9.1), donde los estimadores de mínimos cuadrados obtenidos son:

$$\hat{\beta}_0 = 9,18434296 \times 10^1, \hat{\beta}_1 = 9,12241327, \hat{\beta}_2 = -1,25183361 \times 10^{-3}$$

así el MRLS ajustado de segundo orden es:

$$\hat{Y} = 9,18434296 \times 10^1 + 9,12241327X - 1,25183361 \times 10^{-3}X^2 \quad (9.5)$$

También se propuso un MRLS de forma polinomial de orden tres, análogo a la ecuación (9.3). Al calcular los estimadores para los coeficientes de este modelo, se determinaron los siguientes valores:

$$\hat{\beta}_0 = -2,88952888 \times 10^1, \hat{\beta}_1 = 5,07000023 \times 10^1, \hat{\beta}_2 = -8,71281165 \times 10^{-1}, \hat{\beta}_3 = 3,78497648 \times 10^{-3}$$

de tal modo que el modelo está dado por:

$$\hat{Y} = -2,8895288 \times 10^1 + 5,07000023 \times 10^1 X - 8,71281165 \times 10^{-1} X^2 + 3,78497648 \times 10^{-3} X^3 \quad (9.6)$$

La ecuación (9.6) da un buen ajuste a los datos de incidencia influenciada por la precipitación. Este MRLS se representa gráficamente en la figura (2.b) por la línea solida, la cual se superpone a los datos de incidencia correspondientes a la precipitación en dicho mes.

9.2.4. Retardo en la aparición de brotes epidemiológicos

Como se puede observar de las figuras (4.a) y (4.b) la aparición de brotes que se predicen mediante los modelos propuestos, se presentan antes que los brotes reales. Esto indica que hay un retardo entre los factores ambientales y su efecto en el brote epidémico. Para obtener este retardo se calculó la correlación entre el modelo de regresión con los datos reportados de dengue a distintos corrimientos temporales del modelo. La figura (9.3) muestra la correlación entre los datos y el modelo a distintos corrimientos temporales. El valor máximo es 0.912 y muestra retraso de un mes. Resultados similares se obtienen para la temperatura usando el MRLS cubico dado por la ecuación (9.4). Es decir, los efectos de las variables ambientales se reflejan después de un mes.

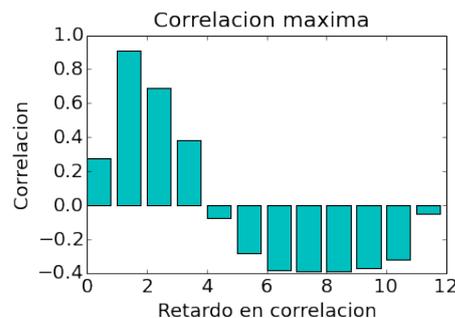


Figura 9.3: Correlación entre precipitación, temperatura e incidencia

El modelo de regresión con un retardo de un mes tiene una correlación alta de 0.92 con respecto a la incidencia. Esto indica que el modelo es bueno y predice que si se pronostica un espesor de 6mm en precipitación es altamente probable tener un brote de dengue. Esta información puede ser empleada para tomar medidas preventivas empleando los pronósticos meteorológicos.

9.2.5. Efecto de la temperatura y precipitación en la incidencia de Dengue en México

Se estudió también el efecto de la temperatura en la incidencia de dengue mediante los datos agregados de todos los estados en la república mexicana que presentaron casos en el año 2014. Para este modelo fue necesario escalar la incidencia con la población

9.2 Estudio de los efectos ambientales y sociales en la incidencia de Dengue

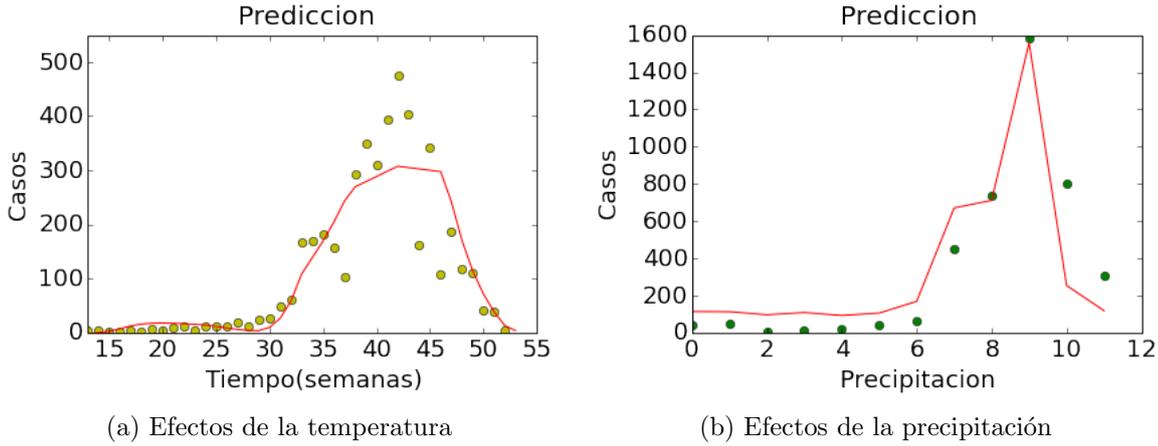


Figura 9.4: Modelo predictivo de la incidencia de Dengue

estatal correspondiente. También se eliminaron los valores estadísticamente atípicos de casos estatales. Se encontró un modelo ajustado entre la temperatura mínima y los casos mensuales de dengue del 2014. Se propuso un polinomio de segundo orden, donde los valores de los coeficientes estimados para este caso son:

$$\hat{\beta}_0 = 907,914, \hat{\beta}_1 = -122,186, \hat{\beta}_2 = 4,479$$

Siendo así el MRLS para datos agregados de la república Mexicana que relaciona temperatura e incidencia:

$$\hat{Y} = 907,914 - 122,186X + 4,479X^2 \quad (9.7)$$

Este modelo se aprecia en la figura (5.a) junto con los datos de incidencia contra temperatura.

El efecto de la precipitación en la incidencia de Dengue en México se analiza de manera semejante y se obtiene el modelo que relaciona precipitación con incidencia de dengue. A continuación se hizo un ajuste de un polinomio de segundo orden, de la forma de la ecuación (9.1). Los valores estimados de los parámetros para este análisis son:

$$\hat{\beta}_0 = 6,018x10^{-1}, \hat{\beta}_1 = 8,965x10^{-3}, \hat{\beta}_2 = -1,201x10^{-6}$$

por tanto el MRLS para México está dado por:

$$\hat{Y} = 6,018x10^{-1} + 8,965x10^{-3}X - 1,201x10^{-6}X^2 \quad (9.8)$$

En la figura (5.b) se aprecia los datos y el modelo ajustado para la precipitación e incidencia.

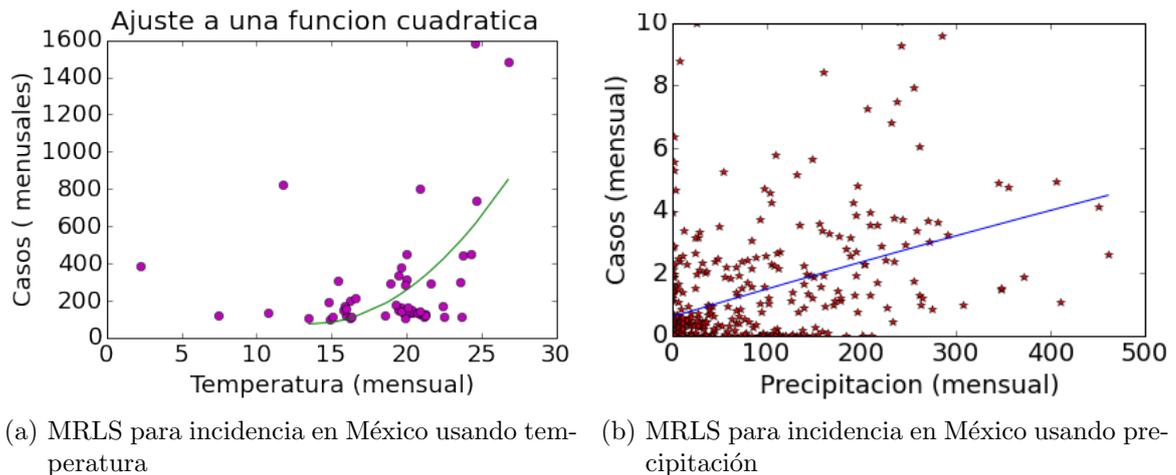


Figura 9.5: Modelo de Regresión Lineal Simple para México

9.3. Inclusión de factores sociales en un modelo de regresión lineal múltiple de incidencia de Dengue

Se obtuvo un modelo de regresión lineal múltiple que involucra tanto variables sociales como ambientales que influyen en la propagación de Dengue. Para calibrar el modelo se usó información del año 2011 de cada uno de los 32 estados de México. En la figura (9.6) se puede apreciar la incidencia de dengue, donde la difuminación de cada estado está relacionada con la incidencia de dengue, para colores intensos incidencia alta y para colores tenues incidencia de dengue bajos.

La información recopilada que se tomará en cuenta en la construcción del modelo es la siguiente:

- Incidencia de dengue por entidad (PID): Que está determinada por los casos de dengue del 2011 reportados por DGA entre el número de habitantes por estado.

Como variables sociales independientes se consideran:

- Total de residuos sólidos (TRS): Esta variable resulta de la resta de la generación de residuos sólidos menos la disposición final de residuos sólidos en sitios controlados (miles de toneladas) reportados por INEGI.
- Promedio de habitantes por vivienda (PHV): Es importante considerar esta variable ya que se quiere ver que tan relacionado está el número de habitantes por vivienda (hacinamiento) con la incidencia de dengue.
- Tomas de agua: Es importante considerar esta variable ya que una vivienda al no contar con una toma de agua se ve en la necesidad de almacenar agua y con ello contribuir el incremento de criaderos del mosquito. Esta variable se determina dividiendo las tomas domiciliarias de agua entre el total de viviendas habitadas (no se consideran negocios ni casas móviles).

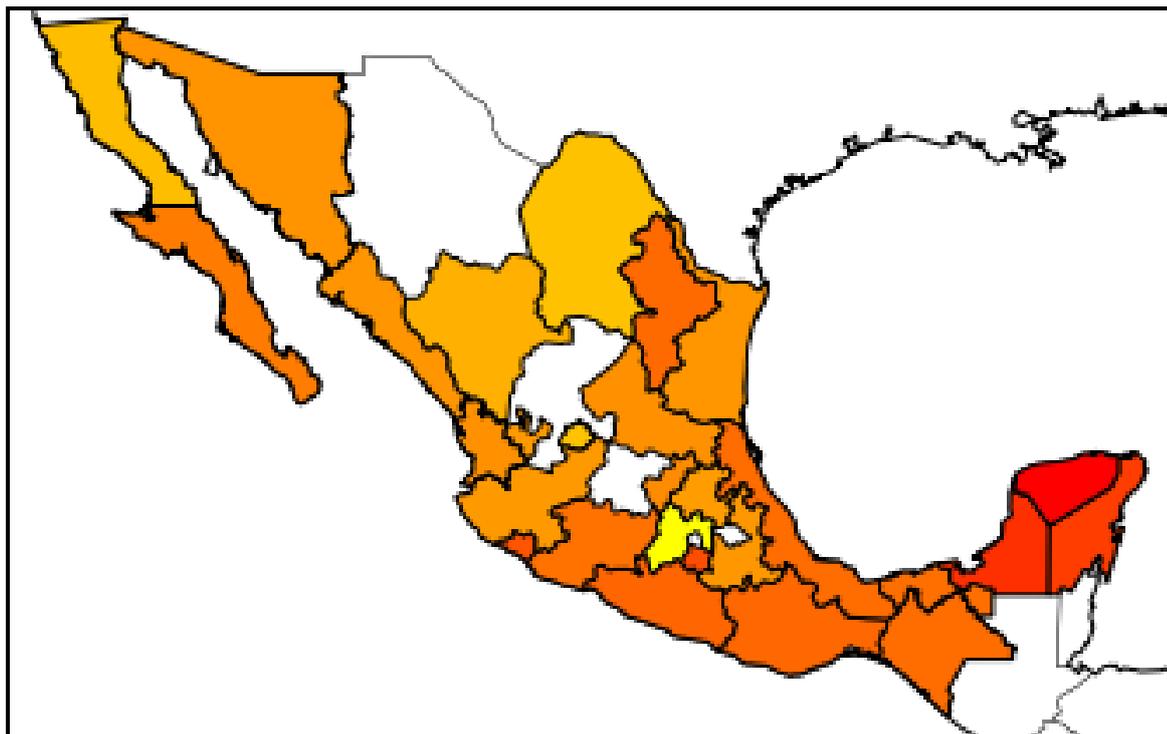


Figura 9.6: MRLS de orden dos para precipitación e incidencia

- Localidades con agua: Esta variable está determinada por las localidades con red de distribución de agua entre el número total de localidades.
- Localidades con drenaje y alcantarillado (LDA): La variable a considerar será realmente la que resulta de dividir LDA entre el número de localidades en el estado.

Como variables ambientales independientes se considerarán:

- Precipitación: El agua de lluvia puede almacenarse en recipientes y cacharros generando un gran número de criaderos para los mosquitos.
- Temperatura mínima: Variable ambiental en la cual el rango registrado para el año 2011 va de 5.975 °C a 21.808 °C.
- Temperatura media: Importante considerar esta otra variable ya que en este rango se encuentra un rango de 14.3 °C a 26.858 °C, que favorecen el desarrollo del mosquito.
- Temperatura máxima: Una variable que afecta la tasa de desarrollo del mosquito *Aedes Aegypti*, y el rango registrado para esta variable va de 21.966 °C a 32.641 °C.

Nótese que los rangos de las variables de las tres diferentes temperaturas registradas son los promedios anuales para cada estado considerado.

9.3.1. Análisis de componentes principales

Se realizó un análisis de componentes principales para reducir la dimensión del sistema y hacer un modelo de regresión lineal de sólo dos de los principales factores independientes.

Se calcularon los eigenvalores y eigenvectores asociados a la matriz de covarianza y se extrajeron los dos componentes principales correspondientes a los eigenvectores asociados a los dos eigenvalores más grandes.

La primera componente principal agrupa a los factores ambientales, siendo la variable mas representativa de este conjunto la precipitación. La segunda componente principal agrupa a los factores sociales, siendo el total de residuos sólidos el factor más representativo de este conjunto.

Para el modelo de regresión lineal múltiple sólo se tomarán en cuenta estas dos variables independientes que afectan a la variabilidad de la incidencia de forma mas representativa.

9.3.2. Cálculo de los estimadores de mínimos cuadrados para el MRLM para México

Se propusieron dos modelos que toman en cuenta los factores sociales y ambientales. El primero es un modelo de la forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \quad (9.9)$$

donde X_1 corresponde a precipitación y X_2 representa el total de residuos sólidos (TRS).

Al minimizar la suma de cuadrados entre la ecuación y los puntos de los datos se obtiene que:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,12500308 \times 10^{-5} \\ -1,26928307 \times 10^{-7} \\ 2,17652933 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Así el MRLM está dado por

$$\hat{Y} = 5,12500308 \times 10^{-5} - 1,26928307 \times 10^{-7} X_1 + 2,17652933 \times 10^{-6} X_2 \quad (9.10)$$

También se ajustó un modelo de orden dos o completo con las variables independientes, es decir

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \epsilon \quad (9.11)$$

donde $X_3 = X_1^2$, $X_4 = X_2^2$, $X_5 = X_1 X_2$

9.3 Inclusión de factores sociales en un modelo de regresión lineal múltiple de incidencia de Dengue

En este caso los estimadores para el MRLM completo están dados por:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,56731964 \times 10^{-4} \\ -6,08136878 \times 10^{-7} \\ 1,20348622 \times 10^{-5} \\ 1,56860333 \times 10^{-10} \\ -4,66574794 \times 10^{-8} \\ 7,03881786 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

de tal modo que el modelo de orden dos estimado es:

$$\hat{Y} = -2,56731964 \times 10^{-4} - 6,08136878 \times 10^{-7} X_1 + 1,20348622 \times 10^{-5} X_2 + 1,56860333 \times 10^{-10} X_3 - 4,66574794 \times 10^{-8} X_4 + 7,03881786 \times 10^{-10} X_5 \quad (9.12)$$

En la figura (9.7) el modelo (9.12) se grafica junto con los datos de incidencia.

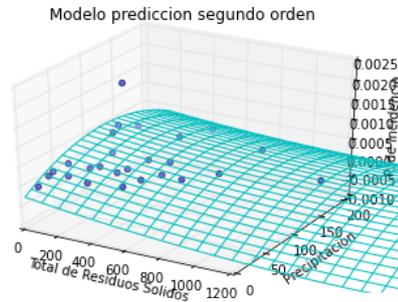


Figura 9.7: MRLS Completo

9.3.3. Prueba de mejor ajuste entre modelo lineal y cuadrático

A pesar de que la suma de los errores del modelo cuadrático es menor que la del modelo lineal, no significa necesariamente que sea un mejor modelo ya que tiene 3 parámetros extra. Es decir, un buen modelo es aquel que nos da la mayor información con el menor número de parámetros. Para seleccionar el mejor modelo entre el modelo lineal y el cuadrático, se realizó una prueba de hipótesis donde la hipótesis nula es:

$$H_0 : \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$$

vs la hipótesis alternativa

$$H_a : \beta_j \neq 0, \quad \text{al menos para un } j, j = 3, 4, 5,$$

donde las β_i corresponden a los coeficientes del modelo dado por la ecuación (9.11). Para esta prueba el estadístico F dado por

$$F = \frac{SSE_A / (k - p)}{SSE_C / (n - [k + 1])}$$

sigue una distribución F en caso de que la Hipótesis nula sea verdadera. Donde k es el número de variables independientes del modelo de regresión completo, p es el número de variables independientes del modelo de regresión reducido, n es el tamaño de la muestra y SSE_A , SSE_C denotan la suma de los errores cuadráticos para el modelo reducido y completo respectivamente. En este caso $k = 5$, $p = 2$, $n = 27$.

Los valores para calcular el estadístico F se muestran en la tabla (9.1):

Suma	Valor
SSE_R	$3,9421475053 \times 10^2$
SSE_c	$2,84924363859 \times 10^2$
SSE_A	$1,09290386671 \times 10^2$
	G.L
$\nu_1 = k - p$	3
$\nu_2 = n - (k + 1)$	21
F	2.68

Cuadro 9.1: Sumas de cuadrados del error y G.L.

Por tanto el estadístico $F = 2,68503786876$. El valor F tabulado para $\alpha = 0,1$ con $\nu_1 = 3$ grados de libertad en el numerador y $\nu_2 = 21$ grados de libertad en el denominador es $F_\alpha = 2,36$. Por tanto, el valor observado del estadístico de prueba cae en la región de rechazo y se concluye que en el nivel de $\alpha = ,1$ hay suficiente evidencia para apoyar la afirmación de que β_3, β_4 o β_5 , difieren de cero. Esto nos da evidencias para pensar que el MRLS cuadrático en las variables independientes es más adecuado para ajustar a los datos.

9.4. Conclusiones

Las técnicas estadísticas de modelos de regresión lineal ya sea simple o múltiple son muy útiles en un gran número de fenómenos cuando no se conocen a detalle los mecanismos que generan las correlaciones entre la variables independientes y la dependiente. En este trabajo se usaron dichas técnicas para encontrar un modelo de regresión lineal simple para predecir incidencia de dengue para el estado de Baja California Sur, por medio de la precipitación y uno más para predecir incidencia con datos de temperatura mínima.

Por otra parte se calculó la correlación que existe entre varios factores socio-ambientales y la incidencia de dengue en México. Con esto se logró observar que en el conjunto de variables ambientales, es la precipitación la que más influencia tiene en el riesgo de transmisión de la enfermedad. Por otro lado, en el conjunto de factores sociales, se observó

que la acumulación de desechos sólidos es un gran riesgo de salud pública respecto a potenciales brotes de dengue.

El análisis de componentes principales que se realizó, confirma que la influencia de los factores se agrupa estadísticamente en factores sociales y ambientales. Entre los factores sociales, la acumulación de desechos sólidos es el más representativo de esta componente. Mientras que la precipitación es la variable más representativa en la componente ambiental. Este resultado está de acuerdo con el análisis de correlaciones que se realizó.

Teniendo en cuenta lo anterior, se construyeron dos modelos de regresión lineal múltiple donde las variables independientes fueron el total de residuos sólidos y precipitación. El primer modelo sólo considera dependencia lineal con respecto a las variables independientes, mientras que el segundo modelo considera términos cuadráticos. Se usó una prueba de hipótesis para verificar cuál de los dos modelos es el más adecuado y se concluyó que el modelo cuadrático podría ser el más adecuado.

Este estudio podrá ser de utilidad para el diseño de campañas preventivas dando indicadores sobre los tiempos óptimos de su ejecución mediante pronósticos de clima y mediciones de la generación de residuos sólidos en diversas regiones. Además, puede ser empleado como sistema de alerta temprana que ayude a los servicios de salud. Como un trabajo posterior se emplearán los resultados obtenidos para estimar la incidencia de dengue en zonas de menor escala, es decir en municipios y localidades para los cuales no se tenga información sobre de la incidencia de dengue.

Bibliografía

- [1] Banco de informacion INEGI- Producción.
- [2] Chikungunya llegó a México en 2014; ya hay más de 3 mil casos - Grupo Milenio.
- [3] Dirección General de Epidemiología.
- [4] Entomology & Ecology | Dengue | CDC.
- [5] Geoestadística. Localidades Geoestadísticas - archivo histórico - consulta.
- [6] Wayne W. Daniel. *Bioestadística: Base para el análisis de las ciencias de la salud*. Editorial Limusa S.A. De C.V., 2002.
- [7] John E. Freund, Irwin Miller, and Marylees Miller. *Estadística matemática con aplicaciones*. Pearson Educación, 2000.
- [8] Said Infante Gil and Guillermo P. Zárate de Lara. *Métodos estadísticos: un enfoque interdisciplinario*. Trillas, 1990.
- [9] Santiago López de Ipiña Mattern. *Inferencia estadística y análisis de datos*. Pearson Educación, 2008.
- [10] B. B. C. Mundo. Así es el mosquito "Aedes aegypti", causante del zika, el dengue y la chikungunya.
- [11] Dennis D. Wackerly, William Mendenhall, and Richard L. Scheaffer. *Estadística Matemática Con Aplicaciones*. Cengage Learning, August 2009.

10 Modelación bayesiana de Memoria de Trabajo y Control Inhibitorio

Héctor Alejandro Cepeda Freyre

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla - Facultad de Psicología

La memoria de trabajo es una capacidad cognitiva de suma importancia, que suele estar relacionada con otras capacidades cognitivas. Se realizaron mediciones de memoria de trabajo bajo tres condiciones experimentales en un diseño de medidas repetidas. Los datos obtenidos se analizaron en conjunto con mediciones del control inhibitorio para evaluar tres hipótesis por medio de inferencia bayesiana.

10.1. Introducción

La memoria es un proceso cognitivo que ha recibido la atención de multitud de pensadores e investigadores a través de los años [4]. En un inicio, la discusión científica respecto a la memoria giraba en torno a su modularidad o unidad, por un lado existía la postura de que la memoria era un recurso unitario, el cual se encarga de todas las labores relacionadas con la retención y recuperación de información, y por otro se planteaba la existencia de distintos tipos de memoria, que eran independientes entre sí y se dividían según el tipo de funciones que realizaban; la evidencia obtenida a través de los años ha apoyado esta última postura [1].

La memoria de trabajo es un tipo de memoria utilizado para la realización de gran cantidad de operaciones cognitivas. Uno de los modelos mas utilizados para describirla es el propuesto por Baddeley y Hitch en 1974 [3], estos autores sustentan en evidencia empírica un modelo que sostiene a la memoria de trabajo como un sistema dinámico, una especie de "buffer" temporal que se encarga tanto de retener como de procesar información.

Dentro del estudio de este tipo de memoria han sido predominantes dos distintas aproximaciones [2]: la primera se enfoca en utilizarla para predecir otras capacidades cognitivas; la segunda se interesa por estudiar y analizar su estructura como sistema cognitivo.

El presente trabajo adopta una postura intermedia entre las aproximaciones mencionadas. Utilizando modelación bayesiana simple se busca explorar la relación entre la memoria de trabajo y el control inhibitorio, y cómo esta relación cambia en función de ruido visual presente durante una tarea de evaluación de memoria de trabajo.

10.2. Materiales y métodos

10.2.1. Muestra

Los datos analizados en el presente trabajo fueron recopilados de 30 estudiantes de licenciatura, quienes participaron voluntariamente en las tareas experimentales. El número de participantes es denominado $n = 30$.

Las variables S_1, S_2, \dots, S_n servirán para denotar a cada uno de los n participantes mientras que S se usará para denotar algún participante arbitrario. Adicionalmente, la mitad de los participantes son denotados I_H (buen control inhibitorio), y la otra mitad I_L (control inhibitorio deficiente). Esta denominación es asignada según su puntaje en una tarea "Go/No-go" [6] y una división por la mediana de tales puntajes [7].

10.2.2. Condiciones experimentales

En el presente trabajo se evaluaron tres condiciones experimentales: α, β, γ , las cuales representan el tipo de estímulo utilizado.

En la condición α los estímulos utilizados están conformados por 4 polígonos irregulares color negro, sin figura de fondo adicional; esta es la condición control.

En la condición β los estímulos utilizados están conformados por 4 polígonos irregulares color negro, con una línea gruesa color gris que representa la periferia de un cuadrado como figura de fondo.

En la condición γ los estímulos utilizados están conformados por 4 polígonos irregulares color negro, con una línea gruesa color gris que representa la periferia de un polígono irregular como figura de fondo.

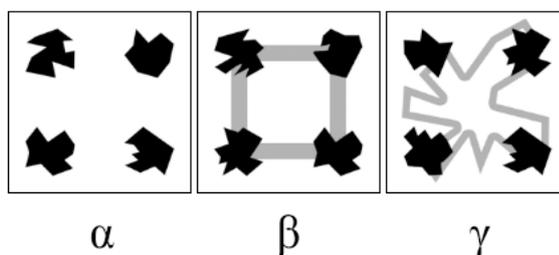


Figura 10.1: Comparación entre las condiciones experimentales

10.2.3. Orden de realización de los bloques experimentales

Cada participante realizó un bloque experimental en cada una de las condiciones experimentales, en un diseño de medidas repetidas. Para controlar el efecto del aprendizaje, los bloques experimentales fueron acomodados por medio de un diseño de cuadrado latino balanceado:

α	β	γ
γ	α	β
β	γ	α
α	γ	β
β	α	γ
γ	β	α

En el cual, cada fila horizontal representa un orden de realización de bloques experimentales, para un total de 6 posibles configuraciones. La configuración de acuerdo a la cual un participante llevaba a cabo el experimento fue asignada de forma aleatoria.

10.2.4. Procesamiento de datos

Los datos recabados del experimento fueron analizados utilizando el entorno estadístico R [10].

10.2.5. Cómputo de respuestas correctas en los bloques experimentales

Las mediciones de memoria de trabajo fueron obtenidas por medio de una tarea de detección de cambio. Una prueba de esta tarea es denominada t y un bloque experimental B .

$$t \in B \quad (10.1)$$

$$B \supset \{t_1 \dots t_k\} \quad (10.2)$$

En el caso del presente trabajo $k = 150$.

Durante cada t , a un sujeto S que participa en B le es mostrado un estímulo E_1 durante 1.5 segundos, terminado este tiempo se le retira el estímulo y después de 1.5 segundos sin observar ningún estímulo, le es mostrado a S un segundo estímulo E_2 . S debe entonces emitir una respuesta U .

$$U_i = \Delta_\theta \text{ si } S \text{ afirma que } \{E_1 = E_2\} \in t_i,$$

$$U_i = \Delta \text{ si } S \text{ afirma que } \{E_1 \neq E_2\} \in t_i.$$

Cada $t_i \in B$ tiene una respuesta correcta V_i que es dada por la ecuación:

$$(\{E_1 = E_2\} \in t_i \Rightarrow \{V_i \in t_i\} = \Delta_\theta) \vee (\{V_i \in t_i\} = \Delta) \quad (10.3)$$

Cada t_i tiene un resultado Q_i diferente dependiendo de la combinación de V_i y U_i :

$$\begin{aligned}
(V_i = \Delta_\theta \ \& \ U_i = \Delta_\theta) &\Rightarrow Q_i = Q_{CR} \\
(V_i = \Delta \ \& \ U_i = \Delta) &\Rightarrow Q_i = Q_H \\
(V_i = \Delta_\theta \ \& \ U_i = \Delta) &\Rightarrow Q_i = Q_{FA} \\
(V_i = \Delta \ \& \ U_i = \Delta_\theta) &\Rightarrow Q_i = Q_M
\end{aligned} \quad (10.4)$$

Prosigue que para cada $t_i \in B$, se cumple que $Q_i \in B$.

Cada $j \in \{1 \dots n\}$, S_j partipica en un bloque experimental por cada una de las condiciones experimentales, por lo que por cada S_j e índice $m \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ el respectivo bloque experimental es denotado B_j^m . De la participación de S_j en B_j^m se obtiene una cantidad de respuestas correctas R_j^m . Esta cantidad de respuestas correctas se computó de la siguiente manera:

$$[P] = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_2 \text{ es cierto} \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (10.5)$$

$$C(x, y, z) = \sum_{i=1}^k [Q_{i,y}^z = x]$$

$$R_j^m = C(Q_H, j, m) + C(Q_{CR}, j, m) \quad (10.6)$$

Donde $Q_{i,j}^m \in B_j^m$.

10.2.6. Modelación probabilística

La capacidad de control inhibitorio es denominada I , y a cada S_j , le corresponde un I_j , donde $j \in \{S_1 \dots S_n\}$. La mitad de los S son catalogados como poseedores de un buen control inhibitorio, $I_j = I_H$; la otra mitad es catalogada como poseedora de un control inhibitorio deficiente, $I_j = I_L$.

El control inhibitorio puede ser modelado como una variable de Bernoulli, donde $I_H = 1$ y $I_L = 0$, de tal forma que para cada condición experimental $m \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ existe una distribución binomial $x^m \sim B(n^m, p^m)$. Retomando la notación 10.5, n^m y p^m son dados por:

$$n^m = \sum_{j=1}^n R_j^m \quad (10.7)$$

$$r^m = \sum_{j=1}^n R_j^m [I_j = I_H] \quad (10.8)$$

$$p^m = \frac{r^m}{n^m} \quad (10.9)$$

Esta misma modelación fue utilizada para evaluar el efecto de la condición experimental sobre la memoria de trabajo, definiendo la variable de Bernoulli en función de la condición experimental a la que pertenece una respuesta correcta, de tal forma que para β , un respuesta correcta bajo la condición $\beta = 1$ y una respuesta correcta bajo la condición $\alpha = 0$, con distribución $x_\beta \sim B(n_\beta, p_\beta)$, mientras que para γ , una respuesta correcta bajo la condición $\gamma = 1$ y una respuesta correcta para la condición $\alpha = 0$ con distribución $x_\gamma \sim B(n_\gamma, p_\gamma)$. Los parámetros de ambas distribuciones son calculados con

el siguiente sistema de ecuaciones:

$$n_\beta = \sum_{j=1}^n R_j^\beta + \sum_{j=1}^n R_j^\alpha \quad (10.10)$$

$$r_\beta = \sum_{j=1}^n R_j^\beta \quad (10.11)$$

$$p_\beta = \frac{r_\beta}{n_\beta} \quad (10.12)$$

$$n_\gamma = \sum_{j=1}^n R_j^\gamma + \sum_{j=1}^n R_j^\alpha \quad (10.13)$$

$$r_\gamma = \sum_{j=1}^n R_j^\gamma \quad (10.14)$$

$$p_\gamma = \frac{r_\gamma}{n_\gamma} \quad (10.15)$$

10.2.7. Inferencia bayesiana

Para cada condición experimental $m \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ se evaluó la probabilidad posterior de 9 modelos probabilísticos utilizando el teorema de Bayes [12]:

$$P(\text{Modelo} \mid \text{Datos}) = \frac{P(\text{Datos} \mid \text{Modelo})P(\text{Modelo})}{P(\text{Datos})} \quad (10.16)$$

Respecto a los modelos evaluados, estos fueron planteados de acuerdo con distribuciones binomiales $\sim B(\theta_1, \theta_2)$, cada modelo tiene parámetro θ_2 diferente descrito mas adelante, mientras que θ_1 fue dado de acuerdo a la ecuación 10.7 para cada condición experimental.

$P(\text{Datos} \mid \text{Modelo})$ fue calculada según la ecuación:

$$P(\text{Datos} \mid \text{Modelo}) = \binom{\theta_1}{r^m} \theta_2^{r^m} (1 - \theta_2)^{\theta_1 - r^m} \quad (10.17)$$

Donde r^m fue calculado de acuerdo a la ecuación 10.8.

$P(\text{Modelo})$ representa la probabilidad *a priori* de cada modelo.

$P(\text{Datos})$ es calculado con la próxima ecuación:

$$P(\text{Datos}) = \sum_{q=1}^9 P(\text{Modelo}^q)P(\text{Datos} \mid \text{Modelo}^q) \quad (10.18)$$

Donde q indica el modelo.

Fueron planteadas tres posibles hipótesis para cada condición experimental: Ambos grupos de control inhibitorio tienen la misma probabilidad de responder correctamente a la tarea, denotada H_θ ; S_j tiene mayor probabilidad de responder correctamente a la tarea

cuando $I_j = I_H$, denotada H_1 ; y finalmente, S_j tiene mayor probabilidad de responder correctamente a la tarea cuando $I_j = I_L$, denotada H_2 .

Para H_θ se evaluó el parámetro $\theta_2 = 0.5$.

Para H_1 se evaluaron los parámetros $\theta_2 = 0.6$, $\theta_2 = 0.7$, $\theta_2 = 0.8$, y $\theta_2 = 0.9$.

Finalmente, para H_2 se evaluaron los parámetros $\theta_2 = 0.4$, $\theta_2 = 0.3$, $\theta_2 = 0.2$, y $\theta_2 = 0.1$.

Para la probabilidad *a priori* se le asignó el mismo peso a dos posibilidades:

1.- Existe un efecto del control inhibitorio ($H_1 + H_2$), $p = 0.5$.

2.- No existe un efecto del control inhibitorio (H_θ), $p = 0.5$.

Respecto a la posibilidad 1, se le dió el mismo peso probabilístico a ambas hipótesis, de tal forma que para H_1 , $p = 0.25$, y para H_2 , $p = 0.25$. Mientras que a cada modelo se le asignó una proporción equitativa de la probabilidad de la hipótesis correspondiente ($p = 0.0625$). La probabilidad *a priori* de los 9 modelos puede observarse en el Cuadro 10.1:

Modelo θ_2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Probabilidad	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.5	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625

Cuadro 10.1: Probabilidad *a priori* de los 9 modelos. Cada columna representa uno de los 9 modelos del parámetro θ_2 , cuyos valores son señalados en la primera fila. La segunda fila indica la probabilidad *a priori* asignada a cada modelo.

El mismo tipo de inferencia fue utilizado para evaluar el efecto de las condiciones experimentales, donde H_θ representa la ausencia de un efecto de la condición experimental, H_1 indica un efecto positivo sobre la memoria de trabajo, y H_2 indica un efecto negativo sobre la memoria de trabajo.

10.3. Resultados

Para la condición α , la distribución $x^\alpha \sim B(n^\alpha, p^\alpha)$ resultante tomó los siguientes parámetros:

$$n^\alpha = 2387$$

$$p^\alpha = 0.5081693$$

Mientras que el modelo con mayor probabilidad posterior es $\theta_2 = 0.5$, con una probabilidad de $p \approx 1$, mientras que el resto de los modelos tuvieron una probabilidad sumamente pequeña. En la Figura 10.2 (A) puede observarse la escala real de las probabilidades, y en (B) su comparación en escala logarítmica.

Respecto a la condición β , la distribución $x^\beta \sim B(n^\beta, p^\beta)$ resultante adquirió los siguientes parámetros:

$$n^\beta = 2343$$

$$p^\beta = 0.529236$$

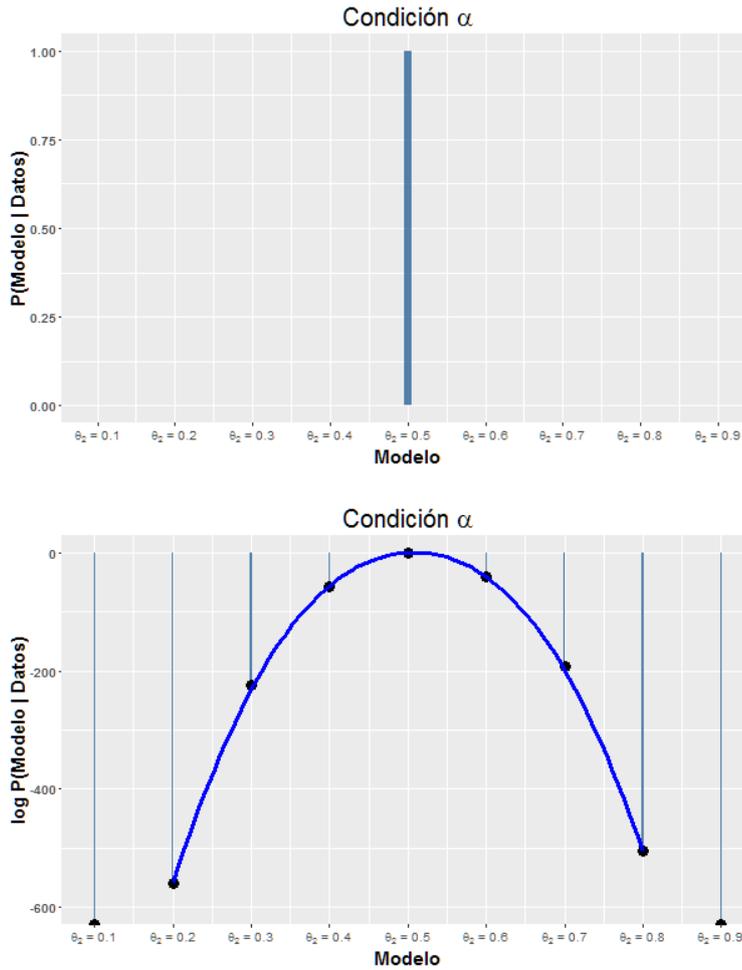


Figura 10.2: Probabilidad posterior de los modelos en la condición α . (A): Probabilidades posteriores en escala 1:1. (B): Logaritmo natural de las probabilidades posteriores

El modelo con mayor probabilidad posterior, fue nuevamente $\theta_2 = 0.5$, con $p \approx 1$. En la Figura 10.3 (A) se observan las probabilidades de los diferentes modelos, mientras que en (B) su comparación en escala logarítmica.

Finalmente, en la condición γ , la distribución $x^\gamma \sim B(n^\gamma, p^\gamma)$ resultante tuvo los siguientes parámetros:

$$n^\gamma = 2335$$

$$p^\gamma = 0.5062099$$

Una vez más, el modelo con mayor probabilidad posterior fue $\theta_2 = 0.5$, con $p \approx 1$. Las probabilidades posteriores son mostradas en la Figura 10.4 (A) mientras que su comparación en escala logarítmica en (B).

Con la información obtenida del experimento, fueron actualizadas las probabilidades de las respectivas hipótesis para cada condición:

La probabilidad de H_θ fue actualizada tomando la probabilidad posterior de $\theta_2 = 0.5$.

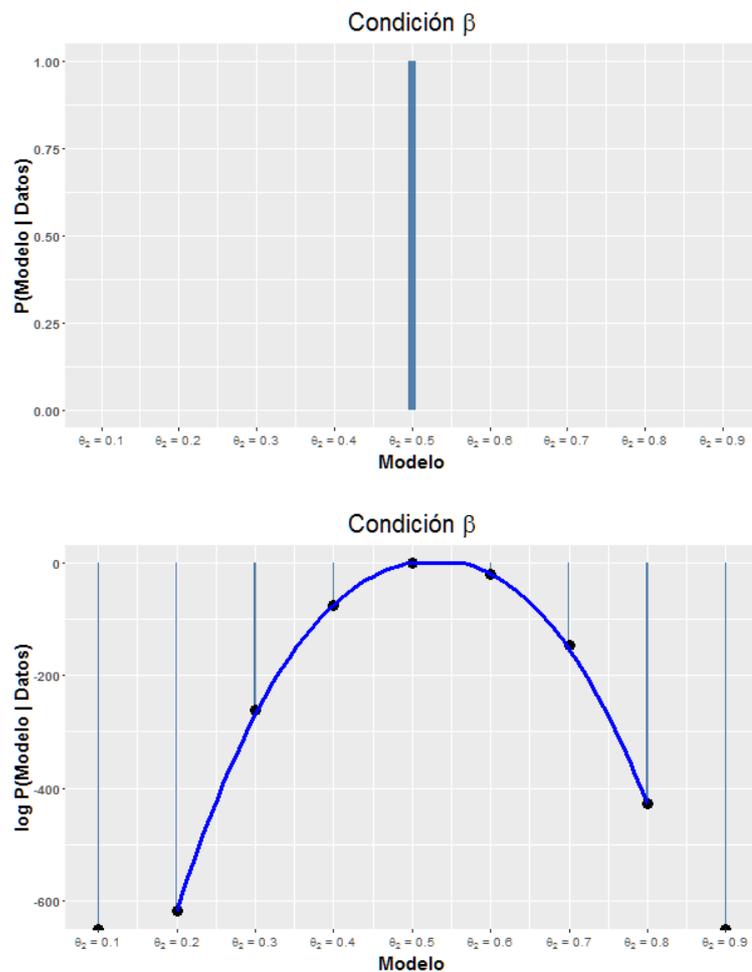


Figura 10.3: Probabilidad posterior de los modelos en la condición β . (A): Probabilidades posteriores en escala 1:1. (B): Logaritmo natural de las probabilidades posteriores

La probabilidad de H_1 fue actualizada sumando las probabilidades posteriores de $\theta_2 = 0.6$, $\theta_2 = 0.7$, $\theta_2 = 0.8$, y $\theta_2 = 0.9$.

La probabilidad de H_2 fue actualizada sumando las probabilidades posteriores de $\theta_2 = 0.1$, $\theta_2 = 0.2$, $\theta_2 = 0.3$, y $\theta_2 = 0.4$.

Las nuevas probabilidades de estas hipótesis pueden observarse en el Cuadro 10.2.

En cuanto al efecto de las condiciones experimentales sobre la memoria de trabajo, fue utilizada la misma metodología para actualizar la probabilidad de cada hipótesis, el resultado de esta actualización es mostrado en el Cuadro 10.3.

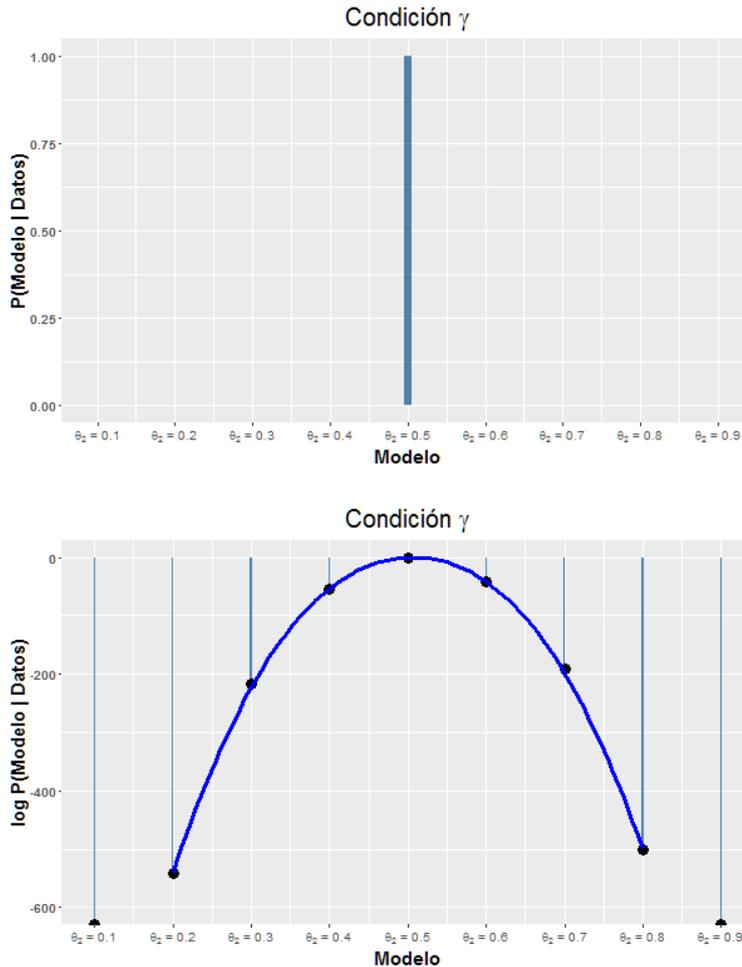


Figura 10.4: Probabilidad posterior de los modelos en la condición γ . (A): Probabilidades posteriores en escala 1:1. (B): Logaritmo natural de las probabilidades posteriores

10.4. Discusión

En todas las condiciones experimentales la hipótesis con mayor verosimilitud, dados los datos observados en el experimento, es H_θ ; esto es indicativo de la ausencia de una relación entre el control inhibitorio y la memoria de trabajo, lo que contradice resultados reportados por Redick et al. [11], sin embargo el estudio de estos autores se enfocó a la memoria de trabajo en su modalidad fonética, a diferencia del presente trabajo; es posible que la relación entre la memoria de trabajo y control inhibitorio sea dependiente de la modalidad sensorial de esta, lo que explicaría los resultados divergentes entre ambos estudios. También es posible que la memoria de trabajo esté mayormente implicada con la capacidad de control de la atención [8], y que esta capacidad en sí implique mayor uso del control inhibitorio para el procesamiento de información auditiva que visual.

Respecto a las condiciones experimentales, con anterioridad se ha demostrado que

Condición	Hipótesis	Probabilidad <i>a priori</i>	Probabilidad posterior
α	H_θ	0.5	≈ 1
	H_1	0.25	$1.724\,676 \times 10^{-18}$
	H_2	0.25	$2.339\,637 \times 10^{-25}$
β	H_θ	0.5	≈ 1
	H_1	0.25	$1.799\,750 \times 10^{-9}$
	H_2	0.25	$1.351\,169 \times 10^{-33}$
γ	H_θ	0.5	≈ 1
	H_1	0.25	$6.564\,464 \times 10^{-19}$
	H_2	0.25	$5.135\,146 \times 10^{-24}$

Cuadro 10.2: Probabilidades actualizadas de las distintas hipótesis respecto al control inhibitorio para cada condición.

Condición	Hipótesis	Probabilidad <i>a priori</i>	Probabilidad posterior
β	H_θ	0.5	≈ 1
	H_1	0.25	$1.444\,341 \times 10^{-46}$
	H_2	0.25	$8.085\,098 \times 10^{-39}$
γ	H_θ	0.5	≈ 1
	H_1	0.25	$3.359\,077 \times 10^{-47}$
	H_2	0.25	$4.819\,094 \times 10^{-38}$

Cuadro 10.3: Probabilidades actualizadas de las distintas hipótesis respecto a las condiciones experimentales.

estímulos visuales con diversas características pueden ser "aglutinados" y retenidos como entidades unitarias [9], asimismo, existe evidencia de que entre menor sea la cantidad de entidades retenidas mayor es la probabilidad de responder correctamente a tareas de memoria de trabajo [5]; en el presente trabajo no fue encontrado un efecto de la condición experimental, lo que indica que el efecto reportado por Luck y Vogel [9] tiene un límite respecto al área del campo visual ocupada por entidades aglutinadas, de lo contrario los 4 estímulos habrían sido aglutinados como uno sólo en al menos una de las condiciones experimentales, lo que de acuerdo con Cowan [5] a su vez implicaría mayor probabilidad de emitir respuesta correctas en éstas; sin embargo en ambas condiciones experimentales (β, γ) la hipótesis con mayor verosimilitud dados los datos del presente estudio, es H_θ .

Bibliografía

- [1] R.C. Atkinson and R.M. Shiffrin. Human Memory: A Proposed System and its Control Processes. In Kenneth W. Spence and Janet Taylor Spence, editors, *Psychology of Learning and Motivation*, volume 2, pages 89–195. Academic Press., New York, 1968.
- [2] Alan D. Baddeley. Working memory. *Science*, 255(5044):556–559, 1992.
- [3] Alan D. Baddeley and Graham Hitch. Working Memory. In Gordon H. Bower, editor, *Psychology of Learning and Motivation*, volume 8, pages 47–89. Academic Press., 1974.
- [4] Jean-Christophe Cassel, Daniel Cassel, and Lilianne Manning. From Augustine of Hippo’s Memory Systems to Our Modern Taxonomy in Cognitive Psychology and Neuroscience of Memory: A 16-Century Nap of Intuition before Light of Evidence. *Behavioral Sciences*, 3(1):21–41, dec 2012.
- [5] N. Cowan. The magical number 4 in short term memory. A reconsideration of storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, 24(4):87–186, 2001.
- [6] Pablo Gomez, Roger Ratcliff, and Manuel Perea. A model of the go/no-go task. *Journal of Experimental Psychology: General*, 136(3):389–413, 2007.
- [7] Dawn Iacobucci, Steven S. Posavac, Frank R. Kardes, Matthew J. Schneider, and Deidre L. Popovich. The median split: Robust, refined, and revived. *Journal of Consumer Psychology*, 25(4):690–704, 2015.
- [8] Michael J. Kane, M. Kathryn Bleckley, Andrew R. a. Conway, and Randall W. Engle. A controlled-attention view of working-memory capacity. *Journal of Experimental Psychology: General*, 130(2):169–183, 2001.
- [9] S J Luck and E K Vogel. The capacity of visual working memory for features and conjunctions. *Nature*, 390(6657):279–81, nov 1997.
- [10] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2016.
- [11] Thomas S Redick, Alejandra Calvo, Catherine E Gay, and Randall W Engle. Working memory capacity and go/no-go task performance: selective effects of updating, maintenance, and inhibition. *Journal of experimental psychology. Learning, memory, and cognition*, 37(2):308–324, 2011.

Bibliografía

- [12] James Stone. *Bayes' rule : a tutorial introduction to Bayesian analysis*. Sebtel Press, Place of publication not identified, 2013.