

Proceedings of the Second International Conference on Mathematics and its Applications

<http://www.fcfm.buap.mx/cima/assets/docs/2015/memoriasCIMA2015.pdf>



Fernando Macías Romero
Editor

BUAP FCFM CIMA

Proceedings of the Second International Conference on Mathematics and its Applications

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla



Fernando Macías Romero
Editor

October 2015

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
José Alfonso Esparza Ortiz
Rector
René Valdiviezo Sandoval
Secretario General
Ygnacio Martínez Laguna
Vicerrector de Investigación y Estudios de Posgrado
Flavio Marcelino Guzmán Sánchez
E. D. Vicerrectoría de Extensión y Difusión de la Cultura
Ana María Dolores Huerta Jaramillo
Directora de Fomento Editorial
José Ramón Enrique Arrazola Ramírez
Director de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Primera edición, 2015
ISBN:

© Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Dirección de Fomento Editorial
2 Norte 1404, C.P. 72000
Puebla, Pue.
Teléfono y fax: 01 222 246 8559

Foreword

We are fortunate to begin a journey towards an unprecedented creative process. The time to share knowledge, to invite everyone to set sail in the ship that guides us to the source of all creation has come. This is the reason for editing the book you are holding now. The happiness that this book posits through outreach, research, and exchange of ideas, is due to the generosity of many mathematicians that took part in the so-called “Second International Congress of Mathematics and its Applications” (2CIMA): the consolidated professional effort that enables the participation of renown scientists from different universities, both national and international, involved in the organization of the 2CIMA and in its written proceedings, the contents of this book. The basis has been the hard work of a specialized and vigorous organizing committee formed up by members of the Mathematics Faculty working at the School of Physics and Mathematics of the University of Puebla. This is the result of such enthusiastic, nine-month-long labor. Love for mathematics has given birth to this book, which endows us with the wisdom to share with the readers part of our daily work.

The articles in this Proceedings, which were rigorously peer-reviewed, are grouped according to the different topic sessions of the 2CIMA.

We sincerely appreciate the dedication, kindness, and scientific work of all referees. Thanks for leaving your mark.

Fernando Macías Romero

Índice general

Índice general	1
 Álgebra	
Caminos de Dyck contenidos en un diagrama de Ferrers José Eduardo Blažek	7
 Ecuaciones Diferenciales	
Conjunto de Cantor: Una Puerta a los Fractales Luis Antonio Pérez Pérez	23
Desarrollo de La p - versión del Método de Rayos Generales para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas en el caso de funciones bidimensionales espaciales con soporte compacto y condiciones de frontera móvil Armando Espíndola Pozos, Alexandre I. Grebennikov	31
The Robust stability of the absolutely oscillating systems Vladimir Alexandrov, Raul Temoltzi Avila, Iryna Konovalenko	39
 Educación Matemática	
El trabajo áulico con la tipología de Brousseau para la reafirmación del concepto $x \cdot 0 = 0$ Francisco Guillermo Herrera Armendia, Raciél Trejo Reséndiz, Marcos Fajardo Rendón	53
El tránsito del pensamiento recursivo aditivo a las funciones recursivas y la variación funcional en adolescentes de educación secundaria Alejandra Avalos Rogel, Francisco Herrera Armendia	59
El uso de redes de aprendizaje en el estudio del cálculo Claudia Flores Estrada, Adriana Gómez Reyes	65
Impacto de tecnologías de información en la aprehensión conceptual de las operaciones con funciones María Isabel Kanagúsico Muñoz, Yesenia Carolina Montes López, Patricia del Socorro Narro Ramírez	75

Laboratorio Para el Aprendizaje y Desarrollo del Pensamiento Matemático Lucía González Cabrera, Adrián Fabio Benítez Armas	89
Las Gráficas Cartesianas Generadas en un Ambiente Digital y la Producción de Conceptos Matemáticos Adrián Fabio Benítez Armas	97
Propuesta didáctica para el logro del aprendizaje significativo del cálculo Roberto Abel Elizondo Aldape, María Isabel Kanagúsico Muñoz, Patricia del Socorro Narro Ramírez	109
Un estudio del pensamiento variacional a nivel ingeniería Ricardo Olivares Rodríguez, Mario Silvino Ávila Sandoval, Carlos López Rubalcaba	121
Física Matemática	
Geometric Number Systems and Spinors Garret Sobczyk	129
La noción de distribución de probabilidad de Max Born en Física Cuántica. El Origen Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón	137
Mecánica Cuántica sobre Superficies Guillermo Chacón Acosta, Oswaldo González Gaxiola, José Antonio Santiago García	151
Operador de Dirichlet-Neumann para campos abelianos de Yang-Mills en superficies Homero Geovani Díaz Marín	157
Una crítica al desarrollo histórico de la teoría de la relatividad general: A propósito de su centenario Ram Gopal Vishwakarma, Juan Martínez Ortiz, Leticia Adriana Ramírez Hernández	167
Geometría	
Octaedro tensegridal: geometría de material celular José Javier Gálvez Gamboa, Magdalena Marciano Melchor, Hind Taud	175
Sobre Algunos Aspectos del Comportamiento Asintótico de la Función de Crecimiento de Algunos Productos Gráficos de Grupos Rafael M. Rincón	179
Historia, Filosofía y Divulgación de las Matemáticas	
La (in)consistencia de los infinitesimales bernoullianos Luis Estrada González, María del Rosario Martínez Ordaz	195
Lógica Matemática	
Teoría de Tipos (HoTT)	203

Modelación Matemática

Ajuste de señales con error puntual acotado utilizando métodos de penalización Jesús Ortiz Bejar, José Ortiz Bejar, Martha Leticia Ruiz Zavala	219
An unstructured cellular automata flood inundation model Gerardo M. Ortigoza, Iris Neri	231
Control óptimo en el manejo de la alimentación en peces en acuicultura Roger Domínguez May, Eucario Gasca Leyva	243
Desarrollo de los modelos matemáticos logístico, Gompertz y Richard en la descripción de la epidemia del VIH/SIDA en México Juan Martínez Ortiz, Leticia Adriana Ramírez Hernández, Mayra Guadalupe García Reyna	251
Dinámica de Extracción Líquido-Líquido a Contracorriente Oscar Hernández Ibarra, Mitzué Garza García	259
Diseño de un sistema neurodifuso de conversión PWM a motoreductor CD: Modelado y aplicación Marcos Fajardo Rendón, Francisco Guillermo Herrera Armendia	271
El Método de Descomposición de Adomian en la Solución de la Ecuación de Black-Scholes no Lineal Oswaldo González Gaxiola, Francisco Paz Cendejas	283
Estudio de las bifurcaciones en un modelo biofísico de excitabilidad neuronal Marco Arieli Herrera Valdez, Lucía Cervantes Gómez, Leonardo Remedios Santiago	293
Implementación de un modelo matemático para la proliferación celular de CaCU in vitro, bajo diferentes concentraciones de suero bovino fetal Jesús Adrian López, Juan Martínez Ortiz, Leticia Adriana Ramírez Hernández	305
La Valoración de Opciones de Inversión Como un Semigrupo Evolutivo Oswaldo González Gaxiola, José Antonio Santiago García	313
Modelando el grado de violencia en pareja con tiempos de retardo en el autocontrol y asistencia Erik Leal Enríquez, Oliver X López Corona, Francisco J. Zamudio Sánchez	323
Procesos Fuzzy, Procesos Híbridos y Procesos Inciertos. Extensiones y Aplicaciones en finanzas John Freddy Moreno Trujillo	335
Tiempo óptimo de cosecha utilizando algoritmos genéticos: Estudio de caso del cultivo de la tilapia Álvaro J. Cardeña Mejía, Roger Domínguez May, Eucario Gasca Leyva	347

Probabilidad, Actuaría y Estadística

Algunos aspectos estadísticos en el Reconocimiento de Patrones	359
Luis Cruz Kuri, Juan Ruiz Ramírez, Ismael Sosa Galindo	
Análisis exploratorio de datos en el estudio de manglares	367
Gladys Linares Fleites, Brenda Catalina Matías Castillo, Miguel Ángel Valera Pérez	
Estimación de la mortalidad vía distribuciones tipo fase	375
Fernando Baltazar Larios, Oscar Lucio Cano Vaca	
Juegos de suma cero con dos jugadores	389
Rosa María Flores Hernández, Marly Graciela Márquez Yáñez, Roberto Rosales Flores	
La probabilidad de un carácter hereditario en una población	403
José Antonio Durante Murillo, Sara Mejía Pérez, Ana Luisa Morales Zamora	
Modelos de regresión para variable respuesta continua sobre el intervalo unidad	415
Gladys Linares Fleites, Ana Aleyda Oroza Hernández, Miguel Ángel Valera Pérez	
Regresión Circular Sistémica, Análisis de Credit Scoring y Calentamiento Global	421
Fernando Gustavo Isa Massa	
Un portafolio óptimo con medida de riesgo coherente: Conditional Value at Risk (CVaR)	437
Héctor Alonso Olivares Aguayo, Ambrosio Ortiz Ramírez	
Un producto estructurado que relaciona el rendimiento de un bono cupón cero con tasa de interés estocástica con una opción doble barrera sobre un portafolio de inversión	445
Héctor Alonso Olivares Aguayo, Ambrosio Ortiz Ramírez, Abigail Rodríguez Nava	
Viabilidad de los Algoritmos Genéticos en problemas de optimización no restringida	461
Jorge Álvarez Mena, Javier Landa Tonil, Evodio Muñoz Aguirre	

Topología

Axiomas de separación fuerte en espacios bitopológicos	481
José M. Hernández Morales, Luz del Carmen Álvarez Marín	
The elusive fixed point property	489
Karen Clemente Robles, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero	
The problem of the seven bridges of Königsberg	493
Fernando Macías Romero, Juana Onofre Cortez	
Topología de Conjuntos. Un primer curso	497
Juan Antonio Pérez	
Índice de autores	509

Álgebra

Caminos de Dyck contenidos en un diagrama de Ferrers

José Eduardo Blažek

jeb lazek@lacim.ca

Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique
Université du Québec à Montréal

Resumen

Se considerara el problema de contar el subconjunto de caminos de Dyck contenido en un diagrama de Ferrers. Esta enumeración atañe al conteo de los elementos en una rama del árbol de Kréwéras. Mediante el uso de diagramas de Ferrers asociados a los caminos de Dyck, hemos desarrollado métodos de comparación y de descomposición de diagramas para obtener fórmulas enumerativas en términos de números de Catalan. Estos métodos han sido desarrollados en forma de algoritmos y codificados en SAGE para su verificación.

1 Introducción

El estudio de los caminos Dyck es un tema central en la combinatoria, ya que proporcionan una de las muchas interpretaciones de los números de Catalan. Una visión parcial se puede encontrar, por ejemplo, en la presentación integral de Stanley de la combinatoria enumerativa [18] (vea también [2]). Como lenguaje generado por una gramática algebraica se caracteriza en términos de un lenguaje de Dyck, que son importantes en la informática teórica, como en [7]. En un alfabeto de dos letras que corresponden a las expresiones entre paréntesis y así se pueden interpretar en términos de caminos en un cuadrado. Entre las muchas generalizaciones posibles, es natural considerar caminos en un rectángulo, véase, por ejemplo Labelle y Yeh [13], y más recientemente Duchon [6] o Fukukawa [8]. En la combinatoria algebraica los caminos Dyck están relacionados con las funciones de Parking y la teoría de la representación del grupo simétrico [9]. En otras ciencias como en la biología, los encontramos juntos a las particiones no cruzadas y a los árboles explicando las estructuras del ARN, por ejemplo en los trabajos Schmitt y Waterman [16], Simion [17], o Bakhtin y Heitsch [1]. La motivación para el estudio de estos objetos se debe a un intento de comprender mejor los vínculos entre ellos. En otras palabras, en el presente trabajo mostramos un método para obtener formulas enumerativas para los caminos situados en ramas del árbol de Kréwéras [12] usando los números de Catalan y los diagramas de Ferrers. Mas precisamente, los

resultados principales de este artículo son el **método de comparación de diagramas**, el **método de descomposición** y el **desarrollo de formulas enumerativas** en términos de números de Catalan.

2 Definiciones y notaciones

Hemos utilizado la notación de Lotario [14]. Una *alfabeto* es un conjunto finito Σ , cuyos elementos se llaman *letras*. El conjunto de palabras finitas más Σ se denota Σ^* y $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ es el conjunto de palabras no vacíos donde $\varepsilon \in \Sigma^*$ es la palabra vacía. El número de apariciones de una letra dada α en la palabra w se denota $|w|_\alpha$ y $|w| = \sum_{\alpha \in \Sigma} |w|_\alpha$ es la longitud de la palabra.

Palabras y caminos de Dyck. Es bien conocido que el lenguaje de las palabras Dyck en $\Sigma = \{0, 1\}$ es un lenguaje generado por la gramática algebraica $D \rightarrow 0D1D + \varepsilon$. Estos son enumerados por los números de Catalan (ver [11]),

$$\text{Cat}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

y pueden ser interpretados como los caminos inscriptos en un retículo de forma cuadrada que no cruzan la diagonal, $n \times n$ usando pasos hacia la derecha y hacia bajo (see Fig. 1(A)).



Figura 1: Caminos de Dyck y diagramas de Ferrers.

Más precisamente, un camino (a, b) -Dyck es un camino sudeste en un retículo, comenzando en $(0, a)$ y terminando en $(b, 0)$, que se mantiene por debajo de la (a, b) -diagonal, siendo esta el segmento de una línea los puntos $(0, a)$ y $(b, 0)$. En la Figure 1, vemos los caminos **010101** y **01011011** respectivamente.

Alternativamente cada palabra puede ser codificada como un diagrama de Ferrers correspondiente este al conjunto de casillas a izquierda de la trayectoria. Es habitual, identificar a los diagramas Ferrers por el número de casillas en cada línea, lo que corresponde por lo tanto a las particiones:

$$\lambda = [\lambda_{a-1}, \lambda_{a-2}, \dots, \lambda_1], \quad \text{con } \lambda_{a-l} \leq \left\lfloor \frac{bl}{a} \right\rfloor \text{ donde } 1 \leq l \leq a-1. \quad (1)$$

Por ejemplo en la Figura 1, los caminos son codificados por las secuencias $[2, 1, 0]$ and $[3, 1, 0]$, respectivamente. Los casos donde (a, b) son coprimos, o $b = ak$ son de particular interés. Para el caso de $b = ak$, con $k \geq 1$, el cardinal está dado por la formula de Fuss-Catalan (see [11]).

$$\text{Cat}_{(a,k)} = \frac{1}{ak+1} \binom{ak+a}{a}.$$

Si a y b son coprimos, obtenemos la formula "general" de Catalan:

$$\mathbf{Cat}_{(a,b)} = \frac{1}{a+b} \binom{a+b}{a}.$$

En particular, cuando $a = p$ es primo, b y p son coprimos, o b es un multiplo de p . Por lo tanto el número correspondiente de caminos Dyck es:

$$|\mathcal{D}_{p,b}| = \begin{cases} \frac{1}{p+b} \binom{p+b}{p} & \text{si } \mathbf{mcd}(p, b) = 1, \\ \frac{1}{p+b+1} \binom{p+b+1}{p} & \text{si } b = kp. \end{cases}$$

El problema boletoa generalizado (ballot) se relaciona con el número de caminos de $(0, 0)$ hasta (a, b) inscriptos en un retículo que nunca superan la línea de $y = kx$ (see [10]):

$$\frac{b - ka + 1}{b} \binom{a+b}{a} \quad \text{donde } k \geq 1, \text{ y } b > ak \geq 0.$$

Ademas, el numero de caminos de longitud $2(k+1)n+1$ que comienzan en $(0, 0)$ y evitan tocar o cruzar la linea $y = kx$ (see [5]) esta dado por la formula:

$$\binom{2(k+1)n}{2n} - (k-1) \sum_{i=1}^{2n-1} \binom{2(k+1)n}{i}, \quad \text{donde } n \geq 1 \text{ y } k \geq 0.$$

En el caso mas general tenemos una formula debido a Bizley (see [3]) expresada como sigue. Sea $m = da$, $n = db$ y $d = \mathbf{mcd}(m, n)$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k^{(a,b)} &:= \frac{1}{a+b} \binom{ka+kb}{ka} & \text{para } k \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{B}_\lambda^{a,b} &:= \mathcal{B}_{\lambda_1}^{(a,b)} \mathcal{B}_{\lambda_2}^{(a,b)} \dots \mathcal{B}_{\lambda_l}^{(a,b)} & \text{si } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l), \end{aligned}$$

Es fácil demostrar que el número de caminos de Dyck en $m \times n$ $\mathcal{D}_{m,n}$ es:

$$|\mathcal{D}_{m,n}| := \sum_{\lambda \vdash d} \frac{1}{z_\lambda} \mathcal{B}_\lambda^{(a,b)} \quad \text{donde } n \geq 1 \text{ y } k \geq 0.$$

Palabra y camino de Christoffel. Un camino de Christoffel entre dos puntos distintos $P = (0, k)$ y $P' = (0, l)$ en un retículo $a \times b$ es el camino mas cercano por debajo del segmento PP' (see [15]). Por ejemplo, el camino de Dyck de la Figure 1(b) es tambien Christoffel, y la palabra asociada se llama palabra de Christoffel. El camino de Christoffel de un retículo $a \times b$ es el camino de Christoffel asociado a la diagonal de dicho retículo. Como en el caso de los caminos de Dyck, cada camino de Christoffel en un retículo fijo $a \times b$ se identifica mediante un diagrama Ferrers de la forma $(\lambda_{a-1}, \lambda_{a-2}, \dots, \lambda_1)$ dada por la ecuación (1).

Diagrama de Christoffel. Llamamos diagrama de Christoffel $\mathcal{C}_{a,b}$ al diagrama de Ferrers asociado al camino de Christoffel de un retículo $a \times b$. Éste es escrito como:

$$\lambda = \left[\left\lfloor \frac{(a-1)b}{a} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{(a-2)b}{a} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2b}{a} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor \right]. \quad (2)$$

Para su uso posterior, definimos dos funciones asociadas al diagrama de Ferrers.

$$Q_{a,b} = \frac{(a-1)(b-1) + \mathbf{mcd}(a,b) - 1}{2}. \quad (3)$$

Tambien, sea $\Delta_{a,b}(l)$ la diferencia entre las casillas de los diagramas de Ferrers asociados a los caminos de Christoffel de $a \times b$ y $a \times (b-1)$, respectivamente:

$$\Delta_{a,b}(l) := \left\lfloor \frac{bl}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(b-1)l}{a} \right\rfloor, \quad (4)$$

donde $a < b \in \mathbb{N}$ y $1 \leq l \leq a-1$.

Diagrama Isósceles. Llamamos diagrama isósceles $\mathcal{J}_n$ al diagrama de Ferrers asociado al camino de Christoffel de un retículo cuadrado de lado n . Dado un diagrama de Ferrers $\mathcal{T}_\gamma$, llamamos el *diagrama isósceles máximo* al mas grande diagrama isósceles incluido en $\mathcal{T}_\gamma$.

Conjunto de Ferrers. Sea $\mathcal{T}_\gamma$ el diagrama de Ferrers limitado por el camino γ . El conjunto de Ferrers de $\mathcal{T}_\gamma$ es el conjunto de todos los caminos de Dyck contenidos en $\mathcal{T}_\gamma$.

En las próximas secciones describimos métodos para calcular los caminos de (a,b) -Dyck cuando a y b no son necesariamente coprimos en términos de los números de Catalan. Por motivos de simplicidad, cada vez que mencionemos un diagrama isósceles estaremos pensando en un diagrama isósceles máximo.

3 Método de comparación de diagramas de Ferrers

Sea $\mathcal{C}_{a,b}$ le diagrama de Christoffel de $a \times b$. Para establecer los resultados principales necesitamos contar el numero de casillas en exceso entre el diagrama del retículo $a \times b$ y $a \times c$, con $c > b$. El metodo se desarrolla haciendo borrando las casillas en exceso entre ambos (ver [4]). Usando las funciones $Q_{a,b}$ y $\Delta_{a,b}(l)$, obtenemos las siguientes reglas:

Regla 1: Si $Q_{a,b} = 1$ y $\Delta_{a,b}(i) = 1$, hay una sola casilla en una esquina en $\mathcal{C}_{a,c}$ que no pertenece a $\mathcal{C}_{a,b}$. Sean $\mathcal{T}_{a_1,b_1}$ y $\mathcal{T}_{a'_1,b'_1}$ los diagramas de Ferrers obtenidos a partir de borrar de $\mathcal{C}_{a,c}$ el rectángulo que contiene la casilla en exceso α (ver Figure 2(b)).

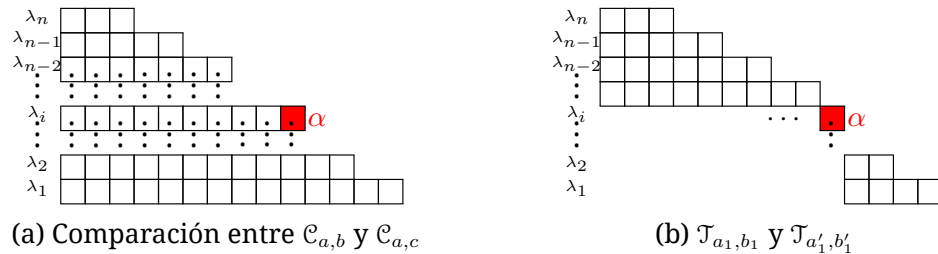


Figura 2: Regla 1.

Éstos diagramas de Ferrers no estan asociados en general a caminos de Christoffel. Sean

$$\mathcal{J}_{a_1,b_1} \subseteq \mathcal{D}_{a_1,b_1}, \text{ y } \mathcal{J}_{a'_1,b'_1} \subseteq \mathcal{D}_{a'_1,b'_1}$$

subconjuntos de los conjuntos de caminos de Dyck contenidos en los diagramas de Ferrers $\mathcal{T}_{a_1, b_1}$ y $\mathcal{T}_{a'_1, b'_1}$, respectivamente, entonces obtenemos:

$$|\mathcal{D}_{a,c}| - |\mathcal{D}_{a,b}| = -|\mathcal{J}_{a_1, b_1}| \cdot |\mathcal{J}_{a'_1, b'_1}|,$$

Es claro ver que si la casilla α esta situada en la linea inferior del diagrama ($l = a - 1$), la ecuación se reduce a:

$$|\mathcal{D}_{a,c}| - |\mathcal{D}_{a,b}| = -|\mathcal{J}_{a_1, b_1}|.$$

Regla 2: Cuando $Q_{a,b} = k$ y hay exactamente k lineas diferentes de una casilla de diferencia cada una necesitamos calcular cuantos caminos contienen dichas casillas (ver Figura 3), para ello construimos una secuencia de conjuntos disjuntos como sigue. Sea A_j el conjunto de caminos que no contiene las casillas α_i para $i > j$, donde $1 \leq j \leq k$. Tambien podemos construir en sentido inverso, sea B_j los conjuntos de caminos que no contienen las casillas α_i para $i < j$, donde $1 \leq j \leq k$.

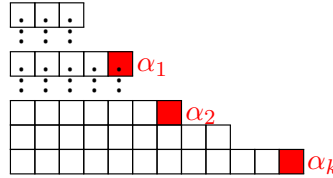


Figura 3: Mas de una casilla.

Es facil ver que esta estrategia los provee de dos secuencias de conjuntos disjuntos dos a dos tales que preservan la unión total, usando la **Regla 1**: para cada A_j o B_j obtenemos:

$$|\mathcal{D}_{a,c}| - |\mathcal{D}_{a,b}| = - \sum_{j=1}^k (|\mathcal{J}_{a_j, b_j}| \cdot |\mathcal{J}_{a'_j, b'_j}|),$$

donde $\mathcal{J}_{a_j, b_j} \subseteq \mathcal{D}_{a_j, b_j}$, and $\mathcal{J}_{a'_j, b'_j} \subseteq \mathcal{D}_{a'_j, b'_j}$.

4 Método de descomposición de Diagramas

Usando el método de comparación (**Regla 1**), podemos iterar el proceso de borrado de casillas en exceso entre un diagrama cualquiera $\mathcal{T}_\gamma$ y su respectivo diagrama isósceles $\mathcal{T}_n$. Comenzando por la casilla superior derecha (siempre de una esquina) como se muestra en la Figura 5. Dicha descomposición esta dada en sumas y productos. La operación de suma $+$ esta dada por la unión de conjuntos de Ferrers disjuntos. Consideremos una casilla (roja) en el borde del diagrama. Una camino contenido puede ser escrito como se ve en la figura 4. El producto de diagramas $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ es un diagrama conteniendo todas las posible concatenaciones entre un camino de Dick de $\mathcal{T}$ y uno de $\mathcal{T}'$. Ambas operaciones relacionan los diagramas con el cardinal del cardinal de los conjuntos de Ferrers. Vale aclarar que los diagramas isosceles de lado n contienen $\mathbf{Cat}_n$ numero de caminos, destacando que el diagrama vacío $\mathbb{1}$ contiene un solo camino.

La relación $\mathcal{H}$ entre los diagramas y los números naturales $\mathbb{N}$ es definida de forma que si conside-

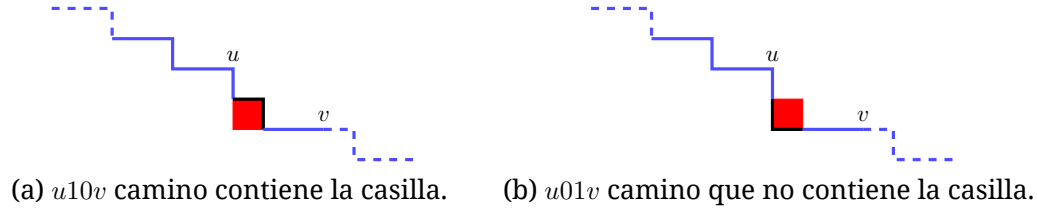


Figura 4: Separación de diagramas.

ramos a los diagramas isosceles obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbb{1}) &:= 1, \\ \mathcal{H}(\mathcal{I}_n) &:= \mathbf{Cat}_n, \\ \mathcal{H}(\mathcal{I}_n + \mathcal{I}_m) &:= \mathcal{H}(\mathcal{I}_n) + \mathcal{H}(\mathcal{I}_m), \\ \mathcal{H}(\mathcal{I}_n \times \mathcal{I}_m) &:= \mathcal{H}(\mathcal{I}_n) \cdot \mathcal{H}(\mathcal{I}_m).\end{aligned}$$

Debido a la definición de las operaciones podemos extender estos resultados a cualquier diagrama, permitiéndonos calcular el cardinal de cualquier conjunto de Ferrers.

Por ejemplo, el diagrama de Christofel $\mathcal{C}_{4,6}$ es $[4, 3, 1]$ y su correspondiente isósceles es $[3, 2, 1]$ cuando borramos la primera casilla del diagrama original se divide en dos pares de diagramas asociados con las operaciones que simplifican el calculo de los caminos (see Figure 5).

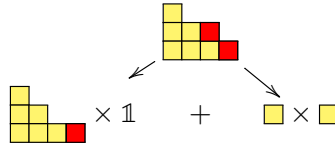


Figura 5: Primera iteración en la descomposición.

En la Figura 5, $\mathbb{1}$ es el diagrama vacío. Podemos repetir este método hasta que todos los diagramas sean isósceles (la operación $\times$ es distributiva respecto a la operación $+$).

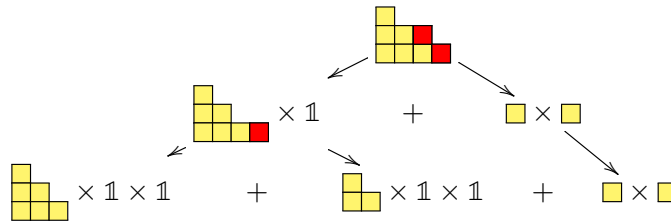


Figura 6: Descomposición completa del diagrama.

5 Método alternativo de descomposición

Podemos utilizar el método de descomposición de diagramas ya descrito, pero esta vez comparando las casillas entre el diagrama $\mathcal{T}_\gamma$ y el diagrama isosceles $\mathcal{I}_n$ mas pequeño que lo contenga.

De esta manera obtendremos un desarrollo del diagrama $\mathcal{J}_n$ en cual aparezca el diagrama que deseamos calcular. Por ejemplo, para el [2,2,1] obtenemos la siguiente descomposición (ver Figura 7).

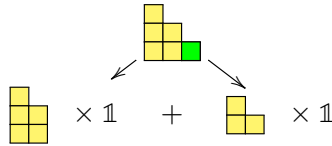


Figura 7: Descomposición alternativa.

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \times 1 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \times 1 \right) \\
 &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\
 \mathbf{Cat}_4 &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathbf{Cat}_3 \\
 &\Rightarrow \\
 \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathbf{Cat}_4 - \mathbf{Cat}_3 = 9
 \end{aligned}$$

6 Teorema, lema y corolario

Teorema 1. Dado un diagrama de Ferrers $\mathcal{T}_\gamma$ siempre puede ser dividido en dos pares de diagramas uno resultado de haber borrado una casilla de su borde τ multiplicado por el diagrama vacío y el otro resultado de haber borrado el rectángulo inferior izquierdo que contiene la casilla τ , de forma que no alteren el cardinal del conjunto de Ferrers de $\mathcal{T}_\gamma$.

Dem.

Utilizando el Lema 1 queda clara la forma de separación.

Lema 1. Sea $\mathcal{T}_\gamma$ un diagrama de Ferrers limitado por un camino de Dyck γ de $\mathcal{D}_{a,b}$. Sea τ una casilla del retículo situada en el borde de nuestro camino γ de coordenadas (c, d) , consideramos los diagramas $\hat{\mathcal{T}}_\gamma$ y $\tilde{\mathcal{T}}_\gamma$, el primero resultado de haber borrado la casilla τ al diagrama $\mathcal{T}_\gamma$ y el segundo resultado de haber borrado el rectángulo inferior izquierdo que contiene a la casilla τ de $\mathcal{T}_\gamma$ (ver figura 2).

- a) los conjuntos $\hat{\mathcal{T}}_\gamma$ y $\tilde{\mathcal{T}}_\gamma$ son disjuntos,
- b) para todo $\delta \in \tilde{\mathcal{T}}_\gamma$ existen α y β fijos tales que $\delta = \eta_1 + \eta_2$ donde $\eta_1 \in \mathcal{T}_\alpha$ y $\eta_2 \in \mathcal{T}_\beta$,
- c) sean $|\tilde{\mathcal{T}}_\gamma| = |\mathcal{T}_\alpha| \cdot |\mathcal{T}_\beta|$.

Dem.

- a) sea $\delta_1 \in \hat{\mathcal{T}}_\gamma$ y $\delta_2 \in \tilde{\mathcal{T}}_\gamma$, sean w_{δ_1} y w_{δ_2} las palabras asociadas respectivamente. En el caso general son distintos estudiaremos en el caso donde podrían no serlo. Como $\delta_2 \in \tilde{\mathcal{T}}_\gamma$, $w_{\delta_2} = u10v$ tal que $|u|_0 = d$, $|u|_1 = c - 1$, $|v|_0 = (a - c) - 1$ y $|v|_1 = (b - d)$, si $w_{\delta_1} = usv$ tal que $|s|_0 = |s|_1 = 1$,

entonces $s \neq 10$ ya que por definición de $\hat{\mathcal{T}}_\gamma \delta_1$ no contiene la casilla τ , luego ambos conjuntos son disjuntos.

b) como $\gamma \in \tilde{\mathcal{T}}_\gamma$, $w_\gamma = u10v$ sean α y β los caminos tales que $w_\alpha = u1$ y $w_\beta = 0v$, donde u y v tienen las mismas condiciones que en el ítem a), obtenemos que para todo $\delta \in \tilde{\mathcal{T}}_\gamma$, $\delta = \eta_1 + \eta_2$ donde $\eta_1 \in \mathcal{T}_\alpha$ y $\eta_2 \in \mathcal{T}_\beta$,

c) Como $\gamma = \alpha + \beta$ y por cada camino que pertenece a $\delta \in \mathcal{T}_\alpha$ podemos concatenarlo con cualquier camino $\eta \in \mathcal{T}_\beta$ para obtener un camino en $\mathcal{T}_\gamma$, luego $|\tilde{\mathcal{T}}_\gamma| = |\mathcal{T}_\alpha| \cdot |\mathcal{T}_\beta|$.

Corolario 1. Para todo diagrama de Ferrers $\mathcal{T}_\gamma$, utilizando la separación según el Teorema 1 y la relación $\mathcal{H}$ obtenemos la cantidad de caminos contenidos $|\mathcal{T}_\gamma|$

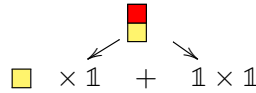
Dem.

Utilizando el Teorema 1 en forma recursiva hasta obtener solo diagramas isosceles y por el Lema 1 queda claro que cada separación nos da conjuntos disjuntos con respecto a los caminos contenidos, luego aplicando $\mathcal{H}$ obtenemos el numero total de caminos.

7 Ejemplos

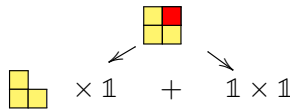
En esta sección desarrollamos varios ejemplos para mostrar la aplicación del método.

7.1 Desarrollo de [1,1]



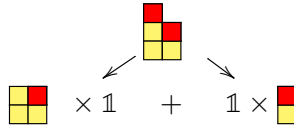
$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathcal{H} (\square \times \mathbb{1} + \mathbb{1} \times \mathbb{1}) \\
 &= \mathcal{H} (\square \times \mathbb{1}) + \mathcal{H} (\mathbb{1} \times \mathbb{1}) \\
 &= \mathcal{H} (\square) \cdot \mathcal{H} (\mathbb{1}) + \mathcal{H} (\mathbb{1}) \cdot \mathcal{H} (\mathbb{1}) \\
 &= \mathcal{H} (\mathcal{I}_2) \cdot \mathcal{H} (\mathbb{1}) + \mathcal{H} (\mathbb{1}) \cdot \mathcal{H} (\mathbb{1}) \\
 &= \mathbf{Cat}_2 + 1 \\
 &= 2 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

7.2 Desarrollo de [2,2]



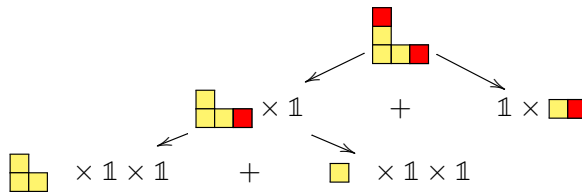
$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathcal{H} (\square \square \times \mathbb{1} + \mathbb{1} \times \mathbb{1}) \\
 &= \mathcal{H} (\square \square \times \mathbb{1}) + \mathcal{H} (\mathbb{1} \times \mathbb{1}) \\
 &= \mathcal{H} (\square \square) \cdot \mathcal{H} (\mathbb{1}) + \mathcal{H} (\mathbb{1}) \cdot \mathcal{H} (\mathbb{1}) \\
 &= \mathcal{H} (\mathcal{I}_3) \cdot \mathcal{H} (\mathbb{1}) + \mathcal{H} (\mathbb{1}) \cdot \mathcal{H} (\mathbb{1}) \\
 &= \mathbf{Cat}_3 + 1 \\
 &= 5 + 1 = 6
 \end{aligned}$$

7.3 Desarrollo de [2,2,1]



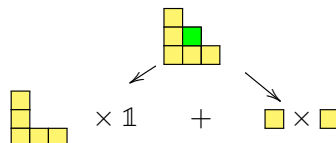
$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \times \mathbb{1} + \mathbb{1} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \times \mathbb{1} \right) + \mathcal{H} \left(\mathbb{1} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \cdot \mathcal{H}(\mathbb{1}) + \mathcal{H}(\mathbb{1}) \cdot \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \mathbf{Cat}_3 + 1 + \mathbf{Cat}_2 + 1 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

7.4 Desarrollo de [3,1,1]



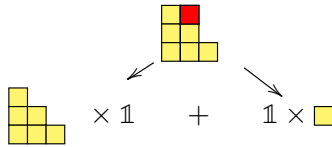
$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \times \mathbb{1} \times \mathbb{1} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \times \mathbb{1} \times \mathbb{1} + \mathbb{1} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \mathbf{Cat}_3 + \mathbf{Cat}_2 + \mathbf{Cat}_2 + 1 \\
 &= \mathbf{Cat}_3 + 2\mathbf{Cat}_2 + 1 \\
 &= 5 + 4 + 1 = 10
 \end{aligned}$$

7.5 Desarrollo alternativo de [3,1,1]



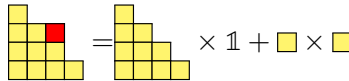
$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \times 1 + \square \times \square \right) \\
&= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathcal{H}(\square) \cdot \mathcal{H}(\square) \\
\mathbf{Cat}_4 &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathbf{Cat}_2^2 \\
&\Rightarrow \\
\mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathbf{Cat}_4 - \mathbf{Cat}_2^2 = 10
\end{aligned}$$

7.6 Desarrollo de [3,2,2]



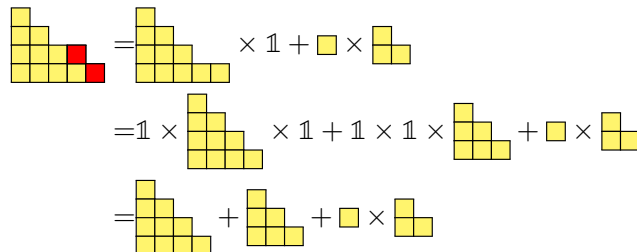
$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \times 1 + 1 \times \square \right) \\
&= \mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathcal{H}(\square) \\
&= \mathbf{Cat}_4 + \mathbf{Cat}_2 \\
&= 14 + 2 = 16
\end{aligned}$$

7.7 Desarrollo de [4,3,3,1]



$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathbf{Cat}_5 + \mathbf{Cat}_2 \cdot \mathbf{Cat}_2 \\
&= 42 + 4 = 46
\end{aligned}$$

7.8 Desarrollo de [5,4,2,1]



$$\mathcal{H} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \right) = \mathbf{Cat}_5 + \mathbf{Cat}_4 + \mathbf{Cat}_3 \cdot \mathbf{Cat}_2$$

$$= 42 + 14 + 10 = 66$$

7.9 Développe de [5, 5, 2, 2]

Para desarrollar este diagrama hacen falta 8 iteraciones después de las cuales el diagrama queda reducido y transformado a un polinomio en números de Catalan como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \text{Diagram}_1 \times 1 + \text{Diagram}_2 \times 1 \\ &= 1 \times \text{Diagram}_3 \times 1 + 1 \times 1 \times \text{Diagram}_4 + 1 \times \text{Diagram}_5 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \\ &= 1 \times 1 \times \text{Diagram}_6 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \times \text{Diagram}_7 + 1 \times 1 \times \text{Diagram}_8 + \\ &\quad + 1 \times 1 \times \text{Diagram}_9 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \times \text{Diagram}_{10} + 1 \times 1 \times 1 \\ &= 1 \times 1 \times 1 \times \text{Diagram}_{11} \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \text{Diagram}_{12} + \\ &\quad + 1 \times 1 \times 1 \times \text{Diagram}_{13} + 1 \times 1 \times \text{Diagram}_{14} + 1 \times 1 \times 1 \times \text{Diagram}_{15} \times 1 + \\ &\quad + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \text{Diagram}_{16} + 1 \times 1 \times \text{Diagram}_{17} \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \\ &= \text{Diagram}_{18} + \text{Diagram}_{19} + \text{Diagram}_{20} \times \text{Diagram}_{21} + \text{Diagram}_{22} + \text{Diagram}_{23} + \text{Diagram}_{24} + \text{Diagram}_{25} + 1 \end{aligned}$$

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \right) = \mathbf{Cat}_5 + \mathbf{Cat}_4 + \mathbf{Cat}_3 \cdot \mathbf{Cat}_2 + 2\mathbf{Cat}_3 + 2\mathbf{Cat}_2 + 1$$

$$= 42 + 14 + 10 + 10 + 4 + 1 = 81$$

7.10 Desarrollo de [7,7,2,2]

De forma similar al anterior hacen falta 8 iteraciones para que el diagrama queda reducido y transformado a un polinomio en números de Catalan como sigue:

$$\mathcal{H} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \right) = 3\mathbf{Cat}_2\mathbf{Cat}_3 + 6\mathbf{Cat}_2 + 5\mathbf{Cat}_3^2\mathbf{Cat}_4 + \mathbf{Cat}_5 + 4$$

$$= 155$$

7.11 Desarrollo de $\mathcal{D}_{8,14}$ [12,10,8,7,5,3,1]

Análogamente a los ejemplos anteriores, en este necesitamos 18 iteraciones y el diagrama queda reducido y transformado a un polinomio en números de Catalan como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} \left(\begin{array}{c} \text{Diagrama de Ferrers} \end{array} \right) &= 3\text{Cat}_2^4 + 11\text{Cat}_2^3 + 32\text{Cat}_2^2\text{Cat}_3 + 10\text{Cat}_2\text{Cat}_3^2 + 11\text{Cat}_2^2\text{Cat}_4 + \\
&+ 3\text{Cat}_2^2 + 22\text{Cat}_2\text{Cat}_3 + 17\text{Cat}_3^2 + 31\text{Cat}_2\text{Cat}_4 + 22\text{Cat}_3\text{Cat}_4 + \\
&+ 3\text{Cat}_4^2 + 20\text{Cat}_2\text{Cat}_5 + 5\text{Cat}_3\text{Cat}_5 + 5\text{Cat}_2\text{Cat}_6 + \text{Cat}_3 + 5\text{Cat}_4 + \\
&+ 10\text{Cat}_5 + 10\text{Cat}_6 + 5\text{Cat}_7 + \text{Cat}_8 \\
&= 14985
\end{aligned}$$

8 Árbol de Kréwéras

El árbol de Kréwéras relaciona en forma inclusiva los caminos de Dyck a travez de sus diagramas de Ferrers. Comenzando con el diagrama de Christoffel y descendiendo pasando por todos los diagramas de Dyck hasta el diagrama vacío. Por ejemplo el árbol de Kréwéras para $\mathcal{D}_{4,6}$ se ve en la figura 8.

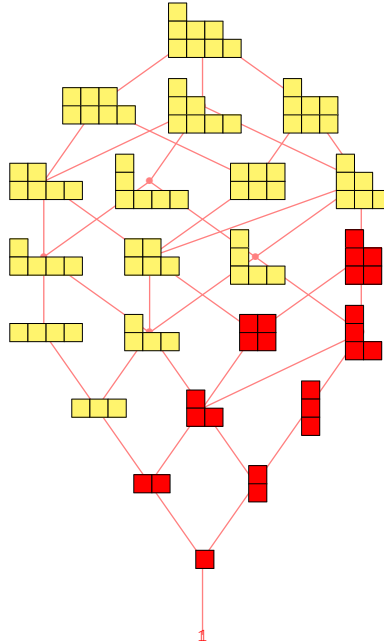


Figura 8: Árbol de Kréwéras de $\mathcal{D}_{4,6}$.

Hemos coloreado en rojo todos los diagramas relacionados con el diagrama $[2, 2, 1]$ (ver ejemplo 7.3). El numero de diagramas en la rama es exactamente igual al numero de caminos de Dyck, $\mathcal{H} \left(\begin{array}{c} \text{Diagrama de Ferrers} \end{array} \right) = 9$. Debido al hecho que el numero de elementos de una rama del árbol es igual al numero de caminos de Dyck contenidos en el diagrama podemos contar dichos elementos a partir de nuestro método de descomposición de diagramas.

9 Conclusión

Como hemos visto el método de descomposición de diagramas resuelve de forma simple y recursiva la obtención del número de caminos de Dyck en los casos mas generales. La desventaja es no conocer aun la forma mas efectiva de reducir las iteraciones ya que para algunos casos el número de iteraciones puede ser muy elevado. Esto puede verse en los ejemplos 7.9, 7.10 y 7.11. Una opción es el método alternativo que puede disminuir la cantidad de iteraciones en casos particulares pero la descripción es como diferencia y no como suma (ver ejemplos 7.5). Hay muchas derivaciones de los métodos como por ejemplo encontrar el polinomio q-analógico. Todos los algoritmos en SAGE están disponible en http://thales.math.uqam.ca/~jeblazek/Sage_Combinatoriy.html

Agradecimientos

Deseo agradecer a mi director François Bergeron, a Srečko Brlek, a Hector Blandin Noguera y a Yannic Vargas Lozada, por sus consejos y por su apoyo durante la preparación de este documento.

Referencias

- [1] Bakhtin, Y., Heitsch, C.E.: Large deviations for random trees and the branching of RNA secondary structures. *Bull. Math. Biol.* 71(1), 84–106 (2009), <http://dx.doi.org/10.1007/s11538-008-9353-y>
- [2] Bergeron, F., Labelle, G., Leroux, P., Readdy, M.: *Combinatorial species and tree-like structures*. Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, Cambridge, England (1998), <http://opac.inria.fr/record=b1098109>
- [3] Bizley, M.T.L.: Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths from $(0, 0)$ to $(km, kn) \cdots$. *JIA* 80 pp. 55–62 (1954)
- [4] Blazek, J.E.: *Conbinatoire de $\mathbb{N}$ -modules Catalan*, Master Thesis. Département de Mathématique, UQAM (2015), <http://thales.math.uqam.ca/~jeblazek/Articles/Memoire2014A.pdf>
- [5] Chapman, R.J., Chow, T.Y., Khetan, A., Moulton, D.P., Waters, R.J.: Simple formulas for lattice paths avoiding certain periodic staircase boundaries. *J. Combin. Theory Ser. A* 116(1), 205–214 (2009), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcta.2008.05.002>
- [6] Duchon, P.: On the enumeration and generation of generalized dyck words. *Discrete Mathematics* 225(1-3), 121–135 (2000)
- [7] Eilenberg, S.: *Automata, Languages, and Machines*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA (1976)
- [8] Fukukawa, Y.: Counting generalized Dyck paths. arXiv:1304.5595v1 [math.CO] (April 2013)
- [9] Gorky, E., Mazin, M., Vazirani, M.: Affine permutations and rational slope parking functions. arXiv:1403.0303v1 [math.CO] (Mars 2014)
- [10] Goulden, I.P., Serrano, L.G.: Maintaining the spirit of the reflection principle when the boundary has arbitrary integer slope. *J. Combin. Theory Ser. A* 104(2), 317–326 (2003), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcta.2003.09.004>
- [11] Koshy, T.: *Catalan numbers with applications*. Oxford University Press, Inc. (2009)

- [12] Kréwéras, G.: Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers. No. 6, Institut de statistique des universités de Paris, Paris, France (1965)
- [13] Labelle, J., Yeh, Y.: Generalized dyck paths. *Discrete Mathematics* 82(1), 1–6 (1990)
- [14] Lothaire, M.: *Applied Combinatorics on Words*. Cambridge University Press (2005)
- [15] Melançon, G., Reutenauer, C.: On a class of Lyndon words extending Christoffel words and related to a multidimensional continued fraction algorithm. *Journal of Integer Sequences* 16(Article 13.9.7) (2013)
- [16] Schmitt, W.R., Waterman, M.S.: Linear trees and RNA secondary structure. *Discrete Appl. Math.* 51(3), 317–323 (1994), [http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X\(92\)00038-N](http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X(92)00038-N)
- [17] Simion, R.: Noncrossing partitions. *Discrete Math.* 217(1-3), 367–409 (2000), [http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X\(99\)00273-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(99)00273-3), *formal power series and algebraic combinatorics* (Vienna, 1997)
- [18] Stanley, R.P.: *Enumerative Combinatorics: Volume 1*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2nd edn. (2011)

Ecuaciones Diferenciales

Conjunto de Cantor: Una Puerta a los Fractales

Luis Antonio Pérez Pérez

luis_perez1792@hotmail.com

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Resumen

Este trabajo es una revisión de algunos resultados referentes al conjunto de Cantor. Se aborda su historia, se muestra el algoritmo de construcción y también algunas de sus propiedades. También se estudia el comportamiento de un sistema dinámico caótico que está asociado al conjunto de Cantor y además, se presenta un trabajo de programación de dicho conjunto usando las herramientas MatLab y GeoGebra.

Introducción

El **conjunto de Cantor** puede pensarse como el intermedio entre el punto y la recta: es un conjunto con muchos agujeros, longitud nula, tiene tantos puntos como $\mathbb{R}$, es **autosemejante**, es decir, cada una de sus partes reproduce en cierto sentido el conjunto total. Es un conjunto importante en Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales, entre otros y es una fuente continua de contrajemplos.

El objetivo de este artículo es exponer algunos resultados del conjunto de Cantor.

Historia

De 1879 a 1884, Cantor escribió una serie de cinco artículos bajo el título *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, los cuales contienen el primer tratamiento sistemático de la topología de la recta real y otras investigaciones de mayor orden sobre conjuntos derivados, que marcaron los inicios de la *teoría de números transfinitos* de Cantor (ver [3]). En ellos define lo que es un **conjunto denso**, y muestra relaciones entre estos conjuntos y sus conjuntos derivados. En el quinto artículo de esta serie, Cantor discute las particiones de un conjunto en dos componentes que llama *reducible* y *perfecta*, y define un *conjunto perfecto*. Muestra que un conjunto perfecto no tiene porque ser denso, en el pie de página de ese artículo, Cantor introduce el *conjunto ternario*, como el conjunto de los puntos de la forma $\alpha_1 \frac{1}{3} + \alpha_2 \frac{1}{3^2} + \dots + \alpha_n \frac{1}{3^n} + \dots$, con los α_n tomando únicamente los valores 0 y 2. Prueba que este conjunto es **infinito, perfecto, no denso en ningún intervalo**, independientemente de lo pequeño que se tome el intervalo.

Paralelamente Cantor define su conjunto y la función de Cantor asociada, como la función que en el complemento del conjunto de Cantor toma los valores $\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n}$, para $x \in (a, b)$, donde $a = \frac{\alpha_1}{3} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}$ y $b = \frac{\alpha_1}{3} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}$ con $\alpha_n = 0$ ó 2 , observa que puede extenderse naturalmente a una función continua y creciente sobre $[0, 1]$.

Construcción del Conjunto de Cantor

Se trata de un subconjunto fractal del intervalo real $[0, 1]$, que se obtiene iterativamente eliminando en cada paso el segmento **abierto** correspondiente al tercio central de cada intervalo (ver [1] y [2]).

1^{er} paso: Comenzamos con el intervalo $[0, 1]$ (segmento azul).

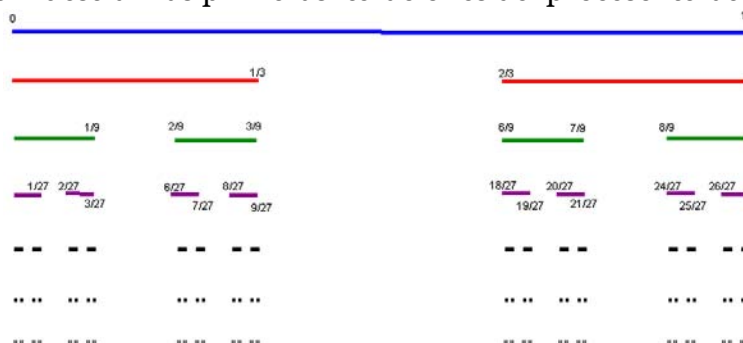
2^{do} paso: Quitamos al intervalo anterior su tercio central, es decir, el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ con lo cual nos quedarán dos segmentos (en color rojo), en concreto $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$.

3^{er} paso: Volvemos a quitar a cada uno de los intervalos anteriores su tercio central, con lo que nos quedarán cuatro segmentos (en color verde), concretamente $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.

4^{to} paso: De nuevo volvemos a quitar a cada uno de los cuatro intervalos anteriores su tercio central, con lo que nos quedarán ocho segmentos (en color violeta), que son $[0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{3}{27}] \cup [\frac{6}{27}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{9}{27}] \cup [\frac{18}{27}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{21}{27}] \cup [\frac{24}{27}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1]$.

El proceso se repite indefinidamente.

A continuación se muestran las primeras iteraciones del proceso iterativo:



El conjunto de Cantor es el conjunto de los puntos que permanecen al proceder así. El fractal asociado a este procedimiento se conoce como **"Polvo de Cantor"**.

Propiedades

En esta sección se presentan las principales propiedades del conjunto de Cantor (ver [3]):

- (I) $\mathcal{C}$ es un conjunto cerrado y no vacío, luego compacto;
- (II) la suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en el proceso es la longitud del intervalo $[0, 1]$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1$, en ese sentido, $\mathcal{C}$ es un conjunto "pequeño";
- (III) todo punto de $\mathcal{C}$ posee una representación ternaria única $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, donde a_n es 0 o 2; así $\mathcal{C}$ es no numerable y en ese sentido, $\mathcal{C}$ es un conjunto "grande";
- (IV) $\mathcal{C}$ no posee puntos aislados en $[0, 1]$;
- (V) $\mathcal{C}$ tiene interior vacío, es decir, es nada-denso;
- (VI) $\mathcal{C}$ posee dos tipos de puntos:

- Los puntos de primera especie, son en cantidad numerable y son los extremos de los intervalos abiertos eliminados durante el proceso de construcción; estos puntos son densos en $\mathfrak{C}$,
- los puntos de segunda especie son una familia no numerable;

(VII) $\mathfrak{C}$ es totalmente desconexo y no localmente conexo;

(VIII) $\mathfrak{C} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 2\}$, donde $\{0, 2\}$ es el espacio discreto formado por dos puntos;

(IX) todos los espacios métricos totalmente desconexos, perfectos y compactos son homeomorfos, de otra manera, $\mathfrak{C}$ es un representante de esta clase de espacios, que se denominan *conjuntos de Cantor*;

(X) todo compacto métrico es la imagen continua de $\mathfrak{C}$;

(XI) el Cantor $\mathfrak{C}$ es homogéneo, en el sentido de que para cada par de puntos $x, y \in \mathfrak{C}$, existe un homeomorfismo $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ tal que $f(x) = y$;

(XII) $\mathfrak{C}$ es la unión ajena de dos copias de si mismo, es decir es *autosemejante*;

(XIII) todo abierto en $\mathfrak{C}$, es homeomorfo a $\mathfrak{C}$ o a $\mathfrak{C} - \{0\}$;

La Función de Cantor

Sea φ una función continua y creciente definida sobre $[0, 1]$, la cual tiene la propiedad $\varphi(1) > \varphi(0)$, su derivada existe y es cero sobre un conjunto de medida 1.

Para cada k , sea $\mathcal{O}_k$ la unión de los $2^k - 1$ intervalos que han sido eliminados durante la k -ésima etapa del proceso. Sea $\mathcal{C}_k = [0, 1] - \mathcal{O}_k$. Defina $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$. Entonces $\mathfrak{C} = [0, 1] - \mathcal{O}$. Definimos a φ sobre $\mathcal{O}$ y luego sobre $\mathfrak{C}$:

Para un número natural k fijo, defina φ sobre $\mathcal{O}_k$, como una función creciente sobre $\mathcal{O}_k$ la cual es constante sobre cada uno de sus $2^k - 1$ intervalos abiertos y toma los $2^k - 1$ valores

$$\left\{ \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \dots, \frac{[2^k - 1]}{2^k} \right\}$$

De esta manera la **Función de Cantor** se define como(ver [5]):

$$\varphi(0) = 0 \text{ y } \varphi(x) = \sup\{\varphi(t) | t \in \mathcal{O} \cap [0, x)\} \text{ si } x \in \mathfrak{C} - \{0\}$$

De manera equivalente se puede definir la función de Cantor de la siguiente manera (ver [4]): Sea $x \in [0, 1]$ y consideremos su expansión ternaria:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nx}}{3^n}, a_{nx} \in \{0, 1, 2\}$$

Sea N_x , el n más pequeño tal que $a_{nx} = 1$, si existe; en otro caso $N_x = \infty$. La función de Cantor $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como:

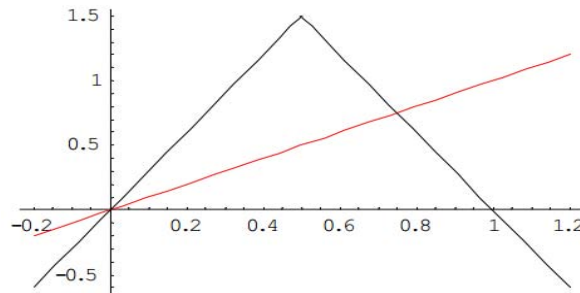
$$\varphi(x) := \frac{1}{2^{N_x}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_x-1} \frac{a_{nx}}{2^n}.$$

Conjunto de Cantor a partir de un Sistema Dinámico Caótico

Dado el sistema dinámico caótico (ver [7]):

$$T(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

vamos a estudiar el conjunto de puntos cuyas órbitas no escapan al infinito.



A partir de la gráfica de la función vemos que si $x < 0$ o $x > 1$, entonces $T^n(x) \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, solo necesitamos considerar el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Sin embargo, hay puntos de este intervalo cuya órbita sale de este intervalo después de la primera iteración. Si $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$, entonces $T(x) > 1$. Por tanto, partiendo de cualquier punto del intervalo $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ después de la primera iteración estaremos fuera de $0 \leq x \leq 1$ y la órbita se irá a infinito.

Comenzamos por calcular los puntos fijos de T, T^2, T^3, T^4 .

Puntos fijos de T : $0, \frac{3}{4}$

Puntos fijos de T^2 : $0, \frac{3}{10}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$

Puntos fijos de T^3 : $0, \frac{3}{28}, \frac{3}{13}, \frac{9}{28}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{12}{13}, \frac{27}{28}$

Puntos fijos de T^4 : $0, \frac{3}{82}, \frac{3}{40}, \frac{9}{82}, \frac{9}{40}, \frac{21}{82}, \frac{3}{10}, \frac{27}{82}, \frac{27}{40}, \frac{57}{82}, \frac{3}{4}, \frac{63}{82}, \frac{9}{10}, \frac{75}{82}, \frac{39}{40}, \frac{81}{82}$

T tiene 2 puntos fijos, T^2 tiene $4 = 2^2$ puntos fijos, T^3 tiene $8 = 2^3$ puntos fijos. En general, T^n tendrá 2^n puntos fijos.

Si estudiamos las órbitas de este sistema vemos que hay ciclos de periodo 2, de periodo 3, de periodo 4,... Por tanto, según el Teorema de Sarkovskii la existencia de ciclos de periodo 3 implica la existencia de ciclos de cualquier otro periodo.

Ciclos de periodo 2:

$$\frac{3}{10} \rightarrow \frac{9}{10} \rightarrow \frac{3}{10}$$

Ciclos de periodo 3:

$$\frac{3}{28} \rightarrow \frac{9}{28} \rightarrow \frac{27}{28} \rightarrow \frac{3}{28}$$

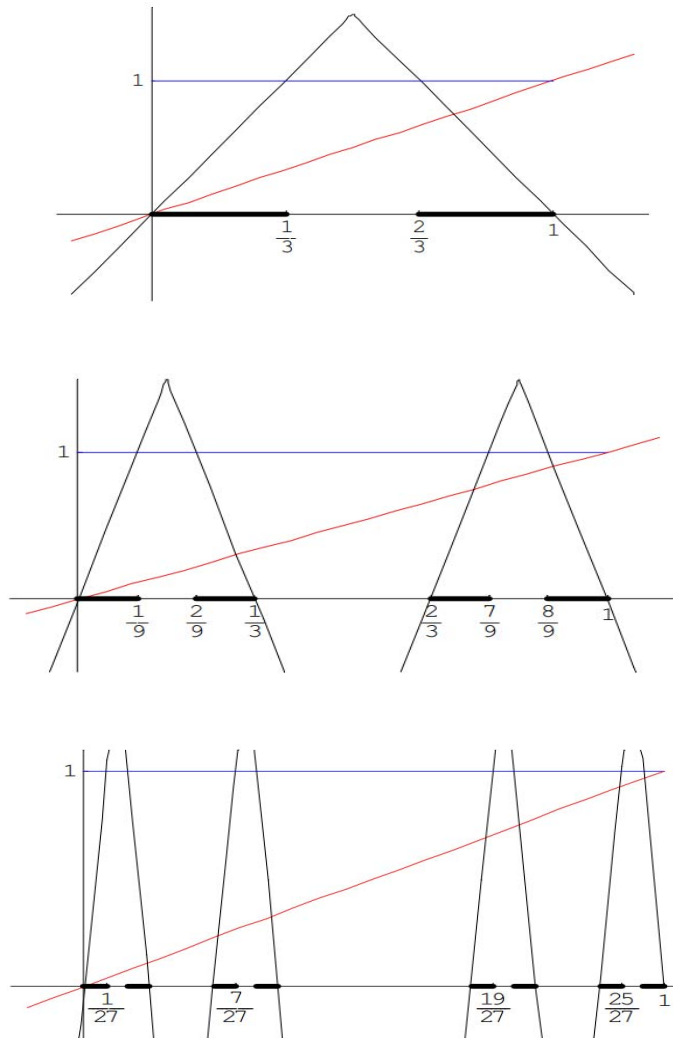
$$\frac{3}{13} \rightarrow \frac{9}{13} \rightarrow \frac{12}{13} \rightarrow \frac{3}{13}$$

Ciclos de periodo 4:

$$\frac{3}{40} \rightarrow \frac{9}{40} \rightarrow \frac{27}{40} \rightarrow \frac{39}{40} \quad \frac{3}{82} \rightarrow \frac{9}{82} \rightarrow \frac{27}{82} \rightarrow \frac{81}{82} \rightarrow \frac{3}{82} \quad \frac{21}{82} \rightarrow \frac{63}{82} \rightarrow \frac{57}{82} \rightarrow \frac{75}{82} \rightarrow \frac{21}{82}$$

Todos ellos son ciclos inestables, La inestabilidad de estos ciclos puede razonarse de varias formas. Se puede comprobar calculando las 50 primeras iteraciones para algún valor x_0 suficientemente cercano a ellos.

Las siguientes figuras muestran las gráficas de la primera, segunda y tercera iteraciones de este sistema:



Los intervalos marcados en línea gruesa en cada una de las iteraciones son aquellos para los cuales la iteración realizada vuelve a caer dentro de $0 \leq x \leq 1$. Precisamente, los intervalos señalados constituyen el conjunto de Cantor.

Por tanto, dado el sistema dinámico T los puntos cuyas órbitas no se van a infinito al iterar sucesivamente constituyen el conjunto de Cantor.

Gráficas

Si en lugar de eliminar en cada paso la tercera parte central planteamos otras alternativas, obtenemos otros fractales homeomorfos al conjunto de Cantor, como **La Alfombra de Sierpinski** y **La Esponja de Sierpinski-Menger**, entre otros.

Se graficaron El conjunto de Cantor y la escalera del Diablo en **MatLab** y La alfombra de Sierpinski y La Esponja de Sierpinski-Menger en **GeoGebra**.

Algoritmo en Matlab

Primeramente describamos al Conjunto de Cantor en términos generales para dos y tres dimensiones: se definen líneas de código con los valores de los extremos de los intervalos dependiendo de la iteración realizada. Posteriormente, se definen bucles anidados para poder crear los cuadrados sobre el cuadrado unitario; dando los vértices de los cuadrados y el comando *fill* se logra pintar los cuadrados que queremos.

Por otro lado, para la Escalera del Diablo se toma la definición de los extremos de los intervalos por cada iteración, y así mismo se genera un vector con los valores que tomarán los intervalos. La evaluación de los puntos de cada intervalo es la **función de Cantor**.

```
n=input('NUMERO DE ITERACIONES: ');
a=0;
b=1;
if n<=0
    x=[0 1];
    y=[0 1];
elseif n>0
    x0=[0 1];
    y0=[0 1];
    for i=1:n
        x = (1/3)*[x0 x0+2];
        y = .5*[y0 1+y0];
        %RENOBRAMIENTO DE LAS VARIABLES
        x0=x;
        y0=y;
    end
end
axis square;
plot(x,y,'-','LineWidth',2.5);

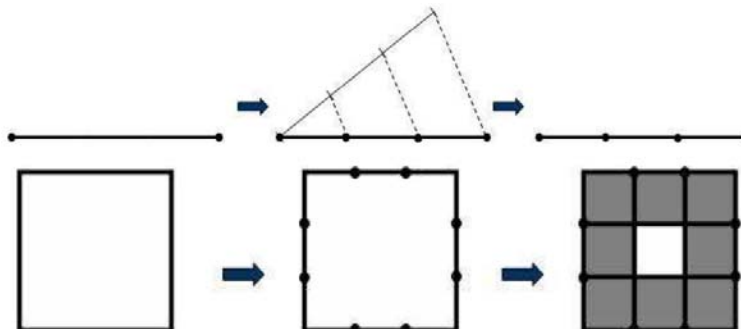
for i=2:2:t
    x1=0;
    y1=x(i-1);
    x1aux=0;
    y1aux=0;
    for j=2:2:t
        x2 = x1aux + x(j);
        y2 = y1aux + x(i);
        u = [x1 x1 x2 x2];
        v = [y1 y2 y2 y1];
        fill(u,v, 'b')
        if j==t
            break
        else
            x1=x(j+1);
            y1=x(i-1);
            x1aux=0;
            y1aux=0;
        end
    end
end
```

Algoritmo en GeoGebra

Para la realización de **La Alfombra de Sierpinski** se crearon **Macros** (algoritmos) de GeoGebra:

- La primera Macro consiste en dividir un segmento de recta en tres partes iguales, y la cual llamamos **thales** y está hecho de la siguiente manera: se dibuja un segmento y aplicando, por ejemplo, la regla de Thales, se obtienen los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales.
- La segunda Macro, la llamamos **alfombra**, la cual sigue el siguiente algoritmo: se dibuja un cuadrado, es aplica la macro **thales** a sus cuatro lados y se dibujan los ocho cuadrados de la frontera, que se rellenan de algún color.

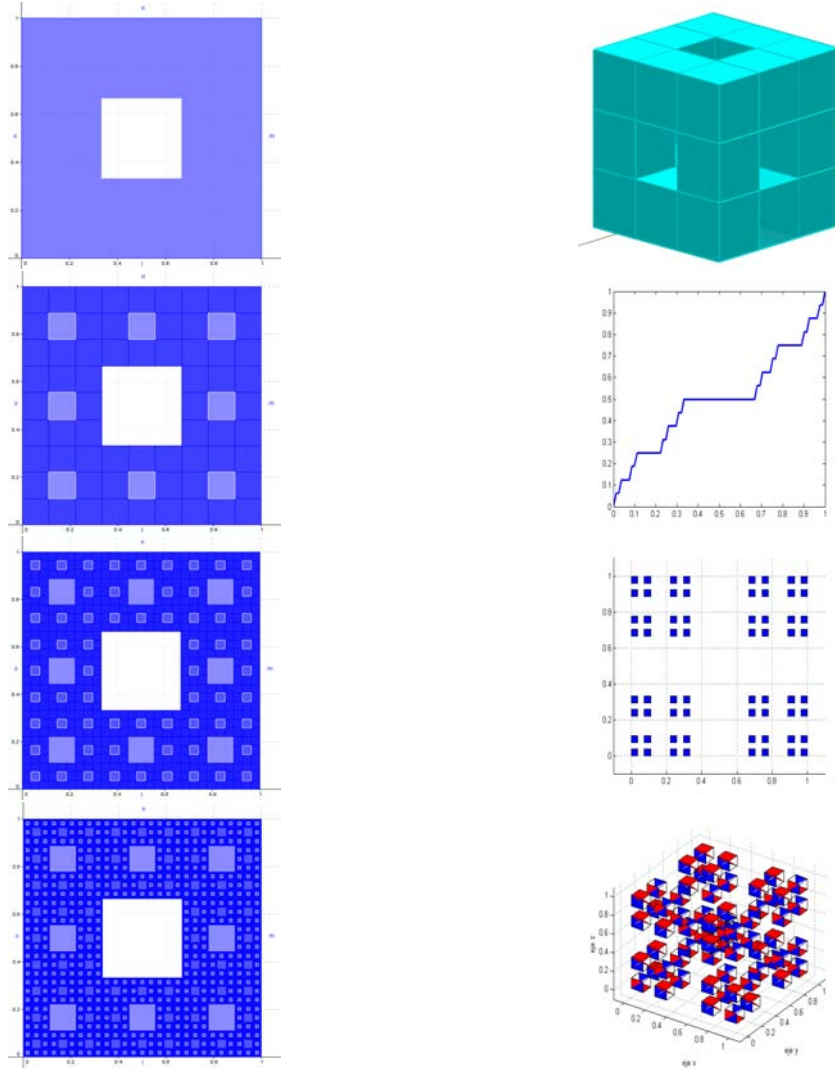
Estas dos Macros podemos visualizarlas en la siguiente imagen (ver [6]):



La construcción de **La Esponja de Sierpinski-Menger** es similar a la **Alfombra de Sierpinski** salvo que se deben considerar las 3 dimensiones de la figura y aplicar las dos macros realizadas para cada cara de los cubos de la esponja.

Resultados

Con el hardware disponible se obtuvieron las siguientes imágenes:



Conclusiones

El conjunto de Cantor es muy útil en campos de las Matemáticas, como Análisis y Ecuaciones Diferenciales. Se ha estudiado un sistema dinámico como un primer ejercicio que nos muestra el papel importante que tiene el conjunto de Cantor en los sistemas dinámicos caóticos además de proporcionar una introducción a la geometría fractal.

Los problemas pendientes son: analizar otros fractales asociados a sistemas dinámicos.

Agradecimientos

Mi mayor agradecimiento al Dr. Heliodoro Daniel Cruz Suárez por sus consejos y por su apoyo durante la preparación de este trabajo.

Referencias

- [1] ***Propiedades del conjunto de Cantor***, José Mateos Cortes.
<http://www.dynamics.unam.edu/NotasVarias/Cantor.pdf>
- [2] ***El Conjunto de Cantor***, José Galaviz Casas-Instituto de Matemáticas, UNAM.
<http://www.miscelaneamatematica.org/Misc24/galaviz.pdf>
- [3] ***Curiosidades sobre el Conjunto de Cantor***, Marta Macho Stadler-Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea.
<http://www.fing.edu.uy/imerl/Calculo1anual/MaterialTeorico/cantor.pdf>
- [4] ***The Cantor Function***, O. Dovgosheya, O. Martiob, V. Ryazanova, M. Vuorinenc. ELSEVIER.
- [5] ***Real Analysis***, Royden 4ta. Edición.
- [6] ***Fractales***, Miguel Reyes.
<http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionMadrid2009/fractales.pdf>
- [7] ***Algunos ejemplos de sistemas dinámicos discretos***, Araceli Gutiérrez Llorente, UAM.
<http://gauss.acatlan.unam.mx/pluginfile.php/32226/modresource/content/0/SistDinDiscretos-UAM-Ar>

Desarrollo de La p -versión del Método de Rayos Generales para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas en el caso de funciones bidimensionales espaciales con soporte compacto y condiciones de frontera móvil

Armando Espíndola Pozos Alexandre I. Grebennikov
espinpozos@gmail.com agrebe50@yahoo.com.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

Se desarrolla la p – versión del Método de Rayos Generales (MRG) para resolver ecuaciones diferenciales parciales parabólicas en el caso de funciones bidimensionales espaciales con soporte compacto y condiciones de frontera móvil.

1 Introducción

Existen métodos analíticos y numéricos y para dar solución a problemas con condiciones iniciales y de contorno para Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) Parabólicas, que describen procesos termodinámicos en áreas aplicadas de la Física, véase [1, 2, 8, 9, 11, 14]. El método analítico explícito que utiliza la función de Green es en general desconocido para regiones que se desplazan con el transcurso del tiempo, véase págs. 492-496 [14]. Los métodos numéricos basados en Diferencias Finitas y Elemento Finito requieren para su realización la solución de ecuaciones lineales algebraicas, las cuales requieren mucha memoria y gran tiempo de computadora, véase [14]. Por esta razón es importante el desarrollo e implementación de nuevos métodos numéricos más efectivos. La p – versión del MRG se ha desarrollado para EDP Elípticas desde el año 2003 para hallar la solución de problemas de contorno en dominios de forma geométrica compleja, véase [3, 4]. Este método está basado en el uso de la Transformada Directa de Radon (TDR) y la Transformada Inversa de Radon (TIR). La TIR se realiza de manera rápida porque utiliza la Transformada Rápida de Fourier (FFT), véase [7, 10].

Definición 1. La transformada de Radon de una función $f \in D(\mathbb{R}^2)$, véase [5, 8, 13], es una familia de integrales de f sobre líneas rectas l , donde estas rectas queda determinadas por dos parámetros p y φ , donde p es la distancia de la recta al origen y φ es el ángulo formado por el eje X y el segmento perpendicular del origen a la recta l , ver la figura 1. Entonces la transformada de Radon de una función $f \in D(\mathbb{R}^2)$ se define como

$$\hat{f}(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \varphi - \tau \sin \varphi, p \sin \varphi + \tau \cos \varphi) d\tau \quad (1)$$

donde $-\infty < p < \infty$, $0 \leq \varphi < \pi$.

Para puntos $(x, y) \in l$ se tiene la parametrización en coordenadas de Radon como $x = p \cos \varphi - \tau \sin \varphi$ y $y = p \sin \varphi + \tau \cos \varphi$ con $\tau \in \mathbb{R}$.

Por supuesto, los límites de integración pueden ser finitos si la función $f(x, y) = 0$ fuera de algún dominio convexo o estrellado Ω , ver la figura 2. Es decir la TDR se puede escribir como sigue

$$\hat{f}(p, \varphi) = \begin{cases} \int_{g_1(p)}^{g_2(p)} f(p \cos \varphi - \tau \sin \varphi, p \sin \varphi + \tau \cos \varphi) d\tau & , (p, \varphi) \in \hat{\Omega} \\ 0 & , (p, \varphi) \notin \hat{\Omega} \end{cases} \quad (2)$$

donde $\hat{\Omega} = \{(p, \varphi) : r_1(\varphi) \leq p \leq r_0(\varphi), 0 \leq \varphi < \pi\}$ y $r_0(\varphi), r_1(\varphi), g_1(p), g_2(p)$ son funciones continuas que corresponden a la frontera móvil.

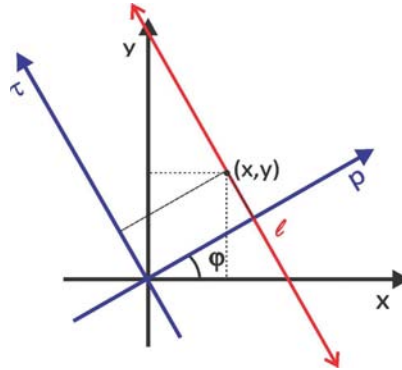


Figura 1: La ecuación de una línea recta l en su forma normal es $x \cos \varphi + y \sin \varphi = p$

La Transformada de Radon en todo el plano cumple con la siguientes dos propiedades.

1. La Transformada Directa de Radon del laplaciano de una función, véase [5, 8, 13].

$$R[\Delta f(x, y)] = \frac{d^2 \hat{f}(p, \varphi)}{dp^2} \quad (3)$$

2. La Transformada Inversa de Radon se presenta por la fórmula, véase [5, 8, 13].

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial \hat{f}(x \cos \varphi + y \sin \varphi, p)}{\partial p}}{x \cos \varphi + y \sin \varphi - p} dp d\varphi \quad (4)$$

donde $-\infty < p < \infty$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$.

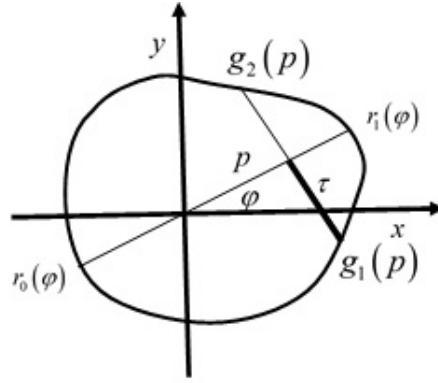


Figura 2: Dominio de las funciones f tales que $f(x, y) = 0$, $(x, y) \notin \Omega$.

2 Planeamiento del Problema

Resolver por la p – versión del MRG el problema Dirichlet con frontera móvil siguiente

$$\frac{du}{dt}(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = \psi(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega(t), \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega(0), \\ 0, & (x, y) \notin \Omega(0), \end{cases} \quad (6)$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega(t), \quad 0 < t < T, \quad (7)$$

donde $\psi, f \in D(\mathbb{R}^2)$ son funciones dadas, $\Omega(t)$ es un dominio convexo acotado en el plano, $\Omega(t) = \{(x, y, t) : s_1(t) < x < s_2(t), s_3(t) < y < s_4(t), 0 < t < T(\text{fijo})\}$, las funciones s_1, s_2, s_3 y s_4 son funciones continuas definidas en $(0, T)$ y $\partial\Omega(t)$ la frontera móvil, ver la figura 3.

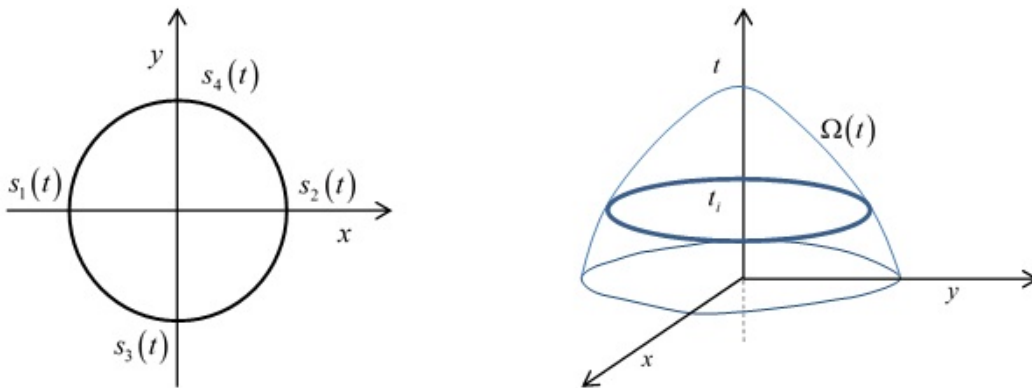


Figura 3: $\Omega(t) = \{(x, y, t) : s_1(t) < x < s_2(t), s_3(t) < y < s_4(t), 0 < t < T(\text{fijo})\}$ Región con frontera móvil $\partial\Omega(t)$

3 Esquema de la p – versión del Método de Rayos Generales

El esquema considera la aproximación en Diferencias Finitas de la primera derivada con respecto al tiempo, la TDR y la TIR. Dicho esquema está dado en cinco pasos:

1. Considerar en Diferencias Finitas la derivada de $u(x, y, t)$ con respecto al tiempo.

$$\frac{du}{dt}(x, y, t) \approx \frac{u(x, y, t_i) - u(x, y, t_{i-1})}{h} \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \text{ y } t_0 = 0 \quad (8)$$

cuando $h \rightarrow 0$, el cual es el tamaño de paso en el tiempo, véase [15]. Y se sustituye en la ecuación 5.

2. A la ecuación resultante en el paso 1, se le aplica la Transformada Directa de Radon para un tiempo t_i con $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Esto con la finalidad de convertir la EDP a una familia de EDO con condiciones de frontera homogéneas sobre la variable p .

3. Resolver la familia de EDO con condiciones de frontera homogéneas.

4. Calcular la TIR de la solución obtenida en el paso anterior.

5. La solución aproximada del problema 5 - 7, se obtiene de manera recurrente desde $t_0 = 0$, $t_1, t_2, \dots, t_N$.

4 Desarrollo de la p – versión del Método de Rayos Generales

Al aplicar el paso 1 del esquema al problema 5-7 para t_i con $i = 1, 2, 3, \dots, N$, se obtiene de la siguiente forma

$$\Delta u(x, y, t_i) - \frac{1}{h} u(x, y, t_i) = \psi_0(x, y, t_i), \quad (x, y) \in \Omega(t_i), \quad 0 < t_i < T, \quad (9)$$

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega(0), \\ 0 & , \quad (x, y) \notin \Omega(0), \end{cases} \quad (10)$$

$$u(x, y, t_i) = 0, \quad (x, y, t_i) \in \partial \Omega(t_i), \quad 0 < t_i < T, \quad (11)$$

donde $\psi_0(x, y, t_i) = -\psi(x, y, t_i) - \frac{u(x, y, t_{i-1})}{h}$ con $t_0 = 0$,

$$\Omega(t_i) = \{(x, y, t_i) : s_1(t_i) < x < s_2(t_i), \quad s_3(t_i) < y < s_4(t_i), \quad 0 < t_i < 1\}$$

En el paso 2 se construye la familia de EDO sobre la variable con respecto de la función $\hat{u}_{t_i}(p, \varphi)$, aplicando la Transformada Directa de Radon a la ecuación 9.

$$R \left[\Delta u(x, y, t_i) - \frac{1}{h} u(x, y, t_i) \right] = R[\psi_0(x, y, t_i)], \quad (x, y, t_i) \in \Omega(t_i), \quad 0 < t_i < T,$$

Por la linealidad de la TDR y la propiedad de la transformada a derivadas de una función 3) se tiene

$$\frac{d^2 \hat{u}_{t_i}(p, \varphi)}{dp^2} - \frac{1}{h} \hat{u}_{t_i}(p, \varphi) = \hat{\psi}_{0 \ t_i}(p, \varphi) \quad (12)$$

En el paso 3 se resuelve la familia de EDO construida; fijando el ángulo y considerando las condiciones de frontera cero. Para simplificar la notación se considera el tamaño de paso h como $\frac{1}{m^2}$ $m > 0$. La solución de la ecuación 12 considerando las condiciones de frontera homogéneas es

$$\hat{u}_{t_i} = c_1 e^{-m p} + c_2 e^{m p} + e^{-m p} \int_{-(1-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_{t_i 0}(\xi, \varphi) e^{m \xi}}{-2m} d\xi + e^{m p} \int_{-(1-t_i)}^p \frac{\hat{\psi}_{t_i 0}(\xi, \varphi) e^{-m \xi}}{2m} d\xi \quad (13)$$

donde

$$c_1 = \frac{e^{-2m(1-t_i)} \int_{-(1-t_i)}^{(1-t_i)} \frac{\hat{\psi}_{0(\xi, \varphi)} e^{m \xi}}{-2m} d\xi + \int_{-(1-t_i)}^{(1-t_i)} \frac{\hat{\psi}_{0(\xi, \varphi)} e^{-m \xi}}{2m} d\xi}{(e^{2m(1-t_i)} - e^{-2m(1-t_i)})} \quad (14)$$

y

$$c_2 = -c_1 e^{2m(1-t_i)}. \quad (15)$$

En el paso 4 se determina $u(x, y, t_i)$ aplicando la TIR a la función $\hat{u}_{t_i}$ obtenida en el paso anterior:

$$u(x, y, t_i) = R^{-1}[\hat{u}_{t_i}(p, \varphi)] \quad (16)$$

Por último se obtiene la solución aproximada $\tilde{u}(x, y, t)$ de manera recurrente desde $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_N$

5 Experimentos numéricos

Se ilustra la p -versión del MRG con un problema de Dirichlet con frontera móvil considerando el círculo de radio $1 - t$ como dominio

$$\Omega(t) = \left\{ (x, y, t) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - t, 0 < t < 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$$

Ejemplo 1. El problema de Dirichlet con frontera móvil homogénea que se propone es un Modelo de Difusión de Oxígeno en un medio absorbente, como es el tejido, véase [6].

En este caso no se cuenta con la solución analítica exacta, pero si con gráficas de la solución aproximada obtenida por el método de Elemento Finito, en tres tiempos, $t_1 = 0, 0.05$ y 0.1 , con un tamaño de paso $h = 0.01$, la cual comparamos con las gráficas de la solución aproximada por el método propuesto y una partición de 51 nodos en cada intervalo $[-1, 1]$ en donde están definidas las variables espaciales, ver la figura 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = -1, (x, y, t) \in \Omega(t), 0 < t < 1, \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 + y^2} + e^{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} & , (x, y, 0) \in \Omega(0) \\ 0 & , (x, y, t) \in \Omega(0) \end{cases} \\ u(x, y, t) = 0, (x, y, t) \in \partial\Omega(t), 0 < t < 1, \end{array} \right. \quad (17)$$

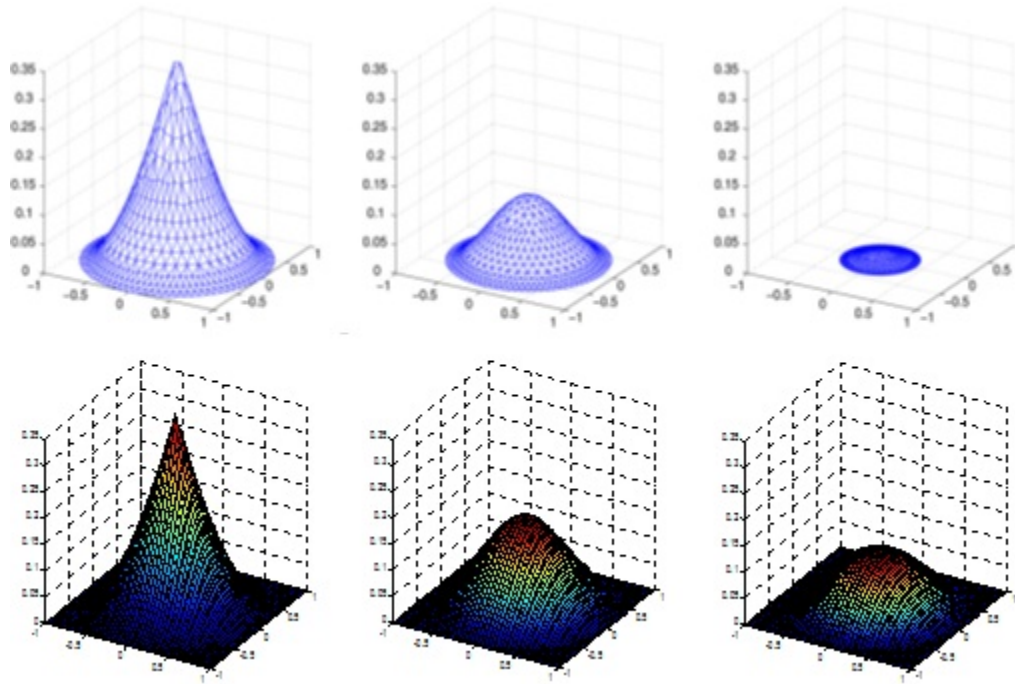


Figura 4: Gráficas de la solución por elemento finito y por p – versión del MRG respectivamente.

Agradecimientos

El presente trabajo es gracias al apoyo del CONACYT y a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Referencias

- [1] Baines, M. J., Hubbard, M. E. y Jimack, P. K., A moving mesh finite element algorithm for the adaptive solution of time-dependent partial differential equations with moving boundaries, *Applied Numerical Mathematics*, 54, (2005), pp.450–469.
- [2] Burden Richard L., *Análisis Numérico*. Thomson, 1998.
- [3] Grebennikov A. I., Fast algorithm for solution of Dirichlet problem for Laplace equation, *WSEAS Transaction on Computers*, 2(4) , (2003), pp. 1039 -1043.
- [4] Grebennikov A. I., *Memorias del Congreso Internacional en Matemáticas Aplicadas*, 2007, México.
- [5] Helgason Sigurdur., *The Radon Transform*, Birkhauser, Boston-Besel Berlin, 1999.
- [6] Hubbarda, M.E., Bainesb, M.J., Jimacka, P.K., Consistent Dirichlet boundary conditions for numerical solution of moving boundary problems, *Applied Numerical Mathematics*, (2009), june 59, pp. 1149-1448.
- [7] Hwei P., *Análisis de Fourier*. Prentice Hall, 1998.

- [8] Jain Anil K., *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1989.
- [9] Mijailov V.P., *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales* Moscu: Mir, 1982.
- [10] Oran Brigham E., *The Fast Fourier Transform and its Applications*, Prentice Hall, 1998.
- [11] SamarskA. A., *Theory of Difference Schemes*, Moscow, 1977
- [12] Sanz, J. L. C., Hinkle, E. B., Jain, A. K., *Radon and Projection Transform-Based Computer Vision, Algorithms, A Pipeline Architecture, and Industrial Applications*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1988.
- [13] Stanley R., *The Radon Transform and Some of its Applications*, Jhon Wiley, Sons, Inc., 1983.
- [14] Tijonov, A.N., Samarsky, A.A., *Ecuaciones de Física y Matemática*, Moscow, Mir., 1980.
- [15] Won Y., *Applied Numerical Methods Using MATLAB*, Wiley-Interscience, 2005.

The Robust stability of the absolutely oscillating systems

Vladimir Alexandrov **Raul Temoltzi Avila**
vladimiralexandrov366@hotmail.com raul_math@hotmail.com
BUAP UAEH

Iryna Konovalenko
214470506@alumnos.fcfm.buap.mx
BUAP

Resumen

In present work was considered generalized concept of two classic definitions: stability of the systems with permanent perturbations and asymptotic and absolute stability described respectively in 1940 and 1944. The description of the bilinear systems with two groups of perturbations (additive and multiplicative) will be given. Will be presented Theorem proved by Malkin (1963) about the stability with permanent additive perturbations of asymptotic stable systems. The criteria of the absolute stability for $n=2,3$ (1972-1975) were obtained. For absolutely oscillatory systems with m degrees of freedom and $n = 2m$ presented new results: 1) for linear systems with the presence of additive permanent perturbations provided the assesses of the quality of robust stability with the help of construction of limit cycles; 2) for bilinear systems with one degree of freedom afforded an extension of the Theorem of Malkin and the assessment of robust stability for absolutely oscillatory systems

1 Introduction

Consider a non-linear dynamical system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, v(t)) \\ v(\cdot) \in V = \{v(\cdot) \in KC \mid |v(t)| \leq \delta_1\} \\ |x(t_0)| \leq \delta_0 \end{cases} \quad (1)$$

where $f(x, v(t)) \in C_1$ is a continuous vector-function, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ is n -dimensional generalized coordinates vector and $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))^T$ vector of perturbations.

Definición 1. The movement $x \equiv 0$ is robustly stable if $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ such as $\|x(t_0)\| \leq \delta_0$ and $\|v(t)\| \leq \delta_1$ for $t \in [t_0, \infty]$, then $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ for $t \geq t_0$.

2 The criteria for robust stability of the system

For linear systems the problem of maximum deviation was described in [8] and it determines the maximum deviation of solutions of the systems of differential equations with a bounded additional perturbation for each time $T > 0$. Form the results of Bulgakov's problem for estimating the behavior of the solution of system:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bv, & x(0) = 0, \\ v(\cdot) \in V = \{v(\cdot) \in L_\infty \mid |v(t)| \leq \delta_1\}, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

where L_∞ is the set of measurable functions bounded almost anywhere, A is a $n \times n$ matrix of Hurwitz, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ is n -dimensional coordinates vector, $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))^T$ vector of perturbations, b is $n \times 1$ vector, $\text{rang}[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = n$ under the vector norm defined by $y = \max_{1 \leq i \leq n} y_i$, the following equality occurs

$$x(v(\cdot), T) = \max_{1 \leq j \leq n} x_j(v(\cdot), T) \leq \delta_1 \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \int_0^T |e_j^T e^{At} b| dt,$$

where e_j is the j th canonical vector corresponding to the x_j coordinate system. If for $\epsilon > 0$ the estimated desired is $\|x(v(t), T)\| \leq \epsilon$, then it is sufficient to choose $\delta_1 = \epsilon/\chi$, where

$$\chi = \max_{1 \leq j \leq n} \int_0^T |e_j^T e^{At} b| dt.$$

The criteria for robust stability of the systems with initial conditions is introduced in [3,4] and defined as

$$\chi = \sup_{0 < \epsilon < \infty} \frac{\epsilon}{\delta_1(\epsilon)}.$$

For this value, the estimate defines the n -dimensional cube that contains the attainability set of system. Sets of this type are the best possible for at least two faces of the cube have common points with the attainability set.

Teorema 1. (Malkin's theorem) *If for the linear system of equations (2) there exists a differentiable Lyapunov function $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, which is satisfying in the neighbourhood of the origin with $t \geq t_0$ the following conditions:*

1) $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq w_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, $v(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$ where w_1 - continuous function vanishing only at the origin;

2) derivatives $\frac{\partial v}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) are bounded in absolute value;

3) derivative $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \leq -w_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$, where the continuous function w_2 vanishing only at the origin, then the trivial solution of the system stable relative to the permanent perturbations.

3 Robust stability of linear systems

Consider the dynamics of a system presented by the differential equation with an additional perturbation

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bv, \\ v(\cdot) \in V = \{v(\cdot) \in KC \mid |v(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases}$$

where KC denotes the set of piecewise continuous functions, A is a $n \times n$ matrix of Hurwitz,

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$$

is n -dimensional coordinates vector, $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))^T$ vector of perturbations, b is $n \times 1$ vector, and $v(\cdot)$ is a bounded piecewise constant function. Supposed that the matrix A has complex eigenvalues with negative real part and the pair A, b is completely controllable. The complete controllability of the system allows to express the value given in the linear differential equation with constant coefficients of the system according to the results in [2]:

$$y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y}_1 + a_n y_1 = v, \quad v(\cdot) \in V,$$

which can be pronounced as a system of linear differential equations by considering the change of variables $y_1 = y, y_2 = \dot{y}, \dots, y_n = y^{(n-1)}$:

$$\dot{y} = A_0 y + e_n v, \quad v(\cdot) \in V, \quad (3)$$

where $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ are the coordinates phase and

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

The pair A_0, e_n is completely controllable because its controllability matrix $V = [e_n, A_0 e_n, \dots, A_0^{n-1} e_n]$ has maximum rank since $\det V = (-1)^n$.

The eigenvalues of the matrix A_0 have their real parts are negative, therefore the trivial solution $y \equiv 0$ of system (2) (i.e., the trivial solution to (2) for $v(\cdot) \equiv 0$), is asymptotically stable when $\delta_1 \equiv 0$; in the case where $\delta_1 > 0$, the concept of stability of the trivial solution under permanent perturbations, the first definition was introduced by I. G. Malkin and G. N. Duboshin, see [9]. In this context, we consider the definition of robust stability considered in [4,3]:

Definición 2. The trivial solution $y \equiv 0$ of system (3) is stable under time-varying perturbations $v(\cdot) \in V$ if for $\epsilon > 0$ there exists $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$ and $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$ such that $\|y(t)\| \leq \epsilon$ for any $t \geq t_0$ with $\|y(t_0)\| \leq \delta_1$ and $|v(t)| \leq \delta_2$ for almost all $t \geq t_0$ and for all $v(\cdot) \in V$.

From the study of the robust stability of system (3) is in the sense of Definition 1.1. to consider solutions of the problem of determining the worst additional perturbations $v(\cdot) \in V$ such that the functionals $\varphi_i[y(t)] = |y_i(t)|, i = 1, \dots, n$, can be given rise to the problem of optimization

$$\varphi_i[y(t)] \rightarrow \sup_{v(\cdot) \in V}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

The value obtained define the maximum deviations of the coordinates $y_i(t)$ of system (3). Each of these values determine the magnitude of the additional perturbation $v(\cdot)$ to guarantee the robust stability of [3]. Different approaches of the problems the maximum deviation are shown in [5] y [11].

The following result shows the conditions under which the system (3) can be decoupled at m subsystems controllable of order two when $n = 2m$ and A has m different complex conjugate eigenvalues with negative real part.

Lema 1. *If the matrix A_0 of (3) has $2m$ different complex conjugate eigenvalues with negative real part denoted by $-\varepsilon_1 \pm i\omega_1, \dots, -\varepsilon_m \pm i\omega_m$, where $n = 2m$, then the system (3) is equivalent to the system*

$$\dot{x} = Bx + bv, \quad v(\cdot) \in V, \quad (4)$$

where $b = (0, 1, \dots, 0, 1)^\top$ and $B = \text{diag}[B_1, \dots, B_m]$,

$$B_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_j^2 - \omega_j^2 & -2\varepsilon_j \end{bmatrix}.$$

Demostración. Let $v_1 \pm iu_1, \dots, v_m \pm iu_m$ the corresponding eigenvectors associated. As the multiplicity of each eigenvalue is one, $Q = [u_1, v_1, \dots, u_m, v_m]$ is invertible, and is known from [] that

$$Q^{-1}A_0Q = \text{diag}[A_1, \dots, A_m],$$

with

$$A_j = \begin{bmatrix} -\varepsilon_j & \omega_j \\ -\omega_j & -\varepsilon_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, m.$$

If $q = Q^{-1}e_n = (q_1, \dots, q_n)^\top$, then the system (3), under the transformation $y = Q\bar{y}$, is equivalent to the system

$$\dot{\bar{y}} = Q^{-1}A_0Q\bar{y} + qv, \quad v(\cdot) \in V,$$

which is completely controllable with controllability matrix $Q^{-1}V$. As this system is decoupled, which follows from the structure of the matrix $Q^{-1}A_0Q$, each of its subsystems is completely controllable, and thus each subsystem can be transformed into canonical form following the development of [2] by the transformation given by $\bar{y} = \bar{V}Px$, where

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \text{diag}\{\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_m\}, \\ P &= \text{diag}\{P_1, \dots, P_m\}, \end{aligned}$$

with

$$\bar{V}_j = \begin{bmatrix} q_{2j-1} & -\varepsilon_j q_{2j-1} + \omega_j q_{2j} \\ q_{2j} & -\omega_j q_{2j-1} - \varepsilon_j q_{2j} \end{bmatrix}, \quad P_j = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_j & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

It follows that $b = (Q\bar{V}P)^{-1}6e_n$. Therefore, the transformation $y = Sx$ where $S = Q\bar{V}P$, is not degenerated. This shows that (3) and (4) are equivalent. $\square$

Hence, the system (3) is equivalent to a system of m differential equations of order two with an additional perturbation:

$$\begin{cases} \ddot{x}_{2j-1} + 2\varepsilon_j \dot{x}_{2j-1} + (\varepsilon_j^2 + \omega_j^2)x_{2j-1} = v, & j = 1, \dots, m. \\ v(\cdot) \in V, \end{cases} \quad (5)$$

The maximum deviations of the coordinates of system that satisfy the optimization problems are given by [6,12,3]:

$$\sup_{v(\cdot) \in V} \{x_i(t)\} \rightarrow \alpha_i^* := \delta_1 \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_{2j-1} &= \frac{1}{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2} \coth \frac{\pi \varepsilon_j}{2\omega_j} \\ \alpha_{2j} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2}} \left(1 + \coth \frac{\pi \varepsilon_j}{2\omega_j} \right) e^{-\frac{\varepsilon_j}{\omega_j} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\varepsilon_j}{\omega_j} \right)} \end{aligned}$$

by means of which a square R_{2j-1} in $\mathcal{R}^2$ is formed (see Figure 1).

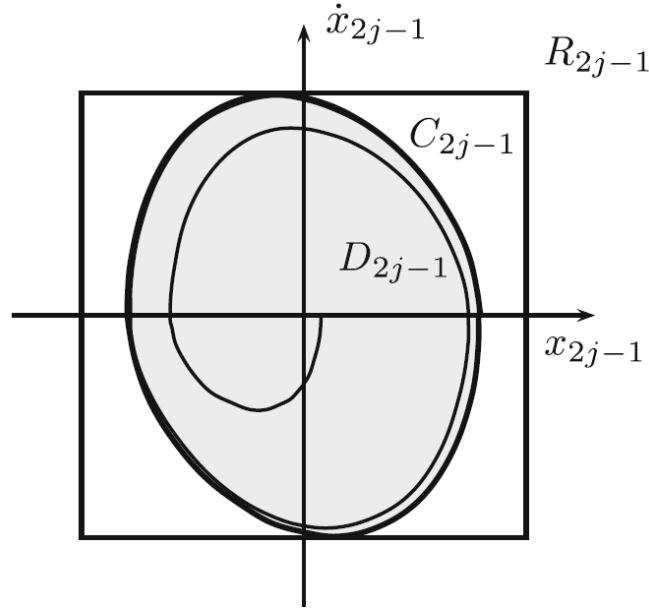


Figure 1: Graphical representation of the maximum deviations of the coordinates x_{2j-1} and $\dot{x}_{2j-1}$ and the sets that are generated from them.

If the initial condition $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^\top$ satisfies the constraint $|x_i^0| \leq \alpha_i^*$, $i = 1, \dots, n$, the coordinates of the solution of system (5) satisfy the relations $|x_i(t)| \leq \alpha_i^*$ for all $v(\cdot) \in V$ and $t \geq 0$. Therefore, exists an n -dimensional cube P_x in $\mathcal{R}^n$ whose 2^n vertices $\{\delta_1 x_1, \delta_1 x_2, \dots, \delta_1 x_{2^n}\}$ depend on the maximum deviation of (4), where

$$x_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top, x_2 = (\alpha_1, -\alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top, \dots, x_{2^n} = (\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)^\top,$$

and such that $x(t) \in P_x$ for all $t \geq 0$. It follows that

$$\|x(t)\| \leq \delta_1 \|x_i\| \quad i \in \{1, \dots, 2^n\}.$$

It is known of [6,3] that maximization problem for the deviation yields the worst perturbation $v^o(t) = \delta_1 \text{sign} \dot{x}_{2j-1}(t)$ to the system (4), where $j \in \{1, \dots, m\}$, and that the coordinates $(x_{2j-1}(t), \dot{x}_{2j-1}(t))$ of the solution $x(t)$, tend to a unique stable limit cycle maximum C_{2j-1} , that have common points with two faces of the n -dimensional cube P_x . The parametric equations of C_{2j-1} are

$$x_{2j-1}(t) = \mp \left(\frac{\delta_1}{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2} + \alpha_{2j-1}^* \right) \cdot e^{-\varepsilon_j t} \left(\cos \omega_j t + \frac{\varepsilon_j}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) \pm \frac{\delta_1}{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_j},$$

$$\dot{x}_{2j-1}(t) = \pm \frac{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2}{\omega_j} \left(\frac{\delta_1}{\varepsilon_j^2 + \omega_j^2} + \alpha_{2j-1}^* \right) e^{-\varepsilon_j t} \sin \omega_j t,$$

The maximum limit cycle C_{2j-1} coincides with the boundary of the attainability set D_{2j-1} of the differential equation with an additional perturbation:

$$\ddot{x}_{2j-1} + 2\varepsilon_j \dot{x}_{2j-1} + (\varepsilon_j^2 + \omega_j^2)x_{2j-1} = v, \quad v(\cdot) \in V,$$

$$(x_{2j-1}(0), \dot{x}_{2j-1}(0)) \in D_{2j-1}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Since the remaining coordinates of system (5) are periodic with period $T = \frac{\pi}{\omega_j}$, it follows that the system (5) has a limit cycle that depends on the worst perturbation $v_i^o(t)$, $i = 1, \dots, n$.

Thus $D_x = D_1 \times D_3 \times \dots \times D_{2m-1}$ approximates the attainability set of the system (3). It follows from the construction that $D_x \subset P_x$.

The transformation $y = Sx$ is linear and non-degenerate, so it is concluded that the solutions $y(t)$ of the system (3) for each $v(\cdot) \in V$ are contained in the parallelepiped

$$P_y = \{y \in \mathcal{R}^n : y = Sx, \ x \in P_x\}, \quad (6)$$

and the attainability set is estimated by

$$D_y = \{y \in \mathcal{R}^n : y = Sx, \ x \in D_x\}. \quad (7)$$

The robust stability of the trivial solution $y \equiv 0$ of the system (3) under constant perturbations gives the estimated robust quality; i.e., for $\varepsilon > 0$ the estimated $\|y(t)\| \leq \varepsilon$ for all $v(\cdot) \in V$, is obtained by taking $\delta_1 = \varepsilon/\chi$, where

$$\chi := \frac{\varepsilon}{\delta_1(\varepsilon)} = \max\{\|S\mathbf{x}_1\|, \dots, \|S\mathbf{x}_{2^n}\|\},$$

provided that the initial condition of the system satisfies the inequality

$$\|y(0)\| \leq \delta_2 := \delta_1(\varepsilon) \cdot \max\{\|Sx_1\|, \dots, \|Sx_{2^n}\|\}.$$

And the estimated of the robust quality that characterizes the maximum deviations of the system (3) is

$$\chi = \sup_{0 < \varepsilon < \infty} \frac{\varepsilon}{\delta_1(\varepsilon)}. \quad (8)$$

Teorema 2. *If A_0 satisfies the conditions of Lemma 1, then the system (4) is robustly stable under the estimated disturbance (8). Moreover, $y(t) \in D_y \subset P_y$ for each $v(\cdot) \in V$, where P_y and D_y is defined by (6) and (7), respectively.*

The following example shows the results

Ejemplo 1. *Consider the system*

$$\dot{y} = A_0 y + e_n \varphi(t, y). \quad (9)$$

The matrix A_0 and the vector e_n are defined as in (3), and assume that $\phi(t, y)$ is a function of bounded module: $|\varphi(t, \mathbf{y})| \leq \delta_1$. It is assumed that there uncertainty in the choice of the function $\varphi(t, y)$, and that the analysis of the dynamics of the system (9) can be determined if it is known that the system (3) is robustly stable. If the coefficients of the matrix A_0 of the system (9) are expressed by $a_1 = 2(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, $a_2 = 4\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1^2 + \omega_1^2 + \epsilon_2^2 + \omega_2^2$, $a_3 = 2\epsilon_1(\epsilon_2^2 + \omega_2^2) + 2\epsilon_2(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)$ and $a_4 = (\epsilon_1^2 + \omega_1^2)(\epsilon_2^2 + \omega_2^2)$, then the eigenvalues of the matrix A_0 are $\lambda_{1,2} = \epsilon_1 \pm i\omega_1$ and $\lambda_{1,2} = \epsilon_2 \pm i\omega_2$. The transformation $y = Sx$, where

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \epsilon_2^2 + \omega_2^2 & 2\epsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^2 + \omega_2^2 & 2\epsilon_2 & 1 \\ \epsilon_1^2 + \omega_1^2 & 2\epsilon_1 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_1^2 + \omega_1^2 & 2\epsilon_1 & 1 \end{bmatrix}$$

giving the system (9) in the equivalent form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + b\varphi(t, Sx), \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\epsilon_1^2 - \omega_1^2 & -2\epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2^2 - \omega_2^2 & -2\epsilon_2 \end{bmatrix}, \\ b &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^\top. \end{aligned} \quad (10)$$

As a particular case for the matrix coefficients A_0 are chosen $a_1 = 2.6000$, $a_2 = 2.8600$, $a_3 = 1.0260$ and $a_4 = 0.2405$. If solutions are sought in the system (9) such that $\|y(t)\| \leq 1$, then it is sufficient to choose $\delta_1 = 0.1180$. In the associated system is obtained the estimated $\|x(t)\| \leq 1.1630$. Figure (2) shows the projection of the solutions of systems (9) and (10) in the coordinates $y_1y_2y_3$ and $x_1x_2x_3$, respectively. In the coordinates $y_1y_2y_3$, the estimation of the attainability set D_y is formed by an oblique cylinder (which is obtained from the fact that C_1 and C_3 are limit cycles), while in the coordinates $x_1x_2x_3$, the estimate D_x is a cylinder. Similar graphs were obtained in the remaining projections.

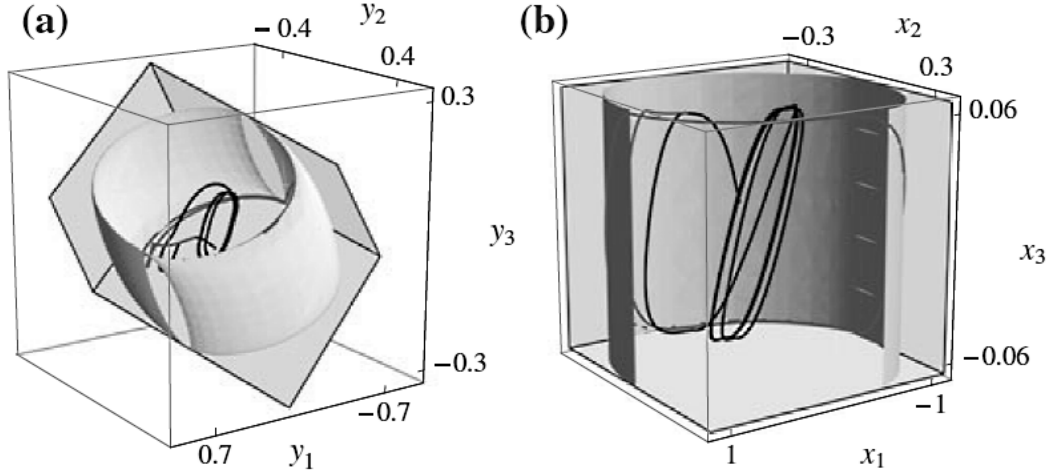


Figure 2: (a) Representation of the projection of the parallelepiped P_y and the estimate of the attainability set D_y for the system (9) in the coordinates $y_1y_2y_3$. (b) Representation of the projection of the parallelepiped P_x and the estimate the attainability set D_x for the transformed system (10) in the coordinates $y_1y_2y_3$.

4 Robust stability of bilinear systems with parametric perturbation

Consider the system

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\epsilon\dot{x}_1 + v(t)x_1 = 0, \\ v(\cdot) \in V = \{v(\cdot) \in KC \mid v_- < v(t) < v_+, \dot{v} = w, |w(t)| \leq \nu\}, \end{cases} \quad (11)$$

where $\epsilon > 0$.

Then the inequality $\epsilon < \sqrt{v_+}$ identifies the whole set of oscillating systems and any non-oscillating solution tends to zero. Similarly, the inequality $\epsilon < \sqrt{v_-}$ identifies the set of absolutely oscillating systems [7].

Teorema 3. For absolute stability of the oscillating system (11) ($0 < \epsilon < \sqrt{v_+}$, $0 < v_-$) necessary that

$$\sup_{V_2} \kappa(t_1) \leq 1, \quad (12)$$

and sufficient that

$$\sup_{V_2} \kappa(t_1) < 1, \quad (13)$$

where $\kappa = \frac{x_1^2}{2}$ with conditions $x_2(0) = x_2(t_1) = 0$, $x_2(t) \neq 0 \forall t \in (0, t_1)$ and $v(0) = v(t_1) = v \in [v_-, v_+]$ - any value at which the straight line $\{x_2 = 0\}$ is achievable.

Using the principle of maximum of Pontryagin(PMP) inequality (13) can be written in a simpler form:

$$\max_{t_0 \leq \alpha \leq t_0 + \frac{v_+ - v_-}{\nu}} \kappa(t_1) < 1, \quad (14)$$

where

$$v^0(t, \alpha) = \begin{cases} v_+, & \text{if } -\infty < t \leq \alpha - \frac{v_+ - v_-}{\nu}; \\ v_+ - \nu(\alpha - t), & \text{if } \alpha - \frac{v_+ - v_-}{\nu} \leq t \leq \alpha; \\ v_-, & \text{if } \alpha \leq t < \infty. \end{cases} \quad (15)$$

If $\nu = \infty$ then inequality (13) expresses a necessary and sufficient condition for absolute stability and using PMP can be written in the form of inequality respect to the parameters ϵ, v_-, v_+ :

$$\varphi_0(v_-, v_+, \epsilon) < 1, \quad (16)$$

where

$$\varphi_0 = \left\{ \sqrt{\frac{v_+}{v_-}} \exp\left\{-\epsilon \left[\frac{1}{\sqrt{v_+ - \epsilon^2}} \left(\pi - \arctan \frac{\sqrt{v_+ - \epsilon^2}}{\epsilon} \right) + \frac{1}{\sqrt{v_- - \epsilon^2}} \arctan \frac{\sqrt{v_- - \epsilon^2}}{\epsilon} \right] \right\}, \text{ if } \epsilon < \sqrt{v_-}. \right. \quad (17)$$

Inequality (16) has a clear physical meaning: for absolute stability of a dissipative oscillating system with parametric perturbation necessary and sufficient the lack of parametric resonance in a system.

If the system is not perturbed parametrically: $v_- = v_+$, then for the asymptotic stability necessary and sufficient only the presence of dissipative forces ($\epsilon > 0$). In the presence of parametric perturbation ($\frac{v_+}{v_-} = k > 1$) is not enough just presence of the dissipative. Rewrite (16) as

$$\sqrt{\frac{v_+}{v_-}} < e^{\varphi_1(k, \beta)}, \quad (18)$$

where $\beta = \frac{v_-}{\epsilon^2}$ and

$$\varphi_1 = \left\{ \frac{\pi - \arctan \sqrt{k\beta - 1}}{\sqrt{k\beta - 1}} + \frac{\arctan \sqrt{\beta - 1}}{\sqrt{\beta - 1}}, \text{ if } 1 < \beta < \infty. \right. \quad (19)$$

The function φ_1 at a fixed k is continuous and monotonically decreasing from $+\infty$ to 0 by β . Then at a fixed k the following inequalities are equivalent:

$$\sqrt{\frac{v_+}{v_-}} < e^{\varphi_1(k, \beta)} \iff \frac{1}{2} \ln k < \varphi_1(k, \beta) \iff \beta < \beta_0 \iff \epsilon > \sqrt{\frac{v_-}{\beta_0}},$$

where β_0 - the unique root of the equation $\varphi_1(k, \beta) = \frac{1}{2} \ln k$.

Teorema 4. For absolute stability of parametrically unperturbed ($k > 1$) absolutely oscillating ($\epsilon < \sqrt{v_+}$) system (11) necessary and sufficient to satisfy the inequalities:

$$v_- > 0, \epsilon > \sqrt{\frac{v_-}{\beta_0}}.$$

where β_0 - the unique root of the equation $\varphi_1(k, \beta) = \frac{1}{2} \ln k$ with $\frac{1}{k} < \beta < \infty$.

To find the maximum characteristic index of the solutions of system (11) ($\mu = \infty$) we introduce substitution

$$x_1(t) = e^{pt} z(t),$$

where p - constant. Since are considered only oscillating solutions $x_1(t)$, then $z(t)$ too will be the oscillating function. Let us call "half-period" of oscillation of function $z(t)$ the interval τ between two zeros of the derivative $\dot{z}(t)$, i.e

$$\dot{z}(0) = 0 \ (z(0) \neq 0), \ \dot{z}(\tau) = 0, \ \dot{z}(t) \neq 0 \ \forall t \in (0, \tau).$$

Will search a constant value p that, in which the maximum possible value $z(t)$ for the "half-period" will not change:

$$\max_{V_1} z(\tau) = z(0).$$

In this case the constant p is the maximum characteristic index of solutions of the system (11) and there will be a an uncorrectable estimate of solution $|x_1(t)| \leq e^{pt} F(x_1(0), \dot{x}_1(0), \cdot)$ (F depends only from the system parameters and not depends from the time).

With the help of the maximum principle the problem of the maximum deviation solved over the "half-period" of oscillations and determined

$$p = \frac{\sqrt{v_+ - \epsilon^2}}{y_0} - \epsilon,$$

where y_0 - the unique root of the transcendental equation

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + a^2 y^2}{1 + y^2} + \frac{1}{y} \left(\pi - \arctan y + \frac{1}{a} \arctan ay \right) = 0,$$

$$a = \sqrt{\frac{v_- - \epsilon^2}{v_+ - \epsilon^2}},$$

at $\epsilon < \sqrt{v_-}$ or

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 - a^2 y^2}{1 + y^2} + \frac{1}{y} \left(\pi - \arctan y + \frac{1}{a} \arctan ay \right) = 0,$$

$$a = \sqrt{\frac{\epsilon^2 - v_-}{v_+ - \epsilon^2}},$$

at $v_- < \epsilon^2 < v_+$. The following statement holds: for the absolute stability of the system (11) ($\nu = \infty$) is necessary and sufficient that the maximum characteristic index of solutions was negative: $p < 0$.

5 A particular case $v_1 = v_2$

Consider a dynamic system with two equal perturbations

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\epsilon \dot{x}_1 + (1 + av_1(t))x_1 = bv_1(t), \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq 1\}, \end{cases} \quad (20)$$

when $0 < a < (1 - AB)/(1 + 2B + AB)$, where $A = e^{-\pi\epsilon/\omega_-}$, $B = e^{-\pi\epsilon/\omega_+}$, $\omega_- = \sqrt{1 - a - \epsilon^2}$, $\omega_+ = \sqrt{1 + a - \epsilon^2}$ [1].

Suppose that the initial conditions of the system (20) are of the form $x_1(0) = \alpha_0 \in (0, \frac{b}{a})$, $\dot{x}_1(0) = 0$. Solving extremal problem $x_1(t_1) \rightarrow \min_{v_1 \in V}$ with $\dot{x}_1(t_1) = 0$ and $\dot{x}_1(t) \neq 0$ for any $t \in (0, t_1)$, obtain

$$v_1^0 \equiv -1, t_1 = \frac{\pi}{\omega_-}, x_1(t_1) = -\beta_0 = -(A\alpha_0 + \frac{1+A}{1-a}b).$$

Solving similar extremal problem $x_1(t_2) \rightarrow \max_{v_1 \in V}$ in $[t_1, t_2]$ where $\dot{x}_1(t_1) = \dot{x}_1(t_2) = 0$ and $\dot{x}(t) \neq 0$ for any $t \in (t_1, t_2)$, obtain

$$v_1^0 \equiv 1, x_1(t_2) = \alpha_1 = B\beta_0 + \frac{1+B}{1+a}b = B \left(A\alpha_0 + \frac{1+A}{1-a}b \right) + \frac{1+B}{1+a}b < \frac{b}{a}.$$

As the result of gradual solving similar problems will have two sequences in the form of the recurrence formulas

$$\alpha_{k+1} = B\beta_k + \frac{1+B}{1+a}b,$$

$$\beta_k = A\alpha_k + \frac{1+A}{1-a}b,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

The mapping $\alpha \rightarrow g(\alpha) = AB\alpha + b \left(\frac{B(1+A)}{1-a} + \frac{1+A}{1-a} \right)$ is contraction mapping, therefore, there is a fixed point:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha_*,$$

$$\alpha_* = \frac{b}{1-AB} \left(\frac{B(1+A)}{1-a} + \frac{1+B}{1+a} \right); \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_*,$$

$$\beta_* = \frac{b}{1-AB} \left(\frac{A(1+B)}{1-a} + \frac{1+A}{1+a} \right). \quad (22)$$

In this way, α_* in (21) and β_* in (22) - amplitudes of oscillations, which alternate. The mathematical model that implements the selfoscillations has the form

$$\ddot{x}_1 + (2\epsilon\dot{x}_1 - b \cdot \text{sign}(\dot{x}_1)) + (1 + a \cdot \text{sign}(\dot{x}_1))x_1 = 0$$

with frequency $\nu_1 = \omega_0\omega_+\omega_-/(\pi\omega_+ + \pi\omega_-)$.

Taking in account the results we obtained for the systems of second order the extension of the Malkin's theorem and the criteria for robust stability.

Referencias

- [1] Aleksandrov V.V., Alexandrova O.V., Prikhodko I.P., Telmotzi-Avila R.: Mosc. Univ. Mech. Bull. 62, 65–68 (2007)
- [2] Aleksandrov V.V., Boltianski V.G., Lemak S.S., Parusnikov N.A., Tikhomirov B.M.: Optimal Control of Movement (in Russian). FIZMATLIT, Moscow (2005)
- [3] Aleksandrov V.V., Sidorenko G.Yu., Temoltzi-Avila R.: Robust stability of control systems (in Russian). X Conferencia Internacional Chetaev, Mecanica Analitica, Estabilidad y Control, 42–52 (2012)
- [4] Aleksandrov V.V., Zueva I.O., Sidorenko G.Yu.: Robust stability of third-order control systems. Mosc. Univ. Mech. Bull. 69(1), 10–15 (2014)
- [5] Aleksandrov V.V.: On the accumulation of disturbances in linear systems on two coordinates (in Russian). Mosc. Univ. Mech. Bull. 3, 67–76 (1968)

- [6] Alexandrov V.V., Alexandrova O.V., Prikhodko I.P., Temoltzi-Avila R.: Synthesis of autooscillations (in russian), Moscow University Mechanics Bulletin (2007), No 3, 42-44.
- [7] Alexandrov V.V., Boltianski V.G., Lemak S.S., Parusnikov N.A., Tikhomirov B.M.: The optimization of the controllable dynamic systems. - M.: Moscow University, 2000. - 304 p. (in Russian).
- [8] Bulgakov B.V.: On accumulation of perturbations in the linear oscillatory controls with constant parameters. Dokl. Akad. Nauk SSSR 51, 339–342 (1946)
- [9] Elsgoltz L.: Ecuaciones diferenciales y calculo variacional (in Russian).Mir,Moscow (1969)
- [10] Hirsch M.W., Smale S.: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press, New York (1974)
- [11] Zhermolenko V.N.: On maximal deviation of linear system. Autom. Remote Control 73, 1117–1125 (2012)
- [12] Zhermolenko V.N.: Maximum deviation of oscillating system of the second order with external and parametric disturbances. J. Comput. Syst. Sci. Int. 46, 407–411 (2007)

Educación Matemática

El trabajo áulico con la tipología de Brousseau para la reafirmación del concepto $x \cdot 0 = 0$

Francisco Guillermo Herrera Armendia Raciél Trejo Reséndiz
harmendia@gmail.com harmendia@gmail.com

Marcos Fajardo Rendón
marktrony2k@gmail.com

Departamento de Matemáticas
Escuela Normal Superior de México

Resumen

El plan de estudios 1999 de la licenciatura en educación matemática con especialidad en matemáticas dirigido a profesores en formación inicial contempla la asignatura de pensamiento algebraico en 3er semestre, en donde muchos estudiantes cuya formación en nivel medio superior es variada intentan justificar la nulidad del producto de cualquier número por cero utilizando únicamente el axioma distributivo de la adición cuando que este no es suficiente, pues debe recurrirse a la regla de la aritmética modular citado por Julio Rey Pastor. La presente contribución describe la aplicación de la tipología de las ecuaciones didácticas de Guy Brousseau en la reafirmación de la justificación suficiente y necesaria que demuestra $x(0) = 0$ Estas fases descritas por Brousseau incluyen la acción, formulación, validación e institucionalización.

1 Introducción

Los retos que debe enfrentar el futuro docente de educación básica no son fáciles y aun mas con las recomendaciones que sugieren tanto Banco Mundial como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, que tanto insisten en la idea de una educación de calidad. Es por ello que los estudiantes que ingresan a la Escuela Normal Superior de México para cursar la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas (LIESM) enfrentan retos muy complicados durante su formación inicial (uno de ellos es el hecho de que el Plan de Estudios 1999 no contempla los rasgos de perfil de ingreso), lo que supone que ellos tienen la aptitud y actitud para el estudio de las matemáticas, el autoaprendizaje, la reflexión, el hábito por la lectura, entre otras características y que no se observan del todo durante su estancia como docentes

en formación inicial. Sin embargo, el Plan de estudios posee cinco grandes rasgos de perfil de egreso, mismos que deben ser desarrollados a lo largo de los cuatro años de estudio: Manteca, 2000) 1) Habilidades intelectuales específicas. 2) Dominio de los propósitos y los contenidos de la educación secundaria. 3) Competencias Didácticas. 4) Identidad Profesional y Ética. 5) Capacidad de percepción y respuesta a las condiciones del entorno de la escuela, (Plan de Estudios 1999). De ellos, el segundo hace referencia al dominio de contenidos disciplinares al manejarlos con seguridad y fluidez, tanto los contenidos incluidos en el Plan de estudios 2011 para educación secundaria como aquellos que se estudian durante su carrera profesional que incluye asignaturas de acercamiento a la práctica escolar, de formación psicopedagógica y además, las propias del estudio de las matemáticas superiores agrupadas en contenidos de aritmética, geometría, álgebra, probabilidad y estadística. Es así que durante el tercer semestre se cursa la asignatura Sentido Numérico (Manteca, 2002) cuyo propósito es el abordaje temas relacionados con la teoría de números, con un enfoque centrado en planteamiento y resolución de problemas, sin descuidar los algoritmos de las operaciones con distintos sistemas de numeración. Los propósitos establecen que los estudiantes:

1. Adquieran bases sólidas en relación con el estudio de los números y sus relaciones, tanto para abordar los siguientes cursos de la especialidad como para realizar un trabajo docente de calidad.
2. Adquieran elementos para analizar situaciones de estudio relacionadas con el significado de los números, sus relaciones y operaciones, que resulten adecuadas para los estudiantes de secundaria.
3. Desarrollen habilidades para resolver problemas en diferentes contextos, con base en el conocimiento de los números y sus relaciones.

El presente informe se centra en el estudio del Bloque 2, correspondiente a los Números Enteros y de éste, retomamos el caso particular del estudio del número cero y su relación con otros elementos del conjunto $\mathbb{Z}$ con base en la aplicación de las propiedades de las operaciones de los números reales. Estos resultados son producto del trabajo en el aula con el apoyo de la metodología específica propuesta por Guy Brousseau, concretamente, la tipología didáctica (Brousseau, 1997).

2 La tipología Didáctica de G. Brousseau

A finales de los años 60 surgen en Francia los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM), los cuales se dedicaron en un principio a complementar la formación matemática de los maestros, los programas, y preparando maestros en las escuelas normales. También se dedicaron a producir materiales de apoyo para el trabajo en el aula (textos, fichas, juegos, problemas, juguetes etc.) y con ellos una “experimentación rudimentaria, concebida como prueba de su factibilidad y como antecedente para introducir ajustes mínimos, antes de proceder a su difusión dentro del sistema educativo” (Gálvez, 1985).

Con el paso del tiempo, los IREM desarrollaron actividades no orientadas a la producción de medios, sino a la investigación científica orientada a construir y controlar las acciones de la enseñanza. Guy Brousseau, profesor e investigador del IREM de Burdeos, propuso estudiar las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos, con la finalidad de reproducir y optimizar los procesos de adquisición de los mismos. A partir de este punto surge lo que después se conocería como la Tipología de las Situaciones Didácticas, cuyo principal exponente es Brousseau. La idea de estudiar las condiciones tiene referencias en el constructivismo propuesto por Piaget. Mabel Panizza (2004) menciona (en una cita que hace de Brousseau) que “el alumno aprende adaptándose a un

medio” (p.3) porque en él encuentra dificultades, desequilibrios, a los cuales el alumno debe responder. El estudio de las condiciones se debe hacer mediante el diseño de situaciones didácticas que son “un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución” (Gálvez, 1985).

Las situaciones didácticas presentan como elemento central al medio, que son situaciones presentadas por el profesor con una intencionalidad: el aprendizaje de un conocimiento determinado. Para ello es necesario diseñar una situación que genere cierto tipo de interacciones y retroacciones. Las interacciones suceden de dos tipos, entre el alumno y el medio, y entre el alumno y el docente, a las primeras se les denominan a-didácticas en las cuales el alumno trabaja, mientras que el profesor monitorea, es donde suceden las situaciones de acción, formulación y validación. A las segundas se les llama didácticas y se refiere a los intercambios entre ambos, y se presenta en las situaciones de institucionalización y en el proceso de devolución. Las retroacciones en cambio se refieren a los intercambios entre el medio y el alumno, es decir, el alumno tratará de resolver la situación, la cual está diseñada para que no se solucione con estrategias convencionales, por lo que el alumno volverá a intentarlo.

Las interacciones de tipo a-didáctica ocurren a través del proceso de devolución, que se refiere a que el alumno adquiera la responsabilidad matemática para resolver la situación planteada. Este proceso se encuentra regulado por el contrato didáctico, es decir, por reglas implícitas y explícitas entre los alumnos y el docente que determinan qué papel juega cada uno, así como los instrumentos que se pueden utilizar para resolver el problema.

Las situaciones didácticas se clasifican en tres tipos según Panizza; acción, son en las que la interacción es entre el alumno y un medio físico o simbólico, es una toma de decisión de los conocimientos que pondrá en juego; formulación, en donde el emisor debe comunicar cierta información al receptor, de tal manera que el lenguaje sea preciso y adecuado para lo que debe comunicar; validación, en la cual el alumno debe establecer la validez de una afirmación, para “convencer” con argumentos a otro sujeto que acepte o rehúse dichas afirmaciones, pudiendo dar afirmaciones opuestas o pidiendo pruebas de ello.

Cada una de las situaciones descritas tiene una situación fundamental, es decir, una situación que derive en otras “a través de la asignación de diversos rangos de variación o valores particulares a las variables que la caracterizan” (Gálvez, 1985). Un rasgo característico es que son evolutivas, como lo es la adquisición de un conocimiento; buscan que el alumno realice una evocación de los conocimientos ya adquiridos para ponerlos en juego, y pueden ser de dos tipos, de acción (que ocurren al día siguiente de realizarla) habiendo una descontextualización del problema, y la evocación de tiempo prolongado (cuando ya ha transcurrido un lapso amplio) que buscan interiorizar un nuevo conocimiento estableciendo relaciones entre lo viejo y lo nuevo.

Por otro lado, la institucionalización, es la consideración oficial del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje por parte del maestro, es decir, los alumnos comprenden el objeto con el que se trabajó, mientras que el maestro percibe el aprendizaje de los alumnos. Para que el alumno articule la situación a-didáctica con la institucionalización² es necesario que tenga un proyecto de aprendizaje, según Patricia Sadovsky, porque intervendrá y condicionará la producción del aprendizaje sobre el objeto matemático que se esté tratando, al responder los cuestionamientos “¿Qué quieren que aprenda con esto? ¿Qué tiene que ver esto con los problemas que hicimos antes?” (Sadovsky, 2005, p.14).

Una parte importante de la Teoría de las Situaciones Didácticas es el concepto de obstáculo, el cual se define como “un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades” (Chevallard et. al., 1997, p.224). Se clasifican en ontogénico, didáctico y epistemológico. El primero se refiere a las limitaciones del sujeto a un momento de su desarrollo; el segundo se refiere a la noción del alumno sobre

cierto conocimiento aprendido en el sistema educativo; y el tercero se refiere al rol constitutivo del conocimiento, es decir, de su génesis.

3 El trabajo áulico

Para abordar el tema, aplicamos la situación de acción con el propósito de recuperar los conocimientos implícitos que los estudiantes ya poseen. Presentamos ante ellos, una ecuación de segundo grado, y otra de primer grado, como estas:

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$3x + 2 = 0 \quad (2)$$

Debemos enfatizar que en esta situación, el docente debe proponer una serie de cuestionamientos que lleven al alumno a proponer las respuestas justas que la situación requiere, en este caso las preguntas se orientaron a la aplicación de las propiedades de las operaciones de los números reales $\mathbb{R}$ y su relación en estos dos casos, con la permanencia del número cero en las expresiones equivalentes que se iban obteniendo. Conforme avanza el tiempo, necesariamente se llega a la pregunta: ¿Porqué todo número multiplicado por cero, el producto es siempre cero?

Es aquí cuando se aplica la situación de formulación. Como ya se describió anteriormente, en ésta los estudiantes actúan por sí mismos, al intercambiar mensajes relacionados con el cuestionamiento citado. El docente no debe intervenir sino solo para moderar la discusión entre ellos, evitar que cambien drásticamente la orientación de la discusión, monitorear la actividad, y en todo caso, guiar u orientar toda la gama de códigos matemáticos que en este proceso de comunicación activa se generen.

El concepto relacionado con la multiplicación de todo número por cero, es evidente que lo conocen, pero muchas veces lo manifiestan como un acto de fe, pues en la mayoría de los casos no justifican sus argumentos con algún proceso matemático.

Justo en esta parte, hemos abordado la aplicación de la situación de validación, al proponerle al estudiante que argumente aseveraciones. Para ello, ofrecemos reflexionar sobre las ideas propuestas por Kaplan (Kaplan 2004), que permiten que los estudiantes emitan juicios con argumentos que ya poseen. Para el caso de expresiones matemáticas que siguen pautas como, por ejemplo, $xy = 0$, entonces se puede argumentar que al menos una de las incógnitas debe valer cero. Kaplan propone, para evidenciar la situación, el conocido modelo de la balanza. Esto permite mostrar, esquemáticamente al grupo la aplicación de propiedades de las operaciones para que éste pueda emitir juicios, y aunque inclusive siguen surgiendo cuestionamientos intercalados entre sus argumentos (cosa que es totalmente válida), normalmente los cuestionamientos surgen cuando la actividad matemática nos lleva directamente a la aplicación de la propiedad distributiva. Se llega a una conclusión parcial: $x \cdot 0 = 0$, se puede reescribir como $x \cdot (n - n)$, puesto que es evidente que $n - n = 0$. Si reescribimos la idea completa, con base en la propiedad distributiva tenemos:

$$x \cdot 0 = x \cdot (n - n) = xn - xn \quad (3)$$

Finalmente, la situación de validación permite consolidar el trabajo áulico, con relación a los propósitos establecidos, al reescribir, el enunciado de este modo:

$$x \cdot 0 = x \cdot (n - n) = xn - xn = 0 \quad (4)$$

4 Conclusiones

En un primer momento, tanto la propuesta original ($x \cdot 0 = 0$), como el procedimiento que lleva a la aplicación de la propiedad distributiva pareciesen muy comunes tanto entre los estudiantes

y los docentes, sobre todo a nivel superior, pero más allá de ello debemos apuntar que lo realmente enriquecedor es el llevar a los estudiantes a la reflexión intensa, a la participación activa (sobre todo entre ellos mismos), a la propuesta de argumentos sólidos que si bien ya conocían, no los valoraban, pues la mayoría de ellos conoce muy bien las propiedades de las operaciones, sin embargo, sólo las ha aprendido en un sentido memorístico, sin vínculo alguno con el discurso matemático que es enriquecedor. Por lado, la metodología propuesta por Guy Brousseau es una muy buena opción didáctica, puesto que al seguirla, hemos observado que permite dar esa libertad de expresión tan buscada en las sesiones de matemáticas, además de centrar al docente en una posición muy variada, pues además de proponer cuestionamientos, toma el papel de monitor, de guía, de observador, de moderador, de receptor de argumentos que deberá moldear, además que finalmente no descuidará su labor de promover las normas institucionalizadas que, como lenguaje, las matemáticas poseen. Se logra un valor extra a estos resultados, pues nuestros estudiantes atenderán como docentes, a corto plazo, a jóvenes que cursan estudios de matemáticas en secundaria e inclusive en el nivel medio superior. El haber vivido una propuesta didáctica como esta, les abre opciones sobre metodología didáctica, que si bien, no es la única, pues existen variedad de investigadores en educación matemática, observaron que se alcanzan los propósitos que los estándares actuales solicitan.

5 Bibliografía

- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathemtacis*. Kluwer. New York.
- Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: I.C.E.-Horsori
- Gálvez, G. (1985): *La Didáctica de las Matemáticas*, en Parra y Saiz (comp.) *Didáctica de Matemáticas, Aportes y reflexiones*. Bs. As. Paidós.
- Kaplan, R. (2004). *Una Historia Natural del Cero. La nada que existe*. Editorial Océano. México.
- Manteca, E. (2000). *Coordinador Editorial. Plan de estudios 1999. Licenciatura en Educación Secundaria*. Secretaría de Educación Pública. México.
- Manteca, E. (2002). *Coordinador Editorial. Los números y sus relaciones. Programa de Estudio*. Secretaría de Educación Pública. México.
- Panizza, M. (2004). *Conceptos Básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas*, en: *Enseñar matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.: Análisis y Propuestas*. Paidós, pp.59- 71.
- Sadovsky, P. (2005): *La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática*, en *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, Buenos Aires, Libros Del Zorzal.

El tránsito del pensamiento recursivo aditivo a las funciones recursivas y la variación funcional en adolescentes de educación secundaria

Alejandra Avalos Rogel
alejandraavalosrogel@gmail.com
ENSM

Francisco Herrera Armendia
harmendia@gmail.com
ENSM

Resumen

Esta ponencia da cuenta de una investigación en educación matemática, con una metodología basada en la ingeniería didáctica, que tuvo como propósitos, en primer lugar, caracterizar el pensamiento recursivo de adolescentes de escuelas secundarias públicas del Distrito Federal, instalado en un campo conceptual aditivo de los números naturales, como una forma de metacognición y control de sus procedimientos matemáticos iterativos; y en segundo lugar identificar el tránsito a un pensamiento algebraico mediante la recuperación y reflexión de sus propias estrategias recursivas, pero instaladas en un campo conceptual multiplicativo con números racionales, en contextos de resolución de problemas. Este replanteamiento de la estrategia les permitió la construcción conceptual de los números racionales y algunos de sus significados, la obtención de generalizaciones y su expresión algebraica, la comprensión de la variación funcional lineal, e incluso casos particulares de la función exponencial.

1 Un problema de investigación: el control de un procedimiento matemático

Las investigaciones en educación matemática han recuperado la categoría de metacognición de diversas teorías psicológicas –como la teoría del procesamiento de la información (Brown, 1987), la teoría socio cultural (Wertsch, 1988) y la psicología genética (Piaget 1985)-, para caracterizar dos aspectos relacionados con el éxito en la realización de tareas matemáticas. Por un lado el reconocimiento por parte de los alumnos de sus propios saberes, no necesariamente convencionales, y de sus procedimientos estables frente a una tarea matemática, y por otro lado de los procesos que siguen para monitorear y regular de forma consciente y deliberada algunos procesos frente a un problema matemático.

En México, Fuenlabrada (2005) estudió cómo los niños en edad preescolar utilizan recursos espontáneos, como la correspondencia uno a uno, para construir pautas estables de conteo, apoyadas en la memorización de una parte de la serie numérica. Estas pautas estables les permiten resolver con éxito por si solos algunos problemas donde se requiere establecer relaciones matemáticas, como relaciones de orden entre conjuntos, e incluso diversas operaciones, como la suma, mediante procesos iterativos. En este trabajo, se considera que durante este momento del aprendizaje se conforma el pensamiento recursivo. En efecto, cuando los niños suman, por ejemplo, $4 + 3$ fijan mentalmente dos sucesiones finitas de naturales: del 1 al 4 y del 1 al 3. Posteriormente cuentan de uno en uno hasta el 4 y continúan el conteo tantas veces como indica la segunda sucesión. El resultado es el último número que pronuncian: 7.

Para realizar esta suma, los niños realizan el conteo de forma oral -del 1 al 7- pero regulan la actividad con los dedos de las dos manos: en una supervisan el correcto conteo del 1 al 4 y con la otra controlan el tope del conteo mediante la presencia iterada de cada uno dedos hasta el 3. Para este caso se define pensamiento recursivo a la forma de control que tienen los niños sobre el manejo de dos sucesiones y un proceso iterativo, para establecer una relación o realizar una operación, en particular en un campo conceptual aditivo. Vergnaud (1999) afirma que los niños tienden a establecer composiciones binarias, para obtener relaciones ternarias, en las que involucran 2 elementos para establecer un tercero.

Más adelante en la secundaria, este conocimiento que les sirve durante el primer tramo de la escolaridad básica, se convierte en un obstáculo –en el sentido bachelardiano- para la introducción al álgebra, pues para ello se requiere que los estudiantes dominen estructuras en el marco de conceptual de las relaciones cuaternarias. En particular la proporción: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ que se convertirá en la función lineal $y = \frac{b}{a}x$.

Algunos estudios como el de Ursini *et al.* (2005) muestran que esto es posible mediante diversas estrategias resumidas en el modelo 3V. Una de ellas es el trabajo en torno a los procesos de generalización, o sea la obtención del enésimo término de una sucesión. Por ejemplo, en la sucesión 2, 4, 6, ... se espera que los estudiantes identifiquen que el enésimo término es el número $2n$.

Sin embargo, en la práctica los estudiantes recuperan el modelo recursivo que conocen. No establecen la relación entre la sucesión de los naturales, que les daría la posición de cada término de la sucesión, y los elementos de la sucesión, pues eso implica una relación cuaternaria:

N	S (pares)
1	2
2	4

Los estudiantes recuperan la relación ternaria del campo conceptual aditivo, y obtienen el sucesor sumando 2 al antecesor. Esto es resuelven la tarea, sin necesidad de pasar por el pensamiento general a partir de una relación funcional, que no han integrado todavía a sus esquemas conceptuales.

El tránsito del pensamiento recursivo a pensamiento general, propio del pensamiento algebraico, es un problema didáctico que todavía está a discusión (Monchón, 1998; Avalos, 2013). Pero tampoco logran establecer la generalización de un modelo recursivo. De aquí se desprende la pregunta de investigación ¿Cómo se da el tránsito de un pensamiento recursivo aditivo a un pensamiento algebraico?

2 Metodología

La metodología se basa en un control a priori de las situaciones, para identificar los valores de las variables didácticas que producen un determinado conocimiento en el alumno (contrato

didáctico, devolución de la situación a-didáctica, estatus de herramienta y estatus de objeto de estudio, cuadros de funcionamiento de un mismo concepto ...).

El alumno aprende adaptándose a un medio que es productor de contradicción, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. El maestro tiene que provocar en el alumno las adaptaciones deseadas, gracias a una elección prudente de los “problemas” que él propone, y que permitirán hacer evolucionar los conocimientos previstos y las estrategias no convencionales del alumno.

El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir el nuevo conocimiento, pero debe también saber que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin invocar razones didácticas. El maestro busca devolver esa situación para que el alumno actúe lo más independientemente posible.

Existen formas de conocimientos en cada una de las situaciones:

1. Representaciones o teoremas en acto que rigen las decisiones del sujeto (Formas de control)
2. Formulación de las descripciones y los modelos mediante códigos diferentes.
3. Formas de controlar la validez de sus declaraciones, en función de lo que es reconocido por el entorno.
4. Formas institucionalizadas de presentar el conocimiento.

3 Resultados: en cuanto a la secuencia

Cuando se presenta a los alumnos algunos problemas para su resolución sin indicarles los algoritmos a utilizar, generalmente recurren a estrategias de tipo aritmético, a tablas en las que van obteniendo resultados para el caso 1, el caso 2, y así sucesivamente hasta que consideran que llegan al resultado pedido. Ellos afirman que con el uso de esa estrategia “controlan” los datos del problema.

Veamos un ejemplo. “Un señor de 45 años tiene un hijo de 7 ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple de la edad del hijo?” Los alumnos hacen la siguiente tabla:

Edad del padre	Edad del hijo
45	7
46	8
47	9
48	10

y así sucesivamente hasta encontrar los dos números que satisfagan la condición dada y por lo tanto obtener el resultado pedido.

La apuesta desde la ingeniería consistió en que los alumnos tomaran consciencia de su propia estrategia, para convertirla en fuente de metacognición. Por tal motivo se propuso que completaran sucesiones de progresión aritmética, como las que se muestran a continuación que les permitiera verbalizar el procedimiento aditivo.

2, 4, 6, , 10, , ,
5, 10, , , 25, 30, ,
1, 3, 9, , 81, , 729, ,

Avalos (2013) afirma que en primer lugar, los adolescentes requieren tomar consciencia de sus procedimientos, y encontrar el componente de generalidad que conllevan, de tal suerte que

en el caso de la sucesión de los pares, el proceso se rige mediante la igualdad $S_n = S_{n-1} + 2$, para $n_0 = 2$, para todo $n \in N$

Llevar a los estudiantes a encontrar una expresión de este tipo supone, en primer término que tomen conciencia del procedimiento recursivo, y en segundo lugar, que se percaten que la iteración puede llevarse a cabo un número “n” de veces.

Los alumnos llegaron a la conclusión de que para obtener el número siguiente de la serie, al número anterior había que hacerle algo –sumarle, multiplicarle, o multiplicarle y sumarle algún valor que podía ser constante, e incluso variable. Se procuró que en un principio utilizaran su propia notación para expresarlo, y poco a poco se les sugirió el uso de notación algebraica. Lo que se obtuvo al final son funciones recursivas, es decir expresiones que indican la manera como se obtiene el valor en una serie a partir del valor anterior.

Para la primera serie del ejemplo anterior, la función recursiva fue la siguiente:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n + 2 \end{cases} \quad \text{Fórmula recursiva para la sucesión de números pares}$$

Se propuso también algunas fórmulas recursivas para generar sucesiones como la siguiente:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + (2n + 1) \end{cases} \quad \text{Fórmula recursiva para la serie de números cuadrados}$$

En algunos casos se propusieron problemas para que los modelaran y obtuvieran la fórmula recursiva, como los siguientes:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2 + N}{2x_n} \end{cases} \quad \text{Método babilónico para el cálculo de la raíz cuadrada de un número}$$

$$\begin{cases} C_0 = N \\ C_{n+1} = (1 + i)C_n \end{cases} \quad \text{Interés compuesto de un capital inicial } N \text{ al cabo de } n \text{ tiempo con un interés } i$$

4 Resultados: en cuanto a la construcción de un pensamiento algebraico

La idea central es un abordaje de la variación funcional mediante la construcción de tablas como las siguientes:

1	5
2	6
3	7
4	
5	

1	3
2	6
3	9
4	
5	

Las funciones recursivas permiten introducir la idea de que cada término tiene una posición con respecto a la serie numérica, de tal suerte que podemos tener un primer término, un segundo, y así sucesivamente hasta un enésimo.

Se busca que los alumnos encuentren la razón interna para encontrar el coeficiente lineal.

1	4
2	8
3	12
...	
n	$4n$

Poco a poco es posible introducir la idea que los números de la primer columna pueden tomar valores reales, y con ello introducir la idea de variable y de variación funcional.

x	$y = 2x$
-1	-2
0	0
1	
2	$2n$

5 Resultados: en cuanto a la importancia del desarrollo del pensamiento recursivo

Una de las conclusiones que se obtuvieron en el estudio es que, si bien es cierto que el desarrollo del pensamiento algebraico es central en el desarrollo de las competencias en la escuela secundaria, no es menos importante el desarrollo del pensamiento recursivo. En efecto, un aspecto en la construcción matemática del álgebra es considerar que los métodos recursivos son fundamentales para el análisis de problemas relacionados con los algoritmos.

Martín et al. (2010) definen la recursividad matemática de la siguiente manera:

Definición 1. Un conjunto en el que se especifican algunos de sus elementos y que el resto de elementos se definen a partir de los conocidos se dice que es un conjunto definido recursivamente. En particular, una sucesión está definida recursivamente si:

1. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se conocen los valores $S_1; \dots; S_{n_0}$.
2. Para $n > n_0$ el término S_n está definido en términos de $S_1; \dots; S_{n-1}$; $S_n = f(S_1; \dots; S_{n-1})$.

Observación.

Los valores $S_1; \dots; S_{n_0}$ se denominan condiciones iniciales y a la función que describe a S_n en términos de sus predecesores se llama relación de recurrencia, o ecuación en diferencias, para S_n .

La notación entonces para una función recursiva deberá tomar en cuenta dos partes:

1. Las condiciones iniciales de la sucesión, y el conjunto numérico del que se toman los valores de n y de S_n
2. La relación de recurrencia, que es la función que describe el comportamiento de S_n , o sea

$$S_n = f(S_1; \dots; S_{n-1})$$

En otras áreas como la informática, el acento se pone también en las características de la iteración.

6 Resultados: en cuanto a una propuesta de enseñanza

La mayoría de los profesores de matemáticas de secundaria considera que el estudio del Álgebra parte de la habilidad del alumno para traducir el lenguaje común al lenguaje algebraico. Según ellos, esta habilidad de “traducción” permitiría a los alumnos plantear modelos algebraicos para la resolución de problemas diversos. Por ejemplo, si decimos que la edad de un padre es tres veces la de su hijo, se esperaría que el alumno represente la edad del padre y la de su hijo con una literal, digamos x y y respectivamente, y la relación como una igualdad $x = 3y$.

Para poder resolver esta ecuación, los alumnos deberán haber resuelto problemas que involucren la “operacionalización” de la variable (Filloy y Rojano 1987), aspecto que requiere otro tipo de trabajo matemático.

Referencias

- [1] ALARCÓN, Jesús (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria* México, Dirección General de materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. S.E.P.
- [2] AVALOS, Alejandra (1994). “Funciones recursivas y variación funcional” *Memorias del XXV Congreso Nacional de la ANPM*. México: ANPM.
- [3] BROWN, A. L. (1987). *Metacognition, executive control, self regulation and other more mysterious mechanisms*. En Weinert y R. H. Kluwe (comp.), *Metacognition, Motivation and Understanding*. Hillsdale, NJ: Erlbaum
- [4] FILLOY, Eugenio y Teresa ROJANO (1987)., *Procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra*. México: CINVESTAV-Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas.
- [5] FUENLABRADA, Irma (2005) “ Los problemas, recurso metodológico en el que los números y sus relaciones encuentran significado”. En Guerrero, Adela e Ismael Vidales (Coord.) *Aprender a enseñar Matemáticas..* Nuevo León: Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Nuevo León.
- [6] MONCHON, Simón (1998). “La importancia de la recursividad en las matemáticas a nivel elemental”. *Educación Matemática 10*, 2. Agosto de 1998. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- [7] VERGNAUD, Gérard (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.
- [8] WERTSCH, J. V. (1988) *ygotzky y la formación social de la mente..*Ed. Barcelona: Paidós.
- [9] MENDEZ, A. , MARTIN, E., ORTIZ, C. y J. SENDRA (2011). *Matemática discreta. Tema 4. Relaciones de recurrencia..* Madrid: Universidad Politécnica.
- [10] URSINI, Sonia, Fortino ESCAREÑO, Delia MONTES y María TRIGUEROS (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa..* México: Trillas.

El uso de redes de aprendizaje en el estudio del cálculo

Claudia Flores Estrada

claudia.mo@gmail.com

CECyT 5

Adriana Gómez Reyes

orodelsilencio@yahoo.com.mx

CECyT 13 | CCH Sur

Resumen

El presente trabajo tiene como finalidad documentar la construcción de conocimientos a partir de una Red de Aprendizaje en Cálculo Diferencial, específicamente en la comprensión del concepto de cambio, en diferentes representaciones. Se trabajó con profesores y estudiantes del Instituto Politécnico Nacional (IPN) del nivel medio superior. La aplicación de la red de aprendizaje desde la perspectiva de un docente que no diseñó la red de aprendizaje a estudiantes del nivel medio superior.

1 Introducción

La matemática es un saber articulado, en una cultura para enfrentar la resolución de problemas diversos. El currículo está conceptualizado como un plan operativo que detalla lo que los estudiantes deben aprender, pero al mismo tiempo aquello que los profesores deben realizar para enseñar y así desarrollar una serie de competencias en el estudiante.

Por otro lado, [5] mencionan que este Currículo Potencialmente Aplicado (CPA) puede comprender materiales como el uso de los paquetes didácticos, es por ello que se considera la elaboración de material que incluya redes de aprendizaje que permitan el logro de competencias requeridas en el programa, dando además la posibilidad de ajustarlo de acuerdo al gusto del profesor y a las decisiones que vaya tomando conforme a las observaciones hechas en el grupo.

Las redes de aprendizaje consisten en una serie de actividades de aprendizaje articuladas como: problemas, ejercicios, lecturas y otros que al integrarse, se complementan en el logro de cierto aprendizaje [1].

2 Planteamiento del problema

Como parte del proyecto de investigación “El currículo potencialmente aplicado en el área de matemáticas”, registrado ante el IPN con número de registro SIP 20140485 se construyeron varias Redes de Aprendizaje para el presente trabajo se considera la red de aprendizaje de cálculo diferencial, a partir de las experiencias discutidas en un seminario de videoconferencias que tiene como objetivo acercar las investigaciones en Matemática Educativa y el trabajo en el aula.



Figura 1: Red de Actividades de Cálculo. Elaboración propia.

Dicho seminario se llama Seminario Repensar las Matemáticas (SRM) y todas las sesiones previas se pueden consultar en la siguiente dirección: <https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/>. Como producto de este proyecto se obtuvo un libro paquete de Redes de Aprendizaje, para Cálculo y para Probabilidad y Estadística [2].

En este presente trabajo se toma como punto de partida la planeación de las Redes de Aprendizaje como una estrategia didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje para la construcción de competencias matemáticas. La Red de Aprendizaje (RA) que se presenta, está vinculada desde perspectivas diferentes a la tradicional y da la posibilidad de articularse de varias maneras según los gustos y necesidades de grupo y del profesor.

La Red presentada en este trabajo se considera para utilizarse como parte de la introducción del programa de Cálculo Diferencial, y tiene como objetivo la comprensión del concepto de función y variación. ésta RA está constituida por un problema recreativo, una videoconferencia del SRM, y dos problemas en un contexto de movimiento como se puede ver en la figura 1.

En el presente trabajo se reporta la aplicación de la RA se ha hecho en el taller “Análisis e implementación de materiales didácticos transversales” con la participación de 5 profesores de diferentes CECyT's y de diversas áreas (Matemáticas, Física e Inglés) en la sesión correspondiente a matemáticas con una duración de 5 horas del Nivel Medio Superior del IPN. Cabe mencionar que el taller tiene una duración de 30 horas. Con esta aplicación se pretende tener evidencia de cómo funciona la red de aprendizaje en la práctica, antes de aplicarla con grupos completos.

En la tabla 1 se muestran las características de la red de aprendizaje de Cálculo que tiene como intención hacer una introducción al cálculo y la forma de trabajo de una red al considerar conocimientos previos necesarios como la variable y la función.

Cada Actividad de Aprendizaje tiene una finalidad en la que permite al discente no sólo trabajar de forma colaborativa sino conocer y aplicar estrategias para su aprendizaje. Al conjuntar diferentes actividades que conforman la red como se puede ver en la tabla 1 y así fortalecer estos aprendizajes, y para generar éste análisis de la red de aprendizaje.

Como muestra de las actividades utilizadas se muestra la actividad de aprendizaje correspondiente al Viaje en bicicleta.

Tiempo	Problemas	Problema con guía	Actividades en internet	Lecturas	Otros
5 h	Las latas de refresco Caperucita, 2 h	El viaje en bicicleta, 2 h			Videoconferencia, 1 h
Orden	1. Las latas de refresco 2. Presentación de Red de actividades 3. Caperucita 4. El viaje en bicicleta 5. Videoconferencia de la sesión S33 del SRM				
Temática	Variable y función				
Competencias	• Trabajo en equipo • Autonomía • Se expresa y comunica				
Representaciones	Algebraica, gráfica, tabular y textual				
Tecnología	Software graficador (Geogebra)				
Producto integrador	Reporte de trabajo en equipo				

Cuadro 1: Red de Aprendizaje de Cálculo. Elaboración propia

Actividad de aprendizaje: El viaje en bicicleta

Andrés sale con sus amigos a pasear en su bicicleta, por lo que recorren aproximadamente 1 km de camino plano hasta llegar a una colina que tiene una altura de 30 m, después de subir la colina y bajar del lado opuesto deciden regresar para llegar a tiempo de ver su programa favorito a su casa, justo una hora después de que salieron.

1. Bosqueja el camino recorrido por Andrés.
2. Haz una gráfica de la distancia recorrida contra el tiempo. Observa las gráficas elaboradas por tus compañeros, ¿Qué tienen en común las gráficas? ¿Qué diferencias tienen?
3. Elabora una gráfica que represente la distancia a la que se encuentran de su casa en cada momento. ¿Cuál es la diferencia con respecto a las gráficas del punto anterior? ¿Puede ser la misma?
4. ¿Cuáles son las variables de este problema? ¿Qué valores puede tomar? ¿Cuál depende de cuál?
5. ¿En qué momento van más rápido? ¿En qué momento van más despacio?
6. Haz una gráfica de la velocidad que llevan a cada momento.

Vale la pena mencionar que este problema es de los que llamamos guiados por que tiene una serie de preguntas que guían la actividad de los estudiantes.

Estas actividades se resolvieron en equipos pequeños (tres o cuatro participantes) por parte de los profesores y de forma individual por parte de los estudiantes, y se entregó un reporte escrito de la resolución dónde se solicitó además que explicaran el proceso que siguieron y el modelo PER [4]. Los profesores por el tiempo no lograron expresar lo relacionado al modelo PER (Propósito, Estrategia y Resultado). Alguno de estudiantes logran mencionarlo al contrastarlo con los otros estudiantes.

3 Resultados

Para analizar la información se utilizaron algunos instrumentos alternativos de evaluación [3], en la tabla 3 se muestra la Matriz de Resultados correspondiente al problema de Viaje en bicicleta. Nótese como la comparación entre las respuestas esperadas y las respuestas obtenidas permiten observar que tan cerca está el trabajo realizado por los participantes y lo que los diseñadores de la actividad esperan.

Como modificación a la Matriz de Resultados propuesta en la bibliografía, en la misma tabla 3 se presentan por separado los resultados obtenidos por los profesores (PB) y los obtenidos por los estudiantes (E).

Considerando la importancia de la aplicación a estudiantes de la red, una de los profesores que tomó el taller antes mencionado trabajó con 3 estudiantes del CECyT 7 Cuauhtémoc del IPN. Después de esta aplicación la profesora hizo las siguientes recomendaciones:

- Las actividades que conforman la red de aprendizaje de Cálculo buscan relacionar los conocimientos previos con los nuevos no solo los de matemáticas sino de física para ello es necesario que el estudiante sepa graficar y realizar una serie de operaciones así como manejo de procesos cognitivos como: interpretar, identificar, razonar, etc.
- Las actividades de la red de aprendizaje están vinculadas desde perspectivas diferentes a la tradicional, donde pasa de una representación matemática a otra y da la posibilidad de trabajar de forma autónoma o en equipo.
- La lectura y la videoconferencia de la sesión 33 del SRM al estudiante le queda más claro de el porque las actividades están vinculada para la construcción del conocimiento matemático y el trabajo en equipo.

4 Conclusiones

La red de actividades de aprendizaje permite al docente tener material didáctico y al estudiante adquirir un método de trabajo que puedan vincular y pasar de una representación a otra, el uso de la tecnología, es decir un método de trabajo que les permita organizarse y sistematizar el proceso.

Tener un material didáctico desarrollado para unir el Curriculum Institucional con el Curriculum Logrado, apoya al profesor en su labor, pero tenerlo organizado en redes permite que los diferentes aprendizajes se vayan ligando y organizando de manera que su aprendizaje sea más fácil y eficiente al apoyarse en otros conocimientos relacionados y al cobrar significado con el contexto del estudiante, sin importar si se basa en situaciones reales o imaginarias.

En la tabla 3 Matriz de resultados los participantes logran expresar conocimientos, habilidades y actitudes necesarios para la resolución de la red de aprendizaje.

En cuanto a las competencias matemáticas en específico se puede observar en la matriz de resultados (tabla 3) que los participantes logran:

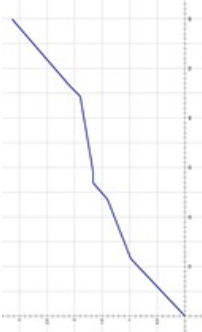
- Llegar a la solución a través de las preguntas elaboradas de la actividad “Un viaje en bicicleta”.
- Construyen representaciones matemáticas mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, variacionales y gráficos.
- Explican e interpretan los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y lo contrastan con los demás equipos y con el realizado con la herramienta tecnológica.

El crear herramientas para los docentes que permitan cumplir las metas que les marca el plan de estudios es algo sumamente importante pero también es algo complicado debido a los múltiples factores que intervienen al buscar que un grupo de alumnos desarrollen las competencias requeridas por el curriculum oficial.

Llama la atención que los resultados obtenidos por estudiantes y por los profesores son similares. También destaca el hecho de que las competencias de comunicación son las que más se dificultan.

Agradecimientos

El desarrollo es posible gracias al apoyo recibido por la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) del Instituto Politécnico Nacional asignado al proyecto 20152076 *Evaluación del aprendizaje logrado con actividades del currículo potencialmente aplicado en el área de matemáticas.*

Pregunta	Respuesta esperada	Respuesta obtenida Profesor	Respuesta obtenida Estudiante	Observaciones
Bosqueja el camino recorrido por Andrés		PB: Realizan el bosquejo solicitado	E1 y E3: Considera la trayectoria plana del camino y dibujan la colina más que su trayectoria E2: Considera la trayectoria plana del camino y dibujan la colina más que su trayectoria nombrándole camino 1, 2 y 3	Pedir un esbozo es muy abierto así que pueden darse por valido el dibujo de la colina
Haz una gráfica de la distancia recorrida contra el tiempo. Observa las gráficas elaboradas por tus compañeros. ¿Qué tienen en común las gráficas? ¿Qué diferencias tienen?		PB: Realizan un acercamiento a la gráfica solicitada	E1: Considera la gráfica como debe de ser lineal al avanzar el km y la inclinación o subida y bajada de la colina E2: Considera la gráfica en camino 1 lineal, en el camino 2 recta pero con una inclinación diferente a la del camino 1 en el camino 3 una curva	Los estudiantes tienen tan buen desempeño como los profesores

Elabora una gráfica que represente la distancia a la que se encuentran de su casa en cada momento. ¿Cuál es la diferencia con respecto a las gráficas del punto anterior? ¿Puede ser la misma?		PB: Sólo esbozan la casa y el camino recto	E1: Sólo realiza la gráfica aunque no sea la esperada E2: Realiza la gráfica de tiempo vs. distancia e iniciando con el camino 3. No logra visualizar quien es la variable independiente y dependiente	Logran visualizar las variables dificultándose a diferenciar que la distancia recorrida por el ciclista es distinta a la distancia en que se encuentra la casa en el esbozo de la gráfica

¿Cuáles son las variables de este problema? ¿Qué valores puede tomar? ¿Cuál depende de cuál?	En la discusión con los diferentes equipos se puede tratar las diferentes respuestas que se pueden tener a partir de las decisiones que se tomaron en cada equipo	PB: Considera distancia y tiempo, y que la velocidad depende del tiempo y la distancia	E1, E2 y E3: Consideran distancia y tiempo, y que la velocidad depende del tiempo y la distancia	No son explícitos para diferenciar de la velocidad y longitud cuando es cuesta arriba y cuando es cuesta abajo
¿En qué momento van más rápido? ¿En qué momento van más despacio?		PB: Al inicio y al final cuando va saliendo	E1, E2 y E3: Es más rápido cuando baja de la colina. Más despacio cuando sube la colina de regreso	Los estudiantes son más explícitos en sus notas
Haz una gráfica de la velocidad que llevan a cada momento	 * Aun cuando debe considerarse cuando son más bien curvas y no esquinas	PB: No consideran la inclinación de la colina	E1: Las gráficas de la velocidad son las mismas que la de distancia vs tiempo E2: Da un acercamiento a la gráfica esperada	Se obtiene las gráficas a partir de las decisiones de los profesores y estudiantes

Cuadro 3: Matrix de resultados. Un viaje en bicicleta.

Referencias

- [1] Flores, C. (2014). Red de actividades de aprendizaje: relación que hay entre una función y sus funciones derivadas en una situación de modelación. En G. Buendía y F.J. Lezama (2014). Investigación en Matemática Educativa: una forma de conocer la escuela (95-126). México: Lectorum.
- [2] Flores, C.; Torres, J.L.; Gutiérrez, N.; Gómez, A., Huerta, J.J. y Ruiz, B.R. (2014). Redes de aprendizaje. IPN. México.
- [3] Flores, H. y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. Educación Matemática. Vol. 21, no.2, págs. 117-142.
- [4] IPN (2004). álgebra. Libro para el estudiante. IPN. México.
- [5] Suárez, L.; Torres, J.L.; Ortega, P. (2012). Las matemáticas del bachillerato en el instituto politécnico nacional. En C. Dolores. (Ed.) ¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato? México: Plaza y Valdés.

Impacto de tecnologías de información en la aprehensión conceptual de las operaciones con funciones

María Isabel Kanagúsico Muñoz **Yesenia Carolina Montes López**
isabelkanagusico@hotmail.com moly.9009@gmail.com

Patricia del Socorro Narro Ramírez
patti_narro@hotmail.com

Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen

Este reporte pretende mostrar una visión de las dificultades que enfrentan los estudiantes en relación a la aprehensión conceptual de las operaciones con funciones y los resultados obtenidos al implementar una secuencia didáctica que mediante el apoyo de herramientas de cómputo y múltiples representaciones posibilita el logro del aprendizaje significativo.

1 Introducción

El aprendizaje de las Matemáticas se ha caracterizado por la memorización de fórmulas y reglas que el estudiante repite sin que tengan un significado para él, en consecuencia, no consigue la aprehensión conceptual ni la aplicación a la resolución de problemas.

Este tipo de enseñanza ocasiona apatía y rechazo hacia el aprendizaje de la disciplina y en consecuencia altos índices de reprobación y deserción. Por tal motivo es indispensable la búsqueda de alternativas para solucionar la problemática descrita.

La educación matemática debe orientarse al desarrollo de habilidades para el aprendizaje conceptual, lo que permitirá que el estudiante sea capaz de tomar decisiones respecto a dónde aplicarlos y bajo qué condiciones, además de interpretar el significado de los resultados.

En este sentido el uso de nuevas tecnologías como herramientas de apoyo en el proceso de aprendizaje puede contribuir a solucionar la problemática descrita al crear ambientes que favorecen la participación de los estudiantes en la construcción y comprensión del conocimiento.

2 Fundamentación

El problema de investigación abordado se centra en el reconocimiento de las operaciones con funciones en diferentes registros de representación, el tránsito entre los mismos y la influencia de nuevas tecnologías en este proceso. En esta dirección, las siguientes definiciones son pertinentes:

Definición 2.1

Dadas dos funciones f y g :

- (i) Su suma, denotada por $f + g$, es la función definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- (ii) Su diferencia, denotada por $f - g$, es la función definida por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- (iii) Su producto, denotado por $f \cdot g$, es la función definida por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- (iv) Su cociente, denotado por f/g , es la función definida por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

En cada caso, el dominio de la función resultante consta de aquellos valores de x comunes a los valores de f y g , con el requerimiento adicional en el caso iv de que se excluyan los valores de x para los cuales $g(x) = 0$

En la investigación se utilizaron dos ideas centrales: Teoría de las representaciones, uso TICs.

El uso de representaciones distintas desempeña un papel importante en la comprensión de ideas matemáticas, según lo afirman Janvier, 1987; Kaput, 1987 y 1991; Taghard, 1991; Duval, 1993, 1995 y 1999 entre otros. Por ejemplo: Hitt (1992) considera que

“un conocimiento asociado a un concepto es estable en un alumno, si el puede reconocer este concepto en sus diferentes representaciones.”

Además, Hitt (1997) citado por Ríos (2003 p.32) señala que:

“El conocimiento de un concepto es estable en un alumno, si éste es capaz de articular sin contradicciones diferentes representaciones del mismo, así como de recurrir a ellas en forma espontánea durante la resolución de problemas.”

En relación con las Teorías de representación, se utilizó el trabajo de Duval R. “Semiosis y Pensamiento Humano” (1999), en lo que se refiere al uso de representaciones múltiples para posibilitar el aprendizaje de un concepto.

A continuación se dan algunas definiciones útiles:

Definición 2.2

Semiosis es la aprehensión o producción de una representación semiótica.

Definición 2.3

Noesis. Es la aprehensión conceptual de un objeto.

Definición 2.4

El *tratamiento* de una representación es la transformación de ésta en el registro mismo donde ha sido formada.

Definición 2.5

La *conversión* de una representación es la transformación a otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial.

La incorporación de nuevas tecnologías al proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas permite realizar actividades rápidamente, por ende dedicar mayor tiempo a la comprensión y desarrollo de conceptos y a la resolución de problemas.

El beneficio estriba directamente, en los procesos cognitivos que se generan en los estudiantes, ya que que posibilitan el uso de representaciones múltiples de un concepto, de manera dinámica, permitiendo el tratamiento simultáneo entre ellas, la exploración de cada una y durante la articulación, descubrir o corroborar comportamientos.

En esta dirección, (Moreno, L y Rojano, T. 1999, Santos, M. y Benítez, D., 2000) coinciden en señalar que el apoyo de nuevas tecnologías en el aula ofrece potencial para comprometer a los estudiantes en la discusión de ideas matemáticas significativas. Hitt F. (1994) señala que la computadora además de proveer la visualización, propicia la autoevaluación.

3 Desarrollo

Objetivo general.

Identificar las dificultades que enfrentan los estudiantes en relación a las operaciones con funciones y desarrollar una secuencia didáctica que con apoyo de Tecnologías de Información posibilite la superación de tales dificultades al propiciar la construcción de los conceptos mencionados.

El estudio se abordó con un enfoque cualitativo, a fin de documentar las dificultades enfrentadas por los estudiantes y los criterios a considerar en la elaboración de la secuencia didáctica.

El grupo de estudio consistió en estudiantes de Ingeniería, inscritos en un curso de Cálculo Diferencial en la Facultad de Sistemas de la U. A. de C.

Actividades implementadas:

- Se realizó un diagnóstico del desempeño de los estudiantes en el tema de estudio.
- Se diseñaron cuatro prácticas para que los estudiantes las realizaran con apoyo del software Geogebra; el propósito de las prácticas fue estudiar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de funciones.
- Se eligió un grupo para aplicar la secuencia didáctica y se les capacitó en el uso del software mencionado.
- Para evaluar el impacto de la metodología de aprendizaje, se proporcionaron ejercicios que los estudiantes resolvieron trabajando en equipo y sin apoyo de TICs.

4 Resultados

Los resultados del diagnóstico indican que los estudiantes enfrentaron dificultades debidas a la carencia o confusión de conceptos.

Ejemplo:

IV $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ $g(x) = (x-2)^2$

a) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{(x-2)^2}{2 + \sqrt{x}} = \frac{x^2 - 4}{2 + \sqrt{x}}$ Dom: $[-\infty, 4]$

$\frac{x-2^2}{2+\sqrt{x}} = \frac{x-2}{2+x}$

$2 + \sqrt{x} \geq 0$
 $\sqrt{x} \geq -2$
 $x \geq (-2)^2$
 $x \geq 4$

Comp
 $x = 4$



Juan indica correctamente la operación, sin embargo, en la simplificación y el establecimiento del dominio, comete errores conceptuales.

- El cuadrado de un binomio lo realiza elevando al cuadrado cada término y conservando el signo entre los dos términos.
- Considera que el denominador de una función racional es cero o un número positivo
- No se percata que $x \geq 4$ implica que 4 es el número menor del intervalo, él considera que es el número mayor.

Otro ejemplo es el caso de Josué

IV. $f(x) = 2 + \sqrt{x}$; $g(x) = (x-2)^2$

$\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{(x-2)^2}{2 + \sqrt{x}}$ D: $\mathbb{R}$ ✓

El manuscrito muestra que el estudiante ignora aspectos como que el denominador contiene un radical de índice par por lo cual el radicando en este caso debe ser cero o positivo.

Veamos el manuscrito reportado por Tania

IV $f(x) = x$ $g(x) = \sqrt{x-1}$

a) $(g-f)(x) = \sqrt{x-1} - x$
 Dom: $\mathbb{R} + \neq 1$ ✗

b) $\frac{g}{f}(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ ✓
 Dom: $\mathbb{R} + \text{X}$

Al establecer el dominio, la estudiante no se percató que el conjunto $\mathbb{R}^+$ incluye los números $0 < x < 1$ para los cuales la función $g(x)$ no está definida.

Ahora veamos el manuscrito de Arturo

IV.
 $f(x) = \frac{1}{x+2}$ $g(x) = x$

a) $(g-f)(x)$

$$(g-f)(x) = \frac{x}{1} - \frac{1}{x+2}$$

$$(g-f)(x) = \frac{x(x+2) - 1}{x+2}$$

$$(g-f)(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+2}$$

Dominio:

- Numerador $\rightarrow \mathbb{R}$
- Denominador $\rightarrow x+2=0$
 $x = -2$
 $\boxed{x \neq -2}$
 $(-2, \infty)$

b) $(\frac{g}{f})(x) =$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x}{\frac{1}{x+2}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x(x+2)}{1}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x^2 + 2x}{1}$$

Dominio = $\mathbb{R}$.

Aun cuando las operaciones para establecer el dominio de la función diferencia conducen al estudiante a una respuesta correcta, la representación de ésta en notación de intervalos es incorrecta.

En el caso de la función cociente, el estudiante sólo toma en cuenta la función resultante y no se percató que para realizar la operación es necesario que la función $f(x)$ exista, por lo cual el dominio consiste en los valores de x diferentes a -2

En el reporte de Luis, mostrado a continuación, se observa que, además del error en el establecimiento del dominio hay un error conceptual en la simplificación.

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$g(x) = x$$

ii) $(g-f)(x)$

$$x - \frac{1}{x+2} = \frac{x(x+2) - 1}{x+2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+2}$$

Dominio: $x \in \mathbb{R}$
 $x \in \mathbb{R} \neq -2$

Otro ejemplo es el caso de Raúl

$$I = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$a) (f+g)(x) = \frac{x^2+1}{x^2} + \sqrt{x} = \frac{x^2+1+x^2(x^{1/2})}{x^2}$$

$$(f+g)(x) = \frac{x^2+1+x}{x^2} = \frac{x^2+x+1}{x^2}$$

$$\text{Dominio} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

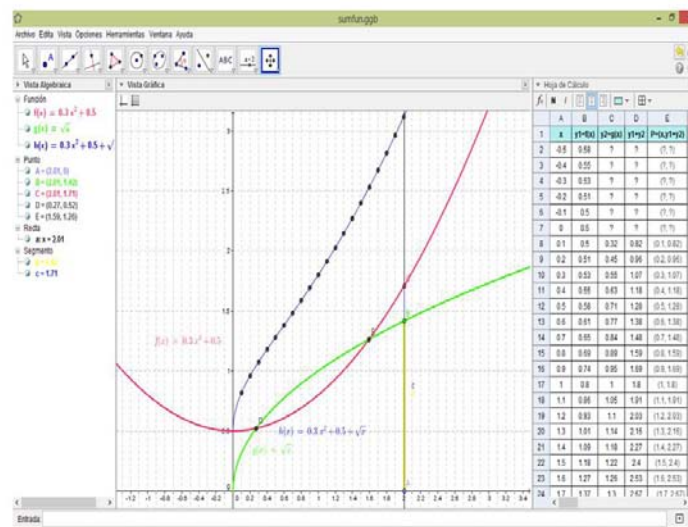
En este caso el estudiante desconoce las leyes de los exponentes y en relación al dominio, sólo considera la función suma y no se percató que para realizar la operación, la función $g(x)$ no existe en el dominio reportado.

Implementación de la secuencia didáctica.

Las prácticas se realizaron una vez que los estudiantes se capacitaron en el uso del software. Se efectuaron en parejas. La revisión se hizo en sesión y consistió en la socialización de resultados, a fin de que los estudiantes logaran la construcción de conceptos. La formalización de éstos estuvo a cargo del maestro.

Ejemplo:

La representación simultánea de los registros algebraico, numérico y geométrico favorece el establecimiento de patrones al permitir desplazamientos de las figuras y su efecto en la representación numérica, con lo cual se facilita la comprensión del concepto como se observa en los reportes de los estudiantes.



A continuación se muestra el manuscrito reportado por Ivone

1. Elija las funciones $y_1 = f(x)$ $0.3x^2 + 0.5$ y $y_2 = g(x)$ $\sqrt{x}$
2. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)$? $\mathbb{R}$
3. ¿Cuál es el dominio de la función $g(x)$? $[0, \infty)$
4. Utilice la hoja de cálculo del archivo para completar la siguiente tabla hasta la columna $P=(x, y_1+y_2)$

x	$y_1=f(x)$	$y_2=g(x)$	y_1+y_2	$P=(x, y_1+y_2)$	$Q=(x, y_1-y_2)$
-0.5	0.58	?	?	(?, ?)	(?, ?)
-0.4	0.55	?	?	(?, ?)	(?, ?)
-0.3	0.53	?	?	(?, ?)	(?, ?)
-0.2	0.51	?	?	(?, ?)	(?, ?)
-0.1	0.5	?	?	(?, ?)	(?, ?)
0	0.5	?	?	(?, ?)	(?, ?)
0.1	0.5	0.32	0.82	(0.1, 0.82)	0.1, 0.19
0.2	0.51	0.45	0.96	(0.2, 0.96)	0.2, 0.06
0.3	0.53	0.5	1.03	(0.3, 1.03)	0.3, -0.02
0.4	0.55	0.63	1.18	(0.4, 1.18)	0.4, -0.08
0.5	0.58	0.71	1.28	(0.5, 1.28)	0.5, -0.13
0.6	0.61	0.77	1.38	(0.6, 1.38)	0.6, -0.17
0.7	0.65	0.84	1.48	(0.7, 1.48)	0.7, -0.19
0.8	0.69	0.89	1.59	(0.8, 1.59)	0.8, -0.2
0.9	0.74	0.95	1.69	(0.9, 1.69)	0.9, -0.21
1	0.8	1	1.8	(1, 1.8)	1, -0.2
1.1	0.86	1.05	1.91	(1.1, 1.91)	1.1, -0.19
1.2	0.93	1.1	2.03	(1.2, 2.03)	1.2, -0.16
1.3	1.01	1.14	2.15	(1.3, 2.15)	1.3, -0.13
1.4	1.09	1.18	2.27	(1.4, 2.27)	1.4, -0.1
1.5	1.18	1.22	2.4	(1.5, 2.4)	1.5, -0.05
1.6	1.27	1.25	2.53	(1.6, 2.53)	1.6, 0
1.7	1.37			(1.7, 2.67)	1.7, 0.06
1.8	1.47	1.34		(1.8, 2.81)	1.8, 0.13
1.9	1.58	1.38	2.96	(1.9, 2.96)	1.9, 0.2
2	1.7	1.41	3.11	(2, 3.11)	2, 0.29

5. Observe la información de la tabla y la vista gráfica, úselas para contestar las siguientes preguntas. (sugerencia, deslice el punto A al valor de x mostrado en la tabla)

a) ¿Qué representa la longitud del segmento $b = AB$? La g evaluada en 0.6 en este caso $g(x)$, $g(0.6)$
Representa la función g evaluada en cualquier valor de x

b) ¿A qué corresponde la longitud del segmento $c=AC$? Representa $f(x)$

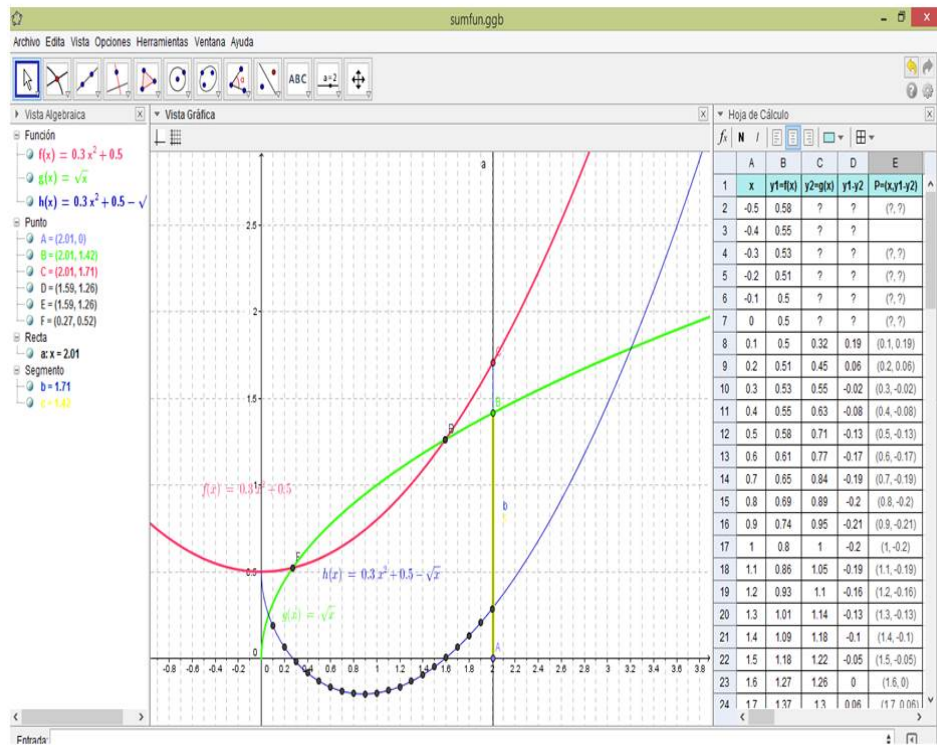
Ahora veamos el trabajo de César

6. Introduzca una función $y_3 = h(x) = f(x) + g(x) =$ $h(x) = 0.3x^2 + 0.5 + \sqrt{x}$
7. Utilice la vista gráfica y anote sus observaciones Al sumar las funciones $y_1 + y_2$ se vio como la nueva función se desplaza hacia arriba al tomar los nuevos valores.
8. ¿Cuál es el dominio de la función $h(x)$? DC: $[0, \infty)$
9. Complete la tabla

Función	Dominio
$f(x) = 0.3x^2 + 0.5$	$\mathbb{R}$
$g(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$h(x) = 0.3x^2 + 0.5 + \sqrt{x}$	DC: $[0, \infty)$

10. Compare los dominios de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. ¿Cómo se relaciona el dominio de $h(x)$ con los dominios de $f(x)$ y $g(x)$? Tienen en común su dominio ya que son la suma de $f(x)$ y $g(x)$
11. Establezca una conjetura sobre cómo puede obtener la gráfica de una función $h(x) = f(x) + g(x)$ si conoce las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. Como ya conocemos los puntos $f(x)$ y $g(x)$ solamente sumamos los puntos dados y nos da la nueva gráfica de $h(x)$
12. Repita las actividades para $f(x) = |x|$ y $g(x) = \ln|0.15x|$
13. ¿Existe alguna diferencia con el caso anterior, cuando una de las funciones es negativa? Si, el valor negativo de $g(x)$.
14. Si su respuesta fue afirmativa describa la diferencia
15. ¿es válida la conjetura establecida en el inciso 11? Si se cumple
16. ¿Persiste la relación entre el dominio de la función $h(x)$ y los dominios de $f(x)$ y $g(x)$? Si
17. Establezca una fórmula para la suma de funciones $f(x) + g(x) = h(x)$
18. ¿Es válida para más de dos funciones? Si
19. ¿Por qué? porque al ser una suma de funciones solo se le van agregando al resultado los nuevos valores dados.

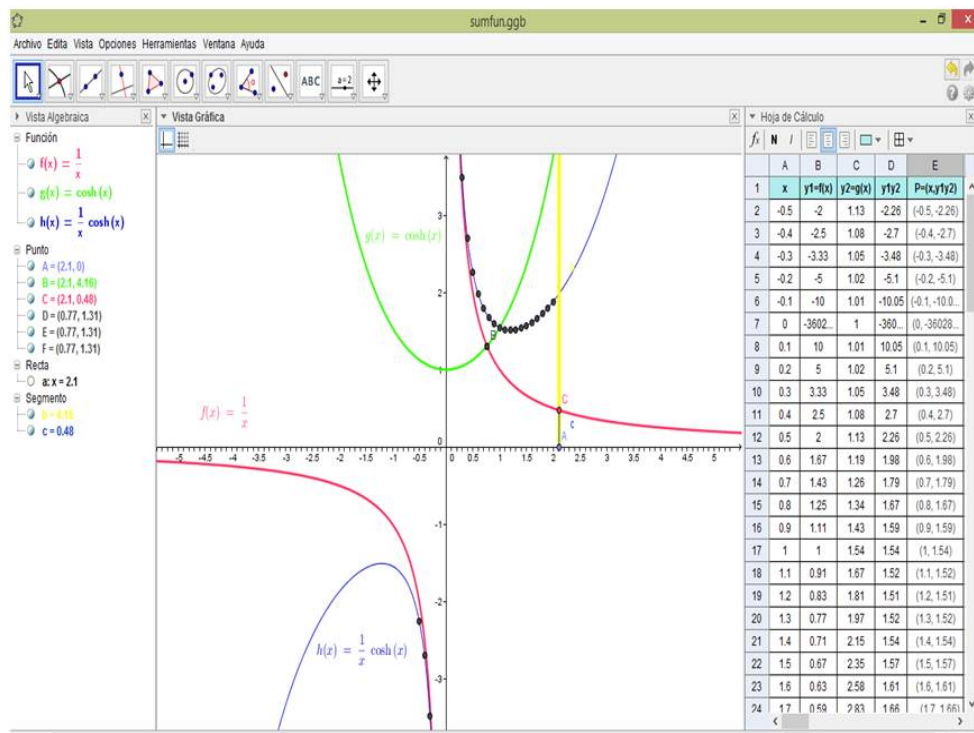
A continuación se muestran algunos resultados correspondientes a la resta de funciones.



- a) ¿Qué representa la longitud del segmento $b=AC$? $g(x)$
- b) ¿A qué corresponde la longitud del segmento $c=AB$? $f(x)$
3. Establezca el (los) intervalos donde $c \geq b$ $[0, 0.27]$ $[0.27, 0.59]$
4. ¿Para qué valores de x , $c \leq b$? $[0, 0.27] \cup [1.6, \infty)$
5. Si $c \geq b$ ¿qué signo tiene la coordenada y del punto Q? negativos
6. Si $c \leq b$ ¿qué signo tiene la coordenada y del punto Q? Positivos
7. Introduzca una función $h(x)=f(x)-g(x) =$ $h(x) = 0.3x^2 + 0.5 - \sqrt{x}$
9. ¿Cuál es el dominio de la función $h(x)$? D.C: $[0, \infty)$
10. Compare los dominios de $h(x)$, $f(x)$ y $g(x)$ ¿Cómo se relaciona el dominio de $h(x)$ con los dominios de $f(x)$ y $g(x)$? Es el dominio común de ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$

11. Establezca una conjetura sobre cómo puede obtenerla gráfica de una función $h(x)=f(x)-g(x)$ si conoce las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. Obtenemos los puntos de la función $h(x)$ en la resta de las funciones $f(x)-g(x)$ evaluadas en cualquier valor de x
12. Repita las actividades para $f(x)=0.5x^3+0.2$ y $g(x)=-\sqrt{x}$. ¿es válida la conjetura? Si
13. ¿Persiste la relación entre el dominio de la función $h(x)$ con los dominios de $f(x)$ y $g(x)$? Si
14. Sin utilizar Ggb diga en qué cuadrante estará la gráfica de la función $g(x)-f(x)$, justifique su respuesta. En el 4º Cuadrante, porque se cambian a negativo los valores de $f(x)$

En seguida se muestran algunos resultados de la práctica correspondiente al producto de funciones.



3. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)$? $\mathbb{R} \neq 0$
4. ¿Cuál es el dominio de la función $g(x)$? $\mathbb{R}$
5. ¿Para qué valores de x , $f(x)$ y $g(x)$ son del mismo signo? $(0, \infty)$
6. Si $h(x)=f(x)g(x)$ ¿de qué signo es $h(x)$ en esos intervalos? positivo

7. ¿Para qué valores de x , $f(x)$ y $g(x)$ son de signos diferentes? $(-\infty, 0)$

8. ¿De qué signo es $h(x)$ en esos intervalos? negativo

9. Con base en sus respuestas a los incisos 5-8, ¿en qué cuadrantes se encuentra la gráfica de la función $h(x)$? 1er y tercer cuadrante

10. Complete las columnas 4 y 5 de la tabla

11. Introduzca una función $h(x)=f(x)*g(x)$ $h(x) = \left(\frac{1}{x}\right) (\cosh x)$

12. Utilice la vista gráfica para determinar si su propuesta al inciso 9 fue acertada y anote sus observaciones Si fue acertada el análisis los negativos y positivos y confirmamos insertando la función $h(x)=f(x)*g(x)$

14. Complete la tabla

Función	Dominio
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \neq 0$
$g(x) = \cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$h(x) = \left(\frac{1}{x}\right) (\cosh(x))$	$\mathbb{R} \neq 0$

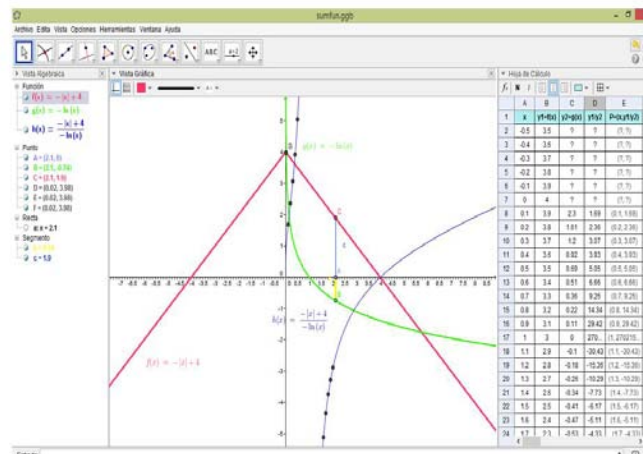
15. Compare los dominios de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ ¿Cómo se relaciona el dominio de $h(x)$

con los dominios de $f(x)$ y $g(x)$? Es el dominio común
hay que respetar la restricción que tiene
el dominio de la función $\frac{1}{x}$ que es $\mathbb{R} \neq 0$

Establezca una conjetura sobre cómo puede obtenerla gráfica de una función

$h(x)=f(x)*g(x)$ si conoce las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ Multiplicando
las (funciones) y evaluandolos en
cualquier valor de $x \neq 0$ para obtener los
puntos de la función $h(x)$

En relación al cociente de funciones, se muestran los siguientes resultados.



3. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)$? $\mathbb{R}$

4. ¿Cuál es el dominio de la función $g(x)$? $(0, \infty)$

5. ¿Para qué valores de x , $f(x)$ y $g(x)$ son del mismo signo? $(0, 1) \cup (4, \infty)$

6. Si $h(x) = f(x)/g(x)$ ¿de qué signo es $h(x)$ en esos intervalos? positivo

7. ¿Para qué valores de x , $f(x)$ y $g(x)$ son de signos diferentes? $(1, 4)$

8. ¿De qué signo es $h(x)$ en esos intervalos? negativo

9. Con base en sus respuestas a los incisos 5-8, ¿en qué cuadrantes se encuentra la gráfica de la función $h(x)$? 1º primer cuadrante y 4º cuarto cuadrante

10. Complete las columna 4 de la tabla

11. Introduzca una función $h(x) = f(x)/g(x)$

12. Utilice la vista gráfica para determinar si su propuesta al inciso 9 fue acertada y anote sus observaciones Si porque en un 1º primer cuadrante son positivos y 4º negativo

13. ¿Cuál es el dominio de la función $h(x)$? $(0, \infty)$

15. Compare los dominios de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ ¿Cómo se relaciona el dominio de $h(x)$ con los dominios de $f(x)$ y $g(x)$? dominio común

18. Establezca una conjetura sobre cómo puede obtenerla gráfica de una función $h(x) = f(x)/g(x)$ si conoce las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ división de las y

Evaluación

Después de que se realizaron las prácticas se proporcionaron ejercicios que los estudiantes resolvieron sin apoyo de software. A continuación se muestran algunas respuestas presentadas por los estudiantes.

Sin utilizar Geogebra use la gráfica mostrada para encontrar:

1. $f+g$, los dominios y codominios correspondientes en:

a) $[-3,4]$ $D[-3,4]$ $C[0,5]$

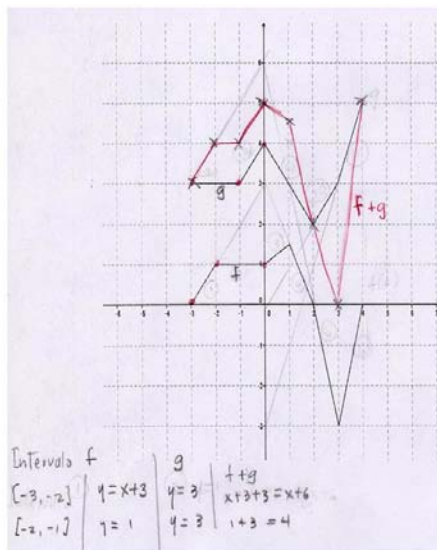
b) $[-2,4]$ $D[-2,4]$ $C[0,5]$

c) $[1,3]$ $D[1,3]$ $C[0,4,5]$

d) $[2,5]$ $D[2,4]$ $C[0,5]$

e) $[-3,5]$ $D[-3,4]$ $C[0,5]$

Los intervalos que acaban en 4 porque del 4 al 5 no hay funciones



Se observa que Yesica construyó la representación geométrica de la operación mediante cálculos numéricos e intentó transitar a la representación algebraica sin terminar el ejercicio.

En el reporte de María, se observa que realizó *tratamiento* geométrico logrando la representación correcta de la función suma y de los dominios y codominios solicitados.

2. $f+g$ en:

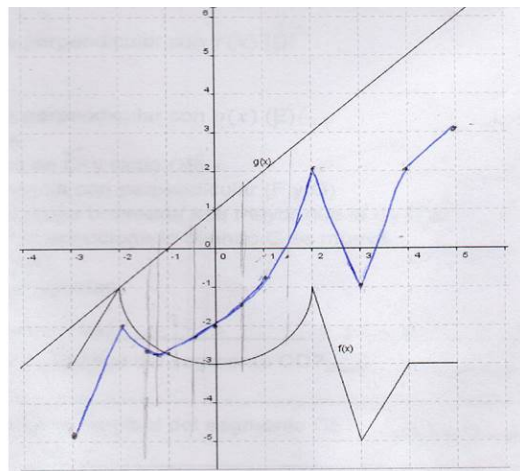
a) $[-3,2]$ Dom $[-3,2]$ Cod $[-5,2]$

b) $[-2,4]$ Dom $[-2,4]$ Cod $[-2,8,2]$

c) $[1,3]$ Dom $[1,3]$ Cod $[-1,2]$

d) $[2,5]$ Dom $[2,5]$ Cod $[-1,3]$

e) $[-3,5]$ Dom $[-3,5]$ Cod $[-5,3]$



5 Conclusiones

El estudio diagnóstico muestra que el aprendizaje logrado por los estudiantes consiste en acercamientos a la aprehensión de la representación algebraica (Semiosis) donde además enfrentan serias dificultades durante el tratamiento. Es decir, el aprendizaje es mecánico, ellos no han logrado construir imágenes mentales ricas; pueden proceder algorítmicamente, sin embargo, no han reflexionado sobre la interpretación del concepto.

Lo anterior hace evidente la necesidad de una modificación integral de la metodología de aprendizaje, en la que se enfatice la aprehensión conceptual. Para tal fin, en la secuencia didáctica

desarrollada se aprovecha la potencialidad de la tecnología para realizar tareas, disponiendo así de mayor tiempo para la construcción de conceptos.

Los resultados de las hojas de trabajo diseñadas con apoyo de tecnología muestran que éstas ofrecieron una alternativa que propició la participación activa del estudiante en el aprendizaje favoreciendo la visualización de patrones, el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático y un acercamiento a la aprehensión conceptual(*Noesis*) de los objetos de estudio.

La evaluación muestra que la metodología de aprendizaje favoreció el tránsito del registro geométrico a los registros algebraico y numérico(*conversión*), además del reconocimiento de las operaciones con funciones en registros diferentes al algebraico.

6 Referencias

1. Duval Raymond, Semiosis y Pensamiento Humano, (1999) Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
2. Contreras J., Del Pino C., (2001), Propuesta de diseño y desarrollo de actividades implementadas computacionalmente, Educación matemática, Vol. 13 N0. 2.
3. Hitt Fernando, (1995), Investigaciones en Matemática Educativa II, Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Editorial Iberoamericana.
4. Moreno L., (2002), Instrumentos matemáticos computacionales, Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Ministerio de Educación Nacional, Colombia, pp.81-86
5. Stewart James., (2007), Cálculo I, Thomson
6. Larson – Hostetler, Cálculo Diferencial e Integral, Mc Graw Hill 5ª Edición.
7. <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/> Matemáticas para el aula.
8. <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm>

Laboratorio Para el Aprendizaje y Desarrollo del Pensamiento Matemático

Lucía González Cabrera
luciagonzalezcabrera@hotmail.com

Adrián Fabio Benítez Armas
benitezarmas@gmail.com

Universidad Tecnológica de Oriental

1 Introducción

Del origen de los instrumentos de mediación, podríamos decir que comenzó como una prótesis para hacer posible las actividades físicas del cuerpo, finalmente transformó el medio ambiente y planteó el escenario para futuras interacciones, donde el objeto matemático se introdujo cuando existió de él, una representación semiótica permitiéndonos hablar de la experiencia matemática (Moreno-Armella y Hegedus, 2009, p 509 y 518). En este contexto podríamos decir que la tecnología digital aplicado a los dispositivos móviles, como instrumentos de mediación nos ayudan a elaborar una gráfica a partir de la ecuación. Así en el intento de analizar la ecuación de la recta en su forma general $y=mx+b$, el alumno al observar la representación gráfica de ésta, creemos que existen un movimiento cíclico entre espacios de interpretación, basados en la idea de Leinhardt, quien en 1990 plantea que existe un movimiento entre espacios del proceso interpretativo, donde el estudiante obtendrá el significado de cualquiera de las representaciones del espacio de la regla algebraica y del espacio de la gráfica.

Nuestra investigación se centra en el uso de las llamadas Aplicaciones Móviles (Apps) en Sistemas Operativos Móviles como Android que se ofrecen al público de manera gratuita, estas Aplicaciones apoyan diversas áreas del conocimiento ayudando a realizar tareas automáticas con la facilidad de un clic. En nuestro caso, nos dimos a la tarea de buscar aquellas aplicaciones como calculadoras graficadoras y que nos sirvieron de instrumento mediador, entre la representación algebraica y la representación gráfica.

La intención de emplear la tecnología móvil, tiene por fin apoyar al alumno con el uso de instrumentos que se puedan agregar a su dispositivo, lo que permitirá acercar al alumno al uso de la tecnología con fines que le permitan desarrollar su pensamiento matemático, por lo menos eso pretendemos.

2 Problemática

En la actualidad el desarrollo del pensamiento matemático, está fundamentalmente basado en memorizar las estructuras y sus procesos. Es a partir de éstas que se presenta la resolución de situaciones básicas como la generación de gráficas, sin embargo al intentar conceptualizar una gráfica hacia una situación real o incluso hacia su representación algebraica, resulta complejo. Es por esto que ahora pretendemos abordar los conceptos, apoyándonos en herramientas tecnológicas actuales, como las aplicaciones móviles, y es de aquí que surge el cuestionamiento de la investigación, **¿Cómo se desarrolla el pensamiento matemático a través de la mediación de un laboratorio de aplicaciones móviles gratuitas?**

3 Objetivo General

Observar el proceso de desarrollo cognitivo en la concepción de los elementos de la ecuación de la recta de la forma $y=mx+b$ a través de la mediación de un laboratorio de aplicaciones móviles gratuitas.

4 Justificación

La actual dinámica relacionada con las formas de aprendizaje, nos permite ver la necesidad de replantear el esquema de enseñanza. Mantener una visión centrada en los procesos, ya sean aritméticos, algebraicos, etc., nos permite sólo abordar el aprendizaje basado en la memorización o centrada en la adquisición de conocimiento, como si el desarrollo fuera la memorización de los procesos por sí mismos o como si la adquisición de conocimiento, fuera condición del desarrollo, en el mejor de los casos. Pero no nos permite ver las posibilidades que poseemos, de las que somos capaces a partir de la asimilación de los conceptos y de su puesta en práctica, de las posibilidades que tenemos al desarrollar el pensamiento matemático y la cognición.

El laboratorio de matemáticas, se ha desarrollado con el propósito de hacer del aprendizaje una experiencia práctica, centrada en los conceptos que fundamentan los temas, para promover la adquisición de una serie de competencias en el campo formativo del pensamiento matemático y del desarrollo cognitivo, centrándonos en el uso de equipo de cómputo y de aplicaciones móviles como instrumentos de mediación.

Se espera que con el laboratorio, los alumnos tengan una experiencia que les permita adaptarse al uso de nuevas tecnologías con mayor rapidez, brindándoles así una experiencia más, que genere beneficio en su futuro laboral. Además de permitirles centrar su atención en la solución de problemas relacionados con el pensamiento matemático y su desarrollo cognitivo, más que en el proceso de cálculo.

5 Marco conceptual

El desarrollo del conocimiento ha sido inseparable de los instrumentos de mediación empleados. Hoy nos podemos preguntar qué hubiera sido de la biología sin microscopios, o de la astronomía sin telescopios y sin tablas de logaritmos. Kepler solía decir que la vida activa de los astrónomos se había duplicado como resultado de las tablas de logaritmos. Los sistemas de escritura y

las notaciones numéricas son tecnologías (simbólicas) tan arraigadas a nuestra vida que casi no las reconocemos ya como tecnologías, dada la familiaridad que nos vincula a ellas. Sin embargo, tal vez sean éstas los ejemplos más significativos de cómo una tecnología puede afectar irremediablemente nuestro funcionamiento cognitivo. Lo que comenzó como una prótesis para hacer posible las actividades físicas del cuerpo, finalmente transformó el medio ambiente y planteó el escenario para futuras interacciones, donde el objeto matemático se introdujo cuando existió de él, una representación semiótica permitiéndonos hablar de la experiencia matemática (Moreno-Armella y Hegedus, 2009, p 509 y 518).

El cerebro humano depende profundamente de los recursos culturales para su funcionamiento cognitivo. Estos recursos no son un añadido a un cerebro que funciona sin ellos, sino que son co-extensivos de la actividad mental. C. Geertz (op. cit. p. 67-68) ha escrito que la constitución del hombre moderno aparece (ante nosotros) como un producto cultural y no solamente biológico. Es más correcto pensar en nuestra estructura como resultado de la cultura en lugar de pensar que un hombre anatómicamente moderno fue descubriendo gradualmente la cultura... todo parece indicar que el sistema nervioso no solamente le permitió adquirir cultura sino que definitivamente, se la exigió para poder funcionar adecuadamente.

Pero no podemos hablar de la cultura, sin hablar al mismo tiempo de los instrumentos de mediación, tanto materiales como simbólicos. J. Bruner (1995, p. 137) coincide con Geertz cuando afirma que el empleo de la mente depende de la capacidad que ha mostrado para desarrollar y usar herramientas para expresar y amplificar sus capacidades. No ha sido un homínido ya desarrollado cerebralmente el que ha creado los fundamentos de la vida social sino, más bien, añade Bruner (op. cit. p. 138), la evolución del sistema nervioso humano fue algo que necesitó de recursos externos (herramientas e instrumentos) para expresar todo su potencial.

La incorporación de una tecnología, cualquiera que ésta sea, al ámbito de la educación, es algo que debe hacerse tomando en cuenta el principio de mediación instrumental: Todo proceso de aprendizaje está mediado por un instrumento material y/o simbólico.

Las tecnologías, en especial, las simbólicas, pueden servir de amplificadores y re-organizadores de la actividad intelectual. Teniendo esto en cuenta, la computadora, por ejemplo, empieza a perder ese aire de instrumento extraño con el cual todavía se le ve y pasa a formar parte de procesos propios del desarrollo sociocultural. Para ilustrar cómo una tecnología puede servir como amplificador de nuestra cognición, pensemos en una lupa. Ésta deja ver, amplificado, aquello que podría ser visto directamente; por esto mismo, no cambia la estructura del objeto de nuestra visión. Pero ¿qué ocurre con un microscopio? Con éste podemos ver lo que no era posible sin dicho mediador; accedemos entonces a otro nivel de la realidad material, cualitativamente distinto y con ello a la posibilidad de un conocimiento nuevo que gravita en la re-organización de nuestro pensamiento. Estas son las formas como puede usarse un instrumento de mediación. Ahora bien, ellas corresponden a distintos niveles de compenetración de la persona con el instrumento.

La aplicación en un dispositivo móvil, pareciera no tener relevancia, sin embargo reconocemos el potencial mediador que implica, consideramos que es una herramienta que puede favorecer el desarrollo del pensamiento matemático, obviamente nuestra percepción está centrada en el empleo de un dispositivo móvil como mediador que apoyará al proceso de cognición.

Hemos tratado de dar una perspectiva plausible del desarrollo de la cognición humana y de su naturaleza mediada. Los primeros gestos conscientes buscando la comunicación con sus congéneres, abrieron un universo para nuestros ancestros. Pudieron romper la barrera de su propio

cuerpo y empezaron a generar un mundo de signos con el sistema de representación que tenían, a saber, su propio cuerpo. Mediante el lenguaje gestual, pudieron comunicar los procesos de construcción de una hacha de piedra (Donald, 2001). Gradualmente la experiencia no se circunscribió a las interacciones con el mundo natural sino que ahora, había un nuevo campo de experiencia: el otro (también como instrumento mediador). Ahí están nuestros orígenes, del gesto a la palabra, a las culturas, a las civilizaciones.

Finalmente, reiteramos que la incorporación de instrumentos de mediación, no se limita a facilitar una acción, que incluso podría realizarse sin éstos; podríamos asegurar que es mediante su inclusión, que el proceso de comportamiento y las herramientas psicológicas alteran toda la influencia y la estructura de las funciones mentales (Wertsch, 1993, p. 50).

Ahora bien, Leinhardt (op.cit., pp. 10 y 15), define por interpretación... a la acción por la cual un estudiante obtiene el sentido o el significado de una gráfica (o de una porción de ella), de una ecuación funcional o de una situación, y por construcción...al acto de generar algo nuevo. La construcción se refiere a construir una gráfica o graficar puntos a partir de datos... y se refiere a ellas como acciones completamente diferentes. La interpretación depende y requiere de la reacción ante una porción de datos y la construcción requiere generar partes nuevas no dadas. Sin embargo, en ambas, la acción (de interpretar y construir) puede llevarse a cabo dentro de cualquiera de los espacios, cualquier tarea de interpretación involucra hasta cierto punto la interpretación dentro del espacio que está en el foco de la tarea, sea una gráfica, la situación de un problema o una regla algebraica. La interpretación de una gráfica se refiere a la acción por la cual se obtiene el sentido o significado de una gráfica, de una ecuación o de una situación particular. A su vez la interpretación puede ser global o específica. Sin embargo ésta está sujeta a la sobre-generalización como a la sub-generalización y a la confusión de asociarla con eventos pictóricos de naturaleza similar.

La interpretación depende de lo que la gráfica represente, y de su posibilidad de ser expresada por una ecuación o por un conjunto de pares ordenados. En este contexto las gráficas pueden traducirse para su interpretación o complemento de interpretación, dentro de los espacios simbólicos delimitados. El acto de traducción es poco frecuente aún en el trabajo escolar matemático, pero es fundamental para la educación formal.

En el interior del espacio simbólico, los elementos que la componen como la interpretación, tal vez puedan convertirse hasta cierto punto en elementos dinámicos (figura 1). Podemos encontrar que la tarea de interpretación puede estar centrada en el espacio particular de la regla algebraica. Por ejemplo: cuando un alumno trabaja con la ecuación de la recta, igualando la variable para despejarla, en este caso el alumno está trabajando con la regla algebraica dentro del espacio algebraico. De igual manera, el alumno puede observar en el espacio de interpretación gráfica, el lugar geométrico donde la recta corta al eje y. Todo esto se lleva a cabo en el sistema de coordenadas en que se halla en el espacio de interpretación gráfica.

Por otra parte pueden existir interpretaciones que implican la traducción simultánea de un espacio a otro. Por ejemplo cuando los alumnos relacionan, de la ecuación general de la recta (el valor de b con el punto de intersección con el eje y). De hecho el nombre que se le ha asignado: "ordenada en el origen" es un intento de movimiento entre espacios de interpretación, en otras palabras es un intento de traducción. Piaget hace referencia a este proceso de traducción, planteando que el hacerse consciente de una operación mental, significa transferirla del plano de la acción al plano del lenguaje, la recrea en la imaginación para poder expresarla con palabras. El dominio de una operación en el plano superior del pensamiento verbal, representa las mismas

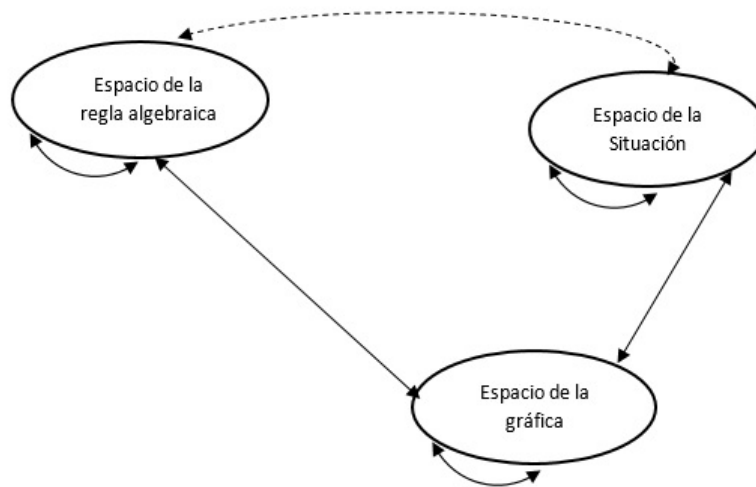


Figura 1: Movimiento entre espacios que pueden ocurrir en una acción de interpretación. (Interpretada de Leinhardt, 1990, p. 11)

dificultades que el dominio previo de esa operación en el plano de la acción (Vigotzky, 2010, p. 230). Esta acción es un ir y venir entre espacios de acción y representación, donde ir de la gráfica a la regla de asociación algebraica o viceversa es frecuente, bueno, más o menos. Incluso el ir de la gráfica a la situación suele ser un tanto más usual. Sin embargo, el ir de la regla algebraica (representación simbólica) a la situación (lo real) resulta extraño llegar a observarlo.

En nuestra investigación, en un esquema delimitado a la ecuación general de la recta, es muy frecuente que se establezca un intercambio (traducción) simultánea entre el espacio de la representación algebraica y el espacio de la gráfica, incluso Leinhardt afirma que: entre espacio de la representación de la gráfica y el espacio de la regla algebraica se da la traducción. La traducción se refiere, entonces, al acto de reconocer la misma gráfica y/o función, considerando otras formas de representación. Esta tarea consiste en realizar el enlace entre diferentes modos de representación, por ejemplo, la más frecuentemente, es la traducción de la representación algebraica a la representación gráfica.

6 Proceso Metodológico

A pesar de que el marco metodológico se encuentra aún en proceso, podemos adelantar que la investigación pretende hacer un análisis descriptivo que permita llevarnos a la contribución que fundamente el uso de tecnología digital en el aprendizaje matemático. Por una parte nos centraremos en la revisión del nivel de conocimiento matemático en los alumnos y por otra parte revisaremos las propuestas teóricas generadas en el tema con la intención de agregar nuestra percepción del estado teórico y metodológico del aprendizaje. Por otro lado se fijará la atención en el proceso de selección de las aplicaciones móviles gratuitas ofrecidas por Play Store para sistemas Android, que cubran las necesidades de esta investigación, estableciendo que se requiere la generación de la gráfica de ecuaciones que representen a la recta en su forma general, esto es, aquellas de la forma $y=mx+b$.

En la exploración de aplicaciones se encontró que para graficar existen variedad de calculadoras, sin embargo, en el proceso de selección se analiza la funcionalidad de cada una, y se pone

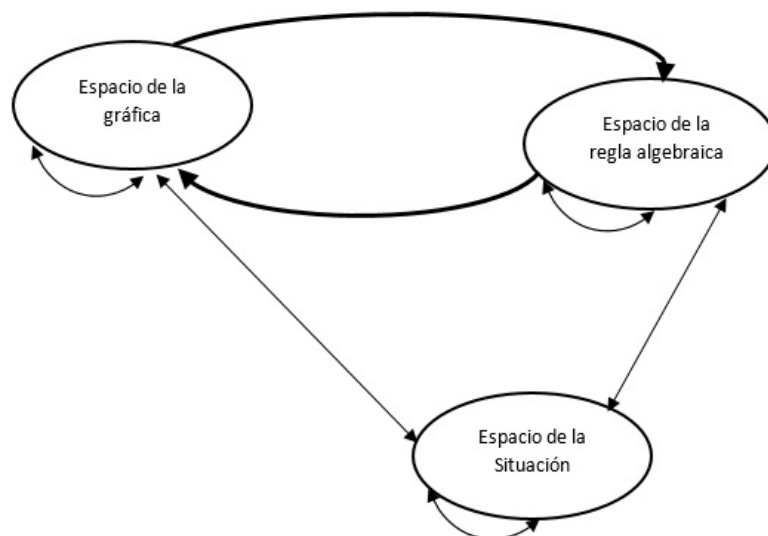


Figura 2: Movimiento entre “Espacio de la Gráfica” y “Regla Algebraica” que pueden ocurrir en una acción de interpretación. (Adaptación propia, Leinhardt, 1990, p. 11).

especial interés en la forma de interacción que presenta una App con el usuario, recordaremos que requerimos de la manipulación del gráfico y la visualización de lo sucedido en la representación algebraica.

El uso de los dispositivos móviles resulta cotidiano, esto hace unos años se podía ver como un suceso aislado, ya que no todos podíamos acceder a estas tecnologías, actualmente podemos ver que en la comunidad estudiantil es poco visto alguien que no maneje un teléfono celular o tableta. Aprovechando las tecnologías actuales y su demanda, generamos un laboratorio en el aula, donde el alumno será el mayor beneficiado.

El contexto de emplear los dispositivos móviles en el uso de aplicaciones que permitan el desarrollo del pensamiento matemático en el proceso de la cognición dentro del aula es por la accesibilidad vista en las aplicaciones ofertadas de forma gratuita, por mencionar, Play Store cuentan con 170 aplicaciones gratuitas para dispositivos con sistema Operativo Android, se definen como una de las calculadoras graficadoras y/o algebraicas.

El trabajo plantea de forma hipotética que el desarrollo del pensamiento matemático en el proceso de interpretación y traducción entre el espacio de la gráfica y el espacio de la regla algebraica, es un proceso dinámico que transforma la manera en que desarrollan los procesos cognitivos, de forma que se puede facilitar el proceso de traducción entre espacios de representación (figura 2).

7 Referencias:

- Bruner, J.S. (1995).** La Educación como Invento Social. En Desarrollo Cognitivo y Educación (2a Edición), Ediciones Morata, Madrid.
- Donald, M. (2001).** A Mind So Rare: The Evolution of Human Consciousness. W. W. Norton & Company. New York.
- Geertz, C. (1973).** The Interpretation of Cultures. Basic Books. United States of America.
- Leinhardt, G., Stain, M. & Zaslavsky, O. (1990).** Functions graphs and y graphing: Taks, learning

and teaching. En: Review of Educational Research, Spring. Vol. 60, No. 1, pp. 1-64.

Moreno-Armella, L. y Hegedus, S. J. (2009). Co-action with digital technologies. En: ZDM, The International Journal of Mathematics Education. Vol. 41 (4), 2009, pp. 505 – 519. Disponible en: http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2009/163499_1.pdf.

Vigotzky, L. (2010). Pensamiento y Lenguaje. Paidós Surcos. España.

Wertsch, J. V. (1993). Voces de la Mente, Un Enfoque Sociocultural para el Estudio de la Acción Mediada. Aprendizaje Visor. España.

Las Gráficas Cartesianas Generadas en un Ambiente Digital y la Producción de Conceptos Matemáticos

Adrián Fabio Benítez Armas

benitezarmas@gmail.com

Universidad Tecnológica de Oriental

Resumen

Nos interesa observar y dilucidar, la manera en que se da la conexión entre los espacios de interpretación de las formas de representación matemática. Considerando los espacios que Leinhardt observó (Espacio de la Situación Concreta, Espacio de la Gráfica Cartesiana y Espacio de la Regla Algebraica) y en consideración de las gráficas generadas mediante un sensor de movimiento, dentro de un escenario experimental en donde los alumnos, con sus movimientos generan, a través de la tecnología digital las gráficas cartesianas. Este trabajo es producto de una serie de observaciones que iniciarán en un trabajo de investigación que se hiciera en el Centro de Investigaciones Avanzadas del Instituto Politécnico Nacional y que ha ido evolucionando. En este nuevo ambiente de aprendizaje, se ha observado que los alumnos ahora pueden aproximarse a un flujo multidireccional entre los diferentes espacios de representación. Es decir, puede desplazarse del Espacio de la Situación Concreta, al Espacio de la Gráfica Cartesiana y/o al Espacio de la Regla Algebraica. En direcciones que, en función del problema matemático pueden ser múltiples.

1 Introducción

Este trabajo de investigación, es producto de un conjunto de observaciones que han sido resultado de una construcción paulatina hecha en conjunto con los alumnos. Cada avance que se encuentra es resultado de las observaciones hechas en experimentos anteriores.

El punto de partida está en las observaciones que hicieran Leinhardt, G., Stain, M. y Zaslavsky, O. en el texto Functions graphs and y graphing: Taks, learning and teaching. que aparecieran en Review of Educational Research, Spring. Vol. 60, No. 1, pp. 1-64. Publicado en 1990. Quien señala que la interpretación es la acción que permite darle significado a una gráfica y que puede ser global o específica. La construcción es desde una visión tradicional, el acto de generar una gráfica nueva a partir de datos, de una función dada (regla de correspondencia), de una tabla o de la

construcción misma de una función algebraica que genere la gráfica. La construcción implica ir desde la generación de los datos que puede ser con la regla de asociación, pasando por la selección de los ejes y su escala, hasta la identificación de las unidades a utilizar.

Con la presencia de la tecnología digital, se ha permitido un análisis más rápido de las representaciones gráficas, logrando agilizar el proceso de interpretación y construcción. Estudiar las gráficas generadas mediante un sensor de movimiento, que cristalizadas sobre la pantalla de una computadora y socializadas al momento de proyectarse sobre una pantalla, en el espacio académico de exploración con los estudiantes, nos ha permitido encontrar (como parte de la interpretación para entender el movimiento), que las gráficas cartesianas digitales son artefactos de mediación en el proceso de apropiación de los conceptos matemáticos.

Los estudiantes caminan frente al sensor y sus movimientos generan, a través de la tecnología digital, gráficas cartesianas. Pero a diferencia de las gráficas estudiadas sobre el papel, las gráficas resultado de su movimiento frente al sensor, tiene un significado nuevo. Un estudiante frente al sensor conecta su acción de caminar con la gráfica, él es el productor directo de la gráfica. A partir de aquí los estudiantes ampliaron la base de significados atribuidos a los resultados producidos.

Destacan las observaciones que se han hecho en torno a los modos en que se da el entendimiento y la construcción de gráficas. Los sistemas de representación gráficos se incorporan para formar parte de nuestra cognición de los fenómenos de la variación y rapidez de variación (velocidad). En consecuencia se explora cómo la actividad mediada se manifiesta en la producción singular de significados. En nuestro caso la pregunta central es: ¿Cómo podemos dilucidar la forma en que se da la conexión entre los espacios de interpretación? según lo que Leinhardt observó.

Diferentes autores han abordado el problema de la graficación desde perspectivas diversas, algunos como Clement (1988/1989), Zubieta y Moreno (1996, p. 466), Santillán (2002), Cassirer (1974, citado por Radford, 2009, p.11) Arzarello y Robutti (2004), Suárez (2008), etc.

Desde 1981 Freudenthal ya considera que la tecnología digital influye en la educación. A partir de 1992 (con las contribuciones de Kaput & Balacheff, y Crawford), los trabajos adquieren mayor importancia al plantear cuestionamientos enfocados a explorar cómo la actividad cognitiva, el aprendizaje, la enseñanza y las formas de pensamiento se modifican como resultado de la interacción del estudiante con la tecnología. Así Kaput, Noss, Hoyles (2002), proponen utilizar nuevas infraestructuras representacionales para apoyar el entendimiento del movimiento. Por su parte Rasmussen, Nemirovsky, Olszewski, Dost y Johnson, (2004), describen cómo la actividad corporal y la fluidez tecnológica emergida del uso de herramientas, se combinan en el aprendizaje de las matemáticas.

Miranda (2007 y 2009) analiza el proceso de producción de significados relacionado con la interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento lineal, en su representación gráfica generada con tecnología digital en un plano cartesiano.

Por su parte Radford (2009, 2005) nos da muestra de la dificultad que los alumnos reportan para la conceptualización del espacio y tiempo por medio de los gráficos de movimiento cartesiano destacando el papel decisivo e importante de la investigación de las acciones corporales, los gestos, el lenguaje y el uso de artefactos tecnológicos en los estudiantes.

Ferrara y Savioli (2011) reportan los resultados de una investigación realizada con estudiantes

de 7 años de edad, quienes participaron en la interpretación y uso de gráficas a través del dibujo y lectura generadas por un sensor de movimiento. Los alumnos trabajaron con la covarianza, donde fueron capaces de entender el significado de una recta horizontal. Se analizó la producción de sus escritos y dibujos. Por su parte Flores (2007) observa las dificultades que tienen los estudiantes con la construcción e interpretación de gráficas. Su trabajo parte de las formas básicas de graficación y toma como marco de referencia el trabajo de Leinhardt et al (1990).

Leinhardt, señala, ya desde 1990, que el entendimiento de una gráfica debería ser expresada, más que en términos matemáticos, mediante esquemas cualitativos apoyados en el sentido común y en las estrategias de verificación de la realidad del estudiante y del uso de sus propias palabras. Por otra parte Rivière (2002, p. 38) asegura que el pensamiento no sería una función formalmente determinada por la estructura de la extensión del cuerpo humano, sino por la actividad externa, objetiva, en relación a otros cuerpos.

2 Marco conceptual

El desarrollo del conocimiento ha sido inseparable de los instrumentos de mediación empleados. Kepler solía decir que la vida activa de los astrónomos se había duplicado como resultado de las tablas de logaritmos. Los sistemas de escritura y las notaciones numéricas son tecnologías (simbólicas) tan arraigadas a nuestra vida que no las reconocemos ya como tecnologías, dada la familiaridad que nos vincula a ellas. Sin embargo, tal vez sean éstas los ejemplos más significativos de cómo una tecnología puede modificar nuestro funcionamiento cognitivo. Lo que comenzó como una prótesis para hacer posible las actividades físicas del cuerpo, finalmente transformó el medio ambiente y planteó el escenario para futuras interacciones, donde el objeto matemático se introdujo cuando existió de él, una representación semiótica permitiéndonos hablar de la experiencia matemática (Moreno-Armella y Hegedus, 2009, p 509 y 518).

El cerebro humano depende profundamente de los recursos culturales para su funcionamiento cognitivo. Estos recursos son co-extensivos de la actividad mental. C. Geertz (op. cit. p. 67-68) ha escrito que la constitución del hombre moderno aparece (ante nosotros) como un producto cultural y no solamente biológico... todo parece indicar que el sistema nervioso no solamente le permitió adquirir cultura sino que definitivamente, se la exigió para poder funcionar adecuadamente.

Pero no podemos hablar de la cultura, sin hablar al mismo tiempo de los instrumentos de mediación, J. Bruner (1995, p. 137) coincide con Geertz cuando afirma que el empleo de la mente depende de la capacidad que ha mostrado para desarrollar y usar herramientas para expresar y amplificar sus capacidades. No ha sido un homínido ya desarrollado cerebralmente el que ha creado los fundamentos de la vida social sino, más bien, añade Bruner (op. cit. p. 138), la evolución del sistema nervioso humano fue algo que necesitó de recursos externos (herramientas e instrumentos) para expresar todo su potencial.

Las tecnologías, en especial, las simbólicas, pueden servir de amplificadores y re-organizadores de la actividad intelectual. Teniendo esto en cuenta, la computadora, por ejemplo, empieza a perder ese aire de instrumento extraño con el cual todavía se le ve y pasa a formar parte de procesos propios del desarrollo sociocultural. Para ilustrar cómo una tecnología puede servir como amplificador de nuestra cognición, pensemos en una lupa. Ésta deja ver, amplificado, aquello que podría ser visto directamente; por esto mismo, no cambia la estructura del objeto de nuestra visión. Pero ¿qué ocurre con un microscopio? Con éste podemos ver lo que no era posible sin

dicho mediador; accedemos entonces a otro nivel de la realidad material, cualitativamente distinto y con ello a la posibilidad de un conocimiento nuevo que gravita en la re-organización de nuestro pensamiento. Los instrumentos de mediación pueden entonces ser amplificadores directos y/o re-organizadores del pensamiento, según el nivel de compenetración de la persona con el instrumento.

Hemos tratado de dar una perspectiva plausible del desarrollo de la cognición humana y de su naturaleza mediada. Los primeros gestos conscientes buscando la comunicación con sus congéneres, abrieron un universo para nuestros ancestros. Pudieron romper la barrera de su propio cuerpo y empezaron a generar un mundo de signos con el sistema de representación que tenían, a saber, su propio cuerpo. Mediante el lenguaje gestual, pudieron comunicar los procesos de construcción de una hacha de piedra (Donald, 2001). Gradualmente la experiencia no se circunscribió a las interacciones con el mundo natural sino que ahora, había un nuevo campo de experiencia: el otro. Ahí están nuestros orígenes, del gesto a la palabra, a las culturas, a las civilizaciones.

Finalmente, reiteramos que la incorporación de instrumentos de mediación, no se limita a facilitar una acción, que incluso podría realizarse sin éstos; podríamos asegurar que es mediante su inclusión, que el proceso de comportamiento y las herramientas psicológicas alteran toda la influencia y la estructura de las funciones mentales (Wertsch, 1993, p. 50). Desde esta perspectiva, consideramos que los instrumentos de mediación deben ser re-organizadores del pensamiento.

Ahora bien, Leinhardt (op.cit., pp. 10 y 15), define por interpretación... a la acción por la cual un estudiante obtiene el sentido o el significado de una gráfica (o de una porción de ella), de una ecuación funcional o de una situación, y por construcción...al acto de generar algo nuevo. La construcción se refiere a construir una gráfica o graficar puntos a partir de datos... y se refiere a ellas como acciones completamente diferentes. La interpretación depende y requiere de la reacción ante una porción de datos y la construcción requiere generar partes nuevas no dadas. Sin embargo, en ambas, la acción (de interpretar y construir) puede llevarse a cabo dentro de cualquiera de los espacios, cualquier tarea de interpretación involucra hasta cierto punto la interpretación dentro del espacio que está en el foco de la tarea, sea una gráfica, la situación de un problema o una regla algebraica. La interpretación de una gráfica se refiere a la acción por la cual se obtiene el sentido o significado de una gráfica, de una ecuación o de una situación particular. A su vez la interpretación puede ser global o específica. Sin embargo ésta está sujeta a la sobre-generalización como a la sub-generalización y a la confusión de asociarla con eventos pictóricos de naturaleza similar.

La interpretación depende de lo que la gráfica represente, y de su posibilidad de ser expresada por una ecuación o por un conjunto de pares ordenados. En este contexto las gráficas pueden traducirse para su interpretación o complemento de interpretación, dentro de los espacios simbólicos delimitados. El acto de traducción es poco frecuente aún en el trabajo escolar matemático, pero es fundamental para la educación formal.

En el espacio simbólico, los elementos que la componen como la interpretación, se vuelven dinámicos (figura 1). Podemos encontrar que la tarea de interpretación puede estar centrada en el espacio particular de la regla algebraica. Por ejemplo: la ecuación de la recta, igualando la variable $y=0$ para despejarla, en este caso se está trabajando con la regla algebraica dentro del espacio algebraico. De igual manera se observa en el espacio de interpretación gráfica, el lugar geométrico donde la curva corta al eje x . Todo esto se lleva a cabo en el sistema de coordenadas en que se halla en el espacio de interpretación gráfica, etc.

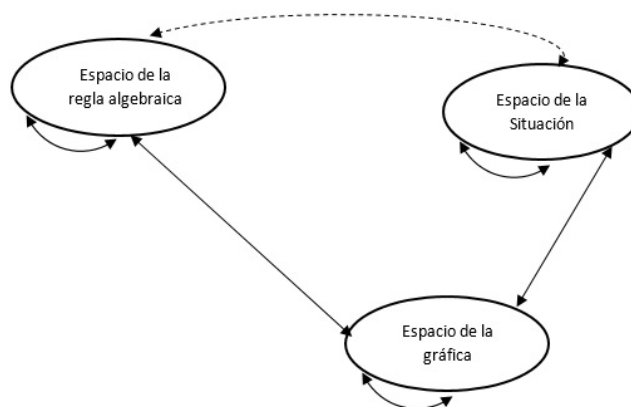


Figura 1: Movimiento entre espacios que pueden ocurrir en una acción de interpretación. (Interpretada de Leinhardt, 1990, p. 11)

Por otra parte pueden existir interpretaciones que implican la traducción simultánea de un espacio a otro. Por ejemplo cuando los alumnos relacionan, de la ecuación general de la recta ($y=mx+b$), el valor de b con el punto de intersección con el eje y . De hecho el nombre que se le ha asignado: “ordenada en el origen” es un intento de movimiento entre espacios de interpretación, en otras palabras es un intento de traducción. Piaget hace referencia a este proceso de traducción, planteando que el hacerse consciente de una operación mental, significa transferirla del plano de la acción al plano del lenguaje, la recrea en la imaginación para poder expresarla con palabras. El dominio de una operación en el plano superior del pensamiento verbal, representa las mismas dificultades que el dominio previo de esa operación en el plano de la acción (Vigotzky, 2010, p. 230). Esta acción es un ir y venir entre espacios de acción y representación, donde ir de la gráfica a la regla de asociación algebraica o viceversa es frecuente, bueno, más o menos. Incluso el ir de la gráfica a la situación suele ser un tanto más usual. Sin embargo, el ir de la regla algebraica (representación simbólica) a la situación (lo real) resulta extraño llegar a observarlo.

En nuestra investigación, en un esquema delimitado al movimiento rectilíneo uniforme y representado por el andar natural, es muy frecuente que se establezca un intercambio (traducción) simultánea entre los espacios.

La traducción se refiere, entonces, al acto de reconocer la misma gráfica y/o función, considerando otras formas de representación. Esta tarea consiste en realizar el enlace entre diferentes modos de representación, por ejemplo, la más frecuentemente encontrada, es la traducción de la representación algebraica a la representación gráfica.

3 Diseño experimental

El escenario experimental se ilustra en la fotografía 1. Los sujetos caminan frente al sensor, sus movimientos se transmiten a la computadora y el proyector despliega la información en una pantalla, frente a los ojos de los participantes. Así, al moverse observan la gráfica de su movimiento. Una cámara de video registra las acciones y diálogos de los participantes.



Figura 2: El escenario experimental

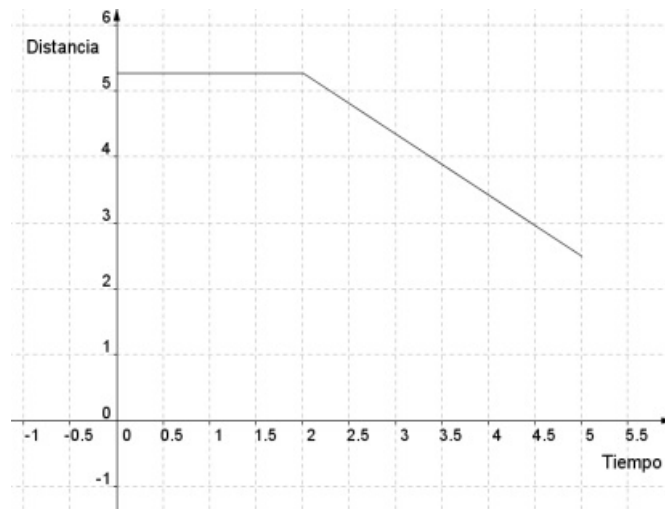


Figura 3: Gráfica propuesta 1

4 Episodio 1

Se forman equipos de trabajo, donde cada uno plantea su conjetura según el movimiento que interpretan en la gráfica que el profesor dibuja. Se discuten las posibles formas de movimiento. Se propone una forma específica (Gráfica 1) y cada equipo pasa a representar el movimiento que cree, pueda adaptarse a la representación. En este ejercicio, los alumnos requieren de una atención y concentración alta, para poder reproducir el movimiento que se les solicita.

No se trata de ver qué tipo de gráfica genera el cuerpo al moverse, sino de analizar las características del movimiento corporal necesario para poder reproducir una gráfica particular. En este momento el supuesto que tenemos, es que si alguien es capaz de lograr la representación, es porque ha cristalizado la relación del movimiento corporal con la representación gráfica del evento.

Los alumnos interpretan el significado de la pendiente y de los rasgos que se encuentran.



Figura 4: Alumno interpretando y midiendo

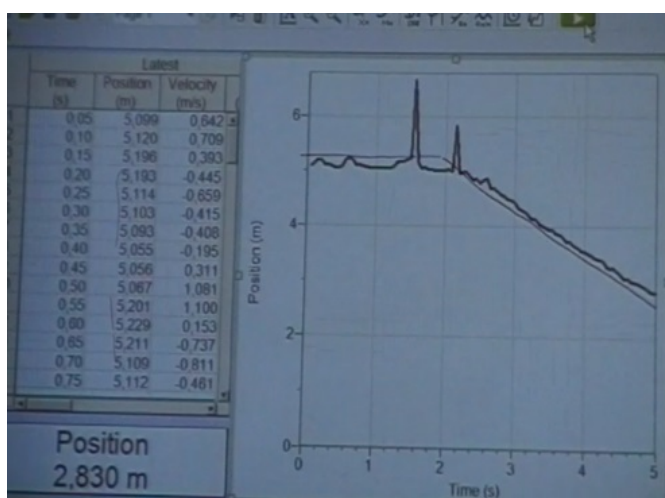


Figura 5: Algunas gráficas logradas

Disponen de un espacio frente al sensor y buscan el lugar más adecuado en donde inicien su movimiento. Miden la distancia al sensor (supuesto lugar donde puede iniciar el movimiento) contando los pasos y hacen una estimación de las dimensiones que deberán cubrir (Fotografía 2) así como el tiempo en que tendrán que hacerlo. Se observa que los alumnos realizan con muy buen éxito un ejercicio de interpretación, vislumbramos que ahora son capaces de interpretar la gráfica solicitada para reproducirla en su movimiento (Fotografías 3 y 4).

5 Interpretación

Los estudiantes entendieron perfectamente el movimiento que tenían que hacer para lograr la gráfica. Ellos ahora saben que la pendiente de la recta que se dibuja al moverse, está en relación a la velocidad con que se desplazan. En este sentido conjeturamos que los alumnos podrán asociar su velocidad de movimiento, con la pendiente de la gráfica.



Figura 6: Algunas gráficas logradas

6 Episodio 2

Ahora se enfrentan a una gráfica más compleja (Gráfica 2).

Gráfica del segundo ejercicio

Nuevamente los miembros de los equipos discuten con sus compañeros. Relacionando el tiempo con la distancia que deben recorrer, interpretan el significado de la pendiente, buscan el lugar más adecuado en donde inicien su movimiento y miden la distancia según sus recursos. Por ejemplo, las unidades de medida son las extensiones de su cuerpo: los brazos, los pasos, la longitud de punta a punta en sus dedos extendidos etc., determinan las distancias y las relacionan con el tiempo. El ejercicio posee un grado de dificultad mayor con relación al anterior y el espacio físico donde se desplazan es limitado.

Es notorio que han entendido el significado de los rasgos (fotografía 5), puede reproducirlos al graficar la forma en que caminan. Sin embargo, la posibilidad de dominio del movimiento pueda ser casi imposible, por las condiciones espaciales y disposición del sensor y el lugar de su proyección. Como se puede observar en la gráfica, el movimiento demanda una mayor velocidad para lograr la pendiente, lo cual aumenta el grado de dificultad.

7 Interpretación

Los alumnos tienen el conocimiento para poder hablar del punto de partida de su movimiento en función de la gráfica que analizan, esto quiere decir que, sin que ellos lo sepan, ahora están hablando de la ordenada en el origen considerando esta fracción del movimiento. Una vez más conjeturamos que éstos podrán asociar su punto de partida del movimiento con la representación gráfica que se les presenta.

En estas condiciones, se ha observado que los alumnos que relacionaron el espacio de la gráfica con el espacio de la situación (movimiento) y que han relacionado el espacio de la gráfica con el espacio de la regla algebraica, son capaces de traducir del espacio de la representación alge-

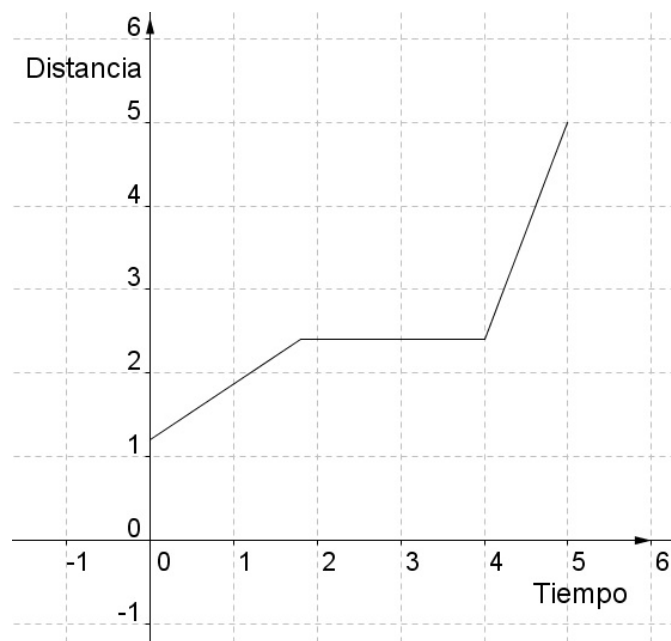


Figura 7: Gráfica propuesta 1

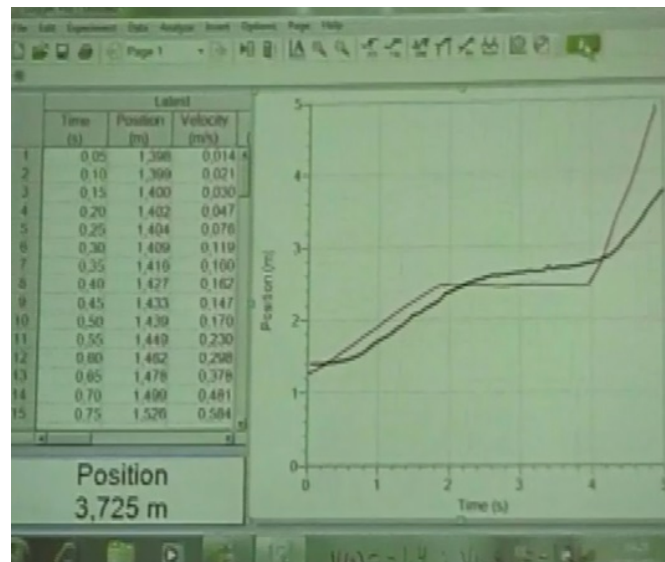


Figura 8: Gráfica lograda

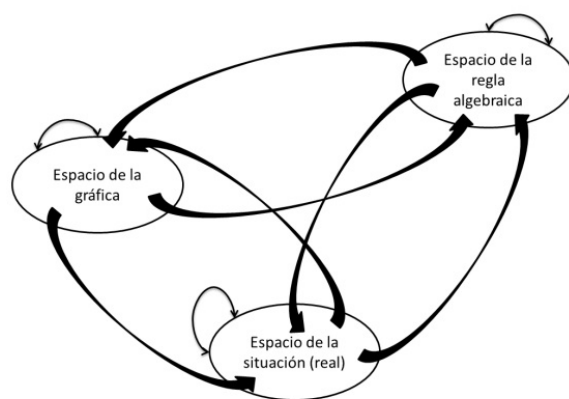


Figura 9: Movimiento entre espacios que puede ocurrir en una acción de interpretación, con el uso de un sensor de movimiento y una “pantalla cartesiana” (adaptación propia de Leinhardt, 1990, p. 11)

braica al espacio de la situación.

8 Conclusión

Partiendo de las observaciones de Leinhardt, y de su representación gráfica descrita anteriormente en la Figura 1, se propone un escenario gráfico diferente: cuando el espacio experimental incluye un sensor de movimiento y una “pantalla cartesiana” (Figura 2). Ahora el alumno podrá construir e interpretar simultáneamente su movimiento. Esta nueva situación lo coloca como protagonista del proceso de adquisición de significados matemáticos. El Alumno ahora es parte de la gráfica representada en el plano cartesiano, su movimiento vive en la gráfica y lo puede observar, moldear, vivir.

Leinhardt comenta que la interpretación de una gráfica depende de lo que representa, y de su posibilidad de ser expresada por una ecuación o por un conjunto de pares ordenados. En este contexto las gráficas pueden traducirse para su interpretación o complemento de interpretación, dentro de los espacios simbólicos delimitados. (Recordemos el proceso que implicaba este acto: Partíamos de la ecuación, de ella determinábamos el conjunto de números que serían sustituidos para determinar los pares ordenados, después representábamos cada par ordenado en el plano cartesiano y finalmente uníamos los puntos para generar la gráfica). El acto de traducción es poco frecuente aún en el trabajo escolar matemático (¡claro! ahora entendemos porqué), pero es fundamental para la educación formal.

Lo que en un principio fue encontrar las relaciones entre lo que se observa en el plano cartesiano y el movimiento que produce el cuerpo, ahora se ha transformado en un proceso de interpretación, construcción y traducción, en donde también se analizan los valores que se hallan en las gráficas. Procesos que consideramos evolutivos y en consecuencia nunca terminados.

Por ejemplo, la ubicación del punto inicial de su movimiento, es ahora un concepto con el que pueden lidiar. Por supuesto, los estudiantes no tienen idea de que están discutiendo sobre el lugar geométrico de la ordenada en el origen. El hecho de poder localizarlo y hablar de él, determinan-

do cuál es el mejor lugar que lo representa en la gráfica y en función del movimiento que quieren simbolizar, es porque más allá del nombre del concepto (ordenada en el origen), los alumnos lo han “cristalizado”, ahora les pertenece y es parte de su experiencia que la han adquirido a través del ejercicio corporal.

Los participantes discuten con sus compañeros, relacionando el tiempo con la distancia que deben recorrer, interpretan el significado de la pendiente, buscan el lugar más adecuado en donde inicien su movimiento, miden la distancia según sus recursos. Las unidades de medida son una extensión de su cuerpo como los brazos, los pasos, la longitud de punta a punta en sus dedos extendidos etc., determinan las distancias y las relacionan con el tiempo. Los alumnos están en condiciones para desarrollar un trabajo de interpretación entre el espacio de la situación y el espacio de la gráfica, pero encontramos que los alumnos pueden ir más allá, ahora fueron capaces de relacionar el espacio de la gráfica con el espacio de la regla algebraica, y en algunos casos los alumnos con un poco de ayuda, han podido relacionar el espacio de la situación con el espacio de la regla algebraica. Pensamos que ahora los alumnos pueden aproximarse a interpretar los diferentes espacios de representación. Según nuestra investigación, con apoyo didáctico se puede dirigir a los alumnos de forma que exploren los diferentes espacios de representación (los conceptos tratados estén en la delimitación temática de la función $y=mx+b$ y en relación al marco metodológico descrito).

En el experimento y con las condiciones señaladas en el aula, la posibilidad de coordinar el movimiento con los diferentes espacios de representación, permite la asociación de los signos de cada una de las formas de representación. La acción de asociar estos símbolos es un ejercicio cognitivo fundamental en el proceso de comprensión del tema; encontrar estas formas de asociación es un indicador del entendimiento. Se conjetura que ahora los alumnos se encuentran en mejores condiciones para trasladar el concepto en diferentes direcciones: entre el espacio de la situación al espacio de la gráfica, del espacio de la gráfica al espacio de la regla algebraica, del espacio de la regla algebraica al espacio de la situación y viceversa.

9 Referencias:

Arzarelo, F. y Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. En: Educational Studies in Mathematics 57: 303–321, 2004. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Bruner, J.S. (1995). La Educación como Invento Social. En Desarrollo Cognitivo y Educación (2a Edición), Ediciones Morata, Madrid.

Clement, J. (1989). [en línea] The concept of variation and misconceptions in cartesiangrepping. Focus on Learning Problems in Mathematics. Vol. 11, 1-2. Disponible en: http://www-unix.oit.umass.edu/~clement/pdf/concept_of_variation.pdf Donald, M. (2001). A Mind So Rare: The Evolution of Human Consciousness. W. W. Norton & Company. New York.

Ferrara, F. y Savioli, K. (2011). Young Students Thinking About Motion Graphs. En: Ubuz, B. (Ed.), (2011). Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, Ankara, Turkey: PME. Pp. 337-344.

Geertz, C. (1973). The Interpretation of Cultures. Basic Books. United States of America.

Kaput, J., Noss, R., Hoyles, C. (2002). Developing New Notations for a Learnable Mathematics in the Computatinal Era. En: Lyn D. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education. Lawrence Erlbaum associates, NJ, (51-75).

Leinhardt, G., Stain, M. & Zaslavsky, O. (1990). Functions graphs and y graphing: Taks, learning and teaching. En: Review of Educational Research, Spring. Vol. 60, No. 1, pp. 1-64.

Miranda, I. (2009) Objetivación de saberes científico-culturales relacionados con el movimiento lineal representado con gráficas cartesianas: una experiencia con estudiantes de bachillerato. Tesis de Doctorado en Ciencias Especialidad Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México D. F.

Miranda, I., Radford, L., y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. En: Educación Matemática, 2007. Vol. 19, No. 3, pp. 5-30.

Moreno-Armella, L. y Hegedus, S. J. (2009). Co-action with digital technologies. En: ZDM, The International Journal of Mathematics Education. Vol. 41 (4), 2009, pp. 505 – 519. Disponible en: http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2009/163499_1.pdf.

Radford, L. (2009). [en línea] No! He starts walking backwards”: interpreting motion graphs and the question of space, place and distancia. En: ZDM, The International Journal of Mathematics Education. Vol. 41 (4), 2009. Disponible en: <http://liaison.laurentian.ca/NR/rdonlyres/DE85FC0B-6436-48C6-8968-352B83AE25CD/0/ZDM2009Graphs.pdf>

Rasmussen, C., Nemirovsky, R. Olszewski, J., Dost, K. y Johnson J. L. (2004). On forms of knowing: The role of bodily activity and tools in mathematical learning. En: Educational Studies in Mathematics 57: 303–321, 2004. C _ 2004 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Rivière, A. (2002) La Psicología de Vygotski. Antonio Machado Libros. España.

Santillán, M. A. (2002).Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa: Mediación Instrumental con Calculadora. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México DF.

Suárez, L.(2008).Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa: Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México DF.

Vigotzky, L. (2010). Pensamiento y Lenguaje. Paidós Surcos. España. Wertsch, J. V. (1993). Voces de la Mente, Un Enfoque Sociocultural para el Estudio de la Acción Mediada. Aprendizaje Visor. España.

Zubieta, G. y Moreno, L. (1996). Sobre el Número y la Variación. En: Revista Didáctica Investigaciones en Matemática Educativa. Ed Iberoamericana. CINVESTAV IPN.

Flores, C. (2007). [en línea] Formas Básicas de Graficación y su Simulación con Transductores. En: Repositorio Digital Institucional. Instituto Politécnico Nacional. Disponible en <http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/2822> Consultado el 4 de febrero de 2015.

Propuesta didáctica para el logro del aprendizaje significativo del cálculo

Roberto Abel Elizondo Aldape

robertoelizondo@uadec.edu.mx

María Isabel Kanagúsico Muñoz

isabelkanagusico@hotmail.com

Patricia del Socorro Narro Ramírez

patti_narro@hotmail.com

Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen

La educación matemática debe orientarse al desarrollo de habilidades para el aprendizaje conceptual, lo que permitirá integrar el nuevo conocimiento a los previamente formados; esto propiciará que el estudiante sea capaz de tomar decisiones respecto a dónde aplicarlo y bajo qué condiciones, además de interpretar el significado de los resultados.

En esta dirección se desarrolló un programa consistente en implementar actividades que propicien el aprendizaje significativo mediante el uso de diversos registros semióticos de representación y situaciones realísticas. En el programa se contó con la participación de estudiantes inscritos en los primeros tres semestres de los programas de ingeniería que ofrece la Facultad de Sistemas.

Las actividades consistieron en la implementación de secuencias didácticas con apoyo de tecnología, inclusión en tareas y evaluaciones de reactivos que demanden tránsito entre registros y solución de problemas. Además, desarrollo de proyectos interdisciplinarios que propicien la visualización de las aplicaciones de los contenidos de la asignatura y autoaprendizaje.

Las actividades se realizaron en grupos colaborativos y se evaluaron mediante reportes, ensayos, tabloides, presentaciones y exámenes utilizando las rúbricas correspondientes.

Los resultados de la implementación de las secuencia didácticas muestran que éstas ofrecieron una alternativa que propició la participación activa del estudiante en el aprendizaje favoreciendo la visualización de patrones, el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático y la aprehensión conceptual de los objetos de estudio.

El programa provocó un cambio de actitud hacia el aprendizaje de la disciplina. Además, propició que un mayor número de estudiantes lograra el aprendizaje significativo y se interesara en continuar en el área de investigación.

1 Introducción.

La enseñanza de las Matemáticas siempre ha desempeñado un papel muy importante dentro de los currículos, y en todos los niveles educativos.

Aunque globalmente se está de acuerdo en la importancia de la educación matemática, se tiene variación en el pensamiento y opiniones en cuanto a qué, cómo y cuándo debe enseñarse. En lo que sí coinciden los expertos, es que la importancia de las Matemáticas estriba en su utilidad para la vida práctica.

Una de las principales dificultades por la que los estudiantes no encuentran atractivo el estudio de las Matemáticas, es debida a que no le encuentran una utilidad o aplicación en un sentido real o porque le encuentran carente de significado.

Algunos estudiantes intentan aprender Matemáticas como si se tratara simplemente de una colección nueva de fórmulas. Si se reduce a la memorización de las mismas, se perderá una gran cantidad de comprensión, autoconfianza y satisfacción.

La Secretaría de Educación Pública (SEP;1994) en *El libro para el maestro de matemáticas* menciona la importancia de fundamentar la enseñanza de las matemáticas en la resolución de problemas:

Un aprendizaje significativo de las matemáticas no puede reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas, ni tampoco a la aplicación mecánica de ciertos procedimientos. Por el contrario, es necesario que los alumnos aprendan a plantearse y resolver problemas en situaciones que tengan sentido para ellos y les permitan generar y comunicar conjeturas.

En sus comienzos, la educación matemática se regía por un modelo didáctico tradicional, que se centraba en enseñar sin importar demasiado cómo, no se estudiaban los métodos a fondo, ni los contextos en los que se intentaba impartir el conocimiento o la situación de cada individuo.

Actualmente es muy importante utilizar una didáctica que incluya un análisis previo del contexto de los alumnos en general y de cada individuo, que busque acercarse a cada uno y desarrollar las capacidades de autoformación, imprescindibles para que los conocimientos alcanzados puedan ser aplicados en la vida cotidiana de los individuos.

Existe un considerable interés por mejorar la enseñanza de las Matemáticas, pues los métodos tradicionales inhiben a los estudiantes a desarrollar estrategias de solución, por lo que no saben analizar, sintetizar, deducir y concluir en la resolución de problemas; y además, aplicar este conocimiento a situaciones reales. Debido a esto, la mayoría de las veces al estudiante se le hacen irrelevantes y sin interés los cursos, puesto que no le encuentran sentido ni utilidad.

La práctica docente tradicional se fundamenta generalmente en la memorización y la mecanización. De ahí que se deben poner en práctica nuevas estrategias pedagógicas, que incorporen actividades de aprendizaje más significativas.

2 Fundamentación

Este proyecto considera como base algunas experiencias y trabajos de expertos en métodos y didácticas educativas.

Definición 2.1 Una de las definiciones dada para el aprendizaje significativo involucra:

- Una relación sustantiva porque no es arbitraria, no es memorizada; sino construido otorgándole significatividad.
- Es transferible a nuevas situaciones, para solucionar nuevos problemas.
- Motiva a nuevos aprendizajes, nuevos deseos de aprender.
- Moviliza la actividad interna que es lo que permite relacionar los nuevos contenidos y procedimientos con los disponibles en la estructura interna.
- Permite la adquisición de estrategias cognitivas de observación, comprensión, descubrimiento, planificación, comparación, etc. Estrategias que enriquecen la estructura cognoscitiva acrecentándola.

John Dewey menciona “El conocimiento no es algo separado y que se baste a sí mismo, sino que está envuelto en el proceso por el cual la vida se sostiene y se desenvuelve”.

Sostuvo que el pensamiento debía cumplir un papel instrumental, mediador y evolucionista para servir a los intereses y al bienestar de los individuos. Es así que se esforzó en demostrar, cómo las ideas filosóficas podían actuar y adaptarse a los acontecimientos y a las necesidades concretas de la vida cotidiana.

En oposición a los acostumbrados métodos educativos de su época, Dewey propuso que el aprendizaje se llevara a cabo realizando diversas actividades, en lugar de utilizar únicamente, los tradicionales contenidos curriculares. En su práctica pedagógica, Dewey planteó que al igual que otros conocimientos, los contenidos de estudio eran el fruto de los esfuerzos del hombre por solucionar los problemas que su propia experiencia le marcaba.

En medio de estas nuevas interrelaciones, el docente debe saber evaluar el criterio del alumno, sin por eso perder su autoridad y liderazgo. Cuando Dewey se refiere a la libertad, no apunta a la falta de autoridad, sino a la independencia como una realidad que permite a las personas expresar sus ideas.

De este modo, el estudiante dejará de ser pasivo en la recepción de conocimientos y sabrá asumir con responsabilidad su propia formación intelectual. Para que estas interacciones sucedan en la enseñanza – aprendizaje, es menester que a la comunidad estudiantil le concierna y tenga correspondencia con las acciones y características de la sociedad externa.

Para lograr un mejor rendimiento escolar, se considera que debe haber motivación en los alumnos para que le permita atender los problemas que se le presenten, encontrándole una solución, ya que hay alumnos que evitan los problemas o tienden a darse por vencidos fácilmente, *“Aunque el estudiante cuente con habilidades para la solución de problemas, es necesario que esté motivado para usarlas(Pintrich,2000; Stenberg y Spear-Swerling, 1996, citado por Ellin,2005)*

Por lo tanto, si se quieren obtener mejores resultados en el aprendizaje, o que haya mayor motivación, se requiere que los problemas que el docente presente, tengan relación con su vida cotidiana.

“Una de las tareas relevantes del maestro es guiar y dirigir a los alumnos hacia problemas que tengan algun significado para ellos, y animarlos y apoyarlos para encontrar soluciones” (Santrock, 2006).

Según Díaz Barriga, “los teóricos de la cognición situada, parten de una fuerte crítica a la manera como la institución escolar intenta promover el aprendizaje. En particular, cuestionan la forma en que se enseñan aprendizajes declarativos abstractos y descontextualizados, conocimientos inertes, poco útiles y escasamente mitigantes, de relevancia social limitada” (Díaz Barriga y Hernández, 2002).

Menciona que en las escuelas se privilegian las prácticas educativas sucedáneas o artificiales, en las cuales se manifiesta una ruptura entre el saber qué y el saber cómo, y donde el conocimiento se trata como si fuera neutral, ajeno, autosuficiente e independiente de las situaciones de la vida real o de las prácticas sociales de la cultura a la que se pertenece. Esta forma de enseñar se traduce en aprendizajes poco significativos, es decir, carentes de significado, sentido y aplicabilidad, y en la incapacidad de los alumnos por transferir y generalizar lo que aprenden.

Señala que “por el contrario, desde una visión situada, se aboga por una enseñanza centrada en prácticas educativas auténticas, las cuales requieren ser coherentes, significativas y propositivas; en otras palabras: simplemente definidas como las prácticas ordinarias de la cultura (Brown, Collins y Duguid, 1989, p. 34). Además indica, la autenticidad de una práctica educativa puede determinarse por el grado de relevancia cultural de las actividades en que participa el estudiante, así como mediante el tipo y nivel de actividad social que éstas promueven (Derry, Levin y Schauble, 1995). Por su parte, Hendricks (2001) propone que desde una visión situada, los educandos deberían aprender involucrándose en el mismo tipo de actividades que enfrentan los expertos en diferentes campos del conocimiento”.

3 Desarrollo.

Objetivo general. Implementar una secuencia didáctica que propicie el aprendizaje significativo mediante el uso de diferentes registros semióticos de representación y situaciones realísticas.

El estudio se desarrolló en la Facultad de Sistemas de la Universidad Autónoma de Coahuila, donde se implementó una serie de actividades en contexto realístico e interdisciplinarias, con la intención de motivar al alumno a tener interés por la asignatura.

Los participantes fueron estudiantes de los primeros tres semestres de los diferentes programas de ingeniería que se ofrecen en la facultad.

Las actividades que se implementaron fueron:

- Se aplicó una encuesta inicial con el propósito de indagar el interés por el aprendizaje de las matemáticas
- Inclusión en tareas y exámenes de reactivos que demandan el tránsito entre diferentes registros de representación, así como la justificación de los resultados y la interpretación en contexto
- Se solicitó el desarrollo de un proyecto de investigación que propiciara el logro del aprendizaje significativo y por ende, la visualización de las aplicaciones de los contenidos de la asignatura.

El análisis de la información fue de tipo cualitativo y se pretende analizar el comportamiento y el trabajo realizado por los estudiantes, cuando se enfrentan al reto de resolver situaciones problemáticas.

4 Resultados

A continuación se muestran algunas opiniones de los estudiantes en cuanto a su interés por el aprendizaje de las matemáticas.

Samuel considera que la materia de Cálculo Diferencial es difícil, y expone sus motivos:

h. ¿Consideras que es muy difícil la asignatura? Si ☒ No ☐
Explica Cuando no se saben muchos términos y propósito de la materia

Azael por su parte, menciona que al no conocer la aplicación de las matemáticas en problemáticas reales, hace que se pierda el interés en el aprendizaje de la misma.

¿Consideras importante que en los cursos de matemáticas se aborden situaciones reales o de la vida cotidiana? ¿Crees que influiría en despertar el interés en el aprendizaje de la misma?

Si considero que deben usar estas situaciones, dado que el poco gusto por las matemáticas es por eso mismo, que los alumnos no se imaginan situaciones donde se usen las matemáticas y pierden el interés de manera instantánea, pero con ejemplos reales, ya nos damos una idea clara de el uso y poder de las matemáticas y comienza a despertarse el interés. Gracias!!

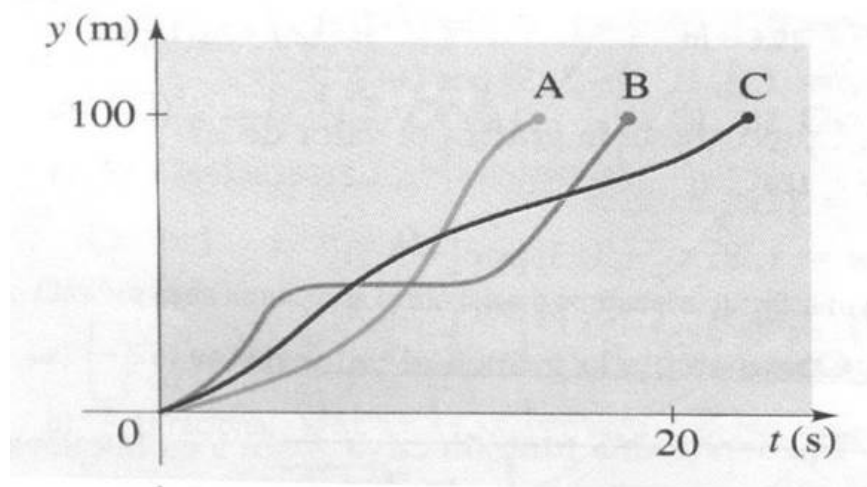
Víctor considera que al no conocer en donde se aplican las matemáticas, provoca que surja el aburrimiento en el estudiante.

¿Consideras importante que en los cursos de matemáticas se aborden situaciones reales o de la vida cotidiana? ¿Crees que influiría en despertar el interés en el aprendizaje de la misma?

Si, porque muchos no saben en donde se utiliza o cuando aplicarse y se aburren al no saber esto

Ahora veamos algunas de las actividades implementadas con el propósito de que los estudiantes relacionen lo aprendido, con alguna situación problemática que tenga significado para ellos. También se muestran las respuestas o conclusiones a los que los estudiantes llegaron:

Situación 1. Tres competidores participan en una carrera de 100 m con obstáculos. En la gráfica se ilustra la distancia como una función del tiempo para cada corredor. Describe en palabras lo que muestra la gráfica acerca de esta competencia. ¿Quién ganó la carrera?, ¿todos los corredores terminan la carrera?, ¿qué crees que le sucedió al corredor B?



Observemos la respuesta de Viridiana en este reactivo del registro gráfico al verbal:

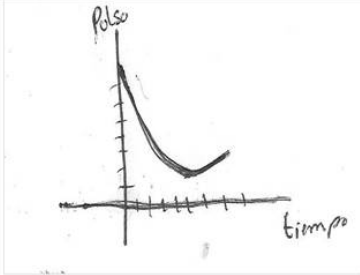
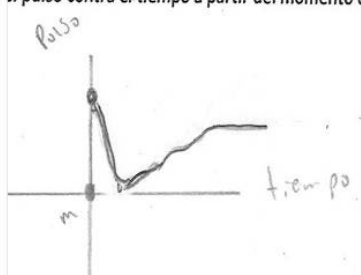
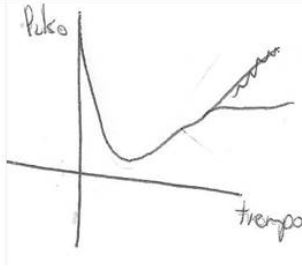
IX- Dan la señal de salida salen los 3 corredores el corredor A tiene buena condición no se aleja tanto del camino de la competencia sigue la ruta designada y llega en un tiempo menor a 20s el corredor B sale rápido pero tiene un peroncito al iniciar sus agujetas se desabrochan y ^{trabaja} se lastima el pie y no aumenta de distancia por unos segundos después se recupera y continúa su carrera hasta llegar, el corredor C sale rápido al ^{inicio} pero sigue toda la carrera tratando así que es el último en llegar con mas de 20 seg.

Notemos en este escrito que Viridiana realizó, ella “vive” la situación presentada. Pareciera que ella efectivamente está presenciando la carrera y la narra en su propia versión. En ese momento, está haciendo un análisis de la gráfica, tiene los fundamentos y es coherente con ello. Le simplifica el hecho de tener una situación real y no se “angustia” pensando que es una aplicación matemática del tema de funciones.

Situación 2. Inmediatamente después de aplicar cierto medicamento a un paciente con rápido pulso cardiaco, este último baja de modo considerable y luego sube lentamente otra vez a medida que la droga se consume. Trace una posible gráfica del pulso contra el tiempo a partir del momento que se aplica el medicamento.

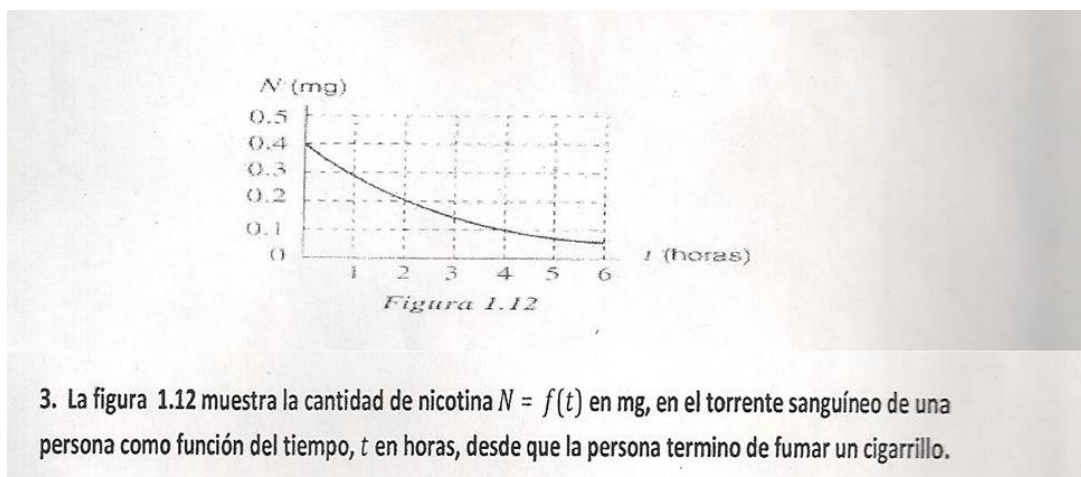
Esta situación al momento de la retroalimentación, provocó la deliberación entre los estudiantes, que es uno de los objetivos del aprendizaje significativo; que el estudiante desarrolle estrategias de razonamiento lógico, que le permita llegar a la solución correcta.

A continuación se muestran tres respuestas.

Javier	Carlos	Francisco
		

En el caso de Javier, se observa que interpreta de manera correcta la situación. Carlos, aun cuando la gráfica tiene la “forma” correcta, la extiende casi al cero de pulsaciones y provoca la polémica porque le mencionan “no hay pulso, no hay vida”. Y por último Francisco, se da cuenta que hay error, reconsidera y corrige la respuesta dada.

Situación 3



Observemos las respuestas dadas por Raúl:

a) Estime $f(3)$ e interprétela en términos de niveles de nicotina. A 3 horas de haber fumado, el nivel de nicotina es de 0.15 mg.

b) ¿aproximadamente cuantas horas han transcurrido desde que el nivel de nicotina bajo a 0.1 mg? Tiempo Transcurrido = 4 horas.

c) La intersección con la ordenada ¿Qué representa en términos de nicotina? El maximo nivel de nicotina al fumar un cigarrillo.

d) Si esta función se interceptara con la abscisa ¿Qué representaría en términos de nicotina? Maximo numero de horas con el nivel minimo de nicotina

Respuesta de Antonio para el inciso d

máximo de tiempo cuando ~~ya~~ no hay nicotina

En particular, este problema provocó gran interés en los estudiantes, dado que en su entorno, están muy familiarizados con esta situación, y les alertó el hecho de conocer que para que se elimine del torrente sanguíneo el total de nicotina de un solo cigarrillo, tienen que transcurrir muchas horas.

Otra actividad implementada consistió en el desarrollo de un proyecto de investigación que propiciara la visualización de las aplicaciones de los contenidos de la asignatura. Es decir, para que los estudiantes lograran un aprendizaje significativo, desarrollaron un proyecto en el cual tenían que aportar la aplicación matemática que ellos consideraran conveniente de los temas abordados en clase.

Los productos consistieron en un reporte escrito, un tabloide y una presentación. Cada uno de ellos se evaluó mediante la rúbrica correspondiente, y entre los criterios considerados se encuentran: conocimientos, trabajo en equipo, creatividad, claridad de las ideas, fluidez, coherencia y ortografía, entre otros.

Esto implicó actividades de autoaprendizaje como; la búsqueda bibliográfica, asistencia a conferencias, observación de vídeos, etc.

Algunos grupos trabajaron en colaborativo, aportando en temas relativos al cuidado del medio ambiente o de problemas sociales como tabaquismo, obesidad, drogadicción, etc.; realizando campañas de información y prevención a través de trípticos y catálogos.

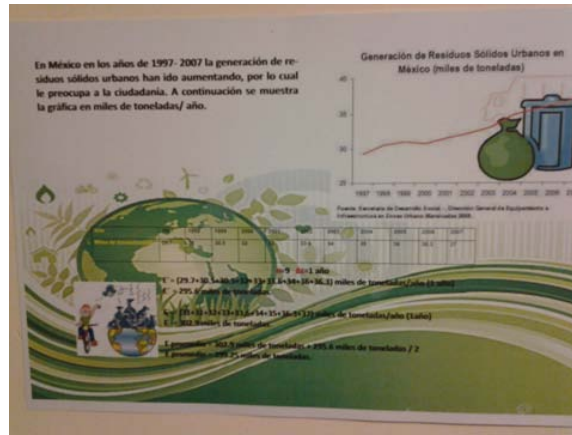
Los resultados de estos trabajos además de exponerlos ante su propio grupo se mostraron a la comunidad de la facultad en un coloquio organizado por la propia academia en donde los diferentes equipos tuvieron la oportunidad de comentarlos con sus compañeros.

En seguida se muestran algunos de los tabloides que sirvieron como parte de la campaña de información y prevención de algunos problemas sociales como son el cuidado del medio ambiente y otros como tabaquismo, drogadicción, obesidad, alcoholismo, etc.

Cabe recalcar que en esta campaña, se debía tener una aportación matemática acorde al problema abordado.

Los estudiantes relacionan los minutos de vida que se reducen por cada cigarrillo que se consume. Por lo tanto, los minutos de vida, están en función de los cigarrillos consumidos.





Aquí se muestra un problema que trata de los filtros de una planta tratadora de agua, que se hacen menos eficientes conforme transcurre el tiempo. Los estudiantes estiman la cantidad de contaminantes totales que pasan por los filtros en cierto periodo de tiempo. Utilizan diversos registros de representación.



5 Conclusiones

Se puede concluir que la implementación de estas actividades fortaleció la formación integral de un profesionista ya que demanda habilidades, conocimientos y actitudes.

En este proceso, los alumnos comunicaron, argumentaron, resolvieron problemas y construyeron modelos matemáticos.

Los estudiantes buscaron la oportunidad de transitar por diferentes registros de representación, pues cada representación tiene características propias que les proporcionan información relevante, y en la socialización, todos estos diferentes acercamientos hicieron que la discusión del problema se enriqueciera, ya que se observaron diferentes recursos y estrategias.

En términos generales, se observó que los estudiantes usaron su creatividad, sus recursos y sus heurísticas para resolver los problemas planteados.

La metodología implementada, permitió que los estudiantes tuvieran que comunicar sus ideas en forma escrita y oral. Al inicio de las actividades, experimentaron dificultades para expresar de manera concreta y entendible sus soluciones. A medida que se avanzó en la didáctica, fueron mejorando su competencia comunicativa y de argumentación.

Los estudiantes con estas actividades, tuvieron la libertad de expresar sus ideas y tomaron un rol activo ya que ellos estuvieron inmersos en un proceso de construcción de representaciones personales significativas y con sentido de la realidad. Esto a partir de experiencias previas y de la interacción que estableció con el docente y el entorno.

A continuación se muestran algunas opiniones de los alumnos donde se observa que para ellos fue una experiencia interesante y significativa.

Marleth

Comentarios acerca del trabajo colaborativo, aplicación matemática en el proyecto, participación en el Coloquio, en el Foro, etc.

Nos dimos cuenta que las matemáticas se aplican en todo. Es interesante colaborar con nuestras opiniones en el foro ya que todos aportamos nuestras ideas.

Armando

EL APRENDIZAJE COLABORATIVO FUE EXCELENTE, YA QUE APLICAMOS LA SINERGIA, Y ELIMINAMOS LAS BARRERAS ORGANIZACIONALES.

Gabriela

En cuanto a la aplicación matemática fue una experiencia sorprendente ver que en todas las cosas podemos aplicarla aún en temas muy equis.

Johana

Fue increíble como conocimos que las matemáticas pueden ser utilizadas en cualquier lugar. Al principio dio miedo que los maestros se acercaran a preguntar pero no fue tan malo cuando comenzamos a explicar y nos entendían. Fue algo muy agradable pues les enseñamos a todas nuestras ideas acerca del tema que expusimos y nos gusto haber escuchado las ideas y propuestas de los demás.

Cinthya

Comentarios acerca del trabajo colaborativo, aplicación matemática en el proyecto, participación en el Coloquio, en el Foro, etc.

Fue una experiencia constructiva, aplicando el nuevo modelo colaborativo de forma real.

Aprendimos el verdadero modelo de un sistema de trabajo, designando puestos, delegando y participando en la toma de decisiones.

6 Bibliografía:

Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5 (2). Consultado el 3 de agosto de 2015 en: <http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html>

Hughes Hallett D. Gleason A., *Cálculo Aplicado*, CECSA

Larson / Hostetler, Ed., *Cálculo Diferencial e Integral*, Mc Graw-Hill

Leithold L., *El Cálculo*, Oxford University Press

Polya, G. (1965). *¿Cómo Plantear y resolver problemas de Matemáticas?* Editorial Trillas, México.

Santos, M (1992). *La resolución de problemas: El trabajo de Alan Schoenfeld; una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas*. Educación matemática, Vol.2. No 2.(pp. 16-24)

SEP (2001) *Plan Educativo 2001-2006*, México

Smith & Milton., *Cálculo Diferencial e Integral*, Mc Graw-Hill

Stewart James, *Cálculo I*, Thomson

Un estudio del pensamiento variacional a nivel ingeniería

Ricardo Olivares Rodríguez **Mario Silvino Ávila Sandoval**
ricardo_olivares@utcj.edu.mx mavila@uacj.mx

Carlos López Rubalcaba
clopez@uacj.mx

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Resumen

El pensamiento variacional es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y los procesos de pensamiento, implica la Integración de los dominios numéricos, los conceptos de variable, función, derivada e integral. Los rasgos característicos del comportamiento variacional de una función son entre otros, crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, regiones donde la función o la función derivada son positivas, negativas o nulas (Cantoral et. al., 2003).

En esta investigación se presentan un conjunto de construcciones mentales que ayudan a los estudiantes de ingeniería a desarrollar el pensamiento variacional.

La investigación fue realizada bajo el marco teórico cognitivo APOE, en estudiantes de ingeniería de la Universidad Autónoma de ciudad Juárez.

Inicia con un examen diagnóstico, el cual pone en manifiesto las dificultades de los estudiantes en el tema del pensamiento variacional, se reflexiona sobre el concepto de interés, se desarrolla una descomposición genética del concepto matemático, se elabora un esquema inicial para este concepto y una metodología de enseñanza basada en este esquema, enseguida se instrumenta la metodología y recolecta de datos para evaluar tanto el esquema inicial como la instrucción metodológica instrumentada.

Como resultado tenemos una descomposición genética que funciona adecuadamente, para predecir las construcciones mentales que permiten a los alumnos construir los conceptos relacionados con la variación.

1 Introducción

La construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y

geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de las nociones de cambio y la variación (Cantoral et. al., 2003)

El pensamiento variacional implica poder identificar el fenómeno de cambio, describirlo, interpretarlo, predecir sus consecuencias, cuantificarlo y modelarlo. La identificación de las magnitudes, la descripción verbal y escrita de la manera como estas magnitudes se comportan en una situación, es el acercamiento cualitativo al fenómeno que permitirá sacar las primeras conclusiones y hacer algunas predicciones sobre lo que sucederá con los elementos involucrados con el transcurso del tiempo.

Para los estudiantes de ingeniería es importante poder realizar estas actividades descritas anteriormente, pues tendrán que resolver problemas donde la variación y el cambio son parte de sistemas propios de la ingeniería.

Cuando se requiere encontrar la solución de un problema, los estudiantes utilizan sus actuales esquemas matemáticos y los esquemas que han construido para otros ámbitos. Utilizan estos esquemas en los procesos de selección de variables, en el proceso de relaciones entre ellas y en la coordinación de los diferentes procesos para llegar a lo que puede llamarse la matematización de la situación problemática. Como resultado de estos procesos y coordinaciones, los estudiantes desarrollan un modelo que se encapsula en un objeto, desempeñan acciones y procesos en el modelo con el fin de analizar, determinar sus propiedades y darle respuesta a las nuevas preguntas. Nuevos esquemas tienen que ser contruidos de manera que puedan responder a todas las preguntas que se han planteado. Estos nuevos esquemas se utilizan, a su vez, para hacer acciones y procesos en el modelo y se puede emplear para modificarlo. Este ciclo se repite hasta que se encuentra el modelo que describe la situación (Trigueros, 2005).

2 Metodología de la investigación

La investigación tiene una orientación cualitativa en el marco de la teoría APOE. En este marco se sugiere la siguiente metodología para llevarla al salón de clases: diseño de una descomposición genética de los conceptos bajo estudio, diseño y aplicación de los instrumentos didácticos, validación de la propuesta didáctica, presentación del análisis y de los resultados obtenidos al utilizar los instrumentos de validación, de acuerdo con éstos proponer cambios en la situación didáctica o en la descomposición genética (Asiala, et. al., 1996). Por lo anterior la metodología a seguir es la siguiente:

1. Examen diagnóstico inicial.
2. Análisis general del examen.
3. Determinar la descomposición genética del concepto, lo cual consiste en la descomposición en pequeñas porciones de una estructura de conocimiento.
4. Inducir a los estudiantes a ejecutar las abstracciones reflexivas requeridas.
5. Examen basado en contexto.
6. Analisis y conclusiones.

3 Examen diagnóstico inicial

Para estudiar esta problemática se hizo un examen diagnóstico inicial y así poder determinar los obstáculos cognitivos que se presentan en el grupo de estudiantes de ingeniería donde se llevara a cabo la investigación, esto es con la finalidad de hacer una propuesta para la instrucción inicial, es decir la descomposición genética para el problema que se presente en el grupo.

De acuerdo con la literatura investigada sobre el tema se encontraron algunos obstáculos cognitivos que se presentan con regularidad en los estudiantes estos son:

1. Interpretar la situación problema y el contenido conceptual con el que habrá de interactuar el estudiante.
2. Análisis de las variables, constantes, parámetros.
3. Análisis de la variación en sus diferentes sistemas representación.

Una vez diseñado el instrumento para el diagnóstico consistente en preguntas alrededor de la variación en el contexto del llenado de recipientes, se aplicó a los estudiantes, para su estudio.

De acuerdo con el análisis de las respuestas que obtuvimos de los estudiantes de ingeniería, sólo la mitad de ellos identifican bien las variables, como el tiempo, el flujo de entrada que en el problema es constante, sin embargo, algunos de ellos lo consideran variable.

No tienen conceptualizada a la derivada como el medio para describir la rapidez de la variación, no encuentran cómo relacionar las variables, sólo dos construyen la función a pesar de que ésta es lineal y pasa por el origen, evocan elementos del discurso escolar tradicional erróneamente o fórmulas físicas sin sentido, tienen dificultad en la construcción de funciones en sus diferentes representaciones.

4 La descomposición genética

Se elaboró una descomposición genética basada en la problemática que fue detectada en los estudiantes, esta descomposición se sustenta básicamente en una propuesta de los niveles de desarrollo del pensamiento variacional utilizados en la tesis doctoral del Dr. Ramiro Ávila Godoy. Se hicieron modificaciones para adaptar la propuesta a la teoría APOE considerando sólo cuatro niveles de desarrollo del pensamiento (Acción, Proceso, Objeto y Esquema).

Un estudiante está en un nivel Acción si:

- A.1 Identifica las variables y constantes del problema.
- A.2 Utiliza la expresión analítica para generar tablas y gráficas de datos.
- A.3 Describe cualitativamente si el cambio es constante o variable a partir de su representación numérica y gráfica.
- A.4 Utiliza tablas de datos para determinar la dirección de la variación y caracteriza la rapidez constante o variable.
- A.5 En la representación gráfica de la función lineal asocia la inclinación con la rapidez de variación.
- A.6 Tiene sentido cualitativo y continuo de la variación.
- A.7 Identifica la dirección y la rapidez en la representación gráfica.

A.8 Asocia la dirección de una curva con la dirección de la variación.

Un estudiante está en un nivel Proceso si:

P.1 En las diferentes representaciones de la función interpreta que el cociente de las diferencias entre dos parejas de valores de las variables determina la rapidez promedio de cambio.

P.2 Adquiere sentido la rapidez instantánea de cambio y sabe que no puede obtenerse a partir de una tabla.

P.3 En las representaciones gráficas adquiere sentido la pendiente de las rectas tangentes como medida del valor de la rapidez instantánea en un punto.

P.4 Concibe las funciones como representación de la variación.

P.5 Utiliza la expresión analítica de la derivada como una fórmula que permite calcular de manera exacta el valor de la rapidez instantánea.

Un estudiante está en un nivel Objeto si:

O.1 Interpreta el signo de la derivada como indicador de la dirección de la variación.

O.2 Interpreta los valores de la variable independiente para los cuales la derivada tiene valor de cero, como candidatos a puntos en los cuales o cambia la dirección de la variación o cambia la dirección de la rapidez.

O.3 El signo de la segunda derivada lo considera como un indicador del crecimiento o decrecimiento de la rapidez y lo relaciona con la concavidad de la curva.

O.4 Las expresiones analíticas son modelos que representan las variaciones y tienen cierta regularidad.

O.5 Clasifica modelos en función de su comportamiento e interpreta la variación determinando el modelo que mejor le acomoda.

Un estudiante está en un nivel Esquema si:

E.1 Utiliza las diversas formas de representación de la variación para analizar, interpretar y resolver problemas.

E.2 Conoce los modelos analíticos básicos y sabe cuales son sus propiedades.

E.3 Interpreta apropiadamente los problemas y los resuelve con creatividad.

5 Diseño de la instrucción

La situación de aprendizaje realizada está basada en la descomposición genética para el problema del pensamiento variacional, y en la propia experiencia del profesor, se ha elaborado una secuencia de construcciones mentales para realizar en el salón de clases, que lleve a los estudiantes a reflexionar sobre los conceptos matemáticos necesarios para comprender el tema. Se utilizaron los software Geogebra y Mathematica como una ayuda visual al construir los conceptos matemáticos, se buscaron problemas que cumplieran con los requisitos anteriores tomando algunos de ellos de los libros de cálculo diferencial de los autores, James Stewart y otros de Cálculo de Deborah – Hughes, La instrucción se desarrolló en un grupo de 25 estudiantes inscritos en la materia de ecuaciones diferenciales ordinarias en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,

fue implementada durante cuatro sesiones de aproximadamente dos horas cada una, logrando bastante participación y entusiasmo por parte de los estudiantes, los ejercicios fueron resueltos en equipos de cuatro personas, donde no se limitó el tiempo para su solución.

6 Análisis de resultados

En general, posterior a la aplicación del diseño de la instrucción, se observaron, a manera de resumen los siguientes resultados, ante las diversas situaciones problemáticas planteadas alrededor de la variación:

1. Dan muestra de reconocer la variación lineal, pudieron identificar las variables de cambio en el sistema y han aumentado su vocabulario técnico.
2. Los estudiantes logran identificar y describir de una manera correcta la variación. Podemos observar que han empezado a escribir argumentos, logran interiorizar la rapidez de la variación en su representación gráfica, la concepción, en general dan muestra de poseer la concepción de Acción.
3. Con respecto a una gráfica que define un fenómeno de crecimiento poblacional, no logran identificar el punto de inflexión y esto los lleva a incurrir en el error al determinar los intervalos de concavidad de una función, sí tienen el concepto pero no logran aplicarlo, es decir, existe un obstáculo epistemológico en este caso. La mayoría no menciona los signos de la segunda derivada en cada intervalo, la primera derivada fue más fácil de ver para ellos, al tener interiorizado el concepto de pendiente.
4. Sólo dos estudiantes no logran identificar la rapidez promedio de cambio en su representación gráfica, en general podemos decir que han interiorizado este concepto.
5. Los estudiantes tienen problemas para modelar una situación que implica la rapidez con que cambia una variable, es decir, no pueden generar la ecuación diferencial de modelos sencillos.
6. Los estudiantes muestran serias deficiencias al momento de leer una rapidez de cambio a partir de una gráfica.
7. Los alumnos no usan esquemas gráficos para analizar los problemas, utilizaron funciones para modelar la rapidez de cambio en lugar de sus derivadas, tuvieron un obstáculo evidente al tratar de formular la variación cuando se da en forma de enunciado, en síntesis no pudieron establecer una relación entre las diferentes formas de representar la variación, que anteriormente utilizaron.

7 Conclusiones

Los resultados del examen diagnóstico inicial ponen en manifiesto el tipo de dificultades que enfrentan los estudiantes cuando intentan resolver problemas de variación y las estrategias que siguen al intentar resolverlos. Una vez más queda en evidencia la falta de concepciones matemáticas en el cálculo diferencial, al no tener significado para el estudiante de ingeniería los conceptos, no ven el cálculo diferencial como objeto matemático que tiene vida, sino como algo estático que carece de sentido, lo anterior pudiera ser el resultado de sus sistemas de prácticas en los cursos de matemáticas en ingeniería, por lo que es necesario nutrir el discurso matemático escolar

y dejar a un lado el enfoque algorítmico que ofrecen los programas y libros de estudio.

En el análisis de los resultados individuales, vemos que al tratar de representar la variación se facilita la representación gráfica y pueden observar mejor el cambio, la función analítica tiene menos significado.

Las concepciones alcanzadas por los estudiantes después de realizar la instrucción que se elaboró para el problema de variación son que el 96 % de ellos logran alcanzar la concepción Acción que inicialmente no tenían, también el 60 % interiorizan las acciones en Procesos y esto les permite responder acertadamente a los problemas, lo anterior nos indica que la descomposición genética funciona adecuadamente para predecir las construcciones mentales que permiten a los alumnos construir los conceptos relacionados con el tema de variación; sólo un 20 % logra encapsular los procesos en objetos. Pudimos observar también, cómo los estudiantes fueron capaces de resolver con éxito las primeras actividades y conforme avanzaron en dificultad tuvieron algunos obstáculos que se hicieron evidentes.

8 Referencias

Asiala, M, Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, en *Research in Collegiate Mathematics Education*.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México, D.F, México, Trillas.

Trigueros, M. (2005), La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior, *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 1, pp (5-31).

Física Matemática

Geometric Number Systems and Spinors

Garret Sobczyk

<http://www.garretstar.com>

Universidad de las Américas Puebla
Departamento de Físico-Matemáticas

Resumen

The real number system is geometrically extended to include three new *anticommuting* square roots of plus one, each such root representing the direction of a unit vector along the orthonormal coordinate axes of Euclidean 3-space. The resulting geometric (Clifford) algebra provides a geometric basis for the famous Pauli matrices which, in turn, proves the consistency of the rules of geometric algebra. The flexibility of the concept of geometric numbers opens the door to new understanding of the nature of space-time, and of Pauli and Dirac spinors as points on the Riemann sphere, including Lorentz boosts.

AMS Subject Classification: 15A66, 81P16

Keywords: geometric algebra, relative geometric algebra, Riemann sphere, complex Riemann sphere.

1 The geometric algebra of space $\mathbb{G}_3$

The most direct way of obtaining the geometric algebra $\mathbb{G}_3$ of space is to extend the real number system $\mathbb{R}$ to include three new *anti-commutative* square roots $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ of $+1$, that represent *unit* vectors along the respective xyz -coordinate axes. Thus, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \notin \mathbb{R}$ and $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1$. The resulting associative geometric algebra $\mathbb{G}_3 := \mathbb{R}[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, as a real linear space, has the $2^3 = 8$ -dimensional standard basis

$$\mathbb{G}_3 = \text{span}_{\mathbb{R}}\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{123}\},$$

where $\mathbf{e}_{jk} := \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j$ represent unit *bivectors* in the three xy, xz, yz -coordinate planes, for $j \neq k$, and $I := \mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ represents the oriented *directed trivector*, or *pseudoscalar* element of space. The geometric numbers of 3-dimensional space are pictured in Figure 1.

To see that the rules of our geometric algebra are consistent, we relate it immediately to the famous Pauli algebra $\mathcal{P}$ of square 2×2 matrices over the complex numbers $\mathbb{C}$. The most intuitive way of doing this is to introduce the *mutually annihilating idempotents* $u_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{e}_3)$, which satisfy the rules

$$u_+^2 = u_+, \quad u_-^2 = u_-, \quad u_+ u_- = 0, \quad u_+ + u_- = 1, \quad u_+ - u_- = \mathbf{e}_3.$$

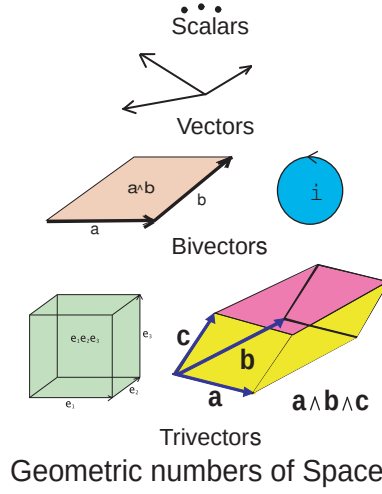


Figure 1: Geometric numbers of space

In addition, $\mathbf{e}_1 u_+ = u_- \mathbf{e}_1$. All these rules are easily verified and left to the reader. Another important property of the geometric algebra $\mathbb{G}_3$ is that the pseudoscalar element $I = \mathbf{e}_{123}$ is in the center of the algebra, commuting with all elements, and $I^2 = -1$. Thus I can take over the roll of the unit imaginary $i = \sqrt{-1}$.

By the spectral basis $\mathcal{S}_{\mathbb{G}}$ of the geometric algebra $\mathbb{G}_3$, we mean

$$\mathcal{S}_{\mathbb{G}} := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} u_+ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_+ & \mathbf{e}_1 u_- \\ \mathbf{e}_1 u_+ & u_- \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where I is taking over the roll of $i = \sqrt{-1}$ in the usual Pauli algebra. Any geometric number $g = s + It + \mathbf{a} + I\mathbf{b} \in \mathbb{G}_3$ corresponds directly to a Pauli matrix $[g]$, by the simple rule

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} u_+ [g] \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}.$$

For example, the famous Pauli matrices $[\mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3]$ are specified by

$$[\mathbf{e}_1] := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{e}_2] := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{e}_3] := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

as can be easily checked. For $[\mathbf{e}_2]$, we have

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} u_+ \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} = I\mathbf{e}_1(u_+ - u_-) = I\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3.$$

This shows that the Pauli algebra $\mathcal{P}$ and the geometric algebra $\mathbb{G}_3$ are fully compatible as algebraically isomorphic algebras over the complex numbers

$$\mathbb{C} := \{z = s + tI \mid \text{for } s, t \in \mathbb{R}\}.$$

The geometric product of geometric numbers $g_1 g_2$ corresponds to the usual matrix algebra product of the matrices $[g_1][g_2] = [g_1 g_2]$. The great advantage of the geometric algebra $\mathbb{G}_3$ over the Pauli algebra $\mathcal{P}$, is that the geometric numbers are liberated from their coordinate representations as 2×2 complex matrices, as well as being endowed with a complete geometric interpretation. On the other hand, the consistency of the rules of the geometric algebra follow from the known

consistency of rules of matrix algebra, and matrices offer a computational tool for computing the product of geometric numbers [9].

It is worthwhile to give a summary of the deep relationship between pre-relativistic (Gibbs-Heaviside) vector algebra, and the geometric algebra $\mathbb{G}_3$. The geometric product of two vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{G}_3^1$ is given by

$$\mathbf{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \quad (3)$$

where the inner product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \in \mathbb{R}$, and the outer product $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})$ has the interpretation (due to Grassmann) of the bivector in the plane of the vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. The bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = I(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, where $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is the vector normal to the plane of $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, and is its dual.

Another advantage of the geometric product $\mathbf{ab}$ over the inner product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ and the cross product $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, is the powerful cancellation rule

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ac} \iff \mathbf{a}^2 \mathbf{b} = \mathbf{a}^2 \mathbf{c} \iff \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

provided of course that $\mathbf{a}^2 \neq 0$. It takes knowledge of both $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ and $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ (or $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$), to uniquely determine the relative directions of the vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. Another unique advantage in the the geometric algebra is the Euler formula made possible by (3),

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|e^{I\hat{\mathbf{c}}\theta} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\cos \theta + I\hat{\mathbf{c}} \sin \theta),$$

where $|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a}^2}$ and similarly for $|\mathbf{b}|$, and θ is the angle between the vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. The unit vector $\hat{\mathbf{c}}$ can be defined by $\hat{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$.

The Euler formula for the bivector $I\hat{\mathbf{c}}$, which has square -1 , is the generator of rotations in the plane of the bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Later, when talking about Lorentz boosts, we will also utilize the hyperbolic Euler form

$$e^{\phi \hat{\mathbf{v}}} = \cosh \phi + \hat{\mathbf{v}} \sinh \phi, \quad (4)$$

where $\tanh \phi = \frac{v}{c} \in \mathbb{R}$ determines the rapidity of the boost in the direction of the unit vector $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{G}_3^1$.

A couple more formulas, relating the vector cross and dot products to the geometric product, are

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} := \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})I = I \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}],$$

and

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) := (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = -\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

The triple vector products $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ and $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ are directly related to the geometric product by the identity

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a}),$$

where $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a})$ and $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a})$. Detailed discussions and proofs of these identities, and their generalizations to higher dimensional geometric algebras, can be found in [8], [10]. Geometric algebra has in recent years become a basic tool for research in quantum mechanics [1], [3], and more generally as a basic language of mathematics and physics [2], [8].

We now return to beautiful results which depend in large part only upon the geometric product. Thus the reader can relax and rely upon the familiar rules of matrix algebra, which are equally valid in the isomorphic geometric algebra.

2 Stereographic projection in $\mathbb{R}^3$

Consider the equation

$$\mathbf{m} = \frac{2}{\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3} = \frac{2(\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3)}{(\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3)^2} = \frac{\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3}{1 + \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}_3}, \quad (5)$$

where $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ is a unit vector for the vector $\mathbf{a} \in \mathbb{G}_3^1$. Clearly, this equation is well defined except when $\hat{\mathbf{a}} = -\mathbf{e}_3$. Let us solve this equation for $\hat{\mathbf{a}}$, but first we find that

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_3 = \left(\frac{2}{\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3} \right) \cdot \mathbf{e}_3 = 1.$$

Returning to equation (5),

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{2}{\mathbf{m}} - \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\mathbf{m}}(2 - \mathbf{m}\mathbf{e}_3) = \frac{1}{\mathbf{m}}(2 + \mathbf{e}_3\mathbf{m} - 2\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{m}) = \hat{\mathbf{m}}\mathbf{e}_3\hat{\mathbf{m}}. \quad (6)$$

Equation (5) can be equivalently expressed by

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{m}}\mathbf{e}_3\hat{\mathbf{m}} = (\hat{\mathbf{m}}\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3\hat{\mathbf{m}}) = (-I\hat{\mathbf{m}})\mathbf{e}_3(I\hat{\mathbf{m}}),$$

showing that $\hat{\mathbf{a}}$ is obtained by a rotation of $\mathbf{e}_3$ in the plane of $\hat{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{e}_3$ through an angle of 2θ where $\cos \theta := \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{m}}$, or equivalently, by a rotation of $\mathbf{e}_3$ in the plane of $I\hat{\mathbf{m}}$ through an angle of π .

It is easily shown that the most general idempotent in $\mathbb{G}_3$ has the form

$$s = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{m} + I\mathbf{n}) \quad (7)$$

where

$$(\mathbf{m} + I\mathbf{n})^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{m}^2 - \mathbf{n}^2 = 1 \quad \text{and} \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

and $I := \mathbf{e}_{123}$ is the unit pseudoscalar element in $\mathbb{G}_3^3$. Consider now idempotents of the form $p = (1 + \lambda\mathbf{e}_1)u_+$, where $\lambda \in \mathbb{G}_3^{0+3}$. Equating $s = p$, we find that

$$(1 + \mathbf{m} + I\mathbf{n}) = (1 + \lambda\mathbf{e}_1)(1 + \mathbf{e}_3) = 1 + \lambda\mathbf{e}_1 - I\lambda\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Changing the parity of this equation, gives

$$(1 - \mathbf{m} + I\mathbf{n}) = (1 - \lambda^\dagger\mathbf{e}_1)(1 - \mathbf{e}_3) = 1 - \lambda^\dagger\mathbf{e}_1 - I\lambda^\dagger\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

since the parity change (changing the sign of vectors) λ^- of λ is identical to the reverse (reversing the order of products of vectors) $\lambda^\dagger$ of λ .

We can now solve these last two equations for $\mathbf{m}$ and $I\mathbf{n}$ in terms of λ , getting

$$\mathbf{m} = \frac{\lambda + \lambda^\dagger}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\lambda - \lambda^\dagger}{2I}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad I\mathbf{n} = \frac{\lambda - \lambda^\dagger}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{\lambda + \lambda^\dagger}{2I}\mathbf{e}_2 = \mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3,$$

or

$$\mathbf{m} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_3 \quad \text{and} \quad \mathbf{n} = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_3, \quad (8)$$

where $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$, the xy -plane. From (7), it immediately follows that

$$s = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{m} + I\mathbf{n}) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{m} + \mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{m}u_+. \quad (9)$$

We also easily find that

$$\mathbf{m}^2 = 1 + \lambda\lambda^\dagger = 1 + \mathbf{x}^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{m}| = \sqrt{1 + \lambda\lambda^\dagger} = \sqrt{1 + \mathbf{x}^2}.$$

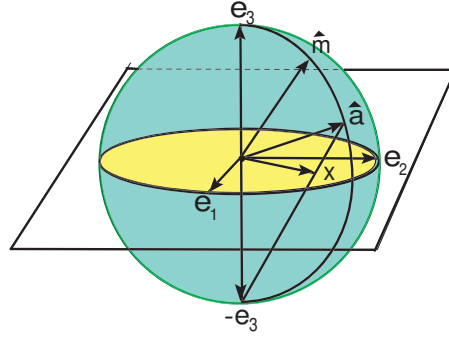


Figura 2: Stereographic Projection from the South Pole to the xy -plane.

A Pauli spinor is a column matrix of two complex components, which we denote by $[\alpha]_2 := \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$. Each Pauli spinor $[\alpha]_2$ corresponds to a *minimal left ideal* $[\alpha]_L$, which in turn corresponds to geometric Pauli spinor, or *Pauli g-spinor* α in the geometric algebra $\mathbb{G}_3$. We have

$$[\alpha]_2 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow [\alpha]_L := \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \alpha := (\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1)u_+ \in \mathbb{G}_3. \quad (10)$$

By factoring out α_0 from g -spinor α , we get

$$\alpha = (\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1)u_+ = \alpha_0(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \mathbf{e}_1)u_+ = \alpha_0 p = \alpha_0 \mathbf{m} u_+,$$

where $p = s$ is the idempotent defined above for $\lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$.

By the *norm* $|\alpha|$ of the g -spinor α , we mean

$$|\alpha| := \sqrt{2\langle \alpha^\dagger \alpha \rangle_0} = \sqrt{\alpha_0 \alpha_0^\dagger + \alpha_1 \alpha_1^\dagger} \geq 0, \quad (11)$$

where $\langle g \rangle_0$ means the *real number part* of the geometric number $g \in \mathbb{G}_3$. More generally we define the sesquilinear inner product between the g -spinors α, β to be

$$\langle \alpha | \beta \rangle := 2\langle \alpha^\dagger \beta \rangle_{0+3} = \alpha_0^\dagger \beta_0 + \alpha_1^\dagger \beta_1,$$

where $\langle g \rangle_{0+3}$ means the scalar and pseudo-scalar parts of the geometric number $g \in \mathbb{G}_3$. A g -spinor α is said to be *normalized* if $|\alpha| = 1$.

From equations (7) and (11), it follows that for $\lambda = \alpha_0^{-1} \alpha_1$,

$$\alpha = \alpha_0 s = \alpha_0 \sqrt{1 + \lambda \lambda^\dagger} \hat{\mathbf{m}} u_+ = \rho e^{I\theta} \hat{\mathbf{m}} u_+ = \rho e^{I\theta} \hat{\mathbf{a}}_+ \hat{\mathbf{m}},$$

where $e^{I\theta} := \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0 \alpha_0^\dagger}}$, $\rho := \sqrt{\alpha_0 \alpha_0^\dagger + \alpha_1 \alpha_1^\dagger}$, and $\hat{\mathbf{a}}_+ := \hat{\mathbf{m}} u_+ \hat{\mathbf{m}}$. Equations (5) and (6) have an immediate

interpretation on the Riemann sphere centered at the origin. Figure 2 shows a cross-section of the Riemann 2-sphere, taken in the plane of the bivector $\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3$, through the origin. We see that the stereographic projection from the South pole at the point $-\mathbf{e}_3$, to the point $\hat{\mathbf{a}}$ on the Riemann sphere, passes through the point $\mathbf{x} = \text{proj}(\mathbf{m})$ of the point $\mathbf{m}$ onto the plane through the origin with the normal vector $\mathbf{e}_3$. Stereographic projection is just one example of conformal mappings, which have important generalizations to higher dimensions [6].

We can now simply answer a basic question in quantum mechanics. If a spin $\frac{1}{2}$ -particle is prepared in a normalized Pauli g -spin state α , what is the probability of finding it in a normalized Pauli g -state β immediately thereafter? We calculate

$$\begin{aligned}\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle &= 2\left\langle(\alpha^\dagger\beta)^\dagger(\alpha^\dagger\beta)\right\rangle_{0+3} = 2\left\langle u_+\hat{\mathbf{m}}_b\hat{\mathbf{m}}_au_+\hat{\mathbf{m}}_a\hat{\mathbf{m}}_bu_+\right\rangle_{0+3} \\ &= 2\langle\hat{\mathbf{m}}_b\hat{\mathbf{b}}_+\hat{\mathbf{a}}_+\hat{\mathbf{b}}_+\hat{\mathbf{m}}_b\rangle_{0+3} = \langle(1+\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{b}})u_+\rangle_{0+3} = \frac{1}{2}(1+\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{b}}).\end{aligned}\quad (12)$$

This relationship can be more directly expressed in terms of $\mathbf{m}_a$ and $\mathbf{m}_b$. Using (6), for $\hat{\mathbf{a}} = \frac{2}{\mathbf{m}_a} - \mathbf{e}_3$ and $\hat{\mathbf{b}} = \frac{2}{\mathbf{m}_b} - \mathbf{e}_3$, a short calculation gives the result

$$1 - \frac{(\mathbf{m}_a - \mathbf{m}_b)^2}{\mathbf{m}_a^2\mathbf{m}_b^2} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(\mathbf{m}_a - \mathbf{m}_b)^2}{\mathbf{m}_a^2\mathbf{m}_b^2} = \frac{1}{2}(1 - \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}), \quad (13)$$

showing that the probability of finding the particle in that Pauli g -state $|\beta\rangle$ is directly related to the Euclidean distance between the points $\mathbf{m}_a$ and $\mathbf{m}_b$.

Clearly, when $\hat{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{a}}$, the expression in (13) simplifies to

$$\frac{(\mathbf{m}_a - \mathbf{m}_b)^2}{\mathbf{m}_a^2\mathbf{m}_b^2} = 1.$$

This will occur when $\mathbf{m}_b := \frac{1}{\mathbf{m}_a \wedge \mathbf{e}_3} \mathbf{m}_a$, for which case

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{m}}_b \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{m}}_b = -\hat{\mathbf{m}}_a \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{m}}_a = -\hat{\mathbf{a}} \quad \text{and} \quad \mathbf{m}_b \cdot \mathbf{m}_a = 0.$$

Writing $\mathbf{m}_a = \mathbf{x}_a + \mathbf{e}_3$ for $\mathbf{x}_a \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{m}_b = \mathbf{x}_b + \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\mathbf{x}_a \mathbf{e}_3} (\mathbf{x}_a + \mathbf{e}_3) = \frac{\mathbf{e}_3 \mathbf{x}_a}{\mathbf{x}_a^2} (\mathbf{x}_a + \mathbf{e}_3) = -\frac{1}{\mathbf{x}_a} + \mathbf{e}_3. \quad (14)$$

More details of the constructions found in this section can be found in [4] and [7].

3 Dirac spinors

What is missing in the concept of a Pauli spinor is the ability to distinguish between Pauli spinors in different reference frames. Within the geometric algebra $\mathbb{G}_3$, we are able to distinguish different inertial systems. Recall that the rest frame that defined the geometric algebra $\mathbb{G}_3$ was $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, oriented by the property that $\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = I$. A set of three orthonormal geometric numbers $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, specified by the condition

$$\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} = e^{\frac{1}{2}\phi\hat{\mathbf{v}}} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} e^{-\frac{1}{2}\phi\hat{\mathbf{v}}},$$

where each $\mathbf{e}'_k := e^{\frac{1}{2}\phi\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{e}_k e^{-\frac{1}{2}\phi\hat{\mathbf{v}}}$, defines a *rest frame*, or *inertial system* of *relative vectors* moving with a velocity of $\frac{\mathbf{v}}{c} = \hat{\mathbf{v}} \tanh \phi$, with respect to the inertial system defined by $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^3$. If $X = ct + \mathbf{x}$ represents the *time* t and *position vector* $\mathbf{x}$ of an event in the inertial system $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^3$, then the corresponding event $X' = ct' + \mathbf{x}'$ in the inertial system $\{\mathbf{e}'_k\}_{k=1}^3$ is specified by the *active Lorentz transformation* $X' = X e^{-\phi\hat{\mathbf{v}}}$, [8], [11].

Each inertial system is distinguished by how its observer partitions its geometric numbers into vectors and bivectors, in the same sense that what one observer identifies as a pure electric field, becomes a mixture of an (vector) electric and (bivector) magnetic field in an inertial system not

at rest. But all observers have the same pseudoscalar element $I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$, representing the unit trivector of space. The relative geometric algebra

$$\mathbb{G}'_3 := \text{gen}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{e}'_k\}_{k=1}^3 = e^{\frac{1}{2}\phi\hat{\mathbf{v}}}\mathbb{G}_3 e^{-\frac{1}{2}\phi\hat{\mathbf{v}}},$$

consists of the same geometric numbers as in $\mathbb{G}_3$, but with a different observer dependent partition of what elements are identified as (relative) vectors, and what elements are identified as (relative) bivectors. These ideas have been explored by the author more fully in [11], and in the book [8, Chps:2,11].

Consider now Dirac spinors of the form

$$\mathbf{M}_\phi := e^{\phi\mathbf{e}_3}\mathbf{x} + \mathbf{e}_3 = \mathbf{x} \cosh \phi + \mathbf{e}_3 + I\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x} \sinh \phi \quad (15)$$

where $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, and $\phi \in \mathbb{R}$. When $\phi = 0$, $\mathbf{M}_0 = \mathbf{x} + \mathbf{e}_3$ becomes the Pauli spinor given in (8). Indeed, since $\mathbf{M}_\phi^2 = \mathbf{x}^2 + 1 \geq 1$,

$$\hat{\mathbf{M}}_\phi = \frac{\mathbf{M}_\phi}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + 1}} = e^{\frac{1}{2}\phi\mathbf{e}_3} \frac{\mathbf{M}_0}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + 1}} e^{-\frac{1}{2}\phi\mathbf{e}_3}, \quad (16)$$

so $\hat{\mathbf{M}}_\phi$ is just the normalized spinor defined by $\alpha = \hat{\mathbf{m}}_{u+}$ boosted into the inertial system $\{\mathbf{e}'_k\}_{k=1}^3$ where $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_3$.

Starting with (15), we calculate

$$\hat{\mathbf{M}}_\phi = \frac{\mathbf{x} \cosh \phi + \mathbf{e}_3}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + 1}} + \frac{I(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}) \sinh \phi}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + 1}} = \mathbf{m}_1 + I\mathbf{m}_2 = e^{\frac{1}{2}\omega\hat{\mathbf{m}}_1 \times \hat{\mathbf{m}}_2} \hat{\mathbf{m}}_1 e^{-\frac{1}{2}\omega\hat{\mathbf{m}}_1 \times \hat{\mathbf{m}}_2}, \quad (17)$$

where $\cosh \omega := |\mathbf{m}_1|$ and $\sinh \omega := |\mathbf{m}_2|$, which defines the velocity

$$\tanh \frac{\omega}{2} = \frac{v_\omega}{c} := \sqrt{\frac{(\mathbf{m}_2)^2}{(\mathbf{m}_1)^2}} = \frac{|\mathbf{x}| \sinh \phi}{\sqrt{\mathbf{x}^2 \cosh^2 \phi + 1}}$$

in the direction

$$\hat{\mathbf{m}}_1 \times \hat{\mathbf{m}}_2 = \frac{-\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_3 |\mathbf{x}| \cosh \phi}{\sqrt{\mathbf{x}^2 \cosh^2 \phi + 1}}.$$

From (16) and (17), it follows that the spinor $\mathbf{M}_0$ boosted in the direction of $\mathbf{e}_3$, with rapidity $\tanh \phi = \frac{v}{c}$, is in the same inertial system as the spinor defined by $\hat{\mathbf{m}}_1$ boosted in the direction of $\hat{\mathbf{m}}_1 \times \hat{\mathbf{m}}_2$ with rapidity $\tanh \omega = \frac{\omega}{c}$.

Just as the equations (5) and (6) led to the interpretation of stereographic projection on the Riemann sphere, Figure 2, the generalized equation

$$\mathbf{M}_\phi = \frac{2}{\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{e}_3} \iff \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{M}}_\phi \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{M}}_\phi,$$

where $\hat{\mathbf{A}}^2 = 1$, leads to a stereographic projection of the Riemann sphere, followed by a boost. This is most clearly seen by writing

$$\hat{\mathbf{M}}_\phi \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{M}}_\phi = e^{\frac{1}{2}\phi\hat{\mathbf{m}}_1 \times \hat{\mathbf{m}}_2} \hat{\mathbf{m}}_1 \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{m}}_1 e^{-\frac{1}{2}\phi\hat{\mathbf{m}}_1 \times \hat{\mathbf{m}}_2},$$

so the Dirac g -spinor represented by $\hat{\mathbf{M}}_\phi$, maps the North Pole $\mathbf{e}_3$ into the point $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{m}}_1 \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{m}}_1$ on the Riemann sphere, followed by the boost $e^{\frac{1}{2}\phi\hat{\mathbf{m}}_1 \times \hat{\mathbf{m}}_2}$. See [5] for more details of this construction.

Referencias

- [1] W.E. Baylis, J.D. Keselica, *The Complex Algebra of Physical Space: A Framework for Relativity*, Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 22, No. 3, pp. 537 - 561, 2012.
- [2] D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*, 2nd Ed., Kluwer 1999.
- [3] D. Hestenes, *Zitterbewegung in Quantum Mechanics*, Found Physics (2010) 40:1-54.

http://geocalc.clas.asu.edu/pdf/ZBWinQM15**.pdf
- [4] G. Sobczyk, *Part I: Vector Analysis of Spinors*, (2014)

<http://arxiv.org/abs/1507.06608>
- [5] G. Sobczyk, *Part II: Spacetime Algebra of Dirac Spinors*, (2015)

<http://arxiv.org/abs/1507.06609>
- [6] G. Sobczyk, Conformal Mappings in Geometric Algebra, Notices of the AMS, Volume 59, Number 2, p.264-273, 2012.
- [7] G. Sobczyk, *Geometry of Spin 1/2 Particles*, Revista Mexicana de Física, **61** (2015) 211-223.

http://rmf.smf.mx/pdf/rmf/61/3/61_3_211.pdf
- [8] G. Sobczyk, *New Foundations in Mathematics: The Geometric Concept of Number*, Birkhäuser, New York 2013.
- [9] G. Sobczyk, Geometric Matrix Algebra, *Linear Algebra and its Applications*, 429 (2008) 1163-1173.
- [10] G. Sobczyk, Hyperbolic Number Plane, The College Mathematics Journal, Vol. 26, No. 4, pp.268-280, September 1995.
- [11] G. Sobczyk, *Spacetime Vector Analysis*, Physics Letters A, Vol 84A, p.45-49, 1981.

La noción de distribución de probabilidad de Max Born en Física Cuántica. El Origen

Francisco Guillermo Herrera Armendia
harmendia@gmail.com

Marcos Fajardo Rendón
marktrony2k@gmail.com

Departamento de Matemáticas
Escuela Normal Superior de México

Resumen

En uno de sus libros^[1] Max Born argumentó que el último criterio de la verdad científica es la conciliación plena entre la teoría y la práctica, y solamente cuando todos los esfuerzos por describir los hechos a través de ideas institucionalizadas falla, es cuando nuevas nociones surgen, cautelosas en principio, pero triunfantes después al ser confirmadas por el proceso de experimentación y es así que el pensamiento filosófico de la ciencia clásica se ha transformado en pensamiento filosófico moderno y que culmina con el trabajo propuesto por Niels Bohr titulado “Principio de completitud”. Born fue un productivo investigador científico y durante 3 décadas abordó temas relacionados con la física moderna. Dentro de sus primeras publicaciones se encuentra la Teoría de la relatividad propuesta por Einstein^[2].

1 Introducción

Un producto de investigación importante de Born se titula: “Interpretación estadística de la Mecánica Cuántica” y se publicó por vez primera en inglés^[3] el viernes 14 de octubre de 1955 traducida del alemán por el profesor Robert Schlapp entonces miembro del colegio de física matemática de la Universidad de Edimburgo en Escocia y corresponde a la conferencia que ofreció Born* en Estocolmo, Suecia al ser galardonado con el Premio Nobel de Física el 11 de diciembre de 1954 y que compartió con Walter Bothe. En esos años, el Dr. Born residía en Bad Pyrmont, ciudad de

*El artículo lo elaboró Max Born en primera persona. Es un excelente ejemplo que muestra la forma de narrar acontecimientos científicos de primer orden y ante un público muy selecto. Algunos estudiantes de posgrado en el área educativa tienen la errónea idea de escribir sus producciones en tercera persona, argumentando seriedad absoluta, pese a que investigadores en educación como Simon Goodchild y Lyn English en su texto *Researching Mathematics classrooms. A critical Examination of Methodology*, publicado en 2002, sostienen que debe escribirse en primera persona. En este sentido es una muestra maravillosa de didáctica del conocimiento científico.

la antigua Alemania Federal. Se dedicaba a la docencia, además de dirigir el Instituto de Física Teórica de la Universidad de Göttingen. Poseía la Cátedra Stoke en el área de Matemáticas en la Universidad de Cambridge y la Cátedra Tait en el área de Filosofía Natural en la Universidad de Edimburgo, ambas en el Reino Unido. Como Born puntualizara al principio de su conferencia, su trabajo no se relacionaba con un nuevo descubrimiento de algún fenómeno de la naturaleza sino más bien con una nueva forma de pensar acerca de estos fenómenos naturales. Mucho de su trabajo en la Universidad de Göttingen contribuyó a aclarar la crisis intelectual del pensamiento científico a causa del descubrimiento de Planck, en 1900, relacionado con la acción de los “cuantos”. Sin embargo, a mediados del siglo XX el pensamiento científico volvía a entrar en crisis intelectual, aunque relacionada con aspectos lógicos y epistemológicos que los descubrimientos de fenómenos relacionados con la física nuclear generaban. Además, otro aspecto notorio fue que no todos los físicos de esa época aceptaban el desarrollo del pensamiento científico entonces acordado por muchos con relación a la teoría cuántica, el mismo Planck fue un escéptico de este pensamiento, hasta su muerte. Einstein, de Broglie y Schrödinger nunca cesaron de enfatizar las características poco convincentes de la mecánica cuántica y demandaban la reutilización de conceptos de la física clásica, sobre todo las ideas de Newton o inclusive del pensamiento de la antigua Grecia,^[4] con el propósito fundamental de que las ideas acordadas no fueran contrarias a los resultados experimentales que se observaban. Inclusive, el mismo Niels Bohr había tenido muchos problemas para intentar refutar estas objeciones. Estas dificultades fueron ponderadas por Born para que decidiese contribuir en el intento de clarificar la situación, tomando en cuenta que penetraba en el estrecho y difícil límite entre la filosofía y la física (públicamente solicitó comprensión al auditorio, pues su trabajo abordaba tanto la historia como la filosofía).

2 Las raíces de la mecánica cuántica

Al principio de la década de los 20 del siglo anterior, Born tenía la idea de que los físicos estaban de acuerdo con la hipótesis de Planck acerca de que la energía oscilante de frecuencia definida ν (como el caso de las ondas luminosas) se manifiesta en cuantos definidos de tamaño $h\nu$. Gran cantidad de experimentos se podían comprobar de esta manera, y siempre mantenían el mismo valor a la constante de Planck h . Más aún, la aseveración de Einstein acerca de que los cuantos luminosos poseían un momento $\frac{h\nu}{c}$ (siendo c la velocidad de la luz), era bien confirmada en los experimentos, lo que significó una renovación en el pensamiento científico relacionado con la teoría corpuscular de la luz que incluía cierta complejidad del fenómeno, aunque para otros procesos esta teoría era bastante apropiada, así que los físicos estaban acostumbrados a esta dualidad, es más, la aprendieron a manejar a pesar de las limitaciones de esos momentos.

En 1913, Niels Bohr había resuelto el enigma de las líneas espectrales utilizando la teoría cuántica, a la vez que había explicado las principales características: la maravillosa estabilidad de los átomos, la estructura de los núcleos atómicos y el sistema periódico de los elementos. Como resultado, un importante pensamiento producto de las enseñanzas de Bohr era: un sistema atómico no puede existir en todos los estados mecánicamente posibles que forman un continuo, pero sí en series de estados “estacionarios discretos”; en una transición (de uno a otro estado) la diferencia energética $E_m - E_n$ se emite o se absorbe como un cuanto de luz $h\nu_{mn}$ (con el acuerdo de que E_m es mayor o menor que E_n). Esta es una interpretación, en términos de la energía, de la Ley Fundamental de la Espectroscopía descubierta hacía unos años por W. Ritz. Tal situación se puede esquematizar al escribir, en forma de arreglo rectangular, los niveles de energía de los estados estacionarios n veces (horizontal y verticalmente):

	E_1	E_2	E_3	$\dots$
E_1	11	12	13	
E_2	21	22	23	
E_3	31	32	33	

En los que las posiciones sobre la diagonal corresponden a los estados y las otras posiciones a las transiciones. Sin embargo, Bohr estaba consciente de que esta ley así formulada, entraba en conflicto con la mecánica y que por ello todo uso del concepto de energía en este contexto causaba enormes problemas. Él sostenía esta unión de conceptos nuevos con los anteriores con su principio de correspondencia, que consistía de un requerimiento obvio: la mecánica clásica ordinaria debía apoyarse de un alto grado de aproximación al límite, pues los números que corresponden a los estados estacionarios (números cuánticos) son muy grandes (en la esquematización del arreglo rectangular se identifican muy a la derecha y al fondo del mismo), por lo que se aprecia cambios de energía relativamente pequeños, de lugar a lugar, es decir, relativamente pequeños. La física teórica trabajó con estos conceptos durante los siguientes 10 años. El problema era que un oscilador armónico no sólo posee frecuencia, sino también una intensidad. De tal forma, que para cada transición representada en el esquema debe existir su correspondiente intensidad. ¿De qué manera, por fin, se puede encontrar una relación basándose en las consideraciones de la correspondencia mencionada? Tal cuestionamiento mostraba todavía conocimientos limitados, a pesar de los notables éxitos alcanzados por el propio Bohr, además de notables investigadores como Kramers, Sommerfeld, Epstein y muchos otros más, aunque el paso decisivo fue hecho nuevamente por Einstein, quien al proponer un nuevo tratamiento al proceso de derivación de la fórmula de la radiación de Planck, hizo evidente que el concepto clásico de la intensidad de emisión debía ser reemplazado por la idea estadística de la probabilidad de transición. En el esquema propuesto, para cada posición representada allí, le corresponde, además de la frecuencia $\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}$, una cierta probabilidad para la transición acompañada por la emisión o absorción de radiación. En Göttingen, Born y su equipo también hicieron muchos intentos por explicar los procesos mecánicos del átomo desconocidos hasta entonces, más allá de los resultados experimentales obtenidos. De hecho, la dificultad lógica se volvía cada vez más aguda. Las investigaciones realizadas con la identificación de puntos luminosos esparcidos aquí y allá, así como aquellas vinculadas con la dispersión de la luz mostraban que la concepción de Einstein acerca de la probabilidad de transición como una medida de la fuerza de una oscilación no era la más adecuada, y que la idea de una amplitud de oscilación asociada con cada transición no podía ser aceptada. Max Born sustenta esta afirmación al mencionar los resultados de las investigaciones hechas por Ladenburg,^[5] Kramers,^[6] Heisenberg,^[7] Jordan y él mismo.^[8] El arte de conjeturar fórmulas correctas que surgen de las fórmulas clásicas, pero que las sobrepasan en el sentido del principio de correspondencia requiere de extrema precisión. En un artículo escrito anteriormente por Born, incluyó en el título la expresión “Mecánica Cuántica”, tal vez único en esos días, ese documento incluía una fórmula muy enmarañada (pero válida todavía a principios de los 60 del siglo anterior), que describía la mutua perturbación de sistemas atómicos.

3 La Teoría de W. Heisenberg

De acuerdo con Born, durante este periodo Heisenberg tuvo un repentino cambio en su estado de salud.^[9] Él había sido su asistente en esos días. Sin embargo, Heisenberg reemplazó el principio filosófico del arte de conjeturar por las reglas matemáticas. Una de las premisas en que se basa este principio, asegura que los conceptos y los esquemas que no corresponden a los hechos físicamente observables, no deberían utilizarse en las descripciones teóricas. Al elaborar Einstein su teoría de la relatividad, eliminó los conceptos de velocidad absoluta de un cuerpo y el de simultaneidad absoluta de dos eventos en lugares diferentes, es decir, estaba utilizando el principio

filosófico para conjeturar. Heisenberg eliminó la imagen (mental) de las órbitas de los electrones con radios definidos y periodos de rotación, ya que estas cantidades no son observables. Él aseguraba que la teoría se debería construir a partir de arreglos cuadráticos (como los mostrados anteriormente). En lugar de describir el movimiento a través de una coordenada dada como una función del tiempo $x(t)$, se debía determinar un arreglo de transición de probabilidades x_{mn} . Para Born, la parte decisiva del trabajo de Heisenberg es la necesidad de poder encontrar una regla a través de la que a partir de un arreglo dado:

$$\begin{array}{ccc} x_{11} & x_{12} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

O en un arreglo cuadrático dado:

$$\begin{array}{ccc} (x^2)_{11} & (x^2)_{12} & \dots \\ (x^2)_{21} & (x^2)_{22} & \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

Aplicando en general la propiedad multiplicativa a tales arreglos.

Al considerar ejemplos conocidos y descubiertos a través del uso de la conjetura, Heisenberg logró encontrar una regla y aplicarla con éxito a ejemplos sencillos como es el caso de los osciladores tanto armónico como inarmónico. Pero durante el verano de 1925, Heisenberg enfermó gravemente de fiebre del heno, por lo que el tratamiento médico lo obligó a ausentarse de sus tareas de investigación para reposar en las playas, pero dejando listo su artículo para ser publicado, en manos de Born, quien clarificó sus ideas al respecto después de leerlo. Born lo envió al *Zeitschrift für Physik* (Revista de Física). La regla de la multiplicación propuesta por Heisenberg no dejó en paz a Born, y después de una semana de intensas reflexiones, pensamientos e intentos por aclarar sus dudas, repentinamente recordó una teoría algebraica que había aprendido de su maestro, Rosanes, en Breslau. Tales arreglos cuadráticos son muy familiares para los matemáticos y los nombran matrices, en asociación con una regla definida de la multiplicación. Así es que Born aplicó esta regla a la condición cuántica de Heisenberg y encontró que concordaba con la diagonal de sus elementos. Era obvio conjeturar que los elementos sobrantes debían ser, digamos, nulos. De ese modo surgió en la mente de Born la extraña fórmula:

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi}$$

(Existe un interesante ensayo elaborado por Armando Martínez al respecto.^[10] También es importante mencionar que tanto en este ensayo como en la traducción hecha por el Profesor Robert Schlapp del alemán al inglés de la conferencia impartida por Born en Estocolmo, y en sus propias cartas, la fórmula está escrita como sigue: $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$. En el número 3172, Vol. 122 del 14 de octubre de 1955 de la revista Science, aparece sin la letra i , correspondiente al número imaginario, en el denominador del lado derecho de la expresión).

El significado en la expresión propuesta por Born, las coordenadas q y los momentos p no van a ser representados por valores de números sino por símbolos cuyo producto depende del orden de multiplicación y que no “conmutan” como se suele decir. Born describió este momento comparándolo con el ánimo que muestra, por ejemplo, un marinero que lleva mucho tiempo en el mar y de momento, logra ver a la lejanía, la costa anhelada. Su único pesar fue que Heisenberg no estaba con él en esos momentos. Realmente estaba convencido de que por fin, habían tropezado con la verdad. Gran parte de estos esfuerzos fueron trabajo de conjetura, particularmente el hecho de eliminar los elementos sobre las no diagonales en el arreglo descrito anteriormente.

Para solventar esta dificultad Born contaba con la colaboración de su estudiante Pacual Jordan, así que en pocos días tuvieron éxito al comprobar lo que Born había conjeturado correctamente. El artículo compartido entre Born y Jordan^[11] describe los principios más importantes de la mecánica cuántica, que incluye una extensión al tratamiento de la electrodinámica. A esto siguió un frenético periodo de colaboración entre los tres científicos (Born, Heisenberg y Jordan), pese a la lejana estancia del segundo de ellos, así que hubo un intenso intercambio de cartas, aunque la participación de Born se vio afectada a causa de los desórdenes políticos. Sin embargo lograron publicar conjuntamente^[12] con alto grado de formalidad en el ambiente científico, lo que les permitió completar las ideas científicas de esos momentos. Sin embargo, antes de que este artículo se publicara y para su gran sorpresa, apareció publicado un artículo de Paul Dirac^[13] que difundía conocimientos científicos sobre el mismo tema. Dirac asistió, tiempo atrás, a una conferencia que impartió Heisenberg en Cambridge, lo que le motivó a profundizar en el tema, y después de sus investigaciones obtuvo resultados parecidos a los del equipo de Born en Göttingen, con la diferencia de que Dirac no aplicó el recurso de la teoría matemática de las matrices, sino que descubrió por él mismo el proceso, para después proponer una especie de doctrina sobre tales símbolos no conmutativos. La primera aplicación no trivial además de físicamente importante de la mecánica cuántica la propuso poco después W. Pauli^[14], quien calculó los valores de la energía estacionaria del átomo de hidrógeno usando el método de las matrices y proponiendo un arreglo completo que concordó con las fórmulas de Bohr. A partir de entonces ya no había más dudas acerca de la validez de la teoría.

4 Mecánica Ondulatoria

La ciencia (y el lenguaje) que posee real significancia de su formalismo es a veces una ciencia (o lenguaje) poco claro para quienes la utilizan. Como sucede con frecuencia, las matemáticas son mucho más que un pensamiento interpretativo. Justo cuando el equipo de Born discutía sobre esto, les llegó la segunda gran sorpresa: la publicación de los celebrados artículos de Erwin Schrödinger^[15] que fueron producto de sus investigaciones que siguieron una línea de pensamiento completamente diferente, que se derivó de los trabajos de Louis de Broglie^[16] quien les llevaba algunos años de ventaja al equipo de Göttingen y que apoyaba sus productos de investigación con una brillante consideración teórica: la dualidad corpúsculo – ondulatoria, familiar para los físicos en el caso de la luz, por lo que también debía ser exhibida por los electrones; cada electrón que se mueve libremente, debe poseer, de acuerdo con estas ideas, una longitud de onda perfectamente definida y que se determina con base en la constante de Planck y la masa. Este excitante experimento propuesto por de Broglie fue bien conocido por el equipo de Born.

Un día de 1925, Born recibió una carta firmada por C. J. Davisson en la que describía resultados singulares relacionados con la reflexión de electrones sobre superficies metálicas. Uno de los colegas de Born, James Franck, dedicado a la experimentación en laboratorio, junto con él, conjeturaron de inmediato que la evidencia de este fenómeno en forma de curvas (curvas de Davisson) eran espectros de entramados de cristal de las ondas electrónicas descritas por de Broglie. El equipo preparó un experimento para mostrarlo a sus estudiantes. Uno de ellos, W. Elsasser^[17] se dedicó a investigar sobre este tema. Sus resultados ofrecieron la primera prueba cuantitativa de la idea de Louis de Broglie, prueba también obtenida independiente y posteriormente por Davisson y Germer^[18] y por J. P. Thomson^[19], con base en experimentos totalmente sistematizados. Sin embargo, esta familiaridad marcada por los resultados de las investigaciones así como el pensamiento de Louis de Broglie no tuvieron más alcance que para aplicaciones relacionadas con la estructura electrónica de los átomos. Eso estaba reservado para Schrödinger quien amplió la ecuación de onda propuesta por Louis de Broglie y la aplicó al movimiento libre, para el caso en que las fuerzas actúan y ofrecen una exacta formulación de las condiciones adicionales, ya insinuadas por Louis de Broglie, a las que la función de onda ψ se debía de ajustar, es

decir, que debía poseer un valor único y finito en el espacio y el tiempo, teniendo éxito al derivar los estados estacionarios del átomo de hidrógeno como soluciones monocromáticas de su ecuación de onda no extendida al infinito. Mientras tanto, a principios de 1926 parecía como si repentinamente existiesen dos sistemas auto-contenidos pero completamente diferentes entre sí que explicaban los fenómenos en esta rama del conocimiento: la mecánica de matrices y la mecánica ondulatoria. Erwin Schrödinger pronto demostró la completa equivalencia de estos sistemas. La mecánica ondulatoria gozó de gran popularidad como una versión de la mecánica cuántica tanto en Göttingen como en Cambridge, pues funcionaba con base en la función de onda ψ , la cual, al menos en el caso de una partícula, se puede representar en el espacio, y emplea los métodos matemáticos relacionados con las ecuaciones diferenciales parciales que son familiares para todos los físicos. Schrödinger supuso que su teoría ondulatoria hacía posible el regreso a la física clásica determinística; él proponía abandonar completamente la representación esquemática de las partículas y describir a los electrones no como partículas sino como distribución continua de densidad $|\psi|^2$, o también establecida como densidad eléctrica $|e\psi|^2$, (situación que a mediados del siglo XX Schrödinger reafirmó [20]). Pero en Göttingen, para el equipo de Born, esta interpretación era poco aceptable por el lado de los hechos experimentales. Por esa época era ya posible realizar el conteo de partículas utilizando la técnica de centelleo o con el uso del Contador Geiger y fotografiar sus rastros con ayuda del dispositivo tecnológico conocido como la Cámara de nube de Wilson.

5 La función Psi

Durante ciertos momentos Born dudaba de lograr una clara y correcta interpretación de la función ψ al considerar los saltos electrónicos, y realmente batalló durante todo el año de 1925 para lograr extender el método de matrices, que obviamente explicaba solamente los procesos oscilatorios, a la aplicabilidad para con los procesos aperiódicos. En esa época fue profesor huésped en el Instituto de Tecnología Massachusetts (MIT) en Cambridge, E. U., donde tuvo la oportunidad de interactuar con un distinguido colega: Norbert Wiener. Trabajando colaborativamente publicaron un artículo^[21] en el que justificaron el reemplazo de las matrices por el concepto general de un operador y, de esta forma, hicieron posible la descripción de los procesos aperiódicos. Aun así no abordaron la verdadera aproximación como tal, por lo que Born utilizó el método propuesto por Schrödinger pues era muy promisorio para abordar de mejor manera una interpretación de la función ψ . Pero de nueva cuenta, una idea de Einstein le sirvió de guía. Él ya había propuesto observar la dualidad de las partículas (cuantos o fotones de luz) y las ondas para hacer comprensible la interpretación del cuadrado de la amplitud óptica de la onda como la densidad de probabilidad para la ocurrencia de los fotones. Esta idea pudo extenderse de inmediato a la función ψ : dando por resultado $|\psi|^2$ que representa la densidad de probabilidad para los electrones (u otras partículas). Afirmarlo era cosa sencilla, pero ¿cómo debía demostrarse? Para este propósito sugirió el equipo de Born observar los procesos de dispersión atómica. Una muestra de electrones que provienen de una distancia infinita, representados por una onda incidente de intensidad conocida (que es $|\psi|^2$) afecta a un obstáculo, digamos un átomo de un elemento pesado, de la misma forma que una onda de agua generada por un haz de vapor forma ondas circulares secundarias en un recipiente, la onda de electrones incidente es parcialmente transformada por un átomo en una onda esférica secundaria, cuya amplitud de oscilación ψ es diferente en distintas direcciones. Es así que el cuadrado de la amplitud de esta onda a una gran distancia del centro de dispersión permite determinar la probabilidad relativa de dispersión en su dependencia sobre una dirección dada. En suma, si la dispersión atómica es en sí capaz de existir en diferentes estados estacionarios, es posible obtener casi automáticamente y partiendo de la ecuación de onda de Schrödinger las probabilidades de excitación de estos estados cuando el electrón se dispersa con pérdida de energía, o inelásticamente, como se le ha llamado. De esta manera fue posible comprobar las con-

jeturas de la teoría de Bohr, primeramente verificadas experimentalmente por Franck y Hertz y sustentando una base teórica.^[22] Poco después Wentzel^[23] tuvo éxito al derivar la celebrada fórmula de Rutherford para explicar la dispersión de las partículas alfa partiendo de la teoría de Born. El factor que contribuyó más aun que estos éxitos obtenidos para la rápida aceptación de la interpretación estadística de la función ψ fue sin duda el artículo publicado por Heisenberg^[24] que contenía su celebrado principio de incertidumbre a través del que el carácter revolucionario de esta nueva concepción fue primeramente aclarado. En ese documento, Heisenberg argumentó que era necesario abandonar no solamente la física clásica sino también la ingeniosa y sencilla concepción mental acerca de la realidad que pensaba que las partículas de la física atómica eran como gránulos de arena extremadamente pequeños. Es evidente que un grano de arena posee a cada instante una posición y una velocidad definidas, pero este no es el caso para un electrón; si se pudiera determinar su posición con gran precisión, la posibilidad de determinar la velocidad sería mínima y viceversa.

Con relación a la teoría de las colisiones Born utilizó técnicas matemáticas de aproximación que resultaron ser, de algún modo, primitivas y que no eran demostrables. Otros autores abordaron también el tema y fueron de los primeros en hacerlo y con quienes la teoría esta en deuda, ya que gracias a sus resultados, ha habido gran progreso: Holtsmark, en Noruega; Faxén, en Suecia; Bethe, en Alemania; Mott y Massey, en Inglaterra. Durante la segunda mitad del siglo XX, la teoría de las colisiones fue una ciencia especial, con sus propios textos. Las ramificaciones del pensamiento físico de aquella época, como la electrodinámica cuántica, la teoría de mesones, núcleos y rayos cósmicos, las partículas elementales y sus transformaciones, todas ellas pertenecían o tuvieron su origen en la teoría de las colisiones.

6 Probabilidad de transiciones

Durante los años de 1926 y 1927, Born intentó abordar otra forma de justificar la concepción estadística de la mecánica cuántica, con la colaboración del científico ruso Fock.^[25] En el artículo escrito por Born, Heisenberg y Jordan está un capítulo en el que describen cómo la función de Schrödinger se anticipa realmente al pensamiento científico de la época, solo que no se pensaba como una función en el espacio, sino como una función ψ en el espacio, sino como una función ψ_n con índices discretos $n = 1, 2, \dots$ los cuáles enumeran los estados estacionarios. Si el sistema bajo consideración es afectado por una fuerza que es variable en el tiempo, ψ_n también llega a ser dependiente del tiempo, por lo que $|\phi_n(t)|^2$ denota la probabilidad relacionada con la existencia de un estado n en un tiempo t . Comenzando desde una distribución inicial en la que solamente un estado esta presente, es posible obtener de esta forma la probabilidad de transición e iniciar investigaciones sobre sus propiedades. El interés del equipo de Göttingen se centraba en lo que en aquella época sucedía con el caso del límite adiabático, es decir, el caso de una acción de variación externa muy lenta; pensaban que era posible mostrar que, como se podría esperar, las probabilidades de transición llegaban a ser siempre muy pequeñas. La teoría de la transición de probabilidades fue desarrollada independientemente por Paul Dirac quien realizó importantes resultados, por lo que es un hecho que todos los productos de investigación relacionados con física atómica y nuclear que involucraban además estos sistemas de conceptos y escritos de forma elegante surgieron al seguirlo^[26]; la mayoría de los experimentos realizados contribuyeron a establecer los fundamentos de las probabilidades relativas de eventos cuánticos. Entonces, ¿Cómo es que se siguieron descubriendo fenómenos relacionados con estos temas a pesar de que Einstein, Schrödinger y de Broglie no estaban convencidos? Una cosa es cierta. Las objeciones de ellos no estaban en contra de la exactitud de las fórmulas sino de su interpretación. Es así que se deben distinguir dos puntos de vista muy importantes: la cuestión del determinismo y la cuestión de la realidad. La mecánica newtoniana es determinista en todos los sentidos. Si el estado inicial (posiciones y velocidades de todas las partículas) de un sistema es correctamente establecido,

el estado en cualquier otro lapso de tiempo (antes o después) se puede calcular aplicando las leyes de la mecánica. Todas las otras ramas de la física clásica se han establecido siguiendo este patrón lógico. La mecánica determinista gradualmente llegó a ser percibida como un acto de fe (el universo visto como una máquina, como un autómatas). De acuerdo con el pensamiento de Born, estas ideas no tienen antecedentes ni en la antigüedad ni en la época medieval, más bien es un producto del inmenso éxito de la mecánica newtoniana, especialmente en astronomía, y a tal grado que durante el siglo XIX se convirtió en un principio filosófico fundamental para todas las ciencias exactas. De lo anterior, surge la pregunta acerca de si esta forma de pensar estaba realmente justificada. ¿Se pueden hacer siempre predicciones absolutas basándose en las ecuaciones clásicas del movimiento? Es fácil observar, con base en ejemplos simples, que esto es posible sólo para casos en los que adoptamos la posibilidad de obtener mediciones absolutamente seguras (de la posición, velocidad y otras magnitudes). Consideremos una partícula en movimiento, sin fricción y siguiendo una trayectoria en línea recta entre dos puntos (digamos muros) y en los que al alcanzarlos sufre como consecuencia un retroceso perfectamente elástico. Es así que la partícula se mueve de un punto al otro con velocidad constante igual a su velocidad inicial v_0 , por lo que se puede afirmar con certeza el lugar donde puede estar localizada en un tiempo dado, puesto que v_0 es perfectamente conocido. Pero si de momento tenemos una pequeña imprecisión Δv_0 , entonces tendremos necesariamente una imprecisión relacionada con la predicción de la posición de la partícula en un tiempo t que es $t\Delta v_0$ lo que significa que incrementa con el tiempo t . Si esperamos lo suficiente hasta un tiempo $t_c = \frac{l}{\Delta v_0}$, donde l es la distancia entre los dos puntos (muros) elásticos, la inexactitud Δx llegará a ser igual al intervalo total l . De esta manera no es posible afirmar algo sobre la posición de la partícula en un tiempo posterior a t_c . Es así que el determinismo llega a ser completamente indeterminado, cuando se admite la más pequeña inexactitud en los datos relacionados con la velocidad. ¿Existe algún sentido (físico, no metafísico) con el que se pueda hablar de datos absolutos? Es completamente justificable afirmar que la coordenada x tiene el valor πcm , con $\pi = 3.1415926535\dots$ ¿Es este número trascendental muy conocido que permite determinar la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro? Como un instrumento de matemáticas, el concepto de número real representado por un decimal infinito y es extremadamente importante y fructífero, pero como una medida de una cantidad física, el concepto es absurdo. Si la parte decimal del número π se interrumpe en el lugar 20 o en el 25, se obtienen dos números que no se pueden distinguir entre ellos por ninguna medida, ni tampoco del valor verdadero. De acuerdo con el principio heurístico empleado por Einstein en su propuesta de la teoría de la relatividad, y por Heisenberg en su propuesta de la teoría cuántica, los conceptos que no corresponden a una observación concebible deberían de ser eliminados de la física. Para el ejemplo anterior, esto es posible sin que se presenten dificultades; basta con reemplazar afirmaciones como $x = \pi cm$ por esta: la probabilidad de distribución de los valores de x tiene su punto máximo en $x = \pi cm$; además (si se desea ser más preciso) se puede agregar: para cada medida, una respiración. En resumen, la mecánica ordinaria debe formularse estadísticamente. Born dedicó mucho tiempo para realizar esta aseveración y siempre estuvo seguro que era posible lograrlo sin dificultad alguna. Born fue todavía más allá al enfatizar que el determinismo de la física clásica puede llegar a ser aparentemente falso, cuando el proceso de investigación se apega demasiado a las estructuras conceptuales matemático – lógicas, pues se llegan a ver como ídolos y no como ideales, en la investigación de la naturaleza, y por ello no pueden ser utilizados contra lo esencialmente indeterminado: la interpretación estadística de la mecánica cuántica. Mucho más dificultad conllevan las objeciones relacionadas con la realidad. Por ejemplo, el concepto de partícula. Un grano de arena contiene implícitamente la noción de que está en una posición definida y tiene un movimiento también definido. Pero de acuerdo con la mecánica cuántica es imposible determinar simultáneamente y con toda certeza su posición y su movimiento (más correctamente momentum), es decir, masa veces velocidad. Es así que surgen dos cuestiones: la primera ¿qué impide el medir ambas cantidades con una segu-

ridad arbitraria por medio de experimentos a pesar de las aseveraciones teóricas? Segunda, si se ha evidenciado que no es confiable ¿se seguirá aun justificando el aplicar al electrón el concepto de partícula y las ideas asociadas con ella? Con respecto a estos planteamientos, es claro que si la teoría es correcta (existen suficientes pruebas para creerlo), el obstáculo para obtener una medición simultánea de la posición y el movimiento (y también otros pares similares llamados cantidades “conjugadas”) debe basarse en las leyes de la mecánica cuántica en sí. Este es el punto, aunque no sea del todo obvio. Niels Bohr dedicó mucho trabajo e ingenio para desarrollar una teoría de las mediciones que contribuyese a aclarar situaciones como esta, misma que presentó a Einstein para su consideración. Einstein también dedicó tiempo en el desarrollo de dispositivos de medición con los que se pudiese obtener resultados de las mediciones de la posición y movimiento, simultáneamente y con alto grado de exactitud. Para obtener mediciones de coordenadas espaciales e instantes de tiempo rígido, se necesitan medidas estándares de longitud y relojes. Para medir los momenta y los arreglos energéticos usando móviles es necesario tomar en cuenta su desplazamiento y precisar el lugar de impacto del objeto a ser medido. Si se toma en cuenta el hecho de que la mecánica cuántica es apropiada para estudiar la interacción entre objetos físicos con dispositivos tecnológicos, se ha concluido que no existe vínculo alguno que pueda satisfacer la relación entre ambos al mismo tiempo. Es por ello que existen experimentos mutuamente exclusivos, pero a la vez complementarios entre sí, y que en combinación entre ellos mismos revelan todo lo que se puede aprender de un experimento en física. La idea de la complementariedad en física ha sido generalmente aceptada como la clave del pensamiento intuitivo de los procesos cuánticos. Bohr^[27] transfirió esta idea de una forma muy ingeniosa a campos completamente distintos, por ejemplo, a la relación entre consciencia y cerebro, o al problema del libre albedrío y a otros problemas fundamentales de la filosofía. Para concluir, un último cuestionamiento: ¿Cómo se nombrarán los conceptos de posición y movimiento que no pueden asociarse de la forma tradicional como cosa (características) de una partícula? O de otra forma: ¿cuál es esa realidad que se puede describir con la teoría que ha sido propuesta? La respuesta a esta pregunta tiene un argumento filosófico, no físico y sobrepasa el propósito de este artículo escrito por Born quien, sin embargo, expuso sus puntos de vista.^[28] La conclusión final del científico germano se refiere a su enfática retención de la idea de partícula, que naturalmente era necesario redefinir su significado. Para este propósito están disponibles conceptos bien desarrollados que son familiares en matemáticas bajo el nombre de invariantes con respecto a las transformaciones. Todo objeto que se percibe, aparece con innumerables características, así que el concepto de objeto es la invariante de todas estas características. Bajo este punto de vista, el actual y universalmente usado concepto de sistema en el que las partículas y las ondas ocurren al mismo tiempo, puede ser completamente justificado. A mediados de los 50 del siglo pasado las investigaciones relacionadas con núcleos y partículas elementales, habían dejado muchos límites con respecto al concepto de sistema, de acuerdo con Born, quien reconoce haber aprendido una gran lección proveniente de la historia, que nos ha contado, del origen de la mecánica cuántica, además auguraba que, presumiblemente el refinamiento de los métodos matemáticos no serían suficientes para producir una teoría satisfactoria, pero de alguna manera, en el medio científico, siempre al acecho, se propondrán conceptos no justificados por la experiencia, y que seguramente serán eliminados para así aclarar el camino por venir.

7 La carta de Max Born a Albert Einstein

Con relación al apartado 3., del presente artículo existe una correspondencia que Born envió a Einstein^[29] el miércoles 15 de julio de 1925 y que posteriormente detalló y amplió el propio Born (por razones de edición no reproduzco en su totalidad este interesante documento). Inicia contándole sobre el viaje de su esposa para Silvaplana, Engadine (Alemania) en compañía de sus hijos. Le hace saber que ha estado bastante atareado y trabajando con la ayuda de Ehrenfest y que ha

leído el documento de Louis de Broglie. Considera que la teoría ondulatoria de la materia puede ser muy importante. Comenta sobre algunos errores en los cálculos realizados por Elsasser, pero con sus investigaciones relacionadas con la reflexión de los electrones va por buen camino. Sigue especulando con el trabajo de Louis de Broglie con relación a la explicación de la reflexión, la difracción y la interferencia, con base en la cuantización espacial que Compton y Duane propusieron y que han seguido tanto Epstein como Ehrenfest. Le hace saber sobre su principal interés en ese momento, que es el misterioso cálculo diferencial en el que se basa la teoría cuántica de la estructura atómica. Él y Jordan han estado ahondando en la literatura versada en sistemas multi-periódicos de átomos cuánticos. Publicarán pronto un artículo sobre el efecto de los campos no periódicos en los átomos, como un estudio preliminar sobre las colisiones atómicas, lo que le llevó a reflexionar sobre los diferentes comportamientos de los átomos que dependen principalmente de si presentan en promedio, momentos dipolo o cuadripolo o alta simetría eléctrica. Le hace saber sobre las objeciones que le envió a Jordan sobre su artículo y que él (Born) entenderá algún día, pero que, sin duda, tenía razón. Le reitera que sus jóvenes estudiantes Heisenberg, Jordan y Hund son bastante brillantes y que pronto se publicará un artículo de Heisenberg, con tintes místicos; Hund publicará algo relacionado con los sistemas periódicos y él mismo está trabajando en la teoría del entramado en los cristales y ha reflexionado sobre el equilibrio electrostático en ellos. Le solicita a Einstein su punto de vista sobre la unificación de la gravitación con la electrodinámica, por lo que le solicita envíe su artículo al respecto para que él (Born) y Jordan realicen algunas variantes. Le comenta que ha recibido en el Instituto a muchos investigadores de varias partes del mundo y que han hecho buena amistad entre ellos y sus esposas. Como es verano, están de vacaciones y él no podrá tomarlas pues participará en la inauguración del nuevo Instituto para la hidrodinámica Prandtl que incluye una visita guiada, comida oficial y concierto de gala. Después, el 30 de julio, ofrecerá una conferencia en Tübingen, para después encontrarse con su familia en Engadine. En octubre asistirá a Cambridge y después al Congreso de Física en Moscú, para el invierno. Le comenta sobre las novedades astronómicas presentadas en el coloquio, donde Kienle reportó el hallazgo del satélite de Sirio, misteriosa estrella enana de gran masa (28,000 masas solares) y que de acuerdo con Eddington, es un conglomerado de núcleo desnudo y electrones, de color rojizo y que se ha determinado la exacta proporcionalidad de su enorme masa y su pequeño diámetro. Termina despidiéndose y enviando saludos.

Posteriormente el mismo Born amplía sus comentarios a esta carta, que para él es la mas significativa e importante de todas. (Hago referencia sólo a lo concerniente con la propuesta de Heisenberg, por falta de espacio).

Tal como Born se lo comentó a Einstein, Heisenberg estaba por publicar un artículo con tintes místicos, mismo que se lo hizo llegar entre el 11 y el 12 de julio de 1925, solicitándole su opinión al respecto, pero no lo leyó en ese momento, pero sí recuerda haberlo leído antes de redactar la carta el 15 de julio. Le pareció un documento bien elaborado, a pesar de su apariencia mística, y que mostraba el maravilloso y extraordinario cálculo hecho por Heisenberg basado en matrices, y entonces se percató que la reformulación de su estudiante de la condición cuántica convencional está representada por los elementos de la diagonal de ecuación matricial, es decir:

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

Y por ello, los elementos sobrantes de la cantidad $pq - qp$ deben tener valor igual a cero. Pero si este fuera el caso, él (Born) debía tener la precaución de no comentarlo con Einstein ya que la discrepancia de los valores de los elementos sobre la no diagonal debían demostrarse primero. Van der Waerden describe en su libro cómo fue que tuvieron éxito sobre esta expresión en particular y cómo lo reportaron Born, Heisenberg y Jordan en su artículo.

Una de los primeros comentarios de Einstein a Born sobre el tema, está escrito en la carta que escribió Einstein el 4 de diciembre de 1926: Inicia comentando sobre un juego que propuso Born

a Einstein y que disfrutó este último bastante al jugarlo. Incluye el comentario de la salud de su yerno al que también invita a participar en el juego una vez que recupere su salud. Y continúa Einstein: “La mecánica cuántica ciertamente se está imponiendo. Pero mi voz interna me dice que aun no es una cosa real. La teoría dice poco, pero además no nos deja algo que no sepamos. No es raro que yo siga convencido de que Él no juega a los dados. Las ondas, en un espacio de tres dimensiones cuya velocidad se regula a través de la energía potencial (por ejemplo en las bandas elásticas)... He estado trabajando bastante para lograr deducir las ecuaciones de movimiento de puntos materiales conocidos como singularidades y dados por ecuaciones diferenciales. Mis mejores deseos, tu amigo A. Einstein”.

8 Conclusión

Durante todos estos años (90, para ser exactos), el pensamiento de la física sigue arrojando nuevos resultados, que son y serán la base de nuevas ideas y descubrimientos. La lección es clara, no debemos encajonar nuestra imaginación ni vencernos durante el proceso de la investigación científica. La experimentación y el adecuado uso de las herramientas matemáticas son la clave del éxito en esta empresa, además de que su discurso es, ante todo, un método didáctico que sugiere cómo abordar el proceso de la enseñanza – aprendizaje de las ciencias exactas.

9 Referencias

- [1] Born Max. Physics in my generation. Heidelberg Science Library. Longmans Springer- Verlag. United Kingdom. (1970). [2] Born, Max. Einstein's Theory of relativity. Dover Editions. New York. 1962.
- [3] Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Magazine Vol. 122 No. 3172. 14 October, 1955, pp. 675 – 679. United Kingdom. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org .
- [4] Schrödinger, Erwin. La Naturaleza y los Griegos. Prólogo de Víctor Gómez Pin, premio Nobel de Física. Colección Metatemas No. 48. TusQuets editores. 2ª edición. Barcelona. Marzo 2006.
- [5] Ladenburg, R. Z. Physik 4, 451 (1921); R. Ladenburg and F. Reiche, Naturwiss. 11, 584 (1923). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org .
- [6] Kramers, A. H. Nature 113, 673 (1924). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.
- [7] Heisenberg, W. Z. Physik 31, 681 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.
- [8] Born, Max., *ibid.* 26, 379 (1924); Born, Max and Jordan, P., *ibid.* 33, 479 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.
- [9] Heisenberg, W., *ibid.* 33, 879 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.
- [10] Martínez Tellez, A. La extraña ecuación de Max Born. Martes 11 de agosto de 2009. Recuperado el 8 de julio de 2015 de: <http://la-mecanica-cuantica.blogspot.mx/2009/08/la-extrana-ecuacion-de-max-born.html>
- [11] Born, M., Jordan P. Z. Physik 34, 858 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio

de 2015 de : www.sciencemag.org.

[12] Born, M., Heisenberg W., Jordan, P., *ibid.* 35, 557 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[13] Dirac, P. A. M. Proc. Royal Soc. (London) A109, 642 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[14] Pauli, W. Z. Physik 36, 336 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[15] Schrödinger, E. Ann. Physik (4), 79, 361, 489,734 (1926); 80, 437 (1926); 81, 109 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[16] De Broglie, Louis. Thèses, Paris, 1924; Ann. Physik (10), 3, 22 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[17] Elsasser, W. Naturwiss. 13, 711 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[18] Davisson, C. J.; Germer, H. Phys. Rev. 30, 707 (1927). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[19] Thomson, G. P. ; Reid, A. Nature 119, 890 (1927); Thomson, G. P. Proc. Royal Soc. (London) A117, 600 (1928). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[20] Schrödinger, E. Brit. Journal Phil. Sci. 3, 109, 233 (1952). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[21] Born, M., Wiener, N. Z. Physik 36, 174 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[22] Born, M. *ibid* 37, 863 (1926); 38, 803 (1926); Gött. Nachr. Math.-Physik K1. 1, 146 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org

[23] Wentzel G. Z. Physik 40, 590 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[24] Heisenberg, W., *ibid.* 43, 172 (1927). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[25] Born, M., *ibid.* 40,167 (1926); Born, M. and Fock V., *ibid.* 51, 165 (1928). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[26] Dirac, P. A. M., Proc. Royal Soc. (London) A109 , 642 (1925); 110, 561 (1926); 111, 281 (1926); 112, 674 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www.sciencemag.org.

[27] Bohr, N. Naturwiss. 16, 245 (1928); 17, 483 (1929); 21, 13 (1933); “Casuality and complementarity,” Die Erkenntnis 6, 293 (1936). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015

de : [www. sciencemag.org](http://www.sciencemag.org).

[28] Born, M., Phil. Quart. 3, 134 (1953); Physik Bl. 10, 49 (1954). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : [www. sciencemag.org](http://www.sciencemag.org).

[29] Born, M. The Born – Einstein Letters 1916 – 1955. Friendship, politics and physics in uncertain times. Introduction by Werner Heisenberg. Foreword by Bertrand Russell. New preface by Diana Buschwald and Kip Thorne. Macmillan Editions. New York. 2005.

Mecánica Cuántica sobre Superficies

Guillermo Chacón Acosta
gchacon@correo.cua.uam.mx

Oswaldo González Gaxiola
ogonzalez@correo.cua.uam.mx

José Antonio Santiago
jasantiagog@gmail.com

Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa

Resumen

Utilizando elementos de geometría diferencial clásica, en este trabajo revisitamos la construcción de la ecuación de Schrödinger de una partícula restringida sobre una superficie curvada.

1 Introducción

Mucho interés ha despertado la descripción cuántica de partículas restringidas a moverse sobre superficies, en general curvadas. En particular, el formalismo utilizado en [1], ha sido de gran atracción en esta área de investigación, ver por ejemplo [2]-[6]. En este formalismo, el lenguaje natural se da en términos de la geometría de la superficie. Es necesario para ello involucrar elementos geométricos tanto extrínsecos como intrínsecos a la superficie [7]: Dada una superficie embebida en R^3 de coordenadas $\mathbf{x}$, parametrizada por dos coordenadas locales ξ^a :

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi^a), \quad (1)$$

podemos formar una base para R^3 , adaptada a la superficie. Construimos dos vectores tangentes a la superficie mediante derivadas respecto a los parámetros ξ^a , $\mathbf{e}_a = \partial_a \mathbf{X}$, y un campo vectorial normal a la superficie $\mathbf{n}$, orientado según $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$. De esta manera, la distancia infinitesimal sobre la superficie define la métrica inducida $g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b$, un tensor simétrico con el que podemos construir la curvatura intrínseca de la superficie $\mathcal{R}_{abcd}$. La curvatura extrínseca de la superficie se define mediante

$$K_{ab} = -\mathbf{n} \cdot \partial_a \mathbf{e}_b, \quad (2)$$

un elemento que aparece naturalmente en las ecuaciones de Gauss-Weigarten[7]. De las condiciones de integrabilidad se puede obtener además la identidad

$$K^{ab} K_{bc} = K K_c^a - \mathcal{R}^a_c. \quad (3)$$

Esta estructura geométrica será de gran ayuda en la descripción tanto clásica como cuántica de partículas sobre superficies.

1.1 Coordenadas Gaussianas normales

Consideremos una superficie parametrizada mediante $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi^a)$. Un punto en R^3 queda completamente especificado por las coordenadas $\{\xi^a, \eta\}$ de la siguiente manera

$$\mathbf{x}(\xi^a, \eta) = \mathbf{X}(\xi^a) + \eta \mathbf{n} \quad (4)$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario tangente a la curva geodésica, normal a la superficie, que conecta el punto $\mathbf{x}$, con la superficie $\mathbf{X}(\xi^a)$.

Las coordenadas Gaussianas normales se pueden utilizar para describir el espacio euclidiano R^3 , cercano a la superficie $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi^a)$, a una distancia geodésica η . En estas coordenadas, los vectores $\epsilon_a = \partial_a \mathbf{x}$, están relacionados con los vectores tangentes a la superficie $\mathbf{e}_a$, mediante

$$\epsilon_a = \mathbf{e}_a + \eta K_a^c \mathbf{e}_c, \quad (5)$$

donde hemos usado, $K_a^b = g^{bc} K_{ca}$ y K_{ab} es la curvatura extrínseca de la superficie. En estas coordenadas, el elemento infinitesimal de distancia es dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \epsilon_a \cdot \epsilon_b d\xi^a d\xi^b + d\eta^2, \\ &= (g_{ab} + 2\eta K_{ab} + \eta^2 K_a^c K_{cb}) d\xi^a d\xi^b + d\eta^2, \\ &= G_{ab} d\xi^a d\xi^b + d\eta^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Cuando la partícula se mueve sobre la superficie, su coordenadas η es nula, y el elemento de distancia se describe con la métrica inducida sobre la superficie $ds^2 = g_{ab} d\xi^a d\xi^b$. Cuando la coordenada $\eta \neq 0$, pero es bastante pequeña, la métrica del espacio se puede descomponer en dos partes, tal como se puede ver en la ecuación (6). La componente tangencial es dada por

$$G_{ab} = g_{ab} + 2\eta K_{ab} + \eta^2 K_a^c K_{cb}. \quad (7)$$

En el último término de G_{ab} , cuadrático en la curvatura extrínseca, podemos usar la identidad

$$K_a^b K_{bc} = K K_{ac} - \mathcal{R}_{ac}, \quad (8)$$

donde $\mathcal{R}_{ab}$ es el tensor de Ricci de la superficie. Para muchas expresiones, será necesaria la inversa de la métrica. Hasta segundo orden en η , tenemos

$$G^{ab} = g^{ab} - 2\eta K^{ab} + 3\eta^2 K^{ac} K_c^b. \quad (9)$$

Consideremos la densidad lagrangiana de una partícula, que se constriñe a moverse sobre una superficie parametrizada $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi^a)$. Podemos para ello, introducir un multiplicador de Lagrange, mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi^a)), \\ &= \frac{m}{2} \left[G_{ab} \dot{\xi}^a \dot{\xi}^b + \dot{\eta}^2 \right] + \eta \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (10)$$

donde en general $\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n} = -\lambda$ es la componente normal. Podemos entonces construir el momento canónico generalizado de la correspondiente coordenada de la manera usual[8]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \equiv p_\eta = m\dot{\eta}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}^a} \equiv p_a = m G_{ab} \dot{\xi}^b = m \dot{\xi}_a, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \equiv p_\lambda = 0. \quad (13)$$

De esta manera el hamiltoniano de la partícula es la transformada de legendre de $\mathcal{L}$, i.e.

$$\begin{aligned} H &= p_a \dot{\xi}^a + p_\eta \dot{\eta} + p_\lambda \dot{\lambda} - \mathcal{L}, \\ &= p_a \left(\frac{1}{m} G^{ab} p_b \right) + \frac{p_\eta^2}{m} - \frac{1}{2m} \left[G_{ab} (G^{ae} p_e) (G^{bf} p_f) + p_\eta^2 \right] + \eta \lambda, \end{aligned} \quad (14)$$

el hamiltoniano resultante es hasta segundo orden en η dado por

$$H = \frac{1}{2m} G^{ab} p_a p_b + \frac{1}{2m} p_\eta^2 + \eta \lambda, \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2m} [g^{ab} p_a p_b - 2\eta K^{ab} p_a p_b + 3\eta^2 K^{ac} K_c^b p_a p_b + p_\eta^2] + \eta \lambda. \quad (16)$$

Cuando $\eta = 0$, claramente se reduce al hamiltoniano sobre la superficie, hasta el valor constante de $p_{\eta=0}$. Con la ec.(16) podemos calcular las ecuaciones de Hamilton, primero respecto a los momentos canónicos

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{p_a}{m} = \dot{\xi}_a, \quad (17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\eta} = \frac{p_\eta}{m} = \dot{\eta}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} = 0 = \dot{\lambda}. \quad (19)$$

Dado que en (16) el espacio de coordenadas ya ha sido separado en la coordenada transversal η , y a lo largo de la superficie, las derivadas de ξ_a , sólo serán derivadas de la métrica y de la curvatura extrínseca

$$\frac{\partial H}{\partial \xi^d} = -\dot{p}_d = \frac{p_a p_b}{2m} \left[\frac{\partial g^{ab}}{\partial \xi^d} - 2\eta \frac{\partial K^{ab}}{\partial \xi^d} + 3\eta^2 \frac{\partial K^{ac} K_c^b}{\partial \xi^d} \right], \quad (20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = -\dot{p}_\eta = -\frac{1}{m} K^{ab} p_a p_b + \frac{3}{m} \eta K^{ac} K_c^b p_a p_b + \lambda, \quad (21)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\dot{p}_\lambda = \eta. \quad (22)$$

De estas ecuaciones podemos notar lo siguiente: Los primeros dos términos en la ec. (20), son las componentes de la fuerza, que son tangentes a la superficie. Estos se reducen a una combinación de F_T y F_ℓ sobre la superficie $\eta = 0$, donde se pueden escribir justo como $-m^{-1} g^{ac} p_a p_b \Gamma_{dc}^b$.

La ecuación (21) es la fuerza normal. En efecto, aún cuando $\eta = 0$, hay una fuerza normal sobre la partícula, que es justamente la fuerza de constricción para permanecer sobre la superficie. La última ecuación, (22) no tiene contribución, sobre la superficie, a la fuerza sobre la partícula.

De la correspondencia con las variables en la formulación lagrangiana, notamos que la teoría de perturbaciones permanece idéntica, pero notemos que la coordenada η , se puede ver como una perturbación que aleja la partícula de la superficie. Esto deberá ser importante en la descripción cuántica.

1.2 Hamiltoniano en superficies axisimétricas

Si la superficie tiene simetría axial podemos usar la parametrización

$$\mathbf{X}(\varphi, l) = (\rho(l) \cos \varphi, \rho(l) \sin \varphi, z(l)).$$

En esta parametrización, el hamiltoniano (16) se puede escribir como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + \frac{p_l^2}{\rho'^2 + z'^2} \right) \\ &\quad - \frac{2\eta}{2m} \left(\frac{1}{\rho^4} \frac{\rho' z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} p_\varphi^2 + \frac{1}{(\rho'^2 + z'^2)^2} \left(\frac{\rho' z'' - \rho'' z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} \right) p_l^2 - m\lambda \right) \\ &\quad + \frac{3\eta^2}{2m} \left(\frac{1}{\rho^5} \frac{\rho' z'^2}{(\rho'^2 + z'^2)} p_\varphi^2 + \frac{1}{(\rho'^2 + z'^2)^3} \left(\frac{\rho' z'' + \rho'' z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} \right)^2 p_l^2 \right) + \frac{p_\eta^2}{2m}. \end{aligned} \quad (23)$$

Si por ejemplo la superficie es un catenoide, la distancia geodésica es $\eta = 0$, y el correspondiente hamiltoniano, recordando que $\rho(l) = \cosh l$ y $z(l) = l$, es dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_\varphi^2 \operatorname{sech}^2 l + \frac{p_l^2}{\sinh^2 l + 1} + p_{\eta=0}^2 \right]. \quad (24)$$

Como veremos, este formalismo será muy útil para hacer contacto con la formulación cuántica del problema.

2 Ecuación de Schrödinger

Para escribir la ecuación de Schrödinger de la partícula, es necesario tener una expresión para el laplaciano. Un elemento básico es $G = \det G_{ab}$. A orden cuadrático en η , podemos escribirlo como

$$G = g \left(1 + 2\eta K + \eta^2 (K^{ab} K_{ab} + 4 \det K_b^a) \right), \quad (25)$$

y usando el hecho de que $\det K_b^a = \kappa_1 \kappa_2 = K_G = \mathcal{R}/2$, así como la identidad ec.(8), $\mathcal{R} = K^2 - K^{ab} K_{ab}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sqrt{G} &= \sqrt{g} \left(1 + \eta K + \eta^2 \frac{\mathcal{R}}{2} \right), \\ &= \sqrt{g} f(\eta), \end{aligned} \quad (26)$$

donde hemos definido la función $f(\eta)$. Al mismo orden, la inversa de G_{ab} , que denotamos mediante G^{ab} , es dada por

$$G^{ab} = g^{ab} - 2\eta K^{ab} + 3\eta^2 K^{ac} K_c^b. \quad (27)$$

En estas coordenadas, el laplaciano tiene dos contribuciones, una sobre la superficie y la otra en dirección normal

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_a \left(\sqrt{G} G^{ab} \partial_b \psi \right) + \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_\eta (\sqrt{G} \partial_\eta \psi). \quad (28)$$

Podemos escribir el segundo término de esta ecuación en términos de la función de onda reescalada $\psi = \chi/\sqrt{f}$, en la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_\eta (\sqrt{G} \partial_\eta \psi) &= \partial_\eta^2 \psi + \partial_\eta (\ln \sqrt{G}) \partial_\eta \psi, \\ &= \frac{1}{\sqrt{f}} \partial_\eta^2 \chi - \frac{\chi}{2f^{3/2}} \partial_\eta^2 f + \frac{\chi}{4f^{5/2}} (\partial_\eta f)^2, \end{aligned} \quad (29)$$

donde

$$\begin{aligned} \partial_\eta f &= K + \eta \mathcal{R}, \\ \partial_\eta^2 f &= \mathcal{R}, \\ (\partial_\eta f)^2 &= K^2 + 2\eta K \mathcal{R} + \eta^2 \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (30)$$

Dada la separación ec.(28), también es natural una separación en la densidad de probabilidad $|\psi(x)|^2$. Esta se puede descomponer en términos de una densidad superficial y una en dirección transversa. Tomado en cuenta el elemento infinitesimal de volumen, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int |\psi(x)|^2 dV &= \int |\psi(x)|^2 f(\eta) d\eta dA \\ &= \int |\chi(x)|^2 dA d\eta, \end{aligned} \quad (31)$$

tal que podemos identificar la densidad de probabilidad en la forma $\chi = \psi\sqrt{f}$. La ecuación de Schrödinger, es entonces

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_a \left(\sqrt{G} G^{ab} \partial_b \psi \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial(\ln G)}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + V_\lambda(\eta) \psi = i\hbar \partial_t \psi, \quad (32)$$

y puede ser escrita en términos de la función de onda χ . Usando ahora la ec. (29), tenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_a \left(\sqrt{G} G^{ab} \partial_b \left(\frac{\chi}{\sqrt{f}} \right) \right) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{f}} \left(\partial_\eta^2 \chi - \frac{\chi}{2f} \partial_\eta^2 f + \frac{\chi}{4f^2} (\partial_\eta f)^2 \right) + V_\lambda(\eta) \left(\frac{\chi}{\sqrt{f}} \right) = i\hbar \partial_t \left(\frac{\chi}{\sqrt{f}} \right). \quad (33)$$

El potencial de escalamiento $V_\lambda(\eta)$, no permite a la partícula dejar la superficie. Cuando evaluamos sobre la superficie, i.e. para $\eta = 0$, obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \left(\sqrt{g} g^{ab} \partial_b \chi \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\mathcal{R}}{2} + \frac{K^2}{4} + V_\lambda(\eta) \right) \chi = i\hbar \partial_t \chi. \quad (34)$$

Si ahora hacemos la separación de variables $\chi(x) = \chi_n(x) \chi_s(\xi^a)$, tenemos dos ecuaciones, una de ellas en dirección transversal

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_\eta^2 \chi_n + V_\lambda(\eta) \chi_n = i\hbar \frac{\partial \chi_n}{\partial t}, \quad (35)$$

y la otra a lo largo de la superficie

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \left(\sqrt{g} g^{ab} \partial_b \chi_s \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2} \left(\frac{K^2}{2} - \mathcal{R} \right) \chi_s = i\hbar \frac{\partial \chi_s}{\partial t}. \quad (36)$$

De la ec.(36) reconocemos el potencial efectivo, mejor conocido como potencial de da Costa [1]

$$V_{eff} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2} \left(\frac{K^2}{2} - \mathcal{R} \right), \quad (37)$$

que contiene información geométrica extrínseca a la superficie a través de K_{ab} así como información intrínseca a través de la curvatura $\mathcal{R}$. Varios estudios se pueden encontrar en la literatura sobre este potencial [2, 3, 4]. Sería interesante llevar a cabo un análisis cuántico perturbativo, lo cual presentaremos en un trabajo posterior.

La mecánica cuántica de partículas sobre superficies ha sido estudiado desde diferentes perspectivas, una de las conclusiones es que realizar la cuantización con las coordenadas restringidas a la superficie, es diferente si se cuantiza en el espacio $3D$ y se interpreta el extratérmino en el hamiltoniano como un potencial de confinamiento. Estos diferentes esquemas difieren esencialmente en el orden en las relaciones de conmutación[5, 6].

Referencias

- [1] da Costa R C T 1981 *Phys. Rev. A* **23** 1982
- [2] Dandoloff R, Saxena A and Jensen J 2010 *Phys. Rev. A* **81** 014102
- [3] Ortix C, Kiravittaya, Schmidt O, van den Brink J 2011 *Phys. Rev. B* **84** 045438
- [4] Onoe J, Takahiro I, Shima H, Yoshioka H and Kimura S 2012 *EPL* **98** 27001

- [5] Ogawa N 1992 *Prog. Theor. Phys.* **87** 513
- [6] Schuster P C and Jaffe R L 2003 *Ann. Phys.* **307** 132
- [7] do Carmo M 1976 *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs)
- [8] José J and Saletan E 1998 *Classical Dynamics: A Contemporary Approach* (Cambridge University Press)

Operador de Dirichlet-Neumann para campos abelianos de Yang-Mills en superficies

Homero Geovani Díaz Marín

homero.diaz@itesm.mx

ITESM

Resumen

Mostramos los campos de Yang-Mills con grupo de estructura abeliano $U(1)$, en regiones de espacio-tiempo de dimensión dos como modelo de una Formulación de Fronteras Generales la consiste en un formalismo simpléctico de teorías de campos clásicas en un contexto lagrangiano. Mostramos como emplear el operador de Dirichlet-Neumann para generar una estructura compleja mansa respecto a la estructura simpléctica, en el espacio de condiciones de frontera de Yang-Mills módulo gauge. Esbozamos como emplear dicha estructura simpléctica en un proceso de (pre)cuantización geométrica. La intención es usar estas ideas de para posteriormente generalizarlas en regiones de dimensión arbitraria.

1 Introducción

La teoría de Yang-Mills en dimensión dos es uno de los modelos de cuantización mejor estudiados y con formalismos matemáticos mejor establecidos como Teoría Topológica Cuántica de Campos en el sentido axiomático dado por [1], ver por ejemplo [13], [6], [9] and [8].

Nosotros mostramos cómo a partir de la teoría clásica es posible proceder mediante cuantización geométrica para obtener su correspondiente teoría cuántica. Haremos esto en el caso de haces principales con grupo de estructura abeliano $G = U(1)$. La idea es emplear estas ideas para posteriormente extender estos métodos en el caso de espacios tiempo de dimensión arbitraria $n \geq 2$. La meta es llegar a una Formulación de Fronteras Generales para Teorías con simetrías de norma o de gauge de manera axiomática inspirada en Teorías Cuánticas de Campos. Para aplicaciones específicamente en el caso de teorías axiomáticas afines y lineales, ver [10], [9].

En su formulación clásica, empleamos un formalismo simpléctico de teorías de campos con simetrías de norma en el caso abeliano, ver [3], [6]. En estas formulaciones clásicas se demuestra que la evolución dinámica de una solución en una región de espacio-tiempo M con frontera ∂M

se puede describir como un subespacio lagrangiano, $A_{\tilde{M}}$, que consiste en las condiciones de frontera de soluciones las ecuaciones de Euler-Lagrange modulo gauge al interior de M , encajadas como condiciones de frontera contenido en un espacio simpléctico $A_{\partial M}$ que consta de las condiciones de frontera de gérmenes de soluciones en una vecindad de ∂M módulo gauge. Un paso adicional hacia la teoría cuántica requiere de la existencia de una estructura compleja en $A_{\partial M}$, para proceder hacia la cuantización geométrica. Este tipo de resultados son muy sencillos en el caso de dimensión finita que es justo lo que ocurre en dimensión dos. Para $\dim M > 2$ es preciso extender estos resultados a espacios simplécticos de dimensión infinita, ver [5].

Muchos de los resultados en [5] aparecen en este trabajo. Para darnos una idea de como proceder hacia la precuantización en el caso de $\dim M > 2$ procedemos a introducir, en el caso $\dim M = 2$ una estructura compleja en el espacio $L_{\partial M}$ de condiciones de frontera módulo gauge. Esa es la parte novedosa que esta contenida en la sección 6, parte de estos resultados en dimensión arbitraria, aparecerán en una prepublicación.

2 Campos de Yang-Mills clásicos y sus condiciones de frontera

Consideramos M una superficie con una métrica riemanniana y un haz principal con grupo de estructura $U(1)$ con base M . Denotamos el espacio afín de conexiones como $\varphi' \in A_M$, fijando una conexión φ'_0 , el espacio afín A_M es modelado como un espacio lineal L_M de 1-formas $\varphi := \varphi' - \varphi'_0$. La acción de Yang-Mills en este caso se escribe como

$$S_M(\varphi) = \int_M F^{\varphi'} \wedge F^{\varphi'}$$

donde $F^{\varphi'}$ es la curvatura, la cual se expresa localmente como $d\varphi'$. Las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$d^*d\varphi = 0, \quad \varphi \in L_M, \quad (1)$$

donde d^* es el codiferencial asociado al operador de Hodge $\star$ definido por la métrica en M .

Consideramos el espacio de condiciones de frontera $\phi \in L_{\partial M}$ dado por las parejas

$$\phi = (\phi^D, \phi^N), \quad \phi^D := i_{\partial M}^* \phi, \quad \phi^N := i_{\partial M}^* \mathcal{L}_\nu \phi \quad (2)$$

donde $i_{\partial M} : \partial M \rightarrow M$ es el encaje de la frontera y $\phi \in L_{\partial M_\varepsilon}$ es una solución de 1 pero en el cilindro $M \times [0, \varepsilon] \cong \partial M_\varepsilon \subset M$, donde $\varepsilon > 0$ es pequeño. También ν es un vector ortonormal a ∂M dirigido al interior de M . Este espacio lineal $L_{\partial M}$ modela el espacio correspondiente afín $A_{\partial M}$ de condiciones de frontera de las conexiones que resuelven Euler-Lagrange en el cilindro ∂M_ε .

Más generalmente, para cualquier variedad de dimensión 1 cerrada Σ provista de un germen de métrica riemanniana podemos hablar de espacios de condiciones de frontera

$$L_\Sigma := \{\phi = (\phi^D, \phi^N) : d^*d(\phi|_{\Sigma_\varepsilon}) = 0\}$$

donde las condiciones de frontera sólo se consideran en la componente de frontera $\Sigma \times \{0\} \subset \partial(\Sigma_\varepsilon)$.

Es posible obtener una expresión local de $\phi \in L_\Sigma$ a partir de ciertas coordenadas especiales de Fermi.

Lema 1 (ver [7]). *Dado un cilindro $\Sigma \times [0, 1]$ con una métrica riemanniana, existe un encaje, para $\varepsilon > 0$ pequeño*

$$X : \Sigma \times [0, \varepsilon] \rightarrow \Sigma_\varepsilon \quad (3)$$

tal que $\Sigma \times [0, \varepsilon]$ tiene como imagen una vecindad tubular Σ_ε de Σ , y coordenadas locales (s, τ) que satisfacen

1. $\partial/\partial s, \partial/\partial \tau$ es una base ortonormal a lo largo de Σ .
2. Las curvas $\tau \mapsto (s_0, \tau)$ corresponden a geodésicas con condición inicial $s_0 \in \Sigma$.
3. La coordenada s corresponde a la longitud de arco a lo largo de Σ con respecto a la métrica.
4. La métrica riemanniana h en Σ_ε con restricción $h|_\Sigma$ se describe localmente como la matriz identidad.

Consideramos expresiones locales de 1-formas en Σ_ε respecto a este sistema de coordenadas:

$$\phi|_{\Sigma_\varepsilon} = \phi^s(s, \tau)ds + \phi^\tau(s, \tau)d\tau$$

con $\phi^D = \phi^s(s, 0)ds$ y $\phi^N = \partial_\tau \phi^s(s, 0)ds$, para todo $\phi \in L_\Sigma$, notamos que la componente ϕ^τ se anula. También notamos que el vector normal ν puede tomarse definirse como ∂_τ .

Es posible además describir el mapeo de condiciones de frontera

$$r_M : L_M \rightarrow L_{\partial M}, \quad r_M(\varphi) = \left((\varphi|_{\partial M_\varepsilon})^D, (\varphi|_{\partial M_\varepsilon})^N \right)$$

en ese sentido podemos escribir $r_M(\varphi) = \phi$ con $\phi = \varphi|_{\partial M_\varepsilon}$, con imagen $L_{\tilde{M}} := r_M(L_M) \subset L_{\partial M}$.

Supongamos que la frontera ∂M de la región M de dimensión 2, se descompone en hipersuperficies que componentes de dimensión 1, de tal manera que $\partial M := \Sigma^1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma^m$. Entonces hay un isomorfismo lineal

$$\Omega^1(\partial M) \simeq \Omega^1(\Sigma^1) \oplus \dots \oplus \Omega^1(\Sigma^m)$$

Así tenemos el isomorfismo $L_{\partial M} \simeq L_{\Sigma^1} \oplus \dots \oplus L_{\Sigma^m}$.

...

Tomemos $\varphi \in L_M$ de tal manera que $d^*d\varphi = 0$, entonces $d\varphi$ es un la multiplicación de una constante por la forma de área, μ , de la métrica riemanniana h . Es decir, $d\varphi = \dot{c}_\varphi \mu$, para una $\dot{c}_\varphi$.

3 Acción de gauge y su correspondiente reducción simpléctica

Recordemos ahora la acción de gauge o del grupo de norma. La *acción de gauge en el interior de la región*, $G_M^0 \times L_M \rightarrow L_M$, queda descrita como $df \times \varphi \mapsto \varphi + df \forall df \in d\Omega^0(M)$, donde G_M^0 es la componente de la identidad del grupo de gauge (o grupo de norma).

Definamos

$$\Phi_{A_M} := \{\bar{\varphi} \in L_M : d^*\bar{\varphi} = 0, \iota_{\partial_\tau}\bar{\varphi} = 0\}$$

Supongamos que $\bar{\varphi} \in L_M$ es tal que $\iota_{\partial_\tau}\bar{\varphi} = 0$, entonces en particular $\bar{\varphi}^\tau = 0$. Entonces $\partial_s\bar{\varphi}^\tau - \partial_\tau\bar{\varphi}^s = \dot{c}_{\bar{\varphi}}$ es constante. Esto es, $-\partial_\tau\bar{\varphi}^s = \dot{c}_{\bar{\varphi}}$.

Recordemos la descomposición de Hodge-Morrey-Friedrichs, ver [12],

$$\Phi_{A_M} \simeq L_M \cap \mathfrak{H}_N^1(M) \oplus d^*\Omega_N^2(M) \simeq L_M \cap \mathfrak{H}_N^1(M)$$

aquí las formas armónicas son $\mathfrak{H}^1(M)$, es decir $d\varphi = 0 = d^*\varphi$. Por otro lado, el subíndice N indica que no tiene componente normal en ∂M , es decir, $\iota_{\partial_\tau}\bar{\varphi}|_{\partial M} = 0$. Entonces este espacio lineal Φ_{A_M} modela el espacio de órbitas de gauge, es decir,

$$L_M := L_M/G_M^0 \simeq \Phi_{A_M}$$

Consideremos ahora una hipersuperficie Σ . La acción $G_\Sigma^0 \times L_\Sigma \rightarrow L_\Sigma$, del grupo de norma G_Σ^0 en las condiciones de frontera es

$$d(f^D) \times (\phi^D, \phi^N) \mapsto (\phi^D + d(f^D), \phi^N), \quad \forall d(f^D) \in d\Omega^0(\Sigma), \phi \in L_\Sigma.$$

Consideremos:

$$\Phi_{A_\Sigma} := \{(\eta_0, \dot{\eta}_0) \in A_\Sigma \mid \partial_s \eta_0 = 0 = \partial_s \dot{\eta}_0\} = \{(c ds, \dot{c} ds) \in A_\Sigma \mid (c, \dot{c}) \in \mathbb{R}^2\}$$

Sea $(c ds, \dot{c} ds) \in \Phi_{A_\Sigma}$ y consideremos $X_\Sigma^*(\eta) = \eta^s ds + \eta^\tau d\tau = \eta^s ds$, Una expresión local para una solución $\eta \in A_{\Sigma_\varepsilon} \cap \Phi_{A_\Sigma}$. Al considerar una simetría de gauge obtenemos una EDO para $f : \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\eta^s + \partial_s f = c \quad (4)$$

$$\partial_\tau \eta^s + \partial_\tau \partial_s f = \dot{c} \quad (5)$$

La ecuación (5) se puede resolver en el cilindro Σ_ε tomando $g(s, \tau) := \partial_s f$, una vez que se fija la condición de frontera $\partial_s f(s, 0) = g(s, 0)$. Esta condición de frontera se puede obtener al resolver la ecuación (4) en Σ . Es decir

$$\mathbb{L}_\Sigma := L_\Sigma / G_\Sigma^0 \simeq \Phi_{A_\Sigma}$$

Además debido a la conmutación del diagrama

$$\begin{array}{ccc} L_M \times G_M^0 & \longrightarrow & L_{\partial M} \times G_{\partial M}^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_M & \longrightarrow & L_{\partial M} \end{array}$$

es posible inducir una aplicación de las condiciones de frontera de soluciones de frontera módulo gauge

$$r_M : \mathbb{L}_M \rightarrow \mathbb{L}_{\partial M}$$

donde $\mathbb{L}_{\partial M} = \mathbb{L}_{\Sigma^1}^1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}_{\Sigma^m}^m$.

En teorías de campos definir una estructura (pre)simpléctica a partir de integración por partes y la diferencial de la acción, ver [4], [11],[10], específicamente en el caso de las teorías de Yang-Mills [14], [4], [5], se tiene

$$\omega_\Sigma(\eta, \xi) = \frac{1}{2} \int_\Sigma [-\eta^s \partial_\tau \xi^s + \xi^s \partial_\tau \eta^s] ds, \quad \xi, \eta \in L_\Sigma. \quad (6)$$

Esto hace de L_Σ un espacio vectorial simpléctico y de A_Σ un espacio afín provisto de una estructura simpléctica invariante bajo traslaciones debidas a L_Σ . La descomposición de cadenas de integración nos da, $\int_{\partial M} \cdot = \int_{\Sigma^1} \cdot + \cdots + \int_{\Sigma^m} \cdot$, de donde

$$\omega_{\partial M} = \omega_{\Sigma^1} \oplus \cdots \oplus \omega_{\Sigma^m}$$

El grupo G_Σ^0 actúa por simplectomorfismos y el espacio reducido $\mathbb{L}_\Sigma$ tiene como estructura simpléctica reducida

$$\omega_\Sigma(\phi_1, \phi_2) = (c_1 \dot{c}_2 - c_2 \dot{c}_1) \cdot \text{longitud}(\Sigma), \quad \forall \phi_i = (c_i ds, \dot{c}_i ds)$$

4 Dinámica de campos vista como una relación lagrangiana

Lema 2. Para todo $\varphi \in \Omega^1(M)$ existe $\bar{\varphi} \in \Omega^1(M)$ que satisface

$$\varphi^D = \bar{\varphi}^D, \varphi^N = \bar{\varphi}^N, \iota_{\partial_\tau} \bar{\varphi} = 0.$$

Demostración. Consideremos la expresión local $\varphi = \varphi^s ds + \varphi^\tau d\tau$ y en coordenadas locales dadas por X , dada en (3) consideremos $\widehat{\varphi}(s, \tau) \in \Omega^1(\partial M_\varepsilon)$,

$$\widehat{\varphi}(s, \tau) := ((X^\tau)^{-1})^* \varphi^D(s) + \tau \cdot ((X^\tau)^{-1})^* \varphi^N(s), \quad \forall [s, \tau] \in \Sigma \times [0, \varepsilon]$$

extendemos enseguida a todo M mediante $\psi \cdot \overline{\varphi}$. Donde $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ es suave que vale 1 en ∂M_ε y 0 en el complemento de una vecindad abierta que contiene la vecindad tubular ∂M_ε . $\square$

Consideremos dos soluciones $\varphi, \varphi' \in L_M$, si $\phi := r_M(\overline{\varphi})$, $\phi' := r_M(\overline{\varphi'}) \in L_{\partial M}$, al sustituir en (6) obtenemos

$$\omega_{\partial M}(\phi, \phi') = \int_{\partial M} (\varphi^s \dot{c}_{\varphi'} - (\varphi')^s \dot{c}_\varphi) ds,$$

donde $\varphi|_{\partial M_\varepsilon}, \varphi'|_{\partial M_\varepsilon} \in L_{\partial M_\varepsilon}$. Por el Teorema de Stokes

$$\omega_{\partial M}(\phi, \phi') = \dot{c}_{\varphi'} \int_M d\overline{\varphi} - \dot{c}_\varphi \int_M d\overline{\varphi'} = (\dot{c}_{\varphi'} \dot{c}_\varphi - \dot{c}_\varphi \dot{c}_{\varphi'}) \cdot \text{area}(M) = 0. \quad (7)$$

esto muestra que el espacio $L_{\tilde{M}} \subset L_{\partial M}$ es isotrópico, es decir $L_{\tilde{M}} \subset L_{\tilde{M}}^\perp$ donde consideramos el espacio ortogonal simpléctico. Este es un hecho general de teorías de campos, ver [3]. Lo mismo ocurre en los espacios reducidos, $\mathbb{L}_{\tilde{M}} \subset \mathbb{L}_{\partial M}$, donde $\mathbb{L}_{\tilde{M}} := L_{\tilde{M}}/G_{\partial M}^0$.

Tomamos $\varphi \in L_M$, con $\phi = (\varphi^D, \varphi^N) \in L_{\partial M}$ y supongamos que $\omega_{\partial M}(\phi, \phi') = 0$ para todo $\varphi' \in L_{\partial M_\varepsilon}$ donde $\phi' = \varphi'|_{\partial M} \in L_{\partial M}$ corresponde a φ' . Entonces

$$\dot{c}_\varphi \int_{\partial M} (\varphi')^s ds = \int_{\partial M} (\varphi^s \partial_\tau (\varphi')^s) ds.$$

Como φ' es una solución en la vecindad tubular ∂M_ε entonces $\partial_\tau (\varphi')^s|_\Sigma = \dot{c}_{\varphi'}$. De ahí que

$$\dot{c}_\varphi \int_{\partial M} (\varphi')^s ds = \dot{c}_{\varphi'} \int_{\partial M} \varphi^s ds = \dot{c}_\varphi \dot{c}_{\varphi'} \int_M \mu$$

Por ende

$$\int_{\partial M} \varphi' = \dot{c}_{\varphi'} \cdot \text{area}(M). \quad (8)$$

Supongamos que $\partial M = \Sigma^1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma^m$. El espacio de soluciones $\mathbb{L}_{\tilde{M}}$ es isotrópico y además de dimensión finita por lo tanto es un espacio lagrangiano. De hecho esta dado por la intersección de los hiperplanos

$$\cap_{i=1}^m \left\{ (c_i, \dot{c}_i) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^m c_i \cdot \text{longitud}(\Sigma^i) = \dot{c}_i \cdot \text{area}(M) \right\}. \quad (9)$$

Notemos que $\dim \mathbb{L}_{\tilde{M}} = (\dim \mathbb{L}_{\partial M}) / 2$. Con esto hemos probado la siguiente afirmación.

Teorema 1. *El espacio (de dimensión finita) $\mathbb{L}_{\tilde{M}} \subset \mathbb{L}_{\partial M}$ es un subespacio lagrangiano.*

Para el caso general, $\dim M > 2$, el espacio $\mathbb{L}_{\partial M}$ es de dimensión infinita y es preciso usar otros argumentos, ver [4], [5]. Consideremos el espacio $C_{M, \partial M} \subset L_{\partial M}$

$$C_{M, \partial M} = \{ \phi = (\varphi^D, \varphi^N) \in L_{\partial M} : \iota_{\partial_\tau} \varphi = 0, d^* \varphi = 0 \} \simeq r_M(\mathfrak{H}_N^1(M))$$

en particular $\varphi^N = \dot{c} ds$ donde $\dot{c}$ es constante.

Cuando consideramos las condiciones de frontera $\phi = (\varphi^D, \varphi^N)$ de las soluciones al interior de la región M módulo gauge, consideramos $\varphi \in \Phi_{A_M} \subset L_M$, entonces tenemos

$$r_M(\Phi_{A_M}) / G_M^0 = r_M(\mathbb{L}_M) \subset \mathbb{L}_{\partial M}$$

Teorema 2. *La imagen de las soluciones de Yang-Mills módulo gauge $r_M(\mathbb{L}_M) \subset \mathbb{L}_{\partial M}$ concide con la intersección $\mathbb{L}_{\tilde{M}} \cap \mathbb{C}_{M, \partial M}$, donde $\mathbb{C}_{M, \partial M} := C_{M, \partial M} / G_{\partial M}^0$.*

5 Ejemplos

5.1 El disco

Consideramos el disco unitario $M \subset \mathbb{R}^2$. Entonces sólo tenemos la solución trivial módulo gauge, es decir, $\mathcal{L}_M = \{0\}$, $\mathcal{L}_{\partial M} \simeq \mathbb{R}^2$, el subespacio lagrangiano $\mathcal{L}_{\tilde{M}}$ es la recta $\pi \cdot \dot{c} = 2\pi \cdot c$, con $(c, \dot{c}) \in \mathbb{R}^2$. El espacio $\mathcal{C}_{M, \partial M} = \{c = 0\}$, restringe la imagen $r_M(\mathcal{L}_M) = \{0\} \subset \mathcal{L}_{\tilde{M}}$.

5.2 El cilindro

Consideramos el cilindro recto M de altura a y longitud de la base circular ℓ . Entonces $\partial M = \Sigma^1 \sqcup \Sigma^2$ consta de dos círculos

$$\mathcal{L}_M = \left\{ \varphi = \left(\frac{c_2 - c_1}{a} \tau + c_1 \right) ds : c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2 \right\} \simeq \mathbb{R}^2$$

donde (s, τ) son las coordenadas del cilindro con $0 \leq s \leq \ell$, $0 \leq \tau \leq a$. En particular

$$\varphi^D|_{\Sigma^1} = c_1 ds, \quad \varphi^N|_{\Sigma^1} = (c_2 - c_1)/a ds, \quad \varphi^D|_{\Sigma^2} = c_2 ds, \quad \varphi^N|_{\Sigma^2} = (c_1 - c_2)/a ds. \quad (10)$$

Por otro lado: $\mathcal{L}_{\partial M} \simeq \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$, el subespacio lagrangiano $\mathcal{L}_{\tilde{M}} \simeq \mathbb{R}^2$ está parametrizado por $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ con parametrizaciones dadas por (10). También se puede describir como la intersección de los hiperplanos

$$a \cdot \dot{c}_1 = \ell \cdot (c_1 - c_2), \quad a \cdot \dot{c}_2 = \ell \cdot (c_2 - c_1)$$

con $(c_i, \dot{c}_i) \in \mathbb{R}^2$ para las dos componentes Σ_i con $i = 1, 2$. En este caso específico $\mathcal{L}_{\partial M} = \mathcal{C}_{M, \partial M}$.

6 Operador de Dirichlet-Neumann y su estructura compleja

El operador de Dirichlet-Neumann, transforma condiciones de Dirichlet en las correspondientes condiciones de Neumann para una solución $\phi = (c, \dot{c}) \in \mathcal{L}_\Sigma$, donde $\phi = \varphi|_\Sigma$, $\varphi \in L_{\Sigma_\varepsilon}$.

$$\Lambda_\Sigma(\phi^D) = (\phi')^N$$

donde existe $\phi' \in \mathcal{L}_\Sigma$ tal que $\phi^D = (\phi')^N$, ver otros ejemplos de operadores en 1-forma asociados a otros problemas de frontera en [2].

Este operador permite definir de manera explícita posible la estructura compleja $J_\Sigma : \mathcal{L}_\Sigma \rightarrow \mathcal{L}_\Sigma$ como:

$$J_\Sigma(\eta_0, \dot{\eta}_0) := (-\dot{\eta}_0, \eta_0), \quad \forall (\eta_0, \dot{\eta}_0) \in \mathcal{L}_\Sigma \quad (11)$$

Consideremos la forma bilineal definida positiva

$$g_\Sigma(\eta, \xi) := \frac{1}{2} \int_\Sigma (\eta^s \partial_\tau \xi^s + \xi^s \partial_\tau \eta^s) ds, \quad \eta, \xi \in L_{\partial M_\varepsilon}.$$

donde indentificamos $\partial_\tau \xi^s ds$ con la derivada de Lie $\mathcal{L}_{\partial_\tau} \xi = \iota_{\partial_\tau} d\xi$, ya que $\iota_{\partial_\tau} \xi = 0$. Entonces tenemos la descripción libre de coordenadas

$$g_\Sigma(\eta, \xi) = \frac{1}{2} \int_\Sigma X_0^* (\eta \wedge \star \mathcal{L}_{\partial_\tau} \xi + \xi \wedge \star \mathcal{L}_{\partial_\tau} \eta) \quad (12)$$

Entonces la estructura compleja esta domada por la estructura simpléctica ω_Σ es decir

$$2\omega_\Sigma(\cdot, J_\Sigma \cdot) = g_\Sigma(\cdot, \cdot)$$

De esta manera $(c ds, \dot{c} ds) \in \Phi_{A_\Sigma} \simeq L_\Sigma$ puede ser identificado con $c + i\dot{c} \in \mathbb{C}$ provisto con la estructura simpléctica: $\text{longitud}(\Sigma) \cdot dc \wedge d\dot{c}$.

Al tomar la holonomía a lo largo de Σ ,

$$\text{hol}_\Sigma(\eta) = \exp i \int_\Sigma \eta \in G = U(1) \quad (13)$$

suponiendo que permanece constante para c y para η , y dado que están en la misma componente, $\int_\Sigma c ds$ es lo mismo que $\int_\Sigma \eta^s ds \bmod 2\pi\mathbb{Z}$. Entonces η pertenece a la órbita bajo la acción de G_Σ^0 de c , por lo tanto hay una homotopía entre ambas evaluaciones. Es decir

$$c \cdot \text{longitud}(\Sigma) = \int_\Sigma c ds = \int_\Sigma \eta^s ds$$

y esto implica que la ecuación (4) puede ser resuelta.

De esta manera la holonomía $\text{hol}_\Sigma : \Omega^1(\Sigma) \rightarrow U(1)$ tiene por derivada $D\text{hol}_\Sigma : \Phi_{A_\Sigma} \rightarrow TU(1)$. Por lo tanto tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{A_\Sigma} & \xrightarrow{D\text{hol}_\Sigma} & TU(1) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

Podemos considerar entonces el espacio reducido *completo* o cociente de gauge dado por el cilindro

$$A_\Sigma/G_\Sigma := \Phi_{A_\Sigma}/\overline{G_\Sigma} \leftrightarrow \mathbb{C}^\times \quad (14)$$

donde $\overline{G_\Sigma} := G_\Sigma/G_\Sigma^0 \simeq \mathbb{Z}$. Obtenemos la *estructura simpléctica reducida* $\overline{\omega}_\Sigma$ en A_Σ/G_Σ . Así $\overline{\omega}_\Sigma$ es $\text{longitud}(\Sigma)$ veces la forma de área en el cilindro $TU(1)$.

Para una superficie M conexa con $\partial M = \Sigma^1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma^m$:

$$A_M \rightarrow A_{\partial M}/G_{\partial M} = TU(1) \times \dots \times TU(1)$$

tiene imagen lagrangiana cuyo imagen en el espacio reducido es el cociente de (9).

7 Precuantización

Una vez que hemos hecho la reducción modulo gauge obteniendo una estructura sympléctica en el espacio cociente (de dimensión finita) y una estructura compleja, es posible emplear las herramientas de cuantización geométrica.

Definición 1. 1. Una estructura compleja mansa:

$$\begin{array}{ccc} A_\Sigma/G_\Sigma^0 & \longrightarrow & A_\Sigma/G_\Sigma \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda = \exp \sqrt{-1}z} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

2. Un haz hermitiano en el espacio $\mathbb{C}^\times$:

$$\|s\|_{\mathbb{C}}^2 = e^{-(\Im z)^2/\hbar} |s|^2, \quad z := c + \sqrt{-1}\dot{c}, \quad \hbar > 0$$

$$\|s\|_{\mathbb{C}^\times}^2 = e^{-(\Im(-\sqrt{-1} \ln \lambda))^2/\hbar} |s|^2, \quad \lambda = \exp \sqrt{-1}z$$

3. Un potencial de Kähler:

$$\omega_{\mathbb{C}^\times} = -\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \|s\|_{\mathbb{C}^\times}^2 = \sqrt{-1} \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2\hbar|\lambda|^2}$$

4. Una polarización holomorfa

$$\mathcal{H}_\Sigma = \left\{ F(z) e^{-(\Im z)^2/2\hbar} \in L^2(\mathbb{C}) \mid \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z) = 0, F(z+n) = F(z) \right\} / \sim$$

Referencias

- [1] Michael Atiyah. Topological quantum field theories. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (68):175–186 (1989), 1988.
- [2] Mikhail Belishev and Vladimir Sharafutdinov. Dirichlet to Neumann operator on differential forms. *Bull. Sci. Math.*, 132(2):128–145, 2008.
- [3] A. S. Cattaneo, P. Mnev, and N. Reshetikhin. Classical and quantum Lagrangian field theories with boundary. In *Proceedings of the Corfu Summer Institute 2011 School and Workshop on Elementary Particle Physics and Gravity*, PoS, page 044, Summer 2011. arXiv:1207.0239[math-ph].
- [4] A. S. Cattaneo, P. Mnev, and N. Reshetikhin. Semiclassical quantization of classical field theories. In D. Calaque and T. Strobl, editors, *Mathematical Aspects of Quantum Field Theories*, Mathematical Physics Studies, chapter Part III: (Semi-)Classical Field Theories, pages 275–314. Springer-Verlag, 2015.
- [5] Homero G. Díaz-Marín. General boundary formulation for n -dimensional classical abelian theory with corners. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 11:048, 35 pages, 2015.
- [6] Bruce K. Driver and Brian C. Hall. Yang-Mills theory and the Segal-Bargmann transform. *Comm. Math. Phys.*, 201(2):249–290, 1999.
- [7] Bozhidar Z. Iliev. *Handbook of normal frames and coordinates*, volume 42 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [8] N. P. Landsman. *Mathematical topics between classical and quantum mechanics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [9] Robert Oeckl. Two-dimensional quantum Yang-Mills theory with corners. *J. Phys. A*, 41(13):135401, 20, 2008.
- [10] Robert Oeckl. Affine holomorphic quantization. *J. Geom. Phys.*, 62(6):1373–1396, 2012.
- [11] Robert Oeckl. Holomorphic quantization of linear field theory in the general boundary formulation. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 8:Paper 050, 31, 2012.
- [12] Günter Schwarz. *Hodge decomposition—a method for solving boundary value problems*, volume 1607 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [13] Edward Witten. Two-dimensional gauge theories revisited. *J. Geom. Phys.*, 9(4):303–368, 1992.

- [14] N. M. J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1992. Oxford Science Publications.

Una crítica al desarrollo histórico de la teoría de la relatividad general: A propósito de su centenario

Ram Gopal Vishwakarma

viswa@uaz.edu.mx

Juan Martínez Ortiz

jmartinez_ortiz@yahoo.com

Leticia Adriana Ramírez Hernández

leticiaadrianaramirez@hotmail.com

Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas

Resumen

La teoría de la Relatividad General de Einstein, en la que la gravitación se presenta como la curvatura del espacio-tiempo, es indudablemente una de las teorías más bellas en el área de la física-matemática. A un siglo de su creación han habido grandes progresos en esta teoría, tanto en el contexto teórico, como en el observacional, y aún en la actualidad es usada para describir con precisión todos los fenómenos gravitatorios que abarcan desde nuestro sistema solar, hasta escalas superiores como las del universo mismo. Sin embargo, se ha tenido que pagar un alto precio por este éxito, precio que usualmente pasa desapercibido. Más de 95 por ciento del contenido del universo debe ser oscuro, energía oscura o materia oscura, y de éstos no se tiene ninguna evidencia no-gravitacional o de laboratorio. Por otra parte, la energía oscura es, por sí misma, una clara confrontación entre la física fundamental y la cosmología. En este trabajo se hace una revisión crítica de la teoría para determinar así, si la forma en la que se dio su desarrollo histórico generó un vacío conceptual en la teoría.

1 Antecedentes

El año 2015 marca el centenario de la Teoría de la Relatividad General (RG) de Einstein - una teoría que hace una combinación sin precedentes de elegancia matemática y profundidad teórica - conceptual, que constituye la descripción más acertada de la gravitación, en la física moderna. Es, sin duda, uno de los mayores logros teóricos de la Física del siglo XX y que es reconocido como el logro intelectual, por excelencia.

A principios del siglo XX, Einstein revolucionó las nociones tradicionales de espacio y tiempo, sintetizando en una sola entidad de 4 dimensiones el “espacio-tiempo”. Esto se logró a través de la llamada Teoría de la Relatividad Especial (RE) en la que Einstein postula que las leyes de la física son las mismas para todos los observadores no acelerados, y que la velocidad de la luz en el vacío nunca cambia. La teoría es válida en la ausencia de la fuerza de gravitación. Posteriormente él dió un gran salto de la RE a la RG al descubrir que la gravedad puede ser añadida a la RE al considerar una generalización de la misma para observadores, lo que conduce a un espacio-tiempo curvo. Así la RG reemplaza la visión de la gravitación de Newton como una fuerza con la curvatura del espacio-tiempo, en la que éste se vuelve dinámico y se ve influenciado por la presencia de la materia. Esto hace que el carácter de la teoría sea, esencialmente, geométrico; en el que la geometría no euclidiana (Riemann) juega un papel central. El descubrimiento de Einstein sobre el principio de covarianza general (en el que las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de coordenadas, incluyendo aquellos con aceleración) sugiere entonces que la teoría debe ser formulada utilizando el lenguaje de los tensores. Esto condujo a la famosa ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

elegante y engañosamente simple, y que muestra que la geometría (presentada en su forma tensorial como una función de $G_{\mu\nu}$, la curvatura espacio-tiempo) se da en términos de una fuente de materia codificada en el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$. Aquí G y c son, respectivamente, la constante de Newton de gravitación y la velocidad de la luz en el vacío.

A un siglo de su creación, la teoría ha generado avances importantes en ambos sentidos: teóricos y observacionales [1]. Es de destacarse que esta teoría, que nació del pensamiento teórico puro, ha logrado sobrevivir a un amplio escrutinio experimental/observacional; y, aún describe con precisión todos los fenómenos gravitacionales: desde el sistema solar y hasta el universo mismo. Sin embargo, debe pagarse un precio alto por este notable éxito, más del 95 por ciento del contenido de $T_{\mu\nu}$ tiene que ser oscuro (materia oscura y energía oscura), y de ello no existe aún prueba no-gravitacional ni de laboratorio; además de que presenta otros problemas. No obstante, los requisitos de las componentes oscuras “misteriosas” en RG son considerados por la mayoría como una predicción consistente y genuina de la teoría, y los teóricos parecen estar satisfechos con las nuevas propuestas que aparecen constantemente, de componentes oscuros. Sin embargo, también hay quienes interpretan las observaciones que apoyan los sectores o componentes oscuros, como un fracaso o una falla de la teoría y creen que ello justifica una revisión de las bases y fundamentos de la teoría, muy a pesar de aparente éxito que ésta tiene. Tal vez hemos malentendido la verdadera naturaleza de una teoría geométrica de la gravitación debido a la evolución histórica de las ideas detrás de ella.

Aunque Einstein, y luego otros, fueron hipnotizados por la “coherencia interna y la elegancia de la teoría”, muchos problemas se descubrieron (incluso durante la vida de Einstein), que conducían a inconsistencias con los supuestos básicos de la RG. Actualmente, existen misterios que continúan limitando la comprensión teórica de algunos de los problemas no resueltos en RG. Desde este punto de vista ofrecemos, en este trabajo, un examen crítico de la evolución histórica de la RG.

2 El Principio de Equivalencia y el Principio de Mach

Como se ha mencionado anteriormente, la equivalencia de la gravitación y los marcos de referencia acelerados, resultante de la igualdad de las masas gravitacionales e inerciales, fue un principio definitorio de la RG. Sin embargo, este principio no se podría realizar de manera inequívoca en la teoría. La inercia y las masas gravitacionales (activas), han permanecido desiguales en general. Se cree que la energía de enlace del campo gravitatorio es la responsables de esto. Sin embargo, sigue siendo un misterio el por qué la contribución de la energía gravitacional a las diferentes masas no es igual.

Aunque, en ausencia de una declaración clara de Mach, existen una serie de formulaciones del principio que lleva su nombre, y éste esencialmente defiende la materia directamente observable en el universo, evitando el espacio absoluto no observable de Newton.

El principio de Mach, como un principio de equivalencia, fue también la motivación principal y guía para Einstein en la formulación de la RG. Sin embargo, la teoría no pudo ser encajada completamente en el principio de Mach, (contrariamente a las expectativas de Einstein) pues aparecen varias características contrapuestas en ella con éste.

3 Energía gravitacional y el Tensor $T_{\mu\nu}$

La modelización de la materia a través del tensor $T_{\mu\nu}$ ha revolucionado la forma en que se solía pensar acerca de la fuente de la gravedad. Dado que, en la teoría newtoniana, la densidad de masa es la fuente de la gravedad, es de esperarse que la densidad de energía juegue ese mismo rol en la generalización relativista de la ecuación de Poisson (que representa la gravitación de Newton para una distribución de la materia). Sorpresivamente no ocurre así. Las diez componentes (independientes) de $T_{\mu\nu}$ hacen una contribución a la fuente de la gravedad, llegándose a la revolucionaria conclusión de que no sólo la densidad de energía tiene efectos gravitacionales, sino que también los tienen la presión y el impulso.

Sin embargo, la formulación relativista de la materia en términos de $T_{\mu\nu}$ no puede considerarse completa. El momento angular es una característica fundamental e ineludible de la materia, lo que constantemente se verifica en las diferentes escalas: subatómica y galáctica. Ahora bien, dado que $T_{\mu\nu}$ no incluye el momento angular, no puede ser considerado como un buen modelo de la materia.

Curiosamente, Einstein siempre vio con recelo la representación mediante el tensor de energía-tensión $T_{\mu\nu}$, de la fuente de gravitación. En primer lugar, destacó que este “término fuente” debería incluir a todas las fuentes de energía, el momento y la tensión, incluyendo aquellas asociadas al campo gravitacional (que también gravita). Si bien es cierto, el tensor $T_{\mu\nu}$ en (1) incluye en él todas las fuentes de la gravitación, incluso la energía oscura; éste no incorpora el campo gravitacional mismo. Einstein, al no encontrar una representación tensorial del campo gravitacional, admitió que “el tensor de energía puede considerarse sólo como un medio provisional que representa la materia.” Los esfuerzos dedicados durante todo un siglo para descubrir una formulación unánime del tensor energía-tensión del campo gravitatorio, han sido en vano; concluyéndose así que no existe un tensor de energía-tensión del campo gravitatorio apropiado.

Es un hecho innegable que los estándares de $T_{\mu\nu}$, en términos de su belleza, coherencia e integridad matemática, desafortunadamente no son compatibles con el lado geométrico vibrante

de la RG, tal vez porque no se ha dedicado la suficiente atención a $T_{\mu\nu}$. El mismo Einstein reconoció este hecho en su comentario famoso: “La Relatividad General es como un edificio, un lado o ala (la geometría) está hecho de mármol muy sólido, pero la otra ala (la materia) está hecha de madera de baja calidad.” El misterio de los efectos gravitacionales proveniente de fuentes no convencionales (es decir, los componentes de $T_{\mu\nu}$ diferentes a la densidad de energía), rara vez se aborda con profundidad suficiente. No se ha explicado aún, por ejemplo, que la formulación de la materia en términos del tensor $T_{\mu\nu}$ en el caso 4-dimensional, modifica profundamente sus propiedades básicas conocidas, e incluso confronta el conocimiento intuitivo [2].

El cuestionamiento que vislumbró Einstein sobre la materia representada a través de $T_{\mu\nu}$, se ve reforzado por un estudio reciente en el que se revelan algunas inconsistencias sorprendentes y paradójicas, presentes en la formulación del tensor de energía-tensión de los campos de la materia. En este se concluye que la formulación de $T_{\mu\nu}$ es coherente con la descripción geométrica de la gravitación [2]. ¿Significa ello que la madera, en la analogía de Einstein, no es sólo de baja calidad en comparación con los estándares de su mármol, sino que también está podrida y con polilla? Debe hacerse notar que la formulación relativista de la materia, en términos del tensor $T_{\mu\nu}$, nunca ha sido detectada en ningún experimento (directo).

4 Soluciones no Físicas

Con la introducción de la RG en 1915, la teoría comenzó a tener un buen soporte observacional; y, actualmente, varias predicciones de la teoría han sido satisfactoriamente probadas con alto grado de precisión, tanto en el límite del campo gravitacional débil del sistema solar, como en los campos más fuertes presentes en los sistemas de los púlsares binarios.

Sin embargo, debe mencionarse que estas pruebas, que acreditan la RG, se basan en principalmente dos soluciones de ‘vacío’ de la ecuación (1), descubiertas por Schwarzschild y Kerr, en ausencia de $T_{\mu\nu}$. Irónicamente, existen muchas otras soluciones de vacío de la ecuación (1) que se consideran no físicas. Por ejemplo, consideremos una solución de este tipo descubierta por Kasner en 1921. Se cree que ésta representa un universo vacío que se expande y se contrae a un ritmo diferente en diferentes direcciones. Sin embargo, lo que realmente se expande/contrae es muy controversial en esta interpretación: ¿cómo es posible que el espacio, que es totalmente vacío, se pueda expandir/contrair? ¿Cómo puede nada expandirse/contraerse? Por esta razón, la solución Kasner se considera no física. Existen muchas otras soluciones de vacío que se consideran no físicas [3].

Sin embargo, esto demerita la validez general de la teoría al introducir la subjetividad. Una solución es llamada no física, porque no somos capaces de hacer una interpretación correcta de la misma.

Puede ser, entonces, que nuestra formulación de la materia no sea la correcta en la teoría [4].

5 Materia oscura y energía oscura

Poco después de la formulación de RG, Einstein aplicó su teoría para modelar el universo. En esa época, Einstein creía en un universo estático, quizá guiado por su convicción religiosa de que el universo debe ser eterno e inmutable. Como la ecuación (1) en su forma original no permite un universo estático, insertó un término llamado la constante cosmológica para forzar la ecuación a predecir un universo estático. Sin embargo, se dio cuenta tarde de que ésta vaticinaba un

universo inestable. Entonces notó que su ecuación (1) también admitía soluciones en expansión, que además eran consistentes con las observaciones que reconocían un universo en expansión, no estático. Al darse cuenta de esto, Einstein se retractó de la constante cosmológica llamándola su “mayor error”. Esta teoría resultante, sin la constante cosmológica, solía ser el modelo estándar de la cosmología adoptado y vigente hasta finales del siglo pasado, cuando las famosas observaciones de las supernovas de tipo Ia confirmaban que la expansión del universo se estaba acelerando.

Sin embargo, esta constante cosmológica ha vuelto a entrar en la teoría, con el pretexto de la energía oscura. Como se ha mencionado anteriormente, con el fin de explicar las supernovas y muchas otras observaciones, la teoría requiere dos ingredientes misteriosos, invisibles, y hasta ahora no identificados - la materia oscura y la energía oscura - aún cuando ninguno de estos componentes oscuros se ha logrado entender de manera satisfactoria. Por un lado, la teoría predice que alrededor del 27% del contenido total del universo está hecho de partículas de materia oscura no bariónica, y ello debiera ser predicho también por alguna extensión del Modelo Estándar de la física de partículas. Sin embargo, no hay indicios de ninguna nueva física más allá del Modelo Estándar que se ha probado con éxito en el Gran Colisionador de Hadrones. En efecto, la materia oscura ha eludido todo esfuerzo de observación directa.

Por otro lado, la energía oscura, quien se cree que constituye alrededor del 68% del contenido total del universo, es aún más difícil de explicar que la materia oscura, además de que presenta otros retos teóricos. El mayor misterio no es que la mayoría del contenido de $T_{\mu\nu}$ no se puede ver, sino que además ¡no puede ser comprendido! Más aún, el candidato mejor favorecido de la energía oscura - la constante cosmológica - está plagada de problemas en el fine-tuning del universo.

6 Soluciones interiores

La RG proporciona una descripción exacta del campo gravitacional fuera del Sol en términos de la solución de Schwarzschild (exterior). Como se ha mencionado anteriormente, es esta solución la que sirvió como base para todas las pruebas clásicas de RG. Sin embargo, la teoría no ha sido exitosa en la descripción del interior de un cuerpo masivo. El interior de una estrella estática, esféricamente simétrica que no gira, está representado por una solución de la ecuación (1), llamada la solución interior de Schwarzschild. Esta solución supone una esfera estática de materia, que se interpreta como un fluido incompresible perfecto de densidad constante. Por lo tanto, la solución resulta ser no física, ya que la velocidad del sonido se vuelve infinita en un fluido con densidad constante y una presión p variable. Así, la solución interior de Schwarzschild resulta no ser conceptualmente satisfactoria. La solución Kerr, que representa el exterior de una estrella giratoria, se ha mantenido invariable para cualquier solución no vacía conocida, que se use para representar el interior de una estrella giratoria. Esto parece indicar que hemos estado buscando soluciones interiores en un lugar equivocado.

Puede ser de interés, también, saber cómo las teorías alternativas sortean tal situación. Algunas de estas teorías de la gravedad se propusieron casi de manera simultánea a la RG, principalmente con el objetivo de poner en práctica el principio de Mach. Actualmente, la motivación para las teorías alternativas, son de corte cosmológico, y la meta principal es encontrar sustitutos para la materia oscura y la energía oscura. Sin embargo, existe un reciente intento que aborda todos los problemas antes mencionados desde una única teoría, desarrollada en el marco de la misma RG, y que puede pensarse como un resurgimiento o reencarnación de la RG [4, 5]. Esta teoría se desarrolló a partir de un nuevo conocimiento, adquirido mediante el análisis de los problemas

antes citados. La teoría resultante no sólo resuelve estos problemas, sino muchos otros [6]. ¿Será acaso que su mismo desarrollo histórico, llevó por caminos equivocados a la RG?

REFERENCIAS

- [1] W.-T. Ni, Empirical Foundations of the Relativistic Gravity, *Int. J. Mod. Phys. D* 14 (2005) 901-921; C. M. Will, The confrontation between general relativity and experiment, *Living Rev. Rel.* 9 (2006) 3; S. G. Turyshev, Experimental tests of general relativity: recent progress and future directions, *Phys.-Usp.* 52 (2009) 1.
- [2] R. G. Vishwakarma, On the relativistic formulation of matter, *Astrophys. Space Sci.* 340 (2012) 373-379.
- [3] R. G. Vishwakarma, A new solution of Einstein's vacuum field equations, *Pramana - J. Phys.* DOI: 10.1007/s12043-015-0946-3 [arXiv: 1409.3758] (2015).
- [4] R. G. Vishwakarma, Mysteries of $R^{ik} = 0$: A novel paradigm in Einsteins theory of gravitation, *Front. Phys.* 9 (2014) 98112.
- [5] R. G. Vishwakarma, A Machin approach to general relativity, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2015 (in press).
- [6] R. G. Vishwakarma, A curious explanation of some cosmological phenomena, *Phys. Scripta* 5 (2013) 055901.

Geometría

Octaedro tensegridal: geometría de material celular

José Javier Gálvez Gamboa
jjaviergalvez@hotmail.com

Magdalena Marciano Melchor
mmarciano@ipn.mx

Hind Taud
htaud@ipn.mx

Instituto Politécnico Nacional

Resumen

El octaedro tensegridal, fue introducido por primera vez por Richard Buckminster Fuller en 1949. Es una geometría, utilizada como estructura tensegridal, debido a sus características. Es de importancia su estudio, ya que se encuentra relacionado con la morfología de material celular, el cual permite el movimiento.

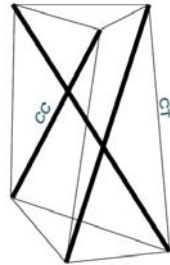
1 Introducción

En el desarrollo del pensamiento científico, se ha puesto de manifiesto que una de las herramientas para el estudio o descripción de un fenómeno, es la construcción de un modelo físico, es decir, un objeto geométrico. En este trabajo nos enfocaremos a la geometría de origen arquitectónico atribuida a Richard Buckminster Fuller (1895 – 1983), personaje visionario, pionero en el desarrollo de la teoría de estructuras, en el desarrollo de esta teoría podemos considerar una clasificación básica: las convencionales y las tensegridales. Al hablar de estructuras tensegridales nos referimos a estructuras de características peculiares como: equilibrio estable y componentes de tensión o compresión, éstas últimas con propiedades de continuidad y discontinuidad, respectivamente. En los últimos años de historia de la geometría no convencional, podemos permitirnos una posible definición concisa como la que sigue:

Definición 1. La tensegridad es un principio basado en el empleo de componentes aislados comprimidos que se encuentran dentro de una red tensada continua, de tal modo que los miembros comprimidos (generalmente barras) no se tocan entre sí y están unidos únicamente por medio de componentes traccionados (habitualmente cables) que son los que delimitan espacialmente dicho sistema.

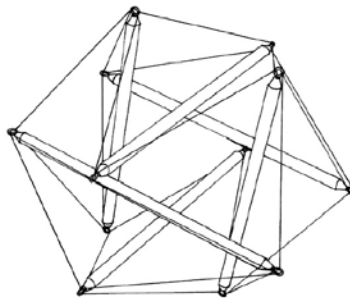
En la última década un grupo de investigadores, propusieron la inclusión del principio de la tensegridad definido anteriormente, para la descripción del comportamiento mecánico de la unidad física fundamental de los organismos vivos, la célula. La propuesta preliminar de dichas investigaciones comienzan con la analogía entre una estructura tensegridal y con el citoesqueleto (soporte de la estructura) de la célula, la estructura tensegridal básica es una geometría de dos

componentes los CT (componente de tensión) y CC (componente de compresión) como se muestra a continuación:



2 Una relación de las longitudes de componentes

El octaedro tensegridal (OT) es una estructura formada por elementos sólidos fijos entre sí en el espacio y sostenidos únicamente por medio de miembros en tensión, ver la siguiente figura:

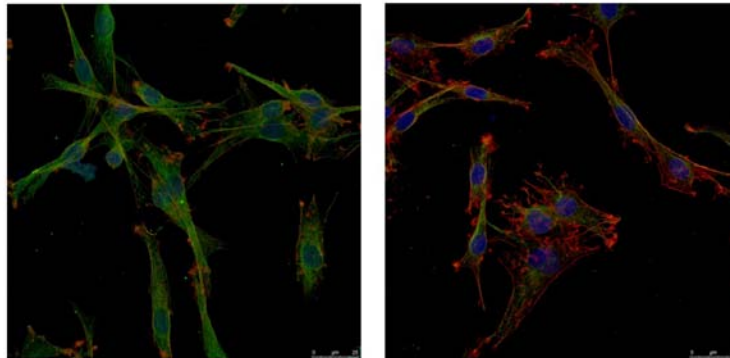


La red de componentes de tensión forman cuadriláteros y los componentes de compresión son insertados como diagonales en esos cuadros, así cada componente de compresión es paralelo al componente de compresión en el cuadro opuesto, por tanto ningún componente de compresión comparte vértice con algún otro componente de compresión. La tensegridad del OT es clasificada como tipo diamante, debido a que cada componente de compresión es rodeado por 4 componentes de tensión. La simetría octaedral del OT da una ventaja en el análisis de la estructura. Sin pérdida de generalidad, se considera el plano xz y y positivas. A es elegida horizontal en el cuadrante positivo del plano xy , sus coordenadas son x_A , x_B y 0. Para realizar un análisis matemático otros dos puntos son necesarios, B y C . Dichos puntos son usados para expresar las ecuaciones de longitud de un componente de compresión (el cual se estará maximizando) y la longitud de un componente de tensión (que representa una restricción). Se puede observar que B es obtenido de A rotando la figura alrededor del eje formado por el origen y el punto $(1, 1, 1)$ por 120° .

$$l_{CT} = \sqrt{\frac{3}{8}} l_{CC} \quad (2)$$

3 La descripción física

En los estudios de las ciencias fisiológicas han llegado a determinar que los movimientos celulares son la manifestación de un trabajo mecánico llevado a cabo por la estructura del citoesqueleto, uno de los mecanismos que desarrollan las células para generar su movimiento y por tanto el cambio de morfología celular, se lleva a cabo mediante el ensamblaje y desensamblaje de la estructura de los componentes del citoesqueleto compuesto por microtúbulos (CC) y los microfilamentos (CT). La relación de los microtúbulos y microfilamentos es un proceso a través del cual las células generan las fuerzas necesarias para migrar. Un ejemplo de imágenes en células de laboratorio es la siguiente:



Para poder desarrollar una descripción del movimiento celular se hace uso de la teoría de la matriz de rigidez concepto descrito en la teoría de estructuras, en principio para poder hacer uso de esta teoría, dentro de la descripción analítica se tiene la necesidad de una estructura tensegridal, con una característica como la desarrollada en la sección anterior, esto es, la relación entre las longitudes de las componentes.

4 Referencias

- [1] R. García, Sistemas complejos. Conceptos, método y fundamentación epistemológica de la investigación interdisciplinaria, 1a ed., Ed. Barcelona, Gedisa, 2006, pp. 200.
- [2] H. Lodish, A. Berk, S. L. Zipursky, P. Matsudaira, D. Baltimore y J. Darnell, Biología celular y molecular, 3a ed., Ed. Madrid, Médica Panamericana, 2005, pp. 1088.
- [3] D. E. Ingber, "Cellular tensegrity: defining new rules of biological design that govern the cytoskeleton", Journal of Cell Science, vol. 104, pp. 613-627, Mar. 1993.
- [4] D. E. Ingber, "Tensegrity: the architectural basis of cellular mechanotransduction", Annual Reviews of Physiology, vol. 59, pp. 575-599, Mar. 1997.
- [5] V. Gómez-Jáuregui, "Tensegridad, estructuras de compresión flotante, en Redes de señalización y estrategias terapéuticas, J. M. Ortiz-Melón y M. Cascales-Angosto, Ed. Madrid, Real Academia Nacional de la Farmacia, 2009.

5 Agradecimientos

J. J. Gamboa-Gálvez agradece el apoyo económico al CONACyT mediante el otorgamiento de beca, así como a la SIP-IPN mediante el otorgamiento de la Beca BEIFI. M. Marciano-Melchor agradece el soporte económico recibido del SNI-México, a la SIP-IPN, así como a los programas EDI y COFAA del IPN. H. Taud agradece el apoyo recibido por la SIP-IPN y del programa EDI, así como del SNI-México.

Sobre Algunos Aspectos del Comportamiento Asintótico de la Función de Crecimiento de Algunos Productos Gráficos de Grupos

Rafael M. Rincón

rfm.blb@gmail.com

Instituto de Matemáticas, UNAM

Resumen

Un grupo discreto dado en generadores y relaciones tiene una estructura natural de espacio métrico. Una vez que se fija un elemento del grupo, se pueden considerar las bolas con centro en dicho elemento, el número de elementos en cada bola, determina una función de crecimiento. En la teoría geométrica de grupos, se pueden encontrar varios productos, entre los que se encuentran el producto directo y el producto libre. Sin embargo, hay un producto, cuya teoría tiene varias interrelaciones con la teoría de gráficas, que es el producto gráfico de grupos, más aún esta construcción generaliza los dos productos mencionados inicialmente. En este trabajo se van a estudiar algunos aspectos del comportamiento asintótico de la función de crecimiento de ciertos productos gráficos de grupos y se van a presentar varias aplicaciones.

1 Introducción

Una herramienta que ha resultado ser bastante útil en la teoría geométrica de grupos, son los llamados productos gráficos, los cuales fueron introducidos y estudiados por primera vez por Elisabeth Green [Gr]. Estos productos se encuentran especificados por una gráfica finita simple, donde cada vértice se encuentra etiquetado con un grupo no trivial, el cual se asume que es finitamente presentado. Luego se considera el producto libre de todos los grupos, que aparecen asociados a los vértices de la gráfica. Tras esto, se agregan relaciones, de tal manera que si dos grupos son adyacentes, con respecto a la gráfica bajo consideración, entonces todos sus elementos conmutan entre sí. Esto lleva a que si la gráfica considerada no posee ninguna arista, se tiene que el producto gráfico de grupos es isomorfo al producto libre. Por otro lado, si la gráfica considerada es completa, entonces el producto gráfico implicado es isomorfo al producto directo de grupos. Debido a la construcción, de los productos definidos por E. Green [Gr], se puede intuir que los grupos obtenidos, absorben información combinatoria de la gráfica subyacente. Esto ha sido motivación para algunos estudios, entre los que se puede incluir [Gr] y [Dr], entre otros. Más aún este escrito

fue catalizado por dicha idea. Los productos gráficos de grupos se encuentran definidos mediante un número finito de generadores y relaciones, por lo que se pueden ver como espacio métricos, tal y como se hace en la sección (2). Esto implica que a los grupos formados por productos gráficos, se les puede asociar una serie de crecimiento. El estudio del comportamiento asintótico de dicha serie, conduce a algunos invariantes que se le pueden asociar a cualquier gráfica finita simple. El objetivo de este documento es explorar algunos de estos invariantes y sus aplicaciones a la teoría de gráficas. En las primeras secciones (2 y 3) se procede a definir las series de crecimiento asociadas a grupos finitamente presentados y se presentan algunos resultados generales. Una de las primeras contribuciones de este escrito aparece en la sección (3) y es la proposición (7), la cual va ayudar a establecer la desigualdad (13). En la cuarta parte de este texto, se presenta una metodología para obtener cotas de λ_S^G , en términos de los coeficientes de ciertos polinomios (ver proposiciones 12 y 14), dichos resultados conforman el núcleo de este trabajo. En la sección (5), se definen los productos gráficos de grupos y se presentan algunas propiedades básicas. En esta sección se puede encontrar la identidad (22), la cual es propia del polinomio de dependencia de una gráfica, pero se demuestra usando la teoría desarrollada en dicha sección. Finalmente, en la última parte de este manuscrito, se describen algunos ejemplos de como se puede aplicar la teoría de las series de crecimiento, para obtener resultados en la teoría de gráficas.

2 Definiciones Básicas

Definición 1. Sea G un grupo finitamente generado y sea S un conjunto finito de generadores, que es también simétrico, i.e. $S = S^{-1}$. Dado un elemento $g \in G$, su *longitud* $l(g)$, se define como $l(g) = \min\{n | g = g_1 g_2 \dots g_n, g_i \in S, 1 \leq i \leq n\}$. Utilizando la convención $l(e) = 0$. La *métrica de la palabra* asociada a S en G , se define como el mapeo $d_S^G : G \times G \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $d_S^G(g, h) = l_S(g^{-1}h)$ para todo $g, h \in G$.

Observación 1. Si G es un grupo finitamente generado, entonces en este trabajo cuando se hable de un conjunto generador S , se va a asumir que es finito y simétrico.

Observación 2. [CC, p. 153] La métrica d_S^G es invariante con respecto a multiplicación por la izquierda i.e. $d_S^G(gg_1, gg_2) = d_S^G(g_1, g_2)$, para todo g, g_1 y $g_2 \in G$.

Definición 2. La bola de radio n en G centrada en el elemento $g \in G$, se define como

$$B_S^G(g, n) := \{h \in G \mid d_S^G(g, h) \leq n\}.$$

Si se considera el caso en el que $g = e$, entonces $B_S^G(n) := B_S^G(e, n)$.

3 Funciones de Crecimiento

El objetivo de esta sección, es demostrar las proposiciones (7 y 8).

Definición 3. La *función de crecimiento* de G relativa a S es la función $\gamma_S^G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que satisface:

$$\gamma_S^G(n) = |B_S^G(n)|.$$

Se observa que $\gamma_S^G(0) = |B_S^G(0)| = 1$ y $\gamma_S^G(n) \leq \gamma_S^G(n+1)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1. [CC, p. 168] Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una secuencia de números positivos reales tales que $a_{n+m} \leq a_n a_m$ para cualesquiera $n, m \geq 1$. Entonces el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

existe y es igual a $\inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{a_n}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces si fijamos $t \geq 1$, se tiene que $n = qt + r$, donde $0 \leq r < t$; de esto se sigue:

$$\sqrt[n]{a_n} = (a_{qt+r})^{1/n} \leq (a_t)^{q/n} (a_r)^{1/n}. \quad (1)$$

Se puede observar, que la cadena de desigualdades

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r/n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t/n = 0,$$

lleva a que $\lim_{n \rightarrow \infty} q/n = 1/t$. Luego, de esto y (1) se tiene que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq (a_t)^{1/t}$. De esto se puede concluir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \inf_{t \geq 1} \sqrt[t]{a_t} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

□

Proposición 1. [CC, p. 169] Sea G un grupo finitamente generado y sea S un conjunto simétrico de generadores de G . Entonces, el límite

$$\lambda_S^G := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma_S^G(n)} \quad (2)$$

existe y $\lambda_S^G \in [1, \infty)$.

Demostración. Sea $u \in B_S^G(m+n)$, una palabra reducida, entonces se puede descomponer en dos palabras reducidas $v \in B_S^G(m)$ y $w \in B_S^G(n)$, tales que $u = vw$. Esto conduce a la desigualdad $|B_S^G(m+n)| \leq |B_S^G(m)| |B_S^G(n)|$, luego $\gamma_S^G(m+n) \leq \gamma_S^G(m) \gamma_S^G(n)$. Al aplicar el lema anterior, a la desigualdad que se acaba de deducir, se obtiene (2), el cual es mayor que 1, ya que $\gamma_S^G(n) \geq 1$, para toda $n \in \mathbb{N}$. □

Proposición 2. [CC, p. 171] Sea G un grupo finitamente generado y sea H un subgrupo de G finitamente generado, el cual satisface la igualdad $H = \langle \hat{S} \rangle$, donde $\hat{S}$ es un conjunto finito simétrico. Entonces $\lambda_{\hat{S}}^H \leq \lambda_S^G$, si S es un conjunto finito y simétrico de generadores de G , tal que $\hat{S} \subset S$.

Demostración. Sea $u \in B_{\hat{S}}^H(m)$, una palabra reducida, entonces $u \in B_S^G(m)$, por lo que $\gamma_{\hat{S}}^H(m) \leq \gamma_S^G(m)$, luego $\lambda_{\hat{S}}^H \leq \lambda_S^G$. □

Definición 4. La serie de crecimiento de G relativa a S es:

$$B(G, S, z) := \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_S^G(i) z^i.$$

Sea $\kappa_S^G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $\kappa_S^G(i) := \gamma_S^G(i) - \gamma_S^G(i-1)$. Entonces, la serie esférica de crecimiento asociada a G , con conjunto de generadores S , está dada por:

$$E(G, S, z) := \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_S^G(i) z^i.$$

Observación 3. [Ha, p. 151] Se observa fácilmente que $E(G, S, z) = (1-z)B(G, S, z)$.

Proposición 3. [Ha, p. 182] El radio de convergencia de $E(G, S, z)$ está dado por $1/\lambda_S^G$, si $\lambda_S^G > 1$.

Demostración. Esto es una simple implicación del teorema de Cauchy Hadamard, aplicado a la serie $B(G, S, z)$ y aplicando la definición de $E(G, S, z)$. □

Lema 2 (Pringsheim). [FS, p. 240] Si $f(z)$ es representable en el origen por una serie de potencias, tal que cada uno de sus coeficientes es no negativo, y tiene radio de convergencia R , entonces el punto $z = R$ es una singularidad de $f(z)$.

Proposición 4. Sea G un grupo generado por S , tal que $\lambda_S^G > 1$. Si la serie esférica de crecimiento de G , relativa a S , es tal que su conjunto de polos de módulo mínimo tiene un único elemento, el cual es un polo simple, y dicha serie esta dada por el cociente de polinomios $p(x)/q(x)$, donde $p(x)$ es primo relativo a $q(x)$ y $q(0) \neq 0$. Entonces $q(x) = (x - 1/\lambda_S^G)r(x)$, donde $(x - 1/\lambda_S^G) \nmid r(x)$.

Demostración. Por definición de $E(G, S, z)$, todos sus coeficientes son positivos y por hipótesis, se puede afirmar que $E(G, S, z) = p(x)/q(x)$. Ahora, haciendo uso del resultado obtenido por Pringsheim (2) y la proposición (3), se tiene que $1/\lambda_S^G$ es una raíz de $q(x)$. La definición del radio de convergencia implica que cualquier otra raíz z de $q(x)$ satisface $1/\lambda_S^G \leq |z|$. Luego por hipótesis $1/\lambda_S^G$ es un polo simple y el único con módulo mínimo, por lo que el resultado se sigue. $\square$

Definición 5. Si $q(x)$ es un polinomio de grado n , tal que $q(0) = 1$, entonces al polinomio $x^n q(1/x)$ se le va a llamar el *polinomio recíproco* de $q(x)$ y se va a denotar por $\hat{q}(x)$.

Observación 4. Una implicación de esto es que las raíces de $x^n q(1/x)$ están dadas por $\{1/\alpha_i\}_{i=1}^n$, donde $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de raíces de $q(x)$. Más aún, si $q(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + 1$, entonces $\hat{q}(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$.

Definición 6. La *matriz compañera* del polinomio mónico $\hat{q}(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, es la siguiente matriz cuadrada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix},$$

y se va a denotar por $\Theta(\hat{q})$.

Proposición 5. [BR, p. 347] Para todo polinomio mónico $\hat{q}(x)$ de grado n , se tiene que el polinomio característico de $\Theta(\hat{q})$, es igual a $\hat{q}(x)$.

Definición 7. La *función simétrica de suma de potencias* $S_k(x_1, \dots, x_n)$, se define a través de la igualdad: $S_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^k$.

Observación 5. Sea $\hat{q}(x)$, como en la observación (4). Se tiene que la proposición (5) implica: $S_k(1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n) = \text{Tr}(\Theta(\hat{q})^k)$, donde Tr denota la traza matricial.

Definición 8. El *radio espectral* $|\lambda|_{\max}$ de una $n \times n$ matriz A , es igual a $\max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, donde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, es el conjunto de todos los autovalores de A .

Proposición 6. [Mi, p. A-2] El radio espectral de una $n \times n$ matriz A , ya sea real o compleja, esta dado por

$$|\lambda|_{\max} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \text{Tr} \left(A^k \right) \right|^{\frac{1}{k}}.$$

Los siguientes dos resultados, van a jugar un papel importante en la derivación de cotas para λ_S^G , que son fácilmente calculables.

Proposición 7. Sea G un grupo generado por S . Si la serie esférica de crecimiento de G relativa a S , es tal que su conjunto de polos de módulo mínimo tiene un único elemento, el cual es un polo simple y dicha serie está dada por el cociente de polinomios $p(x)/q(x)$, donde $p(x)$ es primo relativo a $q(x)$ y $q(0) = 1$. Siguiendo la notación dada en la observación (4), se tiene lo siguiente:

$$\sqrt[k]{\frac{|S_k(1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)|}{n}} \leq \lambda_S^G, \quad (3)$$

de hecho,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{|S_k(1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)|}{n}} = \lambda_S^G. \quad (4)$$

Demostración. De la observación (4) y la proposición (4), se sigue que $|1/\alpha_i| \leq \lambda_S^G$, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Al aplicar la desigualdad del triángulo al lado derecho de la desigualdad (3), se obtiene

$$\sqrt[k]{\frac{|S_k(1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)|}{n}} \leq \sqrt[k]{\frac{S_k(|1/\alpha_1|, \dots, |1/\alpha_n|)}{n}} \leq \sqrt[k]{\frac{S_k(\lambda_S^G, \dots, \lambda_S^G)}{n}} = \lambda_S^G,$$

por lo que la desigualdad (3), queda demostrada.

Por otro lado, como $\lim_{k \rightarrow \infty} n^{-1/k} = 1$, entonces

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{|S_k(1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)|}{n}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|S_k(1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)|}. \quad (5)$$

Ahora, al aplicar la observación (5) y la proposición (6) a la igualdad (5), se llega finalmente a (4).

□

Proposición 8. Sea G un grupo generado por S , con serie esférica de crecimiento $E(G, S, z)$, dada por $\sum_{i=0}^{\infty} \kappa_S^G(i)z^i$, y $\lambda_S^G > 1$, entonces

$$\lambda_S^G = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\kappa_S^G(n)}, \quad (6)$$

mas aún, se tiene

$$\lambda_S^G \leq \sqrt[n]{\kappa_S^G(n)}, \quad (7)$$

para toda $n \geq 1$.

Demostración. Claramente $\kappa_S^G(i+j) \leq \kappa_S^G(i)\kappa_S^G(j)$, ya que toda palabra reducida de longitud $i+j$, se puede separar en dos palabras reducidas de longitud i y j respectivamente, para cualesquiera dos números naturales i y j . Al aplicar el lema (1) a κ_S^G , se obtiene que el límite (6) existe. La proposición (3) y el teorema de Cauchy Hadamard implican la identidad (6). Finalmente, al considerar la demostración del lema (1), dentro del contexto de esta demostración, se llega a la desigualdad $\lambda_S^G \leq \sqrt[n]{\kappa_S^G(n)}$, para toda $n \geq 1$. □

4 Polinomios de Bell y λ_S^G

En la sección anterior, se obtuvieron una cota superior (7) y una inferior (3), para λ_S^G . En esta sección se va a establecer una metodología para obtener, las respectivas cotas de los coeficientes de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ (ver proposiciones 12 y 14).

Definición 9. Un polinomio $p(x_1, \dots, x_n)$ en n variables, se le conoce como una *función simétrica*, si para cualquier permutación $(j_1, \dots, j_n)$ de los índices $\{1, 2, \dots, n\}$, se tiene que $p(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) = p(x_1, \dots, x_n)$. La *función elemental simétrica*, $a_k = a_k(x_1, \dots, x_n)$, se define como la suma

$$a_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

y si $k = 0$, entonces $a_0 := 1$.

Definición 10. El polinomio

$$h_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{r_1 + \dots + r_n = k} x_1^{r_1} \cdot \dots \cdot x_n^{r_n},$$

se le va a llamar la *función simétrica de la suma de productos homogéneos* y si $k = 0$, entonces $h_0 := 1$.

Definición 11. El *polinomio exponencial de Bell* $B_n(x_1, \dots, x_n)$ se define como sigue:

$$B_n(x_1, \dots, x_n) := \sum \frac{n!}{k_1! (1!)^{k_1} k_2! (2!)^{k_2} \cdot \dots \cdot k_n! (n!)^{k_n}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n},$$

donde la suma se extiende sobre todas las particiones de n , es decir, sobre todas las soluciones enteras, no negativas, $(k_1, \dots, k_n)$ de la ecuación $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$.

Definición 12. El *polinomio parcial exponencial de Bell* $B_{n,k}(x_1, \dots, x_n)$ se define a continuación:

$$B_{n,k}(x_1, \dots, x_n) := \sum \frac{n!}{k_1! (1!)^{k_1} k_2! (2!)^{k_2} \cdot \dots \cdot k_n! (n!)^{k_n}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n},$$

donde la suma se extiende sobre todas las particiones de n , en k partes, es decir, sobre todas las soluciones enteras, no negativas, $(k_1, \dots, k_n)$ de las ecuaciones $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ y $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. En caso de que $n = 0$ y $k = 0$, $B_{0,0} := 1$.

Definición 13. El *polinomio logarítmico de Bell* $L_n(x_1, \dots, x_n)$ se define de la siguiente manera:

$$L_n(x_1, \dots, x_n) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1)! B_{n,k}(x_1, \dots, x_n).$$

Definición 14. Sea $s \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces a la suma:

$$\sum_{k=0}^n (s)_k B_{n,k}(x_1, \dots, x_n),$$

donde $(s)_k := s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-k+1)$, se le va a denotar por $C_{n,s}(x_1, \dots, x_n)$.

Proposición 9. [Ch, p. 424] Si $L_0(x_1, \dots, x_n) = 0$, entonces la función generadora de los polinomios $L_n(x_1, \dots, x_n)$ es igual a $\log(1 + (g(t) - x_0))$, donde $g(t) = \sum_{l=0}^{\infty} x_l t^l / l!$, es decir, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n(x_1, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!} = \log(1 + (g(t) - x_0)).$$

Proposición 10. [Ch, p. 428] La función generadora de los polinomios $C_{n,s}(x_1, \dots, x_n)$, con $n \in \mathbb{N}$ es igual a $(1 + (g(t) - x_0))^s$, donde $g(t) = \sum_{l=0}^{\infty} x_l t^l / l!$, por lo que se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,s}(x_1, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!} = (1 + (g(t) - x_0))^s.$$

Observación 6. [Ch, p. 427] Si se desarrolla el producto $\prod_{i=1}^n (1 + x_i t)$, se obtiene:

$$\sum_{k=0}^n a_k(x_1, \dots, x_n) t^k = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t).$$

Proposición 11. [Ch, p. 427] Sea $p(x)$ un polinomio (de grado n) tal que $p(0) = 1$, entonces $p(x) = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1} x)$, donde $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de raíces de $p(x)$. Más aún, se tiene la siguiente identidad:

$$S_k(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) = (-1)^{k-1} L_k(a_1, 2!a_2, \dots, k!a_k) / (k-1)!. \quad (8)$$

Demostración. Usando la identidad (6) se obtiene

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) t^k = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1} t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) t^k, \end{aligned} \quad (9)$$

donde $a_k(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $k > n$. Se puede observar la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \log \left(\prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1} t) \right) &= \sum_{i=1}^n \log (1 - \alpha_i^{-1} t) \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_i^{-l} \frac{t^l}{l} \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l} S_l(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) t^l. \end{aligned} \quad (10)$$

Por otro lado, las igualdades (9) implican que $p(t) = 1 + g(-t)$, donde

$$g(t) := \sum_{k=1}^{\infty} k! a_k(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) \frac{1}{k!} t^k, \quad (11)$$

entonces, la proposición (9) conduce a las siguientes identidades:

$$\log(1 + g(-t)) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l L_l(a_1, 2!a_2, \dots, l!a_l) \frac{t^l}{l!}. \quad (12)$$

Por lo que al considerar las igualdades (10) y (12) se llega finalmente a la identidad (8). $\square$

Proposición 12. Sea G un grupo generado por S . Si la serie esférica de crecimiento de G , relativa a S , es tal que su conjunto de polos de módulo mínimo tiene un único elemento, el cual es un polo simple y dicha serie está dada por el cociente de polinomios $p(x)/q(x)$, donde $p(x)$ es primo relativo a $q(x)$ y $q(0) = 1$. Si $q(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k$, entonces:

$$\sqrt[k]{\frac{|L_k(a_1, 2!a_2, \dots, k!a_k)|}{n(k-1)!}} \leq \lambda_S^G. \quad (13)$$

Demostración. Esto se sigue de la proposición (7) y la proposición (11). $\square$

Proposición 13. [Ch, p. 432] Sea $p(t)$ un polinomio (de grado n) tal que $p(0) = 1$, siguiendo la notación anterior, se tiene que $p(t)^{-1} = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1}t)^{-1}$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) t^k = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1}t)^{-1}, \quad (14)$$

más aún, se puede afirmar que

$$h_k(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) = (-1)^k C_{k,-1}(a_1, 2!a_2, \dots, k!a_k)/k!. \quad (15)$$

Demostración. Se puede ver de manera inmediata, el siguiente conjunto de igualdades,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \alpha_i^{-1}t)} &= \prod_{i=1}^n \sum_{l_i=0}^{\infty} \alpha_i^{-l_i} t^{l_i} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{m_1+\dots+m_n=l} \alpha_1^{-m_1} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{-m_n} \right] t^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h_l(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) t^l. \end{aligned} \quad (16)$$

La ecuación (11) implica que $p(t) = 1 + g(-t)$, por lo que sustituyendo esta última igualdad en la identidad dada en la proposición (10), se obtiene:

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \alpha_i^{-1}t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{n,-1}(a_1, 2!a_2, \dots, n!a_n) \frac{t^n}{n!}.$$

Al considerar las igualdades (16) y el último resultado, se llega a que la relación dada en (15), se satisface. $\square$

Corolario 1. Sea $f(x)$ una función racional dada por $q(x)/p(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son primos relativos, $p(x)$ satisface las hipótesis de la proposición anterior, y $q(x) := b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{r_1+r_2=k} b_{r_1} h_{r_2}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}) \right] t^k = f(t). \quad (17)$$

Observación 7. Los coeficientes de la serie (17) asociada a $f(t)$, tiene todos sus coeficientes positivos, en caso de que esta sea una serie de crecimiento.

Proposición 14. Sea G un grupo generado por S . Si la serie esférica de crecimiento de G relativa a S , es tal que su conjunto de polos de módulo mínimo tiene un único elemento, el cual es un polo simple y dicha serie está dada por el cociente de polinomios $p(x)/q(x)$, donde $p(x)$ es primo relativo a $q(x)$ y $q(0) = 1$. Bajo la asunción de que $p(x) := b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ y $q(x) := \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1}t)$, se tiene:

$$\lambda_S^G \leq \sqrt[k]{\sum_{r_1+r_2=k} b_{r_1} (-1)^{r_2} C_{r_2,-1}(a_1, 2!a_2, \dots, k!a_{r_2}) / r_2!}. \quad (18)$$

Demostración. La desigualdad (18) es una simple implicación del corolario (1), la proposición (13) y la desigualdad (7). $\square$

5 Productos Gráficos de Grupos y sus Series de Crecimiento

En esta sección se van a establecer las ideas necesarias para crear un puente entre la teoría de gráficas y la teoría combinatoria de grupos.

Definición 15. Una *gráfica simple finita* Γ es un par $(V(\Gamma), E(\Gamma))$, tal que $V(\Gamma)$ es un conjunto finito, cuyos elementos son los *vértices* y $E(\Gamma)$ es un conjunto finito de parejas no ordenadas de elementos distintos de $V(\Gamma)$, dichas parejas son las *aristas*. Si $A \subseteq V(\Gamma)$, entonces, la subgráfica en Γ inducida por A , la cual se denota por Γ_A , se define como $(V(\Gamma_A), E(\Gamma_A))$, donde $V(\Gamma_A) = A$ y $E(\Gamma_A) := \{(e_1, e_2) \in E(\Gamma) \mid e_1 \in A \text{ y } e_2 \in A\}$. Al conjunto $\{e_i \in V(\Gamma) \mid (e_1, e_i) \in E(\Gamma)\}$ se le va a denotar por $N_\Gamma(e_1)$, y se le va llamar la *vecindad del vértice* e_1 en la gráfica Γ , la *vecindad cerrada* $\overline{N_\Gamma(e_1)}$ del vértice e_1 en la gráfica Γ es el conjunto $N(e_1) \cup \{e_1\}$. Una *gráfica completa* (clique) con n vértices, se define como $(\{v_1, \dots, v_n\}, \{(v_i, v_j) \mid i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ y } i < j\})$.

Definición 16. El *producto libre* de dos grupos finitamente generados $A_1 := \langle S_{A_1} \mid R_{A_1} \rangle$ y $A_2 := \langle S_{A_2} \mid R_{A_2} \rangle$, es el grupo $A_1 \star A_2 := \langle S_{A_1} \sqcup S_{A_2} \mid R_{A_1} \sqcup R_{A_2} \rangle$, donde $\sqcup$ denota la unión disjunta. Sea F un grupo finitamente generado y sean $\varphi_1 : F \rightarrow A_1$, y $\varphi_2 : F \rightarrow A_2$, dos homomorfismos de grupos. Si se considera la cerradura normal del subgrupo de $A_1 \star A_2$ generado por $\{\varphi_1(f)\varphi_2(f)^{-1} \mid f \in F\}$, i.e. $\langle \varphi_1(f)\varphi_2(f)^{-1} \mid f \in F \rangle$, entonces el *producto libre con amalgamación* es el grupo cociente $A_1 \star_F A_2 := A_1 \star A_2 / \langle \varphi_1(f)\varphi_2(f)^{-1} \mid f \in F \rangle$.

Definición 17. Sea Γ un gráfica, tal que $V(\Gamma) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y sea $\{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}$, un conjunto de grupos finitamente generados, entonces el *producto gráfico* de $\{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}$ con respecto a Γ , el cual se va a denotar por $\Gamma \{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}$, es el grupo cociente

$$\star_{v \in V(\Gamma)} A_v / \langle [g_{v_i}, g_{v_j}] \mid \text{para todos } g_{v_i} \in A_{v_i} \text{ y } g_{v_j} \in A_{v_j} \text{ tales que } (v_i, v_j) \in E(\Gamma) \rangle.$$

Definición 18. Sean (G, S) parejas, donde G es un grupo generado por un conjunto finito y simétrico S . Una pareja (H, T) , se dice que es *admisble* en (G, S) , si H es un subgrupo de G , $T \subseteq S$ y existe un transversal U para H en G , que se va a llamar *transversal admisble*, si $g = hu$, con $g \in G$, $h \in H$ y $u \in U$, entonces $l(g) = l(h) + l(u)$. Siempre se va a asumir que los transversales admisbles siempre contienen a la identidad, como representante de H .

Observación 8. [Ma, p. 142] Si (H, T) es admisble en (G, S) , con transversal T_1 y (K, R) es admisble en (H, T) , con transversal T_2 , entonces (K, R) es admisble en (G, S) , con transversal $T_1 T_2$.

Proposición 15. [Ma, p. 142] Sea (L, R) una pareja admisble, en ambos (H, S) y (K, T) . Sea $G := H \star_L K$, y sean $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ y $D(x)$, las series de crecimiento esféricas de G con respecto a $S \sqcup T$, de H con respecto a S , de K con respecto a T y de L con respecto a R , respectivamente. Entonces se tiene, lo siguiente:

$$\frac{1}{A(x)} = \frac{1}{B(x)} + \frac{1}{C(x)} - \frac{1}{D(x)}. \quad (19)$$

Observación 9. [Ma, p. 143] Bajo el contexto de la proposición anterior, sean U y V transversales para L en H y K , respectivamente. Entonces se puede observar que (H, S) es admisble en $(G, S \sqcup T)$, con transversal dado por los productos alternantes $w = v_1 u_2 v_2 \dots u_k v_k$ con $v_1 \neq 1$ y w diferente de la identidad.

Proposición 16. ([Ma, p. 145], [Chi, p. 268]) Sea Γ , una gráfica, y $\{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}$, un conjunto de grupos finitamente generados, donde cada grupo es generado por conjunto finito y simétrico S_v , para cada $v \in V(\Gamma)$. Si $W \subseteq V(\Gamma)$, y $\Lambda := \Gamma_W$, entonces $(\Lambda \{A_v\}_{v \in W}, \sqcup_{v \in W} S_v)$ es admisble en $(\Gamma \{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}, \sqcup_{v \in V(\Gamma)} S_v)$.

Demostración. Primero se observa que $\Lambda \{A_v\}_{v \in W} \cong \langle \sqcup_{v \in W} S_v \rangle \leq \Gamma \{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}$. Denotaremos de ahora en adelante al producto gráfico $\Gamma_W \{A_v\}_{v \in W}$ por $\Gamma_W \{A_v\}$. La proposición es claramente cierta en caso de que $\Lambda = \Gamma$. Asumamos, durante el resto de esta demostración que $\Lambda \neq \Gamma$ y procedemos por inducción sobre el número de vértices de Γ , i.e. asumamos que el resultado es cierto para gráficas con menos de n vértices. Si Γ tiene n vértices y Λ es una subgráfica inducida propia, entonces existe una subgráfica inducida con $n - 1$ vértices, la cual denotaremos por Ξ , que satisface: $\Lambda \subseteq \Xi \subset \Gamma$. Ahora reenumeramos los elementos de $V(\Gamma)$, de tal manera que el vértice faltante de $V(\Xi)$ es v_1 . Por otro lado, se tiene $A_{v_1} \times \Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\} \cong \Gamma_{\overline{N_\Gamma(v_1)}} \{A_v\}$, por lo que por hipótesis de inducción, $(\Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}, \sqcup_{v \in V(N_\Gamma(v_1))} S_v)$ es admisible en $(\Gamma_{\overline{N_\Gamma(v_1)}} \{A_v\}, \sqcup_{v \in V(\overline{N_\Gamma(v_1)})} S_v)$ y $(\Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}, \sqcup_{v \in V(N_\Gamma(v_1))} S_v)$ es admisible en $(\Xi \{A_v\}, \sqcup_{v \in V(\Xi)} S_v)$, luego se tiene que $\Gamma \{A_v\}_{v \in V(\Gamma)} = (A_{v_1} \times \Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}) \star_{\Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}} \Xi \{A_v\}$ (ver [Gr]). Por la observación (9), se puede afirmar que $(\Xi \{A_v\}, \sqcup_{v \in V(\Xi)} S_v)$, es admisible en $(\Gamma \{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}, \sqcup_{v \in V(\Gamma)} S_v)$. Por lo tanto $(\Lambda \{A_v\}_{v \in W}, \sqcup_{v \in W} S_v)$ es admisible en $(\Gamma \{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}, \sqcup_{v \in V(\Gamma)} S_v)$. $\square$

Proposición 17. ([Ma, p. 145], [Chi, p. 269]) *En el contexto de la proposición anterior, sea $A(x)$ la serie esférica de crecimiento de $\Gamma \{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}$ con respecto a $\sqcup_{v \in V(\Gamma)} S_v$ y para cada $v \in V(\Gamma)$, sea $B_v(x)$ la serie esférica de crecimiento asociada a A_v con respecto a S_v . Para cada subgráfica inducida Λ de Γ , se define la función:*

$$P_\Lambda(x) := \prod_{v \in V(\Lambda)} \left(\frac{1}{B_v(x)} - 1 \right),$$

entonces se tiene:

$$\frac{1}{A(x)} = \sum P_\Delta(x),$$

donde la suma es sobre todas las subgráficas completas de Γ , incluyendo la vacía, en dicho caso $P_\emptyset(x) := 1$.

Demostración. Se va a proceder por inducción sobre el número de vértices de Γ . En la demostración de la proposición (16) se consideró la descomposición:

$$\Gamma \{A_v\}_{v \in V(\Gamma)} = (A_{v_1} \times \Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}) \star_{\Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}} \Xi \{A_v\}, \quad (20)$$

donde las condiciones de admisibilidad, se satisfacen por la proposición anterior, luego por la igualdad (19), se obtiene:

$$\frac{1}{A(x)} = \frac{1}{C(x)} + \frac{1}{D(x)} - \frac{1}{E(x)},$$

donde $C(x)$, $D(x)$ y $E(x)$, son las series de crecimiento de $A_{v_1} \times \Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}$, $\Xi \{A_v\}$ y $\Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}$, respectivamente. Se observa que $C(x) = B_{v_1}(x)E(x)$. Con esto se llega a que:

$$\frac{1}{A(x)} = \left(\frac{1}{B_{v_1}(x)} - 1 \right) \frac{1}{E(x)} + \frac{1}{D(x)},$$

ahora, por hipótesis de inducción, se tiene:

$$\frac{1}{A(x)} = \sum \left(\frac{1}{B_{v_1}(x)} - 1 \right) P_\Delta(x) + \sum P_{\hat{\Delta}}(x), \quad (21)$$

la primera suma es sobre todas las subgráficas completas de $\Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}$ y la segunda suma corre sobre todos los cliques que no incluyen el vértice v_1 . Al expandir las funciones $P_\Delta(x)$, se puede concluir que la primera suma de (21) es sobre todos los cliques que incluyen al vértice v_1 . $\square$

Definición 19. Sea G un grupo finitamente generado por el conjunto simétrico S , y sea Γ una gráfica simple finita. El producto gráfico $\Gamma \{A_v\}_{v \in V(\Gamma)}$, donde $A_v = G$, para todo $v \in V(\Gamma)$, se le va a llamar *producto gráfico homogéneo* de G con respecto a Γ .

Definición 20. El *polinomio de dependencia* de una gráfica Γ se define como $\sum x^{|\Delta|}$, donde la suma corre sobre todas las subgráficas completas (cliques) Δ de Γ , y se va a denotar por $\wp_\Gamma(x)$.

Observación 10. Asumiendo el contexto de la proposición (17), se tiene que si el producto gráfico, bajo consideración es homogéneo, entonces

$$\frac{1}{A(x)} = \wp_\Gamma \left(\frac{1}{B(x)} - 1 \right),$$

donde $A(x)$ es la serie de crecimiento (esférica) asociada a $\Gamma \{G\}$, y $B(x)$ es la serie de crecimiento (esférica) de G .

Un resultado similar al dado en la siguiente proposición fue obtenido en [HM], usando técnicas combinatorias, sin embargo en este trabajo se demuestra usando la teoría de productos gráficos de grupos.

Proposición 18. Sea Γ una gráfica finita y sea G un grupo finitamente generado por un conjunto simétrico S , entonces si $v_1 \in V(\Gamma)$, se tiene la siguiente relación:

$$\wp_\Gamma \left(\frac{1}{B(x)} - 1 \right) = \left(\frac{1}{B(x)} - 1 \right) \wp_{N_\Gamma(v_1)} \left(\frac{1}{B(x)} - 1 \right) + \wp_{\Gamma - \{v_1\}} \left(\frac{1}{B(x)} - 1 \right). \quad (22)$$

Demostración. Consideremos de nuevo la descomposición (20) en el contexto de productos gráficos homogéneos, es decir, se tiene:

$$\Gamma \{G\} = (A_{v_1} \times \Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{G\}) \star_{\Gamma_{N_\Gamma(v_1)} \{A_v\}} (\Gamma - \{v_1\}) \{G\},$$

las condiciones de admisibilidad, se siguen tras aplicar la proposición (16). Luego la proposición (15), junto con la observación (10) implican la identidad (22). $\square$

6 Algunas Aplicaciones a la Teoría de Gráficas

Los resultados que aparecen en esta sección (a excepción del corolario (2)) fueron obtenidos en [HM], usando técnicas propias de la teoría de gráficas, aquí se dan demostraciones alternativas, usando la teoría de las funciones de crecimiento.

Definición 21. Una gráfica se dice que es *libre de triángulos* si no tiene ninguna subgráfica inducida, que sea isomorfa a la gráfica completa con tres vértices.

Proposición 19 (Mantel). Sea Γ una gráfica simple, libre de triángulos. Entonces $|E(\Gamma)| \leq |V(\Gamma)|^2 / 4$.

Demostración. Sea $G := \mathbb{Z}$ un grupo finitamente generado por $\{-1, 1\}$, entonces la serie esférica de crecimiento asociada a $\Gamma \{G\}$, i.e. $A(x)$, por la observación (10), está dada por

$$A(x) = \wp_\Gamma \left(\frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1} \right)^{-1} = \wp_\Gamma \left(\frac{-2x}{1+x} \right)^{-1} \quad (23)$$

donde $(1+x)/(1-x)$ es la serie de crecimiento (esférica) asociada a G , con respecto a S . Los coeficientes de $A(x)$, son positivos, por lo tanto, por el teorema de Pringsheim (2), el radio de convergencia de la serie $A(x)$, el cual se va a denotar por R , es una singularidad de $\wp_\Gamma(-2x/(1+x))^{-1}$, por lo tanto $\wp_\Gamma$ tiene una raíz real, pero $\wp_\Gamma(z) = 1 + |V(\Gamma)|z + |E(\Gamma)|z^2$, ya que Γ es libre de triángulos, luego ambas raíces son reales, de lo que se sigue que $|V(\Gamma)|^2 - 4|E(\Gamma)| \geq 0$. $\square$

Proposición 20. Sea Λ una subgráfica inducida de Γ , entonces $\lambda^{\Lambda\{\mathbb{Z}\}} \leq \lambda^{\Gamma\{\mathbb{Z}\}}$, donde el grupo $\mathbb{Z}$, se asume generado por $\{-1, 1\}$.

Demostración. La proposición (16), implica que $\Lambda\{\mathbb{Z}\}$ es admisible en $\Gamma\{\mathbb{Z}\}$, de aquí que la proposición (2) implique el resultado. $\square$

Definición 22. Un conjunto independiente de Γ es un subconjunto U de $V(\Gamma)$, tal que para cualesquiera dos elementos u_1 y u_2 de U , se tiene que $(u_1, u_2) \notin E(\Gamma)$. Al conjunto de todos los conjuntos independientes de Γ , se le va a denotar por $\mathcal{I}(\Gamma)$. El número de independencia de Γ , se va a definir como $\iota(\Gamma) := \max\{|U| \mid U \in \mathcal{I}(\Gamma)\}$.

Proposición 21. Sea Γ una gráfica simple, tal que $\iota(\Gamma) \geq 1$, entonces $\iota(\Gamma) \leq (\lambda^{\Gamma\{\mathbb{Z}\}} + 1)/2$.

Demostración. Sea U un conjunto independiente de Γ de cardinalidad máxima, i.e. $|U| = \iota(\Gamma)$. Por definición $|E(\Gamma_U)| = 0$, entonces la serie de crecimiento esférica asociada a $\Gamma_U\{\mathbb{Z}\}$ es:

$$A(x) = \left(1 + \iota(\Gamma) \left(\frac{-2x}{1+x}\right)\right)^{-1},$$

esto se sigue de (23). Por lo que se tiene:

$$\lambda^{\Gamma_U\{\mathbb{Z}\}} = -1 + 2\iota(\Gamma).$$

Por otro lado, por la proposición (20), se tiene que $-1 + 2\iota(\Gamma) \leq \lambda^{\Gamma\{\mathbb{Z}\}}$. $\square$

Corolario 2. Sea Γ una gráfica simple, tal que $\iota(\Gamma) \geq 2$, entonces

$$\iota(\Gamma) \leq 2^{-1} \left(\sqrt{-2|V(\Gamma)| + 4|V(\Gamma)|^2 - 4|E(\Gamma)|} + 1 \right).$$

Si $A_1^\Gamma := 2|V(\Gamma)| - 8|V(\Gamma)|^2 + 8|V(\Gamma)|^3$, y $B_1^\Gamma := 8|E(\Gamma)| - 16|V(\Gamma)||E(\Gamma)| + 8|T(\Gamma)|$, donde $T(\Gamma)$, denota el conjunto de subgráficas completas de Γ con tres vértices, entonces

$$\iota(\Gamma) \leq 2^{-1} \left(\sqrt[3]{A_1^\Gamma + B_1^\Gamma} + 1 \right).$$

Demostración. Esto se sigue de la proposición anterior y la desigualdad (18), las hipótesis de la proposición (14), se satisfacen, por propiedades del polinomio de dependencia ([GS]) y porque Γ es una gráfica no completa, ya que esta última afirmación implica que $\Gamma\{\mathbb{Z}\}$ tiene un subgrupo isomorfo a un grupo libre con dos generadores, implicándose así la desigualdad $\lambda^{\Gamma\{\mathbb{Z}\}} > 1$ (ver [CC, p. 167 y 169]). $\square$

7 Conclusiones

En este escrito se presentaron algunas herramientas, para poder obtener información de una gráfica mediante el uso de la teoría combinatoria de grupos. En particular, se observó que varias propiedades del polinomio de dependencia de una gráfica, pueden ser derivadas de la teoría desarrollada para el estudio de ciertos grupos. Esto se debe a la relación que existe entre dicho polinomio y la función de crecimiento asociada a los productos gráficos homogéneos de grupos (chechar la observación (10)). Carl Droms demostró (ver [Dr]) que dos gráficas son isomorfas si y sólo si, los correspondientes productos gráficos de grupos cíclicos infinitos lo son. Esto implica que la conexión entre ambas teorías puede llegar a ser muy fructífera.

Referencias

- [BR] S. Banerjee, A. Roy, *Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics*, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, 2014, 578 pp.
- [CC] T. Ceccherini, M. Coornaert, *Cellular Automata and Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010, 460 pp.
- [Ch] A. Charalambos, *Enumerative Combinatorics*, Chapman and Hall/CRC, 2002, 616 pp.
- [Chi] I. M. Chiswell, *The Growth Series of a Graph Product*, Bulletin of the London Mathematical Society 26 (1994), Issue 3, 268-272.
- [Dr] C. Droms, *Isomorphism of Graph Groups*, Proceedings of the American Mathematical Society 100 (1987), Number 3, 407-408.
- [FS] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009, 828 pp.
- [GS] M. Goldwurm, M. Santini, *Clique Polynomials Have a Unique Root of Smallest Modulus*, Information Processing Letters 75 (2000), Issue 3, 127-132.
- [Gr] E. R. Green, *Graph Products of Groups*, Ph.D. Thesis, The University of Leeds, 125 pp., March 1990.
- [HM] H. Hajiabolhassan, M. L. Mehrabadi, *On Clique Polynomials*, The Australasian Journal of Combinatorics 18 (1998), 313-316.
- [Ha] P. Harpe, *Topics in Geometric Group Theory*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 2000, 332 pp.
- [Le] J. Lewin, *The Growth Function of Some Free Products of Groups*, Communications in Algebra 19 (1991), Issue 9, 2405-2418.
- [Ma] A. Mann, *How Groups Grow*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, 395, Cambridge University Press, 2012, 210 pp.
- [Mi] J. Milnor, *Introductory Dynamics Lectures (Appendix)*, <http://www.math.stony-brook.edu/~jack/DYNOTES/>.

Historia, Filosofía y Divulgación de las Matemáticas

La (in)consistencia de los infinitesimales bernoullianos

Luis Estrada González
loisayaxsegrob@gmail.com

María del Rosario Martínez Ordaz
martinezordazm@gmail.com

Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM

Resumen

En este trabajo nos ocupamos de la afirmación de Peter Vickers de que los infinitesimales de Bernoulli y, con ello, toda su versión del cálculo, son inconsistentes. Siguiendo la misma metodología que Vickers usa para evaluar, y rechazar, los cargos de inconsistencia contra el cálculo de la primera época, evaluamos su propio cargo de inconsistencia contra el cálculo de Bernoulli. Argumentaremos que el Postulado I de Die Differentialrechnung, la proposición en la que se centra Vickers, no es una contradicción explícita ni nos conduce a una sin ciertos supuestos debatibles, por lo que la teoría formal del cálculo de Bernoulli no necesariamente tendría que ser inconsistente. También argumentaremos que la relatividad de la inconsistencia a una lógica y la falta de evidencia histórica también impiden afirmar que la justificación bernoulliana de su cálculo sea inconsistente, por lo que Vickers no tiene elementos suficientes para catalogar el cálculo de Bernoulli como inconsistente.

1 Introducción

En este trabajo abordamos la pregunta de si los infinitesimales tal y como los caracteriza Johann Bernoulli en *Die Differentialrechnung* son inconsistentes. Responder a tal interrogante es importante no solamente por el valor historiográfico del estudio de caso, sino también por el impacto que tiene la supuesta caracterización de Bernoulli de los infinitesimales tanto en la metodología como en la filosofía de la ciencia. Por un lado, algunos filósofos y lógicos de la ciencia han sugerido que las inconsistencias se toleran en el razonamiento científico sin la necesidad de que esto sea sinónimo de desastre; en particular, algunos de los defensores de tal tesis han sostenido también que las interpretaciones del cálculo de, al menos, Bernoulli, Leibniz y Newton son inconsistentes pero no explosivas (en el sentido lógico de que de una contradicción se sigue lógicamente cualquier otra proposición; véase por ejemplo [3]). Por otro lado, una acusación frecuente contra esta tradición es la de forzar la evidencia histórica para apoyar sus tesis sobre la tolerancia a la inconsistencia a través de reconstrucciones racionales poco fieles a la historia de

la ciencia. Por tanto, creemos que responder a este cuestionamiento nos permitirá reconocer criterios metodológicos importantes que deben ser respetados al analizar inconsistencias similares a la que se le atribuye a Bernoulli, y al mismo tiempo nos permitirá ya sea apoyar o debilitar las tesis relacionadas con la tolerancia a la inconsistencia.

El caso de Bernoulli es interesante porque incluso Peter Vickers [8], probablemente el desmitificador más meticuloso de supuestos casos de inconsistencias en la historia de la ciencia, sostiene que los infinitesimales bernoullianos son inconsistentes y que Bernoulli estaba de hecho comprometido con su existencia. Nuestro objetivo aquí es hacer una pequeña contribución para una historia y una filosofía de la ciencia lógicamente informadas, pues a la pregunta acerca de la consistencia de los infinitesimales bernoullianos respondemos que *pueden no serlo*, ya que las evaluaciones de consistencia son relativas a una lógica que, si bien suele ser la lógica clásica y era ésta –por lo menos el fragmento de orden cero– la dominante en la época de Bernoulli, no es la única para hacer matemática.

Nótese que no nos preguntaremos si Bernoulli de hecho estaba comprometido con la existencia de los infinitesimales como él los definió, si era un instrumentalista con respecto a ellos o si hay que recurrir a otras partes del *corpus* bernoulliano, e incluso de sus interlocutores, para evaluar sus propiedades, incluyendo su consistencia. Ésa sería una investigación principalmente histórica, biográfica, mientras que nuestra pregunta es acerca de las propiedades lógicas de los infinitesimales así definidos en la obra referida. No está de más decir que abordar otros infinitesimales, ya sea contemporáneos –como los diversos hiperreales estudiados a partir del trabajo de Abraham Robinson o los nilpotentes del análisis infinitesimal suave– o de la época de Bernoulli –como los de Nieuwenteijt– está fuera del alcance de este texto. Tampoco pretendemos dar una reconstrucción lógica completa del cálculo de Bernoulli sino, siguiendo, la metodología de Vickers, restringirnos solamente a las proposiciones históricamente relevantes para evaluar el cargo de inconsistencia.

El plan del trabajo es como sigue. En la primera sección exponemos la metodología historicista-eliminativista de Vickers y reconstruimos su argumento para decir que el cálculo de la primera época, con excepción del de Bernoulli, no era inconsistente. En la segunda sección, siguiendo la misma metodología, investigamos si la reconstrucción lógica de la afirmación “paradójica” de Bernoulli, el Postulado I de *Die Differentialrechnung*, nos conduce a una contradicción explícita, como piensa Vickers y argumentamos que de hecho no lo hace, a menos que uno suponga que la lógica adecuada para razonar acerca de los infinitesimales sea tal que valga $A \vee \neg A$. Finalmente, en la tercera sección, explotamos el hecho de la relatividad de la inconsistencia a la lógica para argumentar que las justificaciones bernoullianas de su cálculo tampoco permiten afirmar que su cálculo es inconsistente.

2 La inconsistencia del cálculo de la primera época

En “Was the early calculus an inconsistent theory?” ([7]) y después en *Understanding Inconsistent Science*, [8, p. capítulo 6], Peter Vickers ha examinado cuidadosamente la opinión todavía bastante difundida de que el cálculo de la primera época –el de Newton, Leibniz y sus respectivos seguidores, cuyas técnicas se extendieron hasta principios del siglo XIX– era inconsistente. Pero incluso después de argumentar de manera bastante convincente que no era así, Vickers sostiene que Johann Bernoulli sí tenía un compromiso con infinitesimales con propiedades contradictorias, por ejemplo, ser a la vez idénticos y diferentes a cero, y que probablemente era el único en este respecto. La evidencia que Vickers da para ello son afirmaciones “paradójicas” [8, p. 178] de Bernoulli como el Postulado I de *Die Differentialrechnung*: “Una cantidad que aumenta o disminu-

ye infinitesimalmente no aumenta ni disminuye”^{*} y sus defensas de la literalidad de afirmaciones como ésta. Antes de pronunciarnos acerca de la postura de Vickers, expondremos la metodología que él utiliza para evaluar las afirmaciones de inconsistencia.

Según Vickers, en debates acerca de la inconsistencia de teorías científicas, en lugar de ocuparnos de definir qué es una teoría en general, y qué es “el cálculo de la primera época” en este caso, deberíamos fijarnos sólo en las proposiciones históricamente relevantes para evaluar los cargos de inconsistencia. Esto es lo que Vickers denomina “eliminativismo teórico” [8, capítulo 2]. En el caso del cálculo de la primera época, estas proposiciones podrían encontrarse en dos niveles, a saber, el nivel de la *teoría formal* y el nivel de la *justificación*, esto es, el nivel en el que se explica cuáles son los presupuestos conceptuales básicos de la teoría, y con ello cómo y por qué ésta funciona o debería funcionar.

El argumento de Vickers para afirmar que el cálculo de la primera época no es inconsistente es como sigue. Si el cálculo es inconsistente, entonces o la teoría formal es inconsistente o la justificación que se da de la teoría formal es exitosa e inconsistente. Pero la teoría formal del cálculo de la primera época es básicamente el siguiente algoritmo [8, p. 150]:

1. Ponga la ecuación en la forma $y = f(x)$.
2. Calcule $\frac{f(x + o) - f(x)}{o}$ y simplifique.
3. Remueva cualquier término que sea múltiplo de o .
4. El término resultante entonces es la derivada.[†]

Si este algoritmo es inconsistente es porque o bien contiene reglas autocontradictorias (como “No siga esta regla”), o porque arroja resultados inconsistentes con alguna verdad matemática ya establecida, o porque arroja resultados diferentes usando el mismo procedimiento. Pero nada de esto ocurriría con el algoritmo mencionado arriba. Por ejemplo, quienes pretendían haber obtenido algún resultado inconsistente con alguna verdad matemática establecida aplicaron incorrectamente el algoritmo en algún punto. De este modo, la teoría formal no es inconsistente, así que, para que el cálculo de la primera época fuera inconsistente, alguna de las justificaciones exitosas del algoritmo tendría que serlo.

Para Vickers, una justificación exitosa del cálculo de la primera época es una justificación de los pasos del algoritmo, y sus relaciones con otras áreas de la matemática ya establecida, aceptada por la comunidad pertinente como verdadera o, por lo menos, como “candidata a la verdad”. Sin embargo, según Vickers, muchas de las justificaciones ofrecidas ni siquiera eran consideradas exitosas, sino meramente buenas heurísticas o “ficciones útiles” –por ejemplo, muchas de las que recurrían a infinitesimales. Otras ni siquiera eran justificaciones, sino meras exposiciones del algoritmo; por último había justificaciones que sí eran aceptadas por varios matemáticos como “candidatas a la verdad” (las explicaciones en términos de fluxiones u otras cinemáticas, o las que recurrían a infinitesimales pero como cantidades variables), pero no eran exitosas en el sentido de que no fueron aceptadas por toda la comunidad pertinente al no explicar convincentemente alguna parte del algoritmo o de sus conexiones con otras áreas de la matemática ya establecida. Sin embargo, no toda explicación fallida es inconsistente: bien puede ser incompleta o incoherente.

Así, si ni la teoría reconstruida lógicamente ni las justificaciones exitosas eran inconsistentes, no hay razones para decir que el cálculo de la primera época es inconsistente. La única excepción para Vickers es Johann Bernoulli, pues él “sobresale al hacer el compromiso explícito más fuerte con un conjunto de supuestos inconsistentes” [8, p. 147]; “él [Johann Bernoulli] razonaba *como si*

^{*}“Eine Grösse, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Grösse, wird weder vermindert noch vermehrt.”

[†]O, en una sola oración: si calculamos $\frac{f(x + o) - f(x)}{o}$ para cualquier función $y = f(x)$ y donde o es una constante numérica y se elimina cualquier término remanente que sea múltiplo de o , entonces tenemos la derivada. [8, p. 154]

creyera en infinitesimales autocontradictorios porque *de hecho* creía en infinitesimales autocontradictorios” [8, p. 183] y “Bernoulli, al creer dos conjuntos inconsistentes en momentos ligeramente diferentes, está comprometido a creer la conjunción completa en un mismo momento” [8, p. 185], con lo que “[a]quí tenemos lo que seguramente es una de las posiciones más radicales en la historia de la ciencia y las matemáticas: parece que Bernoulli acepta muy claramente una contradicción obvia.” [8, p. 178] Sin embargo, siguiendo su propia metodología, Vickers tendría que mostrarnos que o bien la reconstrucción lógica de la teoría de Bernoulli o bien su justificación para la teoría son inconsistentes. En la siguiente sección veremos que la reconstrucción lógica de los infinitesimales bernoullianos no necesariamente es inconsistente.

3 Una formalización del Postulado I

Vickers [8, p. 185] considera una manera en la que los infinitesimales bernoullianos supuestamente contradictorios no trivializarían la teoría al restringir la validez de algunos principios lógicos. Para esto, al principio de una derivación se valdría el paso de

El infinitesimal es igual a cero y distinto de cero.

a

Por eliminación de la conjunción, el infinitesimal es distinto de cero.

y al final de una derivación, el paso que se valdría sería

El infinitesimal es igual a cero y distinto de cero.

Entonces, por eliminación de la conjunción, el infinitesimal es igual a cero.

Vickers cree que esto es problemático, pues no sólo se requeriría que la lógica fuera paraconsistente para no trivializar la teoría a partir del supuesto inicial, que el infinitesimal es igual a cero y distinto de cero, sino que se requeriría una lógica muy complicada para permitir sólo ciertas eliminaciones de la conjunción en determinados pasos de una derivación.

Sólo queremos notar que en principio no es tan descabellado usar los pasos que Vickers menciona como parte del algoritmo del cálculo. En lógicas de la relevancia, hay conjunciones que funcionan como fusiones y que tienen una eliminación de la conjunción más estricta:

A y B ; A implica que B implica C
 C , por eliminación de la conjunción (cf. [5])

Entonces, un condicional estricto apropiado, como “ A implica que $\neg A$ implica $\neg A$ ”, ayudaría a justificar la eliminación en el primer paso y, *mutatis mutandis*, algo similar podría pasar para el segundo.

Sin embargo, hay opciones lógicas menos enrevesadas para entender los infinitesimales de Bernoulli que ni siquiera requieren considerarlos como inconsistentes. Recordemos el Postulado I de Bernoulli: “Una cantidad que aumenta o disminuye infinitesimalmente no aumenta ni disminuye”. Pero, ¿esto es una contradicción? Nótese que el postulado no dice

Para todo número x y todo infinitesimal ε , εx y no εx .

pues el enunciado tiene claramente una naturaleza condicional: si la cantidad se aumenta (o disminuye) infinitesimalmente, no aumenta (ni disminuye). Así, otra lectura podría ser

Para todo número x y todo infinitesimal ε , si εx entonces no εx .

lo que ni siquiera tiene sentido, pues uno no niega términos, como son el resultado de operaciones como el producto, y la primera paráfrasis que dimos también tenía éste problema: uno no conjunta términos.

Otra paráfrasis sería:

Para todo número x y todo infinitesimal ε , ($\varepsilon x = x$).

Esto no es una contradicción, y parece respetar el espíritu del postulado de Bernoulli: una cantidad x que varía infinitesimalmente (εx) no varía, es igual a sí misma (x). Sin embargo, arriba dijimos que el enunciado tiene una naturaleza condicional, que no está expuesta en la paráfrasis recién dada. Esto puede solucionarse así:

Para todo número x , todo número y y todo infinitesimal ε , si $\varepsilon x = y$ entonces $x = y$.

Esto es casi el *principio de microcancelación* del análisis infinitesimal suave (cf. [1, capítulos 1, 2, 7 y 8]), sólo tendríamos que haber escrito ' $\varepsilon x = \varepsilon y$ ' en lugar de ' $\varepsilon x = y$ '. Dado que el postulado de Bernoulli implica el principio de microcancelación –sólo instánciese ' y ' por ' εy '–, aquel también es incompatible con la lógica clásica, en particular con $A \vee \neg A$.

Así, si la proposición históricamente relevante para evaluar la inconsistencia en el caso de Bernoulli es el Postulado I, la teoría formal del cálculo bernoulliano no necesariamente es inconsistente: lo es si la lógica usada para razonar acerca de los infinitesimales tiene que ser una donde valga $A \vee \neg A$.

4 La no inconsistencia de los infinitesimales bernoullianos

Calificar de inconsistentes a los infinitesimales bernoullianos requiere más recursos que los permitidos por la metodología historicista-eliminativista que Vickers se autoimpone. Vickers parece suponer que la única proposición históricamente relevante en el caso de Bernoulli es el Postulado I. Podemos conceder eso. Enseguida, Vickers debió habernos mostrado que o bien la teoría formal del cálculo de Bernoulli es inconsistente, o que su justificación del mismo es inconsistente. Pero, poniendo más atención en la formalización del Postulado I, vimos que no es una contradicción explícita. Una lección importante de lo expuesto en la sección previa es que, como han enfatizado autores recientes (cf. por ejemplo [6]), la consistencia es relativa a una lógica dada. Sin asumir que $A \vee \neg A$ vale, el Postulado I no necesariamente es inconsistente, en el sentido de que no necesariamente nos conduce a una contradicción explícita. Lo que nos quedaría es investigar si la justificación bernoulliana del cálculo es inconsistente.

Supongamos que Bernoulli haya sido uno de los que “deja la lógica para después” (cf. [4, p. 9]) de su uso del cálculo y su justificación del mismo. Sin el recurso a la lógica intuicionista, lo más probable es que las justificaciones de Bernoulli fueran o bien incompletas, al no poder explicar cómo puede valer su Postulado I sin llegar a resultados falsos como que $1 = 0$, o incoherentes, al sostener afirmaciones del tipo ‘Tanto $A \vee \neg A$ como el Postulado I valen para mi cálculo infinitesimal y no llego a resultados falsos como $1 = 0$ ’ sin notar la contradicción y sin aceptarla, pero según Vickers esto sucedía con muchos de los analistas de la primera época. De hecho, al final del capítulo [8, p. 189], Vickers parece reconocer que no hay concordancia entre la práctica de Bernoulli y la justificación que habría dado del cálculo, pero esto mostraría a lo sumo que la justificación dada por Bernoulli es inadecuada, no necesariamente inconsistente. Sin embargo, habría que hacer un estudio más detallado de los escritos de Bernoulli para tener mayor certeza. Así pues, Vickers no ha dado elementos suficientes para afirmar que el cálculo de Bernoulli es inconsistente.

5 Conclusiones

En este trabajo nos preguntamos si, como sostiene Vickers, los infinitesimales de Bernoulli son inconsistentes y, con ello, toda su versión del cálculo. Expusimos la metodología que Vickers usa para evaluar los cargos de inconsistencia contra el cálculo de la primera época y la adoptamos para evaluar su propio cargo de inconsistencia contra el cálculo de Bernoulli. Encontramos que la proposición que Vickers juzga históricamente relevante, el Postulado I de *Die Differentialrechnung*, no es una contradicción explícita ni nos conduce a una sin ciertos supuestos, en particular, que la lógica que tiene que ser la usada para razonar con infinitesimales es una donde valga $A \vee \neg A$, por lo que la teoría formal del cálculo de Bernoulli no necesariamente tendría que ser inconsistente. La relatividad de la inconsistencia a la lógica y la falta de evidencia histórica también impiden afirmar que la justificación bernoulliana de su cálculo sea inconsistente, por lo que Vickers no tiene elementos suficientes para catalogar a Bernoulli como un caso especial, en cuanto la inconsistencia se refiere, entre los analistas de la primera época.[‡]

Referencias

- [1] BELL, J. L. (1998). *A Primer of Infinitesimal Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] BERNOULLI, J. (1691/92-1924). *Die Differentialrechnung. Von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92*, número 211 de Oswalds Klassiker der Exakten Wissenschaften.
- [3] BROWN, B. y G. PRIEST (2004). Chunk and permeate, a paraconsistent inference strategy. Part I: The infinitesimal calculus. *Journal of Philosophical Logic*, 33, 379–388.
- [4] HEAVISIDE, O. (1899). *Electromagnetic Theory Vol. 2*. London: ‘The Electricist’ Print. and Publ. Co.
- [5] MARES, E. (2012). Relevance and conjunction. *Journal of Logic and Computation*, 22, 7–21.
- [6] SHAPIRO, S. (2014). *Varieties of Logic*. Oxford: Oxford University Press.
- [7] VICKERS, P. (2007). Was the early calculus an inconsistent theory? Typescript available at the PhilSci Archive: <http://philsci-archive.pitt.edu/3477/>
- [8] VICKERS, P. (2013). *Understanding Inconsistent Science*. Oxford: Oxford University Press.

[‡]Este trabajo fue realizado gracias al apoyo del proyecto PAPIIT IA401015 “Tras las consecuencias. Una visión universalista de la lógica (I)”. El autor quiere agradecer además al proyecto Conacyt CCB 2011 166502 “Aspectos filosóficos de la modalidad”; la autora, al proyecto PAPIIT IN400514 “Lógicas del descubrimiento, heurística y creatividad en las ciencias”. Queremos agradecer al Grupo de Lectura de Filosofía de la Ciencia del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM, en especial y con cariño a Daniel Garibay García, Mónica Livier Aguilar Martínez y Jorge Alberto Manero Orozco por sus gentiles comentarios al discutir el tema de este trabajo.

Lógica Matemática

Teoría de Tipos (HoTT)

Jonathan Julián Huerta y Munive

jonjulian23@gmail.com

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

Se exponen los axiomas y reglas de inferencia del sistema HoTT así como algunas demostraciones dentro del mismo y su “misteriosa” relación con la Lógica Matemática, la Teoría de Conjuntos, la Teoría de Homotopías y la Teoría de Categorías.

1 Introducción

La *teoría de tipos* comienza en 1903 con los *Principia Mathematica* de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead. Sus ideas fueron expresadas formalmente en el *cálculo lambda simple con tipos* creado por Alonzo Church en 1940. Posteriormente, Haskell Curry describiría una relación entre el comportamiento de algunos tipos simples y proposiciones lógicas que después sería reenunciado, por William Alvin Howard, como un isomorfismo entre la deducción natural intuicionista y los cómputos en teoría de tipos. Esta *correspondencia Curry-Howard* y otras similares -como la *interpretación BHK* (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) o el anexo de Joachim Lambek de Teoría de Categorías para formar el *Trinitarianismo Computacional*- nutrieron varios campos de estudio: surgieron más teorías de tipos a partir de diversas lógicas y viceversa. Un ejemplo de esto, es la aportación de Per Erik Rutger Martin-Löf a las ciencias de la computación. Utilizando la correspondencia Curry-Howard y con base en la lógica predicativa intuicionista, Martin-Löf introdujo varios *tipos dependientes*, creando así el sistema formal base de la teoría de tipos intuicionista/constructiva/dependiente o, simplemente, *teoría de tipos de Martin-Löf* (MLTT por sus siglas en inglés). En 2006, Michael Warren y su asesor, Steve Awodey, dieron el primer modelo de dimensiones superiores para las teorías de tipos intensionales usando las *categorías modelos de Quillen* de la teoría de homotopías. Esta presentación de MLTT que ahora incluye el *axioma de univalencia* de Vladimir Voevodsky y los *tipos de inducción superior* es lo que se conoce como *teoría de tipos-homotopías* (HoTT por sus siglas en inglés). HoTT es la teoría emblema del *Programa de Fundamentos Univalentes* para las matemáticas de Voevodsky el cual, según Awodey, consiste en “hallar un fundamento comprensivo y computacional para las Matemáticas basado en la interpretación homotópica de la teoría de tipos”. En lo subsiguiente se expone el sistema formal HoTT así como algunas demostraciones dentro del mismo y su “misteriosa” relación con la Lógica Matemática, la Teoría de Conjuntos, la Teoría de Homotopías y la Teoría de Categorías.

2 Sistema Formal e Interpretación Original

Al igual que todos los lenguajes y sistemas formales, la presentación de HoTT varía por autor, aquí se escogió una presentación similar a la del Programa de Fundamentos Univalentes en el libro *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Así, asumiendo que se tienen una infinidad de símbolos con los cuales trabajar, el conjunto Λ de λ -términos bien formados se construye mediante:

$$\begin{array}{lll} \text{Var} & \ni & x, x', x'', x''' \dots \\ \text{Const} & \ni & c, c', c'', c''' \dots \\ \Lambda & \ni & t, t', t'', t''' \dots \quad ::= \quad c \mid x \mid (\lambda(x:t).t') \mid t''(t''') \end{array}$$

Las fórmulas de una teoría de tipos tienen la forma “ $a : A$ ” ó “ $a \in A$ ”, que representan la idea de que la expresión “ a ” es de tipo “ A ”. No obstante, en estas teorías es común formalizar también los juicios, i.e. enunciados metalógicos, dentro del sistema formal. Por dicha razón se presentan a continuación los juicios básicos en esta teoría de tipos:

- $\Gamma \vdash$, que simboliza “ Γ es un contexto bien formado”.*
- $\Gamma \vdash a : A$, es decir, “ a es un término de tipo A involucrando variables en el contexto Γ ”.
- $\Gamma \vdash a_i = a_j : A$, i.e. “ a_i y a_j son términos (definicionalmente/juzgadamente) iguales en el tipo A con base en los términos del contexto Γ ”.

De esta manera, se procede a presentar las diferentes reglas de inferencia para obtener dichos juicios. Las primeras de éstas dicen cómo operar con los contextos formados hasta determinado momento en cualquier prueba formal:

$$\frac{}{\vdash} \text{ctx-Emp} \quad \frac{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \vdash}{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash x_i : A_i} \text{Vble} \quad \frac{x_1 : A_1, \dots, x_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) \vdash} \text{ctx-Ext}$$

Dentro de las constantes se tiene la sucesión $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ que representa “los universos” de la teoría. Gracias a éstos es posible expresar la noción “ A es un tipo” mediante la expresión $A : \mathcal{U}_i$ para algún i . En otras palabras, se constituye una jerarquía de universos gobernada por las reglas:

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-Intro} \quad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}} \mathcal{U}\text{-Cumul}$$

También se asume que la igualdad definicional es una relación de equivalencia respetada por la tipificación:

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a = a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a = b : A}{\Gamma \vdash b = a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a = b : A \quad \Gamma \vdash b = c : A}{\Gamma \vdash a = c : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a = b : A \quad \Gamma \vdash A = B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a = b : B} \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A = B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash a : B}$$

Posteriormente se deben presentar las reglas de *formadores de tipos* que en esta exposición serán siete ($\Pi, \Sigma, +, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbb{N}, Id$), cada uno de los cuales se acompaña de cinco reglas:

*Un contexto es una sucesión finita de fórmulas $x_1 : A_1, x_2 : A_2, \dots, x_n : A_n$ tales que $x_i \neq x_j$ para $j \neq i$, indicando que las expresiones $x_1, \dots, x_n$ (distintas una de la otra) son de tipo $A_1, \dots, A_n$ respectivamente.

- **Reglas de Formación** que establecen cuándo es posible aplicar el *formador de tipos*.
- **Reglas de Introducción** que indican cómo invocar términos del tipo.
- **Reglas de Eliminación** que muestran cuándo será posible operar con los elementos del tipo formado (posiblemente usando eliminadores).
- **Reglas de Computación** que explican lo que sucede al aplicar los eliminadores en los términos de un tipo.
- **Principios de Unicidad** que señalan de qué manera cada elemento del tipo formado está únicamente determinado por la aplicación de los eliminadores.

La primera clase de tipos son los *tipos de funciones dependientes* $\prod_{x:A} B(x)$ obtenidos a partir de un tipo $A : \mathcal{U}$ y una familia indizada por éste, i.e. $B(x) : \mathcal{U}_i$ con $x : A$. Originalmente se planeaba que fuesen el equivalente al producto cartesiano arbitrario de una familia de objetos en teoría de conjuntos. Por esta misma razón sus elementos son funciones únicamente determinadas como λ -expresiones. Esto se expresa en el sistema formal codificando la expresión $\prod_{x:A} B(x)$ con el λ -término $c_{\Pi}((\lambda(x:A).B))$ y empleando las reglas:

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \prod_{x:A} B : \mathcal{U}_i} \text{Pi-Form} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (\lambda(x:A).b) : \prod_{x:A} B} \text{Pi-Intro} \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash f : \prod_{x:A} B}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]} \text{Pi-Elim} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (\lambda(x:A).b)(a) = b[a/x] : B[a/x]} \text{Pi-Comp} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x:A} B}{\Gamma \vdash f = (\lambda(x:A).f(x)) : \prod_{x:A} B} \text{Pi-Uniq}
\end{array}$$

Donde una expresión de la forma $\Phi[\alpha/\beta]$ representa la expresión Φ con toda instancia no acotada de β sustituida por α . Cuando $B(x)$ no depende de $x : A$, se tiene el clásico tipo de funciones de A en B , es decir, $A \rightarrow B$. Además de éstas cinco reglas, cada formador de tipos incluye una regla expresando que su respectivo constructor preserva la igualdad definicional, por ejemplo:

$$\frac{\Gamma \vdash A = A' : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash B = B' : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash b = b' : B}{\Gamma \vdash (\lambda(x:A).b) = (\lambda(x:A).b') : \prod_{x:A} B} \text{Pi-Intro-Eq}$$

Este último tipo de reglas se dejará tácito en esta presentación. Más aún, de ahora en adelante se omitirán los nombres de éstas respetando el orden proporcionado anteriormente (salvo ocasiones en las que deba variar la presentación) y, dado que los principios de unicidad restantes son derivables en la teoría, tampoco serán explícitamente escritos en lo sucesivo.

La segunda clase de tipos son los *tipos de parejas dependientes* $\sum_{x:A} B(x)$, los cuales se forman de la misma manera que los de la clase anterior. Son el análogo a la unión disjunta de una familia de conjuntos; pero sus elementos son parejas ordenadas $\langle a, b \rangle$ donde la primera entrada a es de tipo A y la segunda b , de tipo $B(a)$. El eliminador para éstos o *principio de inducción para parejas dependientes* ind_{Σ} establece que: dada una familia $Q(p) : \mathcal{U}_i$ con $p : \sum_{x:A} B(x)$, construir una función que vaya de la suma a la familia $f : \prod_{p:\sum_{x:A} B(x)} Q(p)$ sólo requiere tener otra análoga $g : \prod_{a:A} \prod_{b:B(a)} Q(a, b)$ que sea evaluada iteradamente, proceso conocido como *currying*, es decir, si $a : A$ y $b : B(a)$ entonces realmente $f(a, b) = g(a)(b) : Q(a, b)$. Formalmente:

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \Sigma_{x:A} B : \mathcal{U}_i} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash \langle a, b \rangle : \Sigma_{x:A} B} \quad \frac{\Gamma, z : \Sigma_{x:A} B \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : Q[\langle x, y \rangle / z] \quad \Gamma \vdash p : \Sigma_{x:A} B}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\Sigma}(z.Q, x.y.g, p) : Q[p/z]}
\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, z : \Sigma_{x:A} B \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash g : Q[\langle x, y \rangle / z] \quad \Gamma \vdash a' : A \quad \Gamma \vdash b' : B[a'/x]}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\Sigma}(z.Q, x.y.g, \langle a', b' \rangle) = g[a', b'/x, y] : Q[\langle a', b' \rangle / z]}$$

Donde $\Sigma_{x:A} B(x)$ es codificado mediante el término $c_{\Sigma}((\lambda(x : A).B))$ que acota todas las instancias libres de x en B . Además, las cadenas $x.y.g$ y $z.Q$ representan la acotación de x, y y z en g y Q respectivamente para el término $c_{\text{ind}_{\Sigma_{x:A} B}}(z.Q)(x.y.g)(p)$ quien codifica al inductor ind_{Σ} . Más aún, siempre que $B(x)$ no dependa de $x : A$, el tipo de parejas dependientes $\Sigma_{x:A} B$ se abrevia con la notación de producto cartesiano $A \times B$.

A continuación siguen los *tipos coproducto* $A+B$ que para formarlos únicamente requieren de otros dos tipos ya existentes $A, B : \mathcal{U}_i$. Como su nombre lo dice, esta clase de tipos son duales a los productos cartesianos por lo que, si las proyecciones canónicas π_1 y π_2 permiten “descomponer” los elementos de los tipos producto, entonces los tipos coproducto requieren de las inclusiones canónicas ι_1 y ι_2 para introducir sus elementos; más explícitamente: si $a : A$ y/o $b : B$, entonces $\iota_1(a) : A+B$ y/o $\iota_2(b) : A+B$. Repitiendo la idea de la subsección anterior, el *principio de inducción para los tipos coproducto* dice que dada una familia $Q(x)$ con $x : A+B$, para construir una función que vaya de $A+B : \mathcal{U}$ a la familia, i.e. $f : \prod_{x:A+B} Q(x)$, sólo se requiere tener dos funciones previas $g_1 : \prod_{a:A} Q(\iota_1(a))$ y $g_2 : \prod_{b:B} Q(\iota_2(b))$, de tal modo que $f(\iota_1(a)) = g_1(a) : Q(\iota_1(a))$ y que $f(\iota_2(b)) = g_2(b) : Q(\iota_2(b))$. En HoTT esto se expresa por:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A+B : \mathcal{U}_i} +\text{-Form} & \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \iota_1(a) : A+B} +\text{-Intro1} & \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \iota_2(b) : A+B} +\text{-Intro2}
\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, z : A+B \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash g_1 : Q[\iota_1(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash g_2 : Q[\iota_2(y)/z] \quad \Gamma \vdash w : A+B}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.Q, x.g_1, y.g_2, w) : Q[w/z]} +\text{-Elim}$$

$$\frac{\Gamma, z : A+B \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash g_1 : Q[\iota_1(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash g_2 : Q[\iota_2(y)/z] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.Q, x.g_1, y.g_2, \iota_1(a)) = g_1[a/x] : Q[\iota_1(a)/z]} +\text{-Comp1}$$

$$\frac{\Gamma, z : A+B \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, x : A \vdash g_1 : Q[\iota_1(x)/z] \quad \Gamma, y : B \vdash g_2 : Q[\iota_2(y)/z] \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \text{ind}_{A+B}(z.Q, x.g_1, y.g_2, \iota_2(b)) = g_2[b/y] : Q[\iota_2(b)/z]} +\text{-Comp2}$$

Posteriormente se introducen dos tipos especiales, el *tipo vacío* $\mathbf{0} : \mathcal{U}_i$ y el *tipo unidad* $\mathbf{1} : \mathcal{U}_i$ quienes pueden ser construidos a partir de cualquier contexto. Se pretende que el primero no tenga elementos, por lo cual no tiene reglas de introducción ni computación y se conviene que en el caso de que se hallase un término $z : \mathbf{0}$, entonces cualquier tipo concebible estará habitado. Más explícitamente, siempre que tengamos un tipo $Q : \mathcal{U}_i$, podemos construir una función $f : \prod_{z:\mathbf{0}} Q(z)$ tal que $f(z) : Q(z)$. Formalmente:

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \mathcal{U}_i} \mathbf{0}\text{-Form} \qquad \frac{\Gamma, x : \mathbf{0} \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash z : \mathbf{0}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{0}}(x.Q, z) : Q[z/x]} \mathbf{0}\text{-Elim}$$

Mientras tanto, el tipo unidad tiene un solo elemento:

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathbf{1} : \mathcal{U}_i} \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \star : \mathbf{1}} \quad \frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, y : \mathbf{1} \vdash g : Q[y/x] \quad \Gamma \vdash a : \mathbf{1}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{1}}(x.Q, y.g, a) : Q[a/x]} \quad \frac{\Gamma, x : \mathbf{1} \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, y : \mathbf{1} \vdash g : Q[y/x]}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbf{1}}(x.Q, y.g, \star) = g[\star/y] : Q[\star/x]}$$

Además, como toda teoría que pretenda fundamentar al resto de las matemáticas, HoTT tiene un *tipo de números naturales* $\mathbb{N} : \mathcal{U}_i$ que, igualmente a los dos anteriores, se puede construir bajo cualquier contexto. Los elementos de este tipo se introducen recursivamente, es decir, de facto ya se tiene que $0 : \mathbb{N}$ y que si $n : \mathbb{N}$, entonces $S(n) : \mathbb{N}$. Así mismo, el *principio de inducción para el tipo de los naturales* dice que si $P(n) : \mathcal{U}$ es una familia indizada por los números naturales, i.e. $n : \mathbb{N}$, entonces para construir una función de los naturales a la familia $f : \prod_{n:\mathbb{N}} P(n)$ es suficiente con construir dos funciones que reflejen cómo se comporta ésta en el caso base $c_0 : P(0)$ y en el caso recursivo/inductivo $c_S : \prod_{n:\mathbb{N}} P(n) \rightarrow P(S(n))$ de tal modo que $f(0) = c_0$ y $f(S(n)) = c_S(n, f(n))$. En el sistema formal:

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \mathcal{U}_i} \mathbb{N}\text{-Form} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash 0 : \mathbb{N}} \mathbb{N}\text{-Intro1} \qquad \frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash S(n) : \mathbb{N}} \mathbb{N}\text{-Intro2}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash P : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : P[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : P \vdash c_S : P[S(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.P, c_0, x.y.c_S, n) : P[n/x]} \mathbb{N}\text{-Elim}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash P : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : P[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : P \vdash c_S : P[S(x)/x]}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.P, c_0, x.y.c_S, 0) = c_0 : P[0/x]} \mathbb{N}\text{-Comp1}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash P : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash c_0 : P[0/x] \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, y : P \vdash c_S : P[S(x)/x] \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.P, c_0, x.y.c_S, S(n)) = c_S[n, \text{ind}_{\mathbb{N}}(x.P, c_0, x.y.c_S, n)]/x, y : P[S(n)/x]} \mathbb{N}\text{-Comp2}$$

Finalmente, los últimos tipos de la teoría son los *tipos igualdades proposicionales*. La formación de éstos se puede interpretar como “dado cualquier tipo $A : \mathcal{U}$ y dos elementos de éste $a, b : A$, se puede plantear el problema de si ambos términos son iguales, o sea $a =_A b : \mathcal{U}$ ó $\text{Id}_A(a, b) : \mathcal{U}$ ”. La segunda regla establece que todo término de cualquier tipo $a : A$ es proposicionalmente idéntico a sí mismo $r_a : \text{Id}_A(a, a)$ ó $\text{refl}_a : a =_A a$. Por último, el *principio de inducción para la igualdad proposicional* dice a grandes rasgos que para establecer cuándo son iguales cualesquiera dos elementos de un tipo dado, es suficiente con analizar la reflexividad de dicha igualdad y utilizar el hecho de que la igualdad *definicional* respeta tipificación. Expresar esto de manera análoga a previas descripciones corresponde a decir que dada una familia $Q(x, y, r)$ con $x, y : A$ y $r : \text{Id}_A(x, y)$, construir una función $f : \prod_{x,y:A} \prod_{r:\text{Id}_A(x,y)} Q(x, y, r)$ requiere tener otra únicamente definida en la reflexividad $g : \prod_{x:A} Q(x, x, r_x)$ de tal modo que $f(x, x, r_x) = g(x)$. En forma de reglas de deducción, todo esto se puede escribir como sigue:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash \text{Id}_A(a, b) : \mathcal{U}_i} =\text{-Form} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash r_a : \text{Id}_A(a, a)} =\text{-Intro}$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : \text{Id}_A(x, y) \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash g : Q[z, z, r_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A \quad \Gamma \vdash p' : \text{Id}_A(a, b)}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=A}(x.y.p.Q, z.g, a, b, p') : Q[a, b, p'/x, y, p]} = \text{-Elim}$$

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A, p : \text{Id}_A(x, y) \vdash Q : \mathcal{U}_i \quad \Gamma, z : A \vdash g : Q[z, z, r_z/x, y, p] \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{ind}_{=A}(x.y.p.Q, z.g, a, a, r_a) = g[a/z] : Q[a, a, r_a/x, y, p]} = \text{-Comp}$$

La teoría desarrollada hasta ahora corresponde a MLTT, es decir, la teoría intuicionista de tipos. Para obtener al sistema formal HoTT de la teoría de tipos-homotopías es necesario agregar algunos “axiomas” más: *extensionalidad de funciones*, *univalencia* y aquellos para los *tipos de inducción superior*. A continuación se presentan los primeros dos de éstos reservando su explicación detallada a una futura sección:

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x:A} B \quad \Gamma \vdash g : \prod_{x:A} B}{\Gamma \vdash \text{funExt}(f, g) : \text{isEquiv}(\text{hApply}_{f,g})} = \Pi\text{-Ext}$$

Como su nombre lo indica, el principio de extensionalidad de funciones está dictando que dos funciones $f, g : \prod_{x:A} B$ son iguales, si coinciden en las imágenes de cada uno de sus puntos. Esto se puede expresar como una *equivalencia* entre el tipo $\text{Id}_{\prod_{x:A} B(x)}(f, g)$ y $\prod_{x:A} \text{Id}_{B(x)}(f(x), g(x))$ (con base en la correspondencia Curry-Howard). De esta manera, la regla $\Pi\text{-Ext}$ afirma la veracidad de dicha equivalencia.

Por otro lado, el axioma de univalencia intuitivamente expresa la oración “siempre que dos tipos sean equivalentes, afirmarlos es equivalente a decir que son iguales.” De manera informal esto se suele representar mediante $(A \simeq B) \simeq (A = B)$ y formalmente se escribe por:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \text{univ}(A, B) : \text{isEquiv}(\text{idToEquiv}_{A,B})} = \mathcal{U}\text{-Univ}$$

3 Correspondencia Curry-Howard

Nótese el parecido de las siguientes dos reglas de inferencia de teoría de tipos y lógica intuicionista:

$$\frac{a : A \quad b : B}{\langle a, b \rangle : A \times B} \times\text{-Intro} \qquad \frac{A \text{ True} \quad B \text{ True}}{A \wedge B \text{ True}} \wedge\text{-Intro}$$

Esta semejanza, aunada a otras similares para el resto de los tipos construidos en la sección anterior es lo que se conoce como la correspondencia Curry-Howard entre la lógica intuicionista y la teoría de tipos. Con base en ella cada tipo representa una proposición, es decir, al expresar que $P : \mathcal{U}_i$, realmente se está aseverando que P puede o no ser verificada. Cuando el tipo está habitado, i.e. $x : P$, se interpreta a dicho elemento x como un testigo de la veracidad de P o una prueba de que P es verdadero. Nótese que ésto ya marca una diferencia importante entre la lógica clásica y la interpretación que se está dando a MLTT, pues en lógica clásica una proposición ya tiene de antemano un valor de verdad (tal vez desconocido), mientras que en Teoría de Tipos una proposición es la colección de todos los testigos de su veracidad y sólo será verdadera hasta que se haya exhibido una prueba de ésta, es decir, en Lógica Intuicionista se identifica demostrabilidad con veracidad.

A continuación se ejemplifica la correspondencia Curry-Howard para los tipos de funciones dependientes omitiendo los contextos y adaptando sus reglas de inferencia para exhibir con mayor claridad esta correspondencia. En este caso, el cuantificador universal es identificado con el tipo de funciones dependientes, es decir, $(\forall x \in X)P(x) \equiv (\Pi x : X)P(x)$. A partir de esta equivalencia se observa el comportamiento natural que inducen estos tipos en la deducción natural intuicionista del cuantificador universal:

$$\begin{array}{c}
\frac{X : \mathcal{U} \quad x : X \vdash P(x) : \mathcal{U}}{\Pi_{x:X} P(x) : \mathcal{U}} \text{II-Form} \qquad \frac{X \text{ Set} \quad x \in X \vdash P(x) \text{ Prop.}}{\forall_{x \in X} P(x) \text{ Prop.}} \forall\text{-Form} \\
\\
\frac{x : X \vdash f(x) : P(x)}{\lambda x. f(x) : \Pi_{x:X} P(x)} \text{II-Intro} \qquad \frac{x \in X \vdash P(x) \text{ True}}{\forall_{x \in X} P(x) \text{ True}} \forall\text{-Intro} \\
\\
\frac{a : X \quad f : \Pi_{x:X} P(x)}{f(a) : P(a)} \text{II-Elim} \qquad \frac{a \in X \quad \forall_{x \in X} P(x) \text{ True}}{P(a) \text{ True}} \forall\text{-Elim}
\end{array}$$

De manera similar la siguiente tabla resume las equivalencias obtenidas por la correspondencia Curry-Howard y las contrasta con la interpretación original en Teoría de Conjuntos:

Lógica	Teoría de Tipos	Teoría de Conjuntos
Proposición	$A : \mathcal{U}_i$	$A \in V_\alpha$ con α ordinal
Prueba	$a : A$	$a \in A$
Predicado	$x : A \vdash P(x) : \mathcal{U}_i$	$\{P_x \mid x \in A\}$
Prueba condicional	$x : A \vdash p(x) : P(x)$	Familia de elementos
$\perp$	0	$\emptyset$
$\top$	1	$\{\emptyset\}$
$A \wedge B$	$A \times B$	$\{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$
$A \vee B$	$A + B$	Unión disjunta
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$	B^A
$\neg A$	$A \rightarrow \mathbf{0}$	$\emptyset^A$
$\exists_{x \in A} [P(x)]$	$\sum_{x:A} P(x)$	Suma disjunta
$\forall_{x \in A} [P(x)]$	$\prod_{x:A} P(x)$	$\prod \langle P_x \mid x \in A \rangle$
Igualdad	$\text{Id}_A(a, b)$	$\{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$

Además de las interpretaciones dadas al tipo de parejas dependientes, también se le usa frecuentemente para construir entes matemáticos. Por ejemplo, si uno recuerda que el axioma de comprensión de ZFC permite construir conjuntos de la forma $\{x \in A \mid B(x)\}$ y además observa que un elemento $a : A$ que satisface $B(a)$, genera una prueba $b : B(a)$, entonces uno puede concluir que el conjunto de los $x : A$ tales que $B(x)$ es realmente el tipo $\sum_{x:A} B(x)$. También es común construir las estructuras algebraicas por medio de los tipos de parejas dependientes. Por ejemplo, recordando que los magmas son vistos como *pares* ordenados donde la primera entrada es un conjunto y la segunda, una operación binaria, se puede definir el tipo:

$$\text{Magma} := \sum_{A:\mathcal{U}} (A \rightarrow (A \rightarrow A))$$

Si además uno desea agregar el axioma de asociatividad a dicha operación binaria para convertir el magma en un semigrupo, los tipos coproducto siguen siendo de utilidad para este fin pues, por Curry-Howard, únicamente se define:

$$\text{Semigroup} := \sum_{A:\mathcal{U}} \sum_{*:A \rightarrow (A \rightarrow A)} \prod_{x,y,z:A} (*(* (x, y), z) =_A * (x, *(y, z)))$$

Otra ventaja de la correspondencia Curry-Howard se observa al analizar nuevamente el *principio de inducción para los números naturales* que se convierte en el ya conocido principio en matemáticas: si $P(n) : \mathcal{U}$ es una propiedad de números naturales, i.e. $n : \mathbb{N}$, para construir un testigo de que ésta se cumple para todos los naturales $f : \prod_{n:\mathbb{N}} P(n)$ es suficiente con definir cómo se comporta éste en el caso base $c_0 : P(0)$ y en el caso inductivo $c_S : \prod_{n:\mathbb{N}} P(n) \rightarrow P(S(n))$ de tal modo que $f(0) = c_0$ y $f(S(n)) = c_S(n, f(n))$.

En el caso del tipo nulo $\mathbf{0}$, la regla de eliminación se convierte en el *principio lógico de explosión*:

$$\frac{x : \emptyset}{\text{ind}_{\emptyset}(Q, x) : Q} \emptyset\text{-Elim} \qquad \frac{\perp \text{ True}}{Q \text{ True}} \perp\text{-Elim}$$

Finalmente, se presentan testigos para dos de las más conocidas tautologías de lógica proposicional intuicionista: $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ y $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$:

$$\lambda(x:P).\lambda(y:Q).x : P \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

$$\lambda(g:P \rightarrow (Q \rightarrow R)).\lambda(f:P \rightarrow Q).\lambda(x:P).g(x)(f(x)) : (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

4 Interpretación Homotópica

No obstante la interpretación dada originalmente o la correspondencia Curry-Howard, la idea central de la *Teoría de Tipos-Homotopías* es que los tipos pueden ser vistos como espacios de la Teoría de Homotopías o Grupoides de dimensión superior de la Teoría de Categorías. Esto se cumple principalmente por el comportamiento de los tipos igualdad proposicional cuya regla de introducción puede aplicarse a ellos mismos, es decir, si $p : \text{Id}_A(a, b)$ y $q : \text{Id}_A(a, b)$ es posible construir el tipo $\text{Id}_{\text{Id}_A(a, b)}(p, q) : \mathcal{U}_i$. Así, supóngase que todo $A : \mathcal{U}_i$ representa un espacio y para dos puntos de éste $a, b : A$, si $p : \text{Id}_A(a, b)$, entonces p es una trayectoria que conecta a con b en A . Con base en esta idea, el tipo $\text{Id}_A(a, b)$ se interpreta como el espacio de caminos de a a b . Por consecuencia si H es un elemento de $\text{Id}_{\text{Id}_A(a, b)}(p, q)$, i.e. $H : \text{Id}_{\text{Id}_A(a, b)}(p, q)$, entonces H es una homotopía[†] entre p y q y, continuando esta idea, se pueden seguir definiendo homotopías de dimensión más alta. Por esta razón se adoptará la notación $a \rightsquigarrow_A b$ para el tipo $\text{Id}_A(a, b)$ y se omitirá el subíndice cuando sea claro de quién se está hablando.

Nótese que bajo la interpretación de Teoría de Homotopías, el *principio de inducción de tipos igualdad proposicional* establece lo siguiente: “para demostrar una propiedad de todos los caminos de $a : A$ a $b : A$ es suficiente con probar que los lazos (bucles) la satisfacen, i.e. dada una familia $Q(x, y, r)$ con $x, y : A$ y $r : x \rightsquigarrow y$, construir una función $f : \prod_{x,y:A} \prod_{r:x \rightsquigarrow y} Q(x, y, r)$ requiere tener

[†]En su versión conjuntista, si p y q son trayectorias de $a \in A$ a $b \in A$, i.e. $p, q : [0, 1] \rightarrow A$ donde $p(0) = q(0) = a$ y $p(1) = q(1) = b$, se dice que una homotopía de p a q es una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$, la cual satisface que $H(s, 0) = p(s)$, $H(s, 1) = q(s)$ para cada $s \in [0, 1]$ y $H(0, t) = x$, $H(1, t) = y$ para cada $t \in [0, 1]$.

otra únicamente definida en los lazos $g : \prod_{x:A} Q(x, x, r_x)$ de tal modo que $f(x, x, r_x) = g(x)$. Al igual que el cambio de notación de $\text{Id}_A(x, y)$ a $x \rightsquigarrow_A y$, renombramos este principio como *principio de inducción de caminos*.

A continuación se enuncian algunas propiedades que validan la interpretación recientemente descrita. La prueba para la primera de éstas se realizará lo más apegada posible a la formalidad de secciones previas sin perder claridad de exposición, mientras que la segunda y sucesivas serán más apegadas a las demostraciones estándar en la literatura:

Lema 1 (Existencia de un camino inverso). *Para cada tipo $A : \mathcal{U}_i$ y dos términos $a, b : A$ existe una función $-^{-1} : (a \rightsquigarrow b) \rightarrow (b \rightsquigarrow a)$ tal que para $x : A$, si $r : x \rightsquigarrow x$, entonces $(r)^{-1} = r$.*

Demostración. Recordando la correspondencia Curry-Howard, el enunciado del lema es equivalente a $\prod_{a,b:A} (a \rightsquigarrow b) \rightarrow (b \rightsquigarrow a)$ que en notación de tipos dependientes se vuelve:

$$\prod_{a,b:A} \prod_{r:a \rightsquigarrow b} (b \rightsquigarrow a)$$

Deseamos construir un testigo de tal tipo, i.e. la función $-^{-1}$, para esto utilizaremos inducción de caminos. Así, por la regla de introducción de los tipos igualdad proposicional, sabemos que si $a : A$, entonces se puede implicar la existencia de un testigo de la reflexividad de la igualdad en a , i.e. $r_a : a \rightsquigarrow a$. Por Π -Intro, $\lambda a. r_a : \prod_{a:A} a \rightsquigarrow a$. Aplicando inducción de caminos se tiene que para cada $r : a \rightsquigarrow b$, el término $\text{ind}_{=A}(b \rightsquigarrow a, \lambda a. r_a, a, b, r) : b \rightsquigarrow a$ y además satisface que $\text{ind}_{=A}(b \rightsquigarrow a, \lambda x. r_x, a, b, r) = r_a$. Nuevamente por Π -Intro se concluye que:

$$r^{-1} := \lambda a. \lambda b. \lambda r. \text{ind}_{=A}(b \rightsquigarrow a, \lambda a. r_a, a, b, r) : \prod_{a,b:A} \prod_{r:a \rightsquigarrow b} (b \rightsquigarrow a)$$

□

Lema 2 (Concatenación de caminos). *Para cada tipo $A : \mathcal{U}_i$ y términos $a, b, c : A$ existe una función $- \bullet - : (a \rightsquigarrow b) \rightarrow (b \rightsquigarrow c) \rightarrow (a \rightsquigarrow c)$ tal que para $x : A$, se cumple que $r_x \bullet r_x = r_x$.*

Demostración. Se debe construir un testigo de $a \rightsquigarrow c$, suponiendo que $p : a \rightsquigarrow b$ y $q : b \rightsquigarrow c$ con $a, b, c : A$. Se probará esto por inducción de caminos sobre $p : a \rightsquigarrow b$ seguida de otra sobre $q : b \rightsquigarrow c$. La primera hipótesis de inducción es que $b = a$ y $p = r_a$ por lo que $q : a \rightsquigarrow c$. La segunda consiste en asumir que $c = a$ y $q = r_a$. De esta forma $r_a : a \rightsquigarrow a = a \rightsquigarrow c$ y siempre que $a = b = c$, se cumplirá $r_a \blacksquare r_a = r_a$. □

Nótese que las pruebas anteriores corresponden a la simetría y transitividad de la igualdad proposicional, i.e. $(-)^{-1} : (a =_A b) \rightarrow (b =_A a)$ y que $(-\blacksquare-) : (a =_A b) \rightarrow (b =_A c) \rightarrow (a =_A c)$. No obstante, bajo la interpretación homotópica, estas propiedades no son suficientes pues se debe demostrar también el comportamiento como neutro de los lazos $r_a : p \rightsquigarrow p$, la asociatividad de $\blacksquare$ y que los caminos inversos realmente se comportan como inversos bajo $\blacksquare$:

Lema 3 (Estructura ω -grupoide de los tipos igualdad proposicional). *Si $a, b, c, d : A$, $p : a \rightsquigarrow b$, $q : b \rightsquigarrow c$, y $r : c \rightsquigarrow d$, entonces:[‡]*

- i. $p \stackrel{a \rightsquigarrow b}{=} p \blacksquare r_b \quad \text{y} \quad p \stackrel{a \rightsquigarrow b}{=} r_a \blacksquare p.$
- ii. $p^{-1} \blacksquare p \stackrel{b \rightsquigarrow b}{=} r_b \quad \text{y} \quad p \blacksquare p^{-1} \stackrel{a \rightsquigarrow a}{=} r_a.$
- iii. $(p^{-1})^{-1} \stackrel{a \rightsquigarrow b}{=} p.$

[‡]Nótese que las igualdades enunciadas en el lema son igualdades proposicionales.

$$\text{iv. } p \blacksquare (q \blacksquare r) \stackrel{a \rightsquigarrow d}{=} (p \blacksquare q) \blacksquare r.$$

Demostración. Cada prueba requiere de la inducción sobre caminos:

- i. La hipótesis de inducción dice que $r_a = p = r_b$. En este caso, de la prueba anterior sabemos que $p = r_a = r_a \blacksquare r_a = r_a \blacksquare p$. Por ser definicionalmente iguales $r_p : (p \rightsquigarrow p) = (p \rightsquigarrow r_a \blacksquare p) = (p \stackrel{a \rightsquigarrow b}{=} r_a \blacksquare p)$.
- ii. Por hipótesis inductiva $r_a = p = r_b$. Así, $p^{-1} = r_a^{-1} = r_a$. Por ende $p \blacksquare p^{-1} = r_a$. Invóquese el correspondiente testigo proposicional por =-Intro.
- iii. Sabiendo que $r_a = p$ compútese $(p^{-1})^{-1}$.
- iv. La primera inducción asume que $r = r_a$, la segunda que $q = r_a$ y la tercera, $p = r_a$. Computando lo requerido se obtiene que $r_{r_a} : r_a \rightsquigarrow r_a = r_a \blacksquare (r_a \blacksquare r_a) \rightsquigarrow (r_a \blacksquare r_a) \blacksquare r_a = p \blacksquare (q \blacksquare r) \rightsquigarrow (p \blacksquare q) \blacksquare r$.

□

Otra propiedad satisfactible es que, en términos de la correspondencia Curry-Howard, toda función respete las igualdades proposicionales y, topológicamente, que las funciones en HoTT preserven caminos, es decir, sean continuas:

Lema 4 (Funciones no dependientes se comporten functorialmente). *Dada una función $f : A \rightarrow B$, para cualesquiera $x, y : A$ se cumple que $\text{ap}_f : (x \rightsquigarrow y) \rightarrow (f(x) \rightsquigarrow f(y))$ donde $\text{ap}_f(r_x) = r_{f(x)}$. Además, suponiendo $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, p : x \rightsquigarrow_A y$ y $q : y \rightsquigarrow z$, son válidas las igualdades proposicionales:*

- i. $\text{ap}_f(p \blacksquare q) = \text{ap}_f(p) \blacksquare \text{ap}_f(q)$.
- ii. $\text{ap}_f(p^{-1}) = \text{ap}_f(p)^{-1}$.
- iii. $\text{ap}_g(\text{ap}_f(p)) = \text{ap}_{g \circ f}(p)$.
- iv. $\text{ap}_{\lambda x.x}(p) = p$.

Sería deseable tener el mismo resultado para las funciones dependientes, sin embargo, esto no es posible directamente en teoría de tipos ya que si $f : \prod_{a:A} B(a)$ y $p : x \rightsquigarrow_A y$, entonces $f(x) : B(x)$ mientras que $f(y) : B(y)$. La conclusión se sigue de que no se pueden igualar dos términos de distintos tipos. No obstante, el problema se puede sortear mediante el uso del siguiente lema que, por Curry-Howard, es básicamente la indiscernibilidad de los idénticos.:

Lema 5 (Transporte). *Suponiendo que $x : A \vdash P(x) : \mathcal{U}_i$ y que $p : \text{Id}_A(x, y)$, se puede construir una función $p_* : P(x) \rightarrow P(y)$.*

Demostración. Por inducción $x = y$ y $p = r_x$. Así $\lambda(t : P(x)).t : P(x) \rightarrow P(x)$. Definiendo la función $r_{x*} = p_* := \lambda(t : P(x)).t$ se cumple lo deseado.[§] □

Lema 6 (Del mapeo dependiente). *Para $f : \prod_{a:A} P(a)$ se tiene:*

$$\text{apd}_f : \prod_{p:x \rightsquigarrow_A y} p_*(f(x)) \rightsquigarrow_{P(y)} f(y)$$

Demostración. Asíumase que $x = y$ y que $r_x = p$. Por ende, $p_*(f(x)) = r_{x*}(f(x)) = f(x) = f(y)$ y $r_{f(x)} : f(x) \rightsquigarrow f(x)$. Definiendo $\text{apd}_f := \lambda f.r_{f(x)}$ se concluye lo deseado. □

[§]Cuando el tipo dependiente requiera ser expresado en vez de la notación p_* se suele usar $\text{transport}^P(p, -)$.

5 Extensionalidad de funciones y Univalencia

Con base en la interpretación homotópica y la correspondencia Curry-Howard, sólo resta afirmar lo siguiente “que dos funciones $f, g : \prod_{a:A} B(a)$ sean iguales, i.e. $H : \text{Id}(f, g)$, es equivalente a que coincidan en sus imágenes: $H' : \prod_{x:A} \text{Id}(f(x), g(x))$ ”. Ya que $\text{Id}(f, g)$ representa los caminos entre f y g , sus elementos pueden ser considerados homotopías, y como se espera que este tipo sea equivalente a $\prod_{x:A} \text{Id}(f(x), g(x))$, se llamará a este último el tipo de homotopías y se denotará por:

$$f \sim g := \prod_{x:A} \text{Id}(f(x), g(x))$$

Topológicamente puede parecer erróneo definir al tipo de homotopías como las elecciones de caminos $f(x) \rightsquigarrow g(x)$ para $x : A$, pues esto es insuficiente en la teoría de homotopías clásica. Pero como las funciones en HoTT “son continuas”, esto sí es posible en teoría de tipos-homotopías. Más aun, existen varios modelos para las homotopías, como los conjuntos simpliciales y modelos de Quillen de teoría de categorías, donde la definición recientemente dada es apropiada [6, p. 27].

Con base en esto se puede probar que, en cada tipo de funciones no dependientes $A \rightarrow B$, la homotopía es una relación de equivalencia:

$$\lambda f. \lambda x. r_{f(x)} : \prod_{f:A \rightarrow B} f \sim f$$

$$\lambda f. \lambda g. \lambda (H : f \sim g). \lambda x. (H(x))^{-1} : \prod_{f, g : A \rightarrow B} (f \sim g) \rightarrow (g \sim f)$$

$$\lambda f. \lambda g. \lambda h. \lambda (H_1 : f \sim g). \lambda (H_2 : g \sim h). \lambda x. H_1(x) \cdot H_2(x) : \prod_{f, g, h : A \rightarrow B} (f \sim g) \rightarrow (g \sim h) \rightarrow (f \sim h)$$

Más aun, si las funciones en HoTT actúan functorialmente, las homotopías actúan como transformaciones naturales:

Lema 7. Si $H : f \sim g$ es una homotopía entre $f, g : A \rightarrow B$ y $p : x \rightsquigarrow_A y$ es un camino de $x : A$ a $y : A$, entonces $H(x) \cdot \text{ap}_g(p) \rightsquigarrow \text{ap}_f(p) \cdot H(y)$. Por abuso de notación esta igualdad proposicional se vuelve $H(x) \cdot g(p) =_{\text{Id}(f(x), g(x))} f(p) \cdot H(y)$. En términos de diagramas se puede reescribir como:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{f(p)} & f(y) \\ H(x) \parallel & & \parallel H(y) \\ g(x) & \xrightarrow{g(p)} & g(y) \end{array}$$

Demostración. Por hipótesis de inducción definicionalmente se tiene que $x = y$ y $p = r_x$. De esta manera $H(x) \cdot \text{ap}_g(p) = H(x) \cdot \text{ap}_g(r_x) = H(x) \cdot r_x = H(x) = r_x \cdot H(x) = \text{ap}_f(r_x) \cdot H(x) = \text{ap}_f(p) \cdot H(y)$. La conclusión se sigue al aplicar $=$ -Intro a esta igualdad. $\square$

Propiedades similares a las obtenidas previamente para caminos pueden seguirse obteniendo para las homotopías, no obstante se regresará al problema de la equivalencia entre los dos tipos $\text{Id}(f, g)$ y $\prod_{x:A} \text{Id}(f(x), g(x))$. Por Curry-Howard, para generar un bicondicional, uno nada más debería probar dos implicaciones $\text{Id}(f, g) \rightarrow \prod_{x:A} \text{Id}(f(x), g(x))$ y $\prod_{x:A} \text{Id}(f(x), g(x)) \rightarrow \text{Id}(f, g)$. No

obstante, para preservar la estructura homotópica se requiere definir las *equivalencias homotópicas* que corresponderían al tipo:

$$\sum_{g:B \rightarrow A} (f \circ g \sim (\lambda(y:B).y)) \times (g \circ f \sim (\lambda(x:A).x))$$

Para cada $f : A \rightarrow B$; pero por la naturaleza constructiva de HoTT y el enfoque filosófico en el cual las pruebas previas son relevantes para el trabajo en matemáticas, se opta por una definición alternativa, derogando a este tipo como el tipo de las casi-inversas, i.e.

$$\mathbf{qInv}(f) := \sum_{g:B \rightarrow A} (f \circ g \sim \text{id}_B) \times (g \circ f \sim \text{id}_A)$$

De esta manera se exige que las equivalencias, $\text{isEquiv}(f)$, en HoTT satisfagan las siguientes condiciones:

1. Para cada $f : A \rightarrow B$, son lógicamente equivalentes $\mathbf{qInv}(f)$ e $\text{isEquiv}(f)$. Es decir, si $f : A \rightarrow B$, entonces $\mathbf{qInv}(f) \rightarrow \text{isEquiv}(f)$ e $\text{isEquiv}(f) \rightarrow \mathbf{qInv}(f)$ son válidas.
2. Para cualesquiera $e_1, e_2 : \text{isEquiv}(f)$ se tiene que $\text{Id}(e_1, e_2)$ es satisfecha.

Se verifica por inducción de caminos que el tipo:

$$\text{isEquiv}(f) := \left(\sum_{g:B \rightarrow A} (f \circ g \sim \text{id}_B) \right) \times \left(\sum_{h:B \rightarrow A} (h \circ f \sim \text{id}_A) \right)$$

satisface la primera propiedad. Mientras que la segunda requiere de un poco más de teoría. Con base en todo esto, se puede definir el enunciado de que dos tipos sean equivalentes:

$$A \simeq B := \sum_{f:A \rightarrow B} \text{isEquiv}(f)$$

Es fácil verificar que esta última es una relación de equivalencia. Con todo esto en mente, se esperaría que, para $f, g : \prod_{x:A} B(x)$, hubiese un testigo de la veracidad de:

$$\text{Id}(f, g) \simeq \prod_{x:A} \text{Id}_{B(x)}(f(x), g(x))$$

Una inducción sobre caminos fácilmente construye:

$$\mathbf{hApply} : \text{Id}(f, g) \rightarrow \prod_{x:A} \text{Id}_{B(x)}(f(x), g(x))$$

Pero para la equivalencia se requiere del *axioma de extensionalidad de funciones*:

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x:A} B \quad \Gamma \vdash g : \prod_{x:A} B}{\Gamma \vdash \text{funExt}(f, g) : \text{isEquiv}(\mathbf{hApply}_{f,g})} = \Pi\text{-Ext}$$

Es decir, que para $A, B(x) : \mathcal{U}_i$ con $x : A$ y $f, g : \prod_{x:A} B(x)$, la función $\mathbf{hApply}_{f,g}$ es una equivalencia.

De igual manera que con la extensionalidad de funciones, es posible demostrar en HoTT que:

$$\text{idToEquiv} : \text{Id}_{\mathcal{U}_i}(A, B) \rightarrow A \simeq B$$

Gracias al axioma de univalencia:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \text{univ}(A, B) : \text{isEquiv}(\text{idToEquiv}_{A,B})} = \mathcal{U}\text{-Univ}$$

Se garantiza que idToEquiv es una equivalencia, con lo cual se concluye:

$$\text{Id}_{\mathcal{U}_i}(A, B) \simeq (A \simeq B)$$

Referencias

- [1] Abel, Andreas; Coquand, Thierry, y Peter Dybjer. *Normalization by Evaluation for Martin-Löf Type Theory with Typed Equality Judgements*. Chalmers University of Technology: Göteborg.
- [2] Abel, Andreas; Coquand, Thierry, y Miguel Pagano. *A Modular Type-Checking Algorithm For Type Theory with Singleton Types and Proof Irrelevance*. Göteborg University: Göteborg.
- [3] Awodey, Steve. *Homotopy Type Theory and the Univalent Foundations of Mathematics*. Diciembre 2014. <http://www.andrew.cmu.edu/user/awodey/htt.html> Revisado: Agosto 2015.
- [4] Ladyman, James & Stuart Presnell, *A Primer on Homotopy Type Theory Part I: The formal Type Theory*. Noviembre 2014.
- [5] Martin-Löf, Per E. R. *Intuitionistic Type Theory: Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980*. Bibliopolis: Napoli, 1a edición, 1984.
- [6] Rijke, Egbert. *Homotopy Type Theory*. Master's Thesis, Utrecht University: Ljubljana, Slovenia, July 2012.
- [7] Sommaruga, Giovanni. *HISTORY and Philosophy of Constructive Type Theory*. Springer Science+Business Media: Dordrecht, 1a edición, 2000.
- [8] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study: Princeton, 2013.
- [9] Voevodsky, Vladimir. *The Institute Letter: The origins and motivations of univalent foundations*. Summer 2014:7-9, 2014.

Modelación Matemática

Ajuste de señales con error puntual acotado utilizando métodos de penalización

Jesús Ortiz Bejar
jbejar@fismat.umich.mx

José Ortiz Bejar
job@dep.fie.umich.mx

Martha Leticia Ruiz Zavala
mlruiz@fismat.umich.mx

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Resumen

En el presente trabajo se implementan algoritmos para ajustar señales con ruido. La cantidad de ruido en la señal se puede ajustar mediante el parámetro δ . Los algoritmos propuestos suavizan una señal finita $s = \{s_i\}_{i=1}^n$ de tal manera que el error en cada punto no sea mayor a δ . Formalmente esto implica resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_x \sum_{i=2}^n |x_i - x_{i-1}|^2 + \gamma \sum_{i=1}^n p_i |x_i - \bar{s}|^2 \quad (1)$$

sujeto a las restricciones:

$$|x_i - s_i| \leq \delta \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

donde $\bar{s}$ denota el promedio de la señal original y x es la señal ajustada. En la función objetivo el primer término busca minimizar el tamaño de la señal, el segundo término penaliza la variabilidad en el ajuste con un parámetro de penalización γ y una probabilidad p_i , es decir este parámetro determina que tanta variabilidad estamos dispuestos a permitir en el ajuste, si γ es grande el ajuste tendrá poca variabilidad. Las restricciones garantizan que el error en cada punto siempre sea menor o igual a δ . Este algoritmo está basado en el presentado en [1], sin embargo ha sido modificado de manera sustancial, y el enfoque para la solución y aplicación son mas intuitivos. Adicionalmente en nuestra propuesta se agregó el parámetro de control δ .

El problema anterior se resuelve utilizando dos métodos de optimización clásicos:

- Penalización cuadrática.
- Lagrangiano aumentado.

La idea principal en métodos de penalización es cambiar el problema de minimización original con restricciones, en uno sin restricciones. Esto se logra mediante una función objetivo que penalice la violación de las restricciones.

En todos los casos de prueba el lagrangiano aumentado presenta una convergencia más rápida que el de penalización cuadrática y en la mayoría el error promedio es menor.

Para introducir el problema en la ecuación (1) usamos la norma l_2 , sin embargo también vamos a explorar otras normas que sean robustas a valores atípicos.

1 Introducción

El problema de ajustar una señal consiste en recuperar una señal desconocida $x(t)$ de un conjunto de observaciones $s(t)$ que fueron obtenidas con un cierto error η es decir:

$$s(t) = x(t) + \eta(t) \quad (3)$$

hay diferentes enfoques y métodos para resolver este problema, algunas son técnicas muy simples e intuitivas como el filtro de promedio móvil o el filtro de suavizado exponencial (ver [4],[5]). Otras sin embargo, son más sofisticadas y tienen una base teórica bastante fuerte y en ocasiones compleja como los filtros basados en el análisis de Fourier ([4],[5]) o los que utilizan wavelets (ver [6]), existe otros que están basados en procesos difusivos (ver [1]); es a estos últimos que pertenece el presente trabajo. Sin embargo la complejidad de un método no garantiza un mejor desempeño, por ejemplo en [8] se puede ver que en ocasiones el filtro de promedio móvil muestra mejores resultados que filtros más sofisticados. En general el desempeño óptimo del método que se aplique depende de las características específicas de la señal que se pretende ajustar y las hipótesis que se asumen al momento de diseñar el filtro.

El objetivo en este trabajo es presentar un método que por un lado es muy intuitivo en cuanto a las hipótesis asumidas así como en el diseño, mientras que por otro lado es bastante flexible. Esta flexibilidad es consecuencia de poder variar el parámetro de penalización γ y la cota de error δ . Como resultado se tiene un filtro que es fácil de ajustar para que tenga un buen desempeño sin importar las características de la señal de entrada.

2 El método propuesto

2.1 Formulación del problema

Para el contexto de este problema supondremos siempre que x , s y η son señales discretas de una cierta longitud o número de muestras n y que, estas se pueden representar como vectores, es decir, $x, s, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ una señal (ver figura 2.1) que ha sido muestreada o generada en intervalos de tiempo ϵ , la longitud de la señal esta dada por:

$$l(x) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + \epsilon^2} \quad (4)$$

La idea principal para este método se basa en la suposición, intuitiva, de que dada una señal s como en (4) la señal original x debe tener una longitud mas pequeña, más aún la señal x debe tener una longitud mínima con respecto a cualquier señal s que provenga de ella. Sin embargo no podemos solamente buscar la señal de longitud mínima dada la señal s , ya que la señal promedio

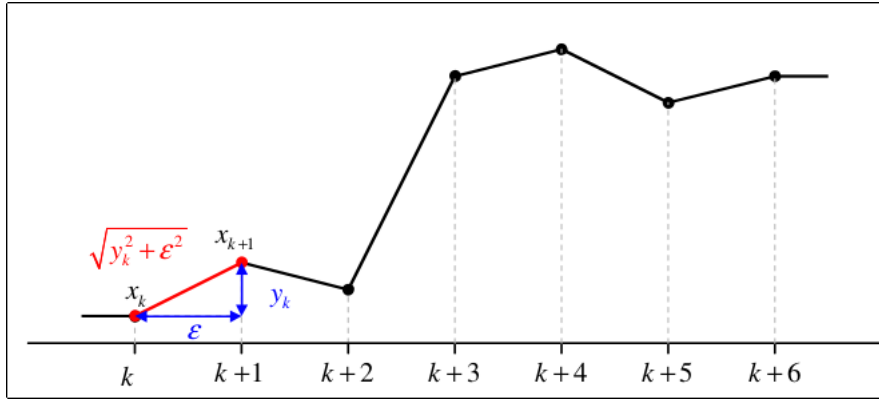


Figura 1: Cálculo de la longitud de una curva discreta [1]

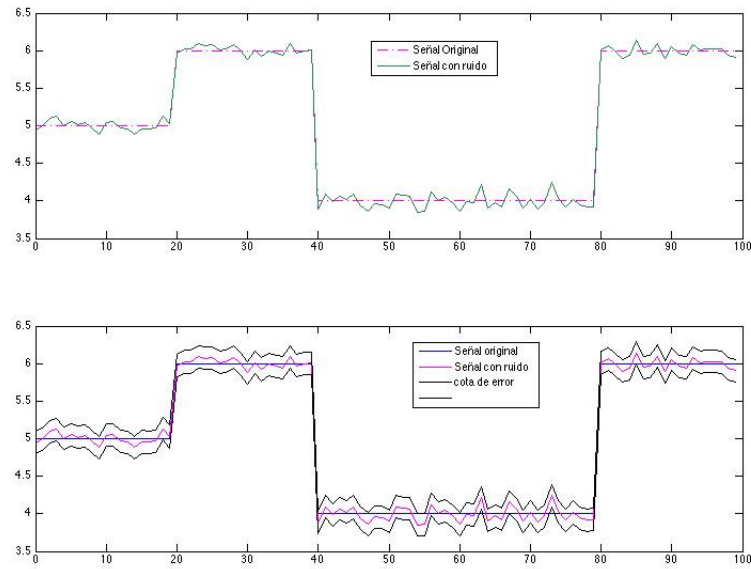


Figura 2: Señal acotada con un error puntual δ

de s es una señal constante que también tiene una longitud mínima pero no tienen nada que ver con x ; así pues se hace necesario incorporar penalizaciones o restricciones sobre s . Estas penalizaciones/restricciones se eligen en base a las características que conozcamos de x , esto nos permite poder aplicar un método de optimización adecuado. En [1] optan por buscar la señal de longitud mínima penalizando la forma en que cambia la aproximación en cada iteración del algoritmo, es aquí donde difiere nuestro método.

En el método propuesto hacemos la suposición de que $|\eta(t)| < \delta$, lo cual es equivalente a $|x_i - s_i| \leq \delta \forall i = 1, 2, \dots, n$, es decir suponemos que podemos determinar que tan grande puede ser el error en cada punto y por otro lado penalizamos la varianza de la aproximación con respecto a la señal con ruido s con un parámetro γ y una probabilidad p_i , es decir, queremos encontrar la señal de longitud mínima que se encuentre dentro de las cotas que se muestran en la figura ?? y además queremos que sea suave en las regiones de interés por eso penalizamos la varianza.

Encontrar la señal de longitud mínima dentro de las cotas negras en la imagen inferior de la

figura 2.2 da lugar al problema de optimización.

$$\min_x \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + \epsilon^2} + \gamma \sum_{i=1}^n p_i |x_i - \bar{s}|^2 \quad (5)$$

sujeto a:

$$|x_i - s_i| \leq \delta \quad i = 1, 2, \dots, n$$

No es difícil ver el parecido que hay entre el problema 1 y el actual. Tomando $\epsilon \approx 0$ se obtiene el problema

$$\min_x \sum_{i=1}^n |x_{i+1} - x_i| + \gamma \sum_{i=1}^n p_i |x_i - \bar{s}|^2 \quad (6)$$

sujeto a:

$$|x_i - s_i| \leq \delta \quad i = 1, 2, \dots, n$$

el cual tiene el mismo mínimo que el problema 1, pero el hecho de que el valor absoluto no sea derivable podría causar problemas al momento de implementar los algoritmos de optimización. Sin embargo se puede cambiar el valor absoluto de la diferencia por el cuadrado y obtenemos 1. Es fácil ver que tanto 1, 5 y 6 tienen mínimos muy cercanos, más aún si definimos una función potencial $\phi(d)$ que sea convexa y derivable como en [2] podemos generalizar el método de la siguiente forma:

$$\min_x \sum_{i=1}^n \phi(x_{i+1} - x_i) + \gamma \sum_{i=1}^n p_i |x_i - \bar{s}|^2 \quad (7)$$

sujeto a:

$$|x_i - s_i| \leq \delta \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde la función de potencial $\phi(d)$ puede ser cualquiera de las siguientes:

$\phi(d)$	Tipo
$\sqrt{d^2 + \beta^2}$	Aproximación l_1
$2(\sqrt{1 + \frac{d^2}{2}} - 1)$	$l_2 - l_1$
d^2	l_2
$\frac{d^2}{2(1+d^2)}$	German-MacClure

Cuadro 1: Funciones de potencial (ver [2])

En el primer potencial tenemos que ajustar el parámetro β que en general, basta con que sea un número cercano a 0 y positivo. Notemos que este potencial es el que mejor representa en teoría el problema planteado en 5, sin embargo, *beta* no tiene el mismo significado que el parámetro ϵ que representa el tamaño del intervalo de tiempo con que la señal fue muestreada o generada. También cabe mencionar que a excepción del potencial $\phi(d) = d^2$ que es el correspondiente a la norma l_2 , los demás son robustos en la presencia de valores atípicos.

Para determinar la probabilidad p_i asociada a la varianza en cada punto podemos calcular el vector $w = \exp((\nabla x)^2)$ donde ∇x es la derivada puntual de la señal $x(t)$ en una dimensión, es decir si $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y cada muestra x_i fue tomada en intervalos de tiempo de tamaño ϵ la derivada en cada punto estará dada por:

$$(\nabla x)_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-2}}{2\epsilon}$$

y con esto podemos definir el vector de probabilidades p como sigue:

$$p = \frac{w}{\|w\|}$$

es justo en este parámetro donde se relaciona este método con las técnicas basadas en procesos de difusión.

2.2 Resolución del problema.

En esta sección se pretende presentar los algoritmos utilizados para resolver el problema 7 sin hacer mayor énfasis en la justificación y deducción de los mismos, para una referencia completa sobre estos temas puede consultar [3].

La formulación general de un problema de optimización con restricciones se puede presentar como sigue:

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{s.a.} \\ c_i(x) &= 0 \quad i \in \mathcal{E} \\ c_i(x) &\geq 0 \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned} \tag{8}$$

En los métodos de penalización lo que se hace es agregar a la función objetivo $f(x)$ del problema 7 una función $P(c_i(x), \mu)$ con $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, esta función depende de las restricciones del problema y penaliza (tiene valores muy altos) los valores de x que violen las restricciones.

En el caso de penalización cuadrática se cambia 7 por varios problemas de la forma:

$$\min_x Q(x, \mu_k) = f(x) + P(c_i(x), \mu_k) \text{ para } \mu_k \uparrow \infty$$

Para el lagrangiano aumentado se toma el lagrangiano de la función original que por definición es:

$$\mathcal{L} = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x)$$

y de nuevo se sustituye el problema por varios problemas de la forma:

$$\min_x \mathcal{L}_A(x, \lambda, \mu_k) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + P(c_i(x), \mu_k) \text{ para } \mu_k \uparrow \infty$$

2.2.1 Penalización cuadrática

La función de penalización más simple que hay es la de penalización cuadrática con la cual se penalizan las restricciones que son violadas. Lo que hacemos es sustituir la función objetivo de 7 por:

$$Q(x; \mu) = f(x) + \frac{\mu}{2} \left[\sum_{i \in \mathcal{E}} [c_i(x)]^2 + \sum_{i \in \mathcal{I}} [\max(0, -c_i(x))]^2 \right] \tag{9}$$

donde a $\mu > 0$ le llamamos parámetro de penalización y además $\mu \uparrow \infty$, es decir, estamos penalizando la violación de las restricciones de manera cuadrática y mientras más nos acercamos al óptimo penalizamos más severamente. Intuitivamente lo que hacemos es construir una sucesión $\{\mu_k\}$ con $\mu \uparrow \infty$ mientras $k \rightarrow \infty$ y buscamos un minimizador x_k de $Q(x; \mu_k)$ para cada k . Notemos que si las restricciones son sólo de igualdad el término de penalización en 8 es suave por lo que, si usamos técnicas de optimización usuales para buscar x_k podemos alcanzar el óptimo en pocos

pasos. En caso de tener restricciones de desigualdad, Q puede ser menos suave que las funciones objetivo y de restricción. Lo anterior causaría problemas a la hora de intentar optimizar Q .

El Algoritmo propuesto quedaría como sigue:

Algoritmo 1 Método de penalización cuadrática

1. Dar $\mu_0 > 0$ una sucesión no negativa $\{\tau_k\}$ con $\tau_k \rightarrow 0$, y un punto inicial x_0^s ;
 2. for $k = 1, 2, \dots$
 - a) Buscar una aproximación del minimizador x_{k+1} de $Q(\cdot, \mu_k)$, inicializando en x_k^s y terminar cuando $\|\nabla_x Q(x, \mu_k)\| \leq \tau_k$;
 - b) if $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \epsilon$
 - i. $sol = x_k$
 - ii. stop
 - c) end (if)
 - d) Elegir nuevo parámetro de penalización $\mu_{k+1} > \mu_k$
 - e) Elegir nuevo punto inicial x_{k+1}^s .
 3. end (for)
-

este algoritmo se comportará bien mientras $c_i(x_k)$ decrezca más rápidamente de lo μ_k crece. Por lo que en general el algoritmo requerirá de muchas iteraciones. Lo anterior hará que sea necesario decrecer lentamente μ_k y para esto una buena idea es hacer $x_{k+1}^s = x_k$.

2.2.2 Lagrangiano aumentado.

Una de las clases generales de métodos de programación no lineal más efectivos es la de los métodos de Lagrangiano Aumentado, también llamados Métodos de los Multiplicadores. Estos métodos se pueden considerar como métodos combinados de funciones de penalización y de dualidad local. En el método de Lagrangiano Aumentado para resolver problemas del tipo 7 se toma la función:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i c_i(x) + \frac{\mu}{2} \left[\sum_{i \in \mathcal{E}} [c_i(x)]^2 + \sum_{i \in \mathcal{I}} [\max(0, -c_i(x))]^2 \right] \quad (10)$$

El Lagrangiano Aumentado se considera como una función de penalización exacta cuando se utiliza el valor adecuado de λ^* y se demuestra en [3] que una buena aproximación de λ^* es:

$$\begin{aligned} \lambda_i^{k+1} &= \lambda_i^k - \mu_k c_i(x_k) \quad i \in \mathcal{E} \\ \lambda_i^{k+1} &= \lambda_i^k - \mu_k \max(0, -c_i(x_k)) \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned} \quad (11)$$

De hecho, para μ suficientemente grande el Lagrangiano será localmente convexo. Por lo que a diferencia del caso de penalización cuadrática aquí nos conviene elegir μ grande y hacerlo crecer rápidamente. El Algoritmo quedaría como sigue:

Algoritmo 2 Método de lagrangiano aumentado

1. Dar $\mu_0 > 0$ una sucesión no negativa $\{\tau_k\}$ con $\tau_k \rightarrow 0$, y un punto inicial x_0^s y $\lambda_0 = 0$;
 2. for $k = 1, 2, \dots$
 - a) Buscar una aproximación del minimizador x_{k+1} de $\mathcal{L}_A(\cdot, \lambda^k, \mu_k)$, inicializando en x_k^s y terminar cuando $\|\nabla_x \mathcal{L}_A(x, \mu_k)\| \leq \tau_k$;
 - b) if $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \epsilon$
 - i. $sol = x_k$
 - ii. stop
 - c) end (if)
 - d) Actualizar el valor de los multiplicadores de Lagrange como se indica en 11
 - e) Elegir nuevo parámetro de penalización $\mu_{k+1} > \mu_k$
 - f) Elegir nuevo punto inicial x_{k+1}^s .
 3. end (for)
-

Como podemos ver el algoritmo es prácticamente el mismo que en el caso de la penalización cuadrática salvo por la actualización de los multiplicadores, sin embargo este algoritmo es más estable.

3 Simulaciones y resultados

Los algoritmos 1 y 2 se implementaron en Matlab y el ruido fue agreda con funciones propias de este software. Para la implementación del problema específico de ajustar una señal $\{s_i\}_{i=1}^n$ con error puntual acotado δ , desarrollado en 7, las funciones de penalización cuadrática y lagrangiano aumentado son las siguientes:

$$\begin{aligned} Q(x; \mu) &= \phi(x) + \gamma \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{s}|^2 + \frac{\mu}{2} \left[\sum_{i \in \mathcal{I}} [\max(0, -(\delta - |x_i - s_i|))]^2 \right] \\ \mathcal{L}_A(x, \lambda, \mu) &= \phi(x) + \gamma \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{s}|^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i (\delta - |x_i - s_i|) + \frac{\mu}{2} \left[\sum_{i=1}^n [\max(0, -(\delta - |x_i - s_i|))]^2 \right] \end{aligned}$$

En donde $\phi(x)$ es uno de los cuatro potenciales de la tabla 1 y γ, δ y β son ajustados manualmente.

3.1 Simulación 1.

En esta primera simulación para una señal triangular de longitud $n = 100$ fijamos $\beta = 0.01$ $\gamma = 0$, $\delta = 0.4$ y le añadimos ruido blanco gaussiano . Obteniendo los siguientes resultados:

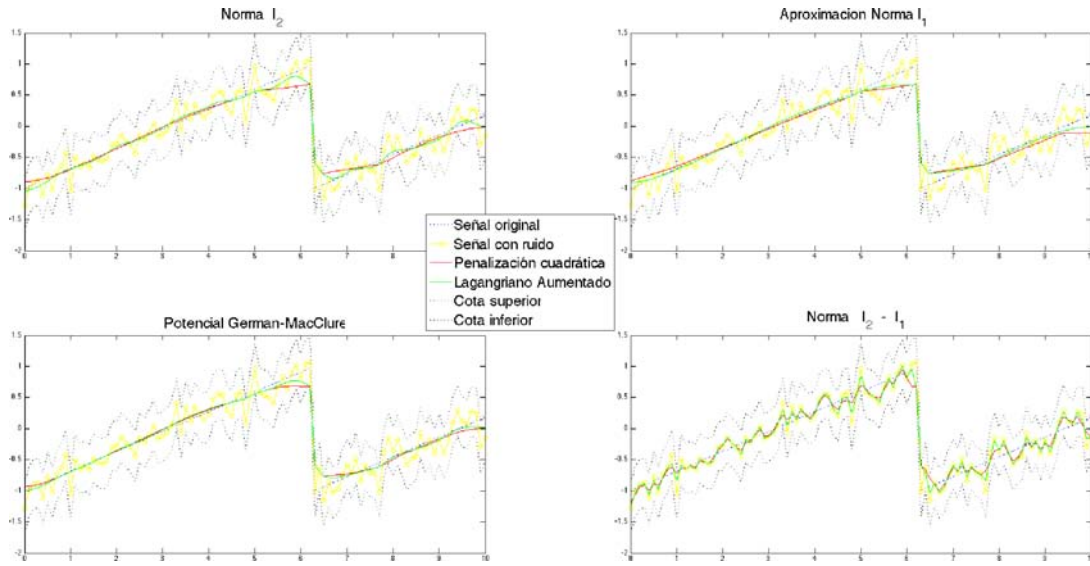
Cuadro 2: Error promedio

	d^2	$\sqrt{d^2 + \beta}$	$\frac{d^2}{2(1+d^2)}$	$2(\sqrt{1 + \frac{d^2}{2}} - 1)$
Penalización cuadrática	0.0655	0.0805	0.056	0.0926
Lagrangiano Aumentado	0.0556	0.0595	0.0476	0.1167

Cuadro 3: Convergencia (iteraciones)

	d^2	$\sqrt{d^2 + \beta}$	$\frac{d^2}{2(1+d^2)}$	$2(\sqrt{1 + \frac{d^2}{2}} - 1)$
Penalización cuadrática	42	40	33	42
Lagrangiano Aumentado	19	18	17	18

Figura 3: Señal Ajustada con los potenciales $\phi(x)$



3.2 Simulación 2.

Tomamos de nuevo una señal triangular de longitud $n = 100$ fijamos $\beta = 0.01$, $\gamma = 0.5$ y $\delta = 0.5$ y le añadimos ruido blanco gaussiano. Obteniendo los siguientes resultados:

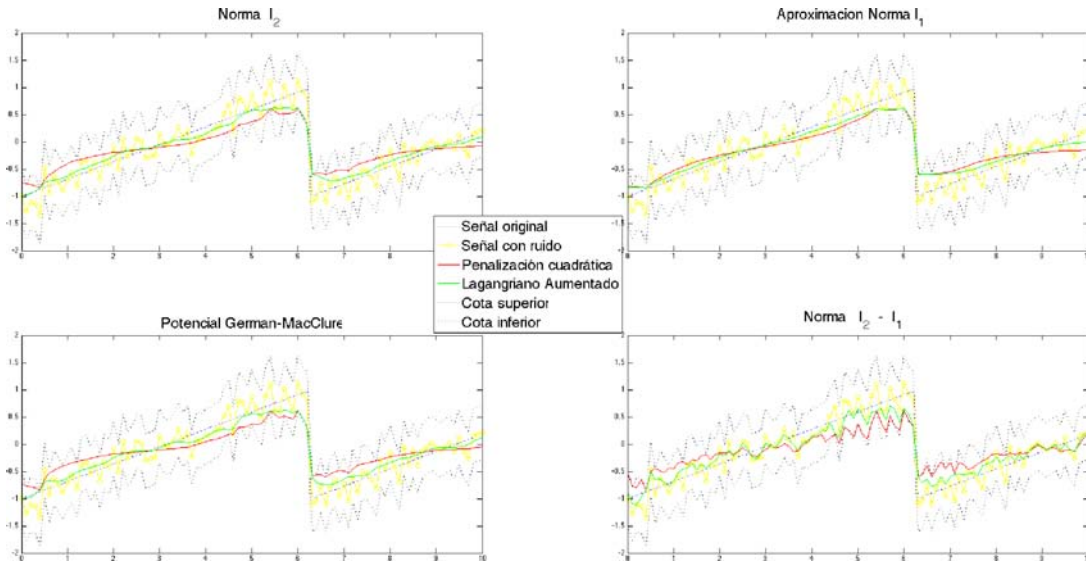
Cuadro 4: Error promedio en

	d^2	$\sqrt{d^2 + \beta}$	$\frac{d^2}{2(1+d^2)}$	$2(\sqrt{1 + \frac{d^2}{2}} - 1)$
Penalización cuadrática	0.1972	0.1645	0.2102	0.2354
Lagrangiano Aumentado	0.099	0.1163	0.1083	0.1357

Cuadro 5: Convergencia (iteraciones)

	d^2	$\sqrt{d^2 + \beta}$	$\frac{d^2}{2(1+d^2)}$	$2(\sqrt{1 + \frac{d^2}{2}} - 1)$
Penalización cuadrática	42	41	41	42
Lagrangiano Aumentado	18	18	18	20

Figura 4: Señal Ajustada con los potenciales $\phi(x)$



3.3 Simulación 3.

Tomamos ahora una señal senoidal de longitud $n = 100$ fijamos $\beta = 0.001$, $\gamma = 0.01$ y $\delta = 0.3$ y le añadimos ruido blanco gaussiano. Obteniendo los siguientes resultados:

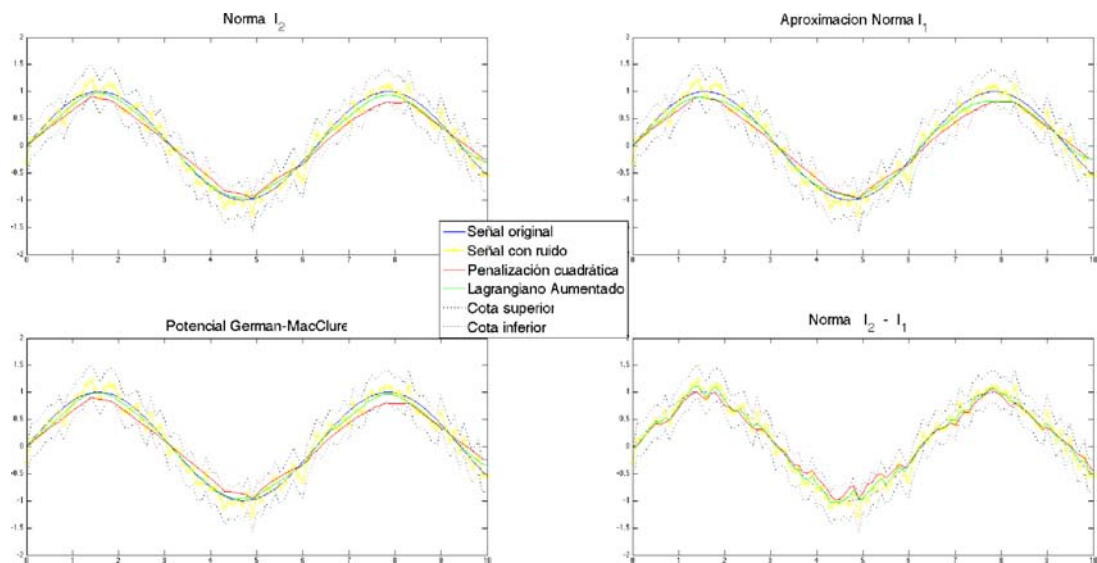
Cuadro 6: Error promedio

	d^2	$\sqrt{d^2 + \beta}$	$\frac{d^2}{2(1+d^2)}$	$2(\sqrt{1 + \frac{d^2}{2}} - 1)$
Penalización cuadrática	0.13	0.1249	0.1328	0.1016
Lagrangiano Aumentado	0.0604	0.0750	0.0538	0.0698

Cuadro 7: Convergencia (iteraciones)

	d^2	$\sqrt{d^2 + \beta}$	$\frac{d^2}{2(1+d^2)}$	$2(\sqrt{1 + \frac{d^2}{2}} - 1)$
Penalización cuadrática	36	38	35	35
Lagrangiano Aumentado	16	19	15	14

Figura 5: Señal Ajustada con los potenciales $\phi(x)$



3.4 Simulación 4.

Tomamos ahora una señal $x = \frac{1}{2}(t - 5)^3$ de longitud $n = 100$ fijamos $\beta = 0.001$, $\gamma = 0.01$ y $\delta = 0.3$ y le añadimos ruido blanco gaussiano. Obteniendo los siguientes resultados:

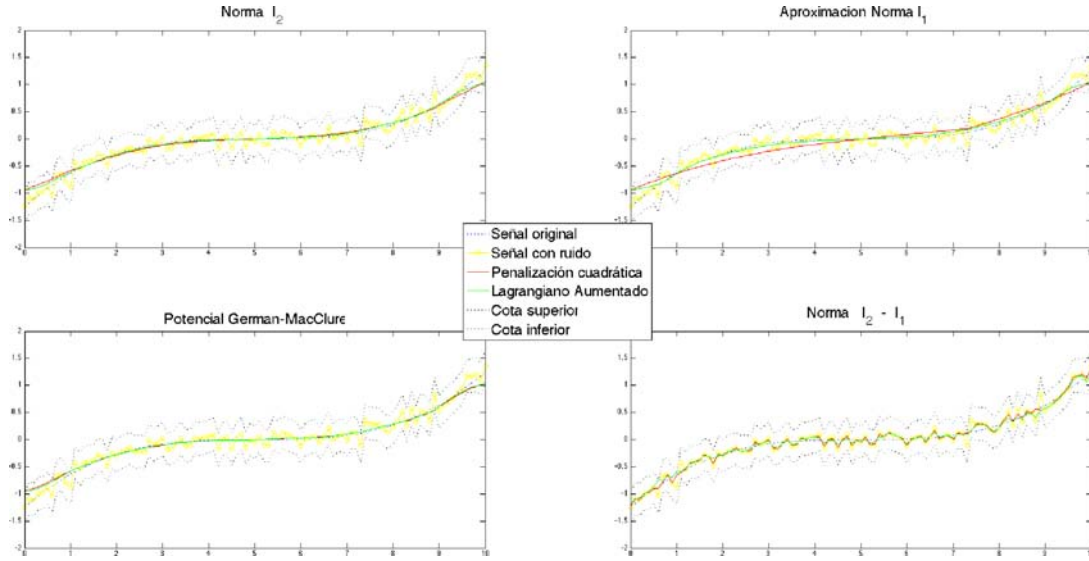
Cuadro 8: Error promedio

	d^2	$\sqrt{d^2 + \beta}$	$\frac{d^2}{2(1+d^2)}$	$2(\sqrt{1 + \frac{d^2}{2}} - 1)$
Penalización cuadrática	0.0469	0.0918	0.0385	0.0568
Lagrangiano Aumentado	0.0338	0.0382	0.0349	0.0487

Cuadro 9: Convergencia (iteraciones)

	d^2	$\sqrt{d^2 + \beta}$	$\frac{d^2}{2(1+d^2)}$	$2(\sqrt{1 + \frac{d^2}{2}} - 1)$
Penalización cuadrática	34	38	9	2
Lagrangiano Aumentado	16	16	13	14

Figura 6: Señal Ajustada con los potenciales $\phi(x)$



4 Conclusiones

1. En todos los casos el algoritmo del Lagrangiano Aumentado presenta una convergencia más rápida y en la mayoría el error promedio es menor dependiendo del potencial $\phi(x)$ que se utilice.
2. Los potenciales que muestran un mejor desempeño son: $\phi(x) = x^2$ y $\phi(x) = \frac{d^2}{2(1+d^2)}$, a pesar de que en teoría la norma l_1 es la que mejor representa el problema de optimización planteado.
3. El parámetro δ controla la región donde la señal será ajustada y siempre es necesario que esta región contenga la señal original para tener un buen ajuste, lo cual es razonable ya que en la práctica es usual saber que tan grande es el ruido en una señal.
4. El parámetro γ controla que tanto se puede corregir la señal ruidosa $s(t)$, para valores muy grandes de γ la solución será alguna de las cotas de la señal con ruido pues no permitimos que haya ninguna variación en la forma de la señal con ruido, para valores muy pequeños de γ o $\gamma = 0$, sucederá que la solución será lineal a trozos dentro de las regiones definidas por δ , como podemos observar en las simulaciones 1 y 2. Esto hace que para señales lineales a trozos sea una buena idea tomar $\gamma = 0$.
5. Para ajustar señales que son derivables es necesario ajustar el parámetro γ para obtener un buen ajuste, de lo contrario podemos obtener soluciones o muy ruidosas o lineales a trozos, como podemos ver en las simulaciones 3 y 4 para el caso de penalización cuadrática.
6. Aunque el método presentado es muy flexible, es necesario conocer muchas características sobre la señal para ajustar los parámetros adecuados y el costo computacional del algoritmo es algo grande ya que en cada iteración hay que resolver un problema de optimización. Sin embargo este método en particular tiene la ventaja de que se puede aplicar a cualquier señal y en base a la intuición y experiencia se puede determinar la forma de la señal o la cantidad de ruido presente en ella.

Referencias

- [1] M. Bronstein, A. Bronstein, Y. Zeevi, Signal and Image Denoising Using Constrained Optimization, Concluding report for the seminar advanced topics in computer vision, April - July 2001
- [2] Ran He, Baogang Hu, Xiaotong Yuan, Liang Wang, M-Estimators and Half-Quadratic Minimization pp 3-11, Robust Recognition via Information Theoretic Learning, Springer International Publishing, ISBN: 978-3-319-07416-0
- [3] Jorge Nocedal y Stephen J. Wright, Numerical optimization, Springer Series in Operations Research, Springer.
- [4] Bernd Jähne. Digital Image Processing. Springer Verlag, Berlin, fifth edition, 2002
- [5] Karl-Dirk Kammeyer and Kristian Kroschel, Digital Signal Processing, Teubner, Stuttgart, fifth edition, 2002.
- [6] Stéphane Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press, San Diego, CA, USA, 1999
- [7] David L. Donoho. Denoising via soft thresholding. IEEE Transactions on Information Theory, 41(3):613–627, 1995.
- [8] Torsten Köhler, Dirk Lorenz, A comparison of denoising methods for one dimensional time series, Technical Report DFG SPP 1114, 2005

An unstructured cellular automata flood inundation model

Gerardo M. Ortigoza | Iris Neri
gortigoza@uv.mx | ineri@uv.mx

Facultad de Ingeniería,
Universidad Veracruzana

Resumen

In this work we propose the use of a cellular automata defined on unstructured triangular grids to simulate flood inundation. This approach allows us to model computational domains with complex geometries (a domain bounded by a polygonal). It still retains the easy implementation of cellular automata and does not present the anisotropy induced by regular grids. Flooding is modeled by using average height/water level in a neighborhood. Water drains in compartments by gravity. Each cell assumes a state an integer the amount of water in dm that the cell contains. Water's drainage is modified by effects of type of soil, infiltration and saturation. Numerical simulations reproduce the qualitative behavior of flooding spread.

1 Introduction

Every year floods around the world devastate enormous areas of rural and urban land and cause extensive damage, both to property and human life. Causing such great losses to countries and their economical growths. The needs to obtain reliable information on flood characteristics and a better understanding on potential hazardous events are increasing as the occurrence of flood events has become a common experience to many countries. Flood simulation and state of the art forecasting tools must be developed further. Such tools not only can help to map potential flood hazards but also can help to develop and design flood mitigation measures: training, planning of flood protection strategies or plans of flooding evacuation emergencies. The main floods spread models can be grouped into: hydrologic and hydraulic. Hydrological models determine the runoff after a rainfall event. The primary output from the hydrologic model is hydrographs at varying locations along the waterways to describe the quantity, rate and timing of stream flow that results from rainfall events. These hydrographs then become a key input into the hydraulic model. The hydraulic model simulates the movement of flood waters through waterway reaches, storage elements, and hydraulic structures. The hydraulic model calculates flood levels and flow

Method	Description	Application	Typical computation time	Outputs	Example models
1D	Solution of the one-dimensional St-Venant equations	Design scale modelling which can be of the order of 10s to 100s of km depending on catchment size	Minutes	Water depth, cross-section average velocity and discharge at each cross-section. Inundation extent if floodplains are part of 1D model, or through horizontal projection of water level.	Mike 11 HEC-RAS ISIS Infoworks RS
1D+	1D plus a storage cell approach to the simulation of floodplain flow.	Design scale modelling which can be of the order of 10s to 100s of km depending on catchment size, also has the potential for broad scale application if used with sparse cross-section data.	Minutes	As for 1D models, plus water levels and inundation extent in floodplain storage cells	Mike 11 HEC-RAS ISIS Infoworks RS
2D-	2D minus the law of conservation of momentum for the floodplain flow.	Broad scale modelling and application where inertial effects are not important.	Hours	Inundation extent water depths	LISFLOOD-FP JFLOW
2D	Solution of the two-dimensional shallow water equations	Design scale modelling of the order of 10s of km. May have the potential for use in broad scale modelling if applied with very coarse grids	Hours or days	Inundation extent water depths Depth-averaged velocities	TUFLOW Mike 21 TELEMAC SOBEK Infoworks-2D
2D+	2D plus a solution for vertical velocities using continuity only.	Predominantly coastal modelling applications where 3D velocity profiles are important. Has also been applied to reach scale river modelling problems in research projects	Days	Inundation extent Water depths 3D velocities	TELEMAC 3D
3D	Solution of the three-dimensional Reynolds averaged	Local predictions of three-dimensional velocity fields in main Navier Stokes equations.	Days channels and floodplains.	Inundation extent Water depths	CFX

Cuadro 1: Classification of inundation models

patterns and also models the complex effects of backwater, overtopping of embankments, waterway confluences, bridge constrictions and other hydraulic structure behaviour. The fundamental mathematical laws that govern the flood propagation are the Navier Stokes equations. For many real cases a solution is practically impossible, so some simplified descriptions are adopted such as shallow water models (two dimensional) and Saint Venant equations for one dimensional [1]. Table 1 summarizes inundation models [4].

From the days of Von Neumann and Ulam who for the first time proposed the concept of cellular automata (CA) until the recent book of Wolfram *A New Kind of Science* [13], the simple structure of the cellular automata has attracted researchers of very diverse disciplines. In the last fifty years, the cellular automata have been subject to rigorous physical and mathematical analysis and new fascinating applications in different branches of natural and social sciences have arisen. The popularity of the cellular automata is due to its simplicity as well as to the enormous potential they hold to model complex systems in spite of being very simple mathematical models. A CA can be seen as a spatially extended decentralized system formed of several individual components (cells). The communication between cells is limited to local interactions; each cell has a specific state which changes with time depending of the states of its local neighbors. The CA have applications that include diverse aspects of science such as: fluid mechanics, environment: pollution, wild fire propagation; biological systems: evolution of the species, growth of populations, behavior of colonies of microorganisms, immune systems, artificial life [5]; socio-economic models, economic urbanism, traffic; models of chemical reactions, pigmentation patterns of the skin, fractals, cryptology, among others. The work is organized as follows: in section 2 we present

the flood inundation model based on cellular automata, cells, states, and rules; section 3 shows some numerical experiments and finally we include some conclusions from this work.

2 A flood inundation model based on an unstructured cellular automata

Cellular automata's popularity is due to their simplicity and to the remarkable potential to model complex systems ([12], [2], [5]). A cellular automaton A is a tuple (d, S, N, f) where d is the dimension of space, S is a finite set of states, N a finite subset of $\mathbb{Z}^d$ is the neighborhood and $f : S^N \rightarrow S$ is the *local rule, or transition function*, of the automaton. A configuration of a cellular automaton is a coloring of the space by S , an element of $S^{\mathbb{Z}^d}$. The global rule $G : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$ of a cellular automaton maps a configuration $c \in S^{\mathbb{Z}^d}$ to the configuration $G(c)$ obtained by applying f uniformly in each cell: for all position $z \in \mathbb{Z}^d$, $G(c)(z) = f(c(z+v_1), \dots, c(z+v_k))$ where $N = \{v_1, \dots, v_k\}$. CA methods have been used for flooding simulations using regular grids ([3], [6] and [11]). Holland [8] and Dunn [7] recommend the use of irregular grid to model virtual landscape in order to reduce the bias induced by rectangular grids; in [11] the presented numerical experiments on unstructured triangular grids show agreement with these observations. Thus, in this work we define a flood inundation model on an unstructured triangular grid. Besides reducing bias in the movement of information and the representation of real-world geometries (bounded straight-line polygonal domains), its finite element mesh structure provides flexibility to identify neighborhoods, visualization and boundary conditions implementations. For our numerical implementation the region of interest is discretized by using a unstructured triangular mesh. Each triangle is considered as a cell and Neumann neighborhoods are assumed. Let us consider a simplified model of cellular automata which evolves according the following assumptions:

1. The spatial domain is discretized using an unstructured triangular grid, each cell is a triangle.
2. Neumann neighborhoods are assumed (a cell and its three neighbors).
3. At each time, each cell can assume an integer value (the water level in dm)
4. If the value of the cell is positive, we proceed to calculate
 - a) w total amount of water inside the neighborhood.
 - b) Using w and the ground elevation of the cells an average water/ground level avg is computed.
 - c) Cells in the neighborhood are sorted by heights. Thus water drains first to the cell with lower height, then to the second higher and so on.
 - d) We run a loop over the sorted cells in the neighborhood, if the height of the cell is lower than avg we proceed to fill the cell until this value. The loop stops when we run out of water w (the total amount of water in the neighborhood).
5. To consider the phenomena of infiltration and soil saturation, we assume that just before doing the water neighborhood calculation if a cell has a positive value, certain amount of water infiltrates into the soil just by reducing the state of the cell. Besides, this value must be added to an array that contains the saturation values of the soil. The amount of infiltrate water that saturates the soil depends of the different types of soil. Once the soil is fully saturated there is no more filtration.

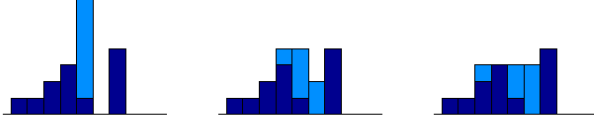


Figura 1: Schematic one-dimensional representation of flooding spread calculation

According to our model water drains by gravity, i.e. the difference in heights between neighboring cells. Figure 1 shows a schematic representation of the flooding spread calculation. In order to estimate the time step, we consider a local drain velocity. Let R be the average radius of the mesh, $vel = \frac{R}{\Delta t}$, $vel = \text{minimum}\{\sqrt{2gh}, \frac{h^{\frac{2}{3}}s^{\frac{1}{2}}}{n}\}$, where h is the water depth, g is the gravity, s is the slope and n is the Manning coefficient.

The adopted computational scheme can be described through the finite volume schematization. Consider the equation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla F = S \quad (1)$$

where W represents the conservative variables, F the flux function and S the source term. Following a two-dimensional cell-centered finite volume scheme, equation 1 is integrated in a volume or grid cell Ω

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} W d\Omega + \int_{\Omega} \nabla F d\Omega = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (2)$$

In our cellular automata model W corresponds to the volume of water stored in a cell, flux F corresponds to the total discharge Q between cell i and the adjacent m cells, per unit width. Thus equation 2 is discretized to give the solution at cell i at time $t + \Delta t$

$$V_i^{t+\Delta t} = V_i^t + \Delta t \sum_{j=1}^m Q_{ij}^t + q^t$$

Δt is the time step, q is the total discharge entering or exiting the domain.

2.1 Numerical Experiments

Let us start showing the code performance considering a simple situation, flood spreading on a flat surface, no infiltration. Let us assume a 2 km x 2 km square domain. Figure 2 shows flooding after 50 time iterations, initial conditions were set to zero, 1 dm of water is introduced to the computational domain through adding this amount of water each time step to a cell at the center of the domain. Figure 3 4 and 5 show flooding on the same computational domain except that left hand side is at 200 mts height and the right hand side at zero height. Water drains by gravity from the left to the right side. The slope is 5.7° .

Figure 3 assumes 20dm initial condition located near the center of the domain, at each time step 1 dm is added just at the same point, we can observe a laminar flow. At 4 the same initial condition 20 dm is assumed but at each time step a 20dm is added at the same point. We observed

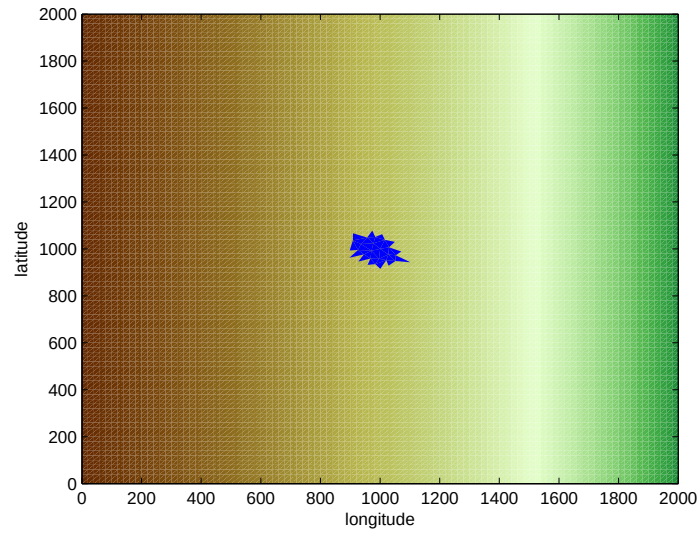


Figure 2: flooding on a flat surface

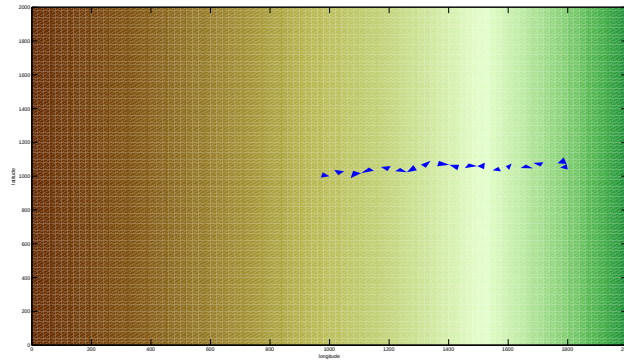


Figure 3: Flooding on a surface with a slope

a transition from laminar to turbulent flow. At 5 the initial condition is assume 40 dm and the same amount is added.

Figures 6, 7, 8 and 9 show a more realistic surface. The domain is 3 km x 3.14 km; it is compounded by a mountain, slope, plain, river surface. There's is also a small square valley $-500 \leq x \leq -400$, $1450 \leq y \leq 1550$ (100mx100m and 20 m depth). This valley is first empty and as the pictures show after some time it is floded. 50, 100 and 150 time iterations are shown.

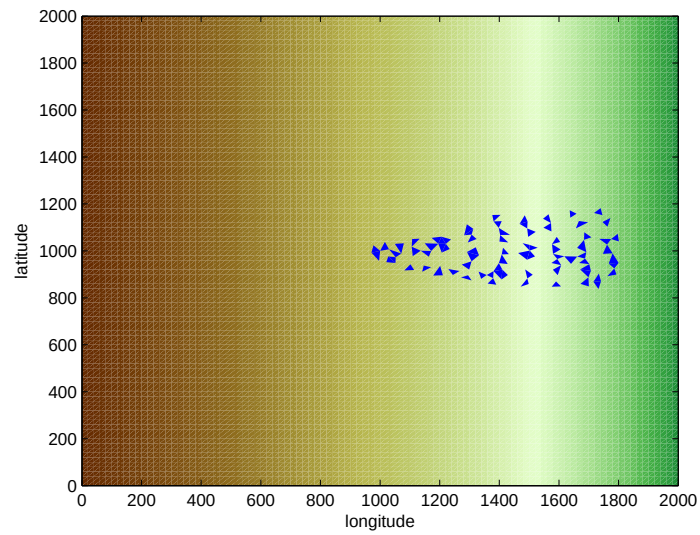


Figura 4: Flooding on a surface with a slope

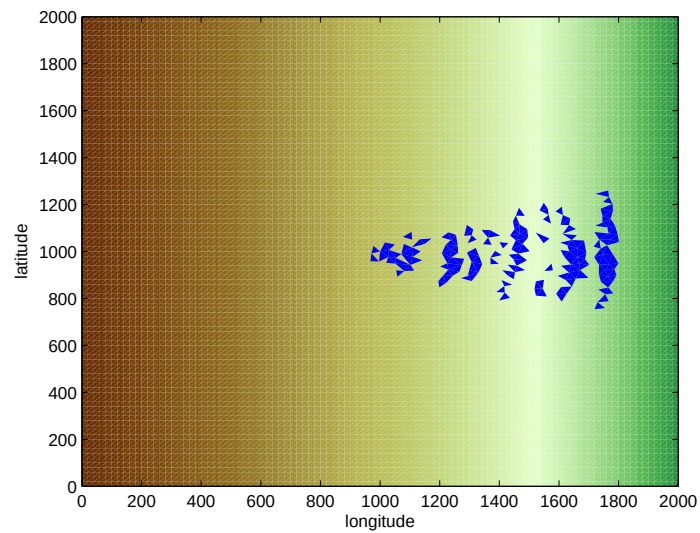


Figura 5: Flooding on a surface with a slope

Figure 10 shows water depth at a control point inside the valley, for 150 time iterations.

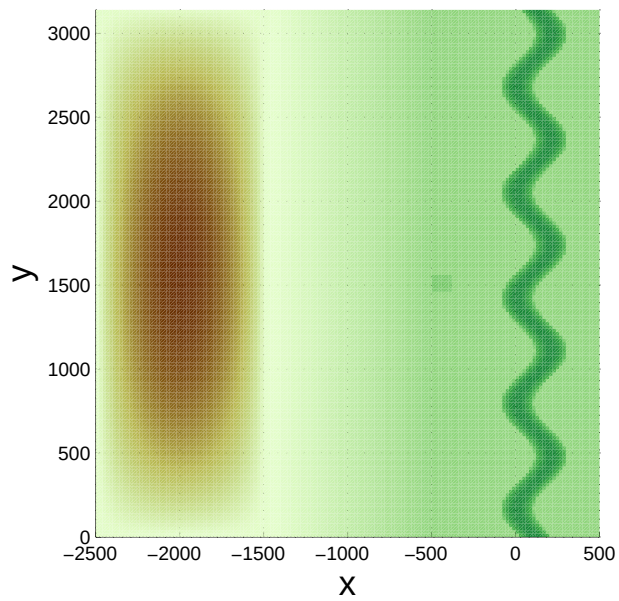


Figura 6: mountain/slope/plain/valley/river) domain

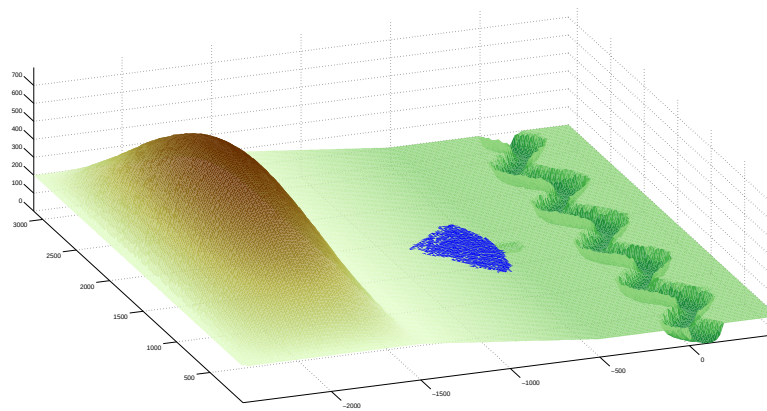


Figura 7: Flooding on a surface (mountain/slope/plains/river) 50 iterations

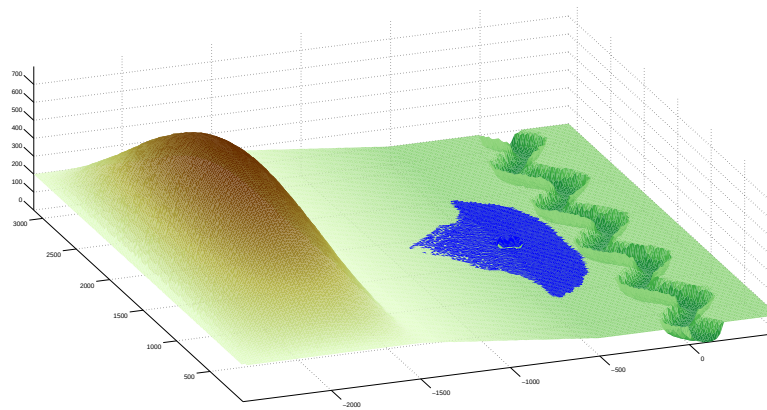


Figura 8: Flooding on a surface (mountain/slope/plains/river) 100 iterations

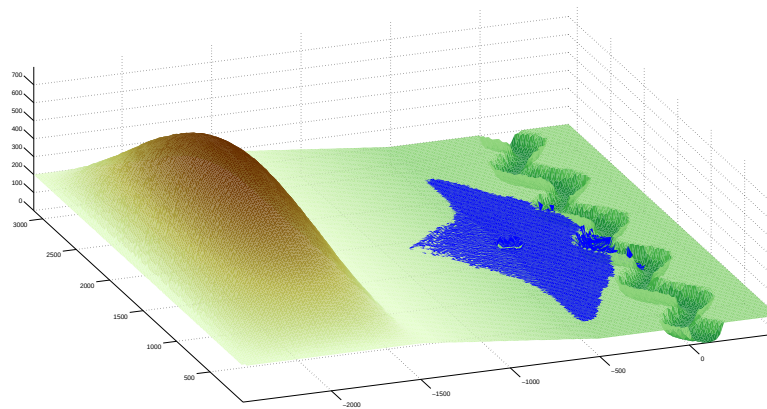


Figura 9: Flooding on a surface (mountain/slope/plains/river) 150 iterations

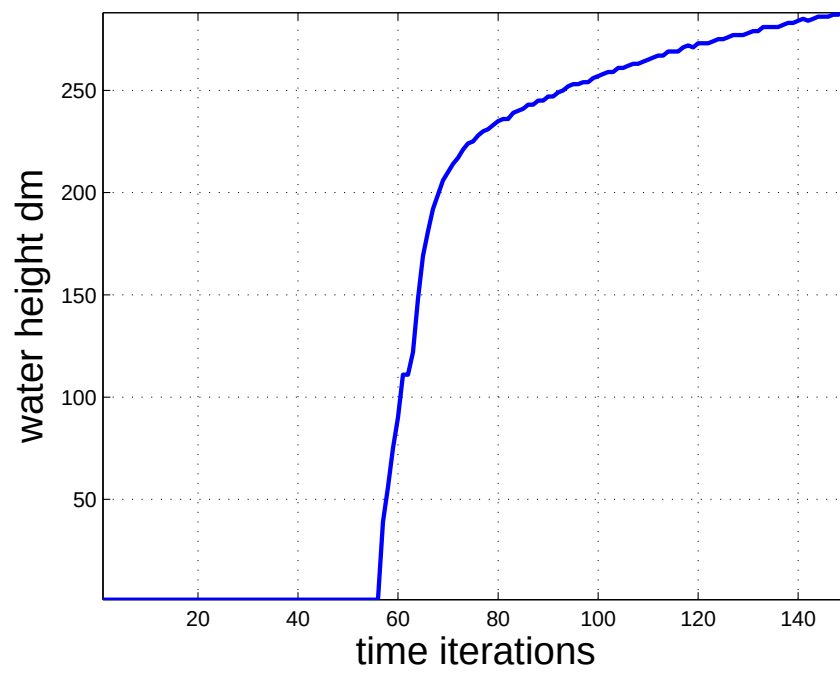


Figura 10: Water depth at a control point 150 iterations

Discussion

Let us make some remarks about the proposed approach of implementing a cellular automata on triangulated grids to model and simulate Flooding. Our preliminary numerical experiments were set in a hypothetical mountain/slope/plains/valley/river and mathematically defined domain, the code is robust so a digital elevation model in file can be read. The mass conservation was tested (the quantity of water that enters the domain remains during the simulation assuming no absorption is present). A further study must be conducted to estimate water infiltration rates in different types of soils, and also the water saturation of soils. The qualitative behavior of flood inundations is reproduced by the numerical experiments. As a future developments experimental data and benchmarks will be used to calibrate the model to simulate flood inundations at the Jamapa basin area [10].

3 Conclusions

We have proposed the use of unstructured triangulated grid cellular automata to model and simulate flood inundations. preliminary numerical experiments reproduce the qualitative behavior of flooding. Mass conservation was tested, waters moves y gravity flooding valleys. As a future research, experimental data and benchmarks will be used to calibrate the model to simulate real flood inundations scenarios.

Referencias

- [1] F. Alcrudo, A state of the art review on mathematical modelling of flood propagation, available at http://www.impact-project.net/cd/papers/print/008_pr_02-05-16_IMPACT_Alcrudo.pdf
- [2] Batty M. , Cities and Complexity: Understanding Cities with Cellular Automata, Agent-Based Models, and Fractals, The MIT Press, 2005.
- [3] Juraj Cirbus and Michal Podhoranyi, Cellular Automata for the Flow Simulations on the Earth Surface, Optimization Computation Process, Appl. Math. Sci. Numb 7, No. 6, pp 2149-2158, 2013.
- [4] Defra Environment Agency, Desktop review of 2D hydraulic modelling packages, Science Report: SC080035, 2009. Available at https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/290901/scho0709bqse-e-e.pdf
- [5] Deutsch A. and Dormann S., Cellular Automaton Modeling Of Biological Pattern Formation: Characterization, Applications, And Analysis, Birkhauser Boston (2005).
- [6] F. Dottori and E. Todini , Developments of a flood inundation model based on the cellular automata approach: Testing different methods to improve model performance, journal Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C , vol. 36, numb.7-8, pp 266 - 280, 2011.
- [7] Dunn A., Hierarchical Cellular Automata Methods, Simulating Complex Systems by Cellular Automata Understanding Complex Systems, Springer Berlin / Heidelberg, 2010.
- [8] Holland E. P., Aegerter J.N., Dytham C and Smith G. C., Landscape as a Model: The Importance of Geometry, PLoS Comput Biol., 3(10): e200, 2007.
- [9] Liu, L. and Liu, Y. and Wang, X. and Yu, D. and Liu, K. and Huang, H. and Hu, G., Developing an effective 2-D urban flood inundation model for city emergency management based on

cellular automata, *Journal of Natural Hazards and Earth System Science*, vol. 15, numb. 3, pp 381-391, 2015.

- [10] Neri Flores, Iris; Escolero Fuentes, Oscar A.; Pérez Torres, Sara; Riquer Trujillo, Guadalupe, *Inundaciones por agua subterránea en zonas costeras. Caso de estudio: acuífero de Veracruz*, *Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana*, vol. 66, num. 2, 2014, pp. 247-261.
- [11] Ortigoza G., *Unstructured Triangular Cellular Automata for Modeling Geographic Spread*, *Journal of Mathematical and Computer Modelling by Elseiver*, vol. 258, pages 520-536, 2015.
- [12] Soot P. and Hoekstra A. G., *Cellular Automata as a Mesoscopic Approach to Model and Simulate Complex Systems*, Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [13] Wolfram S., *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002.

Control óptimo en el manejo de la alimentación en peces en acuicultura

Roger Domínguez May | **Eucario Gasca Leyva**
rdominguez@mda.cinvestav.mx | eucario@mda.cinvestav.mx

CINVESTAV del IPN, Unidad Mérida

Resumen

Se desarrolla un modelo de racionamiento óptimo para el cultivo de peces, desde el punto de vista bioeconómico. El modelo de crecimiento de tipo Bertalanffy modificado considera a la variable de tamaño de ración en la parte anabólica del modelo fisiológico. Se considera algunos costos importantes en el modelo bioeconómico y se da un bosquejo de los resultados, mostrando la trayectoria de la ración óptima y la talla de los organismos.

1 Introducción

Se ha vaticinado mucho, que la recolección de organismos acuáticos a partir de las existencias silvestres, está cada vez más cerca, por alcanzar sus límites máximos por la sobreexplotación [5]. Esta falta de regulación y/o control lo suficientemente sostenible y en respuesta al problema de la falta de alimentos y nutrición mundial, le ha dado a pasos agigantados el crecimiento de la acuicultura como actividad alterna de la pesca. Asimismo la acuicultura también ha sido utilizado en programas de fomento y repoblamiento. Sin embargo, en la acuicultura semi-intensiva o intensiva (comercial), el costo de alimentación representa entre el 40 y 60 % de los costos totales de operación. Esta problemática conlleva al manejo eficiente y utilización del alimento para los organismos. Aunque tal problema es complejo, debido por ejemplo, a la calidad del alimento (contenido de proteína), la cantidad y frecuencia de alimentación y, depende de la especie y las diferentes etapas de vida de los organismos.

Sin embargo, el tamaño óptimo de la ración a suministrar a los organismos en la industria ha sido discutido en varios trabajos ([2], [5], [13], [7]). Sin embargo, estos trabajos han considerado el efecto de la alimentación y de la ración, a través de modelos autónomos simples: logaritmo y potencial. Los cuales han sido considerados de manera independiente del modelo de crecimiento. Estos trabajos han aplicado la teoría de control óptimo para la gestión óptima de los insumos de alimentación. En este trabajo, se ha considerado el modelo de crecimiento de Von Bertalanffy, en base a la fisiología del pez [3], el cual incluye en el componente anabólico a la variable tamaño de ración. El objetivo es encontrar la trayectoria óptima de alimentación en el cultivo del pez. Para dicho propósito se consideró un modelo bioeconómico de tilapia *Oreochromis niloticus* en cultivo (Estudio de caso).

2 Modelo bioeconómico

El modelo bioeconómico de tiempo continuo fue tomado de [6], el cual consta de cuatro submodelos: biológico (mod., de crecimiento), de manejo (densidad) y económico (precio de mercado y costos) descritos brevemente más adelante.

2.1 Submodelo biológico

El modelo de crecimiento considerado en este trabajo (ec. 2.1), se adecua a los principios biológicos de crecimiento, en especial a la de peces [3]. Dicha ecuación asume que el crecimiento del individuo depende de su peso, como la cantidad de ración suministrada. La ración toma valores normalizados entre 0 y 1, es decir, $r=0$, en el caso de no alimentación y $r=1$, alimentación hasta saciedad. La ecuación de crecimiento determinada por los efectos de la talla y de la ración está dada por:

$$\dot{x}(t) = g(x(t), r(t)), \quad g(0) = x_0 \quad (1)$$

Donde $x_0 > 0$ es el peso inicial del individuo, $x(t)$ es la talla del individuo y $r(t)$ es la ración normalizada en el tiempo t , se asume que $g(x(t), r(t))$ es continuamente diferenciable y positiva en el intervalo $[0, \omega] \times [0, 1]$ se cumple que $g(0) = g(\omega, r(\omega)) = 0$ donde $\omega > 0$, es el peso máximo del pez. La forma funcional de la ec. (2.1) está dada por el modelo de V. Bertalanffy (ec. 2.1), obtenido por ajuste estadístico a partir de datos empíricos.

$$g(x, r) = af(r)x^{2/3} - bx \quad (2)$$

En el cual, representa el efecto de la ración normalizada en el crecimiento, el cual tiene la forma funcional:

$$f(r) = r^\alpha e^{\alpha(1-r)} \quad (3)$$

Donde $\alpha > 0$ es un parámetro. La función de ración normalizada(ec. 3.1) indica que el efecto de la alimentación llega a un nivel óptimo cuando se alcanza el valor de $r = 1$.

2.2 Población

A pesar de que hay evidencia de que los individuos en cultivo tienden a crecer de manera heterogénea en tallas ([8], [1], [6]), esto no será tomado en cuenta para este análisis. Sea $\mu \geq 0$ la tasa de mortalidad, la cual se asume independiente de la talla del individuo y es el número inicial de individuos. Por lo tanto, el número de organismos en el tiempo estará dado por el siguiente modelo exponencial,

$$N(t) = N_0 e^{-\mu t} \quad (4)$$

2.3 Ingreso

Es común en los mercados la diferenciación de precio por tallas, por lo que se asumió una función de precios, siguiendo expresiones similares a trabajos previos [14]. Esto es,

$$p(x) = p_{max}(1 - e^{-kx}) \quad (5)$$

Donde p_{max} es el precio máximo del pez por gramo y k es una constante. Por lo tanto, el valor de la biomasa en el tiempo t está dado por,

$$V(t) = p(x)x(t)N(t) \quad (6)$$

2.4 Costos

El modelo de costos considera: c_0 el costo fijo de la empresa durante el período de cultivo, que incluyen el costo de la depreciación de la infraestructura y el costo de los alevines; c_L el costo diario de la mano de obra; y el coste de operación diario relacionado a un individuo de talla, que incluye tanto el coste de manejo y alimentación. Así, el costo total acumulado hasta el día en la granja viene dado por la expresión,

$$C(t) = \int_0^T e^{-it} [f(x(t), r(t))N(t)dt + c_L]dt \quad (7)$$

Donde i es la tasa de descuento de la economía y T es el periodo de cultivo. La función de costes de operación incluye las variables con mayor incidencia, estas son, el costo de la energía $C_e(x, r)$ y el costo de alimento balanceado $C_f(x, r)$. Por tanto,

$$f(x, r) = C_e(x, r) + C_f(x, r) \quad (8)$$

El costo de la energía fue calculado de la relación directa entre la talla del pez y de los diferentes regímenes de alimentación a saciedad, y posteriormente calibrado para cada racionamiento a partir de la cantidad de nitrógeno amoniacal y el recambio de agua requeridos [14]. Estas relaciones están dadas por $C_e(x, r) = xE(r)$ y $E(r) = e_1r^2 + e_2r - e_3$, donde e_1, e_2 y e_3 son parámetros de ajuste y E es el costo de energía del recambio y aireación por g de tilapia por día (24 h). Este depende positivamente del tamaño de la ración, de forma que a mayor ración mayor consumo de energía.

Los costes de alimentación se calculan a partir del índice de conversión alimenticia, que indica la cantidad de alimento necesaria para incrementar una unidad el peso del individuo. Así, $C_f(x, r) = c_f(x, r)g(x, r)$, Donde c_f es el coste por kg del alimento. El índice de conversión está influenciado por una serie de factores, como el peso de individuo, racionamiento, temperatura y densidad. Por simplicidad, el modelo sólo incorpora el peso individual y el racionamiento. Una expresión funcional logística para el índice de conversión se ajustó adecuadamente a los datos empíricos, esta es,

$$g(x, r) = \xi_1(1 + \xi_2e^{-\xi_3xr})^{-1} \quad (9)$$

Donde ξ_1, ξ_2 y ξ_3 son parámetros de ajuste.

3 Formulación del problema

Se asume que el precio $p(x)$ (ec. 2.5) es creciente con la talla $p_x(x) > 0$ y convexa $p_{xx}(x) \geq 0$. El problema del acuicultor es hallar la trayectoria óptima de la ración que maximice el valor actual de los beneficios generados por la actividad. Asumiendo un sólo ciclo de cultivo y después de hacer algunas manipulaciones algebraicas de las funciones del modelo bioeconómico mostrado arriba, presentamos el siguiente problema de control óptimo:

$$\max_{r(t)} \Pi(t) = p(x(T))x(T)e^{-ht} - \frac{c_0}{N_0} - \int_0^T e^{-ht} [x(t)E(r(t)) + c_f\xi(x(t), r(t))g(x(t), r(t)) + \frac{c_L}{N_0}e^{\mu t}] dt \quad (10)$$

$$\text{s.a. } \dot{x} = g(x(t), r(t)) \quad (11)$$

$$x(T) \text{ Fijo}; T \text{ Fijo} \quad (12)$$

$$0 \leq r(t) \leq 1 \quad (13)$$

En la ec. (3.2), $\dot{x}$ es la variable de estado y depende de la variable de control o de decisión $r(t)$. La solución de la ec. (3.2) permitirá encontrar la trayectoria de la ración óptima de . acuerdo a distintas razones iniciales de cultivo, r_0 .

4 Solución analítica

Para hallar la solución analítica, se construyó el Lagrangeano generalizado de valor corriente, similar a [9] para hallar la solución al problema (3.1):

$$L_C = -[x(t)E(r(t)) + c_f \xi(x(t), r(t))g(x(t), r(t)) + \frac{c_L}{N_0} e^{\mu t}] + \lambda_C(t)g(x, r) + \mu_1(t)r + \mu_2(t)(1 - r) \quad (14)$$

Donde $\lambda_C(t)$ es la variable de coestado (también llamado variable adjunta o precio sombra en economía), mientras que μ_1 y $\mu_2(t)$ son multiplicadores no negativos de Lagrange. Aplicando el principio del máximo de Pontriagyn [11] se debe cumplir que:

$$\frac{\partial L_C}{\partial r} = 0 \quad (15)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial L_C}{\partial \lambda_C} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \lambda_C}{\partial t} = -\frac{\partial L_C}{\partial x} + h\lambda_C(t) \quad (17)$$

Considerando $\mu_1(t)r(t)$ y $\mu_2(t)r(t) = 0$ y despejando $\lambda_C(t)$ de la Ec. (4.2) se obtiene,

$$\lambda_C(t) = \frac{x E(r) + c_f(\xi_r g + \xi g_r)}{g_r} \quad (18)$$

Denotando el numerador de la ecuación anterior como φ y derivándola respecto a t, se tiene que:

$$\frac{d\lambda_C(t)}{dt} = \frac{\frac{d\varphi}{dt} g_r - \varphi \frac{dg_r}{dt}}{g_r^2} \quad (19)$$

Pero la derivada de φ está dada por:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{x} E_r + x E_{rr} \dot{r} + c_f \left\{ \frac{d\xi_r}{dt} g + \xi_r \frac{dg}{dt} + \frac{d\xi}{dt} g_r + \xi \frac{dg_r}{dt} \right\} \quad (20)$$

Sustituyendo las derivadas de $\frac{d\xi_r}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{d\xi}{dt}$ y $\frac{dg_r}{dt}$ en la ecuación anterior se obtiene,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{x} E_r + x E_{rr} \dot{r} + c_f \{ (\xi_{rx} \dot{x} + \xi_{rr} \dot{r}) g + \xi_r (g_x \dot{x} + g_r \dot{r}) + (\xi_x \dot{x} + \xi_r \dot{r}) g_r + \xi (g_{rx} \dot{x} + g_{rr} \dot{r}) \} \quad (21)$$

De esta última ecuación factorizamos los términos que contengan $\dot{x}$ y $\dot{r}$, entonces nos queda:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{x} \{ E_r + c_f [\xi_{rx} g + \xi_r g_x + \xi_x g_r + x i g_{rx}] \} + \dot{r} \{ x E_{rr} + c_f [\xi_{rr} g + \xi_r g_r + \xi_r g_r + \xi g_{rr}] \} \quad (22)$$

De la ecuación anterior denotemos a $\phi_1 = E_r + c_f \xi_{rx} g + c_f \xi_r g_x + c_f \xi_x g_r + c_f \xi g_{rx}$ y $\phi_2 = x E_{rr} + c_f \xi_{rr} g + 2c_f \xi_r g_r + c_f x i g_{rr}$, el cual de manera compacta queda como $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{x} \phi_1 + \dot{r} \phi_2$. Y luego, sustituyendo $\dot{\varphi}$ y $\dot{g}_r$ en la ecuación (4.6) tenemos:

$$\frac{d\lambda_C(t)}{dt} = \dot{x}\phi_1 + \dot{r}\phi_2 \quad (23)$$

Sustituyendo $\frac{d\varphi}{dt}$ y $\frac{d g_r}{dt}$ en la ecuación (4.6), tenemos:

$$\frac{d\lambda_C}{dt} = \frac{(\dot{x}\phi_1 + \dot{r}\phi_2)g_r - \phi(g_{rx}g_r + g_{rr}\dot{r})}{g_r^2} = \frac{\dot{x}(\phi_1g_r - \phi g_{rx}) + \dot{r}(\phi_2g_r - \phi g_{rr})}{g_r^2} \quad (24)$$

Expandiendo las variables de estado y coestado (ecuaciones 4.3 y 4.4) se tiene:

$$\dot{x} = g \quad (25)$$

$$\dot{\lambda}_C = E(r) + c_f(\xi_x g + \xi g_x)(g_x - h) \quad (26)$$

Denotando ahora de esta última ecuación $\theta = E(r) + c_f(\xi_x g + \xi g_x)$ y sustituyendo θ junto con las ecuaciones (4.5) y (4.11) en (4.13), obtenemos:

$$\frac{\dot{x}(\psi_1g_r - \phi g_{rx}) + \dot{r}(\psi_2g_r - \phi g_{rr})}{g_r^2} = \theta - \frac{\phi}{g_r}(g_x - h) \quad (27)$$

Despejando a $\dot{r}$ (marginal de la tasa de racionamiento óptimo), queda:

$$\dot{r} = \frac{g_r(g_r\theta - \varphi g_x) - \dot{x}(\psi_1g_r - \varphi g_{rx})}{\psi_2g_r - \varphi g_{rr}} \quad (28)$$

Siempre que el denominador de la ecuación anterior sea distinto de cero. Sin embargo, $\dot{r}$ depende de las variables x y r , lo podemos escribir como una función $R(x, r)$. De este modo que para conocer las soluciones de las rutas óptimas de alimentación, debemos resolver al menos numéricamente el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, r), \\ \dot{r} &= R(x, r), \end{aligned} \quad (29)$$

Adicionalmente para resolver el sistema expuesto arriba, debemos conocer algunas condiciones necesarias para x y r , y en este caso, se conoce x_0 y asumimos que el periodo de cultivo T y las raciones iniciales r_0 , también se conocen. Esta última suposición es válida ya que los productores, en general siguen una tasa constante de racionamiento durante todo el periodo de cultivo.

4.1 Datos y supuestos del modelo

En siguientes tablas (1) y (2) se encuentra los parámetros que fueron usados para las simulaciones numéricas. Se usaron datos biológicos y económicos del cultivo de tilapia en el estado de Yucatán, Méx. Las simulaciones fueron generadas en matlab, usando pplane8.

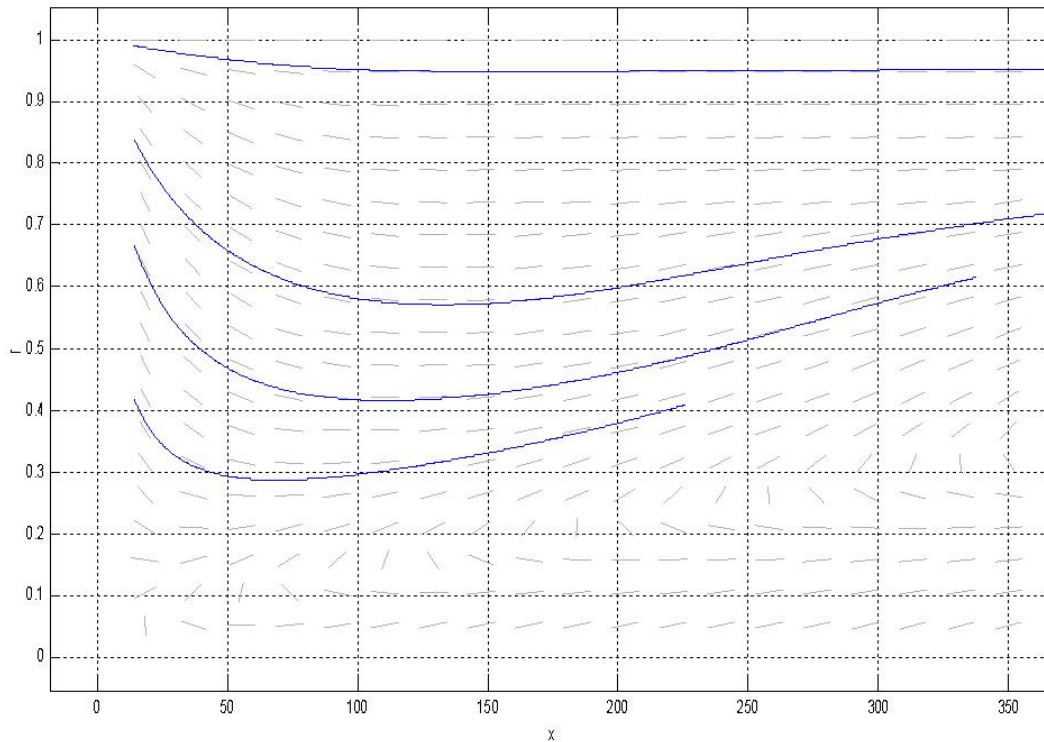
5 Solución numérica

Los resultados obtenidos del racionamiento óptimo en este trabajo para tilapia, han sido similares a los obtenidos por [9]. El cual es mostrado en la figura 1. Dichas tendencias, muestran que el tamaño de la ración ofrecida a los organismos, disminuye conforme el pez crece, es decir, a tallas más grandes, el racionamiento requerido por los organismos, es menos.

<i>Parámetro</i>	<i>Descripción</i>	<i>Valor</i>
N_0	Número inicial de individuos	11,000
μ	Tasa de mortalidad diaria	0.00044
ρ	Tasa de descuento diario	0.00194
c_0	Costos fijos	1,232.31
c_L	Costo de mano de obra	4
e_1	Parámetros de la función de costo de energía	0.00563
e_2		0.00182
e_3		0.00044
c_f	Costo de alimento	0.68
p_{max}	Precio máximo	2.15
k	Cambio instantáneo de precio	0.0079

Cuadro 1: Datos, parámetros y suposiciones del modelo

Figura 1.



6 Discusión y conclusión

La simulación del modelo genera resultados similares a otros trabajos previos, sin embargo, es necesario la implementación de un algoritmo robusto para determinar por ejemplo el tiempo óptimo de cosecha, la talla óptima y otras condiciones terminales de interés.

Referencias

- [1] M. E. Araneda, J. M. Hernández, E. Gasca-Leyva, Optimal harvesting time of farmed aquatic populations with nonlinear size heterogeneous growth, *Natural Resource Modeling* 24, 4 (2011), 477–513.

- [2] R. Arnason, Optimal feeding schedules and harvesting time in aquaculture, *Marine Resource Economics* 7(1990), 15–35.
- [3] J.R. Brett, *Environmental factors and growth*. In : *Fish Physiology* vol. VIII (eds W.S. Hoar, D.J. Randall, & J.R. Brett). Academic Press, London, UK,(1979), pp. 559–667.
- [4] O.J. Cacho, H. Kinnucan, and U. Hatch, Optimal control of fish growth, *American Journal of Agricultural Economics* 73,1 (1991), 174–183.
- [5] J. L. Cifuentes-Lemus, M. P. Torres-García, M. Frías-Mondragón, *El océano y sus recursos XI, Acuicultura*. 2a Edición. México: Fondo de Cultura Económica, (1997).
- [6] R. Domínguez-May, J. M. Hernández , E. Gasca-Leyva, G. R. Poot-López , *EFFECT OF RATION AND SIZE HETEROGENEITY ON HARVEST TIME: TILAPIA CULTURE IN YUCATAN, MEXICO*, *Aquaculture Economics & Management* 15, 4 (2011), 278–301.
- [7] A. Esmaeli, Optimal Feeding for Shrimp Culture in the South of Iran, *North American Journal of Aquaculture* 67 (2005), 155–159.
- [8] E. Gasca-Leyva, J.M. Hernández, V.M. Veliov , *Optimal harvesting time in a size-heterogeneous population*, *Ecological Modelling* 210 (2008), 161–168.
- [9] J.M. Hernández, M. León-Santana, C.J. León , *The role of the water temperature in the optimal management of marine aquaculture*, *European Journal of Operational Research* 181 (2008), 872–886.
- [10] J.A. Mistiaen, I. Strand, Optimal feeding and harvest time for fish with weight-dependent prices, *Marine Resource Economics* 13 (1999), 231–246.
- [11] D. Léonard, N. Van Long *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press, (1992).
- [12] G.R. Poot-López, E. Gasca-Leyva, *Partial substitution of balanced feed by chaya leaves in Nile tilapia production: a bioeconomic analysis*. In: *Proceedings of the Fourteenth Biennial Conference of the International Institute of Fisheries Economics & Trade*, July 22–25, 2008, Nha Trang, Vietnam: *Achieving a Sustainable Future: Managing Aquaculture, Fishing, Trade and Development*. Compiled by Ann L. Shriver. International Institute of Fisheries Economics & Trade, Corvallis, Oregon, USA.(2008), 12 pages.

Desarrollo de los modelos matemáticos logístico, Gompertz y Richard en la descripción de la epidemia del VIH/SIDA en México

Juan Martínez Ortiz
jmartinez_ortiz@yahoo.com

Leticia Adriana Ramírez Hernández
leticiaadrianaramirez@hotmail.com

Mayra Guadalupe García Reyna
naketa99@hotmail.com

Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas

Resumen

El objetivo del presente trabajo es modelar la curva de crecimiento de los casos diagnosticados de SIDA en México de 1983 a 2012 por medio de los modelos logístico, Gompertz y Richard, así como discutir la eficiencia de estos modelos para el seguimiento de la epidemia. Para la comparación de los tres modelos sigmoidales aplicados a la epidemia del VIH/SIDA, se analizaron los datos de 1983 a 2012, reportados por el manual de Vigilancia Epidemiológica de casos de VIH/SIDA en México. Registro Nacional de Casos de SIDA. Actualización al cierre de 2013 del Centro Nacional para la Prevención y Control del VIH/SIDA (CENSIDA). La investigación arroja que el modelo de Gompertz de tres parámetros es el que presenta mayor correlación de datos, seguido del modelo logístico, mientras el de Richard presentó divergencia con los datos experimentales.

1 Antecedentes

Para ciertos fenómenos, la gráfica de datos experimentales adopta la forma de una “S” elongada, caracterizándose la curva por una pendiente inicial pequeña, seguida por un periodo en el que la pendiente crece con rapidez para después decrecer rápidamente y tender a cero. Son muy variados los fenómenos que siguen semejante comportamiento, tal es el caso del crecimiento de una población de bacterias, crecimiento del tamaño de cierto tipo de tumores cancerígenos, estadísticas de producción, crecimiento de organismos, entre otros. Al grupo de modelos matemáticos que simulan el comportamiento descrito se conoce como sigmoidales.

Para el empleo de estos modelos es necesario que los valores de la variable independiente estén espaciados uniformemente. Por ejemplo, los datos pueden aparecer como 1983, 1984, 1985, etc., a los cuales se les asignan los valores de 1, 2, 3, etc.

En este trabajo se emplean tres modelos sigmoidales para describir la curva de crecimiento de los casos diagnosticados de SIDA en México, a saber los modelos logístico, de Gompertz y Richard.

En 1938, el matemático inglés Pierre Francois Verhulst publicó la ecuación que se conoce hoy en día como *logística*. El modelo logístico es utilizado en estudios predictivos en donde se observa que a mayor población menor tasa de crecimiento. En estos casos, en un inicio la población crece rápido y luego pierde esa capacidad al volverse numerosa, alcanzando un estado de equilibrio.

En 1825, el matemático inglés Benjamín Gompertz (Gompertz, 1825) propuso un modelo demográfico que se basa en la suposición *a priori* de que la resistencia de una persona a la muerte disminuye a medida que aumenta su edad. Hoy en día, la versatilidad del modelo de Gompertz ha permitido su empleo en la descripción de diversos procesos de crecimiento limitado, por ejemplo en demografía (Bongaards, 2005), biología (Wheldon, 1988; Whiting & Buchanan, 1994), medicina (Bajzer & Vuk-Pavlovic, 2000), en particular en el crecimiento de organismo, órganos, tejidos y tumores (Weldon, 1988; Bejzer & Vuk-Pavlovic, 2000; Norton, 2005; Laird, 1964). Además, se ha postulado la existencia de un carácter dual, fractal y estocástico, de la ecuación de Gompertz (Waliszewski & Konarski, 2002, 2003; Izquierdo-Kulich & Nieto-Villar, 2008). La ecuación que define el modelo contiene tres parámetros que se determinan empíricamente de acuerdo al fenómeno de estudio.

El modelo de Richard es un modelo que es considerado como un flexible debido a que posee un parámetro de forma que le permite ajustar curvas con mayor precisión. Este parámetro no tiene significación biológica y genera ciertas dificultades al modelar datos de campo reales.

2 La epidemia VIH/SIDA

El Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida (SIDA) es la fase final de la enfermedad producida por el Virus de Inmunodeficiencia Humana (VIH). Hacia 1981 en los Estados Unidos de América fueron dados a conocer los primeros diagnósticos de SIDA en el mundo, y desde entonces se ha convertido en una de las más peligrosas epidemias que se hayan conocido. Según el Centro de Control de Enfermedades de Atlanta (CDC) se define el SIDA en un adolescente mayor de 13 años como la presencia de una de las condiciones indicativas de severa inmunosupresión asociadas a la infección de VIH, como lo es la *Pneumocystis carinii* pneumonia, o a la infección de VIH en una persona con conteo de células $CD4 + T$ menor a 2000 células/ mm^3 de sangre. Para niños menores de 13 años la definición incluye recurrentes infecciones y lymphoid interstitial pnumonitis. Esta definición ha sido útil epidemiológicamente para cuantificar y monitorear la epidemia del VIH (Córdova et al., 2009).

Los primeros casos de SIDA se diagnosticaron en Estados Unidos en 1981, y al cabo de pocos meses se diagnosticaron en otros países, incluyendo México. Los primeros casos de SIDA en México fueron diagnosticados en el año 1983 (Ponce de León et al., 1988; Stanislawski et al., 1984). Desde su aparición, la epidemia del VIH/SIDA ha cobrado la vida de unas 36 millones de personas en el mundo, se calcula que solo en 2012 murieron 1.6 millones.

A mediados de los años ochenta, se determinó que la epidemia VIH/SIDA era un factor de riesgo para el desarrollo de países que la padecían y de seguridad mundial. Es por ello que ha

sido tema permanente en la Asamblea General de las Naciones Unidas, así como en las reuniones sobre desarrollo y seguridad mundial. En México, las estimaciones realizadas por el Programa Conjunto de las Naciones Unidas sobre el VIH/SIDA y CENSIDA, indican que la prevalencia de SIDA, después de que alcanzó un crecimiento máximo en 1999 y una estabilización entre 2000 y 2003, comenzó a descender en 2004.

Los antecedentes mencionados señalan que nos enfrentamos a un problema de gran envergadura y cualquier esfuerzo para entender la dinámica de la epidemia junto a trabajos de carácter epidemiológicos que permiten tener control de la misma, redundará en tener eficientes políticas de salud, como tratamiento, monitoreo y control de los pacientes con VIH.

3 LOS MODELOS

La ecuación de Verhulst o Logística (Ricker W. E., 1979) tiene la forma

$$P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right), \quad r \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathbb{R},$$

cuya familia de soluciones está dada por

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R},$$

donde A , K , y r son parámetros matemáticos, t es el tiempo y $P(t)$ es el tamaño de la población.

La ecuación de Gompertz (Gompertz, 1825) tiene la forma

$$P'(t) = rP(t) \ln \left(\frac{K}{P(t)} \right), \quad r \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathbb{R},$$

cuya familia de soluciones tiene la forma

$$P(t) = Ke^{-Ae^{-rt}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R},$$

donde K , A y r son parámetros matemáticos. K se denomina capacidad de carga. t es tiempo y $P(t)$ es el tamaño de la población.

La función de Richard (Richard, 1959) tiene la forma

$$P(t) = a\{1 + b \exp[k(\tau - t)]\}^{-1/b},$$

donde a , b , k , τ son parámetros, t es el tiempo.

Es factible para determinación de los parámetros de los tres modelos dividir el dominio en tres regiones. Annadurai (Annadurai et al, 2000) se exponen el algoritmo para ello. Nosotros realizamos el ajuste de curvas por medio de software CurveExpert 2.20.

4 OBTENCIÓN DE DATOS

De acuerdo con CENSIDA (CENSIDA, 2013), del total de casos en que se conoce la vía de transmisión del virus, un 94 % se dan por vía sexual, 3.8 % por sanguínea y 2.1 % por perinatal.

Se utilizaron los datos recopilados, a nivel nacional por CENSIDA (Centro Nacional para la prevención y Control del VIH y SIDA), en México (CENSIDA, 2013), a través del Sistema de Vigilancia Epidemiológica (SINAVE). En SINAVE recae la responsabilidad del monitoreo, así como la información sobre la evolución de la epidemia en México. La funcionalidad de SINAVE es el resultado de un conjunto de acciones de monitoreo en el que participan coordinadamente todas las instituciones que conforman el Sistema Nacional de Salud, incluyendo los servicios médicos privados, así como de laboratorios y otras dependencias de los servicios de salud. Los datos reportados por SINAVE se actualizan semanalmente. Este trabajo se tomaron como referente los datos reportados en julio de 2013. La figura 1 muestra el registro de diagnósticos por año, hasta 2012, donde en el eje de las abscisas se ubican los años 1983, 1984, 1985, ..., 2012, representados por 1, 2, 3, ..., 30, y en el las ordenadas, los tamaños de la población.

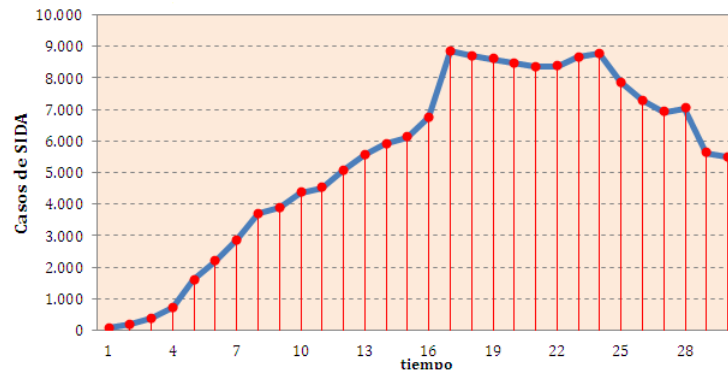


Figura 1: Casos diagnosticados de SIDA por año

5 RESULTADOS

En la figura 2 se muestra el ajuste de datos con el modelo logístico, en el eje de las abscisas se ubican los años de registro representados por 1, 2, 3, ..., 30, que corresponden a 1983, 1984, 1985, ..., 2012 y en el de las ordenadas los tamaños correspondiente de la población con SIDA. Se observa que el modelo presenta una alta correlación de datos.

En la figura 3 se presenta la descripción de la curva de crecimiento a través del modelo de Gompertz. Al igual que en el caso anterior, el eje de las abscisas representa los años de las toma de datos y en el de las ordenadas se ubican los tamaños correspondientes a esos años de la población. Se observa también una buena correlación de datos.

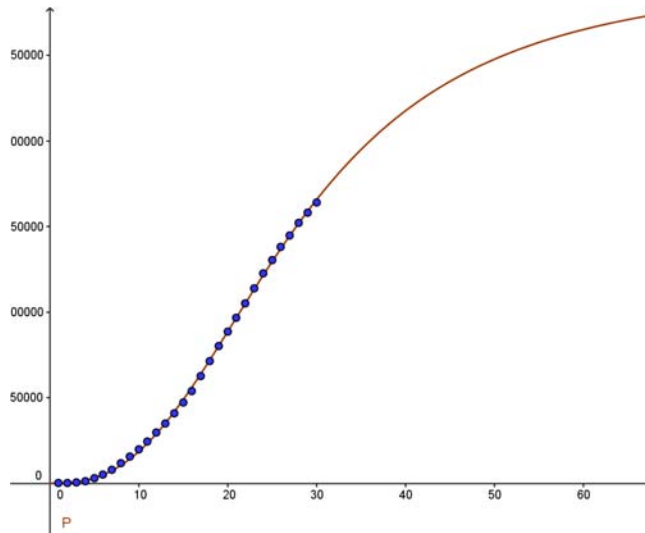


Figura 2: Ajuste de datos con el modelo logístico

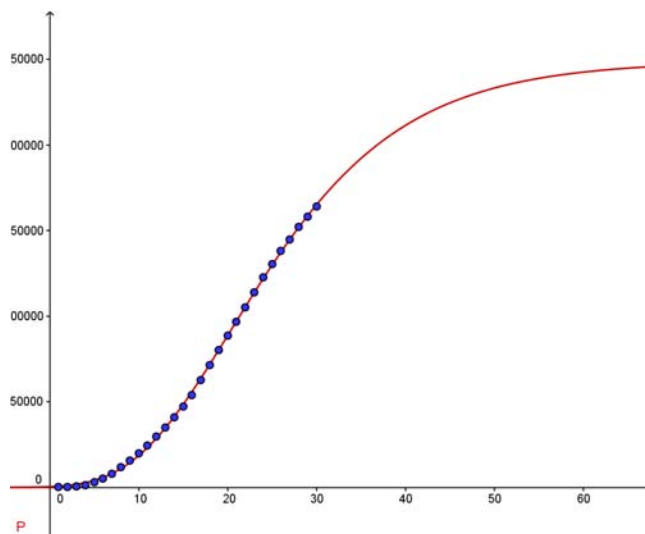


Figura 3: Ajuste de datos con el modelo de Gompertz

6 CONCLUSIONES

1. En este trabajo se emplean tres modelos sigmoidales para la descripción de la curva de crecimiento de casos diagnosticados de SIDA en México de 1983 a 2012. En la literatura consultada solo se encontró que Horimoto (Horimoto, et al, 1997) realiza un análisis de casos VIH en Japón a través de un modelo modificado de Gompertz. Este análisis realiza con tan solo 10 datos.

2. Se encuentra que la correlación de datos es alta para los modelos logístico y de Gompertz. Esto habla de alta capacidad predictiva de ambos modelos. El modelo de Richard carece de esa característica.

2. Al comparar los modelos de Gompertz y Richard se observa que el de Gompertz da mejor ajuste de datos (De acuerdo a la prueba F , se obtiene $F = 0.030233$

3. Al comparar el modelo logístico con el de Richard se observa que hay una probabilidad de 6.33661% de que modelo logístico sea mejor que el de Richard.

7 REFERENCIAS

- ANNADURAI G., RAJESH BABU S., SRINIVASAMOORTHY V. R. (2000)
Development of mathematical models (Logistic, Gompertz and Richard) describing the growth pattern of *Pseudomonas putida* (NICM 2174). *BIOPROCESS ENGINEERING*, 23, 607-612.
- BAJZER, Z. & VUK-PAVLOVIC, S. (2000)
New dimensions in Gompertzian growth. *JOURNAL THEORETICAL MEDICINE*, 2: 307-315.
- BONGAARDS, J. (2005)
Five period measures of longevity. *DEMOGRAPHIC RESEARCH*, 13: 547-558.
- CÓRDOVA VILLALOBOS, J., A., PONCE DE LEÓN ROSALES, S., VALDESPINO, J. L (Editores). (2009)
25 años de SIDA en México. Logros, desaciertos y retos. 2a. Edición, Instituto Nacional de Salud Pública, México.
- GOMPERTZ, B. (1825)
On the Nature of the function Expressive of the law of human mortality, and on new mode of determining the value of life contingencies. *PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON*, 115: 513-583.
- HORIMOTO, K., HOFUKU, I., OSHIMA, K. (1997)
Population dynamics of HIV positive by application of a locally modified Gompertz curve: a case study for Japan. *NONLINEAR ANALYSIS, THEORY, METHODS AND APPLICATIONS*, 30 (2): 985-993.
- IZQUIERDO-KULICH, E. & NIETO-VILLAR, J. M. (2008)
Morphogenesis of the tumor. *MATHEMATICAL BIOSCIENCES AND ENGINEERING*, 5(299): 299-313.
- LAIRD, A., K. (1964)
Dynamics of tumor growth. *BRITISH JOURNAL OF CANCER*, 18: 490-502.
- PONCE DE LEÓN S., MACÍAS A. E., CRUZ A. (1998)
Los primeros cinco años de la epidemia del SIDA en México: una experiencia en el Instituto Nacional de Nutrición Salvador Zubirán. *SALUD PÚBLICA DE MÉXICO*, 30(4)
- RICHARD F. J. (1959)
A flexible growth function for empirical use. *J. EXP. BOT.* 10, 290-300.
- RICKER W. E. (1979)
Growth rates and models. *FISH PHYSIOL.* 8, 677-743.
- STANISLAWSKI E., IBARRA C., NARVÁES O., ELIZALDE J. (1984)
Un caso de síndrome de inmunodeficiencia adquirida de un sujeto homosexual en México, aspectos microscópicos y ultraestructurales. *REVISTA MÉDICA DEL IMSS*, 22.
- WALISZEWSKI, P. & KONARSKI, J. (2002)
Neuronal differentiation and synapse formation in space-time with fractal dimension. *SYNAPSE*, 43: 567-572.
- WALISZEWSKI, P. & KONARSKI, J. (2003)

The Gompertzian curve reveals fractal properties of tumor growth. *CHAOS, SOLITONS AND FRACTALS*, 16: 665-674.

WHELDON, T. E. (1988)

Mathematical models in cancer research. IOP Publishing Ltd., Bristol.

Dictiotopografía

CENSIDA (2013), Vigilancia epidemiológica de casos de VIH/SIDA en México. Registro Nacional de casos de SIDA. CENSIDA 2013. De: <http://censida.salud.gob.mx>.

Dinámica de Extracción Líquido-Líquido a Contracorriente

Oscar Hernández Ibarra

oscarhedzibarra@gmail.com

Instituto Tecnológico de la Región Carbonífera

Mitzué Garza García

mitzue.garza@uadec.edu.mx

Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen

La modelación dinámica de un proceso específico de extracción líquido-líquido a contracorriente es expuesta en este trabajo. El modelo es desarrollado a partir de un balance de materia en una etapa intermedia n del proceso. En su solución, se emplea una metodología numérica que utiliza herramientas de computación basadas en diagramas por bloques. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen dicho proceso de extracción utiliza tres vectores que representan en forma general las etapas discretas del proceso, $n - 1$, n , y $n + 1$ eliminando el uso de una matriz dispersa. La integración numérica se realiza con la metodología RungeKutta de cuarto orden. En las consideraciones se establece que el compuesto a extraer está en equilibrio en las dos fases y su distribución se da por el coeficiente de reparto. El modelo presenta buen ajuste respecto a un modelo analítico propuesto en literatura.

Keywords: extracción líquida, matriz, vectores, programación.

1 Introducción

La separación líquida es una técnica en la que uno o más componentes disueltos en un líquido son extraídos por medio del contacto directo con un segundo líquido inmiscible. Si los componentes en la solución original se distribuyen de manera diferente entre las dos fases, la separación ocurrirá. Un alto grado de separación puede lograrse con varias etapas de extracción en serie, en particular en flujo a contracorriente. El diagrama de flujo para una extracción líquido-líquido a contracorriente se muestra en la Figura 1. Las corrientes de alimentación (solución a la que se va a extraer el soluto, A) y disolvente (líquido con el que logra la extracción, D) fluyen a contracorriente y proporcionan dos productos finales, el refinado (líquido residual pobre en soluto, R) y el extracto (producto de la operación rico en soluto, E).

En el preámbulo del estudio de la dinámica de extracción líquido-líquido se ha encontrado a Costello[1] quien modeló matemáticamente la extracción líquido-líquido en pequeña escala estudiando un sistema de extracción de 3 etapas, para el caso de estado estable consideró un sistema lineal de ecuaciones algebraicas de la forma $AX = B$, y en estado transitorio estableció una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias para cada una de las etapas del proceso de separación.

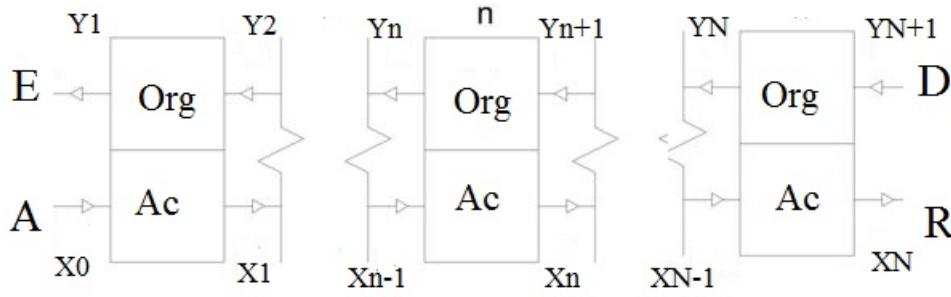


Figura 1: Proceso de extracción líquido-líquido a contracorriente

Carneiro[2] en su trabajo de investigación desarrolló un programa para la extracción de acetona en un proceso de 5 etapas el cual tiene la característica de usar un número relativamente grande de renglones en su estructura, y los resultados que arroja tienen que llevarse a etapas posteriores para su procesamiento. Jenson y Jeffreys[3] plantearon la problemática de la extracción líquido-líquido dando solución analítica a un proceso de 8 etapas aplicando ecuaciones diferenciales en diferencia empleando la Transformada de Laplace y su inversión.

En este trabajo se expone la modelación matemática que simula la dinámica de un proceso de extracción líquido-líquido a contracorriente en etapa transitoria. El modelo emplea la metodología numérica que evita la programación con un gran número de líneas y el empleo de software especializado requerido específicamente en los procesos de separación. En la estructura del modelo se acepta una entrada que representa el arranque, paro o función escalón de la concentración de entrada, y no está delimitado a un número específico de etapas. El modelo considera la alimentación y disolvente como líquidos inmiscibles, a saber una fase acuosa y una fase insoluble u orgánica en las que el compuesto a extraer está en equilibrio y su distribución se da por el coeficiente de reparto.

2 Modelo Matemático

2.1 Desarrollo del modelo

Un balance de materia en estado transitorio del soluto en las fases acuosa e insoluble en una etapa intermedia n del proceso es dado respectivamente por las ecuaciones (1) y (2).

$$\dot{m}_{ac(n-1)}X_{n-1} - \dot{m}_{ac(n)}X_n = m_{ac(n)}\frac{dX_n}{dt} \quad (1)$$

$$\dot{m}_{o(n+1)}Y_{n+1} - \dot{m}_{o(n)}Y_n = m_{o(n)}\frac{dY_n}{dt} \quad (2)$$

Donde los pares (X, Y) , $(\dot{m}_{ac}, \dot{m}_o)$, y (m_{ac}, m_o) corresponden en ese mismo orden a las concentraciones de soluto, las corrientes o flujos másicos, y a las masas presentes relacionadas a las fases acuosa e insoluble en cada etapa.

2.2 Consideraciones

Para la solución del modelo se consideró a las corrientes y las masas de cada fase como constantes $\dot{m}_{ac(n-1)} = \dot{m}_{ac(n)} = \dot{m}_{ac}$, $\dot{m}_{o(n-1)} = \dot{m}_{o(n)} = \dot{m}_o$, $m_{ac(n)} = Cte$ y $m_{o(n)} = Cte$. Para sistemas de

dos fases la concentración del soluto en la fase insoluble es proporcional a la concentración en la fase acuosa de la forma $Y_n = KX_n$, con K como el coeficiente de distribución o reparto. Sustituyendo estas igualdades en las ecuaciones (1) y (2) y sumando ellas se obtiene la ecuación (3) que representa la cantidad total del soluto en una etapa intermedia n del equipo.

$$X_{n-1} - (\alpha + 1)X_n + \alpha X_{n+1} = \beta \frac{dX}{dt} \quad (3)$$

Donde $\alpha = \frac{K\dot{m}_o}{\dot{m}_{ac}}$ y $\beta = \frac{(m_{ac} + Km_o)}{\dot{m}_{ac}}$. Para $n = N$ etapas, el proceso total puede ser modelado como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden expresado por la ecuación (4).

$$\mathbf{A}\vec{X} + \vec{X}_f = \beta \frac{d\vec{X}}{dt} \quad (4)$$

Donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(\alpha + 1) & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -(\alpha + 1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\alpha + 1) & \alpha \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -(\alpha + 1) \end{pmatrix};$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}$$

y

$$\vec{X}_f = \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{(N+1)} \end{bmatrix}$$

Con tamaños de $\mathbf{A} = N \times N$, y el par $(\vec{X}, \vec{X}_f)$ de $N \times 1$.

Los valores X_0 y X_{N+1} corresponden a las etapas frontera del proceso, para este caso la composición del soluto en la alimentación y la composición de una etapa virtual a la salida del proceso respectivamente. Para un tiempo menor o igual que cero se considera que la concentración en la alimentación X_0 es un valor fijo; $X_0 = X_A$, y para un tiempo mayor a cero dicho parámetro es una perturbación o función dependiente del tiempo $X_0 = X_0(t)$. El parámetro X_{N+1} para todo t es igual a cero, esto debido a que representa un punto extrapolado del proceso[3].

Tabla 1. Parámetros del Proceso	
Parámetro	Cantidad
Alimentación fase acuosa kg/h	1000
Alimentación fase insoluble kg/h	1200
Numero de etapas	8
Conc. de soluto en alimentación (X_A)	0.01
Constante de reparto(K)	0.8
Cantidad de fase acuosa por etapa kg	400
Cantidad de fase insoluble por etapa kg	200

2.3 Condiciones Iniciales

Es bien sabido que para analizar un proceso en estado transitorio se debe partir de un estado estable, así que la concentración del soluto en cada una de las etapas del proceso para dicha situación debe ser conocida. Sustituyendo $\frac{d\vec{X}}{dt} = 0$ en la ecuación (4) y resolviendo se genera un vector de condiciones estables $\vec{X}_{c0}$ cuyos valores se toman como punto de partida en la solución del modelo dinámico. Para obtener tal vector se utilizó el método de diferencias finitas[4].

3 Solución de Modelo

El modelo matemático fue desarrollado en Simulink™ (Figura 2) estableciendo la programación en tres etapas tal como se describe a continuación.

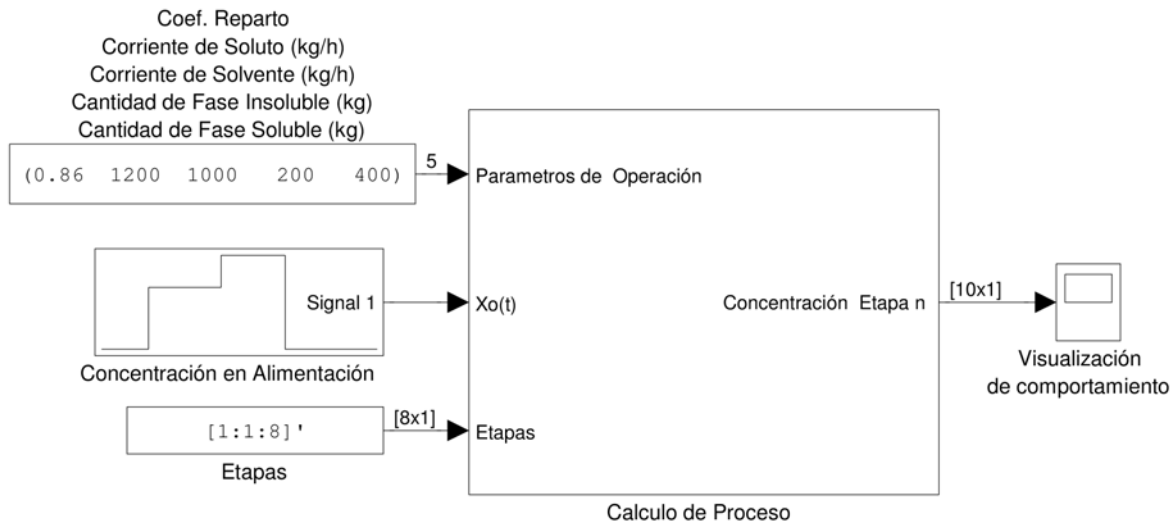


Figura 2: Modelación de proceso

1.- Entradas correspondientes a:

- Parámetros de operación que se presentan en la Tabla 1 y se introducen al modelo por medio de un vector, estos parámetros fueron obtenidos de literatura[3], ayudando ello al contraste de resultados.
- Generador de señal que simula cambios en la concentración del soluto en la alimentación.
- Generador de etapas del equipo de separación.

2.- Cálculo de Proceso. En esta parte se realiza el cálculo requerido en el análisis, a saber la determinación de los parámetros α y β , las condiciones iniciales ($\vec{X}_{c0}$) que exige cada una de las etapas del proceso (Figura 3) y el computo requerido por la ecuación (4) basado a una operación de integración (Figura 4).

Para eliminar la multiplicación de la matriz dispersa A por el vector $\vec{X}$ se aprovecha el listón diagonal de la matriz transformando esta multiplicación en una suma vectorial como se presenta en la ecuación (5).

$$\frac{1}{\beta}(\vec{V}_w - (\alpha + 1)\vec{V}_c + \alpha\vec{V}_e) = \frac{d\vec{V}_c}{dt} \quad (5)$$

$$\text{Con } \vec{V}_w = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}; \vec{V}_c = \vec{X} \text{ y } \vec{V}_e = \begin{bmatrix} X_2 \\ \vdots \\ X_N \\ X_{N+1} \end{bmatrix} \text{ donde } w, c, \text{ y } e \text{ representan en forma gene-}$$

ral las etapas discretas del proceso $n - 1$, n , y $n + 1$ respectivamente, y los vectores $\vec{V}_w$ y $\vec{V}_e$ son formados extrayendo sub-vectores del vector principal $\vec{V}_p = \begin{bmatrix} X_0 \\ \vec{V}_c \\ X_{N+1} \end{bmatrix}$ generado por la

concatenación del vector $\vec{V}_c$ (producto del integrador) con los elementos extremo superior X_0 e inferior X_{N+1} de $\vec{X}_f$ y debido a que los elementos internos de $\vec{X}_f$ son cero este se cancela. Con estos tres vectores se logra la operación de la parte izquierda de la ecuación (5) y el resultado es retroalimentado para realizar el cálculo al siguiente incremento de tiempo, esto se presenta en las figuras 4 y 5.

La configuración establecida en el integrador fue la de RUNGE-KUTTA cuarto orden con paso fijo, configuración precargada en parámetros de solución de Simulink™.

En la corrida con fin de observar convergencia fueron probados diferentes pasos o incrementos de tiempo, a saber 1, 0.5 y 0.25 horas.

3.- Salida donde se presenta la visualización gráfica del comportamiento.

4 Resultados

Las figuras 6(A) y 6(B) muestran los resultados de las corridas del modelo a pasos de tiempo constante de 0.5 y 0.25 horas respectivamente. Para los paso de tiempo propuestos de 0.5 y 1 hora existe divergencia en la solución del modelo tal como se observa en la figura 6(A) correspondiente a un paso de tiempo de 0.5 h. A incrementos menores cuando la entrada en la composición es un escalón (cambio de X_A de 0.01 a 0.02 kg/kg) existe convergencia en la solución y el resultado es una curva asintótica suave para cada una de las etapas del proceso, Figura 6(B).

En las figuras 7 A - C se presentan las corridas del modelo con un incremento de tiempo fijo de 0.25 h con 3, 8 y 15 etapas en ellas puede observarse lo siguiente: En las tres corridas existe convergencia de resultados y al igual que lo descrito en el párrafo anterior las curvas que representan las composiciones son suaves y asintóticas. Se observa claramente el comportamiento de

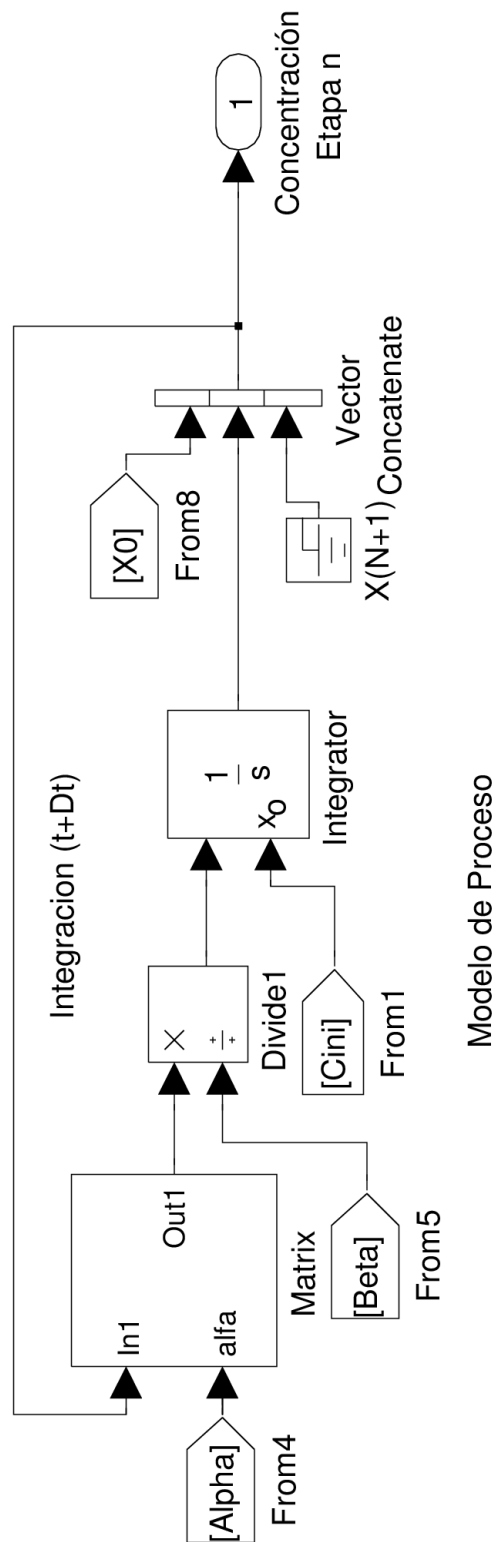
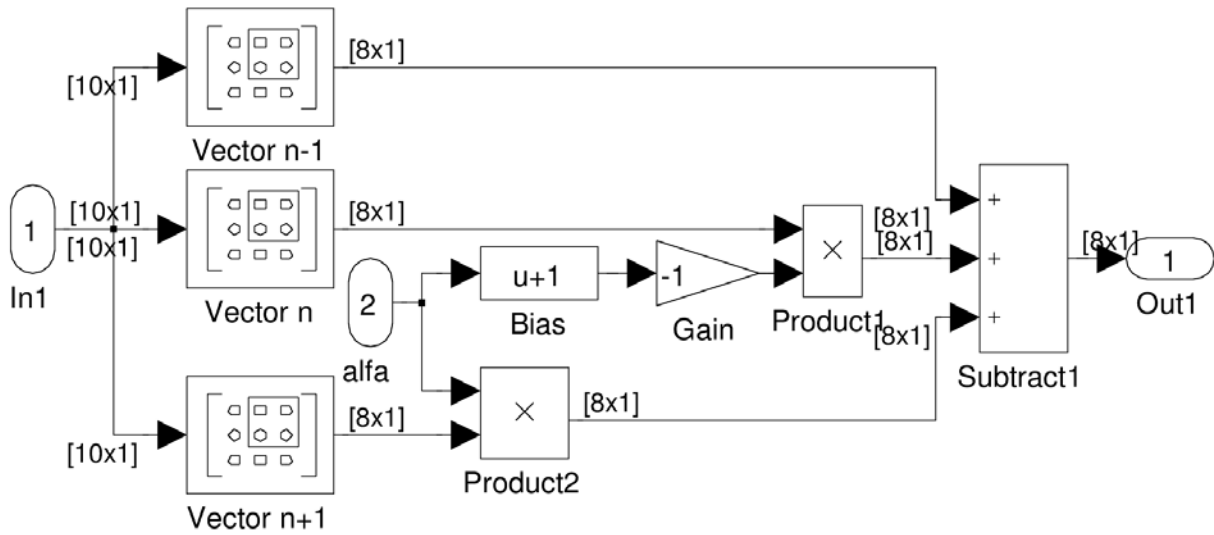
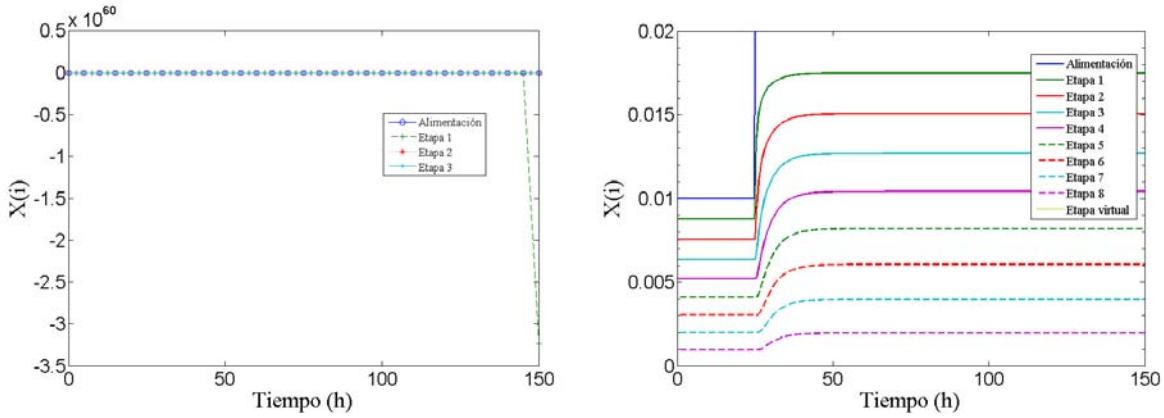


Figura 4: Integración



Sub-sistema matrix para el calculo de vectores n-1, n, n+1

Figura 5: Vectores w , c , y e y su relación de operación según ecuación 5



(A) Corrida del modelo, paso de tiempo 0.5 h (B) Corrida del modelo, paso de tiempo 0.25 h

Figura 6: Corridas del modelo a diferentes pasos de tiempo

cada una de la etapas del proceso de extracción cuando éste es sometido arranque ($X_A = 0$ para $t \leq 25$), a perturbaciones de tipo escalón ($X_A = 0.02$ a $25 < t \leq 65$ y $X_A = 0.035$ a $65 < t \leq 100$) y cuando existe paro en el proceso ($X_A = 0$ para $100 < t$). Una observación clara también en cada una de estas figuras es el porcentaje de extracción a un tiempo determinado, digamos por ejemplo 50 h en este caso, a dicho tiempo el porcentaje de extracción es aproximadamente 75% $((0.02-0.05)/0.02)$ para el proceso con tres etapas y 95% para el el proceso con 15 etapas, esto es de suma importancia para los ingenieros diseñadores de este tipo de equipos ya que con ello relacionan el porcentaje de extracción con el numero de etapas del proceso ayudándolos a seleccionar el numero de etapas adecuado.

La figura 8 presenta el comportamiento dinámico que tiene el refinado y el extracto a la salida del equipo de extracción, esta gráfica es de interés para los ingenieros diseñadores de proceso o encargados de ellos ya que les ayuda a decidir el tiempo en que pueden sugerir o realizar cambios al proceso, por ejemplo, cuando existe un cambio en escalón en la composición de entrada de 0.01 a 0.02 se necesitará, para este caso, un tiempo arriba de las 20 horas para considerar que el proceso entró en una etapa estable, también se aprecia que la composición de la última etapa

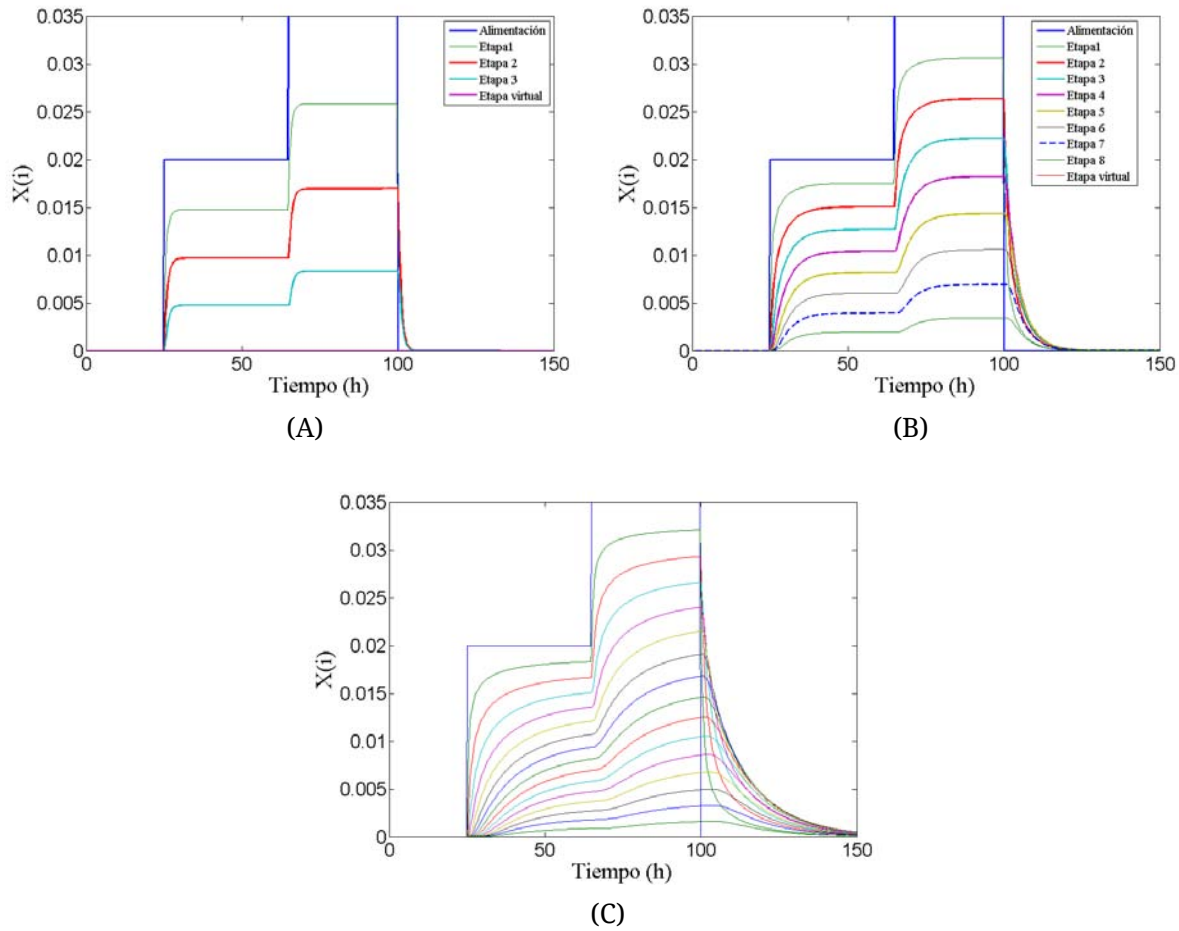


Figura 7: Corridas del modelo con incrementos de tiempo fijo y 3, 8 y 5 etapas respectivamente.

del proceso tiene un retardo de aproximadamente 1 hora a partir del momento en que existe un cambio en composición de la entrada, esto es clave para un ingeniero que quiere establecer un control del proceso.

En la Figura 9 puede observarse los resultados obtenidos del modelo contrastados con el método analítico de Jenson y Jeffreys[3]. Los resultados del modelo propuesto en este trabajo se empatan con el modelo de estos autores.

5 Conclusión

La modelación matemática de un proceso de extracción líquido-líquido a contracorriente se expone en este trabajo. El modelo es sencillo y programado en ambiente gráfico (SimulinkTM). El modelo se construye con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que surgen a partir de un balance de materia y se evita el uso de una matriz dispersa con la generación de vectores aprovechando el listón diagonal de la matriz principal. El cálculo de condiciones iniciales los realiza por medio de diferencias finitas. El modelo permite simular el comportamiento de cada una de las etapas del equipo alimentando una señal continua dependiente del tiempo como arranque, escalones, paros etc.

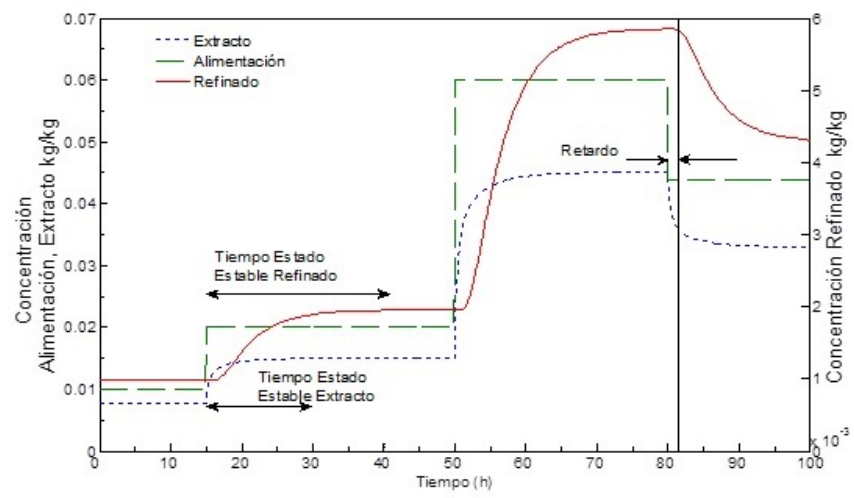


Figura 8: Comportamiento de extracto y refinado

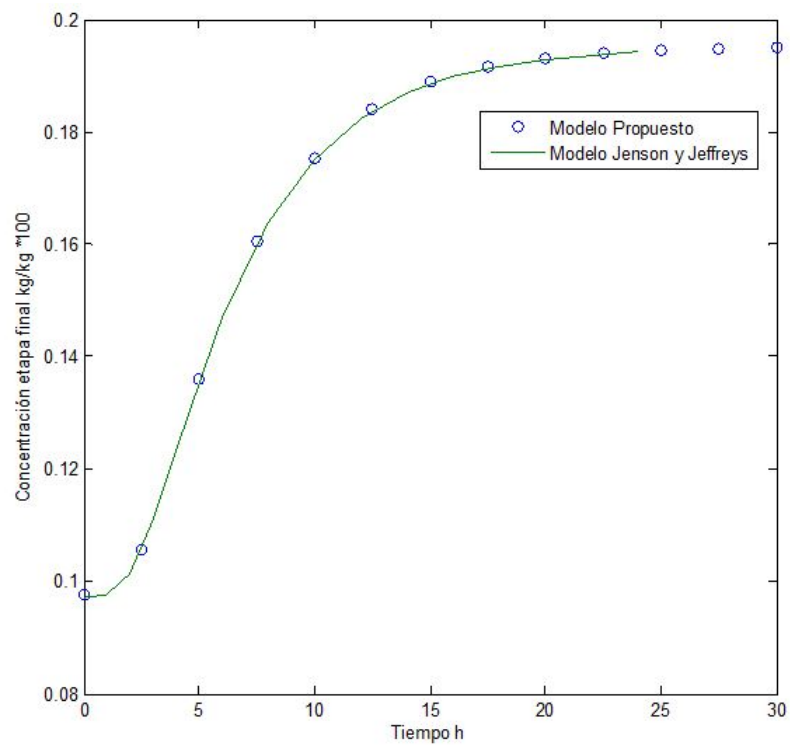


Figura 9: Contraste de Resultados

6 Agradecimientos

Se agradece al ITESCR por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo y a los docentes M. C. Victoriano de Luna Flores e Ing. Pedro Rocha Flores por su valiosa participación con el uso del software SimulinkTM.

Referencias

- [1] Costello Des.: *Dynamic Modelling of a Small-Scale Liquid-Liquid Extraction Rig*, Edinburgh University, Tecnical Report, (1992).
- [2] Carneiro Sereno Alberto Manuel.: *Dynamic Simulation of Liquid-Liquid Extraction*, University of Connecticut, Master of Science Thesis, (1982).
- [3] Jenson V. G. and Jeffreys G. V.: *Mathematical Methods in Chemical Enginnering*, Academic Press, Second Edition, (1992).
- [4] Rice Richard G. and Do D. Duong: *Applied Mathematics and Modeling for Chemical Enginne-ring*, John Wiley and Sons, Inc., (1995).

Diseño de un sistema neurodifuso de conversión PWM a motoreductor CD: Modelado y aplicación

Marcos Fajardo Rendón
marktrony2k@gmail.com

Francisco Guillermo Herrera Armendia
harmendia@gmail.com

Departamento de Matemática educativa
Escuela Normal Superior de México

Resumen

El presente proyecto propone el diseño y modelado de un sistema de conversión de una señal PWM a digital para ser usado en motoreductores de C.D. sin importar torque o voltaje mediante un sistema neurodifuso que compara y controla la posición actual del motoreductor respecto a la deseada hasta colocarse en ella siendo embebido en un microcontrolador de señales digitales.

1 Introducción

Es común que sistemas electromecánicos de corriente directa de configuración limitada o cerrada en actualizaciones o proyectos específicos requieran de un control preciso de sus motores o actuadores, refinamiento de movimientos en manipuladores para lograr configuraciones con mayor densidad de pasos o ser actualizados a aplicaciones de lazo cerrado y que al no contar con un sistema de control preciso se requiere de su sustitución parcial o total, generando un rediseño de espacio, carga de la maquinaria, daños en vibración y altos costos de adquisición y actualización. El presente prototipo propone el diseño y construcción de un sistema de control total formado por un software de control mediante una GUI autoejecutable basada en sliders, un sistema de servocontrol USB-HID y una etapa de control por PWM embebida a un motoreductor de corriente directa, centrándose sólo el modelado en la última etapa.

2 GUI

Debido a que el sistema de convertidor de motoreductor a servomotor requiere de las características de calibración, control y reprogramación se adaptó una GUI (graphical user interface) desarrollada originalmente como software host para 16 servomotores simultáneos basado en sliders

para que el usuario pudiera manipularla intuitivamente, mismo que permite el guardado de las secuencias de los servomecanismos a modo de “aprendizaje” para trabajar en modo autónomo al ser almacenadas las secuencias la memoria del microcontrolador sin necesidad del software [1]. El software contiene la autodetección plug & play de la tarjeta USB al ser de la familia HID desarrollado en Visual C# .NET y exactitudes de rutina en modo esclavo heredadas de las APIS e Hypertreading del sistema operativo.

Los scrollbars utilizan interpolación de Lagrange para calcular el equivalente proporcional del valor del pulso PWM, así mismo se pueden desplazar varios en conjunto o su proporcional entre ellos mediante el anclamiento de uno o más.

La GUI permite modificar el timing para poder experimentar y realizar pruebas del sistema en tiempo real.

El sistema detecta la conexión de la GUI con el hardware, liberándolo automáticamente en caso contrario para conmutar a modo autónomo para ejecutar infinitamente las rutinas.

Si no se requiere la calibración, control por PC o programación de rutinas el sistema puede omitir el uso de la GUI y simplemente acoplarse a un sistema generador de PWM de lazo abierto como pueden un 555 con LM324, RC o PIC, como se describe en la figura 1.

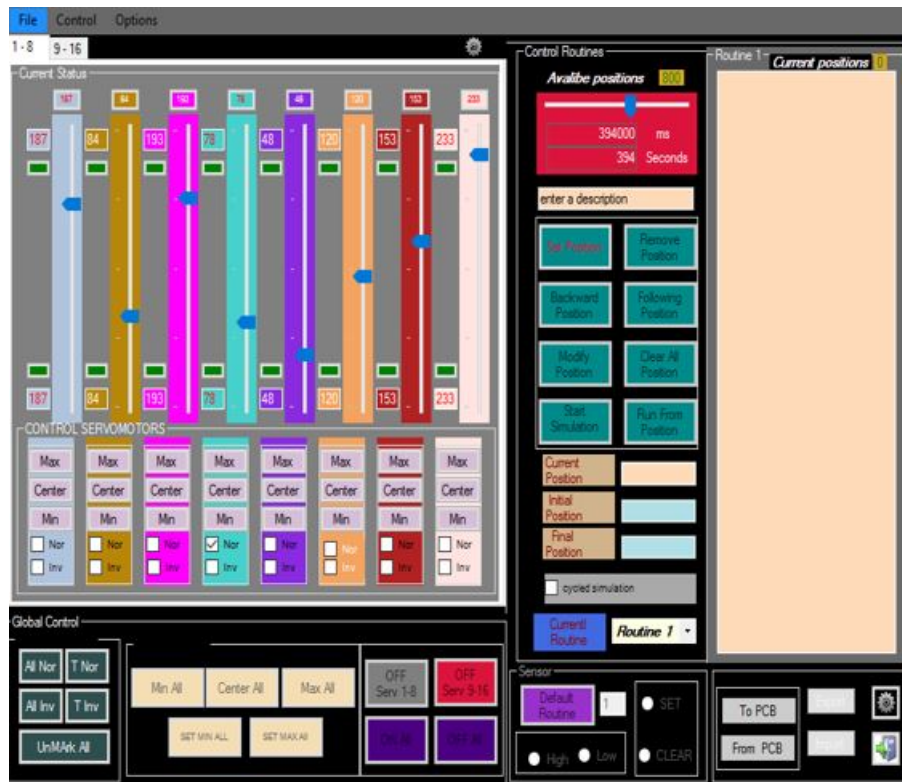


Figura 1: GUI de control PWM portable en VC#

3 Hardware y Firmware de servocontrol

Los servomotores requieren de una alimentación standard TTL de 5V utilizando como señal de control un PWM (*pulse-width modulation*) con $f_o = 50$ Hz y un $\frac{1}{f_o} = 0.02$ s, que brinda un ciclo de trabajo activo $wc = 20$ ms logrando una variación porcentual del periodo alto $\eta = 6 - 15$ comprendida en un espectro $i = 0.5 - 2.5$.

La tecnología USB contiene una definición de clase denominada HID (*human interface device*) que permite identificar automáticamente un hardware al conectarse en el sistema, nulificando el pro-

ceso de instalación de drivers al unificar los protocolos por su naturaleza de autodescripción en su definición nativa, contar con sistemas de autoasociación dinámica de comunicación bidireccional y una sola librería embebida en el sistema operativo.

Se rediseñó un firmware diseñado para el manejo en tiempo real desde una computadora 30 servomotores que permite el guardado en la memoria Flash del PIC de cada posición mediante un arreglo de datos stack brindando la modalidad de ser desconectado de la PC para alimentarse independientemente por un voltaje externo logrando independencia y autonomía del sistema mecatrónico para repetir secuencias [1].

Se estableció en el firmware un Polling de 1 ms USB 2.0, los V+ y V-, un buffer de 64 bits para manejar los datos de buffering y librerías de descripción de driver USB-HID.

Se utilizaron 5 *timers* de 32 bits que diferencian las posiciones alta y baja entre los intervalos de 2.5 milisegundos del PWM de onda cuadrada, ejecutándose recursivamente en el servomotor y es calculado mediante su equivalencia en ticks de reloj dada por $PWM = ms + i(120); i = i + 1$ dando el número total de ticks necesarias para un pulso de 1.5 ms y para su lectura secuencial logrando un complemento mediante $i = i - 1$ al cálculo del pulso, actualizando el valor de cada timer.

Si el sistema se encuentra haciendo rutinas y se desconecta de la PC, este es detenido mediante una función encargada.

La tarjeta servocontroladora USB-HID está soportada en un PIC de la familia Microchip rediseñada para el PIC 18F4550 utilizando sus pines de comunicación USB específicos V+ y V- utilizando como alimentación el mismo voltaje USB en un plug tipo B, pudiéndose alimentar a un voltaje externo para aplicaciones de potencia con reconocimiento automático mediante el circuito de conmutación Mosfet-P NDS352P con una *max drain* de ± 0.85 A, sin necesidad de tener que jumppear o switchear el dispositivo al convertirse en modo autónomo al ser leído por el PIC y estabilizando las salidas PWM mediante una resistencia de 220 Ω [1] como se describe en la figura 2.

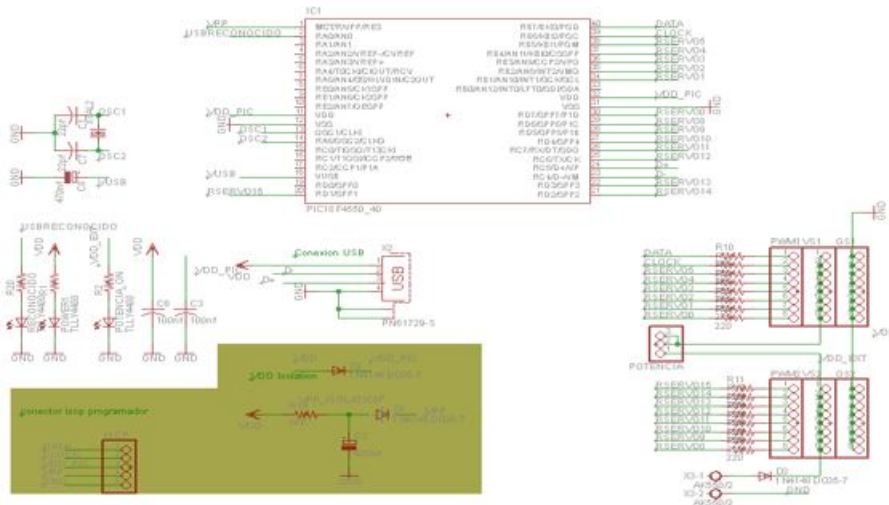


Figura 2: Tarjeta controladora de servomotores USB-HID con PIC 18F4550 en Eagle

4 Hardware de conversión CD a PWM

El Hardware del sistema de conversión consiste en una tarjeta embebida a un motoreductor de C.D. mediante un potenciómetro y un DSPIC (*digital signal programmable integrated circuit*) 33FJ16GP102 de la familia Microchip de 16 bits, 1 módulo convertidor ADC de 6 canales de 10 bits de resolución a 1.1 Msps y 3 módulos de comparación.

Una vez digitalizada la señal analógica del potenciómetro proveniente del canal 1 de ADC, esta es

comparada con respecto al PWM del RA0.

El módulo de comparación está integrado y procesada por los módulos PID y neurodifuso para enviar una señal digital hacia la etapa de potencia formada por un puente H para poder suministrar la corriente requerida por el motor, para el experimento se trabajó con un L293D pudiendo ser sustituido por el requerido según la del motor, como se describe en la figura 3.

Un motor eléctrico es un dispositivo electromecánico que convierte energía eléctrica pudiendo ser de C.A. o C.D. en mecánica, a este se le puede acoplar un sistema denominado reductor de rpm's que permite mediante un sistema de engranaje incrementar su torque.

El sistema es de lazo cerrado y busca que los datos generados por el sistema difuso sean evaluados por una simple neurona tri-nivel, el resultado es comparado con el PID respecto al valor setpoint dinámico de lazo cerrado por un potenciómetro acoplado al motor en relación 1:1 para la lograr una salida dinámica.

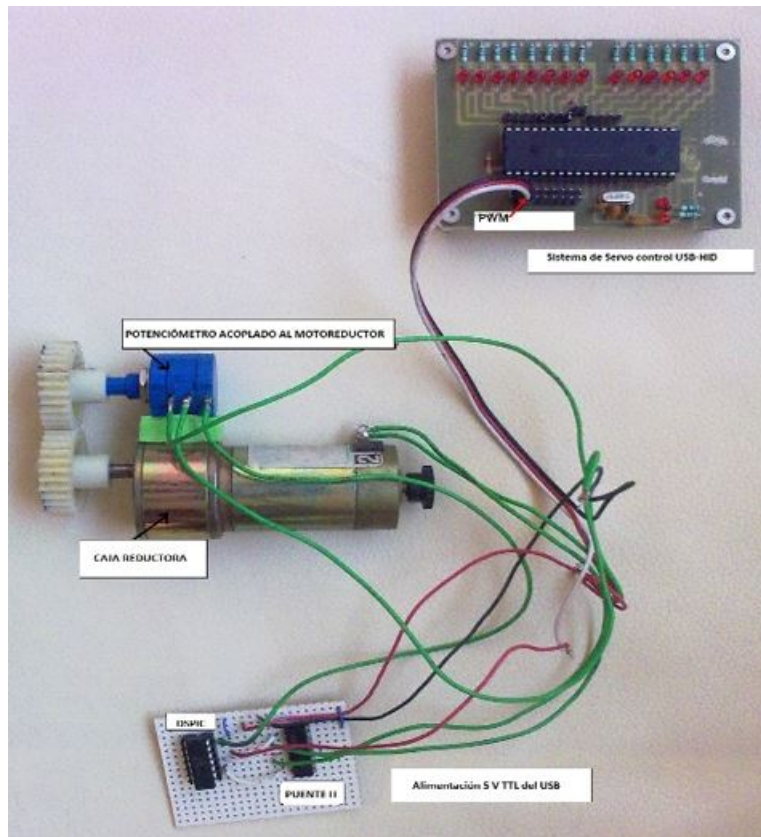


Figura 3: Tarjeta controladora de servomotores con el prototipo DSPIC convertidora de PWM a C.D. acoplada al motor con potenciómetro.

El motor puede ser modelado como un sistema en donde la entrada está acoplada al voltaje (V) con su respectiva tensión y cuyas variables a medir son:

$$\text{Velocidad angular del eje} = (\omega) \frac{\text{rad}}{s}, \quad \text{y} \quad \text{Ángulo del eje} = (\theta) \text{ rad.} \quad (1)$$

En donde:

V_a = Voltaje inducido (V)

R_a = Resistencia de la armadura (Ω)

L_a = Inductancia de la bobina (H)

I_a = Corriente Inducida (A)

MT1(E_b)= Voltaje inducido por FEM del motor(V)

T = Torque (Nm)

θ = posición angular del eje de MT1 (rad)

El circuito del modelo anterior puede ser simulado en Livewire como se muestra en la figura 4.

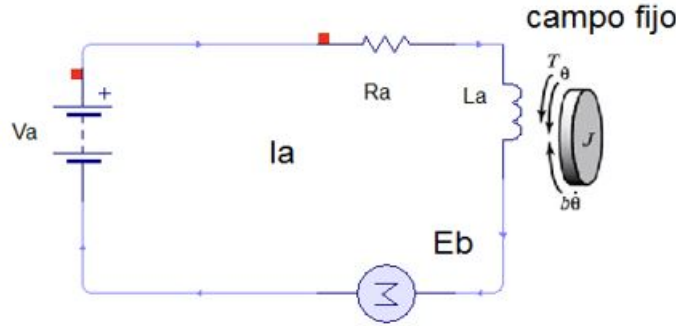


Figura 4: Simulación en Livewire del motor de C.D.

Cuando V_a es aplicado al motor, este se ajusta sin modificar el voltaje aplicado al campo en donde V y el par motor se relacionan como:

$$V_a(t) = R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} \quad (2)$$

Así mismo el torque del motor T se encuentra relacionado con la corriente I, mediante la constante K siendo:

$$T = K_I \quad (3)$$

Cualquier motor que sea girado en su eje –inclusive no sin voltaje- generará una fuerza electro-motriz inducida E_b relacionada con la velocidad angular siendo:

$$E_b = K\omega = K \frac{d\theta}{dt} \quad (4)$$

Respecto al esquema del motor se pueden obtener las siguientes ecuaciones basadas en la ley de Newton contextualizadas respecto a la ley de Kirchhoff:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + KI \quad (5)$$

$$L \frac{dI}{dt} + R_I = V - K \frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

Aplicando la transformada de Laplace con el operador s en (5) y (6) se obtiene:

$$Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = KI(s) \quad (7)$$

$$LsI(s) + RI(s) = V(s) - Ks\theta(s) \quad (8)$$

Expresándose $I(s)$ como:

$$I(s) = \frac{V(s) - Ks\theta(s)}{R + Ls} \quad (9)$$

Sustituyéndose en (5) queda:

$$Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = K \frac{V(s) - Ks\theta(s)}{R + Ls} \quad (10)$$

Modularmente la ecuación del motor de C.D. puede ser representada en el diagrama de bloques de la figura 5.

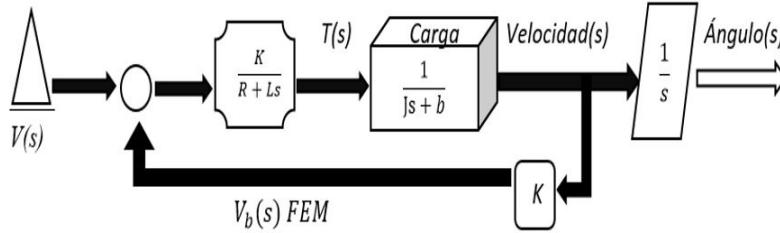


Figura 5: Diagrama de bloques del motor de C.D.

La función de transferencia de $V(s)$ de (10) al ángulo de salida θ sigue directamente:

$$G_a(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s\{(L_s + R)[(J_s + b) + K^2]\}} \quad (11)$$

Siguiendo el diagrama de bloques anterior se puede obtener la función de transferencia de $V(s)$, para la velocidad angular ω como:

$$G_v(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{(L_s + R)[(J_s + b) + K^2]} \quad (12)$$

5 Módulo Neuro-Difuso

La RNA tri-nivel sencilla puede capturar en un muestreo de intervalo h la señal PWM y respecto al módulo de comparación Cmp del DSPOC hacia el motor aplicando un peso mayor a la salida que a la entrada debido para mejorar la inercia y tiempo de respuesta:

$$Z = PWM(W_1) + Cmp(W_2); \quad Out = \begin{cases} Z < 40.00 \rightarrow PWM + + \\ Z \leq 300 \rightarrow PWM = PWM \\ Z > 300 \rightarrow PWM - - \end{cases} \quad (13)$$

Los sistemas difusos son considerados como una alternativa para la teoría de control convencional para sistemas no lineales en donde el modelado matemático preciso es muy complejo al basarse en las reglas del DSPIC en el comportamiento del sistema para realizar las operaciones matemáticas, además de que el controlador cuenta con algoritmos y funciones ahorrando *flops* del *core* interno.

En este tipo de control, las entradas son las señales analógicas del potenciómetro y el PWM, mientras que la salida es el voltaje a enviar al motor.

El control de la posición difusa utiliza un conjunto de reglas lógicas que sirven como diseño de la base de conocimiento, permitiendo la actualización de estas o su resolución mediante el firmware.

La lógica difusa es una aplicación de los conjuntos difusos de teoría de conjuntos en donde en estos los objetos pertenecen a un conjunto en función de su grado de membresía.

El módulo difuso se describe en la figura 6.

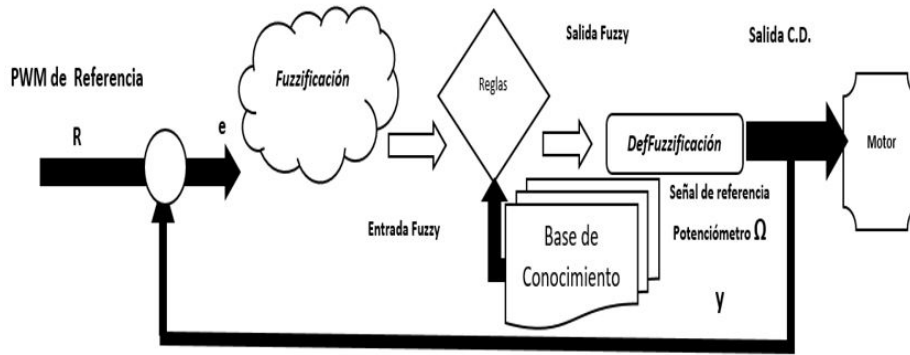


Figura 6: Diagrama de bloques del control Fuzzy

El módulo difuso está formado por los submódulos de Fuzzificación, Base de Conocimientos, Reglas y Defuzzificación [2]. Las unidades de Fuzzificación valores de las variables medidas en las entradas correspondientes al universo de pertenencia al intervalo cerrado $[-1, +1]$. Para crear la aplicación difusa en el DSPIC se requiere de Fuzzyficar un número real obtenido por el sensor del potenciómetro hacia la entrada mediante la búsqueda de su grado de membresía; es decir al recibir un dato se retorna un valor que muestra que tanto pertenece el dato a la función. Para el sistema se manejó el siguiente grupo difuso que corresponde al PWM obtenido originalmente:

$$f(x) = |x|, \quad \text{donde} \quad |x| = \begin{cases} \text{Izquierda} & \rightarrow 1.0 \leq x \leq 1.4999999 \\ \text{Centrado} & \rightarrow 1.5 \leq x \leq 1.5000001 \\ \text{Derecha} & \rightarrow 1.51 \leq x \leq 2.0000000 \end{cases} \quad (14)$$

Posteriormente se convierten los datos de entrada mapeados en conjuntos difusos basados en valores difusos, como Rápido a la Derecha (RD), Lento Izquierda (LI), utilizando una función de membresía de triángulo con cuatro secciones (x_0, x_1 y x_2), consistiendo en $x - x_0, x_0 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x$ max La Base de Conocimientos se encuentra enlazada a las reglas de toma de decisiones. Para poder evaluar las reglas se definió el error como la diferencia entre el PWM enviado respecto al valor del potenciómetro para cada fase:

$$\text{Error} = PWM - \Omega \quad (15)$$

Posteriormente mediante las reglas predefinidas el controlador produce una señal denominada variable de control enviada al puente H siendo las reglas:

- Si el error=alto $\wedge$ valor=alto $\rightarrow$ Decremento
- Si el error=0 $\wedge$ valor=alto $\rightarrow$ Decremento
- Si el error=bajo $\wedge$ valor=alto $\rightarrow$ Incremento
- Si el error=alto $\wedge$ valor=0 $\rightarrow$ Decremento
- Si el error=0 $\wedge$ valor=0 $\rightarrow$ Constante de mantener el motorreductor
- Si el error=bajo $\wedge$ valor=0 $\rightarrow$ Incremento
- Si el error=alto $\wedge$ valor=bajo $\rightarrow$ Decremento
- Si el error=0 $\wedge$ valor=bajo $\rightarrow$ Incremento
- Si el error=bajo $\wedge$ valor=bajo $\rightarrow$ Incremento

La salida de la lógica de decisión concluye en la ejecución del conjunto difuso el cual debe ser ahora DeFuzzificado. Contra una serie de conjuntos difusos de la posición angular de salida θ del motor.

Las reglas difusas requieren DeFuzzificar a partir de los valores difusos mediante la centroide del conjunto difuso de salida utilizando el comando propio del DSPIC y que es la mejor técnica [3, 4].

La DeFuzzificación por centroide viene dada por las variables donde x es el número de valores del conjunto difuso y donde:

$$\begin{aligned} x &= \{V_0 - V_n\} \\ V_i &= \text{Un valor de apoyo a evaluar} \\ \mu &= \text{Grado de membresía } \varepsilon V_i \\ EC_{\text{discreto}} &= \text{Entrada de Control con valores discretos DeFuzzificados} \end{aligned} \quad (16)$$

La salida DeFuzzificada discreta del DSPIC viene dada por su fórmula [5]:

$$EC_{\text{discreto}} = \frac{[\sum_{i=1}^x \mu(V_i)(V_i)]}{[\sum_{i=1}^x \mu(V_i)]} \quad (17)$$

Dentro de sus ventajas sobre otras técnicas de control se puede describir que este es más barato que otro al poderse integrar y personalizar módulos como sensores neuronales lógicos en los DSPs o DSPICs, además de que los controladores difusos son mucho más robustos que los PID al cubrir un rango más amplio de condiciones de operaciones.

6 Motoreductor convertido en Servomotor

Contextualizando al sistema de lazo cerrado anteriormente formado por la armadura del motoreductor servo controlado se han asignado los valores de 5 V en lógica TTL con 10 W con una carga utilizando un puente H L298 pudiendo ser descrita su función de transferencia utilizando como variables a:

R_a = Resistencia de armadura del motor (Ω)

K_t = Torque del motor en función de la caja reductora (Nm)

K_b = Voltaje inducido por FEM del motor (V)

J_m = Inercia del motor rotor.

J_L = inercia de la inercia extra del disco.

B_m = Coeficiente de fricción del eje del motor.

B_L = Coeficiente de fricción del eje de carga del motor.

$J = J_m J_L$

$B = B_m B_L$

Siendo:

$$H(S) = \frac{K_t}{[R_a J S^2 + (K_b K_t + R_a B) S + K_t]} \quad (18)$$

Para el obtener su función discreta de transferencia $GP(z)$, se utilizó mediante el ADC integrado del DSPIC con un muestreo $t=10$ ms, siendo el tiempo discreto procesado:

$$G_p(Z) = \left[\frac{20.531(1 - e^{-ts})}{S^2(S + 4.9026)} \right] = \frac{0.001941Z + 0.001932}{Z^2 - 1.8432Z + 0.9491} \quad (19)$$

7 Aplicaciones

Se realizaron dos aplicaciones en la empresa Bio-Rad de México para el área de medios de cultivo que requería del suministro de una sustancia en una oblea permeable multidisco con área de 1cm de diámetro, por lo que se diseñó y construyó una bomba periestática acoplada a un motorreductor convertido a servomotor que permite la liberación del líquido, su ajuste y reprogramación de velocidad de goteo mediante su conexión a la computadora dosificando de 0 a 0.5 ml de resolución.

La segunda implementación se logró gracias al interés de Bio-Rad una vez que el sistema periestático y la interfaz de comunicación USB-HID estaban funcionando. El experimento consistió en acoplar la transmisión del movimiento de un motorreductor de corriente directa del manipulador industrial KUKA 363 MSK [6] mediante un potenciómetro a la tarjeta de conversión *PWM-CD* comparando el valor proporcional de la escala de un giro del motorreductor respecto a un potenciómetro de 2 K Ω , en esta ocasión utilizando un puente H de mosfets MSK 4227 a 20 A, 200V de MSK [7] con lo que se logró comprobar en una aplicación de robótica industrial el control de un motorreductor como servomotor siendo utilizada una fuente externa para alimentar al sistema. Una vez programada una secuencia de 25 movimientos simulando un ensamblaje, el sistema se removió de la computadora, convirtiéndose en modo autónomo, logrando obtener resultados favorables como se describe en la figura 7.



Figura 7: Diferentes configuraciones en donde se implementó el sistema como el robot Kuka, bomba periestática con multidisco Bio-Rad

8 Conclusiones

Al diseñar un sistema completo desde el software, firmware y hardware para controlar el envío de señales PWM, permitió la simulación, análisis y pruebas reales de un sistema convertidor PWM-C.D.

La tarjeta de servocontrol permite configurar la velocidad y secuencias de pruebas de modo autónomo y con servidor. Así mismo al contar con tecnología USB-HID esto permitió su auto-reconocimiento en las computadoras del laboratorio Bio-Rad sin privilegios de administrador, pudiendo realizar pruebas.

Programando un software portable .EXE, este pudo ser ejecutado en cualquier computadora sin

privilegios de administración del laboratorio Bio-Rad, realizando las pruebas adecuadamente. Un sistema completo de firmware mediante un DSPIC y Hardware de potencia configurable permite el control total de la velocidad de muestreo en la tarjeta, resolución y pruebas reales. El sistema se comportó alineándose a la señal esperada PWM respecto a la posición-valor del potenciómetro con el motoreductor, como se describe en la figura 8 mediante una medición de instrumentación virtual, la señal fue la misma ante la variación de los parámetros. Mediante el modelado matemático se logró simular el comportamiento del sistema y mediante la construcción del prototipo en pruebas se logró comprobar el modelo. El manejo de sliders en la GUI por Lagrange permitió el control intuitivo y preciso del comportamiento del servomotor en las pruebas. A la fecha 12 de Agosto de 2015 la empresa Bio-Rad tiene en operación una bomba peristáltica reprogramable en modo autónomo que cuenta como servomotor un motoreductor de alto torque mediante el sistema USB-HID y PWM-C.D. descrito en este trabajo.

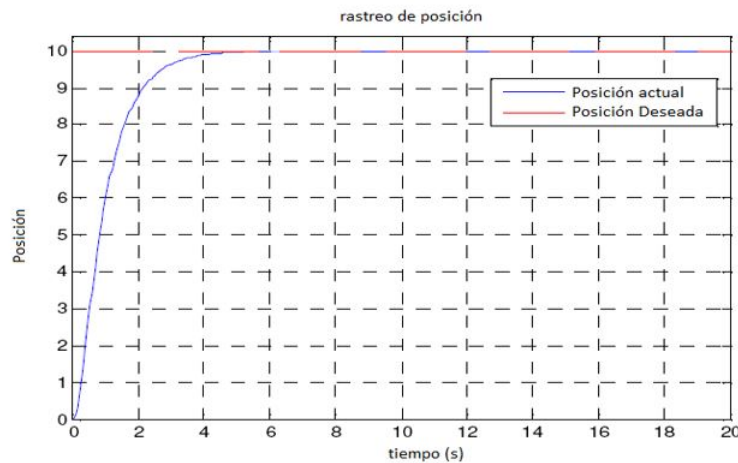


Figura 8: Medición por laboratorio virtual de la señal generada en donde se comparan la posición a la que llega el motoreductor de C.D. respecto a la deseada por el PWM

9 Agradecimientos

Agradecimientos a la empresa Bio-Rad por haber permitido la experimentación de distintas aplicaciones y brindarnos la oportunidad de automatizar procesos de su planta en diferentes ocasiones.

Referencias

Referencias

- [1] M. Fajardo Rendón y F.G. Herrera Armendia. "Servocontrolador Reprogramable para Articuciones Robóticas USB HID", en Memorias del IEEE X Congreso Internacional Sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico: CIINDET IEEE 2013, Cuernavaca, Morelos, 13-15 de Marzo, 2013.
- [2] Lee C. "Fuzzy Logic in Control Systems", Fuzzy logic controller, part II. IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybernetics, 1990.
- [4] Pham D.T. and Liu X. "Neural Network for Identification Prediction and Control", Springer-Verlag Berlin, Heidelberg New York, 1997.
- [5] Phillips CL, Nagle HT. Digital Control System Analysis and Design, 2nd edn. Prentice-Hall, Reading, MA 1990.

[6] Kuka 363 series datasheet consultado en Agosto de 2015 de http://www.kuka-robotics.com/res/sps/f776ebabf613-4818-9feb-527612db8dc4_PF0022_KR_210-2_en.pdf

[7] MSK 4227 datasheet consultado en Agosto de 2015 de <http://www.mskennedy.com/products/Power-PEMs/MSK4227.prod>

El Método de Descomposición de Adomian en la Solución de la Ecuación de Black-Scholes no Lineal

Oswaldo González Gaxiola Francisco Paz Cendejas
ogonzalez@correo.cua.uam.mx francisco.paz.c@gmail.com

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
UAM-Cuajimalpa

Resumen

Hoy en día la liquidez de los mercados financieros y los costos de transacción se han vuelto un tema de gran interés en la gestión del riesgo financiero; tomando en cuenta los elementos anteriores se tiene como resultado un cierto tipo de no linealidad en el modelo de Black-Scholes. En presente trabajo, se estudia dicho modelo no lineal de Black-Scholes para la valoración de opciones. La solución del modelo, sujeto a cierta condición inicial se obtiene a través del método de descomposición de Adomian (ADM).

1 Introducción

La mayor parte de los fenómenos que surgen en el mundo real son descritos por ecuaciones diferenciales no lineales (tanto ordinarias como parciales) y en algunos caso por ecuaciones integrales. Sin embargo, la mayoría de los métodos desarrollados hasta ahora en matemáticas se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales lineales. El método de descomposición desarrollado por el matemático George Adomian (1923-1996), ha sido de mucha utilidad en las matemáticas aplicadas en general [1], [2]. El método de descomposición de Adomian (ADM) tiene la ventaja de que converge a la solución exacta en una gran mayoría de casos muy importantes en las aplicaciones y se puede manejar de manera fácil para una amplia clase de ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) tanto lineales como no lineales. En el presente trabajo haremos uso de ADM para resolver específicamente la ecuación de Black-Scholes no lineal que surge al considerar el modelo de mercado con costos de transacción [3], [4] [5], [6].

2 El Método de Descomposición de Adomian

El método de Descomposición de Adomian (ADM) permite encontrar una solución analítica en forma de serie [14] y éste consiste en identificar en la ecuación dada las partes lineal y no lineal,

para luego invertir el operador diferencial de mayor orden que se encuentre en la parte lineal y despues considerar la función por conocer como una serie cuyos sumandos, por el presente método quedaran bien determinados, en seguida se descompone la parte no lineal en términos de los polinomios de Adomian [15]. Definimos las condiciones iniciales y/o de frontera y los términos que involucran a la variable independiente como aproximación inicial. Así, se encuentran de manera sucesiva los términos de la serie que nos da la solución del problema estableciendose una relación recursiva.

En general, el método a seguir es el siguiente: dada una ecuación diferencial ya sea ordinaria o parcial:

$$Fu(x, t) = g(x, t) \quad (1)$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2)$$

donde F representa un operador diferencial (en general, no lineal) que envuelve tanto términos lineales como no lineales y entonces la ecuación (1) puedes escribirse como

$$L_t u(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t) \quad (3)$$

donde $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, R es un operador lineal que involucra derivadas parciales con respecto a x y N es un operador no lineal; g es un término no homogéneo independiente de u .

Despejando $L_t u(x, t)$,

$$L_t u(x, t) = g(x, t) - Ru(x, t) - Nu(x, t) \quad (4)$$

Como L es invertible, operando en (4) con el inverso $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ tenemos que,

$$L_t^{-1} L_t u(x, t) = L_t^{-1} g(x, t) - L_t^{-1} Ru(x, t) - L_t^{-1} Nu(x, t) \quad (5)$$

luego, una expresión equivalente a (5) es

$$u(x, t) = f(x) + L_t^{-1} g(x, t) - L_t^{-1} Ru(x, t) - L_t^{-1} Nu(x, t) \quad (6)$$

donde $f(x)$ es la constante de integración (con respecto a t) que satisface $L_t f = 0$. Para problemas con valor inicial en $t = t_0$, tendríamos convenientemente definido L^{-1} para $L = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$ como la integral n -veces iterada definida de t_0 a t .

El método (ADM) asume la solución de (1), (2) en forma de serie para la función desconocida $u(x, t)$ dada por,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (7)$$

El término no lineal $Nu(x, t)$ por medio de ADM se descompone como

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (8)$$

donde la sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, es la llamada sucesión de polinomios de Adomian y son dados por la fórmula

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} [N(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)]|_{\alpha=0}. \quad (9)$$

Ahora, sustituyendo (7), (8) y (9) en la ecuación (6) obtenemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = f(x) + L_t^{-1} g(x, t) - L_t^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) - L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad (10)$$

de donde obtenemos el algoritmo recursivo

$$\begin{cases} u_0(x, t) = f(x) + L_t^{-1}g(x, t), \\ u_{n+1}(x, t) = L_t^{-1}Ru_n(x, t) - L_t^{-1}A_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11)$$

Con el algoritmo recursivo establecido en la ecuación (11) podemos tener una aproximación a la solución de (1), (2) por medio de la serie

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k u_n(x, t), \quad \text{donde} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = u(x, t) \quad (12)$$

La descomposición de la solución en serie, generalmente converge muy rápido. La rapidez de esta convergencia hace que se necesiten pocos términos para el análisis de la solución. Las condiciones para las cuales el método converge han sido estudiadas en los trabajos [16], [17], [18] y [19] principalmente.

3 La Ecuación Lineal de Black-Scholes

La teoría de la valoración de opciones fue revolucionada con la publicación del trabajo de Fisher Black y Myron Scholes [20] en el año de 1973, en él presentaron su conocida fórmula para la determinación del valor teórico de una opción. Durante los años posteriores el problema de la valoración de opciones ha ocupado una gran parte del tiempo de los investigadores en el campo de las finanzas matemáticas. Más recientemente, las técnicas y modelos de valoración de opciones desarrollados, muchos de ellos a partir del modelo Black-Scholes han sido aplicados a una gran variedad de situaciones que van más allá del simple mercado de opciones y productos derivados. El modelo de Black-Scholes es una ecuación diferencial parcial cuya solución describe el valor de un opción (de venta o de compra) del tipo europeo [20], [2]. En la actualidad, el modelo se utiliza ampliamente para estimar la fijación de precios de opciones distintas de las europeas. Para una opción europea (ya sea de compra o de venta) cuyo valor depende del precio del activo subyacente y del tiempo, la cual no paga ningún dividendo, la ecuación es:

$$V_\tau(S, \tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}(S, \tau) + rSV_S(S, \tau) - rV(S, \tau) = 0, \quad (13)$$

donde V es el precio de la opción como función del precio del activo subyacente S y del tiempo τ ; con $0 \leq \tau < T$, y $S \geq 0$; en el modelo la tasa de interés libre de riesgo r y la volatilidad σ se consideran constantes.

En el caso de una opción europea de compra, el valor puede ser obtenido resolviendo (3), con las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} V_c(S, T) = \max(S - K, 0) & : \tau = T \\ V_c(0, \tau) = 0 & : S = 0 \\ V_c(S, \tau) \rightarrow S - Ke^{-r(T-\tau)} & : S \rightarrow \infty \end{cases}$$

de donde obtenemos, siendo K el precio de ejercicio

$$V_c(S, \tau) = SN \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-\tau}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-\tau) \right] \right) - e^{-r(T-\tau)}KN \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-\tau}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-\tau) \right] \right),$$

donde

$$N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Aquí $S = S(\tau)$ para $\tau \in [0, T]$; la solución de (3) proporciona tanto una fórmula de valoración de opciones para una opción europea y una cartera de cobertura que se replica el reclamo contingente suponiendo que:

- 1.- El precio del activo subyacente S sigue un movimiento browniano geométrico.
- 2.- La volatilidad σ (mide la desviación estándar de los rendimientos) y la tasa de interés libre de riesgo r son constantes para $0 \leq \tau \leq T$ y no se pagan dividendos en ese período de tiempo.
- 3.- El mercado es libre de fricciones, por lo que no hay costos de transacción (honorarios o impuestos), todas las partes tienen acceso inmediato a toda la información y todos los valores y los créditos están disponibles en cualquier momento y en cualquier cantidad. Es decir, todas las variables son perfectamente divisibles y pueden tomar cualquier número real. Por otra parte, el comercio individual no influirá en el precio.
- 4.- No hay oportunidades de arbitraje, lo que significa que no hay oportunidades de hacer al instante una ganancia libre de riesgo.

Bajo las suposiciones anteriores el mercado se dice que es completo, lo que significa que cualquier derivado y cualquier activo se puede replicar o cubrir con una cartera de otros activos en el mercado.

La ecuación lineal (3) ha sido estudiada desde muchos puntos de vista, por ejemplo, desde el punto de vista de la teoría de operadores se ha estudiado en [22]; desde el punto de vista de la física-matemáticas el estudio se ha abordado en [7] y en [24]. Los supuestos restrictivos mencionados en el párrafo anterior no se cumplen en general en la realidad. En la siguiente sección tratando de establecer un modelo más realista para obtener el valor de una opción, estudiaremos el modelo de Black-Scholes para un caso no lineal.

4 Una Versión no Lineal de la Ecuación de Black-Scholes

Los costos de transacción (véase por ejemplo [6] y [5]), grandes preferencias de los inversionistas (ver [7, 8]) y los mercados incompletos [9] son algunos de los motivos por los que pueden llegar a ser poco realista los supuestos 1-4 del final de la sección anterior y los modelos clásicos al tomar en cuenta esas características del mercado, se transforman en ecuaciones no lineales del tipo convección-difusión (parabólicas degeneradas), donde la volatilidad σ puede depender del tiempo τ , el precio del activo subyacente S y algunas de las derivadas del precio de la opción V misma.

Hay varios modelos de costos de transacción cada uno de ellos da como resultado ecuaciones de Black-Scholes no lineales para opciones europeas y americanas y una función de la volatilidad no constante sería

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(\tau, S, V_S, V_{SS}) \quad (14)$$

Han existido muchos y variados enfoques para mejorar el modelo mediante el tratamiento de la volatilidad y los enfoques han derivado en una función de la volatilidad modificada $\hat{\sigma}$ que se utiliza modelar los efectos de los costos de transacción y la iliquidez de los mercados, $\hat{\sigma}$ resulta ser la razón de la no linealidad de (3). En [8] Frey y Stremme y después Frey y Patie [7] considerando estos efectos en los precios han obtenido la volatilidad modificada como

$$\hat{\sigma}(\tau, S, V_S, V_{SS}) = \frac{\sigma}{1 - \rho S \lambda(S) u_{SS}} \quad (15)$$

donde σ es la volatilidad tradicional, ρ es una constante y λ (precio del riesgo) es una función continua positiva que describe el perfil de iliquidez del mercado. Bordag y Chmakova en [10]

suponen que λ es constante y resuelven la ecuación de Black-Scholes con la volatilidad modificada (15).

En [3] y [7] los autores han obtenido una ecuación de Black-Scholes generalizada, en la cual la tasa de interés $r \geq 0$ y la volatilidad $\sigma > 0$ son constantes, la ecuación resultante es

$$\begin{cases} V_\tau(S, \tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{V_{SS}(S, \tau)}{(1 - \rho S \lambda(S) V_{SS}(S, \tau))^2} + r S V_S(S, \tau) - r V(S, \tau) = 0, \\ V(S, T) = f(S), \quad 0 < S < \infty. \end{cases} \quad (16)$$

En [11] los autores han estudiado la existencia y unicidad de (16), en ese estudio la función de pago f debe satisfacer: $f(e^x)$ es Lipschitz-continua y $e^{-a\sqrt{x^2+1}}f(e^x)$ es acotada para alguna $a \geq 0$. Si consideramos el caso especial, en el cual el precio del riesgo es unitario, $\lambda(S) = 1$, en este caso, si además suponemos que $\|\rho S V_{SS}\| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ apropiadamente pequeño (bajo impacto de cobertura) y considerando la aproximación funcional $\frac{1}{(1-F)^2} \approx 1 + 2F + \mathcal{O}(F)^3$ tenemos que la ecuación (16) se transforma en

$$\begin{cases} V_\tau(S, \tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}(S, \tau)(1 + 2\rho S V_{SS}(S, \tau)) + r S V_S(S, \tau) - r V(S, \tau) = 0, \\ V(S, T) = f(S), \quad S \in [0, \infty). \end{cases} \quad (17)$$

Notar que considerando el cambio $t = T - \tau$, $V(S, \tau) = u(S, t)$, el problema (17) toma la forma

$$\begin{cases} u_t(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 u_{SS}(S, t)(1 + 2\rho S u_{SS}(S, t)) + r S u_S(S, t) - r u(S, t) = 0, \\ u(S, 0) = f(S), \quad S \in [0, \infty). \end{cases} \quad (18)$$

5 Una Ecuación de Black-Scholes no Lineal Estudiada con ADM

Comparando (18) con la ecuación (3) tenemos que $g(S, t) = 0$, L_t , R y N son:

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad R = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + r S \frac{\partial}{\partial S} - r, \quad N = \rho \sigma^2 S^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial S^2} \right)^2. \quad (19)$$

Haciendo uso de la ecuación (11) a través de ADM tenemos recursivamente

$$\begin{cases} u_0(S, t) = f(S), \\ u_{n+1}(S, t) = L_t^{-1} R u_n(S, t) - \rho \sigma^2 S^3 L_t^{-1} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (20)$$

en el presente caso, el término no lineal es $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \right)^2$, es decir,

$$F(u) = u_{ss}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (21)$$

usando ADM, la ecuación (7) nos da

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

entonces, evaluando [13]

$$\begin{aligned} F(u) &= u_{ss}^2 = (u_{0,ss} + u_{1,ss} + u_{2,ss} + u_{3,ss} + u_{4,ss} + u_{5,ss} + \dots)^2 \\ &= u_{0,ss}^2 + 2u_{0,ss}u_{1,ss} + 2u_{0,ss}u_{2,ss} + 2u_{0,ss}u_{3,ss} + 2u_{0,ss}u_{4,ss} + 2u_{0,ss}u_{5,ss} + u_{1,ss}^2 \\ &\quad + 2u_{1,ss}u_{2,ss} + 2u_{1,ss}u_{3,ss} + 2u_{1,ss}u_{4,ss} + 2u_{1,ss}u_{5,ss} + u_{2,ss}^2 + 2u_{2,ss}u_{3,ss} + 2u_{2,ss}u_{4,ss} \end{aligned} \quad (22)$$

$$+2u_{2,ss}u_{5,ss} + u_{3,ss}^2 + 2u_{3,ss}u_{4,ss} + 2u_{3,ss}u_{5,ss} + u_{4,ss}^2 + 2u_{4,ss}u_{5,ss} + u_{5,ss}^2 + \dots$$

la expresión anterior se puede reorganizar agrupando todos los términos en los cuales los subíndices de las componentes de u_n suman lo mismo. Con esto obtenemos los polinomios de Adomian para u_{ss}^2 , los cuales son

$$\begin{aligned} A_0 &= u_{0,ss}^2 \\ A_1 &= 2u_{0,ss}u_{1,ss} \\ A_2 &= 2u_{0,ss}u_{2,ss} + u_{1,ss}^2 \\ A_3 &= 2u_{0,ss}u_{3,ss} + 2u_{1,ss}u_{2,ss} \\ A_4 &= 2u_{0,ss}u_{4,ss} + 2u_{1,ss}u_{3,ss} + u_{2,ss}^2 \\ A_5 &= 2u_{0,ss}u_{5,ss} + 2u_{1,ss}u_{4,ss} + 2u_{2,ss}u_{3,ss} \\ &\vdots \end{aligned}$$

A continuación se expondrá un ejemplo de una ecuación de Black-Scholes no lineal, el cual se resolverá a través del método ADM, el ejemplo será diferente a los estudiados en [25] y tiene como objetivo mostrar la bondad del método; lo cual quedará mostrado usando una aproximación de solamente cuatro términos y comparando con una solución exacta encontrada en [12]; en el trabajo de J. E. Esekun [12] se obtiene una solución de (18) haciendo uso de ondas viajeras en medios porosos.

Ejemplo En este ejemplo, consideraremos el caso en el cual $r = 0.08$. Aquí proponemos como valor inicial $f(S) = S + 900\sqrt{S} + 2025$, $\sigma = 0.09$ y $|\rho| = 0.01$, haciendo notar que se satisface lo requerido para la convergencia en [11], es decir, para $a = 4$, es decir, se cumple que

$$|e^{-4\sqrt{S^2+1}}f(e^S)| \leq 20 \text{ para todo } S \in [0, \infty).$$

Para el esquema de ADM tenemos $u_0(S, t) = S + 900\sqrt{S} + 2025$ y así los polinomios de Adomian resultan ser

$$\begin{aligned} A_0 &= u_{0,SS}^2 = \frac{50625}{S^3} \\ A_1 &= 2u_{0,SS}u_{1,SS} = \frac{-3947.48t}{S^3} \\ A_2 &= 2u_{0,SS}u_{2,SS} + u_{1,SS}^2 = \frac{170.305t^2}{S^3} \end{aligned}$$

Con estos resultados, y considerando el cambio de variable $t = T - \tau$ resulta $L_t^{-1} = -\int_0^t$ con $t \in [0, T]$. Calculando las u_n :

$$u_0(S, t) = S + 900\sqrt{S} + 2025,$$

$$u_1(S, t) = -L_t^{-1}Ru_0(S, t) - \rho\sigma^2L_t^{-1}S^3A_0(u_0) = -4.10063t - (-0.08 + 0.91125\sqrt{S} + 0.08(1 + 450/\sqrt{S})S)t,$$

$$u_2(S, t) = -L_t^{-1}Ru_1(S, t) - \rho\sigma^2L_t^{-1}S^3A_1(u_0, u_1) = 0.08t + [0.168177t^2 + 0.756911\sqrt{S}]t^2 + 0.0032St^2,$$

$$u_3(S, t) = -L_t^{-1}Ru_2(S, t) - \rho\sigma^2L_t^{-1}S^3A_2(u_0, u_1, u_2) = 0.08t - 0.0045982t^3 - 0.0103476\sqrt{S}t^3 - 0.00008533St^3,$$

y por tanto la solución aproximada de la ecuación 18 con la condición inicial dada por $f(S) = S + 900\sqrt{S} + 2025$ con las condiciones del mercado dadas en este ejemplo esta dada por:

$$u_{ADM}(S, t) \approx u_0(S, t) + u_1(S, t) + u_2(S, t) + u_3(S, t). \quad (23)$$

En los cuadros 1, 2 y 3 haremos una comparación de la solución de la ecuación de Black-Scholes no lineal obtenida con (23) con la solución exacta obtenida en [12], además en las figuras 1, 2 y 3

comparación de resultados para $t = 0.25$			
	$u_{exac}(S, t)$	$u_{ADM}(S, t)$	Error
0.0	2066.95384	2066.02491	0.01980158
1.0	2977.22913	2926.79711	0.01693924
2.0	3345.86328	3300.49497	0.01620582
3.0	3644.86483	3587.47609	0.01574509
4.0	3889.50441	3889.56933	0.01540944
5.0	4105.15518	4042.97674	0.01514643

Cuadro 1: Tabla con $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

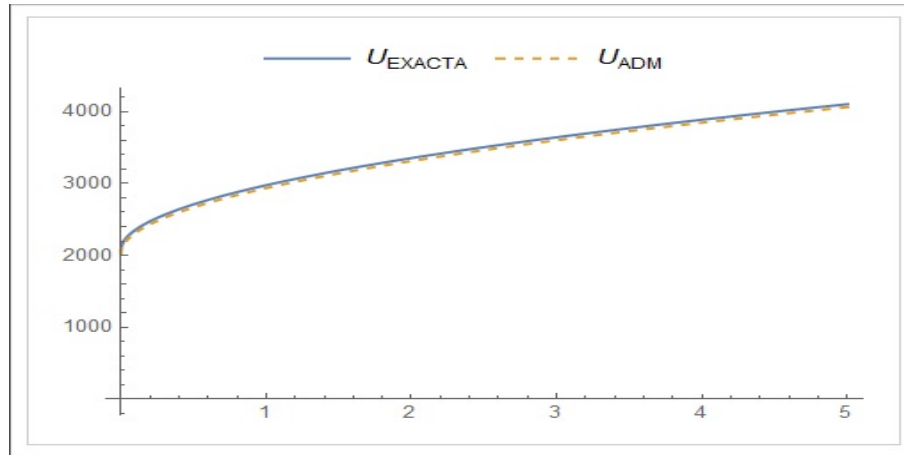


Figura 1: cuando $t=0.25$

comparación de resultados para $t = 0.50$			
	$u_{exac}(S, t)$	$u_{ADM}(S, t)$	Error
0.0	2109.77689	2027.04927	0.03921154
1.0	3029.42304	2927.59377	0.03361342
2.0	3410.93873	3301.19729	0.03217338
3.0	3703.91870	3588.10604	0.03126761
4.0	3951.06919	3830.13826	0.03060714
5.0	4168.93213	4043.49190	0.03008929

Cuadro 2: Tabla con $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

se hacen unas gráficas para ilustrar los resultados numéricos obtenidos en las tablas correspondientes a los tiempos $t = 0.25$, $t = 0.50$ y $t = 0.75$.

En presente trabajo, se ha estudiado un modelo de Black-Scholes no lineal para la valoración de

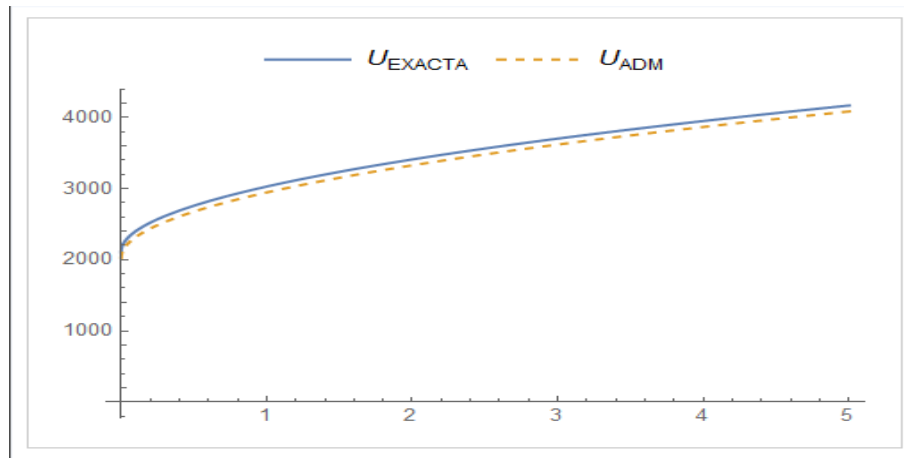


Figura 2: cuando $t=0.50$

comparación de resultados para $t = 0.75$			
	$u_{exac}(S, t)$	$u_{ADM}(S, t)$	Error
0.0	2153.48713	2028.07313	0.05823764
1.0	3082.60073	2928.38996	0.05002619
2.0	3468.03797	3301.89918	0.04790570
3.0	3764.02704	3588.73556	0.04657020
4.0	4013.71433	3830.70678	0.04559556
5.0	4233.81223	4044.00668	0.04483089

Cuadro 3: Tabla con $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

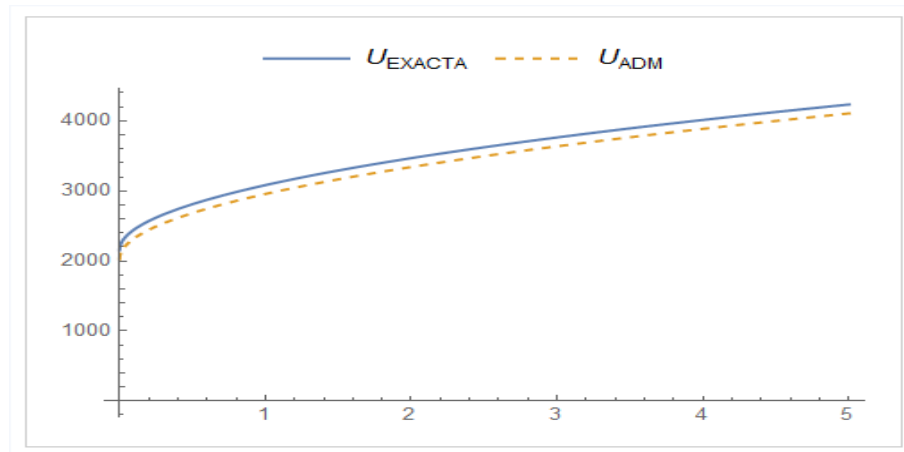


Figura 3: cuando $t=0.75$

opciones; la solución se ha obtenido usando el método de descomposición de Adomian (ADM), y como podemos ver en los resultados obtenidos en un ejemplo para un modelo ilustrativo las aproximación es aceptable y en medida que el tiempo aumenta la diferencia entre el valor pactado (condición inicial del modelo) y el dado por la aproximación aumenta, lo cual resulta natural en el mercado, pues eso se debe a la incertidumbre propia del mercado.

Referencias

- [1] M. Tatari, M. Dehghan, The use of the Adomian decomposition method for solving multipoint boundary value problems, *The Royal Swedish Academy of Sciences* **73**, 672–676 (2006).
- [2] A. M. Wazwaz, *Partial Differential Equations: Methods and Applications*. Lisse, Netherlands: Balkema Publishers, (2002).
- [3] R. Frey, Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging, ed. by R. Gibson, Risk Publications, pp. 125-136, Risk Publications, London, (2000).
- [4] L. A. Bordag, On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model, *Mathematical Control Theory and Finance*, pp. 71-94, (2008).
- [5] G. Barles, H. M. Soner; Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black–Scholes equation; *Finance Stoch.*, **2**, 369-397, (1998).
- [6] P. Boyle, T. Vorst; Option replication in discrete time with transaction costs; *J. Finance*, **47**, 271-293, (1992).
- [7] R. Frey, P. Patie, Risk Management for Derivatives in Illiquid Markets: A Simulation Study *Advances in Finance and Stochastics*, pp 137-159, (2002).
- [8] R. Frey, A. Stremme, Market volatility and feedback effects from dynamic hedging, *Math. Finance*, **4**, 351-374, (1997).
- [9] H. M. Soner, N. Touzi, Superreplication under gamma constraints; *SIAM J. Contr. Optim.*, **39**, 73-96, (2001).
- [10] L. Bordag, A. Chmakova; Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives; *Int. J. Theor. Appl. Finance*, **10**, 1-21, (2007).
- [11] H. Liu, J. Yong, Option pricing with an illiquid underlying asset market, *Journal of Economic Dynamics and Control* **29**, 2125-2156, (2005).
- [12] J. E. Esekon, Analytic solution of a nonlinear Black-Scholes equation, *Int. Journal of Pure and Applied Math.*, **82**, No. 4, 547-555, (2013).
- [13] A. M. Wazwaz, A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators; *Appl. Math. and Computation*; **111**, 1, 53-69, (2000).
- [14] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, (1994).
- [15] G. Adomian, A review of the decomposition method in applied mathematics; *J. Math. Anal. Appl.* **135**, Issue 2, 501-544 (1988).
- [16] Y. Cherruault, Convergence of Adomian’s method; *Kybernetes* **18**(2), 31-38 (1989).
- [17] Y. Cherruault, G. Adomian, Decomposition methods: a new proof of convergence; *Math. Comput. Modelling* **18**(12), 103-106 (1993).
- [18] K. Abbaoui, Y. Cherruault, Convergence of Adomian’s method applied to differential equations; *Comput. Math. Appl.* **28**(5), pp. 103-109 (1994).

-
- [19] K. Abbaoui, Y. Cherruault, New ideas for proving convergence of decomposition methods: *Comput. Math. Appl.* **29**(7), pp. 103-108 (1995).
 - [20] F. Black and M. Scholes, *The Pricing Options and Corporate Liabilities*, *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659; (1973).
 - [21] R. C. Merton, *Theory of Rational Options Pricing*, *Bell Journal of Economic and Management Science* (**4**), 141-183, (1973).
 - [22] O. González-Gaxiola, José A. Santiago; *The Black-Scholes Operator as the Generator of a C_0 -Semigroup and Applications*, *Int. Journal of Pure and Applied Math.* Vol. **76**, No. 2, 191-200; (2012).
 - [23] Juan M. Romero, O. González-Gaxiola, J. Ruiz de Chávez and R. Bernal-Jaquez; *The Black-Scholes Equation and Certain Quantum Hamiltonians*, *Int. Journal of Pure and Applied Math.* Vol. **67**, No. 2, 165-173; (2011).
 - [24] S. Fassari, F. Rinaldi; *On Some Potential Applications of the Heat Equation with a Repulsive Point Interaction to Derivative Pricing*, *Rendiconti di Matematica, Serie VII* Vol. **31**, 35-52, Roma (2011).
 - [25] O. González-Gaxiola, J. Ruiz de Chávez, J. A. Santiago; *A Nonlinear Option Pricing Model Through the Adomian Decomposition Method*, *Int. Journal of Applied and Comput. Math.*, **70**, 1-15; (2015).

Estudio de las bifurcaciones en un modelo biofísico de excitabilidad neuronal

Marco Arieli Herrera Valdez Lucía Cervantes Gómez

mahv13@gmail.com

lcervant@fcfm.buap.mx

UNAM

BUAP

Leonardo Remedios Santiago

hostem.darkleo@gmail.com

BUAP

Resumen

Hodgking y Huxley plantearon los primeros modelos de excitabilidad celular. Actualmente hay dos tendencias principales, una de ellas es trabajar en modelos simplificados los cuales incorporan variables que representan las características principales para el estudio de la excitabilidad celular, mientras que la otra es trabajar con modelos de dimensión alta los cuales incluyen mayor información experimental del proceso celular. En este trabajo presentaremos el análisis de un modelo bidimensional que se obtuvo mediante leyes físicas que rigen los procesos celulares. Estudiaremos las bifurcaciones presentes al variar dos parámetros, la proporción de los canales de Na^+ y K^+ , $\frac{a_K}{a_N}$, y la corriente de estímulo, I_s .

1 Introducción

Uno de los trabajos mas importantes en el estudio de células excitables fue el de Hodgking y Huxley, cuyo trabajo consistía en describir el proceso de transmisión eléctrica a lo largo del axón gigante de calamar a través de un sistema de 4 ecuaciones diferenciales no lineales y uno de sus resultados importantes es que este proceso se puede ver como un sistema dinámico. Este trabajo dio surgimiento al estudio de la excitabilidad celular en dos principales tendencias. Una de éstas es considerar sistemas simplificados bidimensionales los cuales incorporan variables que representan las características principales para el estudio de excitabilidad celular, aunque no necesariamente están asociadas a variables biofísicas, mientras que la otra tendencia es considerar modelos de dimensión alta los cuales incluyen mayor información experimental del proceso celular. En [3] se propone un modelo genérico de baja dimensión que media estas dos tendencias, el cual, en contraste con con las formulaciones fenomenológicas como las de los modelos

de FitzHugh-Nagumo o Izhikevich, se obtiene mediante las leyes físicas que rigen los procesos celulares. Este modelo está conformado por dos variables, una variable que corresponde a v , el potencial de membrana, y otra más lenta que corresponde a una variable de recuperación que en modelos biofísicos representa típicamente una población de canales que tienden a restaurar el potencial de membrana.

2 Modelo termodinámico de excitabilidad celular

El modelo que estudiamos en este trabajo es un caso concreto del propuesto en [3] y esta expresado mediante dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} C\partial_t v &= -I_N(v, w; p) - I_k(v, w; p) - I_{NK}(v, w; p) - I_S \\ \partial_t w &= r_w (f_w(v; p) - w) \left(\exp^{(-1+s_w)n_w \frac{v-v_w}{v_T}} + \exp^{s_w n_w \frac{v-v_w}{v_T}} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

En donde

$$\begin{aligned} I_K(v, w; p) &= 2w\bar{a}_K \sinh \left(s_K \frac{v - v_K}{v_T} \right) \\ I_N(v, w; p) &= 2(1 - w)f_m(v; p)\bar{a}_N \sinh \left(s_N \frac{v - v_N}{v_T} \right) \\ I_{NK}(v, w; p) &= 2\bar{a}_{NK} \sinh \left(s_{NK} \frac{v - 3v_N + 2v_K - v_{ATP}}{v_T} \right) \\ f_m(v; p) &= \frac{\exp^{n_m \frac{v-v_m}{v_T}}}{1 + \exp^{n_m \frac{v-v_m}{v_T}}} \\ f_w(v; p) &= \frac{\exp^{n_w \frac{v-v_w}{v_T}}}{1 + \exp^{n_w \frac{v-v_w}{v_T}}} \end{aligned}$$

En este modelo v representa el potencial transmembranal y w la proporción de los canales activados de K^+ .

Un ejemplo de valores de parámetros que simulan la actividad eléctrica de las células corticales piramidales se encuentran en la tabla 1.

Normalizando las amplitudes dividiendo por $\bar{a}_N$ tenemos el modelo normalizado:

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \eta (-J_N(v, w; p) - J_k(v, w; p) - J_{NK}(v, w; p) - J_S) \\ \partial_t w &= r_w (f_w(v; p) - w) \left(\exp^{(1-s_w)n_w \frac{v-v_w}{v_T}} + \exp^{-s_w n_w \frac{v-v_w}{v_T}} \right) \end{aligned}$$

donde $\eta = \frac{\bar{a}_N}{C}$ y $J_x = \frac{I_x}{\bar{a}_N}$.

3 Canales iónicos

Comenzaremos mostrando el diagrama de bifurcación del modelo variando la proporción de canales iónicos $\frac{\bar{a}_K}{\bar{a}_N}$ y fijando la corriente de entrada en $I_S = 0$.

Podemos observar los siguientes cambios importantes:

Parámetro	Valor	U.	Descripción
C	20	mF	Capacidad de la Membrana
v_T	26.7268	mV	Potencial (termal) de Boltzmann a 37°C
v_K	-90	mV	Potencial de Nerst para K^+
v_N	70	mV	Potencial de Nerst para Na^+
v_{ATP}	-450	mV	Potencial de inversión para transporte basado en ATP
v_m	-25	mV	Potencial de activación media para canales transitorios de Na^+ v -dependientes
v_w	-1	mV	Potencial de activación media para canales transitorios de K^+ v -dependientes
n_m	5	—	Carga de compuerta para la activación de los canales transitorios de Na^+
n_w	3	—	Carga de compuerta para la activación de los canales de K^+
r_w	0.1	—	Tasa basal para el cambio conformacional cerrado $\rightleftharpoons$ abierto en los canales de K^+
s_w	0.7	—	Sesgo de asimetría para el tiempo constante de K^+
$\bar{a}_K$	$\epsilon \bar{a}_N$	pA	Amplitud máxima para la corriente de K^+
$\bar{a}_N$	1000	pA	Amplitud máxima para la corriente de Na^+
$\bar{a}_{NK}$	50	pA	Amplitud máxima para la corriente de Na^+/K^+ ATPasa
s_K, s_N, s_{NK}	$\frac{1}{2}$	nV	Voltaje de polarización para las corrientes transmembranales
I_S	—	nA	Corriente de estímulo

Tabla 1: Parámetros.

- 1.- Cambio de tipo de puntos de equilibrio, de nodos estables a focos estables.
- 2.- Pérdida de estabilidad de los puntos de equilibrio a través de una bifurcación de Hopf.
- 3.- Desaparición del ciclo límite vía una bifurcación de puntos de equilibrio.
- 4.- Coexistencia de tres puntos de equilibrio dos de ellos inestables y uno estable.

3.1 Bifurcación de Hopf

Mediante simulaciones hemos encontrado que el valor crítico es $\epsilon_0 = 7.65589876$ y el punto de equilibrio correspondiente es $E_0 = (-18.535127, 0.1225755)$. La matriz Jacobiana evaluada en este punto de equilibrio es:

$$A = \begin{pmatrix} 0.205699 & -1551.36 \\ 0.00248325 & -0.205699 \end{pmatrix}$$

con valores propios $\lambda_{1,2} \pm 1.95195i$.

Dada la complejidad de las funciones involucradas, se obtuvieron numéricamente algunos valores de la parte real de los valores propios en una pequeña vecindad de ϵ_0 y se utilizó el método de mínimos cuadrados para obtener una aproximación para la función de la parte real de los valores propios de la matriz Jacobiana. De esta forma tenemos que $\mu(\epsilon) = -4.67049 + 0.610041\epsilon$ y por lo tanto $\mu'(\epsilon_0) = 0.610041 \neq 0$, por lo tanto la condición de transversalidad se cumple. Véase figura 2.

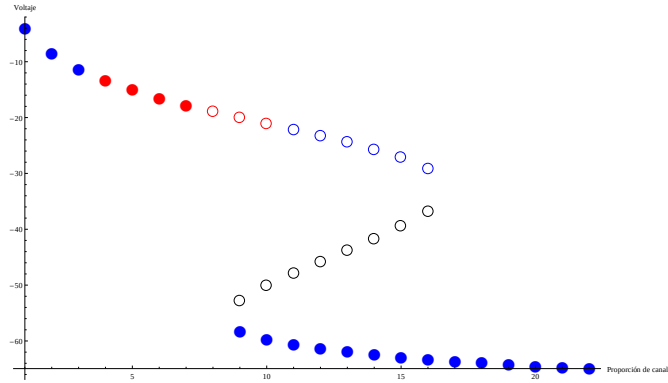


Figura 1: Diagrama de bifurcación variando la proporción de los canales iónicos. Los puntos azules corresponden a nodos estables, los puntos rojos a focos estables, los círculos rojos corresponden a focos inestables, los círculos azules corresponden a nodos inestables y los círculos negros corresponden a puntos sillas.

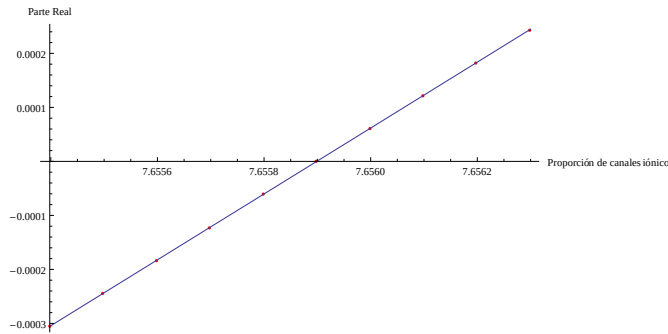


Figura 2: Ajuste de la parte real de los valores propios.

Para calcular el parámetro de la condición de no degeneración haremos primero un cambio de coordenadas para trasladar el punto de equilibrio al origen y fijaremos el valor del parámetro en el valor crítico I_0 , es decir, haremos $v = -18.535127 + \gamma_1$ y $w = 0.1225755 + \gamma_2$. Denotaremos este nuevo sistema como:

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma_1 &= F(\gamma_1, \gamma_2) \\ \partial_t \gamma_2 &= G(\gamma_1, \gamma_2)\end{aligned}\tag{2}$$

Haciendo ahora el cambio lineal variables $\gamma_1 = x$ y $\partial_{\gamma_2} F(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_2 = -\partial_{\gamma_1} F(\gamma_1, \gamma_2) - x - \omega y$, donde ω es la parte imaginaria del valor propio de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio, tenemos el nuevo sistema:

$$\begin{aligned}\partial_t x &= -\omega y + f(x, y) \\ \partial_t y &= \omega x + g(x, y)\end{aligned}\tag{3}$$

donde

$$f(x, y) = F(\gamma_1, \gamma_2) + \omega y$$

y

$$g(x, y) = \frac{-(\partial_{\gamma_1} F(\gamma_1, \gamma_2) F(\gamma_1, \gamma_2) + \partial_{\gamma_2} F(\gamma_1, \gamma_2) G(\gamma_1, \gamma_2))}{\omega - \omega x},$$

así el parámetro de no degeneración $a = \frac{1}{16} (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega} (f_{xy} (f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy} (g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}) = 0.139645 \neq 0$, Con esto demostramos la presencia de una bifurcación de Hopf hipercrítica.

4 Corriente de estímulo

En esta sección haremos un estudio del modelo de la siguiente manera: se fijara una proporción de canales y se estudiara el comportamiento del sistema variando la corriente de estímulo.

4.1 Análisis proporción $\frac{\bar{a}_K}{\bar{a}_N} = 8$

Analizaremos el modelo con la proporción $\frac{\bar{a}_K}{\bar{a}_N} = 8$ y tomando como parámetro de interés la corriente de estímulo I_S . El comportamiento de los puntos de equilibrio como función de la corriente de estímulo lo podemos observar en la figura 3. En este diagrama de bifurcación podemos observar los siguientes cambios:

- 1.- Cambio de tipo de puntos de equilibrio, de nodos estables a focos estables.
- 2.- Perdida de estabilidad y coexistencia con un ciclo límite estable mediante una bifurcación de Hopf.
- 3.- Surgimiento de dos puntos de equilibrio y desaparición de ciclo límite mediante una bifurcación Silla-Nodo.
- 4.- Desaparición de dos puntos de equilibrio inestables.

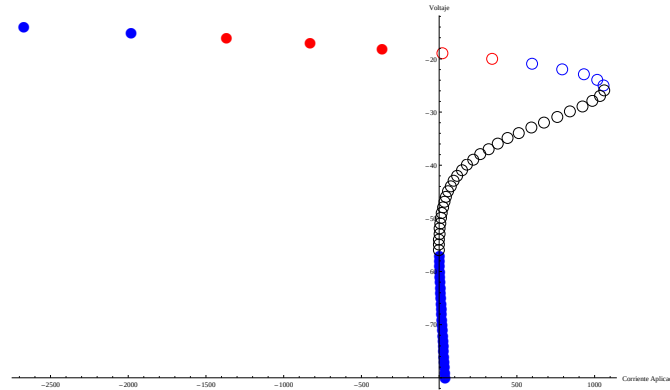


Figura 3: Diagrama de bifurcación con proporción 8. Los puntos azules corresponden a nodos estables, los puntos rojos a focos estables, los círculos rojos corresponden a focos inestables, los círculos azules corresponden a nodos inestables y los círculos negros corresponden a puntos si-las.

4.2 Bifurcación de Hopf

Mediante simulaciones hemos encontrado que el valor crítico es $I_0 = -107.141679$ y el punto de equilibrio correspondiente es $E_0 = (-18.645324, 0.1212514)$. La matriz Jacobiana evaluada en este punto de equilibrio es:

$$A = \begin{pmatrix} 0.206153 & -1608.5 \\ 0.0024655 & -0.206153 \end{pmatrix}$$

con valores propios $\lambda_{1,2} \pm 1.9807419i$. El comportamiento de los valores propios como función de la corriente aplicada lo podemos observar en la figura 4.

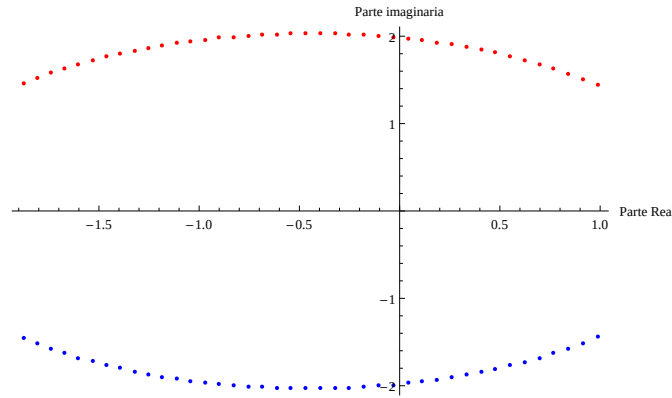


Figura 4: Comportamiento de los valores propios.

Dada la complejidad de las funciones involucradas, se obtuvieron numéricamente algunos valores de la parte real de los valores propios en una pequeña vecindad de I_0 y se utilizó el método de mínimos cuadrados para obtener una aproximación para la función de la parte real de los valores propios de la matriz Jacobiana. De esta forma tenemos que $\mu(I) = .205163 + .00191487 I$ y por lo tanto $\mu(I_0) = .00191487 \neq 0$, por lo tanto la condición de transversalidad se cumple. Véase figura 5.

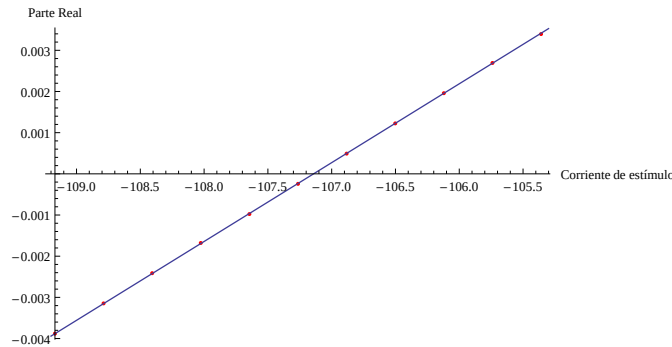


Figura 5: Ajuste de la parte real de los valores propios.

Para calcular el parámetro de la condición de no degeneración haremos primero un cambio de coordenadas para trasladar el punto de equilibrio al origen y fijaremos el valor del parámetro en el valor crítico I_0 , es decir, haremos $v = -18.645324 + \gamma_1$ y $w = .1212514 + \gamma_2$. Denotaremos este nuevo sistema como:

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma_1 &= F(\gamma_1, \gamma_2) \\ \partial_t \gamma_2 &= G(\gamma_1, \gamma_2)\end{aligned}\tag{4}$$

Haciendo ahora el cambio lineal variables $\gamma_1 = x$ y $\partial_{\gamma_2} F(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_2 = -\partial_{\gamma_1} F(\gamma_1, \gamma_2) - x - \omega y$, donde ω es la parte imaginaria del valor propio de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio, tenemos el nuevo sistema:

$$\begin{aligned}\partial_t x &= -\omega y + f(x, y) \\ \partial_t y &= \omega x + g(x, y)\end{aligned}\tag{5}$$

donde

$$f(x, y) = F(\gamma_1, \gamma_2) + \omega y$$

y

$$g(x, y) = \frac{-(\partial_{\gamma_1} F(\gamma_1, \gamma_2) F(\gamma_1, \gamma_2) + \partial_{\gamma_2} F(\gamma_1, \gamma_2) G(\gamma_1, \gamma_2))}{\omega - \omega x},$$

así el parámetro de no degeneración $a = \frac{1}{16} (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega} (f_{xy} (f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy} (g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx} g_{xx} + f_{yy} g_{yy}) = .141525 \neq 0$, Con esto demostramos la presencia de una bifurcación de Hopf subcrítica.

4.3 Bifurcación Silla-Nodo

Estudiando la función

$$I_{\infty}(v) = -2(1 - f_w(v))f_m(v)\bar{a}_N \sinh\left(\frac{v - v_N}{v_T}\right) - 2f_w(v)\bar{a}_K \sinh\left(\frac{v - v_K}{v_T}\right) - 2\bar{a}_{NK} \sinh\left(\frac{v - v_{NK}}{v_T}\right)$$

obtenemos que el valor crítico para esta bifurcación es $I_0 = 1.42028$ y el punto de equilibrio asociado es $E = (v_E, w_E) = (-56.2798, 0.00201528)$. La matriz Jacobiana evaluada en este punto de equilibrio es:

$$A = \begin{pmatrix} .121978 & -540.318 \\ .000145528 & -.644634 \end{pmatrix}$$

con valores propios $\lambda_1 = -.522656$ y $\lambda_2 = 0$. Consideremos la función $\mathbf{I}(v, I_S) = (I_S - I_{\infty}(v))$. Así el parámetro de no degeneración

$$a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{I}(v, I_0)}{\partial v^2} = -0.196588 \neq 0.$$

Por otra parte el parámetro de transversalidad

$$c = \frac{\partial \mathbf{I}(v_E, I_S)}{\partial I_S} = 1 \neq 0,$$

de esta forma demostramos la existencia de una bifurcación Silla- Nodo.

5 Análisis proporción $\frac{\bar{a}_K}{\bar{a}_N} = 20$

Ahora analizaremos el caso en que $\frac{\bar{a}_K}{\bar{a}_N} = 20$, tomando como parámetro de interés la corriente de estímulo I_S . En este caso observamos un diagrama de bifurcación monótono. Véase figura 6.

En este caso observamos los siguientes cambios importantes:

- 1.- Cambio de tipo de puntos de equilibrios, de nodos estables a focos estables.
- 2.- Pérdida de estabilidad y coexistencia con un ciclo límite vía una bifurcación de Hopf.
- 3.- Cambio de tipo de puntos de equilibrio de focos inestables a nodos inestables y coexistencia con un ciclo límite.
- 4.- Cambio de tipo de puntos de equilibrio de nodos inestables a focos inestables y coexistencia con un ciclo límite.
- 5.- Cambio de estabilidad y desaparición del ciclo límite vía una bifurcación de Hopf.
- 6.- Cambio de tipo de puntos de equilibrio, de focos estables a nodos estables.

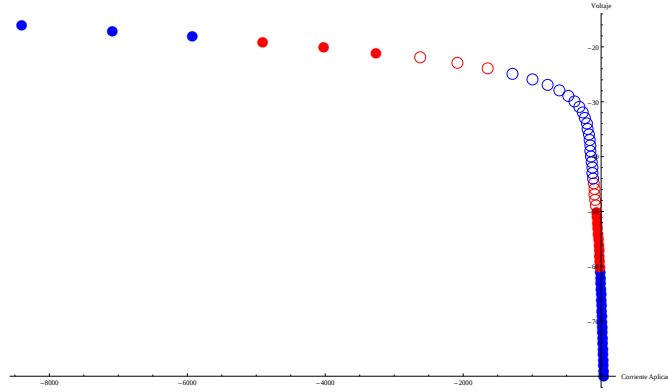


Figura 6: Diagrama de bifurcación con proporción 20. Los puntos azules corresponden a nodos estables, los puntos rojos a focos estables, los círculos rojos corresponden a focos inestables y los círculos azules corresponden a nodos inestables.

5.1 Bifurcación de Hopf Hipercrítica

Mediante simulaciones hemos encontrado que el valor crítico es $I_0 = -72.49179130$ y el punto de equilibrio correspondiente es $E = (-49.11800575, 0.004491369)$. La matriz Jacobiana evaluada en este punto de equilibrio es:

$$A = \begin{pmatrix} .507756 & -1688.15 \\ .000254831 & -.507756 \end{pmatrix}$$

con valores propios $\lambda_{1,2} = \pm 0.415185i$. El comportamiento de los valores propios como función de la corriente aplicada lo podemos observar en la figura 7.

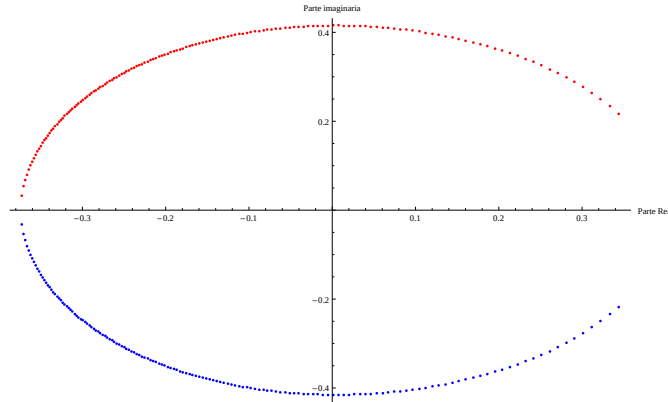


Figura 7: Comportamiento de los valores propios.

Dada la complejidad de las funciones involucradas, se obtuvieron numéricamente algunos valores de la parte real de los valores propios en una pequeña vecindad de I_0 y se utilizó el método de mínimos cuadrados para obtener una aproximación de la parte real de los valores propios de la matriz Jacobiana en función de la corriente de estímulo. Así tenemos que $\mu(I) = -0.658935 - .00908979 I$ y por lo tanto $\mu'(I_0) = -.00908979 \neq 0$, por lo tanto la condición de transversalidad se cumple. Véase figura 8.

Para calcular el parámetro de la condición de no degeneración al igual que el caso anterior haremos primero un cambio de coordenadas para trasladar el punto de equilibrio al origen y fijaremos el valor del parámetro en el valor crítico I_0 , es decir, haremos $v = -49.11800575 + \gamma_1$ y $w = .004491369 + \gamma_2$. Vamos a denotar este nuevo sistema como:

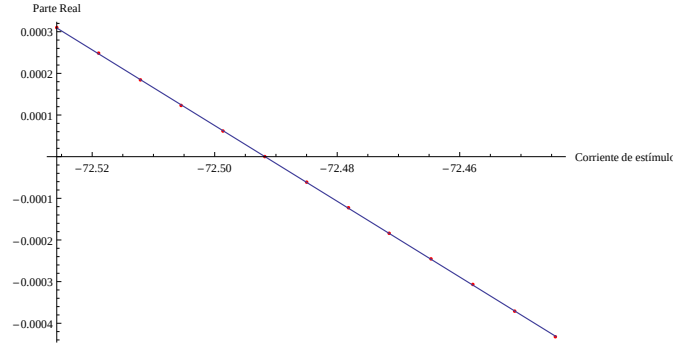


Figura 8: Ajuste de la parte real de los valores propios.

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma_1 &= F(\gamma_1, \gamma_2) \\ \partial_t \gamma_2 &= G(\gamma_1, \gamma_2)\end{aligned}\tag{6}$$

Haciendo ahora el cambio lineal variables $\gamma_1 = x$ y $\partial_{\gamma_2} F(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_2 = -\partial_{\gamma_1} F(\gamma_1, \gamma_2) - x - \omega y$, donde ω es la parte imaginaria del valor propio de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio, tenemos el nuevo sistema:

$$\begin{aligned}\partial_t x &= -\omega y + f(x, y) \\ \partial_t y &= \omega x + g(x, y)\end{aligned}\tag{7}$$

donde

$$f(x, y) = F(\gamma_1, \gamma_2) + \omega y$$

y

$$g(x, y) = \frac{-(\partial_{\gamma_1} F(\gamma_1, \gamma_2) F(\gamma_1, \gamma_2) + \partial_{\gamma_2} F(\gamma_1, \gamma_2) G(\gamma_1, \gamma_2))}{\omega - \omega x},$$

así el parámetro de no degeneración $a = \frac{1}{16} (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{yyx}) + \frac{1}{16\omega} (f_{xy} (f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy} (g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx} g_{xx} + f_{yy} g_{yy}) = -0.0108955 \neq 0$. Con esto demostramos la presencia de una bifurcación de Hopf hipercrítica de ciclo límite.

5.2 Bifurcación de Hopf Subcrítica

Al igual que en los casos anteriores mediante simulaciones se ha encontrado que el valor crítico es $I_0 = -2963.49920857$ y el punto de equilibrio correspondiente es $E = (-21.44196598, 0.915755867)$. La matriz Jacobiana evaluada en este punto de equilibrio es:

$$A = \begin{pmatrix} 0.219111 & -3505.33 \\ 0.00204601 & -0.219111 \end{pmatrix}$$

con valores propios $\lambda_{1,2} = \pm 2.66907i$. El comportamiento de los valores propios como función de la corriente aplicada lo podemos observar en la figura 9.

Similarmente usando la técnica de mínimos y usando algunos valores de la parte real de los valores propios en una pequeña vecindad de I_0 , se encontró una aproximación de la función de la parte real de los valores propios en función de la corriente de estímulo. Así tenemos que $\mu(I) = 4.13929 + 0.00139676 I$ y por lo tanto $\mu'(I_0) = 0.00139676 \neq 0$, por lo tanto la condición de transversalidad se cumple. Véase figura 10.

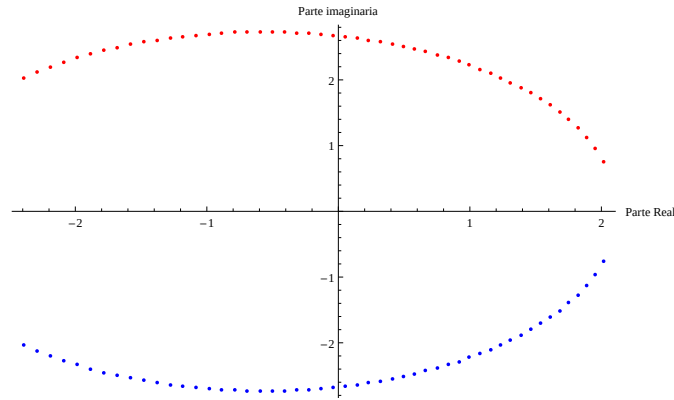


Figura 9: Comportamiento de los valores propios.

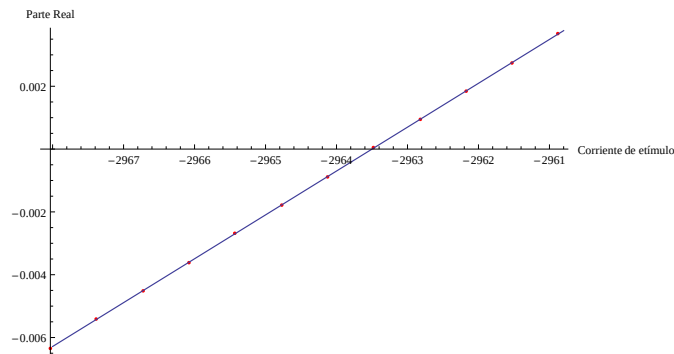


Figura 10: Ajuste de la parte real de los valores propios.

Haciendo el mismo procedimiento que en el caso anterior calculamos el parámetro de no degeneración, que en este caso es $a = 0.137054 \neq 0$. Con esto demostramos la presencia de una bifurcación de Hopf subcrítica.

Referencias

- [1] Berger S. D., Crook S., Duch C., Herrera Valdez M. A., McKiernan E. C., Ryglewski S. (2013) "Relating ion channel expression, bifurcation structure, and diverse firing patterns in a model of an identified motor neuron". *Computational Neuroscience*, 34.
- [2] Chua L. O., Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V. (1998) *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*. Editorial World Scientific.
- [3] Herrera Valdez M. A. (2014) Geometry and nonlinear dynamics underlying electrophysiological phenotypes in biophysical models of membrane potential. Dissertation PH.D in Mathematics. University Of Arizona.
- [4] Izhikevich, E. M. (2007) *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. Editorial The MIT Press.
- [5] Kuznetsov, Y. A. (1998) *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Editorial Springer Verlag.

- [6] Lynch S. (2007) *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*. Editorial Birkhäuser Boston.
- [7] Perko L. (2001) *Differential Equations and Dynamical Systems*. Editorial Springer Verlag.

Implementación de un modelo matemático para la proliferación celular de CaCU in vitro, bajo diferentes concentraciones de suero bovino fetal

Jesús Adrian López
jalopez2210@gmail.com

Juan Martínez Ortiz
jmartinez_ortiz@yahoo.com

Leticia Adriana Ramírez Hernández
leticiaadrianaramirez@hotmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas

Resumen

El cáncer cérvico-uterino es el segundo cáncer más frecuente en el mundo. En México, en los últimos años se ha mantenido como la segunda neoplasia en orden de frecuencia, y en la población femenina también se ha ubicado en el segundo lugar. En el grupo de 30 a 44 años es la tercera causa de muerte y una de las primeras 10 en todos los grupos de edad hasta los 64 (INEGI, 2013). De forma general el cáncer se manifiesta por la presencia de un tumor o masa anormal de tejido con un crecimiento celular anormal. Una vez que el tamaño del tumor es significativo comienza a interferir con las funciones vitales del órgano que lo aloja y eventualmente conduce a la muerte de la persona. Resulta por lo tanto de interés estudiar los diferentes aspectos de la dinámica de crecimiento tumoral: división celular, absorción de alimentos y oxigenación. Los tumores de acuerdo a su tamaño presentan diferentes etapas. La primera es llamada avascular caracterizada por la ausencia de vasos sanguíneos. La segunda etapa es la adquisición un tamaño suficientemente grande como para propiciar la formación de vasos sanguíneos. Finalmente, la tercera etapa se presenta cuando el tumor ha alcanzado dimensiones tan grandes, que el recurso resulta insuficiente y algunas de sus células adquieren la capacidad de migrar por el torrente sanguíneo y establecerse en otro órgano. Diversos modelos matemáticos de crecimiento tumoral se han desarrollado para describir de manera cualitativa etapas tempranas de crecimiento (avasculares) y estabilidad del tejido tumoral. La viabilidad de los tumores obedece a los procesos celulares que favorecen su desarrollo. En este trabajo, se presentan resultados sobre la proliferación celular en cultivos que han sido sometidos a diferentes concentraciones de suero bovino fetal. En todos los casos, la modelización matemática sugiere crecimientos sigmoidales.

1 Modelos de Crecimiento

La palabra población proviene del latín *populatio*, que significa acción y efecto de poblar. Poblar, del latín *populus*, pueblo. A lo largo de la historia, se han construido diferentes modelos matemáticos, que han servido para describir cómo las poblaciones cambian. Más aún, el tratar de entender estos cambios ha sido una constante motivación en el desarrollo de herramienta matemática útil para tal fin. Enseguida exploraremos algunos de estos modelos, que por su versatilidad o generalidad, aun hoy son utilizados para describir crecimiento. Todos ellos se presentan como solución de una ecuación diferencial ordinaria, y tienen un comportamiento característico denominado sigmoidal. El nombre proviene de la forma peculiar que estas curvas describen, a manera de S. Enseguida presentamos los aspectos básicos de los principales modelos de crecimiento. Se expone la ecuación diferencial que les da origen, y la solución analítica de la misma que define el modelo. Todas las soluciones están definidas $\forall t \in \mathbb{R}$

- 1.- **Malthus:** Este fue propuesto en 1798 por el demógrafo Thomas Malthus. Es un modelo sencillo en el que el único supuesto es que la población cambia de manera proporcional al número de individuos en ella.

$$P'(t) = rP(t), \quad r \in \mathbb{R}$$

Familia de soluciones

$$P(t) = A^r t, \quad A \in \mathbb{R}$$

- 2.- **Verhulst o Logístico:** Propuesto por el matemático belga P. F. Verhulst en 1836. En este se incorpora un factor de competencia entre los individuos de la población, como factor incidente en el nacimiento y/o muerte de estos.

$$P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right), \quad r \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$$

Familia de soluciones

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}, \quad A \in \mathbb{R}$$

- 3.- **Gompertz:** En 1825 el matemático inglés Benjamin Gompertz planteó la ecuación diferencial que da origen a este modelo. Lo plantea en un estudio sobre la muerte en poblaciones humanas. Fue planteado con el principio de que la población presenta una resistencia a la extinción inversamente proporcional al tiempo.

$$P'(t) = rP(t) \ln \left(\frac{K}{P(t)} \right), \quad r \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$$

Familia de soluciones

$$P(t) = Ke^{-Ae^{-rt}}, \quad A \in \mathbb{R}$$

- 4.- **Von Bertalanffy:** El modelo se presenta por el biólogo Von Bertalanffy, a mitad del siglo XX, para describir el crecimiento de organismos. Se fundamenta en el principio de que el crecimiento es, inicialmente, inversamente proporcional al tamaño de la población o individuo, para posteriormente estabilizarse a razón de una tasa de crecimiento.

$$P'(t) = r(K - P(t)), \quad r \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$$

Familia de soluciones

$$P(t) = K + Ae^{-rt}, \quad A \in \mathbb{R}$$

- 5.- **Richards:** El modelo se propuso en 1959 como una generalización del modelo de Verhulst, al que se le incorpora un nuevo parámetro, que lo dota de flexibilidad.

$$P'(t) = At \left[1 - \left(\frac{t}{K} \right)^b \right], \quad A, b, K \in \mathbb{R}$$

Familia de soluciones

$$P(t) = K [1 + \exp(d - A \cdot bt)]^{-\frac{1}{b}}, \quad A, b, d, K \in \mathbb{R}$$

Los parámetros involucrados en cada uno de los modelos anteriores pueden ser determinados de manera óptima utilizando la metodología modificada de los mínimos cuadrados, con el fin de ajustar tales curvas a un conjunto de datos reales. Además, los parámetros tienen un significado físico asociado a esos datos y el comportamiento de los mismos. Por ejemplo, la constante K representa la capacidad de carga de la población, o el máximo sostenible. Los parámetros A y r representan tasas de crecimiento y desaceleración o estabilización del mismo. Es a través de estos parámetros que es posible hacer una comparación objetiva y precisa en el crecimiento de una población en diferentes condiciones, como es el caso que nos concierne en este trabajo.

2 Proliferación en células HeLa

La proliferación es el proceso en el que una célula se divide para generar descendencia. Es un proceso fundamental en el desarrollo de un tejido u organismo. Cada tipo de células presenta un conjunto de receptores de factores de crecimiento específicos que regulan los diferentes procesos celulares, en particular, la proliferación.

Un tumor, es un conjunto de células en el que la proliferación ha sufrido una alteración (mutación), y se genera un crecimiento anormal de tejido. El cáncer es una enfermedad que se origina por una línea celular que presenta una capacidad de proliferación ilimitada e incontrolada; una vez que el tumor cancerígeno adquiere un tamaño suficientemente grande, produce afecciones irreparables en el tejido circundante, conduciendo al enfermo a una falla sistémica y, eventualmente, la muerte.

Existen focos rojos en lo que se refiere al cáncer. Entre los que tienen una tasa de mortalidad más elevada, destaca el cérvico-uterino, siendo una de las diez primeras causas de muerte en la población en México. Resulta entonces interesante entender los procesos celulares involucrados en el crecimiento tumoral, específicamente la proliferación. Se han realizado diferentes abordajes en esta materia desde la biología, incluso a nivel molecular. Sin embargo, no se tiene aún claridad en lo que respecta al efecto preciso que tienen las modificaciones en el microambiente celular: alimento, oxígeno, sustrato.

En el presente trabajo se realizó un análisis del efecto que tiene el exponer a una línea celular HeLa (células de cáncer cérvico-uterino inmortales) con diferentes concentraciones en el suplemento de suero fetal bovino (factor de crecimiento) en el medio de cultivo; con el objetivo de detectar diferencias esenciales en el crecimiento y evolución de la población. Se cultivaron cinco líneas celulares, iniciando con colonias de 100,000 individuos. El cultivo se realizó durante 72 horas (tiempo reportado como óptimo en el estudio de cultivos celulares), y se realizó el recuento de elementos en la población, cada 24 horas. Cada una de estas cinco líneas estuvo expuesta a diferentes concentraciones de suero, durante su evolución: 0.5%, 1%, 2%, 4% y 8%. En las siguientes figuras se presenta la evolución de las poblaciones.

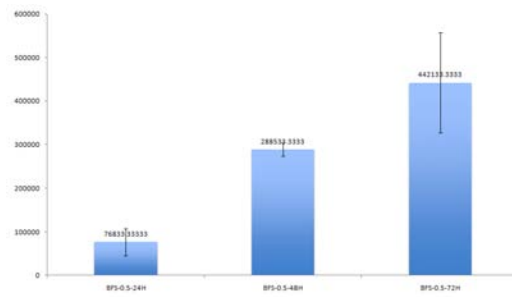


Figura 1: Concentración de 0.5%.

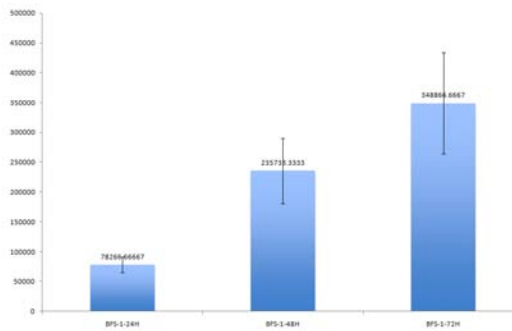


Figura 2: Concentración de 1%.

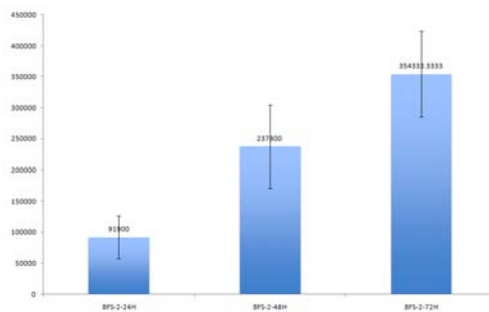


Figura 3: Concentración de 2%.

Es pertinente mencionar que en la literatura se reporta como óptimo, el uso de una concentración de 2

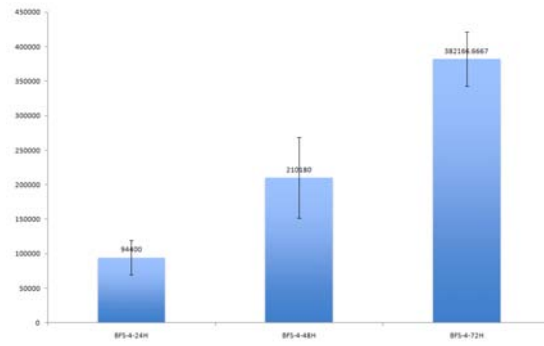


Figura 4: Concentración de 4%.

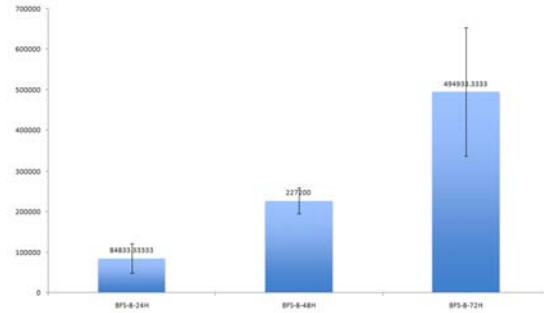


Figura 5: Concentración de 8%.

3 Resultados

Se realizó el ajuste de los seis modelos sigmoidales descritos arriba, a cada uno de los cultivos, mediante la determinación de los parámetros con apoyo del software CurveExpert. En los tres primeros cultivos, el mejor modelo resultó ser de tipo Richards, mientras que en los dos últimos, el óptimo fue el de tipo Gompertz. En la Figura 6 se presenta una tabla que contiene los valores de los parámetros respectivos, así como las correlaciones.

Concentración	Modelo	Parámetros				Correlación
		K	b	c	d	
0.5%	Richards	442000	44.46452	38.110103	134.617447	0.952
1%	Richards	349001	40.04556	25.87796	95.115588	0.936
2%	Richards	4387611	6.140337	3.535498	29.190636	0.968
4%	Gompertz	3357715	1.99668957	0.3366775	NA	0.988
8%	Gompertz	3319817	1.99610274	0.3379992	NA	0.988

Figura 6: Parámetros estimados y correlaciones.

Los mejores modelos se eligieron de acuerdo a la bondad de ajuste y a la convergencia y normalidad de sus errores.

En las figuras 7-11, se presentan los datos reales (puntos en negro), junto con la curva de mejor ajuste (en rojo), para las diferentes concentraciones ρ de suero bovino fetal.

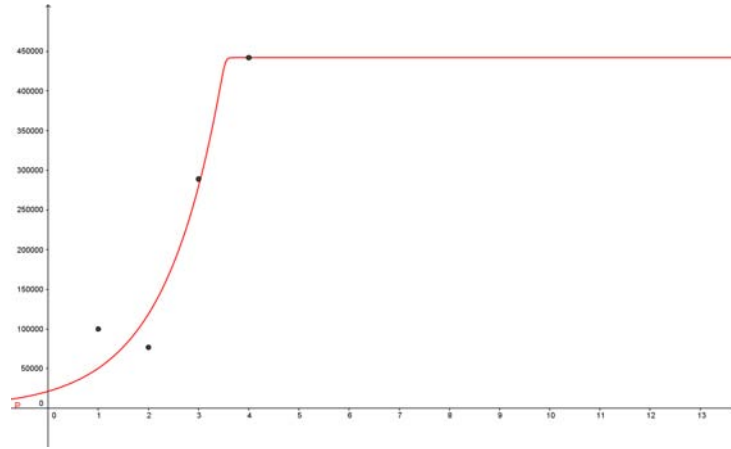


Figura 7: $\rho = 0.5\%$, Modelo de Richards
 $P(t) = 442000 / (1 + \exp(134.6174472 - 38.1101035857t))^{1/44.46452882}$.

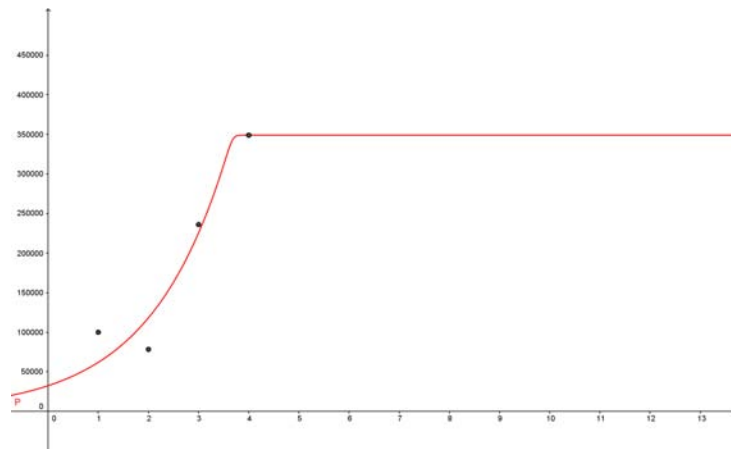


Figura 8: $\rho = 1\%$, Modelo de Richards
 $P(t) = 349001 / (1 + \exp(95.115588 - 25.87796t))^{1/40.045568}$.

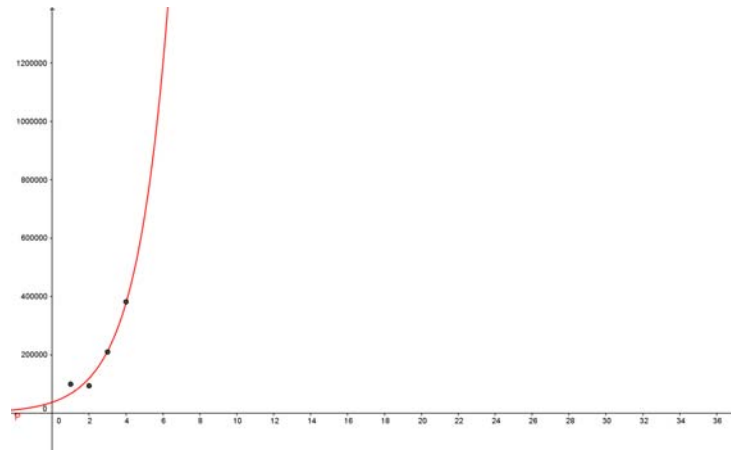


Figura 9: $\rho = 2\%$, Modelo de Richards
 $P(t) = 4387611 / (1 + \exp(29.190636 - 3.535498t))^{1/6.14033711}$.

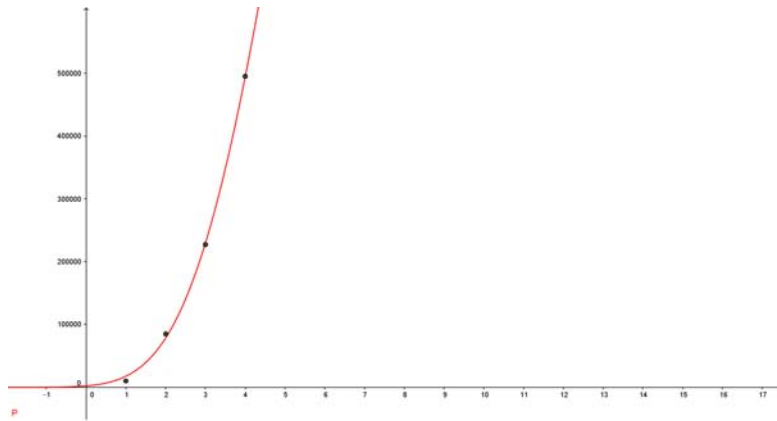


Figura 10: $\rho = 4\%$, Modelo de Gompertz
 $P(t) = 3357715 \exp(-\exp(1.996689 - 0.33667754t))$.

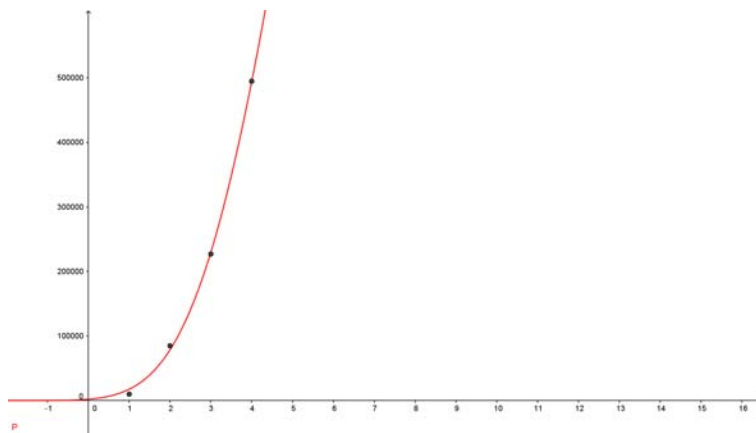


Figura 11: $\rho = 8\%$, Modelo de Gompertz
 $P(t) = 3319817 \exp(-\exp(1.9961027 - 0.337999t))$.

4 Conclusiones

Podemos observar de la tabla o de las gráficas, que en el proceso de modelización se detecta un cambio significativo entre los modelos.

- 1.- Las poblaciones 1, 2 y 3 evolucionan de manera diferente a las poblaciones 4 y 5. Al tener una mayor concentración de factor de crecimiento en el sustrato, era de esperarse que las poblaciones 4 y 5 tuvieran un crecimiento más favorable, que las primeras 3. En efecto, se observa que el crecimiento exponencial se mantiene por más tiempo, lo que se ve reflejado en el retardo del momento de la inflexión en la curva (tiempo en el que se presenta el crecimiento más rápido).
- 2.- Contrariamente a lo esperado, la población que se vió en mayor desventaja, no fue la que tuvo un menor crecimiento, sino que ocupó el penúltimo lugar en proliferación. Hipotéticamente, pudiera haberse activado un proceso de adaptación a la carencia de factor de crecimiento, que le permitió a la población proliferar mejor que la población que tuvo acceso a una concentración mayor de suero (1%).
- 3.- La población 3 muestra un comportamiento de transición. Si bien es cierto que el mejor modelo de ajuste resulta ser de tipo Richards, al cual que las poblaciones 1 y 2, ya se manifiesta un retardo en el momento de la inflexión muy notorio; así como una capacidad de carga K que se decuplica respecto a éstas.
- 4.- La bondad de ajuste de los modelos permite establecer comparaciones objetivas y profundas del crecimiento entre las diferentes líneas celulares, considerando los valores de los parámetros y los tipos de modelos, yendo un paso más adelante que la mera comparación proporcional.

Referencias

- [1] BIRCH, C. (1999), *A New logistic sigmoid growth equation compared with the Richards growth equation*. Ann Bot-London. 83: 713-723.
- [2] GOMPERTZ B. (1825), *On the Nature of the function Expressive of the law of human mortality, and on new mode of determining the value of life contingencies*. PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON, 115:513-583.
- [3] WALISZEWSKI, P. & KONARSKI, J. (2003), *The Gompertzian curve reveals fractal properties of tumor growth*. CHAOS, SOLITONS AND FRACTALS, 16: 665-674.
- [4] WHELDON, T. E. (1988), *Mathematical models in cancer research*. IOP PUBLISHING LTD. BRISTOL.
- [5] ZWEIFTERING M., JONGENBURGER I., ROMBOUTS F., VANT RIET K.(1990), *Modeling of the bacterial growth curve*. Appl Environ Microbiol. 56(6), 1875-1881
- [6] <http://www3.nd.edu/~m10360/handout/New%20Sigmoid1999.pdf>
- [7] <http://fisica.cab.cnea.gov.ar/estadistica/abramson/notes/biologicos.pdf>

La Valoración de Opciones de Inversión Como un Semigrupo Evolutivo

Oswaldo González Gaxiola José Antonio Santiago García

ogonzalez@correo.cua.uam.mx

jsantiago@correo.cua.uam.mx

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
UAM-Cuajimalpa

Resumen

El modelo de Black-Scholes proporciona una descripción matemática del mercado de opciones de inversión. Considerando dicho modelo, en su versión lineal como un problema de Cauchy para diferentes tipos de opciones de inversión y haciendo uso de algunas funciones especiales; en el presente trabajo veremos que un operador diferencial de segundo orden (operador de Black-Scholes) genera un semigrupo fuertemente continuo de operadores con el cual, podemos obtener la evolución de una opción a través del tiempo estipulado en el contrato.

1 Introducción

En 1973 el economista y matemático canadiense Myron S. Scholes y el economista estadounidense Fischer S. Black publicaron un artículo con el cual se volvieron pioneros de la teoría de valuación de derivados financieros [1]; los autores usaron análisis estocástico y argumentos de no arbitraje para calcular el valor teórico del precio de una opción de compra europea. El resultado representó un triunfo para los modelos matemáticos en finanzas, ya que el valor teórico coincidía con los precios que ya habían sido establecidos en el mercado. La ecuación resultado de su modelo, se ha convertido en una herramienta indispensable en el intercambio y compra-venta de opciones y otros derivados financieros. En el año 1997 Myron Scholes y Robert C. Merton fueron galardonados con el Premio Nobel en Economía por su trabajos relacionados con la fórmula de Black-Scholes. El economista Robert C. Merton [2] contribuyó con introducir el cálculo estocástico en la economía financiera, lo que permitió que el comportamiento de los precios fuese descrito a través del lenguaje preciso de la teoría de la probabilidad.

El modelo de Black-Scholes es una ecuación diferencial parcial cuya solución describe el valor de una opción europea de inversión [1], [2]. Hoy en día, el modelo es ampliamente utilizado para estimar los precios de opciones distintas de las europeas.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_{t \geq 0})$ un espacio de probabilidad con la filtración $\mathcal{F}_{t \geq 0}$ y sea B_t un movimiento browniano en $\mathbb{R}$. Consideraremos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t),$$

con a y σ continuas en (x, t) y Lipschitz continuas en x ; i.e., existe una constante M tal que

$$|a(x, t) - a(y, t)| \leq M|x - y|, \quad |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq M|x - y| \quad \forall t, x, y.$$

El proceso de precios es dado por el movimiento browniano geométrico $S(t)$, $S(0) = x_0$, el cual es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t),$$

con μ y σ constantes. La solución de esta ecuación diferencial es dada por:

$$dS(t) = x_0 \exp\{\sigma(B(t) - B(t_0)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - t_0)\}.$$

Sea $0 \leq t < T$ y h una función Borel medible, $h(X(T))$ denota la demanda contingente, sea $E^{x,t}h(X(T))$ la esperanza de $h(X(T))$, con la condición inicial $X(t) = x$.

Usando el teorema de Feynman-Kac [13], se tiene $v(x, t) = E^{x,t}h(X(T))$ con $0 \leq t < T$, donde

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t).$$

Entonces

$$v_t(x, t) + a(x)v_x(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)v_{xx}(x, t) = 0, \text{ y } v(x, T) = h(x). \quad (1)$$

Ahora, si consideramos el valor descontado

$$u(x, t) = e^{-r(T-t)}E^{x,t}h(X(T)) = e^{-r(T-t)}v(x, t). \quad (2)$$

Entonces, si al tiempo t , $S(t) = x$, procediendo de la forma estándar,

$$\begin{aligned} v(x, t) &= e^{r(T-t)}u(x, t), \\ v_t(x, t) &= -re^{r(T-t)}u(x, t) + e^{r(T-t)}u_t(x, t), \\ v_x(x, t) &= e^{r(T-t)}u_x(x, t), \\ v_{xx}(x, t) &= e^{r(T-t)}u_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

La ecuación de Black-Scholes en su versión lineal se obtiene sustituyendo las cuatro igualdades anteriores en la ecuación (1) y multiplicando por $e^{-r(T-t)}$:

$$-ru(x, t) + u_t(x, t) + rxu_x(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2u_{xx}(x, t) = 0, \quad (3)$$

donde $0 \leq t < T$, $x \geq 0$; aquí r es la tasa de interés libre de riesgo y σ es la volatilidad [3]. En la ecuación de Black-Scholes $u(x, t)$ es el valor de una opción, x es el valor del activo subyacente al tiempo t .

En el presente trabajo vamos a considerar la ecuación de Black-Scholes (3) como un cierto operador actuando en un espacio de Banach apropiado y usando la teoría de semigrupos fuertemente continuos vamos a caracterizar el semigrupo cuyo generador es dicho operador y con ello obtendremos el precio de diferentes tipos de opciones de inversión aplicado el semigrupo a elementos

del dominio de dicho operador. Varios autores han considerado el problema de resolver el problema de Cauchy (3) por diferentes técnicas; en [4] se resuelve el problema para diferentes tipos opciones tomando en cuenta técnicas del análisis funcional, de hecho el presente trabajo es una versión extendida de lo que ahí se hizo, añadiendo detalles que en ese artículo no se consideraron; posteriormente, en [5] el estudio se hace para opciones asiáticas usando funciones especiales, mientras en [6] se resuelve el problema para el caso de opciones americanas también usando teorías de semigrupos probando que la parte de segundo orden del operador de Black-Scholes es un operador sectorial y herramientas de funciones especiales y transformadas integrales como lo son transformadas de Fourier entre otras. En [7] se considera el operador de Black-Scholes como un Hamiltoniano y se encuentra para el caso de opciones de barrera su relación con la mecánica cuántica supersimétrica. El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 daremos una mínima y breve introducción a la teoría de semigrupos fuertemente continuos, en la sección 3 daremos dos resultados que caracterizan el semigrupo cuyo generador es el operador de Black-Scholes para finalmente en la sección 4 aplicar los resultados en la evaluación de diferentes tipos de opciones de inversión cuya dinámica es dada por (3).

2 Semigrupos Fuertemente Continuos

En esta sección, con la intención de hacer el trabajo autocontenido; daremos una breve introducción a la teoría básica de los semigrupos fuertemente continuos, los cuales también se denominan C_0 -semigrupos. Para mayor información relacionada con el tema, el lector puede consultar [8], [9] and [10]. En lo que sigue X será un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$.

Definición 1. Una familia 1-paramétrica $\{U_t\}_{t \geq 0}$ de operadores lineales acotados de X sobre X es un *semigrupo de operadores acotados* (o simplemente *semigrupo*) si:

- (i) $U_0 = I$ (donde I es el operador identidad en X);
- (ii) $U_{s+t} = U_s U_t$ para cada $s, t \geq 0$ (propiedad de semigrupo).
- (iii) Si un *semigrupo* $\{U_t\}_{t \geq 0}$ satiface además $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|U_t - I\| = 0$, decimos que es un *semigrupo uniformemente continuo*.
- (iv) Si la propiedad (ii) se cumple para cada par $s, t \in \mathbb{R}$, la familia $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es llamada *grupo de operadores*.

Definición 2. Un semigrupo $\{U_t\}_{t \geq 0}$, de operadores acotados en X es un *semigrupo fuertemente continuo* o simplemente C_0 -semigrupo si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U_t f = f \quad \text{para cada } f \in X.$$

Definición 3. El operador lineal A en X definido por

$$D(A) = \{f \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{U_t f - f}{t} \text{ existe}\}$$

y

$$A f = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{U_t f - f}{t} = \frac{d^+ U_t f}{dt} \Big|_{t=0} \quad \text{para } f \in D(A)$$

es el *generador infinitesimal* del semigrupo $\{U_t\}_{t \geq 0}$, $D(A)$ es el dominio de A .

Teorema 1. Sea $\{U_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en X . Existen constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que

$$\|U_t\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{para } t \geq 0.$$

Corolario 1. Si $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en X , entonces para cada $f \in X$, $t \mapsto U_t f$ es un función continua de $\mathbb{R}^+$ en X .

Proposición 1. Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{U_t\}_{t \geq 0}$ entonces $D(A)$ es denso en X y A es un operador lineal cerrado.

Sea $\{U_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en X . Por el teorema 1 se tiene la existencia de constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que $\|U_t\| \leq M e^{\omega t}$ para $t \geq 0$. Si $\omega = 0$, $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es llamado *uniformemente acotado* y si además $M = 1$ se llama *semigrupo fuertemente continuo de contracciones*.

Definición 4. Sea A un operador sobre X no necesariamente acotado, el *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de A es el conjunto de los números complejos λ para los cuales $\lambda I - A$ es invertible, i.e., $(\lambda I - A)^{-1}$ es un operador acotado sobre X . La familia $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ de operadores acotados sobre X es llamada *la resolvente de A* .

Las siguientes dos definiciones y algunas caracterizaciones para generadores infinitesimales de semigrupos analíticos las podemos hallar por ejemplo en [8].

Definición 5. Un operador lineal cerrado y densamente definido $(A, D(A))$ sobre algún espacio de Banach X es llamado sectorial (de ángulo δ) si existe $\delta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ tal que el sector

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2} + \delta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \setminus \{0\}$$

está contenido en el conjunto resolvente $\rho(A)$, y si para cada $\varepsilon \in (0, \delta)$ existe $M_\varepsilon \geq 1$ tal que

$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}, \quad \text{para cada } 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2} + \delta - \varepsilon}}.$$

Además un semigrupo de operadores $\{U_z\}_{z \in \Sigma_{\delta \cup \{0\}}}$ en X es un semigrupo analítico de ángulo $\delta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ si el mapeo $z \mapsto U_z$ es analítico en Σ_δ .

El siguiente teorema nos da una la caracterización del generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones; así como condiciones sobre el comportamiento de la resolvente de un operador A , las cuales son necesarias y suficientes para que A sea el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo.

Teorema 2. (Hille-Yosida) Un operador lineal no necesariamente acotado A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo $\{U_t\}_{t \geq 0}$ si y sólo si:

(a) A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$.

(b) El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contiene a $\mathbb{R}^+$ y para cada $\lambda \geq 0$

$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

El teorema 2 es uno de los resultados más importantes en la teoría de semigrupos fuertemente continuos, la demostración de este teorema la podemos hallar en [8], [9] y [10].

Los resultados previos, se resumen en el siguiente teorema, cuya demostración la podemos hallar en [8].

Teorema 3. Sea A un operador lineal densamente definido con el conjunto resolvente $\rho(A)$ no vacío. El problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & t \geq 0 \\ u(t_0) = x & , \quad x \in X \end{cases}$$

tiene solución única $u \in C^1([0, \infty))$, para cada valor inicial $x \in D(A)$ si y sólo si A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo $\{U_t\}_{t \geq 0}$.

3 C_0 -semigrupos Relacionados con el Operador de Black-Scholes

En esta sección vamos a considerar la ecuación de Black-Scholes (3) como el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}(x, t) + rxu_x(x, t) - ru(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, T) \\ u(x, T) = h(x) & , \quad x \in (0, \infty) \end{cases}$$

σ y T son constantes que resultan del modelo, h es una función medible apropiada; T es el tiempo de madurez de la opción. Para resolver este problema de Cauchy debemos de determinar el precio de la opción. En esta sección veremos que existe un C_0 -semigrupo $\{U_t\}_{t \geq 0}$ actuando sobre un cierto espacio de Banach tal que la dinámica del mercado de precios estará dada por la ecuación de evolución $(U_{T-t}h)(x) = u(x, t)$.

Sean $a = \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$ y $b = r \in \mathbb{R}$, vamos a considerar al operador

$$\hat{A}u = ax^2 D^2 u + bx Du - bu$$

al cual llamaremos operador de Black-Scholes densamente definido en el espacio de Banach $L^p(0, \infty)$. Sea $\zeta = \frac{1}{2}(\frac{b}{a} - 1)$ y definamos al operador

$$\begin{aligned} D(A) &:= S_0, \\ Af &:= x^2 D^2 f + (2\zeta + 1)x Df - (2\zeta + 1)f. \end{aligned}$$

Donde S_0 es el espacio de Schwartz sobre $(0, \infty)$, considerado con la norma del supremo,

$$S_0 = \mathcal{S}(0, \infty) = \{f \in C^\infty(0, \infty) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\}.$$

Podemos ver que $aA = \hat{A}$ sobre $D(A)$. Si probamos que A puede escribirse como

$$A = (B + \zeta)^2 - (1 + \zeta)^2$$

donde B es el generador de un C_0 -grupo, entonces tendremos que A y por lo tanto $\hat{A}$ genera a un semigrupos $\{U_t\}_{t \geq 0}$ sobre S_0 .

A continuación vamos a establecer dos teoremas que resultaran fundamentales para poder hallar el C_0 -semigrupo generado por el operador de Black-Scholes $\hat{A}$ y con ello la dinámica de evolución de los precios de las opciones.

Teorema 4. Sea $(V_t f)(x) := f(xe^t)$ para cada $f \in S_0$, $x \geq 0$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces $\|V_t\| = 1$ para cada t y $\{V_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un C_0 -grupo sobre S_0 con generador

$$Bf := x Df, \quad D(B) := \mathcal{S}(0, \infty) = S_0.$$

Demostración. Es fácil ver que V_t es un grupo y que además se cumple $\|V_t\| = 1$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Resta entonces probar que V_t es fuertemente continuo. Sea $f \in C_0([0, \infty))$,^{*} entonces:

$$\|V_t f - I f\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |f(xe^t) - f(x)| = |f(x_0 e^t) - f(x_0)| \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow 0.$$

^{*} $C_0([0, \infty))$ es el espacio de las funciones de soporte compacto sobre $[0, \infty)$

Como $C_0([0, \infty))$ es denso en S_0 , entonces V_t es un C_0 -grupo sobre S_0 . Sea F su generador. Ahora definamos los C_0 -semigrupos $V_t^+ := V_t$ y $V_t^- := V_{-t}$ para cada $t \geq 0$ con generador infinitesimal F y $-F$ respectivamente. Sea $f \in D(F)$ y $g = (I - F)f \in S_0$. Como $\{V_t^+\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de contracciones, para cada $x > 0$ tenemos

$$f(x) = (R_1(F)g)(x) = \int_0^\infty e^{-t} g(xe^t) dt = x \int_x^\infty \frac{g(u)}{u^2} du.$$

De los anterior, usando el teorema fundamental del cálculo y algunos cambios de variable, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x+h}{h} \int_{x+h}^\infty \frac{g(u)}{u^2} du - \frac{x}{h} \int_x^\infty \frac{g(u)}{u^2} du \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{x+h} - \frac{x}{h} \int_0^h \frac{g(u+x)}{(u+x)^2} du \right) \\ &= \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in C^1(0, \infty)$; además la función $x \mapsto xf'(x) = f(x) - g(x) \in S_0$, lo cual implica que $f \in D(B)$ y que $(Bf)(x) = xf'(x) = f(x) - g(x) = (Ff)(x)$, con lo cual hemos probado que $F \subset B$ y similarmente se prueba que $-F \subset B$.

Inversamente, sea $f \in D(B)$ y definamos ahora $g := Bf$. Para cada $t, x \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (V_s^+ f)(x) ds &= \int_0^t g(xe^s) ds \\ &= \int_0^t xe^s f'(xe^s) ds \\ &= \int_x^{xe^t} f'(r) dr = f(xe^t) - f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que $f \in D(F)$ y $Ff = g = Bf$ con lo cual se prueba la inclusión $B \subset F$. Nuevamente de manera similarmente se puede probar que $B \subset -F$ y por la primera parte $B = F$. ■

Teorema 5. *El operador $(\hat{A}, D(A))$ genera un C_0 -semigrupo de operadores $\{U_t\}_{t \geq 0}$ analítico con $\delta = \frac{\pi}{2}$ sobre S_0 dado para cada $f \in S_0$, $t \geq 0$ y $x \geq 0$ por*

$$(U_t f)(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}s^2} (V_{s\sqrt{2at} + (b-a)t} f)(x) ds$$

Demostración. Por el teorema 4 tenemos que $(B + \zeta, D(B))$ genera el C_0 -grupo $\{e^{\zeta t} V_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Entonces el operador $((B + \zeta)^2, D(B^2))$ genera un C_0 -semigrupo $\{U_{1,t}\}_{t \geq 0}$ sobre S_0 el cual actúa por

$$(U_{1,t} f) = \int_{-\infty}^\infty \phi(s) e^{\zeta s \sqrt{2t}} (V_{s\sqrt{2t}} f) ds$$

donde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la Gaussiana $\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2}$; por definición del dominio de una potencia de un operador tenemos

$$D(B^2) = \{f \in D(B) : Bf \in D(B)\}$$

de lo cual tenemos que $D(B) = D(aA)$ y por lo tanto $D(B) = D(\hat{A})$ y considerando que $B = xD$ tenemos que

$$\begin{aligned} A &= x^2 D^2 + (2\zeta + 1)xD - (2\zeta + 1) \\ &= B^2 + 2\zeta B + B - (2\zeta + 1) \\ &= B^2 - B + (2\zeta + 1)B - (2\zeta + 1) \\ &= (B + \zeta)^2 - (1 - \zeta)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que A genera un C_0 -semigrupo analítico de operadores acotados $\{U_{2,t}\}_{t \geq 0}$ con ángulo $\delta = \frac{\pi}{2}$ sobre S_0 que se representa por $U_{2,t} f := e^{-(1+\zeta)^2 t} U_{1,t} f$, y por lo tanto para cada $t \geq 0$

$$U_{2,t} f = e^{-t(1+2\zeta)} \int_{-\infty}^\infty \phi(s) (V_{s\sqrt{2t} + 2\zeta t} f) ds.$$

Finalmente, como $\hat{A} = aA$, entonces por lo anterior $\hat{A}$ genera un C_0 -semigrupo analítico de operadores $\{U_{2,at}\}_{t \geq 0}$, el cual, teniendo en cuenta que $\zeta = \frac{1}{2}(\frac{b}{a} - 1)$ actúa para cada $f \in \mathcal{S}_0$ y para cada $t \geq 0$ por

$$(U_t f)(x) = e^{-bt} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) (V_{s\sqrt{2at} + (b-a)t} f)(x) ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} (V_{s\sqrt{2at} + (b-a)t} f)(x) ds,$$

y así el teorema queda demostrado. ■

Como un caso especial de los resultados anteriores, vamos a considerar el siguiente ejemplo de un C_0 -semigrupo, el cual en algunas ocasiones es llamado semigrupo del calor [9].

Ejemplo 1. Consideremos el espacio $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, para $t > 0$ definamos $\{U_t\}_{t > 0}$ para $f \in L^p(\mathbb{R})$ por

$$(U_t f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.$$

Podemos ver que $U_t f = G_t * f$, ($*$ es la convolución) donde $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Como $G_t \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $U_t f \in L^p(\mathbb{R})$ cuando $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Además

$$\|U_t f\|_p = \|G_t * f\|_p \leq \|G_t\|_1 \|f\|_p.$$

Como

$$\|G_t\|_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = 1,$$

entonces $\|U_t\| \leq 1$, es decir, $\{U_t\}_t$ es acotado sobre $L^p(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$. Ahora, hagamos $U_0 = I$; luego si $t = 0$ o bien $s = 0$ tenemos claramente que $U_{t+s} = U_t U_s$. Ahora, para el caso general consideremos el espacio de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\}$$

el cual es un subespacio denso de $L^p(\mathbb{R})$. Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, por la asociatividad de la convolución para $s, t > 0$ se tiene $(U_s U_t) f = G_s * (G_t * f) = (G_s * G_t) * f$; haciendo cálculos tenemos

$$\begin{aligned} (G_s * G_t)(x) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{st}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4s}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) dy \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{st}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t(x-y)^2 - sy^2}{4st}\right) dy = \frac{1}{4\pi\sqrt{st}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{tx^2 + 2txy - (s+t)y^2}{4st}\right) dy \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{st}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(s+t)}{4st} Y^2\right) \exp\left(-\frac{(s+t)}{4st} \frac{st}{(s+t)^2} x^2\right) dY \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{s+t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(s+t)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz, \quad (z = \sqrt{\frac{s+t}{4st}} Y) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{s+t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(s+t)}\right\} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi(s+t)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(s+t)}\right\} = G_{s+t}(x) \end{aligned}$$

luego $(U_s U_t) f = G_{s+t} * f = U_{s+t} f$ para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; por la densidad de este subespacio en $L^p(\mathbb{R})$, el resultado se puede extender a todo $L^p(\mathbb{R})$.

Ahora usando resultados de la teoría de funciones de prueba (test-functions) tenemos $G_t * f \rightarrow f$ cuando $t \rightarrow 0^+$. Por lo tanto $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un C_0 -semigrupo sobre $L^p(\mathbb{R})$. ■

4 Aplicación a la Ecuación de Black-Scholes

En esta sección se usaremos los resultados de la sección anterior para encontrar el precio de una opción de inversión modelada por medio de la ecuación de Black-Scholes.

4.1 Opciones Europeas

Consideremos el operador de Black-Scholes $\hat{A}u = ax^2D^2u + bxDu - bu$, $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$; densamente definido en el espacio de Banach $L^p(0, \infty)$. Sea $\zeta = \frac{1}{2}(\frac{b}{a} - 1)$ y definamos al operador

$$\begin{aligned} D(A) &:= S_0, \\ Af &:= x^2D^2f + (2\zeta + 1)xDf - (2\zeta + 1)f. \end{aligned}$$

Podemos ver que $aA = \hat{A}$ sobre $D(A)$. Para cada $f \in D(A)$

$$(aAf)(x) = (\hat{A}f)(x) = \frac{1}{2}\sigma^2x^2D^2f(x) + rxDf(x) - rf(x),$$

así la ecuación de Black-Scholes se convierte en el problema de Cauchy

$$a\hat{A}f(x, t) + f_t(x, t) = 0, \quad f(x, T) = h(x).$$

Para alguna $h \in S_0$, usando el teorema 5 sabemos que $\hat{A}$ genera un C_0 -semigrupo $\{U_t\}_{t \geq 0}$, así la opción de precios al tiempo $t \in [0, T]$ es dada por

$$\begin{aligned} (U_th)(x) &= e^{-b(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} f(e^{s\sqrt{2a(T-t)}} - (b-a)(T-t)x) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} f(e^{s\sigma\sqrt{(T-t)}} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)x) ds. \end{aligned}$$

La ecuación anterior coincide con la fórmula de Black-Scholes expuesta en textos de probabilidad aplicada a las finanzas matemáticas [3] y con resultados obtenidos por técnicas diferentes en otros trabajos relacionados con la misma ecuación.

4.2 Opciones Asiáticas

Las opciones asiáticas, son una de las formas básicas de opciones exóticas y son aquellas opciones para las que el precio del activo subyacente al tiempo de vencimiento se determina como la media de las cotizaciones del mismo durante un período de tiempo [11]. Con las opciones asiáticas se reducen las posibilidades de manipulación del precio del subyacente en fechas próximas a vencimiento. Como un precio promedio es menos volátil que las series de precios empleadas para calcularlo, el precio de una opción asiática es menor que el de las opciones estándar. Esto hace que sean diferentes a las opciones europeas y a las opciones americanas, donde la rentabilidad del contrato de opción depende del precio del instrumento o activo subyacente al vencimiento.

La ecuación de Black-Scholes para un opción asiática es:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2u_{xx}(x, t) + rxu_x(x, t) - ru(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, T) \\ u(x, T, A_T) = f(x, \frac{A_T}{T}) & , \quad x \in (0, \infty) \end{cases}$$

donde x es el precio del activo subyacente, r es la tasa de interés, σ es la volatilidad y T es la fecha de expiración del contrato, el precio de ejercicio (flexible), que resulta igual a la media aritmética es $A_T = \int_0^T x(t)dt$; y $f(x, \frac{A_T}{T})$ es la función de pago.

En [12] se proponen las siguientes transformaciones

$$u(x, t) = x^n f(\mathbf{x}, t) e^{b\frac{x}{A}}, \quad \mathbf{x} = \frac{x}{A^2}, \quad n = -\frac{r}{\sigma^2}, \quad b = \frac{2}{\sigma^2}$$

que dan como resultado que la ecuación anterior se convierte en una cierta ecuación diferencial parcial tipo parabólica y se cumple

$$f(\mathbf{x}, t) = e^{-\frac{1}{2}(r - \frac{r^2}{\sigma^2})t} g(\mathbf{x}, t)$$

donde $g(\mathbf{x}, t)$ satisface

$$g_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbf{x}^2 g_{\mathbf{xx}} = 0.$$

Siguiendo nuevamente [12], con los cambios de variables $\tau = T - t$ y $z = \ln \mathbf{x}$ la ecuación de Black-Scholes para opciones asiáticas se transforma finalmente en la ecuación de calor:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}, \quad g(\eta, 0) = f(\eta) = f(\eta, T) \quad (4)$$

donde $\eta = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\xi$ con $\xi = z - \frac{1}{2}\sigma^2\tau$. Considerando el semigrupo de calor de la sección anterior tenemos que la solución de la ecuación (4) es dada por

$$g(\eta, \tau) = (G_\tau * f)(\eta) = (U_\tau f)(\eta),$$

o bien, haciendo los cambios de variable retrospectivamente la solución de la ecuación de Black-Scholes para una opción asiática es dada por:

$$u(x, t) = x^n f(\mathbf{x}, t) e^{b\frac{x}{A}} = x^n e^{-\frac{1}{2}(r - \frac{r^2}{\sigma^2})t} g(\mathbf{x}, t) e^{b\frac{x}{A}},$$

es decir, la solución es dada por

$$(U_t f)(x) = (U_{T-t} f)\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{x}{A^2}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]\right);$$

aquí U_t es el semigrupo de calor en $(0, \infty)$, es decir, $U_t f = G_t * f$, donde $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$.

4.3 Opciones Vainilla

Las opciones vainilla son las opciones clásicas por excelencia. Son el tipo de opciones que normalmente trabajan los inversores con elevada experiencia en opciones. Esta opción es un derecho a comprar o a vender un activo a un determinado precio y plazo, esperando que el precio de ejercicio sea más favorable que la cotización en el mercado. Si esto sucede, el producto se liquida por diferencias. Por ahora restringiremos nuestra atención al caso de una opción vainilla europea de compra (call) con precio $c(x, t)$, la cual tendrá fecha de expiración T y precio de ejercicio E .

La ecuación de Black-Scholes y sus condiciones de frontera para una opción vainilla europea de compra o call, cuyo precio $c(x, t)$ evoluciona con t es,

$$\begin{cases} c_t(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 c_{xx}(x, t) + rxc_x(x, t) - rc(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, T) \\ c(0, t) = 0, \quad c(x, t) \sim x - Ee^{-r(T-t)}, \text{ as } x \rightarrow \infty \\ c(x, T) = \max(x - E, 0). \end{cases}$$

Si hacemos los cambios de variables

$$x = Ee^z, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad c(x, t) = Ev(z, \tau),$$

la ecuación de Black-Scholes en este caso se transforma en la ecuación diferencial parcial

$$v_\tau = v_{zz} + (k - 1)v_z - kv, \quad k = \frac{2r}{\sigma^2};$$

con condiciones de frontera

$$v(z, 0) = \max(e^z - 1, 0), \text{ y } v(z, \tau) \sim e^z, \quad v(z, \tau) = 0, \text{ si } x \rightarrow \pm\infty \text{ respectivamente.}$$

Podemos ver que la solución es dada por el C_0 -semigrupo (“tipo semigrupo del calor”)

$$u(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau} + z) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

donde tenemos, $y = \frac{x-z}{\sqrt{2\tau}}$, $u_0(z) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)z} - e^{\frac{1}{2}(k-1)z}, 0)$.

En el caso de una opción vanilla europea de venta o put $p(x, t)$, la ecuación de Black-Scholes es la misma con el único cambio en las condiciones iniciales; en lugar de $c(x, T) = \max(x - E, 0)$ ahora la condición es $p(x, T) = \max(E - x, 0)$ y la solución se obtiene con la misma manera de proceder.

Referencias

- [1] F. Black and M. Scholes, The Pricing Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, (81), 637-659 (1973).
- [2] R. C. Merton, Theory of Rational Options Pricing, Bell Journal of Economic and Management Science, (4), 141-183, (1973).
- [3] Seán Dineen, Probability Theory in Finance; Graduate Studies in Math, AMS; Rhode Island, (2005).
- [4] O. González-Gaxiola, J. A. Santiago, The Black-Scholes operator as the generator of a C_0 -semigroup and applications. Int. J. Pure and Appl. Math. Vol. 76 (2), 191-200 (2012).
- [5] D. I. Cruz-Báez and J. M. González-Rodríguez, A Different Approach for Pricing Asian Option, Applied Math. Letter. Vol. 21, No. 3, 303-306, (2008).
- [6] D. I. Cruz-Báez and J. M. González-Rodríguez, A Semigroup Approach to American Options, J. Math. Anal. Appl. 302, 157-165, (2005).
- [7] Juan M. Romero, O. González-Gaxiola, J. Ruiz de Chávez, R. Bernal-Jaquez; The Black-Scholes Equation and Certain Quantum Hamiltonians, Int. Journal of Pure and Applied Math. Vol. 67, No. 2, 165-173, (2011).
- [8] Klaus-Jochen Engel; Rainer Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations; Springer, New York, (1999).
- [9] Mc Bride A. C., Semigroup of Linear Operator: An Introduction; Longman Scientific and Technical, New York, (1987).
- [10] Pazy, A., Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences; Springer-Verlag: New York, (1983).
- [11] J. C. Hull; Options, Futures and Other Derivatives, 5th ed. Prentice Hall, Upper Saddle River (2002).
- [12] Z. A. Elshegmani, R. R. Ahmad, S. H. Jaaman and R. H. Zakaria, Transforming Arithmetic Asian Option to the Parabolic Equation with Constant Coefficients Int. J. of Mathematics and Mathematical Sciences; Vol. 1, 1-6, (2011).
- [13] S. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer Finance, (2004).

Modelando el grado de violencia en pareja con tiempos de retardo en el autocontrol y asistencia

Erik Leal Enríquez
fiserik@yahoo.com.mx
Cátedras CONACyT

Oliver X López Corona
lopezoliverx@otrasenda.org
Cátedras-CONACyT

Francisco J. Zamudio Sánchez
zafra1949@gmail.com
Departamento de Estadística,
Matemática y Cómputo

Universidad Autónoma Chapingo

Resumen

Para contribuir a cuantificar el grado de violencia que un hombre violento ejerce a una mujer no violenta, se propone un modelo de ecuaciones diferenciales no lineales con retardo. Dicho modelo tiene una estructura logística y tiene en cuenta tanto: el efecto del autocontrol que el hombre experimenta (después de que él practica la violencia contra su pareja) y los cambios en el nivel de violencia cuando el perpetrador y la mujer ultrajada reciben apoyo externo. Realizamos simulaciones, bajo diferentes valores de los parámetros del modelo, para analizar cómo el grado de violencia se comporta con respecto a los retardos en la autorregulación y en los tiempos de ayuda. Este modelo dinámico tiene la intención de ser una herramienta matemática que ayude a los especialistas en violencia de pareja, profundice en el fenómeno y sea útil en la proposición de políticas públicas.

1 Introducción

La preocupación por los problemas sociales que crea la violencia en cualquiera de sus formas afectan al bienestar y a la salud (Organización Mundial de la Salud (OMS), 2012 y [1]). Una de estas formas de violencia que genera preocupación, es la violencia en pareja en sus diferentes representaciones y dinámicas (agresiones físicas, emocionales, sexuales por mencionar algunas de ellas) [2]. Donde estas representaciones pueden considerarse como una violencia acumulativa [3][4].

Entre los estudios realizados de este tipo de violencia se ha probado que la autorregulación es un importante factor para este tipo de fenómeno; cuyos resultados apuntan a la incorporación de este parámetro de autoregulación en la dinámica de modelos predictivos de perpetración [5]. Otros parámetros que se toman en estudios enfocados para construir y validar escalas

de la violencia hacia las mujeres, por parte de un hombre violento (HV), son los pesos asignados de severidad de violencia (asignados por expertos) y sus frecuencias (medidos con herramientas estadísticas), ejemplos de estos se pueden encontrar en [6] y [7]. En este mismo contexto se han desarrollado instrumentos para medir el grado de violencia en pareja, donde cada uno de ellos es derivado de diversos estudios orientados a distintos aspectos de la violencia, tales como la frecuencia con la que ocurre, la severidad y la direccionalidad de los episodios violentos [6].

Un factor externo que ayuda a disminuir el grado de violencia es el de la intervención de organismos gubernamentales; donde existen programas, iniciativas y servicios de intervención para brindar asistencia y ayuda a la mujer violentada, cuya finalidad es reducir las agresiones [8][1]

Asimismo, por consideración de la OMS, la violencia por su extensión y consecuencias en la salud y el bienestar de las personas debe entenderse como un problema de salud pública. Esto nos lleva a pensar que es pertinente proponer herramientas matemáticas simplificadas, que tengan una pertinencia en contribuir a medir el grado de violencia en pareja y así puedan ayudar y servir a los expertos del área, además de aportar elementos para las políticas públicas pertinentes.

Para el desarrollo de este trabajo nos basamos en un marco ecológico [9], donde la dinámica que existe en una relación de pareja (microsistema) se puede entender como la interacción que se establece entre ellos y sus interacciones con órganos de ayuda externa (exosistema). Este trabajo se divide en las siguientes secciones:

En la sección 2, se desarrolla la construcción de un modelo matemático como herramienta que coadyuve a medir el grado de violencia entre un HV y una mujer no violenta (MNV), basado en razones de entrada y salida, ver figuras 1, 2 y 3. Este modelo considera la ayuda brindada por organismos externos y toma en cuenta el factor de autocontrol por parte del perpetrador. Los parámetros del modelo son la frecuencia con la que se ejerce violencia y la frecuencia con la que se solicita ayuda. Los parámetros del modelo toman en cuenta los pesos asociados al grado de la violencia y los pesos para el grado de ayuda, ver ecuaciones (1), (2) y (3).

En la sección 3, se realizan simulaciones exploratorias para analizar las curvas del grado de violencia en pareja a determinados valores de los retardos en el autocontrol, combinado con los retardos en los tiempos de ayuda; esto a diferentes condiciones iniciales en el grado de violencia del perpetrador y parámetros fijos del modelo (ver figuras 6-12). Estas simulaciones son de ayuda para los sistemas sociales, debido a que estos fenómenos a menudo no pueden ser experimentados y manipulados con facilidad [10].

2 Modelo

Se propone un modelo dinámico simplificado para coadyuvar a generar una herramienta matemática que ayude a los expertos en la materia a medir el grado de violencia doméstica, entre un HV y una MNV. Este modelo se desarrolla estructuralmente tomando en cuenta los acoplamientos del HV X^+ con la MNV Y^- , junto con el autocontrol que experimenta el perpetrador combinado con la solicitud de ayuda por la mujer violentada y el perpetrador a un sistema externo de asistencia. Estos acoplamientos son representados por un diagrama de flujo, el cuál se muestra en la figura 1.

La construcción del modelo propuesto se basa en una estructura logística propuesta por Verhulst-Pearl en 1845 [11]; la cual se modificó tomando en cuenta el establecimiento de un análisis empírico basado en estudios de teorías sociales sobre la violencia en pareja y con la finalidad de establecer los cambios en las entradas y salidas del sistema.

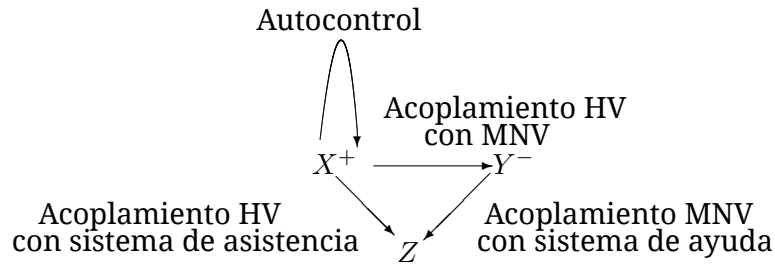


Figura 1: Diagrama de acoplamientos: HV-MNV (X^+Y^-), MNV con grupo de ayuda (Y^-Z), HV con grupo de ayuda (X^+Z) y autocontrol (X^+X^+).

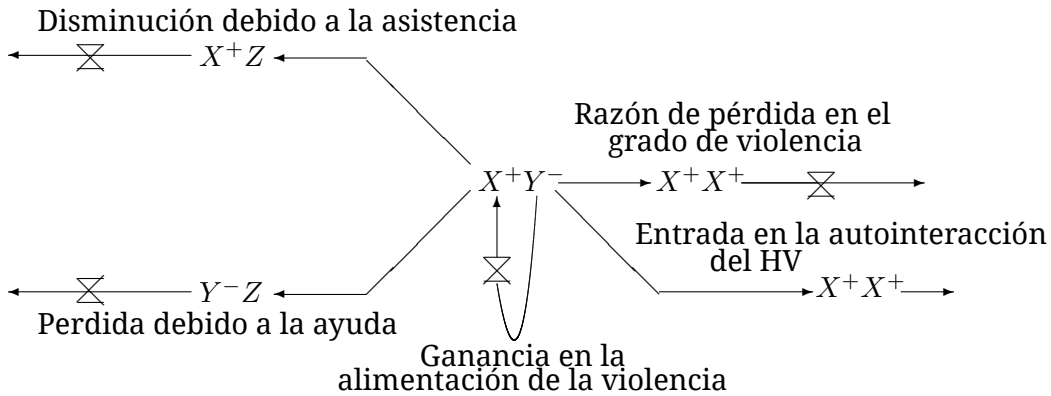


Figura 2: Diagrama de flujo de las razones de cambio en las interacciones tomadas en cuenta en el desarrollo del modelo.

2.1 Construcción

La construcción de modelos para explicar el comportamiento de sistemas sociales complejos tienen una pertinencia en ser modelados matemáticamente por sistemas dinámicos, basándose en las razones de cambio en las entradas y salidas del sistema, facilitando así, tener una representación holística [10]. La metodología para el desarrollo del modelo esta basada en las conexiones que se mantienen entre las partes del sistema y la relaciones causa-efecto que se ejecutan entre ellas [12]. En la literatura es común ver diagramas causales para proporcionar un modelo conceptual del comportamiento del sistema con la finalidad de traducir los cambios de las entradas y salidas a formas diferenciales (por ejemplo, este tipo de diagramas enfocados al modelado de sistemas sociales se pueden ver en [13] y [14], entre otros).

En la figura 2 se muestra el diagrama de flujo de las razones de cambio para las entradas y salidas del sistema, donde se observa que la razón en la ganancia de la violencia será proporcional al factor de interacción: HV-MNV (X^+Y^-). Con respecto a las razones de pérdida en el grado de violencia, se tomarán en función proporcional a la interacción del HV-MNV junto con el factor correspondiente a la autointeracción que tiene el HV, (X^+Y^-)(X^+X^+); asimismo se toman en cuenta las interacciones del HV y la MNV con el grupo de ayuda Z , esto es, (X^+Y^-)(X^+Z) y (X^+Y^-)(Y^-Z) respectivamente (figura (3)). De la misma figura se observa que el factor de alimentación de la autointeracción (X^+X^+) será proporcional al grado de violencia (X^+Y^-).

$X^+Z \leftarrow \text{---} \otimes \text{---}$ Función de entrada

$Y^-Z \leftarrow \text{---} \otimes \text{---}$ Función de ingreso

Figura 3: Diagrama de flujo de las razones de cambio en las interacciones cuando la MNV y el pepetrador solicitan ayuda externa.

2.1.1 Sistema dinámico

El modelo propuesto para medir el grado de violencia en pareja entre un HV y una MNV se establece de forma globalizada* para medir la variable adimensional [6] grado de violencia en pareja (X^+Y^-). De las figuras 2 y 3 se establecen las formas diferenciales de las interacciones para el modelo estructural de la violencia en pareja.

$$\frac{dX^+Y^-}{dt} = \gamma_{+-}X^+Y^- - \beta_{+-}(X^+Y^-)(X^+X^+) - \alpha_{+-}(X^+Y^-)(X^+Z) - \eta_{+-}(X^+Y^-)(Y^-Z) \quad (1)$$

$$\frac{dX^+Z}{dt} = K_{X^+Z} \quad (2)$$

$$\frac{dY^-Z}{dt} = K_{Y^-Z} \quad (3)$$

$$X^+X^+ = \sigma_{++}X^+Y^- \quad (4)$$

El factor γ_{+-} es la parte proporcional de la interacción, el cuál toma en cuenta la frecuencia relativa global promedio de la violencia y el peso promedio asignado, esto es,

$$\gamma_{+-} = \left(\overline{f_{r+-}^{X^+Y^-}} \right) \left(\overline{\omega_{+-}^{X^+Y^-}} \right).$$

β_{+-} es la parte proporcional de pérdida en el grado de violencia propuesto como $\beta_{+-} = \frac{\gamma_{+-}}{(\overline{X^+Y^-})_{max}}$. α_{+-} es el factor de ganancia en la solicitud de ayuda por parte del perpetrador dado por $\alpha_{+-} = \left(\overline{f_{r+-}^{X^+Z}} \right) \left(\overline{\omega_{+-}^{X^+Z}} \right)$. η_{+-} es la ganancia en la solicitud de ayuda por parte de la víctima;

$$\eta_{+-} = \left(\overline{f_{r+-}^{Y^-Z}} \right) \left(\overline{\omega_{+-}^{Y^-Z}} \right).$$

$\overline{f_{r+-}^{X^+Y^-}}$ es el promedio de las frecuencias relativas de la violencia global que ejerce el HV contra la MNV. $\overline{\omega_{+-}^{X^+Y^-}}$ es el peso promedio asignado a las acciones violentas. t es el tiempo medido en meses. $\left(\overline{f_{r+-}^{X^+Z}} \right)$ es la frecuencia relativa con la que solicita ayuda el HV. $\left(\overline{f_{r+-}^{Y^-Z}} \right)$ es la frecuencia

*Se nombra sistema globalizado debido a que el factor (X^+Y^-) contendrá diferentes tipos de violencia [15] que ejerce un HV sobre una MNV. El modelo propuesto tiene una formulación para presentar el comportamiento del sistema en una forma global, que permita ver la curva de las fases de violencia a través del tiempo.

relativa con la que solicita ayuda la mujer violentada (los diferentes gobiernos de los países tienen políticas públicas para brindar ayuda a las mujeres que sufren violencia en pareja [16]), finalmente $(\overline{\omega_{+-}^{X+Z}})$ y $(\overline{\omega_{+-}^{Y-Z}})$ son los pesos asignados al tipo de ayuda solicitada por parte del hombre y la mujer respectivamente.

Las frecuencias relativas y los pesos tomarán valores en $[0, 1] \subset R$. Un ejemplo de la obtención de estos valores, puede ser observado en [6] y [7], los cuáles se obtienen a partir de estudios estadísticos aplicado a mujeres violentadas, para el caso de las frecuencias, y, en el caso de los pesos, a partir de reuniones con expertos en el tema de la violencia de género.

El término $(X^+Y^-)_{max}$ toma en cuenta la fase de "luna de miel" [17] para los niveles del grado de violencia (ejemplos, de los niveles de grado de violencia, se pueden ver en [18][19]); en este modelo $(X^+Y^-)_{max} \in N \geq 1$ donde $(X^+Y^-)_{max} = 1$, asignado de forma heurística para este trabajo.

El factor σ_{++} toma en cuenta la parte emocional del autocontrol[†] que experimenta el HV, el cuál viene determinado por diferentes factores de conciencia y factores externos [20]. Por ejemplo: factores económicos y sociales por mencionar algunos de ellos; esto es $\sigma_{++} = f(f_{externos}, f_{internos})$, el cuál es finito con valores positivos, alcanzando un valor mínimo y un valor máximo, como lo indican algunas de las escalas utilizadas para medir el grado de conciencia y autocontrol [21] [22], esto es:

$$\sigma_{++} \in [\sigma_{++,mín}, \sigma_{++,máx}] \quad (5)$$

Para este trabajo se expolorará el comportamiento del modelo cuando las razones de cambio de la solicitud de ayuda, tanto del hombre como de la mujer, a través del tiempo, son consantes, esto es K_{X+Z} y K_{Y-Z} son parámetros fijos (ver ecuaciones (2) y (3)).

Sustituyendo γ_{+-} , β_{+-} , α_{+-} y η_{+-} en (1) se obtiene la siguiente estructura logística modificada (para mayores detalles de la ecuación ver [23]):

$$\begin{aligned} \frac{dX^+Y^-}{dt} = & \left(\overline{f_{r+-}^{X+Y^-}} \right) \left(\overline{\omega_{+-}^{X+Y^-}} \right) X^+Y^- \left(1 - \frac{1}{(X^+Y^-)_{max}} X^+X^+ \right) \\ & - \left(\overline{f_{r+-}^{X+Z}} \right) \left(\overline{\omega_{+-}^{X+Z}} \right) (X^+Y^-) (X^+Z) - \left(\overline{f_{r+-}^{Y-Z}} \right) \left(\overline{\omega_{+-}^{Y-Z}} \right) (X^+Y^-) (Y^-Z) \end{aligned} \quad (6)$$

De (4) se tiene que el factor de autocontrol σ_{++} debe ser diferente de cero, en particular tomará valores estrictamente positivos²:

$$\sigma_{++} > 0 \quad (7)$$

A partir de (6) y (7), considerando las condiciones para las frecuencias relativas y pesos, obtenemos

$$\frac{dX^+Y^-}{dt} \geq 0 \quad (8)$$

para condiciones iniciales $X^+Y^-(0) = (X^+Y^-)_o$ tomadas en el intervalo

$$[0, (X^+Y^-)_{máx}] \subset R$$

De (8) se deduce que la medición del grado de violencia que ejerce el HV hacia la MNV X^+Y^- , tomará valores positivos, indicando así, que este modelo no considera el cambio donde la mujer pueda ejercer violencia hacia el hombre, en algún instante de tiempo t .

[†]El autocontrol es una habilidad invisible que se caracteriza por ausencia de explosiones emocionales. En este autocontrol se gobiernan adecuadamente los sentimientos impulsivos y las emociones conflictivas permanecen equilibradas y positivas, aún en los momentos más críticos [24]

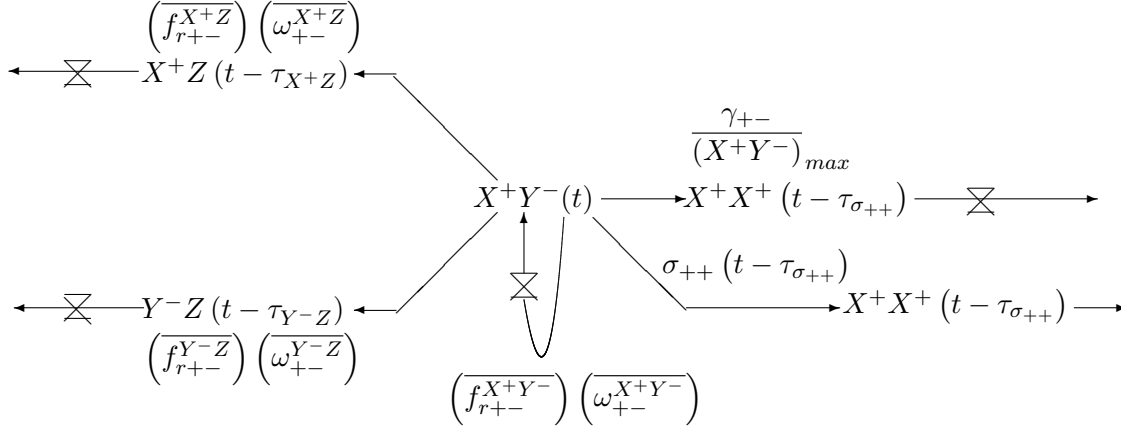


Figura 4: Diagrama de flujo de transición de tiempos de retardo.

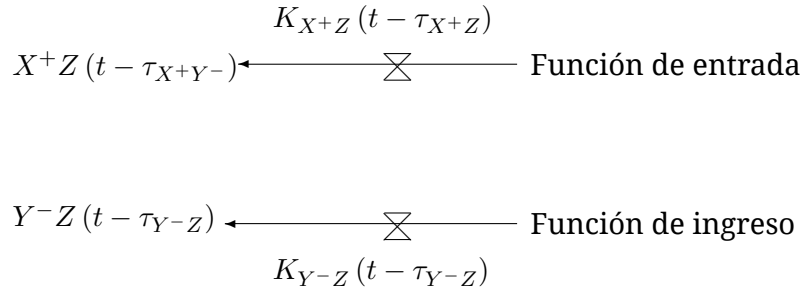


Figura 5: Diagrama de flujo de transición de tiempos para la ayuda brindada a la mujer violentada y al perpetrador.

3 Simulaciones

Las simulaciones numéricas, para analizar el comportamiento de (6), toman en cuenta los tiempos de retardo para el autocontrol[‡] $\tau_{\sigma_{++}}$ (ver (5) y (7)) del perpetrador y los tiempos de retardo de la ayuda hacia la MNV τ_{Y-Z} (3), así como la ayuda hacia el HV τ_{X+Z} (2). En las figuras 4 y 5 se muestran los diagramas de flujos de transición de los tiempos de retardo.

3.1 Sin asistencia

En esta primera parte exploratoria no se tomará en cuenta la asistencia por grupos de ayuda, esto es, las frecuencias relativas de ayuda para el perpetrador y la mujer violentada están dadas por $(\overline{f_{r+-}^{Y-Z}}) = (\overline{f_{r+-}^{X+Y^-}}) = 0$. Por lo que (6) y (4), tomando en cuenta el diagrama de la figura 5, están dadas por:

$$\frac{dX^+Y^-(t)}{dt} = (\overline{f_{r+-}^{X+Y^-}}) (\overline{\omega_{+-}^{X+Y^-}}) X^+Y^-(t) \left(1 - \frac{1}{(X^+Y^-)_{max}} X^+X^+(t - \tau_{\sigma_{++}}) \right) \quad (9)$$

$$X^+X^+(t - \tau_{\sigma_{++}}) = \sigma_{++}(t - \tau_{\sigma_{++}}) X^+Y^-(t) \quad (10)$$

[‡]Un ejemplo de este estudio sobre tiempos de retardo en la autoregulación esta reportado en [5], trabajo especializado sobre personalidad y psicología social.

En las figuras 6, 7 y 8 se muestran las curvas para el grado de violencia que experimenta la mujer a manos del peptrador cuando no hay ningún tipo de asistencia o ayuda brindada por organos externos. En estas simulaciones se tomaron las siguientes condiciones iniciales para el grado de violencia que ejerce el perpetrador, $X^+Y^-(0) = \{0, 0.1, 0.5, 0.9, 1\}$, junto con las combinaciones respecto a los parámetros del autocontrol $\sigma_{++} = \{0.5, 1, 1.5\}$ (elegidos heurísticamente), junto con los valores de retardo $\tau_{\sigma_{++}} = \{1, 2, 3, 4\}$; todas ellas dejando fijos los parámetros: $(X^+Y^-)_{max} = 1$, $(f_{r+-}^{X+Y-}) = 1$ y $(\omega_{+-}^{X+Y-}) = 1$.

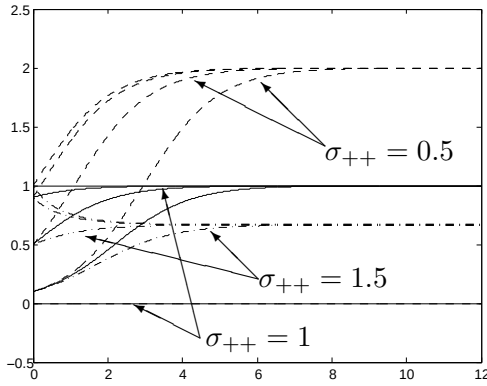


Figura 6: Curvas del grado de violencia sin ayuda y sin tiempos de retardo, a diferentes condiciones iniciales de grados de violencia.

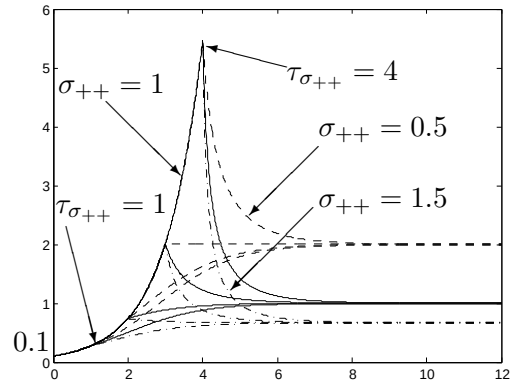


Figura 7: Gráfica del grado de violencia sin ayuda y con tiempos de retardo en el autocontrol a una condición inicial del grado de violencia fija.

3.2 Con asistencia

En esta parte se realiza la parte exploratoria tomando en cuenta los términos de ayuda de la ecuación (6), que junto con el diagrama de flujo de transición de tiempos mostrados en las figuras 4 y 5 resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dX^+Y^-(t)}{dt} = & \left(\overline{f_{r+-}^{X+Y-}} \right) \left(\overline{\omega_{+-}^{X+Y-}} \right) X^+Y^-(t) \left(1 - \frac{1}{(X^+Y^-)_{max}} X^+X^+(t - \tau_{\sigma_{++}}) \right) \\ & - \left(\overline{f_{r+-}^{X+Z}} \right) \left(\overline{\omega_{+-}^{X+Z}} \right) (X^+Y^-(t)) (X^+Z)(t - \tau_{X+Z}) \\ & - \left(\overline{f_{r+-}^{Y-Z}} \right) \left(\overline{\omega_{+-}^{Y-Z}} \right) (X^+Y^-(t)) (Y^-Z)(t - \tau_{Y-Z}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{dX^+Z}{dt} = K_{X+Z}(t - \tau_{X+Z}) \quad (12)$$

$$\frac{dY^-Z}{dt} = K_{Y-Z}(t - \tau_{Y-Z}) \quad (13)$$

$$X^+X^+(t - \tau_{\sigma_{++}}) = \sigma_{++}(t - \tau_{\sigma_{++}}) X^+Y^-(t) \quad (14)$$

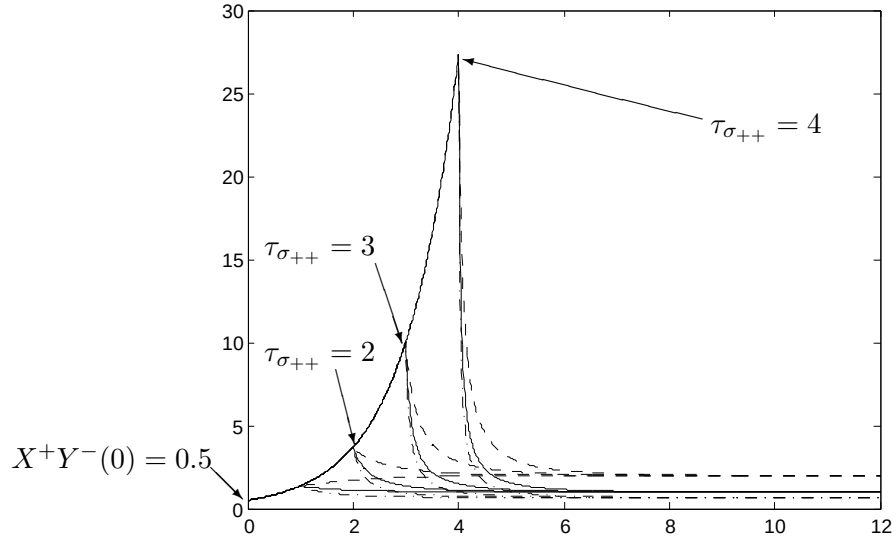


Figura 8: Comportamiento del grado de violencia sin ayuda con tiempos de retardo en el autocontrol a una condición inicial del grado de violencia; valor constante a un año desde que se comenzó a ejercer violencia.

En la figura 9 se muestra la simulación exploratoria a tres diferentes valores del autocontrol (7) y tres valores de la ganancia de la asistencia brindada hacia la víctima y el victimario K_{X+Z} & K_{Y-Z} respectivamente, realizadas a partir de las ecuaciones (11)-(14) con todos los tiempos de retardo iguales a cero y los valores de las frecuencias y los pesos $(\overline{f_{r+-}^{X+Y-}})$, $(\overline{\omega_{+-}^{X+Y-}})$, $(\overline{f_{r+-}^{X+Z}})$, $(\overline{\omega_{+-}^{X+Z}})$, $(\overline{f_{r+-}^{Y-Z}})$ y $(\overline{\omega_{+-}^{Y-Z}})$ iguales a uno; se observa de esta figura, que cuando hay una asistencia constante la violencia se reduce a cero (caso ideal) y que a mayor autocontrol conjuntamente con mayor asistencia disminuye el grado de violencia para beneficio de la víctima. Asimismo, se nota que a menor ganancia en las asistencias K_{Y-Z} y K_{X+Z} , el tiempo para reducir al máximo el grado de violencia se extiende, comparado con el tiempo cuando las ganancias aumentan. También a mayor asistencia el autocontrol deja de ser significativo. Por último, el efecto en las ganancias de la asistencia es más significativo que aquel debido al autocontrol.

En las figuras 10, 11 y 12 se muestran las simulaciones a tres diferentes valores del autocontrol (7) con un valor fijo para la ganancia en la asistencia brindada hacia la víctima y el victimario K_{X+Z} & K_{Y-Z} , donde todas ellas se simularon a diferentes combinaciones en los tiempos de retardo en el autocontrol y retardos en la asistencia ((11)-(14)).

4 Discusión y Conclusiones

Se propone un modelo matemático simplificado unidireccional para la violencia que ejerce un HV hacia una MNV. Este modelo toma en cuenta el factor de autocontrol que tiene el perpetrador,

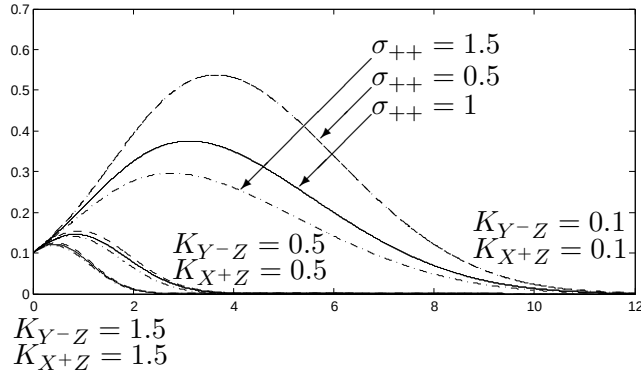


Figura 9: Curvas del grado de violencia con asistencia, sin tiempos de retardo; condición inicial fija de grado del violencia, para $\sigma_{++} = 1$ (línea sólida), $\sigma_{++} = 1.5$ (línea punto-rama) y $\sigma_{++} = 0.5$ (línea raya-rama).

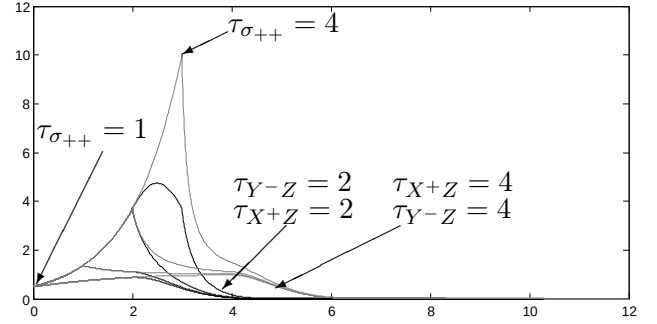


Figura 10: Gráfica del grado de violencia para σ_{++} , K_{X+Z} y K_{Y-Z} iguales a uno. Las líneas oscuras y claras representan los retardos de dos meses y cuatro meses respectivamente en la asistencia, para diferentes retardos en el autocontrol $\tau_{\sigma_{++}}$.

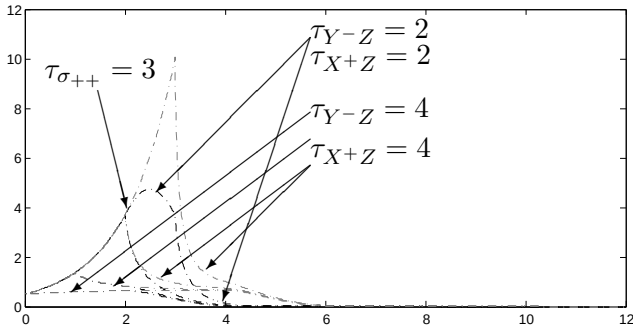


Figura 11: Comportamiento del grado de violencia para $\sigma_{++} = 1.5$, $K_{X+Z} = 1$ y $K_{Y-Z} = 1$. Las líneas oscuras y claras representan los retardos de dos meses y cuatro meses respectivamente en la asistencia.

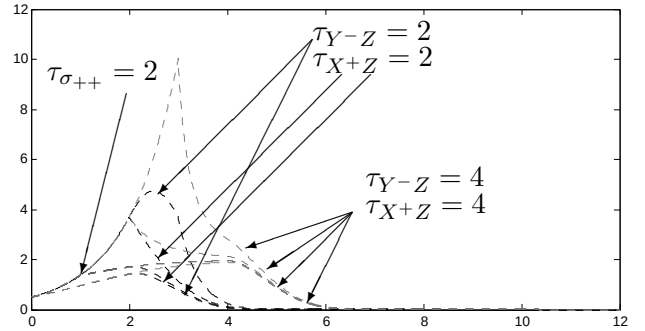


Figura 12: Dinámica del grado de violencia con asistencia $\sigma_{++} = 0.5$, $K_{X+Z} = 1$ y $K_{Y-Z} = 1$. Las líneas oscuras y claras representan los retardos de dos meses y cuatro meses respectivamente.

así como la asistencia que pueden brindar entidades externas para ayudar tanto al hombre como a la mujer ((11)-(14)).

Este modelo propuesto unidireccional, en ningún instante de tiempo predice el cambio de dirección, esto es, no toma en cuenta que en algún momento la mujer pueda ejercer violencia hacia el hombre ((8)).

Se realizan simulaciones exploratorias cuando no hay asistencia (figura 2), de esta parte se generaron dos casos: cuando no hay retardos en el autocontrol, donde se observa que cuando se mantiene un valor constante en el autocontrol se llega a un estado de estabilidad donde el grado de violencia ya no aumenta pero tampoco disminuye; asimismo entre mayor es el grado de autocontrol la violencia se estabiliza con un menor grado de violencia hacia la mujer (ver figura 6) y el segundo caso se realizó cuando hay retardos en el autocontrol del perpetrador (ver figura 5), de estas simulaciones se observa que entre mayor retardo en el autocontrol, el grado de violencia aumenta y posteriormente nuevamente se estabiliza a un mayor tiempo que cuando no existía ningún retraso temporal (ver figuras 7 y 8).

Finalmente se nota que cuando hay una asistencia hacia la mujer y el hombre este modelo predice que el grado de violencia desaparece sin importar que autocontrol se tenga; esta variable afecta más a medida que el retardo sin la asistencia crece (ver figura 9). Cuando se realizan las combinaciones en los retardos del autocontrol y los retardos en la asistencia, se observa de forma cualitativa que la violencia converge a un solo punto en el tiempo (tendencia de violencia cero sin importar aparentemente el retardo en el autocontrol); asimismo se nota que hay variaciones en el área bajo la curva de la violencia hacia la mujer (ver figuras 10, 11 y 12). Este modelo pretende comenzar a contribuir a la generación de herramientas matemáticas e informáticas para que los expertos en el fenómeno de la violencia las puedan utilizar, con la finalidad de cuantificar este fenómeno y probablemente puedan ser utilizadas para proponer o coadyuvar a las políticas públicas referentes al área de salud.

Referencias

- [1] Troy Fenlason (2009). Change in intimate partner violence: the domestic couple's perspective on perpetrator change-A Dissertation. Antioch University Seattle, Seattle, WA. Thesis Doctor of Psychology.
- [2] Andrés Pueyo, A. y Redondo, S. (2007). La predicción de la violencia. Papeles del Psicólogo. Vol. 28(3), pp. 145-146.
- [3] McGuigan, W. M., & Middlemiss, W. (2005). Sexual Abuse in Childhood and Interpersonal Violence in Adulthood A Cumulative Impact on Depressive Symptoms in Women. Journal of Interpersonal Violence, 20(10), 1271-1287.
- [4] Wesely, J. K. (2006). Considering the context of women's violence gender, lived experiences, and cumulative victimization. Feminist Criminology, 1(4), 303-328.
- [5] Eli J. Finkel, C. Nathan DeWall, et al. (2009). Self-Regulatory Failure and Intimate Partner Violence Perpetration. Journal of Personality and Social Psychology, Vol. 97, No. 3, pp. 483-499.
- [6] Rosario Valdez-Santiago, Martha C Híjar-Medina, et al. L(2006). Escala de violencia e índice de severidad: una propuesta metodológica para medir la violencia de pareja en mujeres mexicanas. Salud pública de México / vol.48, suplemento 2 de 2006, pp. S221-S31.
- [7] Francisco José Zamudio Sánchez, Roxana Ivette Arana Ovalle, et al. (2013). Estudio sobre la violencia de género: la otra cara de la Universidad Autónoma Chapingo. Universidad Autó-

noma Chapingo-División de Ciencias Forestales, Departamento de Estadística, Matemática y Cómputo, México.

- [8] Organización Mundial de la Salud (2013). Comprender y abordar la violencia contra las mujeres-Violencia infligida por la pareja. Edición en español realizada por la Organización Panamericana de la Salud. Washington,DC : OPS, 2013.
- [9] Bronfenbrenner, U. (1977). Toward an experimental ecology of human development. *American psychologist*, 32(7), 513.
- [10] John A. Sokolowski and Catherine M. Banks (2010). Modeling Complex Social Behavior: A System Dynamics Approach. *Proceedings of the 19th Conference on Behavior Representation in Modeling and Simulation*, Charleston, SC, pp. 21 - 24.
- [11] Verhulst PF (1845). *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*. *Nouv. mém. de l'Académie Royale des Sci. et Belles-Lettres de Bruxelles* 18:1-41.
- [12] Forrester, JW (2010). *System Dynamics and the Lessons of 35 Years*. MIT Report D-4224-4.
- [13] J. Austin, E. Smith, S. Srinivasan and F. Sanchez (2011). *Social Dynamics of Gang Involvement: A Mathematical Approach*. Mathematical and Theoretical Biology Institute, MTBI-08-08M.
- [14] Farida, Moe, Ahmadi-Esfahani and Fredoun Z (2007). *Modelling Corruption in a Cobb-Douglas Production Function Framework*. 2007 Conference (51st), February 13-16, Queens-town, New Zealand.
- [15] Instituto Nacional de las Mujeres (2006). *Violencia en las relaciones de pareja-Resultados de la Encuesta Nacional sobre la Dinámica de las Relaciones en los Hogares, 2006*. México.
- [16] *Compromisos gubernamentales por países referente a políticas públicas* (2015). <http://www.unwomen.org/es/what-we-do/ending-violence-against-women/take-action/commit/government-commitments>.
- [17] Women's Center, Youth & Family Services (2012). <http://www.womenscenteryfs.org/index.php/prevention/education/14-cycle-of-violence>
- [18] Programa Institucional de gestión con perspectiva de género (2012). *Género y Amor: principales aliados de la violencia en las relaciones de pareja que establecen estudiantes del IPN*, Instituto Politécnico Nacional, México.
- [19] Peter Tyrer, Sylvia Cooper, Elizabeth Herbert, et al. (2007). *The Quantification of Violence Scale: A Simple Method Of Recording Significant Violence*. *International Journal of Social Psychiatry*. Copyright © SAGE Publications 2007 (Los Angeles, London, New Delhi and Singapore).
- [20] Javier Fernández- Montalvo y Enrique Echeburúa (2008). *Trastornos de Personalidad y Psicopatía en Hombres Condenados por Violencia Grave contra la Pareja*. *Psicothema* (Vol.20 N° 2, pp. 193-198).
- [21] Hawkins, David R., *Power Vs. Force: The Hidden Determinants of Human Behavior*. 2002, NewYork. Hay House, Inc., p. 38.
- [22] Teasdale G, Jennett B. *Assessment of coma and impaired consciousness. A practical scale*. *Lancet* 1974;2:81-84. PMID 4136544.

-
- [23] Strogatz S.H (1994). Nonlinear dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Addison-Wesley. Reading, MA.
- [24] Goleman Daniel (1998). La práctica de la inteligencia emocional. Barcelona. Kairos.

Procesos Fuzzy, Procesos Híbridos y Procesos Inciertos Extensiones y Aplicaciones en finanzas

John Freddy Moreno Trujillo
jhon.moreno@uexternado.edu.co
Universidad Externado de Colombia

Resumen

Se consideran diferentes tipos de incertidumbre, y se consideran procesos fuzzy, híbridos e inciertos para modelarla. Se presentan algunos resultados del cálculo y ecuaciones diferenciales en los tres contextos y la aplicación de estos resultados para la modelación del precio de activos de mercado en cada caso. Todo esto siguiendo los trabajos de Baoding Liu sobre teoría de la credibilidad y teoría de la incertidumbre.

1 Introducción a los conjuntos fuzzy

En la teoría clásica de conjuntos, el concepto de pertenencia o no de un elemento a un conjunto A puede expresarse numéricamente mediante una *función de característica*, que asigna a cada elemento x del universo de discurso un valor (1 ó 0), según x pertenezca o no al conjunto A .

$$\varphi_A : U \rightarrow \{0, 1\} \quad ; \quad \varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

De esta forma, cualquier conjunto $A \subset U$ se puede definir por los pares $(x, \varphi_A(x))$, considerando que el predicado que define al conjunto A da lugar a una clara bipartición el universo de discurso U .

Los **conjuntos fuzzy** o **conjuntos borrosos** surgen cuando el predicado que define al conjunto es un *predicado vago*, por ejemplo, si el universo es el conjunto de todas las acciones que se tranzan diariamente en la bolsa de valores, podemos definir un conjunto B como aquel formado por las acciones más costosas. No es posible dar una definición clásica del conjunto B , pues no es claro cuando una acción es costosa, y el problema podría resolverse parcialmente considerando que una acción es costosa si supera un cierto valor, pero esta solución es parcial y no muy conveniente porque el valor límite se establecería de manera arbitraria, y se puede presentar el caso de dos o mas acciones con precios muy diferentes consideradas costosas.

Se puede dar solución a este problema considerando que la pertenencia de un elemento x al conjunto B no es absoluta sino parcial o gradual. Se dice entonces que B es una *conjunto fuzzy* o *borroso* si su función característica (ahora denominada *función de pertenencia*) no tomara valores en el conjunto $\{0, 1\}$, si no en el intervalo $[0, 1]$.

Se define entonces un conjunto fuzzy como $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\}$, donde la función de pertenencia μ_A reemplaza a la función característica φ_A , de forma que $\mu_A(x) \in [0, 1]$ da el grado con el que un elemento $x \in U$ pertenece al conjunto fuzzy A . Cuando $\mu_A(x) = 0$ el elemento x no pertenece al conjunto A , y cuando $\mu_A(x) = 1$ el elemento x pertenece al conjunto A .

La forma de la función de pertenencia tiene un cierto componente subjetivo, en función de la aplicación de los conjuntos y de los conceptos representados por estos, lo que en la practica da la posibilidad de incorporar cierto conocimiento experto en la selección de la forma de la función.

2 Variables Fuzzy, Híbridas e Inciertas

2.1 Variables aleatorias

Dado un conjunto no vacío Ω , y una σ -álgebra $\mathcal{F}$ sobre este conjunto, el par $(\Omega, \mathcal{F})$ se denomina espacio medible y podemos definir una *medida de probabilidad* P sobre este espacio, tal que esta medida satisface:

1.- (Normalidad) $P[\Omega] = 1$.

2.- (No negatividad) $P[A] \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

3.- (σ -aditividad) Para toda sucesión de eventos mutuamente excluyentes $\{A_i\}$ se tiene que:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

La tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se denomina espacio de probabilidad, y una **variable aleatoria** X es una función medible del espacio de probabilidad al conjunto de los números reales, es decir, para cualquier conjunto de Borel B de números reales, el conjunto $\{w \in \Omega | X[w] \in B\}$ es un evento en $\mathcal{F}$.

2.2 Variables Fuzzy

Dado un conjunto no vacío Θ , y denotando con $\mathcal{P}$ al conjunto potencia de Θ (todos los subconjuntos de Θ), y cada elemento de $\mathcal{P}$ es denominado evento. Sobre $\mathcal{P}$ podemos definir una *medida de credibilidad* $Cr[\cdot]$ que satisface:

1.- (Normalidad) $Cr[\Theta] = 1$.

2.- (Monotonidad) $Cr(A) \leq Cr(B)$ si se tiene que $A \subset B$.

3.- (Complemento) $Cr[A] + Cr[A^c] = 1$ para todo $A \in \mathfrak{P}$.

4.- (Maximalidad) Para toda sucesión de eventos $\{A_i\}$ con $\sup_i Cr[A_i] < 0.5$ se tiene que:

$$Cr\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sup_i Cr[A_i]$$

La tripleta $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ se denomina espacio de credibilidad, y una **variable fuzzy** ξ es una función del espacio de credibilidad al conjunto de los números reales, con función de pertenencia dada por:

$$\mu(x) = \min\{2Cr[\xi = x] ; 1\} \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Inversamente, si una variable fuzzy ξ es dada por su función de pertenencia μ , entonces se puede calcular el valor de credibilidad por medio de la expresión:

$$Cr\{\xi \in B\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in B} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in B^c} \mu(x) \right) \quad (3)$$

donde B es un conjunto de números reales.

2.3 Variables híbridas

En el trabajo de Liu [1], se considera un espacio de credibilidad $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, el producto entre estos dos espacios $(\Theta, \mathcal{P}, Cr) \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ es llamado **espacio de posibilidad** (*chance*).

El conjunto universal $\Theta \times \Omega$ esta formado por todas las parejas ordenadas de la forma (θ, w) , con $\theta \in \Theta$ y $w \in \Omega$. Sobre este conjunto, un subconjunto Λ es llamado *evento* si $\Lambda(\theta) = \{w \in \Omega | (\theta, w) \in \Lambda\} \in \mathcal{F}$ para todo $\theta \in \Theta$. Liu en [2], muestra que el conjunto potencia de $\Theta \times \Omega$ es una σ -álgebra sobre este conjunto, denotada por $\mathcal{P} \times \mathcal{F}$.

Dado $(\Theta, \mathcal{P}, Cr) \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$, se define la *medida de posibilidad* $Ch(\cdot)$, de un evento Λ como:

$$Ch(\Lambda) = \begin{cases} \sup_{\theta \in \Theta} \{Cr[\theta] \wedge P[\Lambda(\theta)]\} & \text{si } \sup_{\theta \in \Theta} \{Cr[\theta] \wedge P[\Lambda(\theta)]\} < 0.5 \\ 1 - \sup_{\theta \in \Theta} \{Cr[\theta] \wedge P[\Lambda^c(\theta)]\} & \text{si } \sup_{\theta \in \Theta} \{Cr[\theta] \wedge P[\Lambda(\theta)]\} \geq 0.5 \end{cases} \quad (4)$$

Li y Liu en [3] muestran que esta medida es normal, monótona y subaditiva contable.

Una **variable híbrida** se define como una función del espacio de posibilidad $(\Theta, \mathcal{P}, Cr) \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ en los reales, de forma que para cualquier conjunto de Borel B de números reales, el conjunto $\{(\theta, w) \in \Theta \times \Omega | \xi(\theta, w) \in B\}$ es un evento.

2.4 Variables inciertas

Dado un conjunto no vacío Γ , y denotando con $\mathcal{T}$ a una σ -álgebra sobre Γ , cada elemento $\Lambda \in \mathcal{T}$ se denomina evento. Se define una *medida incierta* $\mathcal{M}[\cdot]$ sobre los eventos en $\mathcal{T}$, que satisface:

1.- (Normalidad) $\mathcal{M}[\Gamma] = 1$.

2.- (Monotonidad) $\mathcal{M}(\Lambda_1) \leq \mathcal{M}(\Lambda_2)$ si se tiene que $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$.

3.- (Complemento) $\mathcal{M}[A] + \mathcal{M}[A^c] = 1$ para todo $A \in \mathcal{T}$.

4.- (Subaditividad contable) Para toda sucesión de eventos $\{\Lambda_i\}$ se tiene que:

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_i \mathcal{M}[\Lambda_i]$$

La tripleta $(\Gamma, \mathcal{T}, \mathcal{M})$ se denomina espacio incierto, y una **variable incierta** ξ es una función medible del espacio de incierto al conjunto de los números reales, es decir, para cualquier conjunto de Borel B de números reales, el conjunto $\{\gamma \in \Gamma | \xi(\gamma) \in B\}$ es un evento.

Como se puede apreciar de las definiciones anteriores, las medidas de probabilidad, credibilidad, posibilidad e incertidumbre coinciden en los axiomas de normalidad, monotonicidad, y complemento, y la diferencia esencial esta en la forma como se determina la medida de la unión de eventos. Si se considera una sucesión de eventos mutuamente excluyentes $\{A_i\}$ y una medida π con $\sup_i \pi(A_i) < 0.5$, entonces:

- π es una medida de probabilidad si satisface el axioma de aditividad contable,

$$\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i) \quad (5)$$

- π es una medida de credibilidad si satisface el axioma de maximalidad,

$$\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sup_{1 \leq i < \infty} \pi(A_i) \quad (6)$$

- π es una medida de incertidumbre si satisface el axioma de subaditividad contable,

$$\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i) \quad (7)$$

y como la aditividad y la maximalidad son casos especiales de la subaditividad, la probabilidad y la credibilidad son casos especiales de medidas de posibilidad, y las tres caen en la categoría de medidas de incertidumbre. Lo anterior también implica que las variables aleatorias y fuzzy son casos especiales de variables híbridas, y las tres son variables inciertas.

3 Calculo Fuzzy y modelo de activos

Sea T un conjunto de índices y $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ un espacio de credibilidad. Un **proceso fuzzy** es una función de $T \times (\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ al conjunto de los números reales, es decir, un proceso fuzzy $X(t, \theta)$ es una función de dos variables tal que, la función $X(t^*, \theta)$ es una variable fuzzy para cada t^* . Para cada θ^* , $X(t, \theta^*)$ es *trayectoria muestral* del proceso fuzzy. El proceso fuzzy $X(t, \theta)$ se dice de *trayectorias continuas*, si sus trayectorias muestrales son funciones continuas para todo θ . Como ya es habitual en casi toda la literatura el proceso $X(t, \theta)$ se denotara en forma abreviada por X_t .

Un proceso fuzzy X_t tiene *incrementos independientes* si para $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, se tiene que $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son variables fuzzy independientes*. Un proceso fuzzy tiene *incrementos estacionarios* si para un $t > 0$ fijo, los $X_{t+s} - X_t$ son variables fuzzy idénticamente distribuidas para todo $s > 0$.

3.1 Proceso C

Un proceso fuzzy se dice un **proceso C** si satisface:

- 1.- $C_0 = 0$.
- 2.- C_t tiene incrementos estacionarios e independientes.
- 3.- Todo incremento $C_{t+s} - C_t$ es una variable fuzzy distribuida normalmente con valor esperado μt y varianza $\sigma^2 t^2$, cuya función de pertenencia es:

$$\mu(x) = 2 \left(1 + \exp \left(\frac{\pi |x - \mu t|}{\sqrt{6} \sigma t} \right) \right)^{-1} ; \quad x \in \mathbb{R}$$

Los parámetros μ y σ son llamados coeficientes de tendencia y difusión respectivamente, y el proceso C se dice estándar si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Este proceso juega el rol del Movimiento Browniano en el cálculo estocástico o calculo de Itô. La demostración e la existencia de este tipo de procesos se puede encontrar en [4].

Si dt denota un intervalo de tiempo infinitesimal, y mediante $dC_t = C_{t+dt} - C_t$ denotamos el proceso fuzzy de los incrementos infinitesimales de un proceso fuzzy estándar C_t , se tiene que dC_t es una variable fuzzy normalmente distribuida con[†]:

$$E[dC_t] = 0 \quad ; \quad V[dC_t] = dt^2 \quad ; \quad E[dC_t^2] = dt^2 \quad ; \quad V[dC_t^2] \approx 7dt^4 \quad (8)$$

3.2 Integral fuzzy

Si se considera una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$, en la cual:

$$\delta = \max_i |t_{i+1} - t_i|$$

se define la *integral fuzzy* del proceso X_t respecto a C_t como:

*Para una revisión de los conceptos de distribución, independencia y otros sobre variables fuzzy, revisar el trabajo de Liu [1].

[†]El valor esperado y la varianza de una variable fuzzy es calculado a partir de la definición general que de estos operadores se presenta en [5], donde, si ξ es una variable fuzzy, entonces:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr[\xi \geq r] dr - \int_{-\infty}^0 Cr[\xi \geq r] dr$$

probando que al menos una de las integrales es finita. Y

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2]$$

donde e es el valor esperado de ξ .

$$\int_a^b X_t dC_t = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=n} X_{t_i} (C_{t_{i+1}} - C_{t_i}) \quad (9)$$

probando que el límite existe casi seguramente. Esta integral es una variable fuzzy.

Algunos ejemplos de esta integral son:

$$\int_0^s dC_t = C_s \quad ; \quad \int_0^s t dC_t = sC_s - \int_0^s C_t dt \quad ; \quad \int_0^s C_t dC_t = \frac{C_s^2}{2}$$

Es importante notar la diferencia entre esta integral y la integral estocástica o integral de Itô respecto al movimiento Browniano (W_t), en la cual, por ejemplo, $\int_0^s W_t dW_t = \frac{W_s^2}{2} - \frac{s}{2}$.

3.3 Regla de la cadena del cálculo fuzzy

Sea C_t un proceso C estándar, y sea $h(t, c)$ una función continuamente diferenciable. Si se define un proceso $X_t = h(t, C_t)$, se tiene la siguiente regla de la cadena:

$$dX_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t, C_t)dt + \frac{\partial h}{\partial c}(t, C_t)dC_t \quad (10)$$

la cual se demuestra mediante aproximaciones de Taylor de primer orden, y puede ser expresada en términos de integrales fuzzy como:

$$X_s = X_0 + \int_0^s \frac{\partial h}{\partial t}(t, C_t)dt + \int_0^s \frac{\partial h}{\partial c}(t, C_t)dC_t \quad s \geq 0 \quad (11)$$

De forma más general, si se considera un proceso Y_t , tal que, $dY_t = u_t dt + v_t dC_t$ donde u_t y v_t son procesos fuzzy absolutamente integrables, entonces considerando de nuevo una función $h(t, c)$ continuamente diferenciable, se tiene que:

$$dh(t, Y_t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, Y_t)dt + \frac{\partial h}{\partial c}(t, Y_t)dY_t \quad (12)$$

3.4 Ecuaciones diferenciales fuzzy

Dado C_t , un proceso C estándar, y funciones f y g dadas, entonces

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t \quad (13)$$

es llamada *ecuación diferencial fuzzy*, y una solución de esta ecuación es un proceso X_t que cumpla la igualdad para todo t . Por ejemplo la ecuación diferencial fuzzy:

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dC_t$$

tiene solución $X_t = \exp\{at + bC_t\}$, conocido como *proceso C geométrico*.

3.5 Modelo de precio de activos

Los modelos clásicos de las finanzas modernas asumen que los precios de los activos riesgosos en el mercado, son descritos por un movimiento Browniano geométrico. Se considera entonces un planteamiento alternativo, en el cual los precios son descritos por un proceso C geométrico, y sobre este supuesto se consideran algunos problemas clásicos como la valoración de derivados financieros o la selección óptima de portafolios.

Se considera entonces un mercado en el cual existe un activo libre de riesgo con valor en t denotado como X_t , que satisface:

$$X_t = X_0 e^{rt} \quad (14)$$

donde r es una tasa de interés constante y conocida. De forma equivalente se tiene que:

$$dX_t = rX_t dt \quad (15)$$

y un activo riesgoso cuyo valor en t , denotamos por Y_t y satisface:

$$Y_t = Y_0 e^{\mu t + \sigma C_t} \quad (16)$$

donde μ es la tasa de rentabilidad del activo, σ es la volatilidad de este activo y C_t es un proceso C estándar. De forma equivalente se tiene que:

$$dY_t = \mu Y_t dt + \sigma Y_t dC_t \quad (17)$$

modelo que es la contraparte fuzzy del modelo de mercado utilizado en el modelo Black-Scholes-Merton.

4 Cálculo híbrido y modelo de activos

Sea T un conjunto de índices y $(\Theta, \mathcal{P}, Cr) \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de posibilidad. Un **proceso híbrido** es una función medible de $T \times (\Theta, \mathcal{P}, Cr) \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ al conjunto de los números reales.

Un proceso híbrido $X(t, \theta, w)$ es una función de tres variables tal que, la función $X(t^*, \theta, w)$ es una variable híbrida para cada t^* , y para cada (θ^*, w^*) fijo, $X(t, \theta^*, w^*)$ es *trayectoria muestral* del proceso híbrido. El proceso híbrido $X(t, \theta, w)$ se dice de *trayectorias continuas*, si sus trayectorias muestrales son funciones continuas para todo (θ, w) . Como ya es habitual el proceso $X(t, \theta, w)$ se denotará en forma abreviada por X_t .

Un proceso híbrido X_t tiene *incrementos independientes* si para $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, se tiene que $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son variables híbridas independientes. Un proceso híbrido tiene *incrementos estacionarios* si para un $t > 0$ fijo, los $X_{t+s} - X_t$ son variables híbridas idénticamente distribuidas para todo $s > 0$.

Como ejemplo considere que X_t es un proceso fuzzy y Y_t un proceso estocástico, entonces el proceso $X_t + Y_t$ es un proceso híbrido.

4.1 Proceso D

Sea W_t un movimiento Browniano y C_t un proceso C , entonces el proceso $D_t = (W_t, C_t)$ es llamado *proceso D*, y se dice proceso D estándar si W_t y C_t son estándar.

El procesos híbrido X_t definido como:

$$X_t = \mu t + \sigma_1 W_t + \sigma_2 C_t \quad (18)$$

se denomina *proceso D escalar*. El parámetro μ es llamado coeficiente de tendencia, σ_1 coeficiente de difusión aleatoria y σ_2 coeficiente de difusión fuzzy.

El procesos híbrido X_t definido como:

$$X_t = \exp\{\mu t + \sigma_1 W_t + \sigma_2 C_t\} \quad (19)$$

donde W_t y C_t , son estándar, se denomina *proceso D geométrico*.

Si D_t es un proceso D estándar, y dt es un intervalo de tiempo infinitesimal, entonces $dD_t = D_{t+dt} - D_t = (dW_t, dC_t)$ es un proceso híbrido.

4.2 Integral híbrida

Dado $X_t = (Y_t, Z_t)$, donde Y_t y Z_t son procesos híbridos escalares, y $D_t = (W_t, C_t)$ un proceso D estándar. Para cualquier partición del intervalo cerrado $[a, b]$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$, en la cual:

$$\delta = \max_i |t_{i+1} - t_i|$$

se define la *integral híbrida* del proceso X_t respecto a D_t como:

$$\int_a^b X_t dD_t = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=n} (Y_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + Z_{t_i} (C_{t_{i+1}} - C_{t_i})) \quad (20)$$

probando que el límite existe casi seguramente en media cuadrática, y es una variable híbrida.

Un ejemplo de esta integral es:

$$\int_0^s (\sigma_1 dW_t + \sigma_2 dC_t) = \sigma_1 W_s + \sigma_2 C_s$$

con σ_1 y σ_2 constantes, variables aleatorias, variables fuzzy o variables híbridadas.

Otros ejemplos son:

$$\int_0^s (W_t dW_t + C_t dC_t) = \frac{1}{2} (W_s^2 - s + C_s^2) \quad ; \quad \int_0^s (C_t dW_t + W_t dC_t) = W_s C_s$$

4.3 Regla de la cadena del cálculo híbrido

Sean W_t un movimiento Browniano estándar y C_t un proceso C estándar, y sea $h(t, b, c)$ una función continuamente diferenciable por lo menos dos veces. Si se define un proceso $X_t = h(t, W_t, C_t)$, se tiene la siguiente regla de la cadena:

$$dX_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t, W_t, C_t)dt + \frac{\partial h}{\partial b}(t, W_t, C_t)dW_t + \frac{\partial h}{\partial c}(t, W_t, C_t)dC_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial b^2}(t, W_t, C_t)dt \quad (21)$$

la cual se demuestra mediante aproximaciones de Taylor de segundo orden, y puede ser expresada en términos de integrales híbridas como:

$$X_s = X_0 + \int_0^s \frac{\partial h}{\partial t} dt + \int_0^s \frac{\partial h}{\partial b} dW_t + \int_0^s \frac{\partial h}{\partial c} dC_t + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\partial^2 h}{\partial b^2} dt \quad s \geq 0 \quad (22)$$

De forma más general, si se considera un proceso Y_t , tal que, $dY_t = u_t dt + v_t dW_t + m_t dC_t$ donde u_t, v_t son procesos híbridos absolutamente integrables y m_t es una proceso híbrido cuadro integrable, entonces considerando de una función $h(t, y)$ continuamente diferenciable, se tiene que:

$$dh(t, Y_t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, Y_t)dt + \frac{\partial h}{\partial b}(t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial b^2}(t, Y_t)v_t^2 dt \quad (23)$$

4.4 Ecuaciones diferenciales híbridas

Dados C_t un proceso C estándar y W_t un movimiento Browniano estándar, y funciones f, g y h dadas, entonces

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t + h(t, X_t)dC_t \quad (24)$$

es llamada *ecuación diferencial híbrida*, y una solución de esta ecuación es un proceso híbrido X_t que cumpla la igualdad para todo t . Por ejemplo la ecuación diferencial híbrida:

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t + cX_t dC_t$$

tiene solución $X_t = \exp \left\{ \left(a - \frac{b^2}{2} \right) t + bW_t + cC_t \right\}$, conocido como *proceso D geométrico*.

4.5 Modelo de precio de activos

En este caso se considera que el precio de los activos riesgosos Y_t sigue un proceso D geométrico, y que el activo libre de riesgo sigue el modelo clásico de composición continua de interés a una tasa r

$$\begin{cases} dX_t &= rX_t dt \\ dY_t &= \mu Y_t dt + \sigma_1 Y_t dW_t + \sigma_2 Y_t dC_t \end{cases} \quad (25)$$

donde r es una tasa de interés constante y conocida, μ es la tasa de rentabilidad el activo, σ_1 es la difusión aleatoria del activo y σ_2 es la difusión fuzzy del activo.

5 Calculo incierto y modelo de activos

Sea T un conjunto de índices y $(\Gamma, \mathcal{T}, \mathcal{M})$ un espacio de incierto. Un **proceso incierto** es una función medible de $T \times (\Gamma, \mathcal{T}, \mathcal{M})$ al conjunto de los números reales.

Un proceso incierto $X(t, \gamma)$ es una función de dos variables tal que, la función $X(t^*, \gamma)$ es una variable incierta para cada t^* , y para cada γ^* fijo, $X(t, \gamma^*)$ es *trayectoria muestral* del proceso incierto. El proceso incierto $X(t, \gamma)$ se dice de *trayectorias continuas*, si sus trayectorias muestrales son funciones continuas para todo γ . Como ya es habitual el proceso $X(t, \gamma)$ se denotara en forma abreviada por X_t .

Un proceso incierto X_t tiene *incrementos independientes* si para $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, se tiene que $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son variables inciertas independientes. Un proceso incierto tiene *incrementos estacionarios* si para un $t > 0$ fijo, los $X_{t+s} - X_t$ son variables inciertas idénticamente distribuidas para todo $s > 0$.

5.1 Proceso Canónico

Un proceso B_t se denomina **proceso canónico** si satisface:

- 1.- $B_0 = 0$, y B_t tiene trayectorias continuas
- 2.- B_t tiene incrementos estacionarios e independientes.
- 3.- B_1 es una variable incierta con valor esperado 0 y varianza 1.

Se tiene que el movimiento Browniano estándar W_t y el proceso C son ejemplos de procesos canónicos.

Dado un proceso canónico B_t , el proceso $\mu t + \sigma B_t$ se denomina *proceso canónico derivado*, y el proceso incierto $X_t = \exp\{\mu t + \sigma B_t\}$ es llamado *proceso canónico geométrico*.

Si B_t es una proceso canónico y dt un intervalo de tiempo infinitesimal, entonces $dB_t = B_{t+dt} - B_t$ es una proceso incierto con:

$$E[dB_t] = 0 \quad ; \quad dt^2 \leq E[dB_t^2] \leq dt \quad (26)$$

5.2 Integral incierta

Dado X_t un proceso incierto y B_t un proceso canónico. Para cualquier partición del intervalo cerrado $[a, b]$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$, en la cual:

$$\delta = \max_i |t_{i+1} - t_i|$$

se define la *integral incierta* del proceso X_t respecto a B_t como:

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=n} X_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \quad (27)$$

probando que el límite existe casi seguramente en media cuadrática, y es una variable incierta.

5.3 Regla de la cadena del cálculo incierto

Sean B_t un proceso canónico y $h(t, b)$ una función continuamente diferenciable por lo menos dos veces. Si se define un proceso $X_t = h(t, B_t)$, se tiene la siguiente regla de la cadena:

$$dX_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t, B_t)dt + \frac{\partial h}{\partial b}(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial b^2}(t, B_t)dB_t^2 \quad (28)$$

la cual se demuestra mediante aproximaciones de Taylor de segundo orden, y puede ser expresada en términos de integrales híbridas como:

$$X_s = X_0 + \int_0^s \frac{\partial h}{\partial t} dt + \int_0^s \frac{\partial h}{\partial b} dB_t + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\partial^2 h}{\partial b^2} dB_t^2 \quad s \geq 0 \quad (29)$$

De forma más general, si se considera un proceso canónico Y_t , tal que, $dY_t = u_t dt + v_t dB_t$ donde u_t , es un proceso incierto absolutamente integrable y v_t es una proceso incierto cuadro integrable, entonces considerando una función $h(t, b)$ continuamente diferenciable, se tiene que:

$$dh(t, Y_t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, Y_t)dt + \frac{\partial h}{\partial b}(t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial b^2}(t, Y_t)v_t^2 dB_t^2 \quad (30)$$

5.4 Ecuaciones diferenciales inciertas

Dado B_t un proceso canónico y funciones f y g dadas, entonces

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t \quad (31)$$

es llamada *ecuación diferencial incierta*, y una solución de esta ecuación es un proceso incierto X_t que cumpla la igualdad para todo t . Por ejemplo la ecuación diferencial híbrida:

$$dX_t = a dt + b dB_t$$

tiene solución $X_t = at + bB_t$.

5.5 Modelo de precio de activos

En este caso se considera que el precio de los activos riesgosos Y_t sigue un proceso canónico geométrico, y que el activo libre de riesgo sigue el modelo clásico de composición continua de interés a una tasa r

$$\begin{cases} dX_t &= r X_t dt \\ dY_t &= \mu Y_t dt + \sigma Y_t dB_t \end{cases} \quad (32)$$

donde r es una tasa de interés constante y conocida, μ es la tasa de rentabilidad del activo y σ es la difusión del activo.

Referencias

- [1] Liu, B., *A survey of credibility theory*. Fuzzy Optimization and Decision Making, Vol. 5(4), pp 387-408, 2006.
- [2] Liu, B., *Uncertainty theory* 2ª ed. Springer-Berlang, Berlin, 2007.

-
- [3] Li, X., Liu, B., *A sufficient and necessary conditions for credibility measures*. International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-based systems , Vol. 14(5), pp 527-535, 2006.
 - [4] Liu, B., *Fuzzy Process, Hybrid Process and Uncertain Process* Journal of Uncertainty Systems, Vol. 2(1), pp 3-16, 2008.
 - [5] Liu, B and Liu, YK., *Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected values models* IEEE Transaction on Fuzzy Systems , Vol. 10(3/4), pp 259-271, 2003.
 - [6] Kwakernaak, H. . *Fuzzy random variables—I. Definitions and theorems*. Information Sciences, 15(1), pp 1-29. 1978.
 - [7] Kwakernaak, H. *Fuzzy random variables—II. Algorithms and examples for the discrete case*. Information Sciences, 17(3), pp 253-278. 1979.
 - [8] Zadeh, L. A. *Fuzzy sets*. Information and control, 8(3), pp 338-353. 1956.

Tiempo óptimo de cosecha utilizando algoritmos genéticos: Estudio de caso del cultivo de la tilapia

Álvaro J. Cardaña Mejía
valo_ac@hotmail.com
Facultad de Matemáticas
UADY

Roger Domínguez May
rdominguez@mda.cinvestav.mx
CINVESTAV del IPN
Unidad Mérida

Eucario Gasca Leyva
eucario@mda.cinvestav.mx
CINVESTAV del IPN
Unidad Mérida

Resumen

*Se aplica algoritmos genéticos para determinar el tiempo óptimo (TOC) de cosecha de la tilapia *Oreochromis niloticus* en cultivo a través de un modelo bioeconómico. Se usaron cuatro diferentes raciones normalizadas de alimentación ($r=1$, $r=0.84$, $r=0.67$ y $r=0.42$), para elegir el mejor escenario de alimentación. La normalización de la ración fue en base a la saciedad ($r=1$) y a la inanición ($r=0$) y valores intermedios. Los resultados indicaron que el TOC para cada ración fueron los días 461, 384, 340 y 305 y los beneficios generados fueron US\$ 6,731.56, US\$ 8,130.97, US\$ 7,571.65 y US\$ 6,480.99 respectivamente. Resultando el mejor escenario de TOC a los 384 días, bajo una ración de 0.84 con un beneficio máximo de US\$ 8,130.97*

1 Introducción

Un problema de optimización consiste en encontrar valores o puntos óptimos. Existen diferentes técnicas para resolver problemas de optimización, los cuales en su mayoría han sido por métodos tradicionales de programación matemática o simulación [9]. Sin embargo, en últimos años el concepto de optimización ha sido cambiado por métodos basados en ciertas características y comportamientos de sistemas biológicos, moleculares, neurobiológicos y de enjambres de insectos [3]. Holland y colaboradores entre los años 60 y 70, introdujeron el desarrollo de los algoritmos genéticos, los cuales consisten en una abstracción o modelo de evolución basado en la teoría natural de selección de Charles Darwin [8],[9],[15].

Los algoritmos genéticos son métodos de optimización que utilizan los principios de la evolución para resolver problemas de optimización. Y han sido considerados adecuados para maximizar funciones de problemas altamente no lineales, los cuales pueden contener un gran número de variables: de control o decisión, continuas, discretas, discontinuas y definidas en regiones no convexas [3],[6]. Los algoritmos genéticos permiten resolver este tipo de problemas y encontrar

soluciones globales con una alta probabilidad. Han sido aplicados a una amplia gama de problemas de optimización en agricultura y manejo de recursos naturales [1],[8].

En la acuicultura se han aplicado varias técnicas de optimización para resolver problemas bioeconómicos de gestión [5]. Sin embargo, el uso de AG como técnica de resolución a problemas de optimización de sistemas acuícolas (SA) usando modelos bioeconómicos, aún es incipiente. [6] aplicaron esta técnica a un cultivo acuícola para determinar diferentes actitudes de riesgo de una inversión. [10] la han utilizado en modelos bioeconómicos acuícolas a dos especies de almejas gigantes *Tridacna crocea* y *Tridacna derasa* para determinar el tiempo óptimo de rotación. [11] la han empleado para estudiar la manera de llevar a cabo manejos estratégicos óptimos de especies invasoras en el tema de biodiversidad a través de un modelo bioeconómico espacial.

Varias técnicas de optimización han sido formulados y probados en trabajos bioeconómicos de gestión para encontrar el tiempo óptimo de cosecha [4],[2],[7]. Sin embargo, en el caso del cultivo de tilapia *Oreochromis niloticus* ningún trabajo ha propuesto usar algoritmos genéticos. De modo que este trabajo, se ha enfocado al uso de AG's para determinar el tiempo óptimo de cosecha de la tilapia cultivada.

2 Material y Métodos

Se realizará la implementación de un algoritmo genético escrito en Matlab para optimizar un modelo en el cultivo de la tilapia. El modelo bioeconómico aplicado en este trabajo, es descrita con mayores detalles en [14], el cual fue ajustado a las condiciones biológicas y económicas del cultivo de la tilapia en Yucatán. Se realiza una estandarización de la ración de alimentación (calculada como una fracción del peso corporal (%)) en el intervalo $[0, 1]$ donde cero significa estado de inanición y 1 estado de saciedad. El cual fue obtenida dividiendo el tamaño de la ración máxima consumida por el pez entre la cantidad de ración proporcionada a cada tratamiento.

2.1 Submodelo biológico

La forma general de la ecuación diferencial del modelo de crecimiento (Von Bertalanffy) de los organismos está dada por:

$$g(w) = \eta f(r)w^{2/3} - \kappa w \quad (1)$$

Donde w es el peso de los organismos, η y κ son los coeficientes de anabolismo y catabolismo, respectivamente, y $f(r)$ es la función de ración la cual es expresado como:

$$f(r) = r^\varphi e^{\varphi(1-r)} \quad (2)$$

Donde φ es un parámetro de ajuste y $0 < r < 1$ es el nivel de ración normalizada.

Resolviendo analíticamente la ecuación (1) con la condición inicial $w(0) = w_0$ y considerando la ecuación (2), el tamaño del organismo en tiempo t puede obtenerse directamente de:

$$w(t) = \left(\frac{\eta f(r)}{\kappa} \right)^3 \left\{ 1 - \frac{1}{f(r)} e^{-\frac{\kappa}{3}(t+c)} \right\} \quad (3)$$

Donde la talla asintótica puede obtenerse de la expresión:

$$w_\infty = \left(\frac{\eta f(r)}{\kappa} \right)^3 \quad (4)$$

Y la constante c está dada por:

$$c = -\frac{3}{\kappa} \ln \left(w_0^{\frac{1}{3}} - \frac{\eta}{\kappa} f(r) \right). \quad (5)$$

La constante c puede interpretarse como la edad en el cual el pez tiene peso cero.

2.2 Submodelo de manejo

El modelo de biomasa b se obtiene de la siguiente ecuación:

$$b(t) = w(t)n(t) \quad (6)$$

donde $n(t)$ es el número de individuos en el tiempo t , el cual está dado por:

$$\dot{n}(t) = -(1 - S_v(t))n(t); \quad \text{con } n(0) = n_0 \quad (7)$$

Donde s_v es la tasa de supervivencia y n_0 es el número inicial de organismos sembrados. La solución explícita de la ecuación anterior con talla inicial se convierte en:

$$n(t) = n_0 e^{-(1-s_v)t} \quad (8)$$

2.3 Submodelo económico

Para el sub-modelo económico se incluyen las variables y los costos fijos. El costo variable $C_V(t, r)$ de cada escenario de ración fue generado a partir del inicio del cultivo hasta la cosecha el cual se compone como:

$$C_v(t, r) = C_L(t) + C_{ENER}(t, r) + C_{BF}(t, r) + C_f n_0 \quad (9)$$

Donde C_L es el costo de la mano de obra, C_{ENER} es el costo de energía, C_{BF} es el costo de alimentación y C_f es el costo individual de los juveniles. El costo de energía puede ser modelado como

$$C_{ENER} = b(t)E(r) \quad (10)$$

donde E es el costo de energía por recambio y aireación, y b es la biomasa. La función E ha sido estimada de acuerdo a datos reales de granja como:

$$E(r) = cr^2 + dr - h \quad (11)$$

Donde c , d y h son parámetros. De modo que el costo total fijo está dado por:

$$CT(t, r) = C_v(t, r) + C_F \quad (12)$$

Donde C_F es el costo fijo, es definido como la suma de los costos de depreciación de la infraestructura (tanque), equipos de aireación, bomba de agua y la tasa de interés.

El ingreso total es obtenido del producto de la biomasa en el momento de la cosecha, por el precio de venta. En el cual fue considerado dependiente de la talla calculado de acuerdo a:

$$\rho(w) = \rho_{\max} \left(1 - e^{-(\sigma w)}\right), \quad (13)$$

Donde $\rho_{\max}$ es el precio máximo y σ es la rapidez de cambio en el precio debido a la talla. Este estudio analizó el caso de un ciclo de cultivo, en el cual se desea maximizar el valor presente del beneficio en el tiempo t , como se indica abajo

$$\max_{t>0} \pi(t) = e^{-it} p(w)b(t) - C_F - \int_0^T e^{-it} C(t, r)n(t) dt \quad (14)$$

Donde i es la tasa de descuento y T es el periodo de cultivo.

2.4 Parámetros y constantes

Concepto	Unidades	Monto
Capacidad del tanque	m^3	241.27
Densidad del cultivo	peces/ m^3	45.6
Peso inicial	g/peces	14
Tasa de supervivencia (S_v)	%/día	99.9730
Costos variables:		
Alimento balanceado (C_{BF})	\$/Kg	8.00
Mano de obra (C_L)	\$/día	17.32
Costo de crías	\$/crías	0.98
Costos fijos	\$	5.240
Precio fijo (FP)	\$/Kg	25
Tasa de descuento diaria (i)	%	0.0002

Cuadro 1: Supuestos usados en el modelo bioeconómico

	Parámetros	Unidades	Cantidad
Ecuación de crecimiento	η		0.1575
	κ		0.0169
	φ		0.4937
Parámetros de alimentación	Φ_A		0.14288
	Φ_B		-0.37323
	Φ_C		-0.00092
Factor de corrección Ω	ℓ_A		0.0051
	ℓ_B		0.0008
	ℓ_C		0.0048
Función de energía	c		0.366
	d		0.236
	h		0.057
Precio de la tilapia	Precio Máx. ρ de la tilapia	\$/Kg	28
	σ		0.0080

Cuadro 2: parámetros utilizados en el sub-modelo biológico y de manejo intensivo

Parámetros	Valores
Tamaño cromosoma	16 bits
población	16 cromosomas
Número de generaciones	100
Probabilidad Selección	0.7
mutación	0.05

Cuadro 3: Parámetros de corrida para algoritmo genético

2.5 Procedimiento de Optimización por AG

En términos de genética y evolución, se selecciona un conjunto de cromosomas y genes, los cuales pueden cruzarse entre sí, para formar nuevos cromosomas con mejores características y con posibilidades de que algún gen mute en el proceso, lo cual permita considerar nuevas soluciones [9]. Holland y colaboradores fueron los primeros en usar cruzamientos, recombinación, mutación y selección, en el estudio de sistemas adaptivos y artificiales (algoritmos genéticos), como una estrategia para resolver problemas de optimización. Es decir, a partir de un generador de número aleatorio, un AG se compone de una unidad de evaluación de aptitud de reproducciones, cruces y mutaciones, respectivamente.

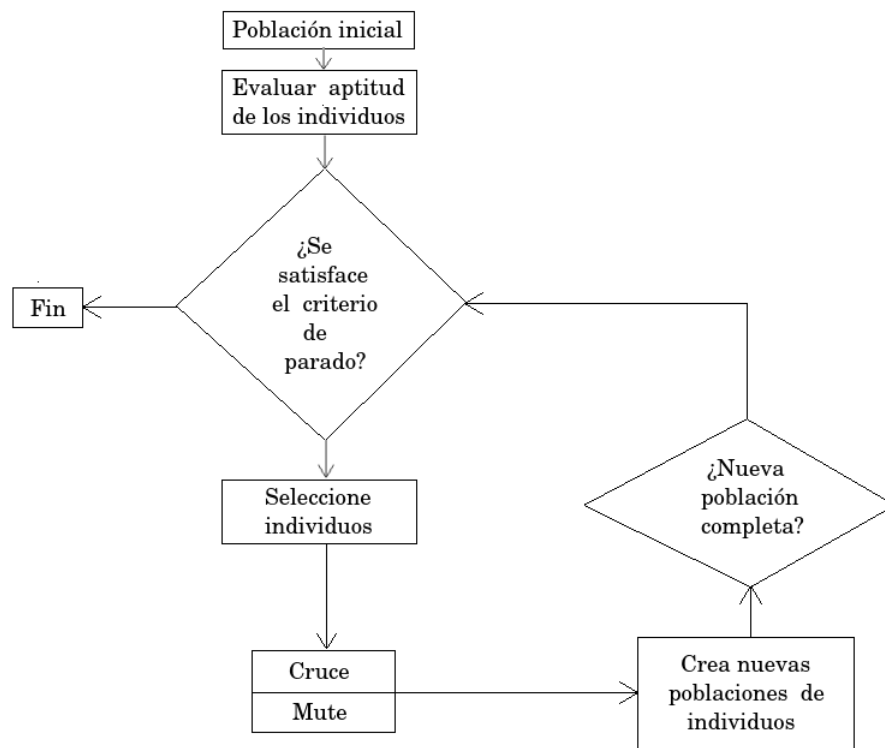


Figura 1: Estructura del procedimiento de un algoritmo genético simple

2.6 Algoritmo genético

En términos más generales, el algoritmo genético es un algoritmo probabilístico que trabaja con conjuntos de soluciones enteras vistas a nivel bits, es decir escritas en binario, los cuales pasan por una función de costo para seleccionar las soluciones que optimizan dicha función. En el caso del modelo bioeconómico, la función de costo es (14).

A continuación se muestra el pseudocódigo de un AG simple y la explicación de éste. Los parámetros mostrados en el pseudocódigo son los usados en el programa original.

```
Define
    N = 16                // Tamaño de bits del cromosoma
    M = 16                // Población de cromosomas
    last = 100            // Número de generaciones
    sel = 0.7             // Probabilidad de selección
    mut = 0.05            // Probabilidad de mutación

pop = random(M,N)        // Generar población de M cromosomas con N bits

for generation = 1 to last
{
    cost = costfunction(pop) // Encontrar el costo de cada cromosoma
    cost = sort(cost)         // Ordenar los costos
    elitism = max{elitism, cost[0]} // No perder el mejor resultado
    pop = agree(elitism)      // Agregar elitism en la población actual
    [subpop1, subpop2] = pair(pop) // Aparear cromosomas.
    pop = cross(subpop1, subpop2) // Cruza con probabilidad 'sel'
    pop = mutation(pop)       // Mutación con probabilidad 'mut'.
}
print (elitism)           // Conocer el mejor resultado.
```

El tamaño de bits del cromosoma ($N = 16$) indica que los posibles resultados del programa varían de 0 a $2^{16} - 1 = 65535$; el programa arroja un número entero pero se usan los valores que se obtienen al mover el punto decimal dos espacios, por ejemplo el valor 7635 se considera el “día” de cosecha 76.35, por lo que realmente los resultados que puede arrojar el programa están en el rango de 0 a 655.35. La población de cromosomas ($M = 16$) indica que el AG trabaja simultáneamente con 16 valores candidatos para la cruce y mutación. El número de generaciones es la cantidad de iteraciones que se realiza antes de arrojar un resultado. La parámetro de selección es la probabilidad de intercambiar un dígito de dos números escritos en binario del conjunto de la población; mientras que el parámetro de mutación indica la probabilidad de cambiar un dígito por otro diferente de una solución escrita en binario de la población, lo cual sirve para considerar soluciones que no se pueden obtener del intercambio de dígitos con la selección. El programa inicia con un conjunto de M posibles resultados, cada uno usando N dígitos binarios. Se realizan varias iteraciones, según las que se indiquen en el parámetro *last*, de un bloque de operaciones, estas son: obtener un conjunto de resultados con los valores que arroja la función de costo (la ganancia neta) de los posibles resultados (días de cosecha); este conjunto es ordenado para decidir cuál es el valor óptimo de la población actual y, en caso de no superar el valor óptimo de la iteración anterior, éste se guarda en una variable al que llamamos en este caso *elitism*; ya sea que el conjunto de la población actual o de la iteración anterior tenga el valor con el máximo de ganancias, éste máximo se agrega como el mejor resultado, según las ganancias, del conjunto de la población de posibles resultados; la población se divide en dos subconjuntos, de igual tamaño, los

cuales se cruzan, es decir se intercambian dígitos en binario, por parejas de valores tomados cada uno de los subconjuntos en que se dividió la población y con una probabilidad dada por el parámetro *sel*; finalmente, según la probabilidad del parámetro *mut*, cada dígito de cada valor escrito en binario en la población puede cambiarse por un dígito distinto. El programa acaba indicando el mejor resultado de la última iteración.

3 Resultados

Los resultados obtenidos del tiempo óptimo de cosecha usando algoritmos genéticos están indicados en la tabla (4). Los beneficios máximos obtenidos para las 4 diferentes raciones $r = 1$, $r = 0.84$, $r = 0.67$ y $r = 0 - 42$ probadas a través del modelo bioeconómico fueron de US\$ 6,731.56, US\$ 8,130.97, US\$8,130.97, US\$ 7,571.65 y US\$ 6,480.99.

<i>Ración Normalizada</i>	<i>Duración del ciclo (días)</i>	<i>Talla de cosecha (g)</i>	<i>Biomasa (Kg)</i>	<i>Ingreso (US \$)</i>	<i>Costos totales (US \$)</i>	<i>Beneficio (US \$)</i>
0.42	461	450.1	4,372.07	1,1845.04	5,113.48	6,731.56
0.67	384	560.1	5,555.58	1,5065.10	6,934.12	8,130.97
0.84	340	560.6	5,627.23	1,5126.15	7,554.50	7,571.65
1	305	527.5	5,344.97	1,4218.06	7,737.06	6,480.99

Cuadro 4: Resultados del tiempo óptimo de cosecha con cuatro regímenes de alimentación

En motivación de probar la estabilidad del AG, el programa se corrió 20 veces para cada cambio del parámetro del número de generaciones realizándose en 50, 100 y 150 iteraciones, para cada uno de las 4 raciones estandarizadas 0.42, 0.67, 0.84 y 1. Los resultados obtenidos fueron tiempos de cosecha idénticos salvo en algunas ocasiones por un diferencia de decimales en la unidad de días, que al evaluarse en la función objetivo dio los mismos resultados salvo por décimas de diferencia.

3.1 Discusión y conclusión

A pesar de que los algoritmos genéticos han sido recomendados para optimizar funciones multivariantes y multivaluadas. Su uso para determinar el tiempo óptimo de cosecha ha mostrado ser eficaz, encontrando satisfactoriamente resultados óptimos del problema planteado. El TOC para las raciones normalizadas $r = 1$, $r = 0.84$, $r = 0.67$ y $r = 0 - 42$ hallados por el algoritmo fueron los días 305, 340, 381 y 461 después de la siembra. Los largos periodos de cosecha hallados aquí es debida a que no fue incluida ninguna restricción al modelo, como en trabajos previos donde fue maximizado el beneficio bajo diferentes condiciones de mercado (precio fijo y precio variable dependiente de la talla) y tallas de cosecha (200 g, 300 g y 400 g). Los tiempos óptimos de cosecha para las tallas de 300 g y 400 g fueron los días 188 y 238 bajo raciones óptimas normalizadas de 0.67 y 0.75 con precio fijo y variable, respectivamente.

El presente trabajo ha demostrado la utilidad y el uso potencial de los algoritmos genéticos como técnicas de búsqueda de inteligencia artificial para resolver problemas de optimización bioeconómicas en acuicultura, particularmente el problema de maximizar el valor presente de beneficio dependiente del tiempo. La aplicación computacional ha mostrado y obtenido resultados coherentes del tiempo óptimo de cosecha comparados con trabajos previos. La diferencia del TOC hallada aquí derivado del uso de AG y técnicas tradicionales, radica en su flexibilidad de adaptación a cambios en el modelo y, en especial, a un aumento del número de objetivos y res-

tricciones. Otra ventaja notable es el uso directo de la función objetivo como función a optimizar y el uso de no derivadas. El algoritmo genético trabaja a través de iteraciones probabilísticas. Los parámetros del algoritmo tuvieron niveles de ejecución aceptables en el modelo bioeconómico.

Referencias

- [1] M. Alvarez-Díaz, M. Domínguez-Torreiro, *Using Genetic Algorithms to Estimate and Validate Bioeconomic Models: The Case of the Ibero-atlantic Sardine Fishery*, *Journal of Bioeconomics* **8**, 4 (2006), 55–65.
- [2] R. Arnason, *Optimal feeding schedules and harvesting time in aquaculture*, *Marine Resource Economics* **7**(1990), 15–35.
- [3] D.M. Atia, F.H. Fahmy, N.M. Ahmed, H.T Dorrah, *Optimal sizing of a solar water heating system based on a genetic algorithm for an aquaculture system*, *Mathematical and Computer Modelling* **55**, (2012), 1436-1449.
- [4] Trond Bjørndal, *Optimal harvesting of farmed fish*, *Marine Resource Economics* **5**, (1988), 135–159.
- [5] O. Cacho, P. Simmons, *A genetic algorithm to farm investment*, *Australian J. of Agricultural and Resource Economics* **43**,3, (1999).
- [6] O.J. Cacho, *Systems modelling and bioeconomic modelling in aquaculture*, *Aquaculture Economics and Management* **1**, 4 (1997), 45–64.
- [7] I. O. Fosberg, *Optimal harvesting of farmed Atlantic salmon at tow cohort management strategies and different harvest operation restrictions*, *Aquaculture Economics and Management* **3** (1999), 143–148.
- [8] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Vol. 412. Reading, Massachusetts. Addison-wesley, (1989).
- [9] R. L. Haupt, S. E. Haupt , *Practical Genetic Algorithms*, Hoboken, New Jersey, Second edition. Wiley-Interscience, (2004).
- [10] R. L. Hean and O. J. Cacho , *Mariculture of giant clams, Tridacna crocea and T. derasa: Management for maximum profit by smallholders in Solomon Islands*, *Aquaculture Economics and Management* **181** (2002), 373–395.
- [11] S. Hester, O. Cacho, *Optimization of Search Strategies in Managing Biological Invasions: A Simulation Approach*, *Human and Ecological Risk Assessment: An International Journal* **18** (2012), 181–199.
- [12] X. Miao, Ch. Deng, X. Li, Y. Gao, D. He, *A Hybrid Neural Network and Genetic Algorithm Model for Predicting Dissolved Oxygen in an Aquaculture Pond*, In: *International Conference on Web Information Systems and Mining (WISM)*, Vol. 1. IEEE Computer Society (2010), pages 415–419.
- [13] J.A. Mistiaen, I. Strand, *Optimal feeding and harvest time for fish with weight-dependent prices*, *Marine Resource Economics* **13** (1999), 231–246.

- [14] G.R. Poot-López, E. Gasca-Leyva, *Bioeconomic Analysis of Ration Size in Nile Tilapia Feeding: An Example of Yucatan, Mexico*. In: *Proceedings of the Fifteenth Biennial Conference of the International Institute of Fisheries Economics & Trade*, July 13–16, 2010, Montpellier, France. *Achieving a Sustainable Future: Managing Aquaculture, Fishing, Trade and Development*. Compiled by Ann L. Shriver. International Institute of Fisheries Economics & Trade, Corvallis, Oregon, USA,(2010).
- [15] X.S. Yang *Introduction to Computational Mathematics*, World Scientific Publishing. Singapore, (2008).

Probabilidad, Actuaría y Estadística

Algunos aspectos estadísticos en el Reconocimiento de Patrones

Luis Cruz Kuri
kruz2222@yahoo.com
Instituto de Ciencias Básicas

Juan Ruiz-Ramírez
jruizuv@gmail.com
Facultad de Economía

Ismael Sosa Galindo
isoga77@yahoo.com.mx
Facultad de Ciencias
Administrativas y Sociales

Universidad Veracruzana

Resumen

El Reconocimiento de Patrones constituye un importante campo multidisciplinario e interdisciplinario que encuentra aplicaciones en diversas áreas, tales como en el cuidado de la salud, la educación, la agricultura, el medio ambiente, y las comunicaciones y el transporte, tan solo para mencionar algunas. Para un manejo apropiado de las diversas metodologías que se ocupan como apoyo, se hace uso de varias porciones de las matemáticas y de la estadística y la probabilidad. El campo del reconocimiento de patrones es tan vasto que resulta prácticamente imposible lograr una cobertura exhaustiva en un solo tratado. El propósito de esta presentación es tan solo el de asomarse a algunas de las distintas nociones que desde la perspectiva estadística se pueden abordar.

1 Introducción

El reconocimiento de patrones puede considerarse como un campo multidisciplinario e interdisciplinario, el cual, cada vez tiene mayor aplicabilidad en apoyo al desarrollo de tecnologías; al mismo tiempo constituye un área de investigación que requiere el concurso de disciplinas afines, tales como las de Inteligencia Artificial y Aprendizaje de Máquinas. Para el desarrollo de los métodos del reconocimiento de patrones, se requieren herramientas de diversa índole, tanto computacional, como estadística, y matemática. El énfasis de la presente exposición es sobre la parte estadística, de tal manera que esto justifica el título de “Reconocimiento estadístico de patrones”. Desde esa perspectiva, también se hace notar que la metodología se apoya en una parte de la Estadística, la cual, en la literatura anglosajona se identifica con “Data Mining” y para lo cual en el idioma español ya se tienen acuñadas las palabras “minería de datos”. Más adelante, se dirá algo sobre esta área de la estadística.

El reconocimiento estadístico de patrones se apoya en una variedad de enfoques, dentro de los cuales se incluyen los de la *Teoría de la Estimación Puntual*, tanto desde la perspectiva así llamada “frecuentista” como desde la perspectiva Bayesiana. Algo semejante puede decirse sobre la *Teoría*

de *Pruebas de Hipótesis Estadísticas*, ya sean estas paramétricas o no. Por otra parte, también se utilizan herramientas del *Análisis de Regresión*, partiendo desde los modelos más sencillos, tales como los lineales univariados, hasta los más complejos, tales como los modelos multivariados de regresión tanto lineales, como no lineales. Otra parte muy relevante de la estadística que se ocupa en el reconocimiento estadístico de patrones se refiere al *Análisis Discriminante*, el cual juega un papel prominente, por ejemplo cuando se estudian los distintos clasificadores. Por otra parte, en los aspectos más avanzados, aparecen los Procesos Estocásticos y disciplinas afines. Si se decide aprovechar los adelantos informáticos, puede hacerse uso intensivo de métodos computacionales, los cuales aplicados con propósitos de inferencia estadística, por ejemplo para la estimación de parámetros y para pruebas de hipótesis, remiten a lo que en la literatura anglosajona se conoce como “bootstrapping”, vocablo para el cual en el lenguaje español no se tiene acordada una traducción única. Como punto de partida en el tratamiento sistematizado de la solución de problemas que involucren un reconocimiento de patrones, es conveniente pasar por un proceso de abstracción, el cual pueda remitir a representaciones apropiadas, en el sentido de que estas capten los rasgos esenciales. Un tal proceso de abstracción puede lograrse a través de la utilización de vectores y matrices en espacios de dimensión finita (haciendo notar que tales estructuras matemáticas son suficientes en un gran número de aplicaciones). En otras investigaciones, de carácter más avanzado, tal vez sea conveniente recurrir a representaciones matemáticas en espacios de dimensión infinita, tales como los espacios de funciones, especialmente si los modelos relevantes son los procesos estocásticos. Otros métodos muy importantes para el reconocimiento de patrones son los de Clasificación y los de Aglomeración (*Clustering*).

En secciones subsecuentes (de nuestra exposición) se presentan algunos detalles al respecto; sin embargo, debe hacerse énfasis que el campo del reconocimiento de patrones es tan vasto que resulta prácticamente imposible lograr una cobertura exhaustiva, lo cual obviamente no es lo que se pretende, aun si se tuviera a la disposición un espacio mucho más grande.

El propósito de esta presentación es tan solo el de asomarse a algunas de las distintas nociones que desde la perspectiva estadística se pueden abordar.

2 Algunas consideraciones generales

El *reconocimiento de patrones* constituye un importante campo multidisciplinario e interdisciplinario que encuentra aplicaciones en diversas áreas, tales como en el cuidado de la salud, la educación, la agricultura, el medio ambiente, y las comunicaciones y transporte, tan solo para mencionar algunas. Para un manejo apropiado de las diversas metodologías que se ocupan como apoyo, se hace uso de varias porciones de las matemáticas y de la estadística y la probabilidad. Por ejemplo, Cálculo Diferencial e Integral de una y varias variables (integración, métodos analíticos para encontrar máximos y mínimos, etc.) Manejo de vectores y matrices (rango de una matriz, inverso, *eigenvalores* y *eigenvectores*, etc.) De geometría en dos y más dimensiones (producto escalar de vectores, distancia de un punto a un hiperplano, etc.)

De probabilidad y de estadística (probabilidad condicional, estimación puntual y pruebas de hipótesis, tanto en el así llamado *enfoque frecuentista* como en el *enfoque de Bayes*. Regresión múltiple y multivariada, etc. Por supuesto, también se ocupan toda una gama de procedimientos computacionales, cada vez utilizados de manera más prominente y acorde con los desarrollos de la tecnología actual.

La literatura que aborda temas de reconocimiento de patrones es muy extensa. Tan solo en un libro reciente que los autores que esto escriben acaban de inspeccionar, se presenta una lista de más de 1200 referencias bibliográficas.

El campo del Reconocimiento de Patrones (se usará la abreviatura RP de ahora en adelante) puede incursionarse tanto a niveles elementales como a niveles avanzados, donde hay mucha oportunidad de desarrollar investigación teórica como aplicada.

Por necesidad, la visión que se presenta del RP en esta exposición es un tanto limitada y dista en mucho de ser exhaustiva en lo que se refiere a mención de temas.

3 RP desde una perspectiva histórica

Por supuesto, y desde hace muchos años, en otros contextos, principalmente ecológicos, se han tratado, *e.g.*, técnicas de Ordenación y Clasificación, tales como las expuestas por E. C. Pielou (investigadora canadiense) autora de un libro (1984) donde se desarrollan métodos de aglomeración (*cluster analysis*), reducción de dimensión, tales como el análisis de componentes principales, en un marco donde los objetos pueden considerarse inmersos en un espacio euclideo (“enjambre” en un espacio de muchas dimensiones, para el que se busca encontrar patrones los cuales no son fácilmente aparentes). En su tratado, Pielou también describe otro tipo de situaciones donde se tiene una colección de objetos, los cuales inicialmente **no se encuentran** inmersos en un espacio métrico (Euclidiano o no) sino que únicamente se tienen medidas de disimilitud, a partir de las cuales se les asignan coordenadas a cada uno de los objetos y así, de esta manera se logra que queden “inmersos” en algún espacio geométrico, donde la distancia entre dos objetos mide el grado de semejanza entre estos. Dichas técnicas se conocen como *Coordenadas Principales*, las cuales no deben confundirse con las de Componentes Principales. [Utilizando estas ideas, uno de nosotros (Cruz Kuri) las ha aplicado a una colección de datos climatológicos recabados a lo largo de varios años, en varias ubicaciones, a grandes altitudes, en el Pico de Orizaba; la metodología utilizada la describe Pielou en su libro y la denomina “Ordenación Discriminante”, con la cual se pueden buscar, *e.g.*, patrones espaciales y temporales].

4 Algunas nociones básicas de RP

El tema es *reconocimiento de patrones*. Se entiende por “patrón” a cualesquiera de los dos: a un objeto físico (un molde para cortar una tela, un libro o una silla, etc.) o a una noción abstracta, tal como la manera de hablar o el estilo de escribir, etc. También es una propiedad compartida de una colección de objetos, por ejemplo, de sillas, rectángulos u objetos pintados de azul.

Existen varias maneras de apreciar la actividad de un reconocimiento de patrones en una forma simple:

1. Clasificación: Asignar un patrón a una de las clases (semánticamente etiquetadas) ya conocidas. Ahora el problema de clasificación, prominente en el reconocimiento de patrones, incluye: O bien el aprendizaje de un modelo o la utilización directa de un conjunto de datos de entrenamiento (colección de patrones etiquetados) y la asignación de una etiqueta de clase a un nuevo patrón (patrón de prueba) o, de una manera equivalente, la asignación de un patrón de prueba a una de las clases conocidas.

El problema de clasificación: se nos da una colección de patrones semánticamente etiquetados, X , donde

$$X = \{(X_1, C^1), (X_2, C^2), \dots, (X_n, C^n)\}$$

Se requiere notar aquí lo que sigue: el número de clases, K , es fijo y finito (el valor de K se conoce a priori).

Sean las etiquetas de clase $C_1, C_2, \dots, C_k$. El conjunto X es finito y es de tamaño n (cardinalidad). Además, X_i representa el i -ésimo patrón y C_i es la correspondiente etiqueta de las clases semánticas para $i = 1, \dots, n$. Así, se observa que $C^i \in C = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$. Sea X un patrón de prueba; entonces, o bien se usa el conjunto de entrenamiento X directamente o los modelos $M_1, M_2, \dots, M_k$ aprendidos a partir de X para asignar una etiqueta de clase, de entre las de $C_1, C_2, \dots, C_k$, a X . Aquí, el modelo M_i es aprendido a partir de los patrones de entrenamiento extraídos de la clase C_i , para $i = 1, 2, \dots, K$.

2. Aglomeración: asígnese un patrón a una de las clases etiquetadas sintácticamente o **cúmulos**. Por ejemplo, considérense dos cúmulos de patrones etiquetados C_1 y C_2 ; dado un nuevo patrón, asígnese este a cualquiera de C_1 o C_2 basado en la similaridad entre el patrón y la colección. Aquí, las etiquetas son sintácticas porque se pueden intercambiar dichas etiquetas de las dos colecciones sin afectar los resultados. *Agglomerar (clustering)*: tiene que ver con la agrupación de patrones basados en la similaridad. Los patrones en un cúmulo son similares uno a otro en tanto que los patrones en diferentes cúmulos son distintos.

Problema de aglomeración: dada una colección $\mathbf{X}$ de patrones etiquetados sintácticamente, donde $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, el problema consiste en particionar el conjunto $\mathbf{X}$ en algún número finito de bloques o cúmulos. En otras palabras, se deberá particionar $\mathbf{X}$ de tal manera que $\mathbf{X} = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \dots \vee C_k$, donde C_i es el i -ésimo cúmulo. La aglomeración se realiza de tal forma que ninguno de los K cúmulos sea vacío y ningún par de cúmulos se traslapen, lo cual significa $C_i \neq \phi$, y $C_i \cap C_j = \phi$ para $i \neq j$ and $i, j \in 1, 2, \dots, K$. Típicamente, una noción de *similaridad o apareamiento* se usa para particionar $\mathbf{X}$. Los patrones en C_1 , son similares a otros patrones en C_1 y los patrones en C_2 son semejantes a otros patrones en C_2 .

Existen otras maneras importantes de abordar el RP tales como:

3. Clasificación semi-supervisada: Aquí se nos da una pequeña colección de patrones semánticamente etiquetados y una colección grande de patrones sintácticamente etiquetados. El problema consiste en asignar un nuevo patrón (patrón de prueba) a una de las clases, o equivalentemente asignar una etiqueta semántica al patrón de prueba. Por consideraciones de espacio se omiten los detalles.

5 Posibles aplicaciones

La popularidad del reconocimiento de patrones puede atribuirse a su potencial de aplicaciones; existen muchas aplicaciones importantes, por ejemplo, las que presentan a continuación.

Reconocimiento de documentos: existe una variedad de aplicaciones incluyendo la clasificación y la aglomeración de mensajes de correos y documentos, web; un requerimiento es reconocer si se trata de un correo auténtico o de un “correo basura”.

Huellas digitales, imágenes de rostros y señales de voz las cuales forman una importante variedad de documentos utilizados en biometría.

Registros de salud, los cuales pueden incluir imágenes de rayos X, imágenes de ultrasonido, gráficas de electrocardiogramas y reporte de varias pruebas, diagnósticos y prescripciones de medicinas. *Registros legales*, incluyendo juicios realizados, peticiones y apelaciones que se hicieron.

Análisis de datos registrados de manera remota: por ejemplo, imágenes obtenidas utilizando satélites o barridos aéreos los cuales se analizan para discriminar a los cultivos sanos de los cultivos enfermos.

Bioinformática: Aquí, la clasificación y la aglomeración del ADN y de las secuencias de proteína constituyen una actividad importante.

Computación semántica: El conocimiento en diferentes formas se usa para la aglomeración y clasificación con el propósito de facilitar el entendimiento de un lenguaje natural. La ingeniería de software y la recuperación de información.

Existen una cantidad de otras áreas, tales como la agricultura, la educación, y la economía, donde las herramientas del reconocimiento de patrones se usan de manera rutinaria.

6 Abstracciones

En el reconocimiento artificial (máquinas) de patrones, se necesitan procesar los patrones de tal manera que sus representaciones puedan almacenarse en la máquina. No solamente las representaciones de patrones, sino también las clases y los cúmulos requieren ser representados de manera apropiada. En el reconocimiento de patrones, las entradas son abstracciones y las salidas también son abstracciones. Como consecuencia, no se requiere tratar con todos los detalles específicos de los patrones individuales. Tiene sentido hacer un resumen de los datos en forma apropiada o buscar una abstracción adecuada de los datos. Tal abstracción es más amigable tanto para el humano como para la máquina. Para el humano es fácil para comprensión y para la máquina reduce la carga computacional en la forma del tiempo y el espacio requerido para el procesamiento. La generación de una abstracción a partir de los ejemplos constituye un paradigma bien conocido en el aprendizaje artificial. Específicamente, el aprender a partir de ejemplos o el aprendizaje supervisado a partir de las observaciones o la aglomeración constituyen los dos paradigmas importantes del aprendizaje artificial los cuales son útiles aquí. En inteligencia artificial, el aprendizaje de las máquinas es una actividad que se enriquece con la ayuda del dominio del conocimiento; las abstracciones del sistema basado en las reglas son populares en este contexto. Además, para las herramientas de minería de datos estas son útiles, cuando el conjunto de patrones de entrenamiento es grande. Así, de manera natural el reconocimiento de patrones se traslapa con el aprendizaje artificial, con la inteligencia artificial y con la minería de datos.

Hay dos paradigmas populares para el reconocimiento de patrones, a saber:

Reconocimiento de patrones estadísticos: En este caso, se usan los espacios vectoriales para representar patrones y colecciones de patrones. Las representaciones de espacios vectoriales son populares en la recuperación de información, la minería de datos, y el aprendizaje estadístico de máquinas. Las abstracciones, tales como los vectores, las gráficas, las reglas o las distribuciones de probabilidad se utilizan para representar los cúmulos y las clases.

Reconocimiento sintáctico de patrones: en este caso, los patrones se ven como sentencias en un lenguaje formal tal como el de la lógica matemática. Así, es útil para la descripción de clases y de cúmulos bien estructurados. Así este paradigma es popular como lingüística o reconocimiento estructural de patrones.

Data Mining. La traducción puede ser “Minería de datos”. En el idioma inglés, en los albores de la creación de este subcampo, algunos investigadores usaban la descripción pintoresca de “irse a pescar” para ver que encontraban en una colección de datos. Cualquiera que sea la terminología apropiada en español, *Data Mining* se refiere a un subcampo interdisciplinario de las ciencias de la computación donde se realizan procesos computacionales para descubrir patrones en colecciones grandes de datos, todo esto involucrando métodos que se traslapan con la *inteligencia artificial, el aprendizaje de máquinas, la estadística y los sistemas de bases de datos*.

Data mining involucra seis clases comunes de tareas. A saber:

- *Detección de anomalías* (Datos extremos/cambio/detección de desviaciones) Lo cual se refiere a la identificación de registros no usuales de datos, los cuales podrían ser de interés o que también podrían atribuirse a errores en algunos datos; cualquiera que sea el caso, esto requiere investigaciones adicionales.
- *Aprendizaje de la regla de asociación* (Dependencia de la modelación) Búsquedas de relaciones que pudieran existir entre las variables.
- *Aglomeración (clustering)* La tarea que remite al descubrimiento de grupos y estructuras en los datos que de alguna u otra manera son “similares” unos a otros, todo esto sin utilizar estructuras ya conocidas en los datos.

- *Clasificación.* La tarea de generalizar estructuras conocidas para aplicarlas a nuevos datos [e.g., clasificar correos electrónicos como “legítimos” o “basura” en base a ciertos indicadores]
- *Regresión.* Los intentos para encontrar una función la cual sirva para modelación de los datos con el menor error posible.
- *Sumarización.* La cual se encarga de proporcionar una representación más compacta del conjunto de datos, incluyendo visualización y generación de reportes.

Por otra parte, también habría que considerar el tema *Minería secuencial de patrones*. Con la cual se pretende encontrar conjuntos de datos de elementos que ocurren conjuntamente y de manera frecuente para algunas sucesiones.

Adicionalmente, también debe considerarse algo acerca de tema de ***bootstrapping*** (auto-arranque) en donde se describen métodos, entre otras cosas, para detectar patrones ocultos y para extraer información donde aparentemente ya se tiene toda.

7 Reconocimiento estadístico de patrones

En esta sección se presentan aspectos básicos relativos al *reconocimiento estadístico de patrones*. El reconocimiento de patrones en general cubre un amplio espectro de problemas, y es difícil encontrar una visión unificada o un enfoque que así lo sea. Se puede aplicar a problemas de ingeniería, tales como los de lectores de caracteres y análisis de formas ondulatorias, al igual que a la modelación del cerebro en biología y en psicología. Sin embargo, la teoría de la decisión estadística y la estimación, las cuales constituyen temas básicos, se consideran como fundamentales para el estudio del reconocimiento de patrones.

8 Temas posibles del RP

Existe una enorme variedad de situaciones que pueden y deben analizarse desde la perspectiva estadística. Las situaciones que se presentan a continuación de ninguna manera deben pensarse que constituyen una lista exhaustiva. Aquí solo se enlistan a continuación categorías generales las cuales son consideradas, por ejemplo, en Fukunaga (1990) sobre reconocimiento estadístico de patrones. Por razones de limitación de espacio, se omiten detalles.

Formulación de problemas de reconocimiento de patrones. Procesos de diseño de clasificadores. Vectores aleatorios y sus propiedades. Vectores aleatorios y sus distribuciones. Estimación de Parámetros. Transformaciones lineales. Propiedades varias de los eigenvalores y de los eigenvectores. Pruebas de hipótesis. Probabilidad de error en pruebas de hipótesis. Cotas superiores para el error de Bayes. Pruebas secuenciales de hipótesis. Clasificadores paramétricos. El clasificador lineal de Bayes. Diseño de clasificadores lineales. Diseño de clasificadores cuadráticos. Otros clasificadores. Clasificadores paramétricos. El clasificador lineal de Bayes. Diseño de clasificadores lineales. Diseño de clasificadores cuadráticos. Otros clasificadores. Estimación de parámetros. Efectos del tamaño de la muestra en la estimación. Los métodos de bootstrap. Estimación no paramétrica de las densidades. Clasificación no paramétrica y estimación del error. Estimación sucesiva de parámetros. Estimación no paramétrica de las densidades. Estimación sucesiva de parámetros. Extracción de características y mapeo lineal para representación de señales. Aglomeración (Clustering).

La teoría de la decisión estadística y la estimación son cubiertas en varios textos sobre estadística matemática, comunicación estadística, teoría del control, y así sucesivamente. Pero obviamente cada campo tiene necesidades diferentes y enfoques distintos.

El objetivo del reconocimiento de un patrón es el de aclarar mecanismos complicados de los procesos de toma de decisión y automatizar estas funciones utilizando computadoras. No obstante, en virtud de la compleja naturaleza del problema, la mayor parte de la investigación sobre reconocimiento de patrones se ha concentrado en problemas más realistas, tales como los del reconocimiento de *caracteres* y el de la clasificación de *formas ondulatorias*.

Referencias

- [1] C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006.
- [2] P. K. Biswas, *Pattern Recognition and Applications*. Department of Electronics and Electrical Communication Engineering. Indian Institute of Science. Kharagpur. Accesos realizados en Julio del 2015 en <https://www.youtube.com/watch?v=G-77ZgsGjvA>.
- [3] T. M. Cover and P. E. Hart, Nearest Neighbor Pattern Classification, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 13, pp. 21-27, 1967.
- [4] R. O. Duda, P. E. Hart, and D. G. Stork, *Pattern Classification*, John Wiley and Sons, 2004.
- [5] R. A. Fisher, The use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems, *Annals of Eugenics*, Vol. 7, pp. 111-132, 1936. Accesos realizados en julio del 2015 en <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1469-1809.1936.tb02137.x/pdf>
- [6] K. Fukunaga, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, 2nd Edition. Elsevier, 1990.
- [7] J. Han and M. Kamber, *Data Mining: Concepts and Techniques*, Morgan Kauffmann, 2008.
- [8] Marvin L. Minsky and Seymour A. Papert, *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry*, Expanded Edition, Cambridge, MA: MIT Press, 1988. 292pp.
- [9] M. Narasimha Murty and V. Susheela Devi, *Pattern Recognition*, Curso del Computer Science and Engineering. Bangalore. Accesos realizados en mayo del 2013 en <http://nptel.iitm.ac.in/syllabus/106108057/>
- [10] E.C. Pielou, *The Interpretation of Ecological Data: A Primer on Classification and Ordination*, Wiley and Sons., 1984.
- [11] F. Rosenblatt, *Principles of Neurodynamics: Perceptrons and the theory of Brain Mechanisms*, Spartan Books, Washington DC, 1962.
- [12] P. S. Sastry, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, Department of Electronics and Communication Engineering. Indian Institute of Science. Bangalore. Accesos realizados en julio del 2015 en https://www.youtube.com/watch?v=Z66_2_VG_k8
- [13] V.N. Vapnik, *The Nature of Statistical Learning Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

Análisis exploratorio de datos en el estudio de manglares

Gladys Linares Fleites

gladys.linares@correo.buap.mx
Instituto de Ciencias

Brenda Catalina Matías Castillo

caty_b26@hotmail.com
Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas

Miguel Ángel Valera Pérez

valeraperezmiguelangel@gmail.com
Instituto de Ciencias
BUAP

Resumen

Cuando se dispone de la misma información (propiedades de manglares) medida en diferentes individuos, los objetivos que nos podemos plantear en el análisis exploratorio pueden ser diversos. Por una parte, objetivos generales: estudiar la caracterización global de todos los individuos a través de las variables consideradas, analizando sus similitudes y diferencias. Por otra parte, objetivos parciales: estudiar relaciones entre conjuntos de variables. En este trabajo, utilizando las posibilidades del programa libre ade4 en R, se desarrollan diversas técnicas del Análisis Exploratorio de Datos en los Manglares del Sistema Lagunar de Chacahua-Pastorías, Oaxaca, México.

1 Introducción

Los ecosistemas de manglar corresponden a la vegetación arbórea que se localiza en la zona de mareas en las regiones tropicales y subtropicales. El complejo lagunar Chacahua-Pastorías se encuentra localizado en el estado de Oaxaca, en el municipio de San Pedro Tututepec, en las coordenadas geográficas de 15°58' y 16° 02' de latitud norte y 97°33' y 97°47' de longitud oeste (CONABIO, 2008 y 2009). Este trabajo tiene como propósito principal realizar un análisis exploratorio sobre los parámetros fisicoquímicos del agua intersticial y las variables biológicas en los bosques de manglar que bordean este complejo lagunar y evaluar la relación entre las variables físicas y químicas del agua intersticial y la estructura forestal de estos bosques de manglar.

Para alcanzar este propósito se utiliza el paquete ade4 en ambiente R. El paquete contiene funciones para analizar datos ecológicos y ambientales en el marco de los métodos exploratorios euclidianos. Precisamente el nombre de ADE4 proviene de las cuatro E de su acrónimo en inglés (Ecological and Environmental data in the framework of Euclidean Exploratory methods).

La herramienta básica en ade4 es el diagrama de dualidad (Chessel, et al., 2004). Un diagrama de dualidad es una lista que contiene una tripleta ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{D}$), donde:

- $\mathbf{X}$ es una tabla con n filas y p columnas, considerada como p puntos de R_n (vectores columnas) o n puntos en R_p (vectores filas)
- $\mathbf{Q}$ es una matriz diagonal de dimensión p que contiene los pesos de la p columnas de $\mathbf{X}$ y es usada como un producto escalar en R_p .
- $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal de dimensión n que contiene los pesos de la n filas de $\mathbf{X}$ y es usada como un producto escalar en R_n .

La descomposición singular de una tripleta brinda los ejes principales, las componentes principales y las coordenadas de las filas y las columnas que pueden ser utilizadas posteriormente. Los teoremas generales de optimización del análisis de datos dan significados a cada uno de los análisis y pueden proponerse diversas funciones gráficas (Thioulouse, et al., 1997).

A través del estudio empírico que estamos considerando y utilizando las posibilidades del programa libre ade4 en R mostraremos diversas técnicas de análisis que pueden utilizarse como métodos descriptivos en los estudios de Manglares. Estas técnicas han sido desarrolladas por la escuela francesa de análisis de datos y se encuentran, como ya hemos señalado, en software libre en lenguaje R.

Los análisis exploratorios de datos que se exponen a continuación son sólo algunos ejemplos de las posibilidades que existen para hacer estudios descriptivos sobre Manglares.

2 Análisis de Componentes Principales

En la mayoría de los estudios empíricos, como ocurre en los estudios sobre Manglares., los investigadores coleccionan observaciones sobre un gran número de variables, sin saber inicialmente a ciencia cierta cuáles son las variables más importantes o más útiles para su trabajo científico. De hecho, el investigador trata de medir o incluir todas las variables que pueden tener alguna conexión con el problema. El próximo paso es reducir la información y aquí el Análisis de Componentes Principales (ACP) juega su rol (Linares, 2006).

El propósito del ACP es construir nuevas variables (ficticias, por el hecho de ser no observadas) y reemplazar las variables originales con tan pocas nuevas variables como sea posible. El ACP es un análisis interno concerniente a las varianzas y covarianzas de los elementos de un vector aleatorio. Para transformar y reducir el número de variables originales se parte de la información contenida en la matriz de varianzas y covarianzas (o en la matriz de correlaciones) de las variables originales. Al reducir la dimensión naturalmente se produce alguna pérdida de información, pero el ACP es óptimo en el sentido de que esta pérdida de información es mínima.

A continuación presentamos dos ACP llevados a cabo, uno, con variables de la estructura forestal consideradas, y otro, con algunas variables físico-químicas del agua intersticial. En la explicación de estos análisis señalaremos algunas propiedades de esta técnica.

2.1 Propiedades de la estructura forestal

El Cuadro 1 muestra, en la parte superior, los valores propios (varianza de la componente principal (CP)). La parte inferior de la tabla muestra los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios. Los elementos de cada vector propio son las correlaciones entre cada CP y las variables originales. Utilizando esa información se obtienen expresiones para cada una de la CP, como combinaciones lineales de las variables observadas originalmente.

Cuadro 1: Análisis de Componentes Principales de la estructura forestal en el sistema de lagunas Chacahua - Pastorias.

Valor propio:	2.265	1.253	0.7017	0.4239	0.3565
	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5
CrecDia	0.4624953	-0.70349083	0.45490542	0.214859645	-0.19517966
Hojarasca	0.3731648	0.71813447	0.55755789	-0.162795600	-0.08750821
DenInd	-0.8019708	0.21198804	0.28701423	0.426487917	0.21825389
Areabasal	0.7166322	0.43419076	-0.31557418	0.411356301	-0.17063295
Altura	0.8687361	-0.09642531	0.04359785	0.009919815	0.48373609

Dado que las CP se muestran por orden de importancia, y a la vez ellas están incorrelacionadas unas con otras, se puede conocer cuáles son las variables más importantes que están influyendo en el fenómeno bajo estudio.

En el grupo de variables que determinan la estructura forestal del bosque de manglar, se puede observar que la primera componente principal explica aproximadamente el 45% de la variabilidad total, y la segunda el 25%. La primera componente señala oposición entre la densidad individual (DenInd) y las restantes variables originales, y pudiera tomarse como índice de la estructura forestal del bosque de manglar. En la segunda componente principal se destaca la oposición entre el crecimiento del diámetro (CrecDia) y el área basal. Ambas componentes explican casi el 70% del fenómeno bajo estudio.

Los gráficos ayudan a la interpretación. La Figura 1 muestra gráficos de las puntuaciones (score) de todas las variables. En la Figura 2 se observa el círculo de las correlaciones y en la Figura 3, aparecen las dos primeras componentes que puede tomarse como el esquema de la estructura forestal del bosque.

Figura 1: Scores.

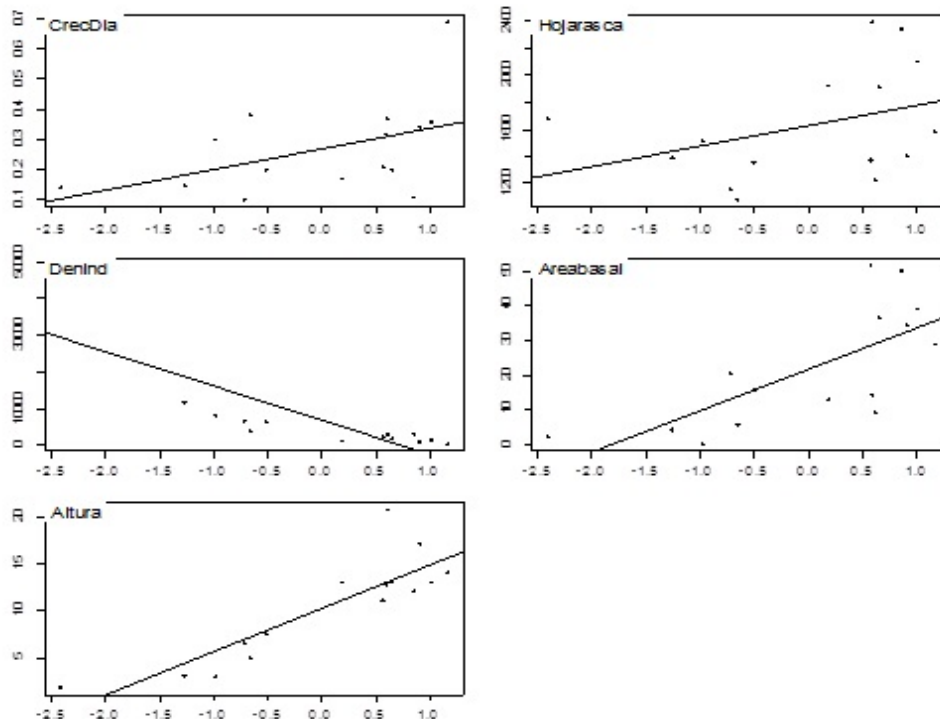


Figura 2: Correlaciones.

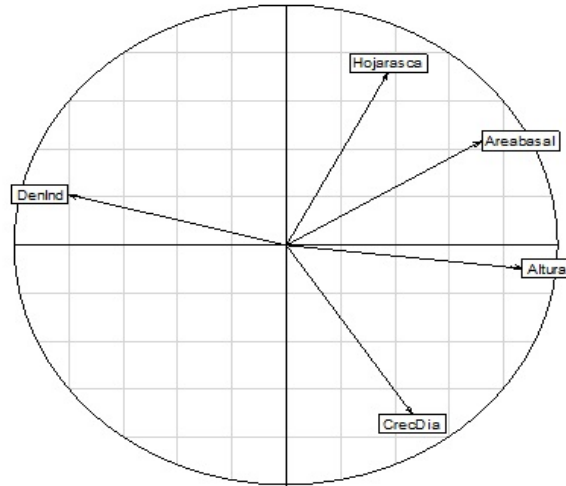
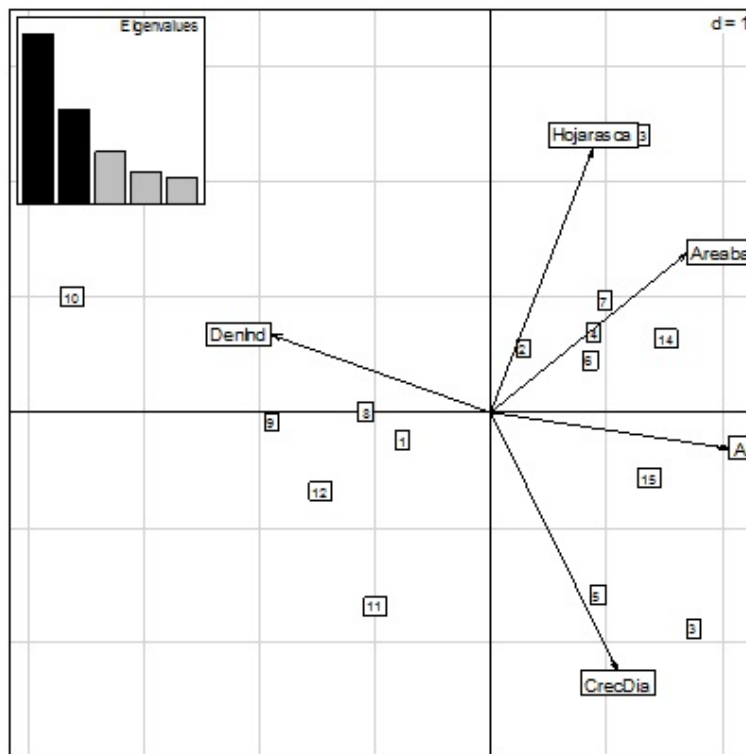


Figura 3: Primeras dos componentes principales.



2.2 Propiedades químicas y físicas del agua intersticial en el sistema de lagunas Chacahua - Pastorías.

El Cuadro 2 muestra, en la parte superior, los valores propios (varianza de la componente principal (CP). La parte inferior de la tabla muestra los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios (solo se dan los 5 primeros CP), obtenidos de la salida de ade4. En el grupo de variables sobre propiedades físicas y químicas del agua intersticial, se obtuvo que la primera

componente explica el 47.4% y señala la importancia de todas las variables químicas, mientras que la segunda componente explica el 26.1% y destaca la importancia de la temperatura. Ambas componentes explican más del 73% de la variabilidad total. Debajo se muestran los gráficos obtenidos, Figura 4, 5 y 6.

Cuadro 2: Análisis de Componentes Principales de las propiedades químicas y físicas del agua intersticial en el sistema de lagunas Chacahua - Pastorías.

Valor propio	3.793	2.084	0.864	0.690	0.238	0.213	0.084	0.031
Proporción	0.474	0.261	0.108	0.086	0.030	0.027	0.011	0.004
Variación Acum.	0.474	0.735	0.843	0.929	0.959	0.986	0.996	1.000
	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5			
NO3	0.85606	0.01337	0.16899	0.389550	-0.16400			
PO4	-0.51575	-0.70959	-0.02275	0.414092	-0.01447			
SO4	0.80015	-0.50169	-0.09960	-0.118478	-0.04782			
NH4	-0.64459	-0.66426	-0.01291	0.184474	0.22510			
Salinidad	0.88313	-0.36890	-0.07147	0.238398	-0.04262			
REDOX	0.73067	0.10812	-0.61144	0.001356	0.26435			
pH	-0.65169	0.22175	-0.65501	0.169171	-0.25038			
Temperatura	-0.01547	0.83130	0.12996	0.483587	0.15478			

Figura 4: Scores.

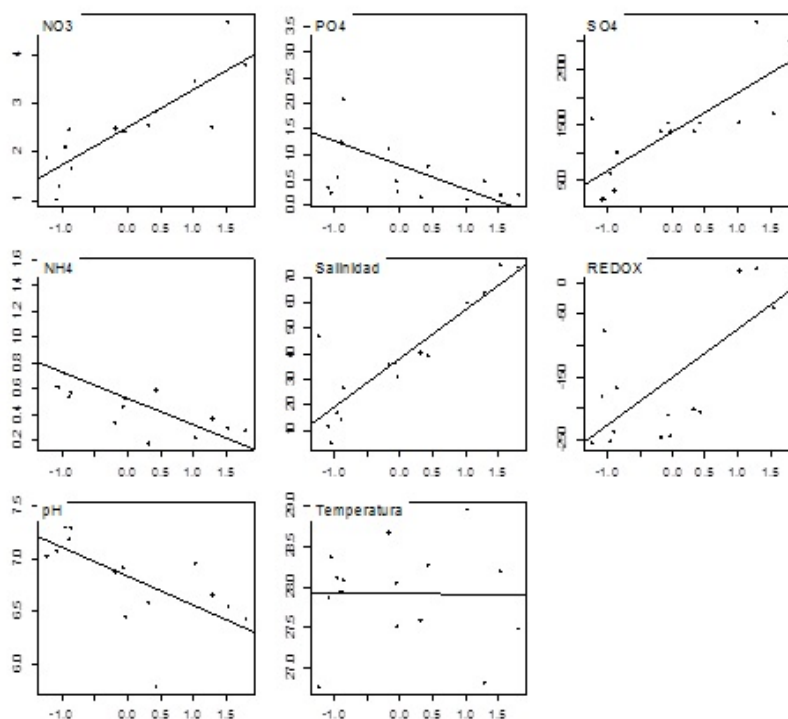


Figura 5: Correlaciones.

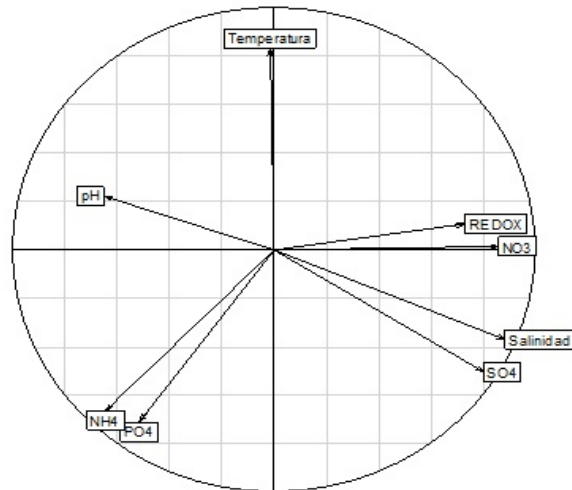
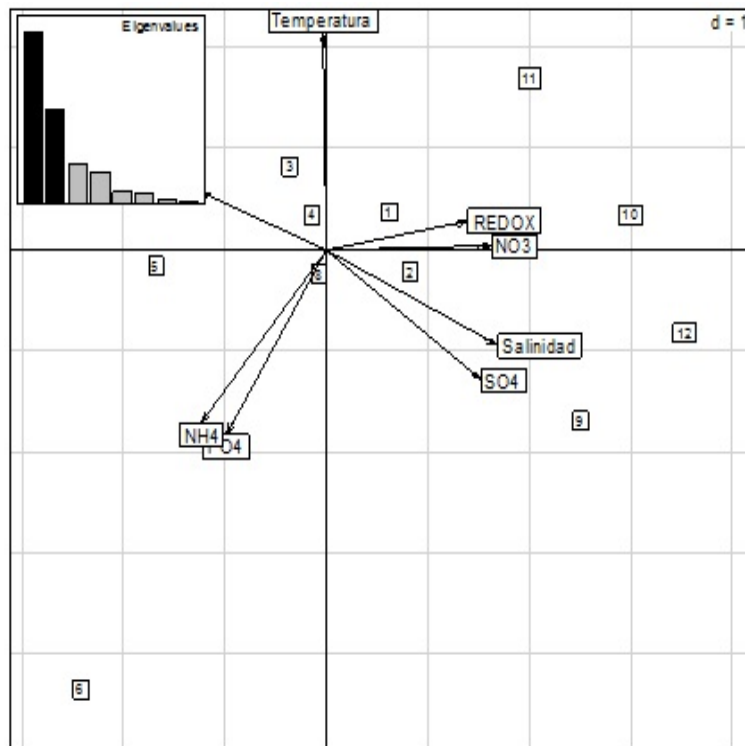


Figura 6: Primeras dos componentes principales.

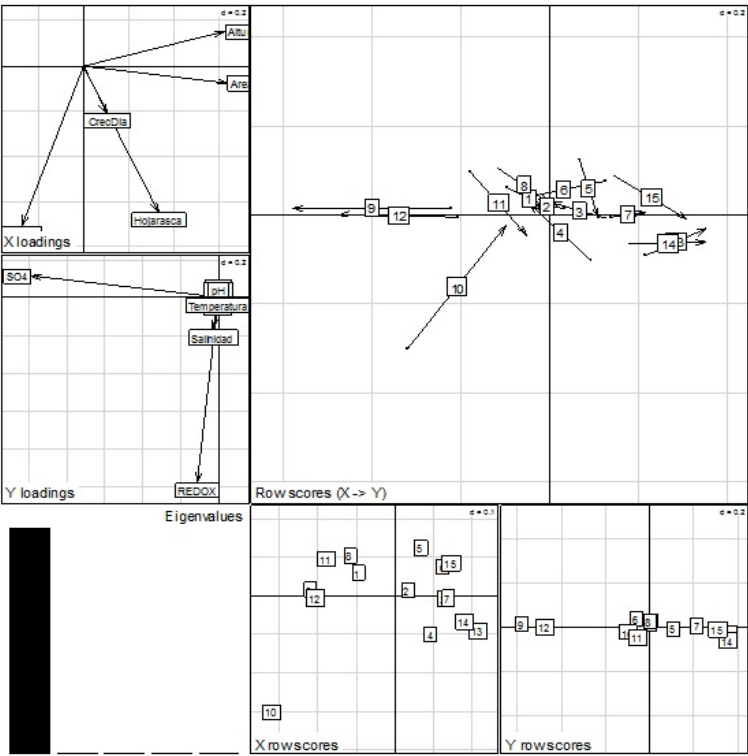


3 Técnicas con 2 tablas simultáneas: análisis “Procustes”

Una pregunta que puede ser de interés en este estudio exploratorio sobre manglares es: ¿estarán relacionadas los dos conjuntos de variables? El Análisis Procustes (Gower,1971) con las tablas de datos de la estructura forestal y propiedades químicas y físicas del agua intersticial, que

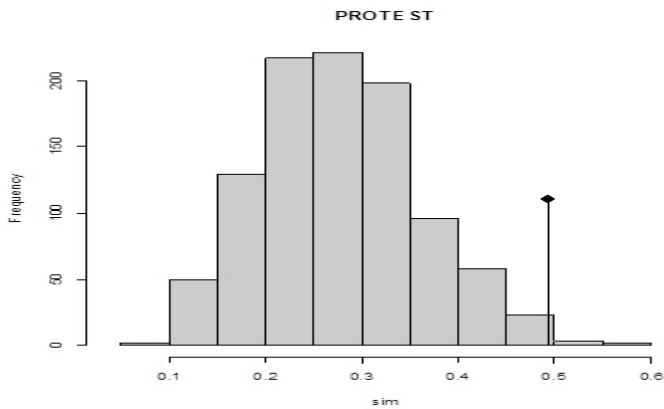
se muestra en la Figura 7, permite obtener representaciones simultáneas de los dos conjuntos de propiedades.

Figura 7: Tablas de datos de la estructura forestal y propiedades químicas y físicas del agua intersticial.



El procedimiento de aleatorización conocido como PROTEST puede usarse para probar la hipótesis de asociación entre las dos tablas de datos (Jackson, 1995). La técnica de simulación de Monte Carlo con 999 réplicas, permite establecer que existe relación estadísticamente significativa entre la estructura forestal y las propiedades químicas y físicas del agua intersticial consideradas en estos manglares; el valor de p simulado es 0.008. El histograma en la Figura 8, mostrado debajo, corrobora estos los resultados.

Figura 8: Histograma.



4 Conclusiones

Los atributos forestales de los bosques de manglar que bordean el sistema lagunar Chacahua - Pastorías, en Oaxaca, México, definen diferentes fisonomías, ya que estos están estrechamente relacionados con la concentración de salinidad y disponibilidad del oxígeno disuelto del agua intersticial. En este sistema de lagunas se ha podido comprobar la estrecha relación que existe entre las variables físicas y químicas del agua intersticial y la estructura forestal del bosque de manglar. A través del paquete *ade4* en lenguaje R pudo obtenerse y graficarse resultados que son de gran importancia en esta rama del conocimiento.

Referencias

- [1] Chessel, D., Dufour, A. B., and Thioulouse, J. (2004). *The ade4 package*. RNews, Vol 4/1 pp 5 - 10. ISSN 1609-3631
- [2] CONABIO. (2008). *Manglares de México. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad*. México, 35 pp.
- [3] CONABIO. (2009). *Manglares de México: Extensión y distribución*. 2ª ed. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad. México. 99 pp.
- [4] Gower, J. (1971). *Statistical methods of comparing different multivariate analyses of the same data*. In Hodson, F., Kendall, D., and Tautu, P., editors, Mathematics in the archaeological and historical sciences, pages 138-149. University Press, Edinburgh.
- [5] Jackson, D. (1995). *Protest: a procustean randomization test of community environment concordance*. Ecosciences, 2:297-303.
- [6] Linares Fleites, G. (2006) *Análisis de Datos Multivariados*. Ed. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Facultad de Computación. 277p. ISBN 9689182153.
- [7] Thioulouse, J., Chessel, D., Dolédec, S., and Olivier, J. (1997). *Ade-4: a multivariate analysis and graphical display software*. Statistics and Computing, 7: 75 - 83.

Estimación de la mortalidad vía distribuciones tipo fase

Fernando Baltazar Larios
fernandobaltazar@ciencias.unam.mx

Oscar Lucio Cano Vaca
oz_karcano@hotmail.com

Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Se propone un modelo para medir la mortalidad por medio de distribuciones tipo fase. Este tipo de distribuciones son utilizadas para medir el tiempo de arribo al estado absorbente dentro de un proceso de saltos de Markov con espacio de estados finito. El modelo propone utilizar un proceso de saltos de Markov para modelar la vida de un individuo a través del tiempo y su eventual llegada a la muerte, representada por el estado absorbente. En este modelo la distribución tipo fase mide el tiempo hasta la muerte de un individuo. Considerando los aspectos básicos que intervienen en la mortalidad, se presenta una estimación del generado infinitesimal del proceso de saltos de Markov y con éste se obtienen una distribución de probabilidad para el tiempo de muerte.

1 Introducción

A lo largo de la historia de la humanidad, el estudio y medición del riesgo por mortalidad es y ha sido de suma importancia. En la actualidad es básico contar con una forma de medir ésta en la valuación de seguros y rentas contingentes, así como en la gestión de los sistemas de seguridad social y de pensiones; ya que la solvencia y la estabilidad financiera de las instituciones depende, entre otros aspectos, de la disponibilidad de herramientas apropiadas que reflejen una adecuada medición de la siniestralidad a la que se deberán enfrentar, así como sus posibles desviaciones.

Actualmente, se han estado utilizando tablas de mortalidad como herramienta básica para describir la mortalidad a través de una estructura por edades. Sin embargo, una tabla es sólo una alternativa cuando no hay una ley matemática disponible. Diversos factores pueden alterar esta probabilidad; el caso más extensamente considerado es el de la edad pero existen otras características relevantes como sexo, historial clínico, tabaquismo, antigüedad de la póliza, etc.

En este trabajo se presenta un modelo para medir la mortalidad con la ayuda de una distribución tipo fase. Este tipo de distribuciones son utilizadas para modelar el tiempo de arribo al estado absorbente dentro de un proceso de saltos de Markov a tiempo continuo con espacio de estados

finito. De tal forma que si el proceso de Markov representa la vida de un individuo a través del tiempo y la muerte es el estado absorbente, la distribución tipo fase mide el tiempo de muerte del individuo.

Con la distribución tipo fase y tomando en cuenta los aspectos básicos que intervienen en la mortalidad, el objetivo es estimar los parámetros necesarios de una forma simple y de esta manera obtener una herramienta que nos permita medir el fenómeno de manera sencilla y constante.

La idea de construir modelos de mortalidad utilizando procesos de Markov y distribuciones tipo ha sido utilizada en décadas recientes. Por ejemplo, Gavrilov y Gavrilova en 1991 (véase [4]) utilizan un proceso de Markov para derivar una fórmula Gompertz-Makeham bajo supuestos especiales. Aalen en 1995 (véase [1]) explora el potencial teórico de la utilización de distribuciones de tipo fase al modelar de una forma diferente las tasas de riesgo, lo que sugiere que tal modelo debe encontrar una mayor aplicación en el análisis de supervivencia. En 2008 X. Sheldon Lin y Xiaoming Liu (véase [6]) proponen un modelo que consta de una cadena de Markov con un número finito de estados donde uno de ellos es un estado absorbente el cual representa la muerte. Con esta propuesta buscan disponer de un modelo de mortalidad que se adapte a los datos observados y pueda vincular sus parámetros con el mecanismo biológico y fisiológico de envejecimiento; lo que permitiría considerar las opiniones de los expertos en dicho mecanismo con mayor facilidad, además de permitir el análisis cuantitativo de la muerte. En dicho modelo, suponen que la mortalidad es descrita mediante un proceso de saltos de Markov a tiempo continuo de estados finitos, con un estado absorbente que es la muerte, lo que garantiza que el tiempo de arribo a este estado, es decir, el tiempo de ocurrencia de la muerte sigue una distribución tipo fase. Sin que sea claro la información que se necesita para la implementación y la forma de estimar los parámetros en su modelo.

Este trabajo se desarrolla de la siguiente forma. En la Sección 2 se define un proceso de saltos de Markov y distribuciones tipo fase, se presentan sus principales características y propiedades. En la sección 3 se describe a detalle el modelo para estimar la mortalidad por medio de las distribuciones tipo fase. En la sección 4 se presentan dos implementaciones de modelo desarrollado en la sección anterior y se realiza un análisis de los resultados obtenidos. Por último, en la sección 5 se presentan conclusiones y posibles extensiones de este trabajo.

2 Procesos de saltos de Markov y distribuciones tipo fase

En esta sección consideremos un proceso de Markov $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ a tiempo continuo, homogéneo en el tiempo y con espacio de estados finito $E = \{1, 2, \dots, m\}$.

Definición 1. Una matriz $P(t) = \{p_{ij}(t)\}_{i,j \in E}$ (para cada $t \geq 0$) es llamada matriz de transición de Markov asociada al proceso de Markov $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$.

A la familia $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ se le llama semigrupo de transición del proceso de Markov.

Teorema 1. La familia $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo estocástico, es decir, satisface:

- 1.- $P(0) = I$,
- 2.- $P(t)$ es una matriz estocástica y
- 3.- La ecuación Chapman-Kolmogorov $P(s+t) = P(s)P(t)$.

Para una demostración de este resultado véase [2].

Cuando el espacio de estados es finito el comportamiento aleatorio de un proceso de Markov $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ está determinado por su semigrupo estocástico $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ y la distribución de X_0 .

Definición 2. El semigrupo $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ es estándar si

$$P(t)_{t \downarrow 0} \rightarrow 0$$

Nosotros consideramos sólo procesos de Markov con semigrupos estándar lo cual garantiza que las realizaciones de éstos son funciones continuas por la derecha, con mayor precisión, se tiene que el proceso es estocasticamente continuo, separable y medible en intervalos compactos. Además, existe una versión separable que es estocasticamente equivalente a este proceso. De hecho, con el espacio de estados finitos se tiene que sus realizaciones son funciones escalonadas, es decir, para casi todo $w \in \Omega$ y para todo $t \geq 0$ existen $\Delta(t, w) > 0$ tal que

$$X_{t+\tau}(w) = X_t(w)$$

para $\tau \in [0, \Delta(t, w))$. Esto motiva el concepto de procesos de saltos de Markov (PSM).

Definición 3. Un PSM es un proceso de Markov $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ a tiempo continuo, con espacio de estados finito (a lo más numerable en general) que empieza en un estado x_0 al tiempo $\tau_0 = 0$ y permanece en ese estado hasta un tiempo τ_1 cuando realiza una transición (salto) a otro estado x_1 . Permanece en ese nuevo estado hasta un tiempo $\tau_2 > \tau_1$, momento en el cual salta a otro estado x_2 y así sucesivamente.

De acuerdo a esta definición, resulta de interés estudiar la ley de probabilidad que gobierna el tiempo de estancia de un PSM en un estado i y la transición a otro estado. Con esos objetivos consideramos a la variable aleatoria

$$\Delta(t) = \inf\{s > 0 | X_{t+s} \neq i, X_t = i\}, \quad (1)$$

es decir, $\Delta(t)$ es la variable aleatoria que modela el tiempo de estancia en el estado i desde el tiempo t . $\Delta(t)$ es un tiempo de paro.

Proposición 1. Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un PSM, entonces

$$P(\Delta(t) > s | X_t = i) = e^{-\lambda_i s}.$$

para todo $s, t > 0$ e $i \in E$.

Para una demostración de este resultado véase [2].

Con este resultado tenemos que el tiempo de estancia en un estado para un PSM sigue una distribución exponencial de parámetro dependiente del estado. Nosotros nos restringimos al estudio de PSM tales que $\lambda_i < \infty$, es decir, PSM que no dan saltos instantaneos.

Definición 4. Un estado i de un PSM se llama absorbente si $\lambda_i = 0$ y estable si $0 < \lambda_i < \infty$.

Ahora introducimos notación útil para determinar la transición entre estados en un PSM.

Definición 5. Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un PSM entonces definimos

- 1.- $\tau_0 = 0$,
- 2.- τ_k = el tiempo del k -ésimo salto,

- 3.- x_k = el estado visitado en el intervalo de tiempo $[\tau_k, \tau_{k+1})$,
- 4.- $\Delta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$, es decir, el tiempo de permanencia en x_k y
- 5.- $N(t) = \max\{n \geq 0 | \tau_n < t\}$, es decir, el número de saltos hasta el tiempo t .

Definición 6. Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un PSM decimos que es regular si

$$\tau_\infty := \sup \tau_k = \infty.$$

El siguiente resultado relaciona el tiempo de estancia en un estado con la probabilidad de transición.

Proposición 2. Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un PSM regular y $\tau_{k+1} < \infty$. Entonces, condicionada a $X_{\tau_k} = i$, las variables aleatorias Δ_{k+1} y $X_{\tau_{k+1}}$ son independientes.

Para una demostración de este resultado véase [2].

2.1 Generador Infinitesimal

Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un PSM y que $X_t = i$. Ahora, estamos interesados en analizar que pasa en intervalos de tiempo infinitesimales $(t, t+h)$, tenemos los siguientes casos:

- 1.- El proceso puede estar en el mismo estado al tiempo $t+h$ y esto ocurre con probabilidad $p_{ii}(h) + o(h)$, donde $o(h)$ representa la posibilidad que el proceso se salga y regrese al estado i en el intervalo de tiempo.
- 2.- El proceso se mueva al estado j $t+h$ y esto ocurre con probabilidad $p_{ij}(h) + o(h)$, donde $o(h)$ representa la posibilidad que el proceso realice dos o más transiciones en el intervalo de tiempo.

En el caso donde h es infinitamente pequeña se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3. Considere el semigrupo estocástico $\{P(t)\}_{t \geq 0}$ asociado al PSM $\{X_t\}_{t \geq 0}$, entonces el siguiente límite existe:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P_h - I}{h},$$

dicho límite es equivalente a:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = g_i,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = g_{ij}.$$

Para una demostración de esta proposición véase [5].

Definición 7. Consideremos la matriz G de $m \times m$, que queda definida de la siguiente forma:

$$G = \begin{pmatrix} -g_1 & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & -g_2 & \dots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & -g_m \end{pmatrix}$$

La matriz G es llamada el generador infinitesimal del proceso de saltos de Markov $\{X_t\}_{t \geq 0}$ y los valores g_{ij} son llamados tasas de intensidad. Tenemos la siguiente relación con la matriz de transición a cualquier tiempo t

$$P_t = \exp(tG),$$

donde $\exp(tG)$ denota la matriz exponencial de tG .

Corolario 1. Sea G el generador infinitesimal del proceso de saltos de Markov $\{X_t\}_{t \geq 0}$ entonces condicionando a que el proceso se encuentre en el estado i al tiempo t , la variable aleatoria $\Delta(t)$ se distribuye de forma exponencial con parámetro g_i .

Este resultado se sigue directamente de la Proposición 1

2.2 Distribuciones Tipo Fase

Consideremos un proceso de saltos de Markov a tiempo continuo $\{X_t\}_{t \geq 0}$, con un espacio de estados $E = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$, donde los estados $1, 2, \dots, m$ son estados no absorbentes y el estado $m+1$ es un estado absorbente. Dadas estas condiciones el generador infinitesimal de nuestro proceso tiene la siguiente forma:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} G & g \\ \bar{0} & 0 \end{pmatrix}$$

donde G es una matriz cuadrada de dimensión m , g un vector columna de dimensión m y $\bar{0}$ es un vector fila de dimensión m donde todas sus entradas son cero. G es conocida como la matriz de subintensidades y g como el vector de intensidades de salida.

Sea π' la distribución inicial asociada al proceso. Como no tiene sentido que el proceso inicie en el estado absorbente $m+1$, se define que la probabilidad de iniciar en él es cero, con esto podemos redefinir la distribución inicial de la siguiente manera:

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m).$$

Consideremos una variable aleatoria τ que modela el tiempo que tarda el proceso en llegar al estado absorbente $m+1$, es decir:

$$\tau = \inf\{t \geq 0; X_t = m+1\}$$

.

Definición 8. Una distribución tipo fase con representación (π, G) es la distribución del tiempo de paro τ para un proceso de saltos de Markov $\{X_t\}_{t \geq 0}$, con espacio de estados $E = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$, donde los estados $1, 2, \dots, m$ son estados no absorbentes y el estado $m+1$ es un estado absorbente, se denota por:

$$\tau \sim PH((\pi, G)).$$

Algunas de las propiedades que cumplen las distribuciones tipo fase serán enunciadas a continuación. La demostración de estas propiedades se pueden consultar en [3].

Sea $\tau \sim PH((\pi, G))$, entonces para todo $t \geq 0$ se cumple que

- 1.- $P(\tau > t) = \pi \exp(Gt)e$
- 2.- τ tiene densidad $f_\tau(t) = \pi \exp(Gt)g$
- 3.- $E(\tau^n) = n!(-1)^n \pi (G^{-1})^n e$.

3 Modelo de mortalidad

Para poder modelar la mortalidad mediante una distribución tipo fase resulta bastante ingenioso, ya que aunque a simple vista parece imposible poder segregar la vida del ser humano en un conjunto de estados cuyo tiempo de estancia en cada uno de estos se distribuya de manera exponencial, se logra al introducir el concepto de edad fisiológica. Es por ello que la propuesta de los estados del proceso de saltos de Markov parte de la teoría del envejecimiento del ser humano a través del tiempo, que describe la disminución genéticamente determinada, progresiva e irreversible de la capacidad de adaptarse a su entorno, que se manifiesta como la susceptibilidad a contraer ciertas enfermedades y culminar con la muerte del individuo.

Motivado por esto se introduce el concepto de edad fisiológica, que puede interpretarse como un índice relativo de salud que representa el grado de envejecimiento en el individuo. Al tratarse de un índice relativo, el tiempo de permanencia de un individuo en determinada edad fisiológica puede no ser considerado dentro de un intervalo acotado de tiempo, por lo que se puede suponer que este tiempo tiene un comportamiento exponencial. Así es como cada edad fisiológica pasa a ser un estado del proceso de Markov, por lo que durante el tiempo que el individuo permanece en este estado, sus capacidades para adaptarse a su entorno son las mismas y cuando éste pasa a la siguiente edad fisiológica es porque estas capacidades se vieron afectadas.

Determinar dichas edades y el número de ellas en las que se segregara la vida del ser humano no es algo sencillo, ya que necesitaríamos contar con información sobre el estado de salud en el que se encuentra la población en estudio. Y ya que muchas veces las instituciones que necesitan medir la mortalidad no cuentan con esta información, será necesario hacer ciertos supuestos para así tratar de garantizar que nuestro modelo pueda ser implementado con un requerimiento mínimo de información.

Recordemos que una distribución tipo fase surge de un proceso de saltos de Markov a tiempo continuo con espacio de estados finito y un estado absorbente, además ésta queda definida por sus dos parámetros, la matriz de subintensidades y la distribución inicial. Por tanto, para que nuestro modelo quede bien definido es necesario determinar cómo serán el espacio de estados, la matriz de subintensidades y la distribución inicial.

Empezaremos por el espacio de estados. El más fácil de determinar es el estado absorbente, que es el que representa la muerte y estará denotado por d . Para los estados no absorbentes que representarán el tiempo en que el individuo permanece con vida, su construcción parece no ser fácil y nada intuitiva, ya que si recordamos el tiempo de estancia en cada uno de estos tiene una distribución exponencial, y si pensamos en poder segregar la vida del ser humano en un conjunto finito que cumplan con esta característica pareciera imposible, es por eso que los supuestos utilizados en esta parte del modelo resultan ser bastante especiales.

Para poder determinar el conjunto de estados cuyo tiempo de estancia se distribuye exponencial es necesario no perder el concepto de edad fisiológica, que se interpreta como un índice relativo de salud que representa el grado de envejecimiento en el individuo. Teniendo en cuenta que el tiempo que un individuo permanece en alguna de estas edades no necesariamente es concebido dentro de un intervalo de tiempo acotado, nos permite cumplir con la distribución exponencial y así decir que cada estado no absorbente estaría representado por una edad fisiológica. Sin embargo, que este concepto esté ligado directamente con el estado de salud en el que se encuentra el individuo, nos hace regresar al problema de la falta de información para su determinación. Con esto, el problema al que nos enfrentamos ahora es decir en cuántas edades fisiológicas se segrega

la vida del ser humano, cómo queda determinada cada una de éstas y cómo se clasificará a cada individuo dentro de éstas.

Uno de los supuestos más utilizado dentro del estudio de poblaciones humanas es que un individuo conserva las mismas capacidades fisiológicas durante la unidad de tiempo en el estudio o edad biológica, que generalmente es anual o quinquenal, esto quiere decir que una persona de edad 30 tiene las mismas capacidades mientras tenga 30 años y al cumplir edad 31 estas se ven afectadas, o una persona que se encuentra en el grupo de edad de 21 a 25 años ve afectadas sus capacidades hasta que cumple 26 años y pertenece al siguiente grupo de edades, en base a este supuesto se construyen las tablas de mortalidad con tasas constantes mientras el individuo pertenece a la misma edad biológica. Si suponemos lo anterior, tenemos definido como es un estado y el número de estos que tendrá nuestro proceso, ya que una edad fisiológica se ve representada por una edad biológica.

Por ejemplo si pensamos en una compañía que acaba de iniciar operaciones y el regulador le proporciona una tabla de mortalidad que va de edad 0 a edad 100 y más, tenemos 101 grupos de edades, por lo que el número de estados no absorbentes dentro del proceso será 101. Otro ejemplo sería, si la información con la que se cuenta, es de manera quinquenal y se tiene la información a partir del quinquenio de seis a diez años, así hasta el quinquenio de 86 a 90, se tendrían 18 estados no absorbentes 17 pertenecientes a los grupos quinquenales y uno más que represente a las personas de 91 y más. Esta manera de definir los estados también hace que cualquier asegurado pueda ser clasificado de una manera fácil y precisa dentro de algún estado. Ya que al saber la edad biológica que tiene este se puede clasificar dentro del estado que le corresponde.

Con esto obtenemos el espacio de estados en el que estará definida nuestra distribución tipo fase. De aquí en adelante podemos suponer de forma general que el número de estados no absorbentes en el que se definirá la distribución será m , con $m \in \mathbb{N}$.

Lo siguiente que resolveremos es cómo será la matriz de subintensidades. Para ésta lo primero que definiremos es la dimensión que tendrá. Si recordamos dentro de ésta están representados los estados no absorbentes, por lo que si contamos con m estados no absorbentes, la dimensión de ésta será de m renglones por m columnas.

Otra de las características que tiene la matriz de subintensidades es que en la diagonal de la misma, se encuentra el valor negativo del parámetro de la distribución exponencial que modela el tiempo de estancia, de esta forma si suponemos que el valor esperado del tiempo de estancia en el i -ésimo estado no absorbente es $1/\lambda_i$ con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, la entrada (i, i) de la matriz tendría el valor $-\lambda_i$.

Para estimar el valor de los parámetros λ_i necesitamos estimar cual es el valor esperado del tiempo de estancia dentro del estado i , para estimar este valor se propone la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}_i} = \bar{t}_i q_i + (1 - q_i),$$

donde

- q_i es la probabilidad de muerte asociada al estado i ,
- $\bar{t}_i$ es tiempo promedio de muerte en el estado i .

Los supuestos dentro de esta expresión es que las personas que sobreviven al estado i pasando al estado no absorbente j , duran en el estado i una unidad de tiempo, multiplicándola por la probabilidad de que sobreviva. Por otro lado es necesario calcular el valor t_i , que representa el tiempo promedio en el que ocurren las muertes dentro del estado i y estimar las probabilidades de muerte q_i .

De esta manera la forma de estimar el parámetro λ_i es:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{\bar{t}_i q_i + (1 - q_i)}.$$

Veamos que una vez que se sale del estado i solo existen dos opciones, pasar al estado absorbente d o al estado $i + 1$, y como el estado absorbente no está representado dentro de la matriz de subintensidades, los únicos elementos por determinar a parte de la diagonal son las entradas $(i, i + 1)$ con $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ y todas las demás entradas de la matriz de subintensidades estarán en cero.

Para las entradas $(i, i + 1)$ nos ayudaremos de la relación que existe entre la matriz de subintensidades y las probabilidades de salto, que nos dice:

$$p_{ij} = \frac{G_{ij}}{\lambda_i};$$

donde p_{ij} es la probabilidad de pasar al estado j desde el estado i una vez que se sale de éste, λ_i es el parámetro de la exponencial asociada al estado i y G_{ij} la entrada (i, j) de la matriz. De esta manera el valor de la entrada $(i, i + 1)$ sería el siguiente:

$$G_{ii+1} = \lambda_i p_{ij}.$$

El único valor desconocido hasta el momento sería p_{ij} . Ya que este valor representa la probabilidad de pasar del estado i al estado j una vez que se sale del estado i , dicha probabilidad se puede interpretar como la probabilidad de sobrevivir en el estado i , que es el complemento de la probabilidad de morir en el estado i , es decir:

$$p_{ij} = 1 - q_i;$$

con q_i la probabilidad de morir en el estado i o dicho de otra forma, la probabilidad de pasar del estado i al estado absorbente d una vez que se sale del estado i . Así el valor de la entrada $(i, i + 1)$ estaría determinado de la siguiente manera:

$$G_{ii+1} = \lambda_i(1 - q_i).$$

De esta manera la matriz de subintensidades queda de la siguiente manera:

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1(1 - q_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2(1 - q_2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots - \lambda_{m-1} & \lambda_{m-1}(1 - q_{m-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_m \end{pmatrix},$$

con esto sólo haría falta definir q_i , para que la matriz de subintensidades quede bien definida.

Para obtener las q_i o probabilidades de morir en el estado i , ya que lo que nos interesa es medir el fenómeno de mortalidad sin importar la causa y como fue definido el espacio de estados, la estimación de éstas no resulta complicada, ya que si se cuenta con tasas de mortalidad para las edades biológicas, entonces éstas representan la probabilidad de morir en las edades fisiológicas asociadas a éstas. Estas tasas de mortalidad podrían ser las proporcionadas por el regulador, las observadas dentro de la compañía o algunas otras que sean de interés para la valuación. De esta manera la tasa de mortalidad asociada al i -ésimo estado será la tasa de mortalidad asociada a la edad biológica que dio pie a la existencia del i -ésimo estado.

Lo único que haría falta para que nuestra distribución tipo fase y nuestro modelo queden bien definidos es la distribución inicial π . Esta depende directamente del objeto de estudio para el que será utilizado el modelo, ya que dependiendo la edad fisiológica en la que se encuentre el individuo al momento del estudio la distribución inicial asociada sería uno en la entrada correspondiente y cero en todas las demás.

De esta manera queda concluido el desarrollo de nuestro modelo. A continuación se procederá a ponerlo a prueba mediante dos implementaciones, la primera de ellas a una tabla de mortalidad para la cual no se cuenta con el detalle de los datos, así se podrá apreciar cómo funciona nuestro modelo en el caso en que la información con la que se cuente no tenga un buen detalle. Para la segunda implementación se tomarán datos simulados con un comportamiento realista y con un mayor detalle, por lo que apreciaremos como funciona el modelo en los casos que se cuenta con información detallada.

4 Implementaciones

4.1 Implementación 1

Dentro de la primera implementación supondremos que sólo contamos con una tabla de mortalidad que nos da información de las q_x para cada edad. Se tomaron los datos de la tabla de mortalidad publicada por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas para las valuaciones de seguros de vida individual, llamada CNSF 2000-I. En dicha tabla contamos con la probabilidad de morir dado que se tiene cierta edad, es decir, las q_x . Para determinar la distribución tipo fase, que mo-

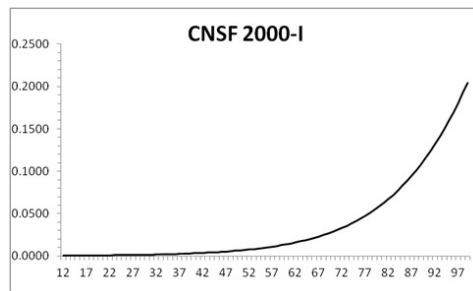


Figura 1: Tabla de mortalidad CNSF 2000-I

del la mortalidad, es necesario determinar el espacio de estados y sus parámetros. Esto es, hay que estimar la matriz de subintensidades G y la distribución inicial π .

Empezaremos determinando el espacio de estados, como la información con la que se cuenta va de edad 12 a edad 100+ (100 años y más) en grupos anuales, asumiremos que cada grupo es un

estado, con ello contaremos con 89 estados no absorbentes y el estado absorbente denotado por d , que representa la muerte, es decir:

$$E = \{1, 2, 3, \dots, 88, 89, d\}.$$

Con esto, para los estados no absorbentes las probabilidades de salto quedan definidas a través de la tabla de mortalidad, ya que si nos encontramos en el estado i y se efectúa un salto, la probabilidad de pasar al estado absorbente será q_i , donde:

$$q_i = q_{x-11}$$

y la probabilidad de pasar al siguiente estado será el complemento, es decir $p_i = 1 - q_i$.

Como no contamos con información para poder estimar el tiempo promedio de muerte dentro de cada estado, asumiremos el supuesto de uniformidad en las muertes, por lo que supondremos que todas las muertes dentro de un estado ocurren a mitad del año, de esta manera tenemos que el valor estimado de los parámetros λ_i es:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{0.5q_i + (1 - q_i)}.$$

Dichos valores se encuentran en la Gráfica 2: Calculamos lo valores de las entradas $(i, i + 1)$ de la

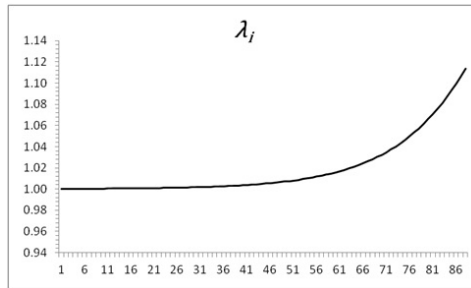


Figura 2: Valor estimado de los parámetros λ_i

siguiente manera:

$$G_{ii+1} = \lambda_i(1 - q_i).$$

Para las demás entradas de la matriz G , el valor será cero. Así la matriz G queda de la siguiente manera:

$$G = \begin{pmatrix} -1.000198 & 0.99982 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1.000214 & 0.999786 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots - 1.113485 & 0.886515 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

Para tener completamente definida la distribución tipo fase nos hace falta el vector π que representa la distribución inicial. Pero este vector π depende directamente del objeto de estudio, ya que por ejemplo, si se desea obtener el tiempo esperado de vida de un individuo que se encuentra situado en el estado i , el vector π sería uno en la i -ésima entrada y cero en todas las demás entradas. O si lo que queremos es construir una tabla de mortalidad aleatoria, se supone que el

proceso empieza en el estado uno, por lo tanto el vector π sería uno en la primer entrada y cero en todas las demás.

En esta implementación se supuso que se iniciaba en el estado uno, es decir:

$$\pi = (1, 0, \dots, 0),$$

con ello la distribución tipo fase que modela el tiempo restante de vida para un individuo de edad biológica 12, queda definida con los parámetros π y G .

Ya con la distribución tipo fase bien definida obtenemos que el valor esperado es de 63.678 años, y representaría el tiempo esperado de vida de una persona con edad 12, que no difiere del valor de la esperanza de vida que se obtiene a partir de la tabla de mortalidad CNSF 2000-I que también es 63.678 años. También se obtuvo el segundo momento de la distribución y con ello la varianza de ésta, que es de 319.19, que equivale a una desviación estándar de 17.87.

En la gráfica 3 tenemos la tabla de mortalidad y 10 tablas de mortalidad simuladas con ayuda de la distribución tipo fase ajustada.

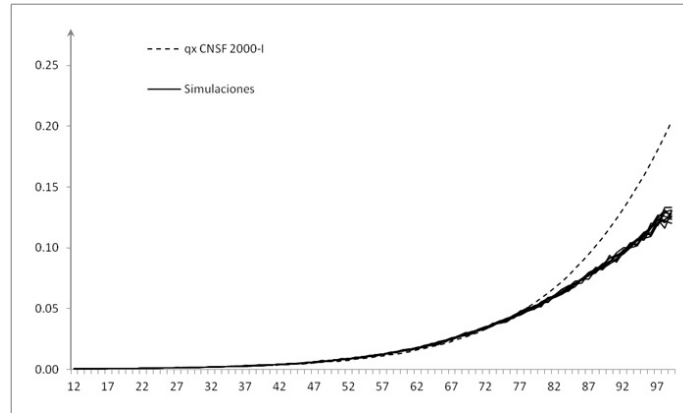


Figura 3: Distribución tipo fase ajustada

4.2 Implementación 2

Para esta implementación supondremos que contamos con datos más realistas sobre las muertes de la población. Contamos con el dato del tiempo de muerte de 17,799 individuos, que van desde edad 12 hasta edad 100 y más. Con estos datos lo que hacemos es calcular el tiempo promedio de muerte por edad de la siguiente manera:

$$\bar{t}_x = \frac{\sum_{j=1}^{n_x} t_j^x - x}{n_x};$$

donde:

- x es la edad en años enteros $x \in \{12, 13, \dots, 99, 100\}$,
- t_j^x es el momento exacto de muerte de la persona j , entre las edades $[x, x + 1)$,
- n_x es el número de personas muertas entre las edades $[x, x + 1)$.

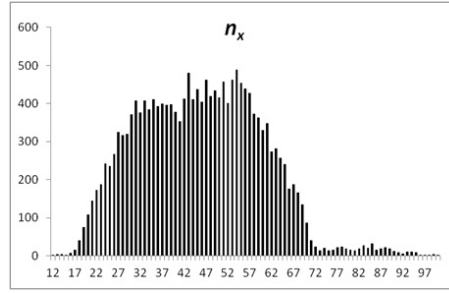


Figura 4: Distribución de las muertes por edad

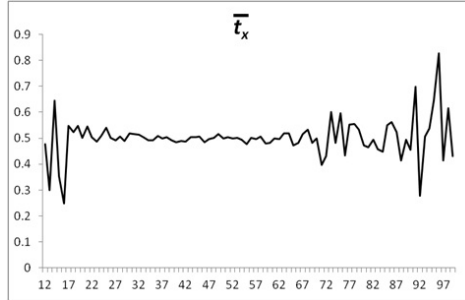


Figura 5: Valor esperado del momento esperado de muerte por edad

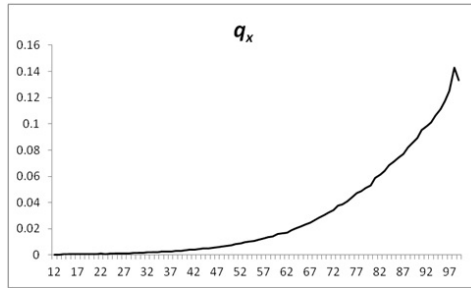


Figura 6: Estimación de la probabilidad de muerte por edad

Con los datos de las muertes y el número de expuestos por edad podemos calcular las q_x para cada edad.

Ya que contamos con estos parámetros podemos empezar a ajustar el modelo. Empezaremos determinando el espacio de estados, como la información con la que se cuenta va de edad 12 a edad 100+ (100 años y más) en grupos anuales, asumiremos que cada grupo es un estado, con ello contaremos con 89 estados no absorbentes y el estado absorbente denotado por d , que representa la muerte, es decir:

$$E = \{1, 2, 3, \dots, 88, 89, d\}.$$

Con esto, para los estados no absorbentes las probabilidades de salto quedan definidas a través de las q_x , ya que si nos encontramos en el estado i y se efectúa un salto, la probabilidad de pasar al estado absorbente será q_i , donde:

$$q_i = q_{x-11}$$

y la probabilidad de pasar al siguiente estado será el complemento, es decir $p_i = 1 - q_i$. De esta

manera tenemos que el valor estimado de los parámetros λ_i es:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{\bar{t}_i q_i + (1 - q_i)}.$$

Dichos valores se encuentran en la siguiente Gráfica 7:

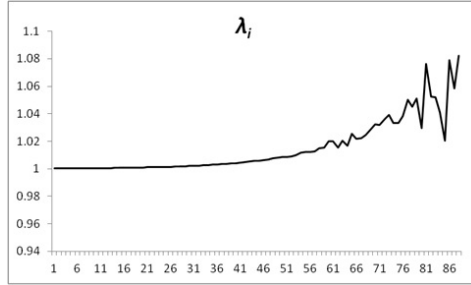


Figura 7: Estimación de λ_i por edad i

Calculamos los valores de las entradas $(i, i + 1)$ de la siguiente manera:

$$G_{ii+1} = \lambda_i(1 - q_i).$$

Para las demás entradas de la matriz G , el valor será cero. Así la matriz G queda de la siguiente manera:

$$G = \begin{pmatrix} -1.000232 & 0.999788 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1.000301 & 0.999871 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots - 1.082235 & 0.937937 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0.66667 \end{pmatrix},$$

Al igual que en la implementación anterior, para tener completamente definida la distribución tipo fase nos hace falta el vector π que representa la distribución inicial, que en realidad depende del objeto de estudio. En esta implementación se supuso que se iniciaba en el estado uno, es decir:

$$\pi = (1, 0, \dots, 0),$$

con ello la distribución tipo fase que modela el tiempo restante de vida para un individuo de edad biológica 12, queda definida con los parámetros π y G .

Ya con la distribución tipo fase bien definida obtenemos que el valor esperado es de 63.351 años, y representaría el tiempo esperado de vida de una persona con edad 12, que no difiere del valor de la esperanza de vida que se obtiene a partir de las tasas brutas de mortalidad es 63.282 años. También se obtuvo el segundo momento de la distribución y con ello la varianza de ésta, que es de 350.03, que equivale a una desviación estándar de 18.71.

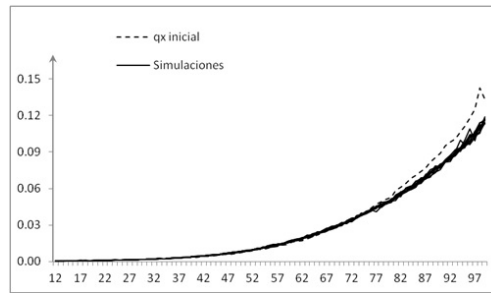


Figura 8: Comparación de q_x y las simulaciones

En la Gráfica 8 tenemos la q_x iniciales, que fueron calculadas con el número de muertes y expuestos, así como 10 tablas de mortalidad simuladas con la distribución tipo fase ajustada

Referencias

- [1] Alen O. 1995. On Phase Type Distributions in Survival Analysis, Scandinavian Journal of Statistics 22: 447–63.
- [2] Baltazar-Larios, F. 2011. Estimation of discretely observed Markov Processes. Tesis doctoral en ciencias matemáticas. UNAM, México D.F.
- [3] Bladt. M., A Review on Phase – Type Distributions and Their Use in Risk Theory, Astin Bulletin, Vol. 35, No. 1, pp. 145 – 161.
- [4] Gavrilov L. A. and S. Gavrilova. 1991. The Biology of Life Span: A Quantitative Approach. Chur, Switzerland: Harwood Academic Publishers.
- [5] Karlin Samuel and Taylor Howard M. 1975. A First Course in Stochastic Processes, Academic Press. New York.
- [6] Sheldon Lin X. and Xiaoming Liu. 2008. Markov Aging Process and Phase-Type Law of Mortality, North American Actuarial Journal, Vol. 11, No.4, pp. 92-109.

Juegos de suma cero con dos jugadores

Rosa María Flores Hernández **Marly Graciela Márquez Yáñez**
rosam@xanum.uam.mx marly_amordeluna@hotmail.com

Roberto Rosales Flores
rrosalesf@hotmail.com

Universidad Autónoma de Tlaxcala

Resumen

En este trabajo presentamos algunos conceptos básicos de la Teoría de Juegos, a través de la forma normal de un juego. Luego, mostramos diversos métodos que permiten obtener puntos de equilibrio para juegos de suma cero, en los conjuntos de estrategias puras y estrategias mixtas, ilustrándolos a través de ejemplos. El objetivo de este trabajo es presentar una parte de esta teoría de una manera sencilla y atractiva para quienes no la conocen.

1 Introducción

La vida en su totalidad es una situación muy compleja y durante su transcurso estamos en algún instante obligados a tomar una decisión. De hecho, todos los seres vivos estamos forzados a tomar decisiones en forma permanente; algunas de ellas se llevan a cabo de una manera puramente instintiva, mientras que otras esconden una compleja trama de procesos.

En el campo de la investigación, existe una área encargada de analizar problemas de este tipo, la cual se denomina Teoría de Juegos. Esta teoría comenzó su desarrollo en 1928 con John von Neumann y se ha convertido en los últimos años en una rama crucial de la Matemática, que ha permitido entender muchos problemas a partir de un nuevo y potente enfoque y ha mostrado con fundamentos lógicos un hecho que los matemáticos sabían desde hace tiempo: en algunos casos la estrategia más racional consiste en ser irracional. Esta teoría tiene aplicación en diversos campos, desde la Física o la Biología, hasta la Economía, los negocios, la Psicología o la Política.

Un juego es un modelo simplificado de un conflicto social en donde cada participante tiene un objetivo y para tratar de lograrlo debe de tomar una o varias decisiones de un conjunto de decisiones posibles. En cada juego se busca una solución, una descripción de lo que cada jugador debería hacer y de cuál sería en consecuencia el resultado de sus acciones.

En general, un juego consiste de una serie de N jugadores, un conjunto de acciones posibles para cada jugador y un conjunto de pagos para cada jugador. Los elementos descritos de un juego permiten que los problemas de decisión se puedan considerar desde un punto de vista formal como un problema matemático.

Dentro de la literatura de Teoría de Juegos, para dos jugadores, podemos encontrar los juegos de suma cero. En este tipo de juegos la suma de los pagos de ambos debe ser cero, es decir, lo que un jugador gana el jugador oponente lo pierde.

Este trabajo consiste en presentar métodos de solución de juegos de suma cero para dos jugadores, considerando dos tipos de estrategias e ilustrándolos con ejemplos.

2 Descripción de un juego en su forma normal

En la actividad práctica se presentan con mucha frecuencia fenómenos y situaciones que involucran a dos o más partes con intereses diferentes y con posibilidades de llevar a cabo diversas acciones encaminadas a lograr sus objetivos. Los fenómenos y situaciones de este tipo se conocen con el nombre de situaciones conflictivas o, simplemente, conflictos.

Un conflicto se caracteriza por tener tres componentes básicas: partes interesadas, intereses de las partes y decisiones posibles que las partes pueden tomar. A los modelos teóricos de conflicto de intereses se les denomina juegos.

Los economistas desarrollaron su propia versión de lo que es un juego, al que suelen definir como:

Definición 1. Un **juego** es una interacción estratégica (es decir racional), de distintos individuos, llamados **jugadores**, que produce un resultado.

Esto los autoriza a describir con un juego a una transacción comercial, una subasta, la decisión de un productor sobre cuánto vender y a qué precio, dado que los consumidores deciden su consumo y cuánto están dispuestos a pagar, entre muchas otras situaciones.

Pero matemáticamente se puede construir un modelo que describa teóricamente la situación. Se ha elegido esta palabra para denominar a las situaciones conflictivas porque en el diccionario de la Real Academia Española encontramos que juego es un “ejercicio recreativo sometido a reglas” y, precisamente el hecho de que exista una gran variedad de ejercicios recreativos, desde los populares y los bursátiles hasta los de cartas y los militares, los cuales muy frecuentemente se desarrollan según reglas preestablecidas es, por lo visto, la causa principal de que en el siglo XX la palabra juego, conocida por todos desde la infancia, se haya convertido en un término matemático.

Un juego a diferencia de una situación conflictiva real, podría ser muy útil en la descripción de los principales tipos de decisiones que tienen los participantes y el tipo de resultados que podrían ocurrir. Un juego trata de extraer la esencia de los problemas en los conflictos de intereses y se desarrolla de acuerdo con reglas totalmente definidas.

Las acciones (es decir, las elecciones de comportamientos) disponibles pueden diferir mucho del modelo que tenemos en mente como al pensar en el juego del gato o del ajedrez. En el desarrollo del juego puede intervenir el azar y puede variar la información que tenemos, de tal modo que algunos jugadores no saben cuáles son las acciones de las que disponen los demás (como en el

póker, donde cada uno conoce sus cartas y estima las que puede recibir, pero no conoce las cartas de sus rivales) e incluso las propias acciones pueden variar aleatoriamente (como en el backgammon, en el que las casillas que se avanzan en cada ocasión dependen de un lanzamiento de dados).

El conjunto de acciones puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable, aunque muchas veces lo último se supone más por conveniencia que por tratarse de situaciones reales: por ejemplo, ningún comprador (al menos no uno en su sano juicio) ofrecerá una cantidad de π pesos por un bien, ni un productor decidirá fabricar $\sqrt{2}$ toneladas del producto que vende.

Una noción fundamental en Teoría de Juegos es el de estrategia. La palabra estrategia se deriva de la palabra griega ($\sigma\tau\rho\alpha\tau\epsilon\gamma\omicron\varsigma$) que significa “el arte de dirigir los movimientos militares más grandes y las operaciones de una campaña”, pero la palabra ha llegado a ser usada en un sentido no militar más amplio para alcanzar un objetivo. En Teoría de Juegos se tiene un significado especial y más preciso.

Definición 2. Una **estrategia** es una regla para elegir una acción en cada punto en el cual debe tomarse una decisión, es decir, es un plan de acción completo, que indica a un jugador qué acción elegir en cada situación de un juego.

Cuando los juegos sólo constan de una etapa, es posible llamar directamente estrategias a las acciones.

Los jugadores eligen sus estrategias simultáneamente al iniciar el juego, incluso aunque ellos no jueguen simultáneamente, porque una estrategia indica a cada jugador qué hacer en cada momento del juego.

Una estrategia no deja nada a la imaginación; una vez que una estrategia es elegida, los movimientos del jugador están determinados completamente. Cuando todos los jugadores eligen sus estrategias el curso del juego y sus resultados están determinados; los jugadores podrían dejar la realización de los movimientos a asistentes o a máquinas.

En particular, si consideramos juegos con dos jugadores, cada uno con un número finito de estrategias, denotamos a los jugadores como jugador I y jugador II. Además, si suponemos que el jugador I tiene que hacer una elección de un conjunto de n estrategias posibles y el jugador II tiene que elegir una estrategia de un conjunto de m estrategias posibles, entonces podemos representar por:

$$i \quad (i = \overline{1, n}) : \text{Estrategia del jugador } I$$

y por

$$j \quad (j = \overline{1, m}) : \text{Estrategia del jugador } II .$$

Existen dos tipos de estrategias, las estrategias puras y las estrategias mixtas, de las cuales hablaremos en las Secciones 4 y 5, respectivamente.

En una situación concreta, para medir el interés de cada jugador, se le asigna un número que expresa el grado de satisfacción de sus intereses. A este número se le llama *pago* del jugador. Los resultados de un juego no se limitan al esquema de “victoria, derrota o empate”; puede ocurrir que lo ganado o perdido difiera según como se haya jugado, o que todos los jugadores pierdan, o que todos ganen. Un pago puede ser una ganancia o una pérdida; por tal razón, dependiendo del contexto, el término obtener un pago puede significar ganar o perder. Formalmente, tenemos que

Definición 3. Un **pago** o **ganancia** describe cuantitativamente el resultado de cada realización del juego en términos de la cantidad que cada jugador gana o pierde.

Bajo estas condiciones, el desarrollo del conflicto consiste en la elección por parte de cada jugador de su estrategia y en la obtención de un pago de alguna fuente. Por ejemplo, en juegos con dos jugadores, a_{ij} es la cantidad que gana el jugador I, cuando usa la estrategia i y cuando el jugador II utiliza la estrategia j .

En el caso de juegos con dos jugadores, cada uno con un conjunto finito de estrategias, podemos considerar una *matriz* de pagos.

Definición 4. La **matriz de pagos** o **matriz del juego** es una matriz en la cual cada una de las celdas contiene los pagos correspondientes de los jugadores, por cada pareja de estrategias elegida. La primera coordenada (a_{ij}), de cada celda, es la ganancia del jugador I, y la segunda coordenada (b_{ij}), es la ganancia del jugador II.

Cuando el jugador I tiene n posibles estrategias y el jugador II tiene m posibles estrategias, la matriz de pagos es de tamaño $n \times m$, como se muestra a continuación:

		Jugador II			
		Estrategia 1	Estrategia 2	...	Estrategia m
Jugador I	Estrategia 1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	...	(a_{1m}, b_{1m})
	Estrategia 2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	...	(a_{2m}, b_{2m})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Estrategia n	(a_{n1}, b_{n1})	(a_{n2}, b_{n2})	...	(a_{nm}, b_{nm})

Cuadro 1: Matriz de pagos o Matriz del juego

Los conceptos mencionados anteriormente (jugadores, acciones disponibles para cada jugador y un resultado final) son los tres elementos básicos que definen un juego abstracto, que es la clase de juegos que se estudian en Matemáticas.

Cuando diversos matemáticos como Zermelo, Lasker, Borel y von Neumann se interesaron en los juegos, hicieron una serie de suposiciones sobre los jugadores, las estrategias, y los pagos. Esto deriva en una definición del concepto de juego que es muy abstracta, pero permite construir una teoría matemática coherente y rigurosa.

Para establecer un juego en su forma estratégica o normal, tenemos que determinar quiénes son los principales protagonistas, qué objetivos persiguen, cuál es el conjunto de estrategias que tiene cada uno y, finalmente, qué resultado obtendrá cada uno después de que haya escogido una de sus posibles estrategias. Así llegamos a lo siguiente:

Definición 5. Un **juego en forma estratégica o normal** consta de

- Un conjunto N de jugadores.
- Un conjunto de acciones posibles para cada jugador.
- Un conjunto de pagos para cada jugador, donde cada pago depende de la estrategia usada por él y por el resto de los jugadores.

A continuación, presentamos el ejemplo de un juego en su forma normal.

Ejemplo 1. *Par o Impar*

En este juego, cada uno de los jugadores muestra uno, dos o tres dedos. Si el número total de dedos mostrado es par, el jugador I gana 1 peso y el jugador II pierde 1 peso. Si el número total de dedos es impar, el jugador I pierde 1 peso y el jugador II gana 1 peso. Las estrategias en este juego son simples: decidir cuántos dedos mostrar. Podemos representar la matriz de pagos como sigue:

		Jugador II		
		1	2	3
Jugador I	1	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)
	2	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)
	3	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)

Cuadro 2: Matriz de pagos del juego Par o Impar

El jugador I dispone de una fila por cada una de sus estrategias y, el jugador II, dispone de una columna por cada estrategia. En la intersección de una fila y una columna ubicamos el pago que recibe cada uno, primero el pago del jugador I y luego el pago del jugador II.

Podemos observar que se trata de un juego, con dos jugadores, cada uno con un conjunto de tres estrategias posibles: mostrar un dedo, dos dedos o tres dedos, por lo que la matriz del juego es de tamaño 3×3 , como se muestra en el Cuadro 2.

Por ejemplo, si el jugador I escoge mostrar un dedo (renglón 1) y el jugador II escoge mostrar tres dedos (columna 3), el jugador I recibirá un pago de \$1 y el jugador II un pago de -\$1.

3 Juegos de suma cero

Se dice que un juego con dos jugadores es un juego de suma cero si la suma de sus pagos es cero, es decir, si un jugador pierde exactamente lo que el otro jugador gana. En un juego de suma cero, el pago de un jugador es igual al pago del otro con el signo aritmético opuesto.

Cuando consideramos juegos de suma cero para dos jugadores en forma matricial, se tiene una matriz del juego $A = (a_{ij})$, con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$, de números reales, de manera que si el jugador I, también llamado jugador fila, elige jugar con la fila i y el jugador II, también llamado jugador columna, elige jugar con la columna j , entonces el pago para el jugador I es a_{ij} y el pago para el jugador II es $-a_{ij}$, es decir, los pagos para el jugador II son los pagos negativos de aquellos registrados en la matriz del juego. Por supuesto, si el jugador I tiene algún pago que es negativo, entonces el jugador II tendrá un pago positivo.

Dada esta característica, no es necesario mostrar ambos pagos en cada celda de la matriz, es suficiente con colocar una sola entrada que representa los pagos para el jugador I, y de esta forma el juego puede representarse en forma matricial con un solo pago en cada celda de la matriz, como se muestra en el Cuadro 3.

		Jugador II			
		Estrategia 1	Estrategia 2	...	Estrategia m
Jugador I	Estrategia 1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
	Estrategia 2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Estrategia n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

Cuadro 3: Matriz de pagos del jugador I o Matriz de un juego de suma cero.

Ambos jugadores desean elegir estrategias que maximicen sus beneficios individuales. En este tipo de juegos las metas que persiguen los jugadores son totalmente opuestas (el jugador I quiere elegir una estrategia para maximizar su pago en la matriz, mientras que el jugador II quiere elegir una estrategia para minimizar el pago correspondiente en la matriz).

4 Puntos de equilibrio en estrategias puras

Definición 6. Una **estrategia pura** es una estrategia en la cual no hay aleatoriedad. Es aquella estrategia que un jugador aplicaría siempre de la misma forma, en caso de hallarse ante una situación idéntica.

4.1 Dominancia

Computacionalmente, trabajar con una matriz de pagos pequeña es mejor que con una matriz grande. Algunas veces, podemos reducir el tamaño de la matriz eliminando filas o columnas, es decir, estrategias que nunca van a ser usadas porque siempre existe una fila o columna mejor (estrategias dominadas). Esta técnica se denomina **eliminación por dominancia**.

Antes de comenzar a analizar un juego, debemos comprobar si existe dominancia en la matriz de pagos, pues esto podría reducir el tamaño de la matriz. Por ejemplo, si cada número en la fila i es más grande que cada número correspondiente en la fila k , es decir, $a_{ij} > a_{kj}$, para $j = 1, \dots, m$, entonces la fila que el jugador I nunca debería usar es la fila k (dado que quiere el mayor pago posible), y así podemos quitarla de la matriz. De manera similar, si cada número en la columna j es más pequeño que cada número correspondiente en la columna k (es decir, $a_{ij} < a_{ik}$, para $i = 1, \dots, n$), entonces la columna que el jugador II nunca debería jugar es la columna k (dado que quiere que el jugador I obtenga el menor pago posible). Resumiendo, tenemos lo siguiente:

Definición 7. La fila i **domina** (estrictamente) a la fila k si cada componente de la fila i es mayor que cada componente correspondiente en la fila k , es decir, $a_{ij} > a_{kj}$, para todo $j = 1, 2, \dots, m$. La columna j **domina** (estrictamente) a la columna k si cada componente de la columna j es menor que cada componente correspondiente en la columna k , es decir, $a_{ij} < a_{ik}$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Las fila y la columna k son estrategias dominadas y se eliminan de la matriz de pagos. Así, al usar dominancia sobre las estrategias de un jugador, podemos obtener un juego reducido. Luego, podemos usar dominancia sobre las estrategias del otro jugador para reducir más el juego reducido, y así sucesivamente, alternando dominancia entre los jugadores hasta que lleguemos a una etapa en la cual ya no sea posible quitar alguna estrategia por dominancia. Cabe señalar, que al final no siempre se llegará a un juego de tamaño 1×1 (solución del juego), pero habremos disminuido el tamaño del juego considerablemente, el cual podría resolverse al aplicar algún otro método.

Es posible probar que cualquier solución obtenida para un juego reducido, también es una solución para el juego original, como se establece a continuación.

Lema 1. *Al eliminar de un juego una estrategia dominada, la solución del juego reducido es una solución del juego original.*

A continuación, presentamos un ejemplo para ilustrar la técnica de dominancia, con la cual se obtiene la solución del juego correspondiente.

Ejemplo 2. *Dos jugadores, Xérez y Yérez, disponen de las estrategias $\{a, b, c, d\}$ y $\{s, t, u, v\}$, respectivamente, cuya matriz de pagos dada por:*

		Yérez			
		s	t	u	v
Xérez	a	-1	0	-1	4
	b	1	0	3	1
	c	3	1	2	2
	d	5	-3	-2	-1

Cuadro 4: Matriz de pagos del Ejemplo 2.

Como podemos observar, ninguna de las estrategias de Xérez está dominada. Por ejemplo, con a gana menos que con las restantes si Yérez juega su estrategia s , pero gana más si Yérez juega con v . También, con b gana menos que con c y que con d si Yérez juega con s , pero gana más si Yérez juega con u . Del mismo modo, para c y d podemos ver que ninguna estrategia domina a la otra, considerando los casos en que Yérez juega con s y t .

En cambio, sí es posible encontrar una estrategia dominada para Yérez: t domina a v , pues pagar 0 es mejor que pagar 4 o pagar 1, 1 es mejor que pagar 2 y pagar -3 es mejor que pagar -1 . Se puede ver que no existe otra estrategia dominada para Yérez y el juego se reduce, eliminando v , a uno más simple:

		Yérez		
		s	t	u
Xérez	a	-1	0	-1
	b	1	0	3
	c	3	1	2
	d	5	-3	-2

Ahora bien, en este nuevo juego vemos que a Xérez no le conviene jugar con a , cuyos pagos son menores que los obtenidos con c . Eliminando la estrategia a , del jugador Xérez, la matriz se reduce a:

		Yérez		
		s	t	u
Xérez	b	1	0	3
	c	3	1	2
	d	5	-3	-2

Como se puede verificar, ahora para Yérez, la estrategia s está dominada por la estrategia t , lo que determina la nueva matriz:

		Yérez	
		t	u
Xérez	b	0	3
	c	1	2
	d	-3	-2

Con las cosas simplificadas hasta este punto, vemos que a Xérez no le conviene jugar con d , ya que al utilizar cualquiera de las otras dos estrategias disponibles (b o c) recibe pagos visiblemente mayores. Al tachar una vez más, obtenemos:

		Yérez	
		t	u
Xérez	b	0	3
	c	1	2

Si Yérez observa ahora este juego, no tardará mucho en eliminar su estrategia u , dominada por t . Ya no dispone de alternativas como para hacerse el misterioso y juega inevitablemente con su estrategia t :

		Yérez	
		t	
Xérez	b	0	
	c	1	

Xérez jugará entonces con c pues domina a b . Podemos intentar ponerle algo de emoción y anunciar el resultado al modo de los premios Óscar:

y el ganador es ... Xérez.

Por lo tanto, Xérez gana 1, usando la estrategia c y, Yérez pierde 1, usando la estrategia t .

Sin embargo, se paga un precio al simplificar un juego, al eliminar estrategias dominadas. El Lema 1 establece que cualquier solución del juego reducido es una solución del juego original, y no que cualquier solución del juego original también es una solución del juego reducido. Por ello, se podrían perder soluciones al usar esta técnica y de ahí la necesidad de revisar otros métodos.

4.2 Criterios Maximin y Minimax

Habiendo obtenido la matriz de pagos, ¿cómo se analiza el juego?. La suposición importante que ahora hacemos es que todos los jugadores involucrados en un juego de suma cero deberían de ser pesimistas. Como el jugador I intenta maximizar su pago, entonces en un juego de suma cero, esto significa que él también intenta minimizar el pago del jugador II. Así, el jugador I, para cada una de sus estrategias, investiga el pago mínimo que obtiene al usar cada estrategia, es decir, el $\min_{j=1,\dots,m} a_{ij}$, para $i = 1, \dots, n$. Luego, él podría elegir la estrategia que tiene el mayor de estos pagos mínimos. Así, el jugador I está **maximizando** sus pagos **mínimos** y llamamos a todo esto el **criterio maximin**. Usando tal estrategia él puede asegurarse de que recibirá un pago de al menos

$$v^- \equiv \max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} a_{ij},$$

el cual se denomina **valor inferior** del juego.

El jugador II hace exactamente lo mismo, pero como en la matriz de pagos sólo aparecen los pagos del jugador I (los cuales son los negativos de los pagos del jugador II), él buscará, para cada una de sus estrategias, el pago máximo que el jugador I obtiene (lo cual es equivalente al pago mínimo que el jugador II obtiene al usar cada estrategia), es decir, el $\max_{i=1,\dots,n} a_{ij}$, para $j = 1, \dots, m$. Luego, el jugador II selecciona la estrategia que **minimiza** estos pagos **máximos** del jugador I, esto es, él está **minimaxizando** y llamamos a todo esto el **criterio minimax**.

Usando la estrategia resultante, el jugador II puede estar seguro que el jugador I no obtendrá un pago mayor que (o él no tendrá una pérdida superior a) v^+ , el **valor superior** del juego, donde

$$v^+ \equiv \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}.$$

En general, en estrategias puras siempre se cumple que $v^- \leq v^+$.

Definición 8. Si para una matriz de pagos $A_{n \times m} = (a_{ij})$, con n estrategias para el jugador I y m estrategias para el jugador II, ocurre que $v^- = v^+$, se dice que el juego tiene un **valor** y escribimos $v = v(A) = v^- = v^+$. Esto significa que el mínimo más grande y el máximo más pequeño son iguales. La fila i^* y la columna j^* que corresponden al pago $a_{i^*,j^*} = v^- = v^+$ son estrategias **óptimas**, y dicha pareja constituye un **punto de silla** o una situación de equilibrio, en estrategias puras, que ninguno de los jugadores estará interesado en alterar.

La optimidad significa que ningún jugador está tentado a cambiar su estrategia pues su oponente puede contraatacar eligiendo otras estrategias que proporcione pagos menos atractivos.

Se denomina **punto de equilibrio o situación de equilibrio**, a una situación que todos los jugadores están interesados en preservar. En una situación de equilibrio cada jugador obtiene su pago máximo (por supuesto, en la medida que ello dependa de él).

En general el valor del juego debe satisfacer la desigualdad

$$v^- \leq v(A) \leq v^+.$$

Retomemos el Ejemplo 2, cuya matriz de pagos está dada por

		Yérez			
		s	t	u	v
Xérez	a	-1	0	-1	4
	b	1	0	3	1
	c	3	1	2	2
	d	5	-3	-2	-1

para ilustrar los criterios de maximin y minimax. Para ello, comencemos con el análisis para cada estrategia del jugador Xérez, sin olvidar que al seleccionar una estrategia el jugador Xérez debe tener presente que su oponente, Yérez, puede responder con una estrategia que ocasione que el pago del jugador Xérez sea mínimo.

Cada estrategia tiene garantizado un pago mínimo: se trata, simplemente, de lo peor que podría pasar en caso de que Xérez elegiera dicha acción. Su cálculo no requiere grandes destrezas, pues solo consiste en buscar el mínimo de cada fila.

A la estrategia a el jugador Yérez responde con la estrategia s o bien u (el pago mínimo es igual a -1, lo cual es una pérdida para el jugador Xérez); a la estrategia b el jugador Yérez responde con la estrategia t (el pago mínimo del jugador Xérez es igual a 0); a la estrategia c el jugador Yérez responde con la estrategia t (el pago mínimo del jugador Xérez es igual a 1); a la estrategia d el jugador Yérez responde con la estrategia t (el pago mínimo del jugador Xérez es igual a -3, lo que en realidad indica una pérdida para el jugador Xérez). Escribiendo tales pagos mínimos en la última columna de la tabla, obtenemos

		Yérez				
		s	t	u	v	
Xérez	a	-1	0	-1	4	-1
	b	1	0	3	1	0
	c	3	1	2	2	1
	d	5	-3	-2	-1	-3

Pero ahora Xérez puede quedarse con el máximo de esos mínimos, como una forma de decirse: Si me va a ir siempre de la peor manera posible, elijamos entonces el mejor de esos “peores”.

Como el pago mínimo de la alternativa a es -1 , el de b es 0 , el de c es 1 y el de d es -3 , el mayor de estos cuatro valores es 1 que resulta de jugar con la estrategia c .

		Yérez			
		s	t	u	v
Xérez	a	-1	0	-1	4
	b	1	0	3	1
	c	3	1	2	2
	d	5	-3	-2	-1

el valor inferior del juego es $v^- = 1$. Lo que garantiza que el jugador Xérez recibirá un pago de 1 , por utilizar la estrategia pura c . En este ejemplo, el “mejor de los peores” no está mal, pues Xérez se asegura de ganar 1 ; podemos llamar a este valor su nivel de seguridad. Si el jugador Xérez mantiene la estrategia c , se asegura de obtener en el juego un pago mayor o igual que su nivel de seguridad.

Un razonamiento similar es válido para el jugador Yérez. Como Yérez buscará pagar lo menos posible, es decir está interesado en minimizar el pago de Xérez, razona al revés que Xérez: él necesita analizar cada una de sus estrategias desde el punto de vista del pago máximo del jugador Xérez, por lo cual en cada columna se fija cuánto es lo máximo que le podría costar jugar con tal estrategia. Los pagos máximos aparecen en la última fila de la tabla siguiente

		Yérez			
		s	t	u	v
Xérez	a	-1	0	-1	4
	b	1	0	3	1
	c	3	1	2	2
	d	5	-3	-2	-1
		5	1	3	4

Como podemos observar en la tabla anterior, el pago máximo correspondiente a la acción s es 5 , el de t es 1 , el de u es 3 y el de v es 4 . Es razonable que el jugador Yérez elija y conserve durante todo el juego la estrategia t , para la cual el pago máximo del jugador Xérez es mínimo, lo cual asegura a Yérez un pago, como máximo, de 1 .

El valor superior del juego es $v^+ = 1$. Si el jugador Yérez elige la estrategia t , asegura que lo más que podría pagar es 1 .

Hemos llegado a una situación interesante: Xérez tiene una estrategia (c) que le permite ganar al menos 1 , mientras que Yérez tiene una estrategia (t) que le permite perder a lo más 1 .

Como $v^- = v^+ = 1$, entonces el valor del juego es $v = 1$, y las estrategias c y t son estrategias óptimas para cada uno de los jugadores, entonces (c, t) es un punto de equilibrio del juego.

Por lo anterior, queda determinado un equilibrio, ya que si el juego se repite, y cualquiera de los jugadores cambia las estrategias óptimas obtenidas, sus posibilidades de ganar disminuyen, pues seguramente el jugador oponente lo notará y le dará prioridad a una estrategia que le proporcione ganancias mayores.

Las estrategias óptimas son c para Xérez y t para Yérez, tal como se obtuvo en la Sección 4.1. Tenemos entonces (una vez más) resuelto el juego: Xérez debe jugar con c y Yérez debe jugar con t . El resultado es exactamente el mismo de antes, aunque el enfoque ha cambiado: ahora hemos encontrado cierto lugar de la matriz que es el mínimo de su fila y el máximo de su columna. A un lugar tan privilegiado se le denomina *punto de silla*. La denominación se inspira, claro está, en la forma de una silla de montar, en cuyo centro encontramos un mínimo si lo recorriéramos desde la cabeza del caballo hasta su cola, pero un máximo si ahora nos movemos de un flanco del caballo al otro.

5 El Teorema de von Neumann

En la mayoría de los juegos de suma cero para dos personas, no existe un punto de silla en estrategias puras, porque eso significaría que los jugadores siempre deben hacer lo mismo. Un jugador no siempre debería jugar con la misma estrategia y debería haber algo de aleatoriedad involucrado, porque de lo contrario el jugador oponente será capaz de averiguar lo que el primer jugador está haciendo y tomar ventaja de ello.

Al parecer, la única alternativa para los jugadores es mezclar sus estrategias, jugar algunas filas y columnas unas veces y otras filas y columnas en otras ocasiones. La única forma en que un jugador puede impedir aprender acerca de sus estrategias es si él mismo no sabe exactamente qué estrategia pura debería usar, lo cual puede ocurrir únicamente si elige una estrategia al azar.

Cuando un jugador asigna una probabilidad a cada una de sus estrategias y luego sortea de alguna manera con cual jugará, decimos que está jugando con una *estrategia mixta*. El concepto fue introducido por Émile Borel.

En particular, si consideramos juegos con dos jugadores, cada uno con un conjunto finito de estrategias, tenemos lo siguiente:

Definición 9. Una **estrategia mixta** para el jugador I es un vector (o una matrix de tamaño $1 \times n$) $X = (x_1, \dots, x_n)$, tal que $x_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$, y $\sum_{i=1}^n x_i = 1$; x_i , para $i = 1, \dots, n$, representa la probabilidad de que la estrategia pura i sea utilizada por el jugador I.

Una **estrategia mixta** para el jugador II es un vector (o una matrix de tamaño $1 \times m$) $Y = (y_1, \dots, y_m)$, tal que $y_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, m$, y $\sum_{j=1}^m y_j = 1$; y_j , para $j = 1, \dots, m$, denota la probabilidad de que la estrategia pura j sea usada por el jugador II.

Una estrategia pura $X \in S_n$ es un elemento de la forma $X = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, en la cual se asigna toda la probabilidad a la estrategia que representa jugar siempre la fila correspondiente a la posición de 1 en X .

Denotamos al conjunto de estrategias mixtas con k componentes por

$$S_k \equiv \left\{ (z_1, z_2, \dots, z_k) \mid z_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k, \quad y \quad \sum_{i=1}^k z_i = 1 \right\}.$$

Así, una estrategia mixta para el jugador I es cualquier elemento $X \in S_n$ y para el jugador II cualquier elemento $Y \in S_m$.

A este tipo de estrategia también se le conoce como *estrategia combinada* y es una elección aleatoria por parte de los jugadores, de sus estrategias puras, siempre y cuando las elecciones

aleatorias de diferentes jugadores sean independientes en conjunto. Vemos, entonces, que hay más estrategias que acciones. En tal caso el pago de cada jugador se define como el valor esperado de su pago aleatorio.

Así, si los jugadores usan estrategias mixtas, entonces el pago puede calcularse sólo en el sentido **esperado**. Si un juego con dos jugadores se realiza una sola vez, el jugador I recibe exactamente a_{ij} , cuando él utiliza la estrategia i y, el jugador II, utiliza la estrategia j . Sólo cuando el juego se repite muchas veces, el jugador I puede esperar (éste es un resultado en la Teoría de la Probabilidad llamado Ley de los Grandes Números) recibir aproximadamente $E(X, Y)$, el cual se calcula como sigue.

Definición 10. Dadas una estrategia mixta $X \in S_n$ para el jugador I y una estrategia mixta $Y \in S_m$ para el jugador II, elegidas independientemente, el **pago esperado** del juego para el jugador I es

$$\begin{aligned} E(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p(\text{el jugador I use } i \text{ y el jugador II use } j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p(\text{el jugador I use } i) p(\text{el jugador II use } j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i a_{ij} y_j = (x_1, \dots, x_n) A_{n \times m} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = XAY^T. \end{aligned}$$

La elección independiente de las estrategias para cada jugador justifica el hecho de que

$$p(I \text{ use } i \text{ y II use } j) = p(\text{el jugador I use } i) p(\text{el jugador II use } j).$$

Además, en un juego de suma cero para dos jugadores, el pago esperado para el jugador II es $-E(X, Y)$.

En el caso de estrategias mixtas, ahora los objetivos son que el jugador I desea maximizar su pago esperado y el jugador II quiere minimizar el pago esperado del jugador I.

Al igual que en el caso de estrategias puras, también es posible definir los terminos de valor inferior, valor superior, valor y punto de silla de un juego, cuando se consideran estrategias mixtas.

Definición 11. Los **valores inferior y superior** de un juego con estrategias mixtas están dados por

$$v^- = \max_{X \in S_n} \min_{Y \in S_m} XAY^T \quad \text{y} \quad v^+ = \min_{Y \in S_m} \max_{X \in S_n} XAY^T.$$

Definición 12. Un **punto de silla** o **solución de un juego** en estrategias mixtas es una pareja (X^*, Y^*) de vectores de probabilidad $X^* \in S_n$ y $Y^* \in S_m$, que satisfacen

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y), \quad \text{para toda } X \in S_n \text{ y } Y \in S_m.$$

Si el jugador I decide utilizar una estrategia distinta a X^* pero, el jugador II continua utilizando la estrategia Y^* , entonces el jugador I recibe un pago esperado menor que el que obtiene por usar con X^* . Una situación similar ocurre para el jugador II; (X^*, Y^*) es un **equilibrio** en este sentido.

Surgen dos preguntas claves:

- 1.- ¿Cuáles juegos de suma cero tienen solución en el conjunto de estrategias mixtas?
- 2.- ¿Cómo hallar (si existe), la solución de un juego de suma cero?

La respuesta a la primera de estas preguntas la proporciona el teorema siguiente: (ver [6]):

Teorema 1. *En un juego de suma cero con dos jugadores donde el jugador I tiene n estrategias y el jugador II tiene m estrategias (para n y m finitos), se cumple que $v^- = v^+$. Más aún, existe al menos una estrategia mixta (X^*, Y^*) para la cual $E(X^*, Y^*) = v^- = v^+$.*

Este es el resultado más importante en Teoría de Juegos y fue probado por von Neumann (1928) y establece lo siguiente: si permitimos estrategias mixtas, entonces para todo juego podemos encontrar una mejor estrategia (una estrategia óptima) para el jugador I, la cual le asegura un pago v^- y, una mejor estrategia para el jugador II, que le garantiza que el jugador I no obtendrá más de v^+ ; además $v^- = v^+$, es decir, el juego tiene un valor.

El Teorema 1 afirma que siempre existe un punto de silla en estrategias mixtas, pero no nos da una manera de encontrarlo.

6 Conclusiones

En este trabajo, presentamos la descripción de un juego en su forma normal. Luego, para juegos de suma cero con dos jugadores, cada uno con un conjunto finito de estrategias, presentamos lo siguiente:

- 1.- dos métodos para la obtención de puntos de silla en términos de estrategias puras (dominancia y criterios maximin y minimax).
- 2.- Definición de puntos de silla, en términos de estrategias mixtas, y el Teorema de Von Neumann.

Además, incluimos un par de ejemplos para ilustrar la teoría presentada.

Referencias

- [1] Amster P. Pinasco, J. P. (2014) *Teoría de Juegos: Una Introducción Matemática a la Toma de Decisiones*. Fondo de Cultura Económica.
- [2] Barron, E. N. (2007) *Game Theory: An Introduction*. John Wiley & Sons,
- [3] Farfán, J. A. (2014) *Dilema del Prisionero como Juego Estático, Dinámico y Estocástico*. Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Tlaxcala.
- [4] Kreps, D. M. (1994) *Teoría de Juegos y Modelación Económica*. Fondo de Cultura Económica.
- [5] Morton D. D. (1998) *Introducción a la Teoría de Juegos*. Alianza Editorial.
- [6] Shikin L. V. (2003) *Introducción a la Teoría de Juegos*. URSS.
- [7] Taha, H. A. (2012) *Investigación de Operaciones*. Pearson Educación.
- [8] Thomas, L. C. (1984) *Games, Theory and Applications*. Ellis Horwood/John Wiley.

- [9] Zapata, L. P. (2006) *Economía, Política y otros juegos. Una introducción a los juegos no cooperativos*. Pearson Educación.

La probabilidad de un carácter hereditario en una población

José Antonio Durante Murillo | Sara Mejía Pérez | Ana Luisa Morales Zamora

Facultad de Ciencias Básicas, Ingeniería y Tecnología
Universidad Autónoma de Tlaxcala

Resumen

Debido a que muchos desórdenes humanos son de origen genético y algunos de estos padecimientos están determinados por alelos en los cromosomas autosómicos.

Este trabajo tiene como objetivo general determinar la probabilidad de cada genotipo en las diferentes generaciones de una población de un carácter hereditario, determinado por un tipo de gen que se puede presentar únicamente en dos posibles formas, siendo una dominante y la otra recesiva.

Para cubrir el objetivo que se plantea fue necesario aplicar el Teorema de la Probabilidad Total, la ley de segregación y los supuestos de la ley de Hardy-Weiberg.

1 Introducción

La genética es una ciencia de gran proyección hacia el futuro, el campo de aplicaciones es enorme, por ejemplo, muchas enfermedades genéticas heredables (como la fenilcetonuria, el síndrome de Marfan y la distrofia muscular) se deben a formas anormales, mutaciones, de genes únicos que se transmiten a través de los gametos (óvulos y espermatozoides), la genética también puede aliviar los sufrimientos que provocan muchas enfermedades.

Este trabajo se centra en dos áreas de la genética, la genética clásica y la genética evolutiva, de la primera se utiliza la teoría de la herencia ligada al sexo y la ley de segregación [1], que establece lo siguiente:

- Cada individuo tiene dos factores de cada característica.
- Los factores segregan (separan) al azar durante la formación de los gametos.
- Cada gameto contiene sólo un factor de cada par de factores.
- La fecundación proporciona a cada individuo dos factores de cada característica.

De la genética evolutiva se utiliza la ley de Hardy-Weinberg, describe lo que les sucede a los alelos y a los genotipos en una población «ideal» que es infinitamente grande, con apareamiento al azar, y que no está sujeta a ninguna fuerza evolutiva, como la mutación, la migración o la selección [3]. En estas condiciones, el modelo Hardy-Weinberg hace dos predicciones:

- 1.- La frecuencia de los tres genotipos AA , Aa y aa viene dada por los términos de la fórmula binomial: $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$, en donde p = frecuencia del alelo A y q = frecuencia del alelo a .
- 2.- Las proporciones de los genotipos no cambian de generación en generación, es decir, las frecuencias genotípicas poblacionales permanecen constantes, en equilibrio.

Primero se establece la generalización de la ley de Hardy-Weinberg y los resultados se aplican a las siguientes dos enfermedades:

- La enfermedad autosómica recesiva que se produce sólo en homocigotos, individuos con dos alelos mutantes, porque en esas enfermedades una copia del gen normal en un heterocigoto (portador) es capaz de compensar el alelo mutante y evitar que se produzca la enfermedad.
- La enfermedad autosómica dominante que en general ocurre entre un heterocigoto para la mutación y un homocigoto para el alelo mutante.

Posteriormente se presenta un modelo para la herencia recesiva ligada al sexo que es importante porque en más de 1400 genes están localizados en el cromosoma X, el 40% de los cuales, aproximadamente, se sabe que se asocian a fenotipos (expresión observable de un genotipo) de enfermedad.

Una mutación ligada al cromosoma X se expresa fenotípicamente en todos los varones que la reciben y sólo en las mujeres homocigotas para la mutación. Por tanto, los trastornos recesivos ligados al cromosoma X sólo suelen mostrarse en varones y, difícilmente se observan en mujeres [5].

2 Generalización de la ley de Hardy-Weinberg

Sea A el alelo dominante y a el alelo recesivo del gen asociado a un carácter hereditario. Se asumirá que los individuos de la población se reproducen con apareamientos al azar entre dos individuos de sexo opuesto presentes en la población. La población inicial Π_0 da origen a una población Π_1 , la cual a su vez origina una población Π_2 , etc.

Para cada $n \in \{0, 1, \dots\}$, sean u_n, v_n, w_n las probabilidades de los genotipos AA , Aa y aa , respectivamente, entre los machos de la población Π_n y de igual forma u'_n, v'_n, w'_n las probabilidades de que las hembras de la población Π_n tengan el genotipo AA , Aa y aa respectivamente. Además, sean p_n y q_n las probabilidades de que en un apareamiento de la población Π_n el macho aporte el alelo A y a del gen, respectivamente, así como p'_n y q'_n las probabilidades de que en un apareamiento de la población Π_n la hembra aporte el alelo A y a respectivamente [2].

Observe que son los mismos supuestos que en la ley de Hardy-Weinberg, pero ahora considerando que las probabilidades de que en un apareamiento de la población el macho o hembra aporte el alelo A y a del gen, no necesariamente son iguales.

Además se satisface que $u_n + v_n + w_n = 1$, $u'_n + v'_n + w'_n = 1$, $p_n + q_n = 1$ y $p'_n + q'_n = 1$.

Para obtener p_n se utiliza el Teorema de la Probabilidad Total

$$p_n = p(A|AA)p(AA) + p(A|Aa)p(Aa) + p(A|aa)p(aa).$$

Utilizando la ley de segregación, $p(A|Aa) = \frac{1}{2}$.

Así, sustituyendo los valores obtenidos

$$p_n = u_n + \frac{1}{2}v_n.$$

Análogamente se obtienen las otras tres probabilidades

$$q_n = w_n + \frac{1}{2}v_n,$$

$$p'_n = u'_n + \frac{1}{2}v'_n,$$

$$q'_n = w'_n + \frac{1}{2}v'_n.$$

Ahora, se calculará la probabilidad de los genotipos AA , Aa , aa en la generación $n + 1$.

Primero observe que para obtener la probabilidad de que se tenga el genotipo AA , para machos y hembras, debe ocurrir que el macho y la hembra de la generación n aporten el alelo A , además el alelo que aporte el macho es independiente del alelo que aporte la hembra. Así, por la regla del producto

$$\begin{aligned} u'_{n+1} = u_{n+1} &= p_n p'_n \\ &= \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) \left(u'_n + \frac{1}{2}v'_n\right). \end{aligned}$$

De la misma manera, la probabilidad de que se tenga el genotipo aa , debe ocurrir que ambos aporten el alelo a , teniendo así

$$w'_{n+1} = w_{n+1} = \left(w_n + \frac{1}{2}v_n\right) \left(w'_n + \frac{1}{2}v'_n\right).$$

Utilizando la regla del producto y la propiedad de la aditividad finita

$$\begin{aligned} v'_{n+1} = v_{n+1} &= p_n q'_n + p'_n q_n \\ &= \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) \left(w'_n + \frac{1}{2}v'_n\right) + \left(u'_n + \frac{1}{2}v'_n\right) \left(w_n + \frac{1}{2}v_n\right). \end{aligned}$$

De manera que, para $n \geq 1$, se tiene:

$$u'_{n+1} = u_{n+1} = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2,$$

$$v'_{n+1} = v_{n+1} = 2 \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) \left(w_n + \frac{1}{2}v_n\right),$$

$$w'_{n+1} = w_{n+1} = \left(w_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2.$$

Por lo tanto para $n \geq 2$, se tiene:

$$\begin{aligned}
u'_{n+1} = u_{n+1} &= \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \\
&= \left[\left(u_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2\left(u_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)\left(w_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)\right)\right]^2 \\
&= \left(u_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)^2 [u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1}]^2 \\
&= \left(u_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)^2 \\
&= u_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w'_{n+1} = w_{n+1} &= \left(w_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \\
&= \left[\left(w_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2\left(u_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)\left(w_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)\right)\right]^2 \\
&= \left(w_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)^2 [w_{n-1} + v_{n-1} + u_{n-1}]^2 \\
&= \left(w_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1}\right)^2 \\
&= w_n
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
v'_{n+1} = v_{n+1} &= 1 - u_{n+1} - w_{n+1} \\
&= 1 - u_n - w_n \\
&= v_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir de la segunda generación las probabilidades de cada uno de los genotipos permanecen constantes, es decir, en equilibrio.

3 Probabilidades de los genotipos en la población

En la sección anterior se estableció el equilibrio a partir de la segunda generación, para las probabilidades de los tres genotipos en una población. A continuación se establecerán algunas condiciones iniciales necesarias para que se observen los seis casos posibles siguientes:

- 1.- $v_{n+1} > u_{n+1} > w_{n+1}$.
- 2.- $v_{n+1} > w_{n+1} > u_{n+1}$.
- 3.- $u_{n+1} > v_{n+1} > w_{n+1}$.
- 4.- $u_{n+1} > w_{n+1} > v_{n+1}$.
- 5.- $w_{n+1} > u_{n+1} > v_{n+1}$.
- 6.- $w_{n+1} > v_{n+1} > u_{n+1}$.

Caso 1. Para $n \geq 1$, $v_{n+1} > u_{n+1} > w_{n+1}$ es decir, en la población existe mayor probabilidad de individuos con genotipo Aa y menor probabilidad de individuos con genotipo aa .

Si $u_{n+1} > w_{n+1}$, es decir,

$$\begin{aligned}\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 &> \left(w_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2, \\ (u_n - w_n)(u_n + w_n + v_n) &> 0, \\ u_n &> w_n.\end{aligned}$$

De aquí que, para $n \geq 1$, $u_n > w_n$ es necesario para $u_{n+1} > w_{n+1}$.

Ahora, como $u_1 > w_1$, se tiene

$$\begin{aligned}(u_0 + \frac{1}{2}v_0)(u'_0 + \frac{1}{2}v'_0) &> (w_0 + \frac{1}{2}v_0)(w'_0 + \frac{1}{2}v'_0), \\ u_0u'_0 + \frac{1}{2}v_0(u'_0 - w'_0) + \frac{1}{2}v'_0(u_0 - w_0) &> w_0w'_0 > 0,\end{aligned}$$

luego $u'_0 - w'_0 > 0$ y $u_0 - w_0 > 0$.

Es decir, si $u_1 > w_1$ entonces $u'_0 > w'_0$ y $u_0 > w_0$.

Por otro lado, si

$$v_{n+1} > u_{n+1}$$

y considerando que $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = 1$ se tiene

$$\begin{aligned}1 - u_{n+1} - w_{n+1} &> u_{n+1}, \\ 1 - 2u_{n+1} - w_{n+1} &> 0, \\ (u_n + v_n + w_n)^2 - 2\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 - \left(w_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 &> 0, \\ u_n(2w_n - u_n) + v_n\left(\frac{1}{4}v_n + w_n\right) &> 0,\end{aligned}$$

luego,

$$2w_n - u_n > 0,$$

es decir,

$$w_n > \frac{1}{2}u_n.$$

De aquí que, para $n \geq 1$, $w_n > \frac{1}{2}u_n$ es necesario para $v_{n+1} > u_{n+1}$.

Ahora, como $w_1 > \frac{1}{2}u_1$, se tiene

$$\begin{aligned}\left(w_0 + \frac{1}{2}v_0\right)\left(w'_0 + \frac{1}{2}v'_0\right) &> \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{1}{2}v_0\right)\left(u'_0 + \frac{1}{2}v'_0\right), \\ w_0w'_0 + \frac{1}{2}v_0\left(w'_0 - \frac{1}{2}u'_0\right) + \frac{1}{2}v'_0\left(w_0 - \frac{1}{2}u_0\right) + \frac{1}{8}v_0v'_0 &> \frac{1}{2}u_0u'_0 > 0,\end{aligned}$$

entonces,

$$w_0w'_0 + \frac{1}{2}v_0\left(w'_0 - \frac{1}{2}u'_0\right) + \frac{1}{2}v'_0\left(w_0 - \frac{1}{2}u_0\right) + \frac{1}{8}v_0v'_0 > 0,$$

y, de la última desigualdad se sigue que

$$w'_0 - \frac{1}{2}u'_0 > 0 \text{ y } w_0 - \frac{1}{2}u_0 > 0.$$

Es decir, si $w_1 > \frac{1}{2}u_1$ entonces $w'_0 > \frac{1}{2}u'_0$ y $w_0 > \frac{1}{2}u_0$.

Por lo tanto, se concluye que para $n \geq 1$, $u_n > w_n > \frac{1}{2}u_n$ es una condición necesaria para que $v_{n+1} > u_{n+1} > w_{n+1}$ y $u'_0 > w'_0 > \frac{1}{2}u'_0$ y $u_0 > w_0 > \frac{1}{2}u_0$ son condiciones necesarias para que $u_1 > w_1 > \frac{1}{2}u_1$.

Caso 2. Para $n \geq 1$, $v_{n+1} > w_{n+1} > u_{n+1}$ es decir, en la población existe mayor probabilidad de individuos con genotipo Aa y menor probabilidad de individuos con genotipo AA .

El procedimiento es análogo al Caso 1, de aquí se concluye que para $n \geq 1$, $2u_n > w_n > u_n$ es una condición necesaria para que $v_{n+1} > w_{n+1} > u_{n+1}$ y $w'_0 > u'_0 > \frac{1}{2}w'_0$ y $w_0 > u_0 > \frac{1}{2}w_0$ son condiciones necesarias para que $2u_1 > w_1 > u_1$.

Caso 3. Para $n \geq 1$, $u_{n+1} > v_{n+1} > w_{n+1}$ es decir, en la población existe mayor probabilidad de individuos con genotipo AA y menor probabilidad de individuos con genotipo aa .

Si $v_{n+1} > w_{n+1}$, es decir,

$$\begin{aligned} 2 \left(u_n + \frac{1}{2}v_n \right) \left(w_n + \frac{1}{2}v_n \right) &> \left(w_n + \frac{1}{2}v_n \right)^2, \\ (2w_n + v_n)u_n - w_n^2 + \frac{1}{4}v_n^2 &> 0, \end{aligned}$$

en la desigualdad anterior se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}v_n^2 - w_n^2 &> 0, \\ \left(\frac{1}{2}v_n - w_n \right) \left(\frac{1}{2}v_n + w_n \right) &> 0, \\ \frac{1}{2}v_n - w_n &> 0, \end{aligned}$$

si y sólo si

$$v_n > 2w_n.$$

Por lo tanto, para $n \geq 1$, $v_n > 2w_n$ es una condición necesaria para $v_{n+1} > w_{n+1}$.

Ahora, como $v_1 > 2w_1$, es decir,

$$\begin{aligned} \left(u_0 + \frac{1}{2}v_0 \right) \left(w'_0 + \frac{1}{2}v'_0 \right) + \left(u'_0 + \frac{1}{2}v'_0 \right) \left(w_0 + \frac{1}{2}v_0 \right) &> 2(w_0 + \frac{1}{2}v_0)(w'_0 + \frac{1}{2}v'_0), \\ \left(\frac{1}{2}v_0 + w_0 \right) (u'_0 - w'_0) + \left(\frac{1}{2}v'_0 + w'_0 \right) (u_0 - w_0) &> 0, \end{aligned}$$

luego, $u'_0 - w'_0 > 0$ y $u_0 - w_0 > 0$.

Es decir, si $v_1 > 2w_1$ entonces $u_0 > w_0$ y $u'_0 > w'_0$.

Por otro lado, si $u_{n+1} > v_{n+1}$, es decir,

$$\begin{aligned}\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 &> 2\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)\left(w_n + \frac{1}{2}v_n\right), \\ \left(u_n - \frac{1}{2}v_n\right)\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) &> (2u_n + v_n)w_n > 0, \\ \left(u_n - \frac{1}{2}v_n\right)\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) &> 0, \\ \left(u_n - \frac{1}{2}v_n\right) &> 0, \\ 2u_n &> v_n.\end{aligned}$$

De ahí que para $n \geq 1$, $2u_n > v_n$ es necesario para $u_{n+1} > v_{n+1}$.

Ahora como $2u_1 > v_1$, es decir,

$$\begin{aligned}2(u_0 + \frac{1}{2}v_0)(u'_0 + \frac{1}{2}v'_0) &> \left(u_0 + \frac{1}{2}v_0\right)\left(w'_0 + \frac{1}{2}v'_0\right) + \left(u'_0 + \frac{1}{2}v'_0\right)\left(w_0 + \frac{1}{2}v_0\right), \\ \left(\frac{1}{2}v_0 + u_0\right)(u'_0 - w'_0) + \left(\frac{1}{2}v'_0 + u'_0\right)(u_0 - w_0) &> 0,\end{aligned}$$

de ahí que $u'_0 - w'_0 > 0$ y $u_0 - w_0 > 0$.

Es decir, si $2u_1 > v_1$ entonces $u_0 > w_0$ y $u'_0 > w'_0$.

Por lo tanto, se concluye que para $n \geq 1$, $2u_n > v_n > 2w_n$ es una condición necesaria para que $u_{n+1} > v_{n+1} > w_{n+1}$ y $u_0 > w_0$ y $u'_0 > w'_0$ son condiciones necesarias para que $2u_1 > v_1 > 2w_1$.

Caso 4. Para $n \geq 1$, $w_{n+1} > v_{n+1} > u_{n+1}$ es decir, en la población existe mayor probabilidad de individuos con genotipo aa y menor probabilidad de individuos con genotipo AA .

El procedimiento es análogo al Caso 3, de aquí se concluye que para $n \geq 1$, $2w_n > v_n > 2u_n$ es una condición necesaria para que $w_{n+1} > v_{n+1} > u_{n+1}$ y $w_0 > u_0$ y $w'_0 > u'_0$ son condiciones necesarias para que $2w_1 > v_1 > 2u_1$.

Los casos 5 y 6 se demuestran que no son posibles.

En conclusión, utilizando los resultados anteriores si en la población existen individuos con una enfermedad autosómica recesiva se desea que al pasar varias generaciones se tenga una población con el comportamiento de los Casos 1 o 3:

- $v_{n+1} > u_{n+1} > w_{n+1}$,
- $u_{n+1} > v_{n+1} > w_{n+1}$.

Entonces las condiciones iniciales necesarias en la población son:

$$u'_0 > w'_0 \text{ y } u_0 > w_0,$$

es decir, la probabilidad de mujeres no afectadas (con genotipo AA) debe ser mayor a la probabilidad de mujeres afectadas (con genotipo aa) y la probabilidad de varones no afectados (con

genotipo AA) debe ser mayor a la probabilidad de varones afectados (con genotipo aa).

En cambio, si se trata de una enfermedad autosómica dominante se desea que al pasar varias generaciones se tenga una población con el comportamiento de los casos 4 o 6:

- $w_{n+1} > u_{n+1} > v_{n+1}$,
- $w_{n+1} > v_{n+1} > u_{n+1}$.

Pero como el Caso 6 no es posible, por lo tanto del Caso 4, las condiciones iniciales necesarias en la población son:

$$w'_0 > u'_0 \text{ y } w_0 > u_0,$$

es decir, la probabilidad de mujeres no afectadas (con genotipo aa) debe ser mayor a la probabilidad de mujeres afectadas (con genotipo AA) y la probabilidad de varones no afectados (con genotipo aa) debe ser mayor a la probabilidad de varones afectados (con genotipo AA).

4 Modelo para la herencia recesiva ligada al sexo

Considere una población en la cual la forma XY determina sexo masculino y la forma XX sexo femenino. Considere además un gen ligado al sexo de esa población, el alelo mutante X_h y su alelo normal X_H , y se asumirá que los individuos de la población se reproducen con apareamientos al azar entre dos individuos de sexo opuesto presentes en la población. La población inicial Π_0 da origen, mediante reproducción, a una población Π_1 , la cual a su vez origina una población Π_2 , etc.

Para cada $n \in \{0, 1, \dots\}$, sean u_n, v_n, w_n las probabilidades de los genotipos $X_H X_H$, $X_H X_h$ y $X_h X_h$, respectivamente, entre las hembras de la población Π_n y, r_n y s_n las probabilidades de los genotipos X_H y X_h , respectivamente, entre los machos. Además, se denotará por p_n y q_n a las probabilidades de que en un apareamiento de la población Π_n la hembra aporte el alelo X_H y X_h del gen, respectivamente [2].

Además, se satisface que $u_n + v_n + w_n = 1$, $r_n + s_n = 1$ y $p_n + q_n = 1$.

Para obtener la probabilidad p_n , de que la hembra aporte el alelo X_H , se utiliza el Teorema de la Probabilidad Total. Así,

$$\begin{aligned} p_n &= p(X_H|X_H X_H)p(X_H X_H) + p(X_H|X_H X_h)p(X_H X_h) + p(X_H|X_h X_h)p(X_h X_h) \\ &= u_n + \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene la probabilidad de que la hembra aporte el alelo X_h :

$$q_n = w_n + \frac{1}{2}v_n.$$

Para calcular las probabilidades de los genotipos $X_H X_H$, $X_H X_h$ y $X_h X_h$ entre las hembras de la generación $n + 1$, es decir, las probabilidades u_{n+1} , v_{n+1} y w_{n+1} , respectivamente, se utiliza la regla del producto, teniendo:

$$u_{n+1} = p_n r_n,$$

$$w_{n+1} = q_n s_n.$$

Utilizando la regla del producto y la propiedad de la aditividad finita

$$v_{n+1} = p_n s_n + q_n r_n.$$

Luego, para calcular las probabilidades r_{n+1} y s_{n+1} hay que recordar que los hombres tienen un cromosoma X y un cromosoma Y y, como el gen en consideración está ligado al sexo, r_{n+1} y s_{n+1} dependen únicamente del alelo que aporte la hembra, así

$$r_{n+1} = p_n$$

y

$$s_{n+1} = q_n.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{1}{2}v_{n+1} \\ &= p_n r_n + \frac{1}{2}(p_n s_n + q_n r_n) \\ &= \frac{1}{2}p_n(r_n + s_n) + \frac{1}{2}r_n(p_n + q_n) \\ &= \frac{1}{2}(p_n + r_n). \end{aligned}$$

De manera que:

$$p_1 - p_0 = -\frac{1}{2}(p_0 - r_0).$$

Y, para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{1}{2}(p_n + r_n) - p_n \\ &= -\frac{1}{2}(p_n - p_{n-1}), \end{aligned}$$

teniendo así, que para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} p_n - p_{n-1} &= -\frac{1}{2}(p_{n-1} - p_{n-2}) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(p_{n-2} - p_{n-3}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

y, por inducción se tiene:

$$p_n - p_{n-1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2^n}\right)(p_0 - r_0). \quad (1)$$

Por último, se calcularán las probabilidades p_n, q_n, r_n y s_n :

$$p_n = \sum_{k=1}^n (p_k - p_{k-1}) + (p_0 - r_0) + r_0.$$

Utilizando la ecuación (1)

$$\begin{aligned} p_n &= r_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\frac{1}{2^k}\right)(p_0 - r_0) + (p_0 - r_0) \\ &= r_0 + \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{1}{2^k}\right)(p_0 - r_0), \end{aligned}$$

es decir, se tiene una progresión geométrica de $n + 1$ términos, entonces

$$\begin{aligned} p_n &= r_0 + \frac{1 - (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1 + \frac{1}{2}} (p_0 - r_0) \\ &= \frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}r_0 + (-1)^n \frac{1}{3 \cdot 2^n} (p_0 - r_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} q_n &= 1 - p_n \\ &= 1 - \left[\frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}r_0 + (-1)^n \frac{1}{3 \cdot 2^n} (p_0 - r_0) \right] \\ &= \frac{2}{3}q_0 + \frac{1}{3}s_0 + (-1)^n \frac{1}{3 \cdot 2^n} (q_0 - s_0). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} r_n &= p_{n-1} \\ &= \frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}r_0 + (-1)^{n-1} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} (p_0 - r_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s_n &= q_{n-1} \\ &= \frac{2}{3}q_0 + \frac{1}{3}s_0 + (-1)^{n-1} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} (q_0 - s_0). \end{aligned}$$

Si $n \rightarrow \infty$

$$p_n \approx r_n \approx \frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}r_0 = 1 - \left(\frac{2}{3}q_0 + \frac{1}{3}s_0 \right),$$

y

$$q_n \approx s_n \approx \frac{2}{3}q_0 + \frac{1}{3}s_0.$$

Entonces definiendo a $\alpha = \frac{2}{3}q_0 + \frac{1}{3}s_0$, se tiene:

$$\begin{cases} p_n \approx r_n \approx 1 - \alpha, \\ q_n \approx s_n \approx \alpha, \\ u_n = p_{n-1}r_{n-1} \approx (1 - \alpha)^2, \\ v_n = p_{n-1}s_{n-1} + q_{n-1}r_{n-1} \approx 2\alpha(1 - \alpha), \\ w_n = q_{n-1}s_{n-1} \approx \alpha^2. \end{cases} \quad (2)$$

Al pasar varias generaciones, α es la probabilidad de varones afectados y α^2 la probabilidad de mujeres afectadas. Además, como $0 < \alpha < 1$, entonces $\alpha > \alpha^2$ esto explica por que existe mayor frecuencia de varones con enfermedades ligadas al sexo que mujeres.

4.1 Aplicación en la hemofilia A

Utilizando los valores del Cuadro 1, $s_0 = \frac{1}{5000}$ entonces $r_0 = 1 - \frac{1}{5000} = \frac{4999}{5000}$, $v_0 = 1/2500$ y $w_0 = 1/5000^2$ entonces $u_0 = \frac{9995}{9999}$.

Así, sustituyendo en (??)

$$r_n \approx 1 - 0.0002 = 0.9998,$$

$$s_n \approx 0.0002,$$

	Incidencia de varones afectados (nacidos vivos)	Prevalencia de heterocigotos (en población femenina)
Estados Unidos	$\frac{1}{5000}$	$\frac{1}{2500}$

Cuadro 1: Incidencia y prevalencia de la hemofilia A en Estados Unidos.

$$u_n \approx (1 - 0.0002)^2 = 0.9996,$$

$$v_n \approx 2(0.0002)(1 - 0.0002) = 0.0004,$$

$$w_n \approx 0.0002^2 = 0.$$

De lo anterior se puede observar que $s_n > w_n$ es decir la probabilidad de varones afectados es mayor a la probabilidad de mujeres afectadas cuando $n \rightarrow \infty$.

5 Conclusión

Al aplicar la ley de segregación y el Teorema de la Probabilidad Total se concluye que para un gen con dos alelos uno dominante A y el otro recesivo a , donde los individuos de la población se reproducen con apareamientos al azar, las probabilidades de cada uno de los genotipos permanecen constantes a partir de la segunda generación (en equilibrio), determinadas por:

$$u'_2 = u_2 = \left(u_1 + \frac{1}{2}v_1\right)^2,$$

$$v'_2 = v_2 = 2\left(u_1 + \frac{1}{2}v_1\right)\left(w_1 + \frac{1}{2}v_1\right),$$

$$w'_2 = w_2 = \left(w_1 + \frac{1}{2}v_1\right)^2,$$

donde u_1, v_1, w_1 son las probabilidades de los genotipos AA, Aa y aa , respectivamente, de la primera generación filial.

En cambio, el equilibrio de la ley de Hardy-Weinberg se da a partir de la primera generación. La diferencia entre esta generalización de la ley de Hardy-Weinberg y la ley como tal, radica en que las probabilidades de que en un apareamiento de la población el macho o hembra aporte el alelo A y a del gen no necesariamente son iguales.

Además, se concluye que ya sea en una enfermedad autosómica dominante o recesiva para que exista mayor probabilidad de individuos no afectados al pasar varias generaciones, las condiciones iniciales necesarias son: que la probabilidad de mujeres no afectadas debe ser mayor a la probabilidad de mujeres afectadas y la probabilidad de varones no afectados debe ser mayor a la probabilidad de varones afectados.

Y por último que en la población existe mayor frecuencia de varones con enfermedades ligadas al sexo que mujeres y esto se debe a que a la larga $\frac{2}{3}q_0 + \frac{1}{3}s_0$, es decir la probabilidad de varones afectados es mayor a $(\frac{2}{3}q_0 + \frac{1}{3}s_0)^2$, la probabilidad de mujeres afectadas, donde q_0 es la probabilidad de que en un apareamiento de la población inicial Π_0 la mujer aporte el alelo mutante X_h del gen y s_0 la probabilidad del genotipo X_h entre los machos de la población inicial Π_0 .

Referencias

- [1] Curtis, H. et al. (2008). *Biología*. Panamericana.
- [2] García, A. M. A. (2005). *Introducción a la teoría de la probabilidad. Primer curso*. Fondo de Cultura Económica.
- [3] Klug, W. S. (2006). *Conceptos de genética*. Pearson.
- [4] Mader S. S. (2008). *Biología*. Mc Graw Hill.
- [5] Nussbaum, R. L. et al. (2005). *Thompson & Thompson. Genética en medicina*. Masson.
- [6] Rincón, L. (2013). *Curso intermedio de probabilidad*. Las prensas de Ciencias.
- [7] Solari, A. J. (2003). *Genética Humana. Fundamentos y aplicaciones en Medicina*. Editorial medica Panamericana.
- [8] Tamarin, R. H. (1996). *Principios de Genética*. Reverté.

Modelos de regresión para variable respuesta continua sobre el intervalo unidad

Gladys Linares Fleites

gladys.linares@correo.buap.mx
Instituto de Ciencias

Ana Aleyda Oroza Hernández

aleyda16188@hotmail.com
Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas

Miguel Ángel Valera Pérez

valeraperezmiguelangel@gmail.com
Instituto de Ciencias
BUAP

Resumen

Los modelos de regresión se usan ampliamente en una gran diversidad de áreas de estudio para describir asociaciones entre las variables explicativas y la respuesta. El modelo lineal mínimo cuadrático ordinario, bajo la suposición de normalidad de los errores aleatorios, es el enfoque más frecuentemente utilizado. Sin embargo, cuando la variable respuesta toma valores continuos (porcentajes, proporciones, o fracciones) en el intervalo unidad, los supuestos del modelo lineal no se satisfacen adecuadamente. El presente trabajo tiene por objetivo modelar el porcentaje de carbono orgánico en la hojarasca en función de las propiedades físico químicas de la misma, en la región de Teziutlán, Puebla. Para alcanzar dicho objetivo se comparan modelos de regresión suponiendo que los errores aleatorios se distribuyen, además de normales, con las distribuciones gama y beta. Se utilizó la paquetería “Zelig Multinivel” del software R en el cálculo de los estimadores de los parámetros desconocidos, los criterios de selección de modelos y los estadísticos de diagnóstico del modelo, con los que se realizó la comparación entre los modelos planteados. Los resultados apuntan a la importancia de seguir investigando en una clase más amplia de modelos.

1 Introducción

La práctica de la modelación estadística ha estado en constante cambio como resultado del desarrollo de diferentes enfoques metodológicos de la Estadística y el progreso de las Ciencias Computacionales. En los últimos decenios se han alcanzado enormes desarrollos en los resultados

analíticos del Modelo Lineal General, que incluye los modelos de Regresión. También, dentro del supuesto de normalidad de los errores, pero permitiendo la heteroscedasticidad de la varianza, ha habido considerable trabajo sobre los Modelos Lineales Mixtos, donde la estructura de la varianza está basada sobre efectos aleatorios. Estos desarrollos están permitiendo modelar muchos aspectos locales, regionales y globales de la problemática ambiental del cambio climático, que se considera el problema ambiental más importante al que se está enfrentado la humanidad en la actualidad. Una de las dos formas de provocar las reducciones de emisiones de gases de efecto invernadero, según el Protocolo de Kyoto, es la de incrementar la creación de sumideros de carbono (transferencia neta de carbono orgánico (CO_2) atmosférico a la vegetación y al suelo para su almacenamiento, proceso conocido como secuestro de carbono). Entre los diferentes tipos de sumideros (reservorios o almacenes o depósitos) de carbono que pueden ser medidos se encuentra la hojarasca. La hojarasca es toda la biomasa no viva sobre el suelo (hojas, ramas y cáscaras de frutos) en diferentes estados de descomposición. Debido a la no existencia de información sobre secuestro de carbono en sistemas forestales en el Estado de Puebla, México, y en particular, en la zona de Teziutlán, se hizo necesario iniciar los estudios investigativos pertinentes, que ha brindado información, entre otros aspectos, sobre el carbono orgánico almacenado en la hojarasca en esa zona. El propósito de este trabajo es seleccionar buenos modelos sobre el porcentaje de carbono orgánico en la hojarasca en regiones del estado de Puebla, México. En el epígrafe II se hace un breve recuento los modelos de regresión que pudieran ser utilizados y en el epígrafe III se aplican al problema planteado.

2 Modelos de regresión

El enfoque más frecuentemente utilizado en problemas de regresión es el modelo lineal mínimo cuadrático ordinario, bajo la suposición de normalidad de los errores aleatorios. Sin embargo, cuando la variable respuesta toma valores continuos (porcentajes, proporciones, o fracciones) en el intervalo unidad, los supuestos del modelo lineal no se satisfacen adecuadamente. Otros modelos de regresión bajo la suposición de que los errores aleatorios siguen otras distribuciones como la beta y la gamma se han comenzado a utilizar. La clase de los modelos de regresión beta, se introdujo por Ferrari y Cribari Neto en 2004 y es útil para modelar las variables de respuestas continuas que asumen valores en el intervalo unidad estándar abierto (0,1). Se cuenta en la actualidad con la paquetería “betareg” del Software R. Se modela para ser beta distribuida con parametrización mediante el parámetro media y la precisión (llamado phi). La estimación se realiza por máxima verosimilitud (ML). Otra clase de modelos de regresión son los modelos de Regresión Gamma Mixta. Esta clase general de modelos, consiste en modelos lineales que se expresan en función de efectos fijos, (parámetros correspondientes a toda una población o ciertos niveles repetibles de factores experimentales), y de efectos aleatorios, (parámetros correspondientes a las unidades experimentales individuales elegidos al azar de una población).

3 Modelación del porcentaje de carbono orgánico de la hojarasca

En una zona de Teziutlán. Puebla, se obtuvieron, por investigadores del Departamento de Investigaciones Agrícolas del Instituto de Ciencias de la BUAP, muestras de hojarasca en cada uno de cinco lugares diferentes o tipos de suelos (P30F, P35F, P36F, Piñonero y Yucca). Estas muestras fueron procesadas en el laboratorio para obtener el porcentaje de carbono orgánico (%Corg), el nitrógeno (N), pHdeagua, Ph de KCl de la hojarasca. Después de un análisis de selección de modelos (Oroza, 2015) se obtuvo como mejor modelo para predecir %Corg, el siguiente:

$$\text{PorcientoCorg} = \beta_0 + \beta_1 \text{pHdeagua} + \beta_2 \text{pHdeKCl} + a_j \quad (1)$$

Donde pHdeagua y pHdeKCl son las variables fijas y a_j corresponde al factor aleatorio “PER-FILES”, $j = 1, \dots, 5$ que corresponde a los niveles (P30F, P36F, P36F, Piñonero y Yucca). Los parámetros desconocidos corresponden a β_0 , β_1 , β_2 y la $var(a_j)$, la anterior nos muestra el valor de los parámetros desconocidos, que corresponden

$$\beta_0 = 18.13091, \beta_1 = 16.91178, \beta_2 = 26.22723 \text{ y } var(a_j) = 11.48457.$$

Los dos gráficos que se muestran debajo nos permiten analizar el supuesto de normalidad de los residuos. Existen dudas sobre la normalidad de los residuos; en los valores centrales los residuos están cercanos a la recta, pero sin embargo los valores de los extremos se separan de la recta

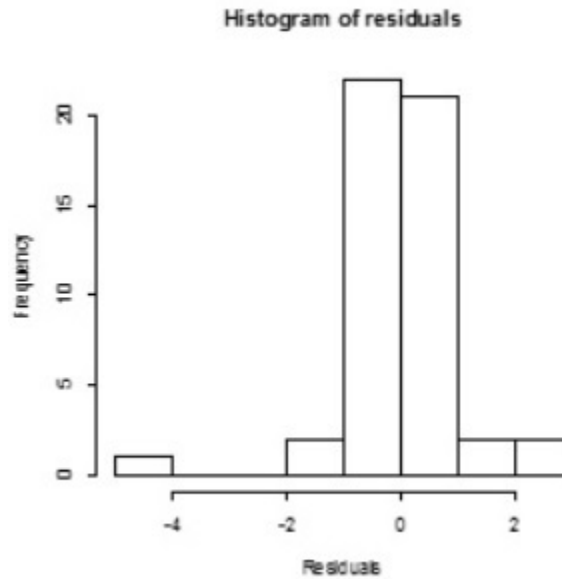


Figura 1: Histograma de los residuales

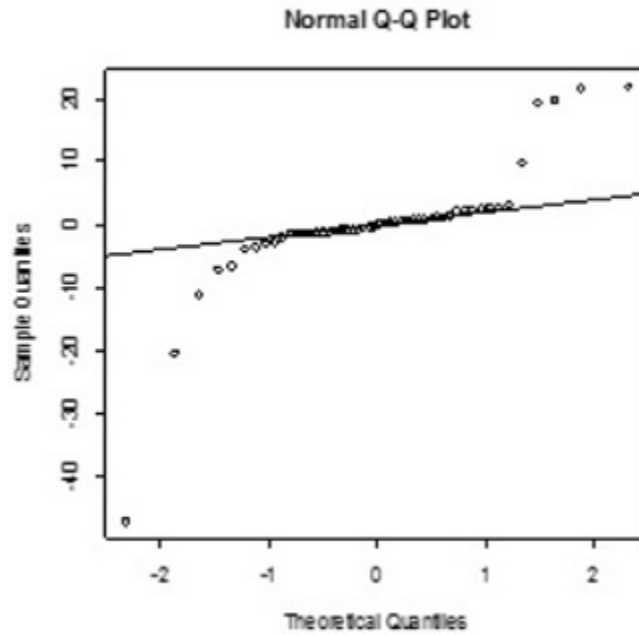


Figura 2: Normal q-q plot

Se pueden obtener otros modelos haciendo uso de la regresión beta, por tener una variable de respuesta cuyos valores están sobre el intervalo $(0, 1)$. El modelo de regresión beta es implementado por el paquete `betareg` del software R [Cribari-Neto y Zeileis, 2010] [R Development Core Team, 2013]. En el package “`betareg`” se ajustan modelos regresión beta para tasas y proporciones a través de máxima verosimilitud utilizando una parametrización con media (en función a través de una función de enlace en las covariables) y el parámetro de precisión (llamado ϕ). [packages “`betareg`”]. El modelo completo queda de la siguiente forma, donde el modelo de regresión tiene las tres variables independientes `pHdeagua`, `pHdeKCl` y `PERFIL`.

Haciendo uso del modelo de Regresión Gamma Mixta se obtuvo el modelo que se presenta continuación:

$$PorcientoCorg \sim PorcientoNT + tag(1 \mid PERFIL) \quad (2)$$

En la tabla 2, se muestra la salida de los criterios de selección. Según [Linares,2015] éste se presenta en (2)

Cuadro 1: Estimaciones del modelo de regresión beta completo.

Standardized weighted residuals 2:				
Min	1Q	Median	3Q	Max
-4.3601	-0.5182	-0.0400	0.3712	2.4377
Coefficients (mean model with logit link):				
	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-8.1262	11.5712	-0.702	0.483
porcientoNT	-0.2288	0.4865	-0.470	0.638
pHdeagua	-1.1430	0.8669	-1.318	0.187
pHdeKCl	2.9811	2.1540	1.384	0.166
PERFILP35F	-0.9397	1.2720	-0.739	0.460
PERFILP36F	0.8433	2.2126	0.381	0.703
PERFILPiñonero	0.6191	1.8957	0.327	0.744
PERFilyucca	-2.8693	2.8185	-1.018	0.309
Phi coefficients (precision model with identity link):				
	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(phi)	18.386	3.607	5.098	3.43e-07 ***

Cuadro 2: Salidas de criterios de selección de modelos en R.

AIC	BIC	logLik	deviance	df.resid
405.9	413.5	-198.9	397.9	46

Cuadro 3: Escala de residuales.

Min	1Q	Median	3Q	Max
-4.0991	-0.3174	0.0617	0.2705	46

Cuadro 4: Estimaciones efectos Aleatorios.

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
SUELO	(Intercept)	48.71440	6.9796
Residual		0.02933	0.1713

Finalmente, las estimaciones del modelo se muestran en los cuadros (5) y (4), para efectos aleatorios y fijos, respectivamente, donde se observa ver que las estimaciones de los efectos fijos son significativas.

Cuadro 5: Estimaciones efectos Fijos.

	Estimate	Std. Error	t value.	$Pr(> z)$
(Intercept)	66.84791	0.01013	6598	$< 2e^{-16}$ * **
PorcientoNT	2.09475	0.01013	207	$< 2e^{-16}$ * **

4 Conclusiones

En un primer intento, tomamos como mejor modelo, el modelo lineal mixto que está en función de pHdeagua y pHdeKCl como factores fijos y el perfil del suelo como factor aleatorio. Sin embargo, el análisis de las suposiciones a través de los gráficos de residuos sugiere que debiera seguir profundizando, por lo que se buscaron otros modelos bajo la metodología de la regresión beta y la regresión gamma mixta. Futuras investigaciones permitirán seleccionar el mejor modelo entre estos dos enfoques.

Referencias

- [1] Achim Z., Francisco C. , Bettina G., Ioannis K. , Alexandre B. Simas (2015). Package ‘betareg’ (earlier version)
- [2] Ferrari, S. L. P., Cribari-Neto, F. (2010). Beta regression in R. Journal of Applied Statistics 31(7) 799-815.
- [3] Linares F. G. y Oroza H. A. A. (2015). Gamma Mixta para Modelar el porciento de Carbono Orgánico presente en la Hojarasca en una región del Estado de Puebla, México. XXV simposio internacional de Estadística 2015. , Puebla. México.
- [4] Linares F. G. y Oroza H. A. A. (2013). Modelos Mixtos en el estudio del Carbono Orgánico de la Hojarasca en una zona de Teziutlán, Puebla, Séptima Semana Internacional de la Estadística y la Probabilidad. Pág 2-4, Puebla. México.
- [5] Oroza H, A.A.(2014). Modelos Mixtos en la determinación del Carbono Orgánico en la Hojarasca en una zona de Teziutlán, Puebla. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Benemérita Unioversidad Autónoma de Puebla.
- [6] Wagner H. B., Paulo J. R., Walms M. Z. (2012) “Regression Models with Responses on the unity Interval: specification, estimation and comparison”.

Regresión Circular Sistémica, Análisis de Credit Scoring y Calentamiento Global

Fernando Gustavo Isa Massa

ferim74@yahoo.com.ar

Universidad Tecnológica Nacional-Facultad Regional Tucumán

Resumen

El presente modelo de Estadística Circular es una de las deducciones que realicé con el fin de lograr , y lo hice, una cierta cantidad de modelos matemáticos para el financiamiento colectivo en mi país Argentina y en toda latinoamerica. Es que la estadística circular se presenta como un nuevo paradigma de las estadísticas y su carácter de períodos en formato reloj o brújula es aplicable a muchos problemas de las matemáticas y generales. Para la investigación que presento uso un nuevo paradigma de la estadística circular que desarrolle que es el período por ciclos. Este nuevo paradigma funciona para muchos problemas donde el experimento se desarrolla en ciclos que pueden ser como ejemplo: el porcentaje de créditos pagados para el credit scoring o el límite de estudio para modelos que utilizan variables como el aumento de temperatura de la superficie terrestre en el problema del calentamiento global. Es que parte de mi investigación para las utilidades de mi modelo de estadística circular es la predicción de variables útiles al estudio del calentamiento global. El credit scoring se presenta como un método válido para saber a quienes otorgar un crédito en el financiamiento colectivo. Mi modelo se parte de uno a cuatro cuadrantes del círculo con una probabilidad para cada cuadrante y una total para el modelo que es una media de las probabilidades de los cuadrantes. El mismo es una regresión con la característica que se puede usar de una a varias variables de estudio, que serían los predictores y de uno a cuatro cuadrantes según el problema en cuestión y los datos disponibles. Además es importante hacer notar que mi modelo tiene dos variantes a usar según el problema en cuestión haciendo al mismo muy flexible. Estas variantes dependen en que si el problema es cercano a los límites del ciclo la probabilidad será alta para una variante y lo opuesto con otras funciones trigonométricas para la segunda variante.

Palabras claves: Estadística circular, probabilidad, trigonometría, financiamiento colectivo, credit scoring, Calentamiento global.

1 Credit Scoring

Teorema 1. *Regresión Circular Sistémica.*

Si $n_i \in \mathbb{N}, \alpha \in (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}), 0 \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}, \alpha \in (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_2}), \frac{\pi}{2} \leq \alpha_i \leq \pi, \alpha \in (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_3}), \pi \leq \alpha_i \leq \frac{3\pi}{2}, \alpha \in (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_4}), \frac{3\pi}{2} \leq \alpha_i \leq 2\pi$

$$\text{entonces, } S = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \sin \alpha_i}{n_1 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}} + \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \cos \alpha_i}{n_2 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}} \\ + \frac{\sum_{i=1}^{n_3} \sin \alpha_i}{n_3 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}} + \frac{\sum_{i=1}^{n_4} \cos \alpha_i}{n_4 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}} \\ P_s = \frac{S}{4}, \quad 0 < P_s \leq 1$$

Demostración 1

$$\text{Para primer Cuadrante, } \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{-\cos \frac{\pi}{2} + \cos(0)}{\sin \frac{\pi}{2}} = 1$$

Se demuestra también para el cociente en n

$$\text{Para segundo Cuadrante, } \frac{1}{\cos \pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \pi} = 1$$

$$\text{Para tercer Cuadrante, } \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2}} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{-\cos \frac{3\pi}{2} + \cos \pi}{\sin \frac{3\pi}{2}} = 1$$

$$\text{Para cuarto Cuadrante, } \frac{1}{\cos 2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2}}{\cos 2\pi} = 1$$

$$P_s = \frac{4}{4} = 1$$

Demostración 2

Aplico límite en los extremos

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \sin \alpha_i}{n_1 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$

Este cuadrante tiene como extremo superior a $\frac{\pi}{2}$

$$+ \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \cos \alpha_i}{n_2 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$

$$+ \lim_{\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sum_{i=1}^{n_3} \sin \alpha_i}{n_3 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n_4} \cos \alpha_i}{n_4 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}} = 1$$

Para cada cuadrante aplico su límite superior. Su suma y después la media es igual a la unidad. Aplico límite inferior en los cuadrantes

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \sin \alpha_i}{n_1 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$

Este cuadrante tiene como extremo inferior a 0
Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplico L'Hopital y obtengo 1

$$+ \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \cos \alpha_i}{n_2 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplico L'Hopital y obtengo 1

$$+ \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\sum_{i=1}^{n_3} \sin \alpha_i}{n_3 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplico L'Hopital y obtengo 1

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sum_{i=1}^{n_4} \cos \alpha_i}{n_4 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}} = 4$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplico L'Hopital y obtengo 1

$$P_s = \frac{4}{4} = 1$$

Para cada cuadrante aplico su límite inferior. Su suma y luego media es igual a la unidad.

Corolario 1. *Para un centro de masas,*

$$\overline{C} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \alpha_j \quad \overline{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin \alpha_j$$

Longitud Media,

$$\overline{R} = \sqrt{\overline{C}^2 + \overline{S}^2}$$

Desviación Estándar,

$$V = \sqrt{-2 \ln \overline{R}}$$

Corolario 2. Límite Superior

El límite superior de cada cuadrante tiende a 1 para sus valores extremos

Corolario 3. Límite Inferior

El límite inferior de cada cuadrante tiende a 1 para sus valores inferiores

Lema 1. Primer Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} \sin \alpha_i}{n_1 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$
$$0 < P_1 \leq 1$$

Lema 2. Segundo Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_2} \cos \alpha_i}{n_2 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$
$$0 < P_2 \leq 1$$

Lema 3. Tercer Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_3} \sin \alpha_i}{n_3 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$
$$0 < P_3 \leq 1$$

Lema 4. Cuarto Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_4} \cos \alpha_i}{n_4 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$
$$0 < P_4 \leq 1$$

Lema 5. Segundo Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad para varios predictores α , β , y otros

Definición 1. A partir de los centros de masa llego a la importante longitud media. La desviación estándar es una consecuencia de ello. A partir del estadístico R.

Definición 2. R es un estadístico importante en estadística circular. Por su cercanía o no a la unidad o a cero.

Definición 3. Si las direcciones $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ están agrupadas luego $R=1$
Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ están dispersas $R=0$.

Ejemplo 1. Credit Scoring

Para el crecimiento y desarrollo sostenido de toda latinoamérica se requieren de inversiones y capital de trabajo. Para que estas inversiones tengan el mejor rendimiento y generen trabajo a una tasa inflacionaria controlada, es preciso encontrar de modelos matemáticos que le den mejor destino a las inversiones. Para ello presenté en Chile y fué aceptado un modelo en teoría de colas para saber el retorno de pago y también el llamado credit scoring. Este último que presento a su prestigioso congreso en la forma de regresión circular sistémica, será de gran importancia al financiamiento colectivo que pretendo para la región, ya que me dice a quienes conviene prestar el dinero juntado en cantidad y forma voluntaria por ciudadanos e inversores nacionales y extranjeros para empresas nuevas y actuales y obra pública. Para ello saqué de un informe del banco central de la república Argentina sobre impagos en privados en los últimos años. Este informe lo encuentro en [3, pag. 15] se puede ver los impagos de créditos privados.

Solución con Regresión Circular Sistémica

Serie de Datos de Impagos Banco Central de la República Argentina

Período	Porc. Impago
Dic. 05	7,6
Dic. 06	4,5
Dic. 07	3,2
Dic. 08	3,1
Dic. 09	3,5
Dic. 10	2,1
Sep. 11	1,4
Dic. 11	1,4
Ago. 12	1,7
Sep. 12	1,7

Para lograr mayor desempeño en el riesgo de los créditos se emplea el credit scoring para obtener un puntaje de predicción de riesgo teniendo en cuenta variables como: historial de pago de cada cliente, inflación y otros. Para este caso uso estadística circular en otro paradigma distinto a los dos conocidos: reloj, brújula. Porque el empleo de reloj sugiere tiempo y el de brújula, espacio. Por ello mi nuevo paradigma emplea Ciclos como forma de cálculo. Entonces para créditos impagos el ciclo será el porcentaje con límites inferior y superior en 0 y 100, respectivamente. Luego el ciclo vuelve a empezar haciendo pensar que el período del círculo es acorde a este problema o nuevo paradigma para la estadística circular que presento al congreso por primera vez al mundo. Entonces transformando cada porcentaje al sistema del círculo obtengo el cuadrante al que pertenece y luego agrupo para calcular en cada cuadrante. La probabilidad que obtengo al final la transformo a porcentaje de nuevo con lo cual hago una predicción del año o período nuevo:

$$(7,6)(180)/(3,14) = 435,69435,69/100 = 4,3569 \rightarrow \alpha = 32,12 \text{ Primer Cuadrante}$$

$$(4,5)(180)/(3,14) = 257,96257,96/100 = 2,5796 \rightarrow \alpha = 232,164 \text{ Tercer Cuadrante}$$

$$(3,2)(180)/(3,14) = 183,44183,44/100 = 1,8344 \rightarrow \alpha = 165,096 \text{ Segundo Cuadrante}$$

$$(3,1)(180)/(3,14) = 177,71177,71/100 = 1,7771 \rightarrow \alpha = 159,94 \text{ Segundo Cuadrante}$$

$$(3,5)(180)/(3,14) = 200,64200,64/100 = 2,0064 \rightarrow \alpha = 180,576 \text{ Tercer Cuadrante}$$

$$(2,1)(180)/(3,14) = 120,38120,38/100 = 1,2038 \rightarrow \alpha = 108,342 \text{ Segundo Cuadrante}$$

$$(1, 4)(180)/(3, 14) = 80, 2580, 25/100 = 0, 8025 \longrightarrow \alpha = 72, 225 \text{ Primer Cuadrante}$$

$$(1, 4)(180)/(3, 14) = 80, 2580, 25/100 = 0, 8025 \longrightarrow \alpha = 72, 225 \text{ Primer Cuadrante}$$

$$(1, 7)(180)/(3, 14) = 97, 4597, 45/100 = 0, 9745 \longrightarrow \alpha = 87, 705 \text{ Primer Cuadrante}$$

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{\sin(32, 12) + \sin(72, 225) + \sin(87, 705) + \sin(72, 225)}{4 \sin(87, 705)} + \\ &\quad \frac{\cos(165, 096) + \cos(159, 94) + \cos(108, 342)}{3 \cos(165, 096)} + \\ &\quad \frac{\sin(232, 164) + \sin(180, 576)}{2 \sin(232, 164)} \\ &= \frac{0, 8595 + 0, 7658 + 0, 5063}{3} = 0, 7105 \end{aligned}$$

Al resultado de la probabilidad hago un producto con 100. Los dos ceros debido al comportamiento de los resultados de probabilidad. Para luego transformar al sistema adecuado.

$$\begin{aligned} &= (0, 7105)(100) = 71, 05 \\ &= (71, 05)(3, 14)/(180) = 1, 24 \lesssim 1, 7 \end{aligned}$$

La predicción de 1,24 se acerca al valor de porcentaje de 1,7 para el último período de la serie de datos del banco central de la República Argentina.

$$\text{Serie} = 1, 7 \quad \text{Pred} = 1, 24$$

$$\overline{C} = -0, 2336 \quad \overline{S} = 0, 4185 \quad R = 0, 47928$$

Probar

$$\text{Pred} - V \leq \text{Serie} \leq \text{Pred} + V$$

$$V = 1, 2128 \quad 0, 03 \leq 1, 7 \leq 2, 45$$

La predicción se acerca al valor de la serie en porcentaje en el cálculo inicial y mas aún cuando se calcula los rangos o intervalos con la desviación estándar. Entonces este método de predicción es acertado para situaciones donde hay cierta estabilidad financiera y con inflación creciente y tasas de morosidad en históricos de pago variables.

2 Calentamiento Global

Teorema 2. *Regresión Circular Sistémica Segunda Forma.*

Si $n_i \in \mathbb{N}, \alpha \in (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}), 0 \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}, \alpha \in (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_2}), \frac{\pi}{2} \leq \alpha_i \leq \pi, \alpha \in (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_3}), \pi \leq \alpha_i \leq \frac{3\pi}{2}, \alpha \in (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_4}), \frac{3\pi}{2} \leq \alpha_i \leq 2\pi$

$$\text{entonces, } S = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \cos \alpha_i}{n_1 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}} + \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \sin \alpha_i}{n_2 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}} \\ + \frac{\sum_{i=1}^{n_3} \cos \alpha_i}{n_3 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}} + \frac{\sum_{i=1}^{n_4} \sin \alpha_i}{n_4 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}} \\ P_s = \frac{S}{4}, \quad 0 \leq P_s \leq 1$$

Demostración

Aplico límite inferior en los cuadrantes

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \cos \alpha_i}{n_1 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$

Este cuadrante tiene como extremo inferior a 0

$$+ \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \sin \alpha_i}{n_2 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$

$$+ \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\sum_{i=1}^{n_3} \cos \alpha_i}{n_3 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sum_{i=1}^{n_4} \sin \alpha_i}{n_4 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}} = 4$$

$$P_s = \frac{4}{4} = 1$$

Para cada cuadrante aplico su límite Superior. Su suma es igual a la unidad.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \cos \alpha_i}{n_1 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$

Este cuadrante tiene como extremo Superior a $\frac{\pi}{2}$
Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplico L'Hopital y obtengo 1

$$+ \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\sum_{i=1}^{n_2} \sin \alpha_i}{n_2 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplico L'Hopital y obtengo 1

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sum_{i=1}^{n_3} \cos \alpha_i}{n_3 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplico L'Hopital y obtengo 1

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n_4} \sin \alpha_i}{n_4 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}} = 4$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplico L'Hopital y obtengo 1

$$P_s = \frac{4}{4} = 1$$

Para cada cuadrante aplico su límite Superior. Su suma es igual a la unidad.

Corolario 4. *Para un centro de masas,*

$$\overline{C} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \alpha_j \quad \overline{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin \alpha_j$$

Longitud Media,

$$\overline{R} = \sqrt{\overline{C}^2 + \overline{S}^2}$$

Desviación Estándar,

$$V = \sqrt{-2 \ln \overline{R}}$$

Corolario 5. *Límite Superior*

El límite superior de cada cuadrante tiende a 0 para sus valores extremos

Corolario 6. *Límite Inferior*

El límite inferior de cada cuadrante tiende a 1 para sus valores inferiores

Lema 6. Primer Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} \cos \alpha_i}{n_1 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$

Lema 7. Segundo Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_2} \sin \alpha_i}{n_2 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$

Lema 8. Tercer Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_3} \cos \alpha_i}{n_3 \max_{x \in \alpha_i} \{\cos \alpha_i\}}$$

Lema 9. Cuarto Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_4} \sin \alpha_i}{n_4 \max_{x \in \alpha_i} \{\sin \alpha_i\}}$$

Lema 10. Segundo Cuadrante Límite Superior

Es una Probabilidad para varios predictores α , β , y otros

Definición 4. A partir de los centros de masa llego a la importante longitud media. La desviación estándar es una consecuencia de ello. A partir del estadístico R.

Definición 5. R es un estadístico importante en estadística circular. Por su cercanía o no a la unidad o a cero.

Definición 6.

Si las direcciones $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ están agrupadas luego $R=1$
 Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ están dispersas $R=0$.

Dadas las actuales y conocidas variables y resultados visibles que se observan del cambio climático, dediqué mucho de mi esfuerzo para demostrar que la segunda forma de mi regresión circular sistémica es la adecuada para predecir, entre intervalos, las distintas variables climáticas para saber sus consecuencias y tomar medidas los gobiernos, empresas y la sociedad en general para mejorar la situación. Para ello me baso en los resultados obtenidos por un grupo de investigadores de Naciones Unidas ver [4, pág. 77 Tabla 5.1] , ganadores del premio Nobel de la Paz en 2007. Los resultados de Naciones Unidas y los míos son parecidos para variables que tienen el perfil de mejorar la situación de calentamiento global. A continuación paso a explicar tres ejemplos

Ejemplo 2. Calentamiento Global

Para el promedio mundial del aumento de la temperatura respecto de los niveles preindustriales en condiciones de equilibrio basándose en una estimación óptima de la sensibilidad climática.

Período	C (en grados)
2000-2015	2,0-2,4
2000-2020	2,4-2.8
2010-2030	2.8-3,2
2020-2060	3,2-4,0
2050-2080	4,0-4,9
2060-2090	4,9-6,1

$$((2)(180))/(3,14) = 103,18 \rightarrow \text{Segundo Cuadrante}$$

$$2,0 - 2,4 \rightarrow \alpha = 114,650$$

Lo mismo para los otros datos de la serie.

$$\frac{\overbrace{\sin(114,65) + \sin(123,82) + \sin(144,46) + \sin(165,095)}^{\text{Seg. Cuad.}}}{4 \sin(114,650)} + \underbrace{1}_{\text{Un solo dato Tercer Cuad.}} = 1,7092$$

$$P_s = (1,7092)/2 = 0,8546$$

$$(0,8546)(100) = 85,46$$

$$((85,46)(3,14))/(180) = 1,49$$

$$\overline{C} = -0,7299 \quad \overline{S} = 0,4268 \quad R = 0,8454$$

Probar

La serie termina con este valor : $4,0 + 1,49 = 5,49$

$$Pred = 5,49$$

$$Pred - V \leq Serie \leq Pred + V$$

$$V = 0,5796, \text{ Transformado es } V = 1,011$$

El intervalo de temperatura que se predice es : 4,479-6,501.

Muy parecido al de Naciones Unidas : 4,9 -6,1

Ejemplo 3.

Concentración de CO2 equivalente en el punto de estabilización, incluidos los GEI y aerosoles (2005=375 ppm)

Período	ppm
2000-2015	445- 490
2000-2020	490- 535
2010-2030	535- 590
2020-2060	590- 710
2050-2080	710- 855
2060-2090	855-1130

$$((445)(180))/(3,14) = 25509,55 \rightarrow \text{Tercer Cuadrante}$$

$$445 - 490 \rightarrow \alpha = 213,96$$

Lo mismo para los otros datos de la serie.

$$\frac{\overbrace{\sin(272,01) + \sin(330,05)}^{\text{Cuarto Cuad.}}}{2 \sin(272,01)} + \overbrace{\text{Un solo dato Primer Cuad.}}^1$$

$$+ \frac{\overbrace{\cos(213,96) + \cos(195,76)}^{\text{Tercer Cuad.}}}{2 \cos(195,76)} = 2,68$$

$$P_s = \frac{2,68}{3} = 0,8933 \quad (0,8933)(10000) = 8933 \quad ((8333,33)(3,14))/(180) = 155,83$$

Tomo cuatro dígitos en el producto por la referencia a la cantidad de dígitos de ppm mas uno.

$$\text{La serie termina con este valor : } Pred = 710 + 155,83 = 865,83$$

$$\overline{C} = -0,0269 \quad \overline{S} = -0,3346 \quad R = 0,3356$$

$$Pred - V \leq Serie \leq Pred + V$$

$$V = 1,4777, \text{ Producto por } 1000. \text{ Transformado es } V = 25,77$$

El intervalo de temperatura que se predice es : 840,06- 891,6

Muy parecido al de Naciones Unidas : 855 -1130

Ejemplo 4.

Concentración en el punto de estabilización (2005=379 ppm)

Período	ppm
2000-2015	350-400
2000-2020	400-440
2010-2030	440-485
2020-2060	485-570
2050-2080	570-660
2060-2090	660-790

$$((350)(180))/(3,14) = 20063,69 \longrightarrow \text{Segundo Cuadrante}$$

$$350 - 400 \longrightarrow \alpha = 91,43$$

Lo mismo para los otros datos de la serie.

$$\frac{\overbrace{\sin(91,93) + \sin(155,92)}^{\text{Seg. Cuad.}}}{2 \sin(91,93)} + \underbrace{\text{Un solo dato Primer Cuad.}}_1$$

$$+ \frac{\overbrace{\cos(207,51) + \cos(265,56)}^{\text{Tercer Cuad.}}}{2 \cos(207,51)} = 2,5$$

$$P_s = \frac{2,5}{3} = 0,83333, (0,83333)(10000) = 8333,3 ((8333,33)(3,14))/(180) = 145,37$$

Tomo cuatro dígitos en el producto por la referencia a la cantidad de dígitos de ppm mas uno.

$$\text{La serie termina con este valor : } Pred = 570 + 145,37 = 715,37$$

$$\overline{C} = 0,1982 \quad \overline{S} = 0,143 \quad R = 0,243$$

$$Pred - V \leq Serie \leq Pred + V$$

$$V = 1,682, \text{ Producto por } 1000. \text{ Transformado es } V = 29,34$$

El intervalo de temperatura que se predice es : 686,03-744,71
Muy parecido al de Naciones Unidas : 660 -790

Agradecimientos

- 1.- Dios y al pueblo Tucumano
- 2.- Padre Galland, Dr. Pino
- 3.- Cdor. Lopez, Ing. Adra
- 4.- Mi Familia

- 5.- Mis amigos de Secundaria, Acción Católica, Universidad, Trabajos y todos los que hice en mi vida
- 6.- Dra. Mattalia, y Terapeutas
- 7.- Mis Docentes

Referencias

- [1] Leithold, L. El Cálculo con Geometría Analítica . ECCGA, México , 1992.
- [2] Walpole, R. Myers, R. Myers, S. Ye, K. Probabilidad y Estadísticas para ingeniería y ciencias. Prentice Hall, México , 2007.
- [3] Informe sobre Bancos - BCRA, www.bkra.gob.ar.
- [4] Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático, 2008 - ISBN 92-9169-322-7. Correo electrónico: IPCC-Sec@wmo.int

Un portafolio óptimo con medida de riesgo coherente: Conditional Value at Risk (CVaR)

María Teresa V. Martínez Palacios
mpmtv@yahoo.com.mx
E.S.A.-U.A.E.H.

Héctor Alonso Olivares Aguayo
hectorlivares@hotmail.com
E.S.E.-I.P.N.

Ambrosio Ortiz Ramírez
amortiz@ipn.mx
E.S.E.-I.P.N.

Resumen

Este trabajo propone una metodología para construir un portafolio óptimo con una medida de riesgo coherente: Valor en Riesgo Condicional (CVaR). El problema a resolver consiste en minimizar el CVaR de un portafolio compuesto por n activos. Dada la complejidad de la función objetivo asociada al CVaR se incluye una función auxiliar que permite transformar tal función objetivo en otra que depende de los pesos de los activos del portafolio y de la función auxiliar. Bajo estas condiciones hay un caso particular en el cual la minimización del CVaR es un problema de optimización manejable: cuando la función de densidad de probabilidad conjunta de los rendimientos de los activos del portafolio está representada en un conjunto de escenarios. Esto suele ser el tipo de datos que se encuentran en la práctica: podemos generar escenarios de pérdidas y ganancias de un portafolio, lo cual permite minimizar el CVaR por el método de simulación histórica.

1 Introducción

La optimización de portafolio es uno de los enfoques más conocidos en la selección de portafolios de inversión. La primera técnica para resolver el problema de selección de portafolio fue desarrollada por Harry Markowitz, 1952 [7]. En el modelo denominado modelo de optimización de portafolio en media-varianza (OMV), el rendimiento del portafolio se mide por la rendimiento esperado del portafolio y el riesgo asociado se mide por la varianza de los rendimientos de portafolio.

La varianza como medida de riesgo presenta algunas desventajas. Al controlar la varianza no sólo conduce una baja desviación del rendimiento esperado en el lado negativo de la distribución

de pérdidas, sino también en el lado positivo [13]. Por lo tanto, algunas medidas de riesgo se han propuesto como alternativa para reemplazar la varianza tales como el Valor en Riesgo (VaR) el cual modela y mide el riesgo en términos de percentiles de la distribución de pérdidas. En lugar de basarse en valores negativos y positivos del rendimiento esperado, considera sólo el lado negativo del rendimiento esperado como riesgo y representa la pérdida máxima pronosticada con un nivel de confianza particular (por ejemplo, 99%) durante un cierto periodo de tiempo (por ejemplo, un día) [4, 10].

El VaR como medida de riesgo es muy popular. Sin embargo, tiene inconvenientes y características indeseables que limitan su uso [1, 9], como la falta del subaditividad; es decir, VaR de dos portafolios puede ser mayor que la suma de los VaRs de cada portafolio. Además, el VaR es no convexo y suave, además de tener varios mínimos locales, lo cual es un problema puesto que se busca un mínimo global [4, 9]. Así se han desarrollado medidas de riesgo alternativas como el Valor en Riesgo Condicional (CVaR)* que se interpreta como el valor de la esperanza condicional de la distribución de pérdida dado que excede el VaR [2]. VaR implica que ¿Cuál es la pérdida máxima que tiene el portafolio?, mientras que CVaR: ¿Cómo se espera el incurrir en pérdidas bajo condiciones extremas?. Experimentos numéricos muestran que el CVaR mínimo ordinariamente conduce a soluciones óptimas cercanas a un VaR mínimo, ya que VaR nunca excede CVaR [10]. CVaR tiene mejores características que el VaR. Es un problema de optimización convexo, y por lo tanto es fácil optimizar [4]. Está demostrado que se pueden utilizar técnicas de programación lineal para optimización del CVaR como medida de riesgo [10, 7].

El objetivo central de este trabajo es la presentar los conceptos de riesgo, su clasificación en un marco simple con su relación con lo que es una medida de riesgo coherente, asimismo proporcionar las bases teóricas de la metodología de optimización de un portafolio con el CVaR como función objetivo en el contexto de [10].

Este trabajo está organizado como sigue. En la siguiente sección se presenta una introducción al concepto de riesgo, una clasificación de los riesgos y medidas coherentes de riesgo. En la sección 3 se plantea el problema de optimización del CVaR, por último, se concluye en la sección 4.

2 Riesgo, clasificación y medidas coherentes de riesgo

Proviene del latín *risicare* que significa atreverse [6]. La definición más común de riesgo es: exposición a la posible pérdida, daño, o alguna otra circunstancia desafortunada. En el siglo XVI ya se tenía una concepción moderna del riesgo, ya que se definía como una contingencia que podía presentarse. Posteriormente, a mediados del siglo XX los conceptos riesgo e incertidumbre se trataron de manera indistinta; sin embargo, actualmente existe una diferencia muy clara entre incertidumbre y riesgo; mientras la incertidumbre es subjetiva y no medible, lo que implica una distribución de frecuencia desconocida, el riesgo es cuantificable y objetivo, con una distribución de frecuencias conocida.

Otro enfoque entre incertidumbre y riesgo es el expuesto en [5], quien define la incertidumbre, riesgo y la medición de éstos como:

- Incertidumbre: Falta de certidumbre, esto es, la existencia de más de una posibilidad. El verdadero resultado (valor, estado) no es conocido.
- Medición de la incertidumbre: Un conjunto de probabilidades asignado a un conjunto de posibilidades. Ejemplo: existe un 80 % de que los alumnos aprueben el curso, 10 % de que reprueben.
- Riesgo: Es un estado de la incertidumbre donde algunas posibilidades pueden ser pérdidas, catástrofes, o algún resultado indeseable.

* CVaR también se conoce como Expected Shortfall, Tail-VaR.

- **Medición del riesgo:** Un conjunto de posibilidades el cual se mapea aun conjunto de probabilidades y a un conjunto de cuantificación de pérdidas. Ejemplo: existe un 20 % de probabilidad de que el IPyC disminuya a los niveles de octubre 2008 con una pérdida generalizada de 500 billones de pesos.

En este contexto se afirma que se puede tener incertidumbre sin riesgo, pero no riesgo sin incertidumbre [5]. Se puede tener incertidumbre en cuanto al ganador de un partido de fútbol, pero si no apostamos no existe el riesgo de alguna pérdida.

Otra clasificación de riesgos que se encuentra en la práctica de la administración de riesgos es la siguiente (Véase [3]) :

1. – **Riesgos cuantificables**, que son aquellos para los cuales es posible conformar bases estadísticas que permitan medir sus pérdidas potenciales, y dentro de estos se encuentran los siguientes:
 - a. – **Riesgos discrecionales**, que son aquellos resultantes de la toma de una posición de riesgo, Tipos: riesgo de crédito, liquidez y de mercado, de extensión.
 - i) **Riesgo de crédito o crediticio.** Se define como la pérdida potencial por la falta de pago de un acreditado o contraparte en las operaciones que efectúan los Organismos de Fomento y Entidades de Fomento, incluyendo las garantías reales o personales que les otorguen, así como cualquier otro mecanismo de mitigación utilizado por dichos Organismos de Fomento y Entidades de Fomento.
 - ii) **Riesgo de liquidez.** Se define como la pérdida potencial por la imposibilidad o dificultad de renovar pasivos o de contratar otros en condiciones normales para los Organismos de Fomento y Entidades de Fomento, por la venta anticipada o forzosa de activos a descuentos inusuales para hacer frente a sus obligaciones o bien, por el hecho de que una posición no pueda ser oportunamente enajenada, adquirida o cubierta mediante el establecimiento de una posición contraria equivalente.
 - iii) **Riesgo de mercado.** Se define como la pérdida potencial por cambios en los Factores de Riesgo que inciden sobre la valuación o sobre los resultados esperados de las operaciones activas, pasivas u Operaciones Causantes de Pasivo Contingente, tales como tasas de interés, tipos de cambio e índices de precios, entre otros.
 - iv) **Riesgo de extensión.** Se define como la pérdida potencial por la posibilidad de no cubrir la totalidad de los créditos con los pagos establecidos, como consecuencia de la obligación que tienen el Infonavit y Fovissste de eximir al acreditado de su pago alcanzado al vencimiento del plazo del crédito.
 - b. – **Riesgos no discrecionales**, son aquellos resultantes de la realización de sus actividades, pero que no son producto de la toma de una posición de riesgo, tales como el **riesgo operacional**, que se define como la pérdida potencial por fallas o deficiencias en los controles internos, por errores en el procesamiento y almacenamiento de las operaciones o en la transmisión de información, así como por resoluciones administrativas y judiciales adversas, fraudes o robos, y comprende, entre otros, al riesgo tecnológico y al riesgo legal, en el entendido de que:
 - i) El **riesgo tecnológico** se define como la pérdida potencial por daños, interrupción, alteración o fallas derivadas del uso o dependencia en el hardware, software, sistemas, aplicaciones, redes y cualquier otro canal de distribución de información en la prestación de servicios con los clientes o derechohabientes de los Organismos de Fomento y Entidades de Fomento.

- ii) El **riesgo legal** se define como la pérdida potencial por el incumplimiento de las disposiciones legales y administrativas aplicables, la emisión de resoluciones administrativas y judiciales desfavorables y la aplicación de sanciones, en relación con las operaciones que los Organismos de Fomento y Entidades de Fomento llevan a cabo.

2. – **Riesgos no cuantificables**, que son aquellos derivados de eventos imprevistos para los cuales no se puede conformar una base estadística que permita medir las pérdidas potenciales.

De esta manera, el riesgo se puede definir como la variación del valor de un portafolio de inversión, de crédito o de seguros con respecto a su valor actual, debido a variaciones en los factores que los componen. Eso significa que, a diferencia de lo que se considera generalmente, tanto las desviaciones positivas y negativas del valor del portafolio se consideran riesgo, lo que se conoce comúnmente como volatilidad de los factores.

2.1 Medidas coherentes de riesgo

Existen situaciones a las cuales se asocia un riesgo mayor en comparación con otras situaciones. Se trata entonces del problema de encontrar una forma de medir el riesgo o de encontrar una forma de cuantificarlo. La medición del riesgo no es un tema nuevo y ya se han propuesto varias formas de hacerlo. Atendiendo a la definición de riesgo como la desviación de un resultado esperado, se proporciona como ejemplos de medidas de riesgo a la varianza, a la desviación estándar, a la desviación media absoluta, etc. Dado un conjunto de observaciones (por ejemplo de rendimientos de algún activo) la varianza representa la media aritmética del cuadrado de las desviaciones respecto a la media, mientras que la desviación estándar es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Por su parte, la desviación media absoluta es el promedio aritmético del valor absoluto de las desviaciones respecto a la media. Las tres medidas nos indican cuánto se desvían las observaciones de su media. Surgen entonces dos preguntas: ¿cuál medida de riesgo es mejor? ¿cómo sería una medida de riesgo apropiada? Investigaciones recientes han encontrado propiedades deseables que debería cumplir una medida de riesgo. Para introducir los axiomas de coherencia se enuncia una definición formal de medida de riesgo.

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y el horizonte de riesgo T . Denotemos por $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a los conjuntos de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F})$, que son casi seguramente finitos. Los riesgos financieros son representados por un conjunto $\mathcal{M} \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de variables aleatorias, que se interpretan como pérdidas de un portafolio sobre un horizonte de tiempo T . El horizonte de tiempo es libre, es decir sin especificar, aunque en la práctica siempre es finito. Se supone que $\mathcal{M}$ es un cono convexo, es decir, si $L_1 \in \mathcal{M}$ y $L_2 \in \mathcal{M}$ implica que $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$ y que $\lambda L_1 \in \mathcal{M}$ para cada $\lambda > 0$. Las medidas de riesgo son funciones reales $\varrho \rightarrow \mathbb{R}$ definidos en los conos de variables aleatorias que satisfacen ciertas propiedades. Se interpretará $\varrho(L)$ como el monto de capital que se deberá agregar a una posición con pérdida L . La interpretación de L difiere de aquella propuesta en [1], donde la variable aleatoria $L \in \mathcal{M}$ es interpretada como el valor futuro (en lugar de pérdidas) de una posición que se tiene actualmente, también las tasas de interés son cero para establecer las medidas de riesgo. Una medida de riesgo ϱ es coherente de acuerdo a Artzner [1] si satisface cuatro propiedades:

1. **Invarianza ante traslaciones.** Para toda $L \in \mathcal{M}$ y cada $l \in \mathbb{R}$ se cumple que $\varrho(L+l) = \varrho(L)+l$. Una medida de riesgo invariante ante traslaciones implica que si tenemos un activo con riesgo y formamos una cartera agregando un activo libre de riesgo, el riesgo de la cartera disminuye en la cantidad del activo libre de riesgo.

2. **Subaditividad.** Para toda $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$ se tiene que $\varrho(L_1 + L_2) \leq \varrho(L_1) + \varrho(L_2)$. La idea principal de esta propiedad es que “una unión no crea riesgo extra”, esto refleja la idea de que el riesgo se puede reducir diversificando los activos.
3. **Homogeneidad positiva.** Para toda $L \in \mathbb{R}$ y cada $\lambda > 0$ se cumple que $\varrho(\lambda L) = \lambda \varrho(L)$. En este caso, cuando una riqueza bajo riesgo representada por un activo es multiplicada por un factor positivo, el riesgo y la incertidumbre crecen en la misma proporción. La falta de liquidez de los mercados financieros, resta realismo a esta propiedad porque en este caso no se tendría una relación lineal. Esta propiedad es fácilmente justificada si se supone subaditividad, ya que esta implica que:

$$\varrho(nL) = \varrho(L + \dots + L) = n\varrho(L)$$

Dado que no hay diversificación entre las pérdidas de este portafolio es natural que la desigualdad anterior se convierta en igualdad, de donde surge entonces la homogeneidad positiva. Observe que subaditividad y homogeneidad positiva implica que la medida de riesgo ϱ sea convexa en $\mathcal{M}$.

4. **Monotonía.** Para toda $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$ tal que $L_1 \leq L_2$ entonces se cumple casi seguramente que $\varrho(L_1) \leq \varrho(L_2)$.

La varianza, desviación estándar y desviación media absoluta ninguna resulta ser una medida coherente. La varianza sólo cumple subaditividad, mientras que la desviación estándar y la desviación media absoluta cumplen con ser subaditivas y tener homogeneidad positiva pero no con la monotonía ni con ser invariantes ante traslaciones.

3 Planteamiento del problema de optimización del CVaR

Considere activos $S_1, \dots, S_n, n \geq 2$ con rendimientos aleatorios. Suponga que μ_i denota el rendimiento esperado del activo S_i , y también considere x_i como la proporción de participación en el i -ésimo activo. Se representa el rendimiento esperado del portafolio resultante x como sigue:

$$E[x] = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n = \mu^T x. \quad (1)$$

Asimismo, se supone que el conjunto de portafolios factibles es un conjunto no vacío poliédrico representado por $\Omega = \{x | Ax = b, Cx \geq d\}$ donde A es una matriz de $m \times n$, b es un vector de dimensión m , C es una matriz de $p \times n$ y d es un vector de dimensión p . En particular, una de las restricciones al conjunto Ω es $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Sea $f(x, y)$ la función de pérdida cuando se elige el portafolio x de un conjunto de portafolios factibles, y es la realización de los eventos aleatorios (el vector de los rendimientos de los n activos). Considere las pérdidas de los rendimientos del portafolio, $f(x, y)$, como el negativo del rendimiento del portafolio, que es una función convexa (lineal) de las variables del portafolio x :

$$f(x, y) = -y^T x = -[y_1 x_1 + \dots + y_n x_n]. \quad (2)$$

Suponga que el vector y aleatorio tiene una función de densidad de probabilidad denotado por $p(y)$. Para un vector de decisión fijo x , la función de distribución acumulada de la pérdida asociada con ese vector se calcula como sigue:

$$\beta(x, \gamma) = \int_{f(x, y) \leq \gamma} p(y) dy. \quad (3)$$

Entonces, para un nivel de confianza α dado, se representa el α -VaR asociado al portafolio x como:

$$\text{VaR}_\alpha(x) = \min \{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \beta(x, \gamma) \geq \alpha \}. \quad (4)$$

Además, se define el α - CVaR asociado al portafolio x como:

$$\text{CVaR}_\alpha(x) = \frac{1}{(1 - \alpha)} \int_{f(x, y) \geq \text{CVaR}_\alpha(x)} f(x, y) p(y) dy. \quad (5)$$

Teorema 1. *Siempre se cumple que $\text{CVaR}_\alpha(x) \geq \text{VaR}_\alpha(x)$, lo que significa que CVaR de un portafolio es siempre por lo menos tan grande como su VaR. En consecuencia, portafolios con un CVaR pequeño también tienen un VaR pequeño. Sin embargo, en general minimizar CVaR y VaR no es equivalente.*

Demostración. Véase [4]. $\square$

Puesto que la definición de CVaR implica claramente la función VaR, es difícil trabajar y optimizar tal función. En cambio, se considera la siguiente función auxiliar más simple [10]:

$$F_\alpha(x, y) = \gamma + \frac{1}{(1 - \alpha)} \int_{f(x, y) \geq \gamma} (f(x, y) - \gamma) p(y) dy, \quad (6)$$

y/o

$$F_\alpha(x, y) = \gamma + \frac{1}{(1 - \alpha)} \int (f(x, y) - \gamma)^+ p(y) dy, \quad (7)$$

donde: $a^+ = \max\{a, 0\}$. Esta función, considerada como una función de γ , tiene las siguientes propiedades importantes que lo hace útil para el cálculo de VaR y CVaR [10]:

1. F_α es una función convexa de γ .
2. VaR es un minimizador sobre γ de F_α .
3. El valor mínimo sobre γ de la función F_α es CVaR.

Como consecuencia de las propiedades anteriores, se deduce inmediatamente que, para minimizar el $\text{CVaR}_\alpha(x)$ sobre x , se tiene que minimizar la función $F_\alpha(x, \gamma)$ respecto a x y γ al mismo tiempo:

$$\min_x \text{CVaR}_\alpha(x) = \min_{x, \gamma} F_\alpha(x, \gamma). \quad (8)$$

Por lo tanto, es posible optimizar el CVaR directamente, sin necesidad de calcular el VaR primero. Puesto que se tiene el supuesto que la función de pérdida $f(x, y)$ es la función convexa (lineal) de las variables cartera x , $F_\alpha(x, \gamma)$ es también una función convexa (lineal) de x . En este caso, dado que el conjunto de portafolios factible Ω también es convexo, los problemas de optimización en (8) son problemas de optimización convexos, los cuales se pueden resolver mediante técnicas de optimización ya conocidas para este tipo de problemas.

En lugar de usar la función de densidad $p(y)$ de los eventos aleatorios en (7), que a menudo es imposible o indeseable calcular, podemos utilizar un número de escenarios y_i , con $i = 1, \dots, T$. En este caso, considere la siguiente aproximación a la función $F_\alpha(x, \gamma)$:

$$\bar{F}_\alpha(x, \gamma) = \gamma + \frac{1}{(1 - \alpha)T} \sum_{i=1}^T (f(x, y_i) - \gamma)^+. \quad (9)$$

Ahora, en el problema $\min_x \text{CVaR}_\alpha(x)$, reemplazar $F_\alpha(x, \gamma)$ con $\bar{F}_\alpha(x, \gamma)$

$$\min_{x, \gamma} \gamma + \frac{1}{(1 - \alpha)T} \sum_{i=1}^T (f(x, y_i) - \gamma)^+. \quad (10)$$

Para resolver este problema de optimización, se incluyen variables artificiales z_i para reemplazar al término $(f(x, y) - \gamma)^+$. Para ello, se añaden restricciones $z_i \geq 0$ y $z_i \geq f(x, y) - \gamma$ al problema:

$$\begin{aligned} \min_{x, z, \gamma} \quad & \gamma + \sum_{i=1}^T z_i \\ \text{s.a.} \quad & z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, T \\ & z_i \geq f(x, y_i) - \gamma, \quad i = 1, \dots, T \\ & x \in \Omega. \end{aligned} \tag{11}$$

Puesto que $f(x, y)$ es lineal en x , todas las expresiones $z_i \geq f(x, y) - \gamma$ representan restricciones lineales, y por lo tanto el problema es un problema de programación lineal que se puede resolver de manera eficiente mediante simplex o métodos de punto interior. Una de las extensiones del problema anterior es el denominado CVaR-promedio [12].

4 Conclusiones

En el problema de portafolio de Markowitz [7] se resuelve la relación inversa entre la media y la varianza del rendimiento de portafolio. En su planteamiento original, el problema es encontrar un portafolio de mínima varianza con una restricción de rendimiento medio. La varianza no es una buena medida del riesgo para las distribuciones asimétricas. El CVaR toma en cuenta solamente la parte baja de la distribución y tiene propiedades matemáticas deseables como ser una medida de riesgo coherente. Una de las ventajas del enfoque CVaR es que se resuelve el problema de optimización de portafolio sin el supuesto de que los factores de riesgo de mercado se distribuyan como una normal. Tal supuesto no se cumple en la mayoría de los mercados, donde la distribución de los factores de riesgo de mercado se caracterizan por tener colas gordas, asimetría y alta influencia por eventos extremos.

En este trabajo se presentaron las bases teóricas para la optimización de portafolio en un contexto de minimización del CVaR dada por [10]. Por último, se apunta en la agenda de investigación la aplicación de la metodología presentada, con las etapas de elegir el método para resolver el problema de optimización por medio del diseño de un algoritmo y su codificación en un lenguaje de programación.

Referencias

- [1] Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, y D. Heath, *Coherent Measures of Risk*, *Mathematical Finance*, 9(3) (1999), 203-228.
- [2] Cho, W. N., *Robust portfolio optimization using conditional value at risk*, Final Report, Department of Computing, Imperial College London, 2008.
- [3] CNBV, Comisión Nacional Bancari y de Valores (2014). "Disposiciones De Caracter General Aplicables A Las Instituciones De Credito", disponible en: <http://www.cnbv.gob.mx/SECTORES-SUPERVISADOS/Paginas/default.aspx>
- [4] Cornuejols, G. y Tütüncü, R., *Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006.
- [5] Hubbard, Douglas (2006). *How to Measure Anything: Finding the Value of Intangibles in Business*, John Wiley & Sons.

-
- [6] De Lara Haro, Alfonso. Medición y control de riesgos financieros. Tercera edición, México, Limusa.
- [7] Krokmal, P., J. Palmquist, y S. Uryasev, *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints*, Journal of Risk, **4**(2) (2002), 43–48.
- [8] Markowitz, Harry M., *Portfolio Selection*, Journal of Finance. **7**(1) (1952), 77–91.
- [9] Quaranta, A. G. y A. Zaffaroni, *Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection*, Journal of Banking and Finance, **32**(10) (2008), 2046–2056.
- [10] Rockafellar R. T. y S. Uryasev, *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk, **2**(3) (2000), 21–41.
- [11] Rockafellar R. T. y S. Uryasev, *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, Journal of Banking and Finance, **26**(7) (2002), 1443–1471.
- [12] Salahi, M., Farshid Mehrdoust, y Farzaneh Piri, *CVaR Robust Mean-CVaR Portfolio Optimization*, ISRN Applied Mathematics, **2013**, Article ID 570950, 9 pages, 2013. doi:10.1155/2013/570950.
- [13] Wang, J. Mean-Variance-VaR Based Portfolio Optimization, Valdosta State University, 2000.

Un producto estructurado que relaciona el rendimiento de un bono cupón cero con tasa de interés estocástica con una opción doble barrera sobre un portafolio de inversión

Héctor Alonso Olivares Aguayo
hectorlivares@hotmail.com
ESE-IPN

Ambrosio Ortiz Ramírez
amortiz@ipn.mx
ESE-IPN

Abigail Rodríguez Nava
arnava@correo.xoc.uam.mx
UAM-X

Resumen

En esta investigación se propone un producto estructurado compuesto por activos de tres mercados: dinero (bono cupón cero), capitales (acciones) y derivados (opción). Para la valuación del bono cupón cero se supone que la tasa de interés es estocástica y conducida por un proceso de tipo CIR [4]. Para la construcción del portafolio de inversión se consideran dos perfiles: agresivo y conservador; se analizan los componentes del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores mediante el modelo de Sharpe [14], con el que se determina el portafolio óptimo tangente a la curva obtenida por el modelo de Markowitz. Posteriormente para la valoración de opciones se obtiene el precio de la opción de compra sobre el portafolio de inversión mediante simulación Monte Carlo. Los resultados muestran que cuando un agente económico tiene un perfil de riesgo agresivo en su portafolio de inversión es conveniente invertir en el producto estructurado, puesto que en este caso los rendimientos que ofrece la opción al conformar el estructurado son mayores que si solo se hubiera realizado la inversión en el bono cupón cero.

1 Introducción

El objetivo de este trabajo es construir un producto estructurado que satisfaga las necesidades de un agente económico racional considerando una óptima relación entre riesgo y rendimiento,

es decir, a diferencia de las características de los productos estructurados que se utilizan en la actualidad de las cuales consideran únicamente el mercado de dinero y de derivados, se propone como alternativa que el agente económico pueda invertir en el corto plazo en una producto estructurado conformado por un bono cupón cero y una opción sobre un portafolio de inversión considerando activos que conforman el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). El producto propuesto es un portafolio que une tres mercados financieros (renta fija, acciones y derivados) que conforman la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Los instrumentos de renta fija los más comunes son los bonos, estos pueden ser cupón cero o con cupones; los cuales tienen como característica principal que son de bajo riesgo crédito. Mientras que una opción es un instrumento apalancado que se negocia en el mercado de derivados. Por otro lado, los portafolios de inversión usualmente se construyen con activos del mercado accionario, cuya principal característica es la diversificación que se tiene al seleccionar los activos, al realizar esta diversificación el objetivo es reducir lo más que se pueda el riesgo no sistemático de los activos, esperando obtener un rendimiento mayor al ofrecido por la “tasa libre de riesgo crédito”.

En trabajo pionero sobre portafolios de inversión y que investiga la relación riesgo y rendimiento es el de Markowitz [7], en el cual se supone racionalidad de los agentes económicos y eficiencia de mercado. Asimismo, existe un hecho significativo en la historia de las finanzas, que han pasado de ser tradicionales a modernas con los trabajos seminales en [1] y [8], puesto que proporcionan una fórmula cerrada para calcular el precio de la opción financiera (prima), donde una de las variables de interés para el cálculo de la prima es la volatilidad del subyacente, la cual tradicionalmente corresponde al riesgo. En este orden de ideas, investigaciones sobre valuación de productos estructurados (también conocidos como notas estructuradas en el mercado de derivados) es relativamente escasa; véanse, al respecto, los trabajos de: [16], [5], [17], [11], [18], [6], [2], [9], [3], entre otros.

Este trabajo está organizado como sigue. En la siguiente sección se explica el modelo de selección de portafolios de inversión, la estimación de parámetros por máxima verosimilitud del modelo CIR y la construcción del producto estructurado propuesto, en la sección 3 se presentan y analizan los resultados obtenidos, por último, se concluye en la sección 4.

2 Modelo de selección de portafolios de inversión

Se han desarrollado modelos asociados a la teoría de la utilidad y elección en los mercados en [19]. Sin embargo La teoría financiera moderna comienza con el desarrollo del modelo de Markowitz. En este modelo, bajo el supuesto de normalidad, se desarrolla un portafolio óptimo capaz de mantener un rendimiento dado con la mínima varianza posible que es obtenido mediante la diversificación de los activos que lo conforman. De acuerdo con Markowitz, el rendimiento esperado de cada portafolio es la suma ponderada de los rendimientos esperados de los activos que componen cada portafolio:

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i) \quad (1)$$

donde:

$E(r_P)$: rendimiento esperado del portafolio P .

P : portafolio de activos.

w_i : proporción de la inversión realizada en cada activo del portafolio.

$E(r_i)$: rendimiento esperado de cada activo del portafolio.

Mientras que el riesgo de un portafolio se mide con la desviación estándar de la varianza del portafolio (σ_P). Esta varianza se calcula mediante la matriz de varianzas y covarianzas:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde:

σ_P^2 : Varianza de los rendimientos del portafolio P .

$w_i w_j$: Proporción de la inversión en los activos i y j .

σ_{ij} : Covarianza entre los rendimientos de los activos i y j si $i \neq j$.

σ_{ij} : Varianza entre los rendimientos de los activos i y j si $i = j$.

Si se estiman los rendimientos, varianzas de cada activo y las covarianzas de cada par de activos, es posible identificar el conjunto de oportunidades de inversión, en particular una frontera de inversiones eficiente, en las que se maximice el rendimiento fijando el riesgo; esta frontera siempre es una curva convexa en el plano $[\sigma_P, E(r_P)]$. Es factible construir la curva de carteras eficientes a fin de analizar el comportamiento del mercado. Para determinar la frontera eficiente es necesario encontrar diferentes proporciones que minimicen la varianza del portafolio para cada uno de los rendimientos esperados posibles. Esto es, el modelo de Markowitz no determina un portafolio único óptimo, sino una serie de portafolios eficientes, cada uno de los cuales maximiza el rendimiento para un nivel específico de riesgo, a partir del portafolio de mínima varianza global.

El problema de optimización para obtener el portafolio de mínima varianza global se plantea como:

$$\min \frac{1}{2} \sigma_P^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (3)$$

s.a.

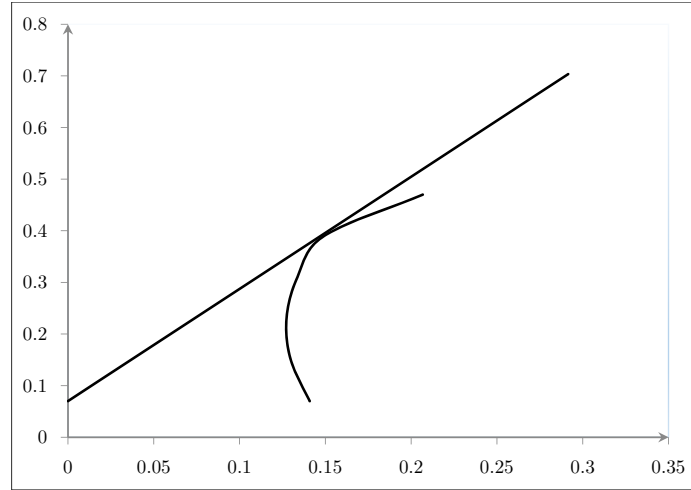
$$E(r_P) = \sum_{i=1}^n w_i r_i, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i \geq 0.$$

A partir de (3) tiene la optimización de Markowitz; la cual tiene como objetivo ponderar el riesgo del portafolio. Al resolver el problema mediante multiplicadores de Lagrange para el caso de dos activos se obtiene que las ponderaciones óptimas a invertir son:

$$\left(w_1^* = \frac{r_2 - E(r_P)}{r_2 - r_1}, \quad w_2^* = \frac{E(r_P) - r_1}{r_2 - r_1} \right).$$

Una extensión al modelo de Markowitz, [13], [14] y [15] apuntaron que si en una economía existe un activo libre de riesgo, como puede considerarse a los Certificados de Tesorería de Estados Unidos (Treasury Bills). Si el inversionista puede prestar o pedir prestado a la tasa libre de riesgo (R) entonces Sharpe señala que se obtiene una frontera eficiente lineal que domina a la frontera eficiente de portafolios basada en el cálculo de las covarianzas. Esta línea parte del rendimiento libre de riesgo y es tangente a la frontera eficiente de Markowitz, obteniendo el portafolio de Sharpe, como se representa en la Gráfica 1.

Figura 1: Línea del Mercado de Capitales.



Fuente: elaboración propia.

2.1 Estimación de parámetros del modelo CIR

Los modelos de tasa de interés estocástica conforman un campo teórico muy amplio, ya que las tasas de interés son el factor más importante en la economía. Las tasas de interés se pueden clasificar como: de corto, mediano y largo plazo, según sea el vencimiento de los bonos subyacentes. La mayoría de los modelos de tasa corta se plantean mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \kappa (\theta - X_t^\alpha) dt + \sigma X_t^\beta dW_t, \quad (4)$$

Con $\alpha, \beta \geq 0$, W_t un movimiento browniano definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Los parámetros κ y θ se interpretan de la misma manera que en los modelos de volatilidad estocástica, y representan la velocidad de reversión y el nivel de largo plazo, respectivamente. El modelo en (4) se conoce como modelo de un solo factor homogéneo en el tiempo, ya que los parámetros de este proceso son independientes, una vez determinada la estructura de plazos, los precios de los bonos se determinan sólo por la tasa corta X_t .

Si $\alpha = 1$ y $\beta = 0.5$ caracterizamos el modelo de Cox Ingersoll Ross (CIR)[4], en este modelo se describe la dinámica de una variable X_t como la solución a una ecuación diferencial:

$$dX_t = \kappa (\theta - X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t^+} dW_t, \quad (5)$$

donde W_t es un movimiento browniano, $x^+ = \max(x, 0)$ es la parte positiva, $\kappa > 0$, $\theta > 0$ y $\sigma > 0$. Este modelo es consistente con la característica de reversión a la media a una tasa de interés con una velocidad de reversión κ hacia un valor θ .

Lo que sigue es resolver el problema de la estimación de los parámetros subyacentes. Uno de los métodos más comunes para estimar parámetros en estadística inferencial es el de máxima verosimilitud, en lo que respecta a la estimación de los parámetros en los modelos de tasa corta el más popular es el método generalizado de momentos debido que no requiere un supuesto sobre la distribución de los errores, entre otros. Un método alternativo es el propuesto en [10], en términos prácticos este método consiste en la estimación de un conjunto de parámetros dentro de la esperanza condicional de un proceso estocástico: $E[X_t|X_{t-1}]$, posteriormente los valores estimados se usan como valores iniciales en un enfoque de máxima verosimilitud lo que acelera la convergencia a un óptimo global*.

* Véase [10] p. 433.

2.2 Componentes del producto estructurado

En la composición del portafolio se utilizan dos clases de productos estructurados: un call spread (sin barrera) y otra denominada Down and Out y Up and Out (doble barrera), a continuación se describen las fórmulas teóricas para la valuación de estos componentes.

El precio de la valuación del producto estructurado call spread está dada por la siguiente expresión:

$$P_V = P_B + P_D \times F,$$

donde:

F : factor establecido en el prospecto determinado por el emisor desde el inicio del depósito y ajusta el rendimiento del producto estructurado.

P_V : precio de valuación del producto estructurado call spread.

P_B : precio del bono cupón cero.

I_O : inversión disponible en opciones.

P_D : prima de las opciones implicadas en la estrategia dada por:

$$P_D = C_{X_1} + C_{X_2},$$

donde C_{X_1} y C_{X_2} son las primas de un call con precios de ejercicio X_1 y X_2 , respectivamente.

El precio del bono cupón cero está dado por:

$$P_B = \frac{N}{(1 + R_n \frac{n}{360})},$$

donde:

N : valor nominal del producto estructurado call spread.

n : número de días por vencer del producto estructurado

R_n : tasa de interés libre de riesgo asociada al número de días por vencer, además:

$$S_0 = E(r_p) \times I_O, \\ C_X = S_0 \Phi(d_1) - X e^{-R_n T} \Phi(d_2),$$

con d_1 y d_2 definidas por:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(R_n + \frac{\sigma_p^2}{2}\right)T}{\sigma_p \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_p \sqrt{T} \text{ y } T = \frac{n}{360},$$

donde:

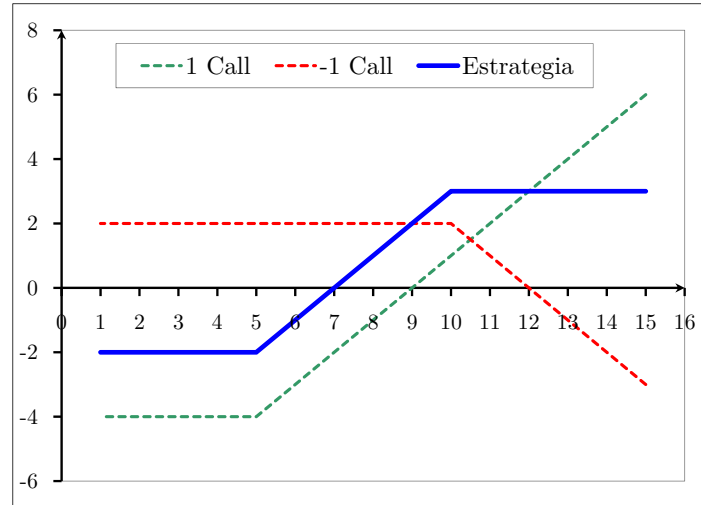
C_X : prima de la opción tipo call con precio de ejercicio X .

S_0 : valor del activo subyacente inicial.

$\Phi(\cdot)$: función de distribución acumulada de una normal estándar en el valor $(\cdot)$.

σ_P : volatilidad del rendimiento del portafolio de inversión (subyacente).

Figura 2: Call spread.



Fuente: elaboración propia.

La Grafica 2 muestra un call spread que se construye con una posición larga en una opción de compra y una posición corta en una opción de compra con mayor precio de ejercicio que la de la posición larga, ambas sobre un subyacente con igual plazo al vencimiento.

El precio de la valuación del producto estructurado doble barrera Down and Out y Up and Out (*i.e.* al tocar las barreras el subyacente, la opción se desactiva) está dada por la siguiente expresión:

$$P_E = P_B + P_D \times F,$$

donde:

F : factor establecido en el prospecto determinado por el emisor desde el inicio del depósito y ajusta el rendimiento de la nota estructurada.

P_E : precio de valuación de la Nota Estructurada Down and Out y Up and Out.

P_B : precio del bono cupón cero.

P_D : prima de las opciones implicadas en la estrategia dada por:

$$P_D = D_o + D_u,$$

donde:

D_o : prima de una opción barrera Down and Out.

D_u : prima de una opción barrera Down and Up.

con:

$$D_o = A - B.$$

El modelo para la valuación de las opciones barrera Down and Out y Up and Out, es el propuesto en [12], con A y B dadas por:

$$A = X(1 + R_n)^{-T} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{H_i} \right)}{\sigma_p \sqrt{T}} + \left(1 + \frac{\left(1 + R_n - \frac{\sigma_p^2}{2} \right) T}{\sigma_p^2} \right) \sigma_p \sqrt{T} - \sigma_p \sqrt{T} \right) \quad (6)$$

y

$$B = X(1 + R_n)^{-T} \left(\frac{H_i}{S_0} \right)^{2 \left(1 + \frac{\left(1 + R_n - \frac{\sigma_p^2}{2} \right) T}{\sigma_p^2} \right) - 2} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{H_i}{S_0} \right)}{\sigma_p \sqrt{T}} + \left(1 + \frac{\left(1 + R_n - \frac{\sigma_p^2}{2} \right) T}{\sigma_p^2} \right) \sigma_p \sqrt{T} - \sigma_p \sqrt{T} \right),$$

(7)

con H_i la barrera inferior, además:

$$D_u = C - D,$$

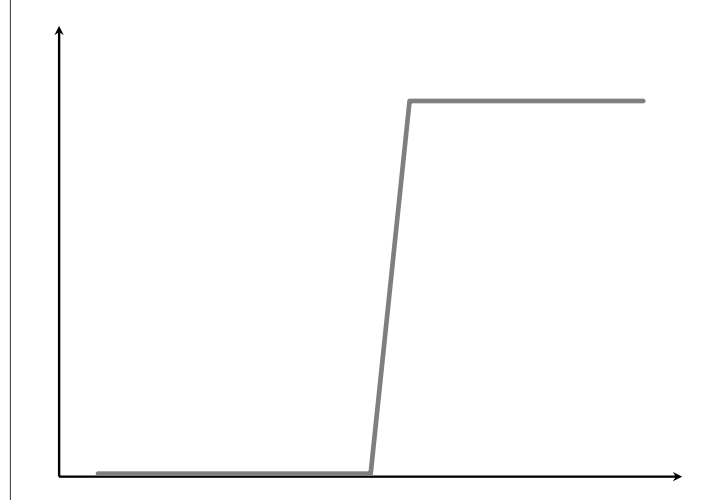
$$C = X(1 + R_n)^{-T} \Phi \left(- \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{H_s} \right)}{\sigma_p \sqrt{T}} + \left(1 + \frac{\left(1 + R_n - \frac{\sigma_p^2}{2} \right) T}{\sigma_p^2} \right) \sigma_p \sqrt{T} - \sigma_p \sqrt{T} \right) \right) \quad (8)$$

$$D = X(1 + R_n)^{-T} \left(\frac{H_s}{S_0} \right)^{2 \left(1 + \frac{\left(1 + R_n - \frac{\sigma_p^2}{2} \right) T}{\sigma_p^2} \right) - 2} \times \quad (9)$$

$$\times \Phi \left(- \left(\frac{\ln \left(\frac{H_s}{S_0} \right)}{\sigma_p \sqrt{T}} + \left(1 + \frac{\left(1 + R_n - \frac{\sigma_p^2}{2} \right) T}{\sigma_p^2} \right) \sigma_p \sqrt{T} - \sigma_p \sqrt{T} \right) \right),$$

con H_s la barrera superior.

Figura 3: Producto estructurado doble barrera Knock Out del tipo Down and Out.



Fuente: elaboración propia.

En la Gráfica 3 se observa el rendimiento de la producto estructurado Knock Out del tipo Down and Out. Una particularidad de este producto es que el rendimiento que pueden generar se paga al vencimiento y depende de si el subyacente toca o no la barrera estipulada en el contrato.

3 Aplicación y análisis de resultados

El producto estructurado propuesto en este trabajo está conformada por un bono cupón cero y una opción sobre un portafolio de inversión. Se extrajo información de BLOOMBERG para los

precios de los componentes del IPC, se consideró la tasa de interés “libre de riesgo” (CETES 360) publicada por BANXICO. Se supone el rendimiento esperado del portafolio por la inversión disponible en opciones como subyacente inicial en la opción y la desviación estándar del portafolio como la volatilidad en la opción para ambos perfiles de riesgo. Los cálculos finales consideran la simulación Monte Carlo con 100,000 trayectorias para el cálculo de las primas de las opciones sin barrera y doble barrera. Se realiza las estimaciones de la matriz de varianzas y covarianzas y al portafolio de Sharpe con los rendimientos históricos diarios de los componentes del IPC, seleccionando solo cinco componentes para la conformación del portafolio de inversión de acuerdo al perfil de riesgo (conservador o agresivo).

Cuadro 1: Componentes del portafolio de Sharpe bajo perfil de riesgo conservador.

Componente	W_i	$E(r_i)$	β
AC	62%	43.30%	0.57
ASURB	29%	44.54%	0.36
CHDRAUIB	0%	-2.66%	0.70
GAPB	0%	13.46%	0.31
SORIANAB	9%	37.32%	0.83
Suma	100%	Beta del portafolio	

Fuente: elaboración propia.

En el Cuadro 1 se observa que la β del portafolio es pequeña, es decir menor a uno, por lo que, al cambiar una unidad porcentual el IPC el rendimiento del portafolio cambia 0.53 veces, es decir, el portafolio conservador es poco sensible ante cambios en el Índice del mercado mexicano (IPC).

En el Cuadro 2 se observa el riesgo y el rendimiento que ofrece el portafolio conservador con mayor índice de Sharpe.

Cuadro 2: Factores del portafolio de Sharpe bajo perfil de riesgo conservador.

$E(r_P)$	σ_P^2	σ_P	R	Sharpe
0.430846	0.021202	0.145610	4.45%	2.653285

Fuente: elaboración propia.

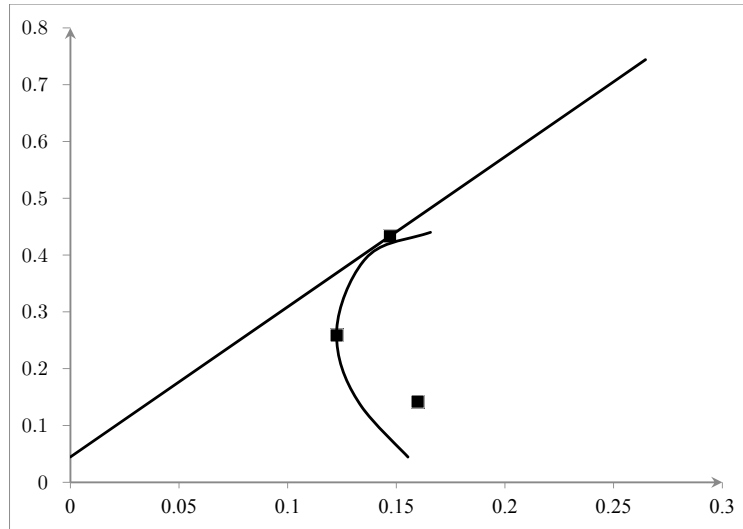
En el cuadro 3 se muestran los niveles de riesgo asociados a un nivel de rendimiento dado para cada portafolio. Asimismo se observa el índice de Sharpe y la β correspondiente.

Cuadro 3: Factores del portafolio de Sharpe bajo perfil de riesgo conservador.

# portafolio	Desviación	Rendimiento	I. Sharpe	Beta
1	0.155336	4.45%	0.000000	0.531134
2	0.133825	13.45%	0.672522	0.492497
3	0.123791	22.45%	1.454067	0.484061
4	0.124984	31.45%	2.160282	0.489672
5	0.138146	40.45%	2.605944	0.520001
6	0.165698	44.00%	2.386875	0.450327
Mín. varianza	0.122962	0.259577	1.749128	0.486248
Sharpe	0.145610	0.430846	2.653285	0.532985
IPC	0.159795	0.142075	0.610626	1

Fuente: elaboración propia.

Figura 4: Portafolio de inversión conservador.



Fuente: elaboración propia.

La gráfica anterior muestra los portafolios: mínima varianza global (vértice de la parábola), el de Sharpe (Tangencia entre la frontera eficiente de Markowitz y la línea de mercado de capitales) y el que ofrece el mercado (IPC), el cual ofrece un menor rendimiento, y un mayor riesgo a los dos portafolios anteriormente mencionados.

Cuadro 4: Componentes del portafolio de Sharpe bajo perfil de riesgo agresivo.

Componente	W_i	$E(r_i)$	β
ALFAA	61%	41.22%	1.18
CEMEXCPO	15%	61.78%	2.68
ELEKTRA	0%	-73.24%	1.34
GMEXICOB	0%	14.51%	1.38
MEXCHEM	24%	28.41%	1.05
Suma	100%	β del portafolio	1.37

Fuente: elaboración propia.

En el cuadro anterior se observa que la Beta (β) del portafolio es mayor a uno, por lo que al cambiar una unidad porcentual el IPC el rendimiento del portafolio agresivo cambia 1.37 veces aproximadamente, es decir, es muy sensible ante cambios en el Índice del mercado mexicano.

En el Cuadro 5 se observa el riesgo y el rendimiento que ofrece el portafolio agresivo con mayor índice de Sharpe.

Cuadro 5: Factores del portafolio de Sharpe bajo perfil de riesgo agresivo.

$E(r_P)$	σ_P^2	σ_P	R	Sharpe
0.411360	0.077359	0.278135	4.45%	1.319003

Fuente: elaboración propia.

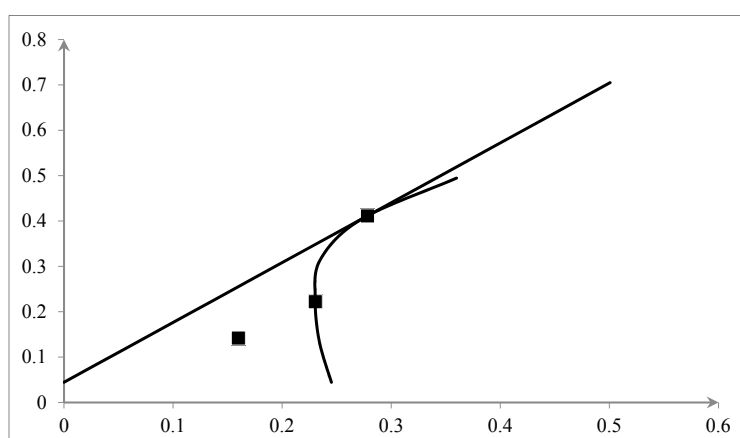
En el Cuadro 6 se muestran los niveles de riesgo asociados a un nivel de rendimiento dado para cada portafolio. Asimismo se observa el índice de Sharpe y la Beta correspondiente.

Cuadro 6: Factores del portafolio de Sharpe bajo perfil de riesgo agresivo.

# portafolio	Desviación	Rendimiento	I. Sharpe	Beta
1	0.245133	4.45%	0	1.233314
2	0.234046	13.45%	0.186368	1.221058
3	0.230357	22.45%	0.380131	1.208802
4	0.234882	31.45%	0.577171	1.196546
5	0.273062	40.45%	0.772722	1.184291
6	0.359816	49.45%	0.961893	1.172035
Mín. varianza	0.230355	0.222333	0.771994	1.184337
Sharpe	0.278134	0.411360	1.319003	1.374878
IPC	0.159795	0.142075	0.610626	1

Fuente: elaboración propia.

Figura 5: Portafolio de inversión agresivo.



Fuente: elaboración propia.

La Gráfica 5 muestra los portafolios: mínima varianza global (vértice de la parábola), el de Sharpe (Tangencia entre la frontera eficiente de Markowitz y la línea de mercado de capitales) y el que ofrece el mercado (IPC), el cual ofrece un menor rendimiento y un menor riesgo a los dos portafolios anteriormente mencionados.

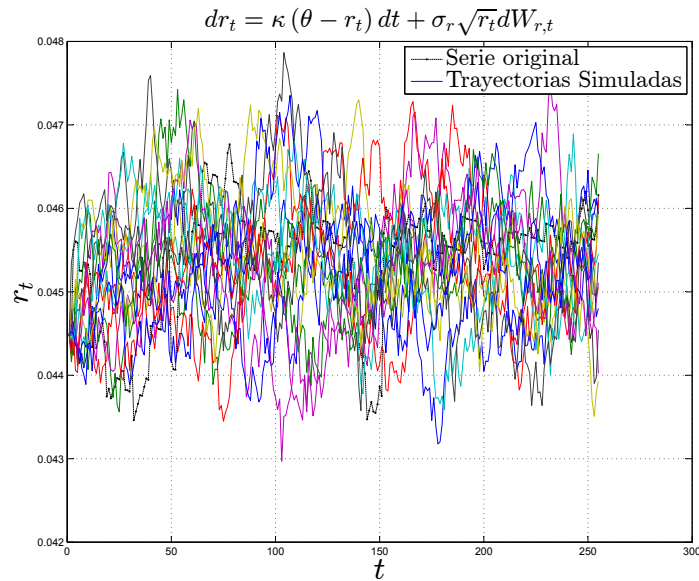
Con el supuesto de que tasa de interés del bono cupón cero es conducida por un proceso del tipo Cox, Ingersoll y Ross (CIR), y con una muestra de 255 observaciones de la tasa de CETES (Certificados de la Tesorería de la Federación) a plazo de un año que comprende 20/09/2011 al 20/09/2012, se determinan los parámetros de este modelo bajo el método de máxima verosimilitud [10], los resultados se muestran en el siguiente cuadro:

Cuadro 7: Parámetros del modelo CIR.

Parámetros	valor
κ	0.066265
θ	0.045479
σ	0.020086

Fuente: elaboración propia.

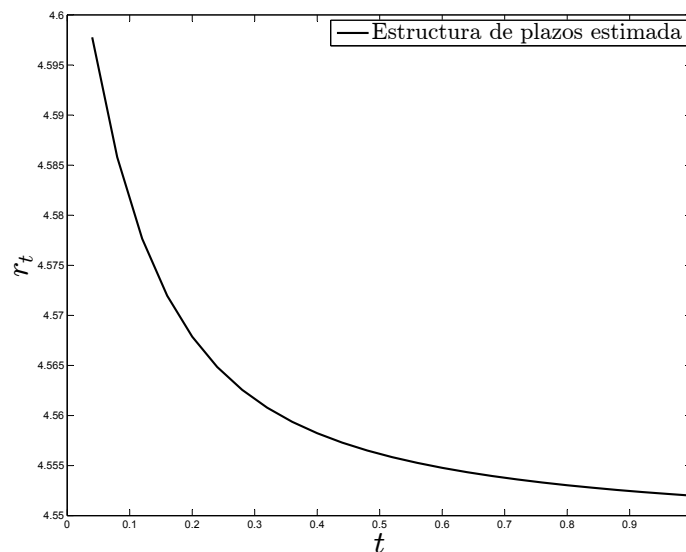
Figura 6: Trayectorias simuladas con el modelo CIR.



Fuente: elaboración propia.

En la Gráfica 6 se observa la serie original de la tasa libre de riesgo y quince trayectorias simuladas con los parámetros dados por el modelo CIR. Se observa un valor mínimo de 4.346206 el 03/11/2011, un valor máximo de 4.67671 el 10/01/2012 y un promedio de 4.54 durante el periodo de la muestra.

Figura 7: Estructura de plazos generada con parámetros calibrados del modelo CIR.



Fuente: elaboración propia.

La Gráfica 7 muestra la estructura de plazos generada con parámetros calibrados con el modelo CIR, se observa una curva congruente con una de las propiedades del modelo CIR de proporcionar valores positivos.

Al haber obtenido los precios de instrumentos financieros correspondientes al mercado de dinero y de capitales, con los resultados obtenidos podemos utilizarlos para valorar las primas de

las opciones financieras que se negocian en el mercado de derivados, conformando así los productos estructurados sin barrera y doble barrera que relacionan los tres mercados financieros, los resultados obtenidos en el caso de un perfil agresivo[†] son los siguientes:

En el Cuadro 8 se muestra el precio del bono calculado con tasa dada por el modelo CIR, y los precios de las opciones doble barrera.

Cuadro 8: Resultados de la nota estructurada bajo perfil de riesgo agresivo.

T	R	N	κ	θ	σ	P_B	I_O	S_0	σ_P	H_s	H_i
1	0.04	10,000,000	0.06	0.04	0.02	9,551,576.15	448,423.85	184,464	0.27	314,001	44,842

Fuente: elaboración propia.

Se muestra el valor de la prima y el número de opciones sin barrera que puede comprar el agente económico, en el cuadro siguiente:

Cuadro 9: Resultados de opciones sin barrera bajo perfil de riesgo agresivo.

X	Valor opción sin barrera	Parte opción sin barrera
44,842	140,188.17	3.19
89,684	99,127.29	4.52
134,584	59,286.97	7.56
179,439	27,543.30	16.28
224,280	10,526.96	42.61
269,159	3,629.50	123.59

Fuente: elaboración propia.

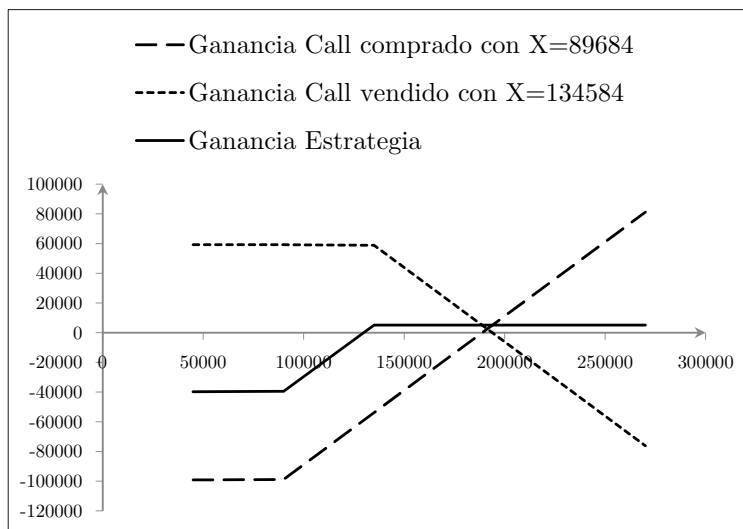
Cuadro 10: Resultado del producto estructurado Call spread bajo el perfil de riesgo agresivo.

S	Ganancia call comprado con $X = 89,684$	Ganancia call vendido con $X = 134,584$	Ganancia de la estrategia P_D
45,000.00	-99,127.29	59,286.97	-39,840.31
90,000.00	-98,812.06	59,286.97	-39,525.08
135,000.00	-53,812.06	58,871.44	5,059.38
180,000.00	-8,812.06	13,871.44	5,059.38
225,000.00	36,187.94	-31,128.56	5,059.38
270,000.00	81,187.94	-76,128.56	5,059.38
151,873.96	-36,938.09	41,997.47	5,059.38
Número de opciones de la nota (F)	11	Ganancia en opciones	55,653.16
P_B	9,551,576.15		
I_O	448,423.85	ganancia total	504,077.02
P_V	10,055,653.16		

Fuente: elaboración propia.

[†] Se ejecutaron las estimaciones para ambos perfiles, sin embargo, por razones de espacio solo se muestran los resultados para el perfil de riesgo agresivo.

Figura 8: Gráfica del producto estructurado Call spread bajo el perfil de riesgo agresivo.



Fuente: elaboración propia.

Del Cuadro 10 y la Gráfica 8 se observa que los rendimientos obtenidos se encuentran en la zona de máximas ganancias de la estrategia, por lo que, es conveniente invertir los rendimientos obtenidos del bono cupón cero en opciones financieras, generando una ganancia adicional como resultado de la operación por \$55,653.16.

Enseguida se muestra el valor de la prima y el número de opciones con barrera que puede comprar el agente económico, en el cuadro siguiente:

Cuadro 11: Resultados de opciones con barrera bajo perfil de riesgo agresivo.

X	Valor opción sin barrera	Parte opción sin barrera
44,842	125,252.48	3.58
89,684	86,340.55	5.19
134,584	48,872.94	9.17
179,439	19,608.24	22.87
224,280	5,195.42	86.33
269,159	633.17	708.49

Fuente: elaboración propia.

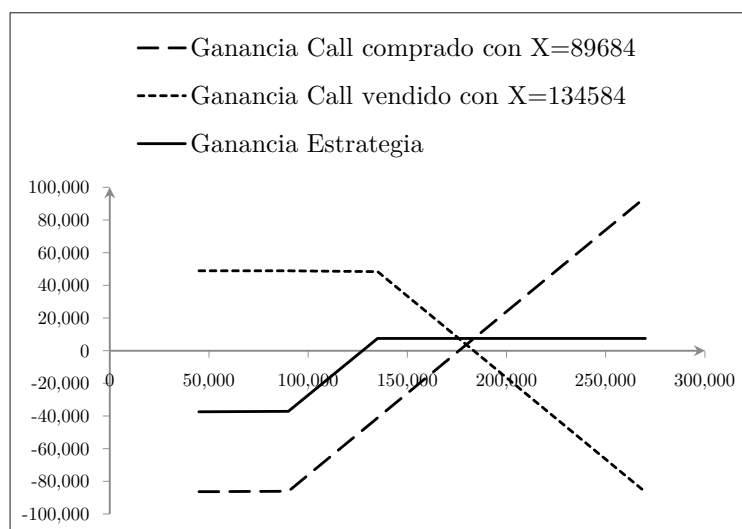
Cuadro 12: Resultado del producto estructurado Call spread considerando una opción doble barrera bajo perfil de riesgo agresivo.

S	Ganancia call comprado con $X = 89,684$	Ganancia call vendido con $X = 134,584$	Ganancia de la estrategia P_D
45,000.00	-86,340.55	48,872.94	-37,467.61
90,000.00	-86,025.32	59,286.97	-39,525.08
135,000.00	-41,025.32	58,871.44	5,059.38
180,000.00	3,974.68	13,871.44	5,059.38
225,000.00	48,974.68	-31,128.56	5,059.38
270,000.00	93,974.68	-76,128.56	5,059.38
151,873.96	-24,151.36	41,997.47	5,059.38
Número de opciones de la nota (F)	12	Ganancia en opciones	55,653.16
P_B	9,551,576.15		
I_O	448,423.85	ganancia total	537,608.87
P_V	10,055,653.16		

Fuente: elaboración propia.

Del Cuadro 12 y la Gráfica 9 se observa que los rendimientos obtenidos se encuentran en la zona de máximas ganancias de la estrategia, por lo que, es conveniente invertir los rendimientos obtenidos del bono cupón cero en opciones financieras, generando una ganancia adicional como resultado de la operación por \$89,185.02, la cual representa la mayor ganancia de todas los productos estructurados analizados en el desarrollo de este trabajo.

Figura 9: Gráfica del producto estructurado Call spread considerando una opción doble barrera bajo el perfil de riesgo agresivo.



Fuente: elaboración propia.

4 Conclusiones

En este trabajo se ha presentado la valuación de un producto estructurado en el corto plazo, analizando los precios históricos diarios de los componentes del IPC: este estructurado integra los tres mercados financieros que conforman la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Mediante simulación Monte Carlo se determinó el precio del bono cupón cero y las primas de las opciones financieras para así conformar el estructurado en el corto plazo, el análisis de los resultados obtenidos conducen a lo siguiente:

Cuando el inversionista tiene un perfil de riesgo conservador en su portafolio de inversión (acciones seleccionadas AC, ASURB, CHDRAUIB, GAPB, SORIANAB) no le es conveniente invertir en el producto estructurado call spread que vincula el rendimiento del bono cupón cero con la opción sobre dicho portafolio, es decir, la mejor decisión de inversión será invertir en el bono cupón cero.

Sin embargo, cuando el inversionista tiene un perfil de riesgo agresivo en su portafolio de inversión (acciones seleccionadas: ALFAA, CEMEXCPO, ELEKTRA, GMEXICOB, MEXCHEM), le es conveniente invertir en el producto estructurado call spread, que vincula el rendimiento del bono cupón cero con la opción sobre dicho portafolio, ya que, se observaron ganancias superiores con la opción con y sin barreras a las obtenidas con el bono cupón cero.

Es posible obtener un mayor rendimiento en el corto plazo cuando se invierte en productos estructurados call spread que consideran opciones doble barrera, lo anterior debido a que las primas de las opciones doble barrera son más baratas que las opciones plain vanilla.

Una limitación de este trabajo es que se asume normalidad en los rendimientos de los componentes del IPC y en la volatilidad del portafolio de inversión, por lo que queda en futuras líneas de investigación extender tal supuesto; además de utilizar productos estructurados con expectativa de alta volatilidad en el rendimiento del portafolio de inversión.

Referencias

- [1] Black, F. y M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy. **81**(3) (1973), 637–654.
- [2] Carlin, B., *Strategic Price Complexity in Retail Financial Markets*, Journal of Financial Economics. **91**(3) (2009), 278–287.
- [3] Climent-Hernández, J. A., F. Venegas-Martínez y F. Ortiz-Arango (2014). *Portafolio óptimo y productos estructurados en mercados alpha-estables: un enfoque de minimización de riesgo*, Working Paper, Munich Personal RePEc Archive. Disponible en: <http://mpira.ub.uni-muenchen.de/57740/>.
- [4] Cox, J. C., J. E. Ingersoll, y S. A. Ross, *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica. **53**(2) (1985), 385–407.
- [5] Das, S., *Structured Notes and Derivative Embedded Securities*, Euromoney Publications, 1996.
- [6] Henderson, B. J. y N. Pearson. *Patterns in the Payoffs of Structured Equity Derivatives*, Working paper, AFA 2008 New Orleans Meetings, (2007).
- [7] Markowitz, Harry M., *Portfolio Selection*, Journal of Finance. **7**(1) (1952), 77–91.
- [8] Merton, R. C., *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics. **4**(1) (1973), 141–183.

- [9] Ortiz-Ramírez, A., Venegas-Martínez, F., López-Herrera, *Valuación de una nota estructurada que liga el rendimiento de un índice bursátil con los pagos de un bono y un derivado*, Estocástica: finanzas y riesgo. **1**(2) (2011), 49–62.
- [10] Overbeck, L. y Rydn, T., *Estimation in the Cox-Ingersoll-Ross model*, Econometric Theory. **13**(3) (1997), 430-461.
- [11] Palmer, B., *Equity-Indexed Annuities: Fundamental Concepts and Issues*, Working Paper 45, (2006). www.ii.org
- [12] Rubinstein, M. y E. Reiner, *Breaking down the barriers*, Risk. **4**(8) (1991), 28–35.
- [13] Sharpe, W. F., *A Simplified Model for Portfolio Analysis*, Management Science. **9**(2) (1963), 277–293.
- [14] Sharpe, W. F., *Portfolio Theory and Capital Markets*, New York: McGraw Hill, 1970.
- [15] Tobin, J., *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*, Management Science. **25**(2) (1958), 65-86.
- [16] Sherfin, H. y M. Statman, *Behavioural Aspects of the Design and Marketing of Financial Products*, Financial Mnagement. **22**(2) (1993), 123–134.
- [17] Stoimenov, P. A. y Wilkens, *Are Structured Products ‘Firly’ Priced? An Analysis of the German Market for Equity-Linked Instruments*, Journal of Banking and Finance. **29**(12) (2005), 2971-2993.
- [18] Venegas-Martínez, F., *Mercados de notas estructuradas: un análisis descriptivo y métodos de valuación*, El Trimestre Económico, **LXXIV**(3) (295) (2007), 615–661.
- [19] Von Neumann, J. y Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1944.

Viabilidad de los Algoritmos Genéticos en problemas de optimización no restringida

Jorge Álvarez Mena
joalvarez@uv.mx

Javier Landa Tonil
landatonil_12@hotmail.com

Evodio Muñoz Aguirre
evo2003001@yahoo.com.mx

Facultad de Matemáticas
Universidad Veracruzana

Resumen

Los Algoritmos Genéticos se han usado en problemas de optimización para mejorar soluciones factibles conocidas, hallar aproximaciones a soluciones óptimas, y en el mejor de los casos, encontrar soluciones óptimas. El objetivo fue analizar la viabilidad de los Algoritmos Genéticos en problemas de optimización no restringida, desde un punto de vista teórico y uno práctico. En el tratamiento teórico, siguiendo el trabajo Rudolph(1994), se modelaron los AG mediante cadenas de Markov y se estudió la convergencia de los algoritmos a la solución óptima del problema. En el enfoque práctico se desarrolló una implementación del Algoritmo Genético Elitista, y se evaluó la eficiencia de dicho algoritmo ante algunos problemas Benchmark de optimización no restringida. Con la evidencia obtenida se emite una conclusión acerca de la viabilidad de los AG.

1 Introducción

Los problemas de optimización surgen en situaciones de la vida cotidiana y de la ciencia, cuando se desea elegir de entre un conjunto de posibles decisiones, denominado conjunto factible, la mejor de éstas de acuerdo con un criterio de evaluación, al que se da el nombre de función objetivo. Las técnicas clásicas para resolver problemas de optimización tienen el inconveniente de asumir hipótesis sobre la función objetivo o el conjunto factible, además algunos algoritmos que proponen pertenecen a la clase de problemas NP completos, cuya dificultad radica en que el tiempo de cómputo crece exponencialmente con la cantidad de variables. Como una alternativa a las técnicas clásicas, John Holland introdujo los Algoritmos Genéticos (AG), Holland(1975), los cuales tienen la ventaja de no requerir hipótesis sobre la función objetivo ni en el conjunto factible, además de reducir el costo computacional. Desde entonces los AG se han utilizado en problemas de optimización para mejorar soluciones factibles conocidas, hallar aproximaciones a soluciones óptimas, y en el mejor de los casos, encontrar soluciones óptimas. Los AG consisten en hacer

evolucionar una población a través de la aplicación de operadores que imitan los fenómenos de reproducción, cruza y mutación.

El objetivo consiste en analizar la viabilidad de los AG para resolver problemas de optimización no restringida, desde los enfoques teórico y práctico. En el enfoque teórico, siguiendo el trabajo Rudolph(1994), se estudia la convergencia de dichos algoritmos a la solución óptima del problema. En el enfoque práctico se desarrolla una implementación del Algoritmo Genético Elitista, con el fin de evaluar la eficiencia del algoritmo ante cuatro problemas Benchmark de optimización no restringida, tomados de Momin(2013).

2 Algoritmos Genéticos

Hoy en día los detalles acerca de la evolución biológica no se comprenden por completo, sin embargo, se han propuesto diversos esquemas que intentan resumir el proceso evolutivo. Éstos consideran los siguientes aspectos:

- La evolución es un proceso que se da entre los cromosomas, antes que sobre los organismos. Los cromosomas son herramientas genéticas que codifican la estructura de un ser vivo, es decir, una criatura se «construye» decodificando un conjunto de cromosomas.
- La selección natural es el mecanismo que relaciona a los cromosomas con la eficiencia de la entidad que éstos representan, permitiendo así que un organismo eficiente que está bien adaptado a su entorno, se reproduzca más veces que aquellos que no lo están.
- La reproducción es la fase en la que se concentra el proceso evolutivo. Existe gran variedad de mecanismos de reproducción en la naturaleza. Éstos involucran procesos como la *mutación*, que hace que los cromosomas de los hijos sean diferentes a los de los padres, y la *recombinación*, que combina los cromosomas de los padres para producir los descendientes.

El esquema Neo-Darwiniano establece: la historia de las formas de vida en nuestro planeta se explican a través de una colección de procesos estocásticos, que actúan sobre las poblaciones y especies, a saber, la selección, recombinación y mutación. En un ecosistema, diferentes organismos coexisten y compiten por recursos. Los organismos más capaces para adquirir recursos y procrear con éxito suelen tener numerosos descendientes, mientras que los organismos menos capaces, tienden a dejar pocos o ningún descendiente. Con el paso del tiempo la población del ecosistema evoluciona y, en promedio, sus individuos son más aptos que los de generaciones anteriores debido a que las características que contribuyen a la supervivencia se han transmitido.

Un Algoritmo Genético Simple (AGS) es un proceso iterativo y estocástico que opera sobre la población. Inicialmente se genera una población de manera aleatoria, y se hace evolucionar mediante el mecanismo de reproducción, el cual está compuesto por los mecanismos de selección, cruza y mutación. Con la selección se eligen los individuos que se reproducirán, con base en su aptitud. En la cruza se combinan los cromosomas de los padres y la mutación proporciona a los cromosomas variación aleatoria para finalmente obtener los descendientes. La función de aptitud asigna a cada individuo una medida de su capacidad para adaptarse al entorno. Con estos elementos, el AGS se esboza como sigue:

Algoritmo 3 Algoritmo Genético Simple (AGS)

Determinar una población inicial
Evaluar la aptitud de cada individuo
do{
 Realizar selección
 Aplicar cruza
 Aplicar mutación
 Evaluar la aptitud de cada individuo
}while(<criterio de paro>).

Una variante del AGS es el Algoritmo Genético Elitista (AGE). Éste conserva, en cada generación, el mejor individuo (super individuo) encontrado hasta esa instancia.

Algoritmo 4 Algoritmo Genético Elitista (AGE)

Determinar una población inicial
Evaluar la aptitud de cada individuo
Actualizar el super individuo
do{
 Realizar selección
 Aplicar cruza
 Aplicar mutación
 Evaluar la aptitud de cada individuo
 Actualizar el super individuo
}while(<criterio de paro>).

2.1 Algoritmo Genético Simple

2.1.1 Representación de individuos y poblaciones

En la mayoría de los esquemas evolutivos los individuos son caracterizados por un conjunto de cromosomas, los cuales codifican la estructura genética de los organismos. Los genes son las unidades básicas que componen los cromosomas, y usualmente almacenan el valor de una sola característica del individuo. La información genética se almacena y se transmite de padres a hijos justamente mediante los genes. En los AGS un individuo queda caracterizado por un sólo cromosoma, y se llama genotipo al conjunto de todos los genes que lo conforman. A cada genotipo corresponde un fenotipo, que describe los rasgos «observables» de un individuo, y se obtiene de la decodificación del genotipo. La morfogénesis es la función que asocia un fenotipo a cada genotipo, este mapeo es necesario para convertir los nuevos individuos del AGS en una forma que el modelo pueda evaluar.

Se utilizará la representación binaria para los individuos, en ella, un cromosoma se modela a través de una cadena de bits (cadena de ceros y unos) de longitud positiva l . El genotipo, representado por un cromosoma, puede decodificarse de varias maneras para obtener el fenotipo. La manera más sencilla consiste en considerar que cada bit de la cadena representa una característica del individuo, es decir un gen, en cuyo caso el genotipo y el fenotipo coinciden. Una alternativa es que el fenotipo asociado al cromosoma sea de tipo numérico, por lo que la cadena completa se decodificará como un número que puede ser entero o decimal. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los individuos que en algún momento pudieran surgir del proceso evolutivo, es decir, $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^l$. Se asume, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{C} = \{0, 1\}^l$, caso en el que la cardinalidad del conjunto de individuos es 2^l . Considérese una enumeración en $\mathcal{C}$, por lo que puede escribirse $\mathcal{C} = \{c_k | k = 1, \dots, 2^l\}$. Una población de tamaño n es un elemento de $\mathcal{C}^n$, es decir, es una colección

de n individuos no necesariamente distintos. A partir de la enumeración para $\mathcal{C}$, se establece un ordenamiento en el conjunto de poblaciones $\mathcal{C}^n$ por medio del orden lexicográfico.

El punto de partida para el AGS es una población inicial de tamaño n , denotada aquí por E^0 , a partir de la cual se obtienen nuevos individuos mediante de los mecanismos genéticos. Los individuos obtenidos constituyen la población E^1 , también de tamaño n , denominada primera generación. En general, si la población actual es $E^t = (e_1^t, \dots, e_n^t)$, mediante la aplicación de mecanismos genéticos se obtendrá la población E^{t+1} del mismo tamaño. Se dice que los individuos de E^t son los padres de los individuos de la generación $t + 1$, mientras que los de E^{t+1} son los hijos de los individuos de E^t .

2.1.2 La reproducción

El proceso de reproducción consiste en que, a partir de una población (de padres), se crean nuevos individuos (hijos) posiblemente más aptos, mismos que en la siguiente iteración tomarán el papel de la población de padres. La reproducción consta esencialmente de tres pasos:

- 1.- seleccionar parejas de individuos de la población actual para la cruce,
- 2.- aplicar la cruce a cada pareja seleccionada para obtener dos descendientes,
- 3.- aplicar mutación sobre la población obtenida de la cruce.

El entorno o ambiente en el que se desenvuelven las poblaciones, en donde conviven y compiten por los recursos necesarios para subsistir, no puede introducirse como tal dentro de un modelo para la evolución. El aspecto más relevante del medio ambiente es la cuantificación de la capacidad de adaptación de los individuos al mismo. El modelo para este aspecto es una función positiva $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ que representa para cada individuo e su aptitud $f(e)$ al entorno. Esta función se conoce como función de aptitud y sirve de base para establecer un orden lineal en el conjunto de individuos.

Uno de los principios de la teoría Neo-Darwiniana establece que un organismo bien adaptado a su entorno, se reproducirá más veces que aquellos que no lo están. Los mecanismos de selección buscan capturar este principio. De tal modo, mientras más apto es un individuo mayor es la probabilidad de ser elegido. Dicho mecanismo consiste en elegir una población de n individuos mediante muestreo aleatorio con reemplazo, tomado de una población también de tamaño n . Este muestreo se realiza con una distribución de probabilidad proporcional respecto a la aptitud. Sea $E_i = (e_1, \dots, e_n)$ la población sobre la que se realiza la selección. Se define la probabilidad $p_s(e_k)$ de que el individuo e_k sea seleccionado

$$p_s(e_k) := \frac{f(e_k)}{\sum_{w=1}^n f(e_w)}, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (1)$$

La distribución de probabilidad sobre E_i queda determinada por (1). Se denota por $C(i)$ al conjunto de individuos que forman la población E_i , y por $J(i)$ al conjunto de poblaciones cuyos individuos pertenecen a $C(i)$. Para cada $j \in \{1, \dots, 2^{nl}\}$ se define $n_{ij} : C(i) \rightarrow \{0, \dots, n\}$, siendo $n_{ij}(c)$ el número de veces que c aparece en E_j , y se denota por $p_s(i, j)$ a la probabilidad de obtener la población E_j a partir de la población E_i por selección proporcional. Mediante el proceso de selección sólo es posible obtener individuos que pertenecen a $C(i)$, por lo tanto, para todo j tal que $E_j \notin J(i)$ se tiene $p_s(i, j) = 0$.

Sea $c \in C(i)$, digamos la k -ésima coordenada de E_i, e_k^i . Entonces la probabilidad $p_s^*(c)$ de seleccionar c del conjunto $C(i)$ es $n_{ii}(c)$ veces la probabilidad de seleccionar e_k^i de la población E_i , es decir,

$$p_s^*(c) = n_{ii}(c) \frac{f(e_k^i)}{\sum_{w=1}^n f(e_w^i)} = \frac{n_{ii}(c)f(c)}{\sum_{e \in C(i)} n_{ii}(e)f(e)}.$$

Ésta define una distribución de probabilidad sobre $C(i)$. Así, para j tal que $E_j \in J(i)$

$$p_s(i, j) = \prod_{c \in C(i)} n_{ij}(c) p_s^*(c). \quad (2)$$

Las probabilidades de transición entre poblaciones (2) pueden acomodarse en una matriz S de tamaño $2^{nl} \times 2^{nl}$, donde el elemento $S_{i,j}$ es $p_s(i, j)$. La transición entre poblaciones debido a la selección proporcional puede describirse con una cadena de Markov, donde los estados son las poblaciones y la dinámica entre las poblaciones está determinada por la matriz de transición S .

La cruce de individuos emula la manera en que se recombinan los cromosomas de los padres para obtener los cromosomas para un descendiente. Existe una gran variedad de técnicas de cruce para AGS, una técnica muy socorrida por su simplicidad es la cruce de un sólo punto. Un punto de cruce es un número natural entre 1 y la longitud de la cadena. La cruce de un sólo punto consiste en partir los cromosomas de los dos padres en un punto de cruce, para obtener dos individuos empalmando los segmentos de cromosomas de los padres. Dada una distribución de probabilidad $(\rho_1, \dots, \rho_l)$ sobre $\{1, \dots, l\}$, donde ρ_r es la probabilidad de elegir r como punto de cruce, la cruce se lleva a cabo en tres pasos:

- 1.- se inicia con una pareja de individuos $[x_1, \dots, x_l]$ y $[y_1, \dots, y_l]$, los padres,
- 2.- con la distribución dada se elige un punto de cruce, digamos r_o . Los cromosomas padres se dividen en dos segmentos $[x_1, \dots, x_{r_o}]$, $[x_{r_o+1}, \dots, x_l]$ y $[y_1, \dots, y_{r_o}]$, $[y_{r_o+1}, \dots, y_l]$,
- 3.- los hijos o descendientes son $[x_1, \dots, x_{r_o}, y_{r_o+1}, \dots, y_l]$ y $[y_1, \dots, y_{r_o}, x_{r_o+1}, \dots, x_l]$.

Cuando $\rho_l = 1$, claramente no habrá cruce, mientras que cuando $\rho_l = 0$, siempre habrá cruce. En la práctica se emplea $0 < \rho_l < 1$ para dar posibilidad a que haya cruce, así como a que los padres pasen a la siguiente generación.

El mecanismo de cruce para el AGS consiste en aplicar la cruce a una población para obtener otra población del mismo tamaño. Sea $E_i = (e_1, \dots, e_n)$ la población sobre la que se aplica la cruce, donde se supone que n es par. Para cada $k \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$, se aplica la cruce de un sólo punto a la pareja e_{2k-1}, e_{2k} , con lo que se obtiene una pareja de descendientes, con los cuales se forma la nueva población. Se denota por $p_c(i, j)$ a la probabilidad de obtener una población E_j a partir de la población E_i mediante la cruce. Para $x \in \mathbb{R}^l$ y $r \in \{1, \dots, l\}$, la función delta de Kronecker $\delta_x^r : \mathcal{C} \rightarrow \{0, 1\}$ está definida como

$$\delta_x^r(y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x_r = y_r, \\ 0 & \text{si } x_r \neq y_r. \end{cases}$$

La probabilidad de obtener al individuo e mediante cruce de un sólo punto entre la pareja de individuos (x, y) es

$$p_{x,y}(e) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^l \rho_r \left[\prod_{s=1}^r \delta_x^s(e) \prod_{s=r+1}^l \delta_y^s(e) + \prod_{s=1}^r \delta_y^s(e) \prod_{s=r+1}^l \delta_x^s(e) \right],$$

donde por definición $\prod_{s=l+1}^l \delta_x^s(e) := 1$. Por consiguiente, la probabilidad $p_c(i, j)$ de obtener la población $E_j = (x_1, \dots, x_n)$ a partir de E_i mediante la cruce, está dada por

$$p_c(i, j) = \prod_{k=1}^{n/2} [p_{e_{2k-1}, e_{2k}}(x_{2k-1}) p_{e_{2k-1}, e_{2k}}(x_{2k})]. \quad (3)$$

Se denota por C a la matriz de tamaño $2^{nl} \times 2^{nl}$ tal que el elemento $C_{i,j}$ es $p_c(i, j)$. La transición entre poblaciones debido a la cruce se modela con una cadena de Markov, donde los estados son las poblaciones y la dinámica entre las poblaciones está determinada por la matriz de probabilidades de transición C .

En la naturaleza se ha observado que los padres heredan sus características a sus descendientes, sin embargo, en ocasiones surgen individuos con rasgos distintos a los de sus progenitores. Este fenómeno se introduce de manera simplificada en los esquemas evolutivos mediante el mecanismo de mutación. En éste se considera que los cromosomas que los padres heredan a los hijos son susceptibles a una modificación aleatoria de uno o más genes. Aunque las observaciones indican que la mutación sucede con poca frecuencia, ésta juega un papel importante en la evolución de las especies. Aquí se emplea mutación uniforme, la cual es adecuada para la representación asumida.

Sea $e \in \mathcal{C}$, y $[x_1, \dots, x_l]$ su representación binaria. Cada bit de la cadena se cambia de 0 a 1 o viceversa, con probabilidad de mutación p_m , y permanece igual con probabilidad $1 - p_m$. Cuando $p_m = 0$, ninguno de los genes se modifica, mientras que cuando $p_m = 1$ todos los genes cambian.

La mutación puede verse también como un mecanismo que transforma poblaciones en poblaciones. Para esto, sean $x, y \in \mathcal{C}$, y $[x_1, \dots, x_l]$, $[y_1, \dots, y_l]$ sus representaciones binarias, respectivamente. Se define la distancia de Hamming entre x y y por

$$H(x, y) := \sum_{r=1}^l |x_r - y_r|,$$

ésta representa el número de bits en que difieren dos cadenas. Con esta notación, la probabilidad m_{xy} de que el individuo x se convierta en el individuo y , debido a la mutación, se expresa como

$$m_{xy} = p_m^{H(x,y)} (1 - p_m)^{l-H(x,y)}.$$

La probabilidad de que $E_j = (e_1^j, \dots, e_n^j)$ se obtenga a partir de $E_i = (e_1^i, \dots, e_n^i)$ debido al mecanismo de mutación, es la probabilidad de que, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, el k -ésimo individuo de E_i se transforme en el k -ésimo individuo de E_j . Así, la probabilidad $p_m(i, j)$ de obtener E_j a partir de E_i debido a la mutación está dada por

$$p_m(i, j) = \prod_{k=1}^n m_{e_k^i, e_k^j}. \quad (4)$$

Sea M la matriz de tamaño $2^{nl} \times 2^{nl}$, donde el elemento $M_{i,j}$ es $p_m(i, j)$. La dinámica entre poblaciones debido a la mutación uniforme, puede modelarse con una cadena de Markov, donde los estados son las poblaciones y la matriz de probabilidades de transición es M .

En conformidad con el principio Neo-Darwiniano de la evolución, la reproducción en el AGS es el resultado de la composición de los mecanismos de selección, cruce y mutación, en consecuencia es un mecanismo que actúa sobre las poblaciones.

Sea E^0 una población inicial de tamaño n par. A esta población se le denomina generación 0. Para $t \in \mathbb{N}$, la generación E^{t+1} se obtiene aplicando la reproducción a la generación E^t , de la siguiente manera

- 1.- Obtener la población E_s^t mediante selección proporcional sobre E^t .
- 2.- Obtener la población E_{sc}^t aplicando el mecanismo de cruce de un sólo punto a la población E_s^t .
- 3.- Obtener la población E_{scm}^t tras aplicar mutación uniforme sobre la población E_{sc}^t .

4.- La población E_{scm}^t constituye la generación E^{t+1} .

Este mecanismo de reproducción se modela mediante una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{C}^n$ y matriz de transición

$$Q = MCS, \quad (5)$$

donde M , C y S son las matrices de transición definidas por (4), (3) y (2), respectivamente. Supóngase además que $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{2^{nl}})$ es la distribución inicial para la cadena de Markov, es decir, para cada $i \in \{1, \dots, 2^{nl}\}$, μ_i es la probabilidad de que la población inicial sea E_i . De esta manera, la distribución para el estado de la cadena en el paso t es

$$q^t = \mu Q^t, \quad (6)$$

y en consecuencia la i -ésima componente de q^t es la probabilidad q_i^t de que al periodo t el estado sea la población E_i .

Para dar seguimiento a la evolución de una especie se deben observar tantas generaciones como sea necesario. Un criterio de paro es una condición que permite detener las iteraciones del AGS. Algunos criterios de paro son un número máximo de generaciones, se cumple un tiempo de cómputo, o que la aptitud entre generaciones ya no cambia.

2.2 Algoritmo Genético Elitista

Desde un punto de vista pragmático, en cada esfuerzo por resolver un problema usualmente no se pretende obtener la solución óptima, sino que se busca mejorar la solución que hasta el momento se conoce. Este proceso de mejora lleva implícito el mecanismo natural de conservar la mejor solución. Cuando dicho mecanismo se incluye de manera sistemática en un AGS se obtiene una variante conocida como AGE. De esta manera, el AGE conserva en cada generación al individuo más apto, denominado super individuo, mismo que no se ve afectado por los mecanismos genéticos.

En esta sección se introduce un modelo matemático para el AGE, mediante una cadena finita de Markov. Se comienza con la descripción de las poblaciones y, posteriormente, de los mecanismos genéticos selección, cruza y mutación, además se introduce un nuevo mecanismo denominado «actualización del super individuo», el cual está asociado con la característica de almacenar al mejor individuo encontrado en el AGE. La composición de estos cuatro mecanismos da lugar al mecanismo de reproducción elitista. Para el modelo del AGE que aquí se expone, se asume representación binaria de longitud positiva l para los individuos y una función de aptitud $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ positiva y no constante.

2.2.1 Representación de individuos y poblaciones

Un individuo está representado por una cadena binaria de longitud l , y una población es un elemento de $\mathcal{C}^{n+1}$, con n par. La notación $n+1$ se debe a que las generaciones $E^t = (e_0^t, e_1^t, \dots, e_n^t)$ del AGE tienen la particularidad de que e_0^t es el super individuo, además, los mecanismos genéticos operan sólo sobre la subpoblación $(e_1^t, \dots, e_n^t)$. En virtud de lo anterior, es conveniente identificar al conjunto de poblaciones $\mathcal{C}^{n+1}$ como $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^n$, así una población E puede verse como $(e_0, \hat{E})$, donde e_0 es un individuo y $\hat{E} = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{C}^n$, y cuando E es una generación, e_0 es el super individuo. Puesto que $\mathcal{C}$ es finito, puede establecerse un orden lineal $\prec$, el cuál es parcialmente decreciente en la aptitud, esto es, para cada par de individuos a, b

- si $f(a) > f(b)$, entonces $a \prec b$, y
- $a \prec b$ implica que $f(a) \geq f(b)$.

Se ordenan las poblaciones mediante el orden lexicográfico: sean $E_i = (e_0^i, \hat{E}_i)$, $E_j = (e_0^j, \hat{E}_j)$ poblaciones. Se dice que $E_i < E_j$ si $e_0^j < e_0^i$ o bien, si $e_0^i = e_0^j$ y $\hat{E}_i < \hat{E}_j$, donde $<$ es el orden establecido para C^n en la subsección 2.1.1. Note que el orden lineal $<$ es parcialmente decreciente en la aptitud con respecto a la primer coordenada, es decir,

- $f(e_0^i) > f(e_0^j)$ implica que $(e_0^i, \hat{E}_i) < (e_0^j, \hat{E}_j)$, y
- si $(e_0^i, \hat{E}_i) < (e_0^j, \hat{E}_j)$, entonces $f(e_0^i) \geq f(e_0^j)$.

Se considera un ordenamiento de C^{n+1} ascendente con respecto a $<$. De esta manera, al menos las primeras 2^{nl} poblaciones contienen en su primer coordenada al individuo con máxima aptitud.

2.2.2 La reproducción

La reproducción entre poblaciones también considera mecanismos de selección, cruza y mutación, sin embargo, el superindividuo no participa de este proceso. Se aplica también un mecanismo denominado *actualización del super individuo*, que consiste en reemplazar al elemento e_0 por el individuo más apto de la población $E = (e_0, e_1, \dots, e_n)$.

El proceso de reproducción del AGE se describe enseguida. Sea E' una población inicial de tamaño $n + 1$ con n par. Se denomina generación 0 a la población E^0 obtenida al actualizar el super individuo en E' . La generación E^{t+1} se obtiene a partir de E^t , de la siguiente manera.

- 1.- Identificar $E^t = (e_0^t, \hat{E}^t)$.
- 2.- Aplicar selección elitista: obtener la subpoblación $\hat{E}_s^t$ mediante selección sobre $\hat{E}^t$.
- 3.- Aplicar cruza elitista: obtener la subpoblación $\hat{E}_{sc}^t$ de aplicar cruza a $\hat{E}_s^t$.
- 4.- Aplicar mutación elitista: obtener la subpoblación $\hat{E}_{scm}^t$ al aplicar mutación sobre $\hat{E}_{sc}^t$.
- 5.- Formar la población $E_{scm}^t = (e_0^t, \hat{E}_{scm}^t)$.
- 6.- Obtener la población E_{scma}^t actualizando el super individuo en E_{scm}^t .
- 7.- La población E_{scma}^t constituye la generación E^{t+1} .

En vista de lo anterior, la selección, cruza y mutación elitistas, así como la actualización del super individuo pueden considerarse, de manera independiente, como mecanismos que transforman poblaciones de C^{n+1} en poblaciones de C^{n+1} . A continuación se modelan como cadenas de Markov cada uno de los cuatro mecanismos involucrados en este proceso de reproducción.

Dado que el super individuo no participa en los mecanismos genéticos, la selección elitista proporcional consiste en realizar selección proporcional en la subpoblación tal como en el AGS.

Sean $E_i = (e_0^i, \hat{E}_i)$, $E_j = (e_0^j, \hat{E}_j)$ poblaciones. Para determinar la probabilidad $\hat{p}_s(i, j)$ de obtener E_j por selección sobre E_i , se distinguen dos casos:

- e_0^i y e_0^j son distintos: la probabilidad $\hat{p}_s(i, j)$ es cero.
- e_0^i y e_0^j son iguales: en este caso $\hat{p}_s(i, j)$ es igual a la probabilidad $p_s(i, j)$ de obtener $\hat{E}_j$ de $\hat{E}_i$ por selección proporcional definida en (2).

Resumiendo lo anterior,

$$\hat{p}_s(i, j) := \begin{cases} p_s(i, j) & \text{si } e_0^i = e_0^j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (7)$$

Se denota por S^+ a la matriz $2^{(n+1)l} \times 2^{(n+1)l}$, cuyo elemento $S_{i,j}^+$ es $\hat{p}_s(i, j)$. Un modelo para la dinámica entre poblaciones debido a la selección elitista proporcional, es una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{C}^{n+1}$ y matriz de transición

$$S^+ = \begin{pmatrix} S & & \\ & \ddots & \\ & & S \end{pmatrix},$$

donde cada bloque S es la matriz de transición para la selección proporcional en el AGS. Puesto que S^+ y S son de tamaño $2^{(n+1)l}$ y 2^{nl} , respectivamente, S^+ tiene 2^l bloques.

Dado que el super individuo no participa, la cruza de un solo punto se lleva a cabo a nivel de subpoblaciones como en el AGS. A este mecanismo se le llamará cruza elitista de un sólo punto.

Sean $E_i = (e_0^i, \hat{E}_i)$, $E_j = (e_0^j, \hat{E}_j)$ poblaciones, y $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l)$ una distribución de probabilidad para elegir el punto de cruza, donde l es la longitud de la representación binaria. Para determinar la probabilidad $\hat{p}_c(i, j)$ de obtener E_j por cruza sobre E_i , se identifica dos casos:

- e_0^i y e_0^j son distintos: la probabilidad $\hat{p}_c(i, j)$ es cero.
- e_0^i y e_0^j son iguales: $\hat{p}_c(i, j)$ es igual a la probabilidad $p_c(i, j)$ de obtener $\hat{E}_j$ de $\hat{E}_i$ por cruza de un solo punto con distribución ρ , para el AGS, definida en (3).

Lo anterior se resume como

$$\hat{p}_c(i, j) := \begin{cases} p_c(i, j) & \text{si } e_0^i = e_0^j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (8)$$

Se denota por C^+ a la matriz $2^{(n+1)l} \times 2^{(n+1)l}$, donde el elemento $C_{i,j}^+$ es $\hat{p}_c(i, j)$. Un modelo para la dinámica entre poblaciones debido a la cruza elitista de un sólo punto es una cadena de Markov, con espacio de estados $\mathcal{C}^{n+1}$ y matriz de transición

$$C^+ = \begin{pmatrix} C & & \\ & \ddots & \\ & & C \end{pmatrix},$$

donde C es la matriz de transición debido a la cruza de un sólo punto definida en AGS.

La mutación elitista uniforme es el mecanismo en el que la mutación sobre las subpoblaciones es uniforme con probabilidad de mutación p_m . Sean $E_i = (e_0^i, \hat{E}_i)$, $E_j = (e_0^j, \hat{E}_j)$ poblaciones. Para determinar la probabilidad $\hat{p}_m(i, j)$ de obtener E_j por mutación sobre E_i , se distinguen dos casos:

- e_0^i y e_0^j son distintos: la probabilidad $\hat{p}_m(i, j)$ es cero.
- e_0^i y e_0^j son iguales: en este caso $\hat{p}_m(i, j)$ coincide con la probabilidad $p_m(i, j)$ de obtener $\hat{E}_j$ de $\hat{E}_i$ por mutación uniforme para el AGS, tal como en (4).

Resumiendo lo anterior,

$$\hat{p}_m(i, j) := \begin{cases} p_m(i, j) & \text{si } e_0^i = e_0^j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (9)$$

Denótese por M^+ a la matriz $2^{(n+1)l} \times 2^{(n+1)l}$, cuyo elemento $M_{i,j}^+$ es $\hat{p}_m(i, j)$. La transición entre poblaciones debido a la mutación elitista uniforme puede modelarse mediante una cadena de Markov, con espacio de estados $\mathcal{C}^{n+1}$ y matriz de transición

$$M^+ = \begin{pmatrix} M & & \\ & \ddots & \\ & & M \end{pmatrix},$$

donde M es la matriz de transición de la mutación uniforme definida en el AGS.

La actualización del superindividuo no tiene inspiración en la evolución de las especies, sino que se introduce con fines meramente técnicos, y constituye la principal diferencia entre el AGS y el AGE. Este mecanismo consiste en reemplazar el elemento e_0 de una población $E = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ por el super individuo. Como puede observarse, la actualización del super individuo es un mecanismo determinista, que transforma poblaciones en poblaciones. Sean $E_i = (e_0^i, \hat{E}_i)$, $E_j = (e_0^j, \hat{E}_j)$ poblaciones, la probabilidad $p_a(i, j)$ de obtener la población E_j a partir de la actualización del super individuo sobre E_i es

$$p_a(i, j) := \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{E}_i = \hat{E}_j \text{ \& } e_0^j = e_{k^*}, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (10)$$

donde

$$k^* = \min \left\{ k \in \{1, \dots, n\} : f(e_k^i) = \max_{0 \leq r \leq n} f(e_r^i) \right\}.$$

Se denota por U a la matriz cuyo elemento $U_{i,j}$ es $p_a(i, j)$, conocida como matriz de mejora. De esta manera, la actualización del super individuo puede modelarse mediante una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{C}^{n+1}$ y matriz de transición

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} & & & \\ U_{2,1} & U_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ U_{2^l,1} & U_{2^l,2} & \cdots & U_{2^l,2^l} \end{pmatrix}.$$

Cabe señalar que en cada fila hay solamente una componente igual a uno, mientras que todas la demás son cero. De hecho, el bloque $U_{1,1}$ es la matriz identidad $2^l \times 2^l$, y para los demás bloques, los unos están situados en las diagonales. La estructura de U es una consecuencia del ordenamiento establecido en el conjunto de poblaciones.

La cadena de Markov determinada por U tiene una dinámica poco interesante, puesto que al aplicar el mecanismo sobre una población, ésta sólo tiene oportunidad de cambiar en la primera iteración, ya que después tendrá como elemento e_0 al super individuo. Sin embargo, cobra importancia cuando se compone con los tres mecanismos genéticos, más aún, la actualización es el mecanismo clave para fines computacionales y de convergencia.

La reproducción es la composición de los mecanismos de selección elitista proporcional, cruza elitista de un sólo punto, mutación elitista uniforme y la actualización del super individuo. Por lo tanto, se modela mediante una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{C}^{n+1}$ y matriz de transición $Q^+ = UM^+C^+S^+$, la cual tiene la forma

$$Q^+ = \begin{pmatrix} Q & & & \\ QU_{2,1} & QU_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ QU_{2^l,1} & QU_{2^l,2} & \cdots & QU_{2^l,2^l} \end{pmatrix}.$$

Identificando las matrices

$$R = \begin{pmatrix} QU_{2,1} \\ \vdots \\ QU_{2^l,1} \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} QU_{2,2} & & \\ \vdots & \ddots & \\ QU_{2^l,2} & \cdots & QU_{2^l,2^l} \end{pmatrix},$$

la matriz Q^+ puede escribirse en la forma

$$Q^+ = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ R & T \end{pmatrix}.$$

Puesto que Q y T son matrices cuadradas, Q^+ es reducible. La hipótesis de que f no es constante, garantiza que R y T son matrices no nulas.

Sea $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{2^{(n+1)l}})$ la distribución inicial para la cadena de Markov, es decir, para cada $i \in \{1, \dots, 2^{(n+1)l}\}$, τ_i es la probabilidad de que la población inicial sea E_i . De esta manera, la distribución del estado en el paso t es

$$\hat{q}^t = \tau(Q^+)^t. \quad (11)$$

Así, la i -ésima componente de $\hat{q}^t$ es la probabilidad $\hat{q}_i^t$ de que el estado de la cadena en el paso t sea la población E_i .

3 AG dentro de la teoría de optimización

Sea A un conjunto no vacío, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y $\mathcal{F}$ un subconjunto de A . El problema de optimización consiste en:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \quad & \text{Maximizar} \quad f(x) \\ & \text{sujeto a:} \quad x \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Se denomina a f función objetivo, a $\mathcal{F}$ conjunto factible, y a los elementos de $\mathcal{F}$ soluciones factibles. Cuando $\mathcal{F}$ es no vacío, se dice que el problema $\mathcal{L}$ es consistente y el valor de $\mathcal{L}$ se define como $\sup \mathcal{L} := \sup\{f(x) : x \in \mathcal{F}\}$. El problema es soluble si existe una solución factible x^* tal que $f(x^*) = \sup \mathcal{L}$, cuando éste es el caso, a x^* se le denomina solución óptima, a $f(x^*)$ valor óptimo y el valor $\sup \mathcal{L}$ se escribe como $\max \mathcal{L} = f(x^*)$.

Los AGS se utilizan para abordar gran variedad de problemas de la forma $\mathcal{L}$, para mejorar soluciones factibles conocidas, hallar aproximaciones a soluciones óptimas y, en el mejor de los casos, encontrar soluciones óptimas. Los resultados teóricos sobre la convergencia de los AG, hasta el momento, son limitados. En este ámbito destaca el trabajo Convergence analysis of canonical genetic algorithms, de Günter Rudolph, en el que se aborda una clase de problemas tipo $\mathcal{L}$ donde el conjunto factible $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las cadenas de ceros y unos de longitud l , al cual se denota por $\{0, 1\}^l$, y la función objetivo f es positiva y no constante. Explícitamente, considera los problemas de la forma

$$\begin{aligned} P : \quad & \text{Maximizar:} \quad f(x) \\ & \text{sujeto a:} \quad x \in \{0, 1\}^l. \end{aligned}$$

El AGS asociado al problema P tiene las siguientes características:

- Los individuos del AGS son las soluciones factibles de P . Así, el conjunto de individuos $\mathcal{C}$ es el conjunto factible $\{0, 1\}^l$.
- La selección es proporcional, con función de aptitud dada por la función objetivo f .
- Cruza de un sólo punto con distribución de probabilidad para el punto de cruce dada.
- Mutación uniforme, con probabilidad de mutación $p_m \in (0, 1)$.

Por otra parte, incluyendo el mecanismo de actualización del super individuo, se obtiene el AGE asociado al problema P .

Se dice que el AG «converge» si éste genera una sucesión de soluciones factibles para la cuál el óptimo de P es un valor límite. Günter Rudolph considera los algoritmos genéticos asociados a P , y demuestra que el AGS no «converge» al óptimo global, y que el AGE «converge» al óptimo global.

4 Convergencia de AG

4.1 Estado del arte

Los AG fueron introducidos por Holland en 1975, a partir de entonces muchos artículos han sido publicados proponiendo variantes así como mostrando aplicaciones en diversas disciplinas [11]. Por otra parte, pocos son los trabajos que abordan el problema de la convergencia de AG.

En A.E. Eiben et.al.(1990) se presenta una cadena de Markov para modelar la evolución del AG, y se establecen condiciones suficientes para la convergencia en probabilidad. Liepins(1992) demuestra la convergencia en una clase de AG sin mecanismo de mutación, con reemplazamiento de individuos elitista y un mecanismo de cruza en el que cualquier punto del espacio es potencialmente alcanzable. Chakraborty y Dastidar (1993) presentan un modelo de fiabilidad estocástica de un esquema para el AG binario con longitud de representación fija, y estiman el número de generaciones necesarias para la convergencia. Suzuki (1993) usa cadenas de Markov para realizar un estudio de convergencia para una clase de AG con un criterio de reducción elitista modificado, según el cual se genera una población de individuos, que preserva el mejor individuo de la generación anterior, y los individuos restantes se determinan por medio de las operaciones genéticas normales. Davis y Principe (1993), siguiendo los fundamentos teóricos del algoritmo simulated annealing (recocido simulado) presentan un modelo para una clase de AG, basado en cadenas de Markov. En 1994 Rudolph demuestra la convergencia del AGE, así como la no convergencia del AGS. Alexandru Agapie (1998) complementa el trabajo de Rudolph al demostrar que aunque la matriz de mutación no sea positiva, pero añadiendo una restricción sobre la matriz de la cruza, también hay convergencia.

4.2 Convergencia

Se denota con f^* la máxima aptitud dentro del conjunto de individuos, esto es,

$$f^* := \max\{f(c) | c \in \mathcal{C}\},$$

asimismo, Z_t representa la máxima aptitud de la generación $E^t = (e_1^t, \dots, e_n^t)$, es decir,

$$Z_t := \max\{f(e_k^t) | k = 1, \dots, n\}.$$

Definición 1. Para cada $t \in \mathbb{N}$, sea E^t el estado del AG en el paso t . Se dice que un Algoritmo Genético converge al individuo más apto si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{Z_t = f^*\} = 1, \quad (12)$$

donde $\mathcal{P}\{Z_t = f^*\}$ denota la probabilidad de que la aptitud máxima de la generación t sea f^* .

Teorema 1. *El AGS no converge al individuo más apto.*

Corolario 1. *El AGS asociado al problema de optimización $\mathbf{P}$ no converge al óptimo del problema.*

La demostración del teorema se dará al final de la sección, no obstante el resultado es intuitivo. En efecto, puesto que la matriz de transición es primitiva, la cadena de Markov es ergódica, y por lo tanto el tiempo esperado de transición entre dos estados es finito. Luego, en algún paso el proceso se encontrará en un estado que contiene al individuo más apto, sin embargo éste se pierde al aplicar el mecanismo de reproducción. Lo anterior sugiere que al considerar un mecanismo de conservación del individuo más apto a lo largo de las generaciones, se logra la convergencia. Este es el argumento intuitivo para la convergencia del AGE.

Teorema 2. *El AGE converge al individuo más apto.*

Corolario 2. *El AGE asociado al problema de optimización $\mathbf{P}$ converge al óptimo del problema.*

Con el fin de presentar demostraciones razonablemente autocontenidas, se enuncian dos resultados preliminares cuyas demostraciones pueden consultarse en Iosifescu(1980).

Lema 1. *Sean Q una matriz estocástica primitiva, de tamaño $n \times n$, y μ^0 un vector de distribución de tamaño n . Entonces existe el límite de Q^k cuando k tiende a infinito, denotado Q^∞ . Más aún, Q^∞ es una matriz estocástica, positiva, estable, y tiene una expresión de la forma*

$$Q^\infty = e\mu^\infty,$$

donde e un vector columna con n componentes iguales a 1, y cada una de las componentes de la distribución límite $\mu^\infty = \mu^0 Q^\infty$ es positiva.

Lema 2. *Sean μ^0 un vector de distribución de tamaño n , y Q una matriz estocástica reducible, de tamaño $n \times n$, expresada como*

$$Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ R & T \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz cuadrada, de tamaño $m \times m$, estocástica y primitiva, R y T matrices no nulas. Entonces existe el límite de Q^k cuando k tiende a infinito, denotado por Q^∞ , y tiene la forma

$$Q^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ \sum_{i=0}^{k-1} T^i R A^{k-i} & T^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\infty & 0 \\ R^\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración del teorema 1. Sea I el conjunto de índices de las poblaciones cuyos individuos tienen aptitud menor a f^* , es decir,

$$I := \{j | f(e_k) < f^* \text{ para toda coordenada } e_k \text{ de } E_j\}.$$

Usando la distribución de la cadena en el paso t , dada en (6), la probabilidad de que al periodo t el estado de la cadena no contenga al individuo más apto es

$$\mathcal{P}\{Z_t \neq f^*\} = \sum_{j \in I} q_j^t.$$

Ya que la función de aptitud no es constante, I es no vacío. Sea $i \in I$, así,

$$\mathcal{P}\{Z_t \neq f^*\} = \sum_{j \in I} q_j^t \geq q_i^t,$$

además $\mathcal{P}\{Z_t = f^*\} \leq 1 - q_i^t$. Puesto que Q es primitiva, el lema 1 garantiza que el límite de q_i^t , cuando t tiende a infinito, existe y es positivo. Así, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{Z_t = f^*\}$ existe y además

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{Z_t = f^*\} \leq 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} q_i^t < 1.$$

Por lo tanto, el AGS no converge. □

Demostración del teorema 2. La distribución de probabilidad del estado al paso t para la cadena de Markov que modela el AGE está dada por (11). Por la manera en que fueron numeradas las poblaciones, al menos las primeras 2^{nl} tienen al individuo más apto, por lo cual la probabilidad de que al periodo t el estado de la cadena no contenga al individuo más apto se puede acotar por

$$\mathcal{P}\{Z_t \neq f^*\} \leq \sum_{i=2^{nl}+1}^{2^{(n+1)l}} \hat{q}_i^t.$$

Luego, puesto que Q^+ es reducible, con R, T matrices no nulas y Q matriz primitiva, el lema 2 afirma que para cada $i \in \{1, \dots, 2^{(n+1)l}\}$, el límite de $\hat{q}_i^t$ cuanto t tiende a infinito, existe. Más aún, para $i \in \{1, \dots, 2^{nl}\}$ el límite es positivo, y para $i \in \{2^{nl} + 1, \dots, 2^{(n+1)l}\}$ el límite es cero. De lo anterior se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{Z_t \neq f^*\} = 0.$$

Por otra parte, la probabilidad de que al periodo t el estado de la cadena contenga al individuo más apto es:

$$\mathcal{P}\{Z_t = f^*\} = 1 - \mathcal{P}\{Z_t \neq f^*\}.$$

Tomando el límite cuando t tiende a infinito se llega al resultado. □

5 Tratamiento de problemas de optimización no restringida

Considere un problema de optimización de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' : \quad & \text{Minimizar} \quad f(x) \\ & \text{sujeto a:} \quad x \in I, \end{aligned}$$

donde $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]$ es un rectángulo en $\mathbb{R}^k$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Para usar el AGE en el cálculo de aproximaciones a las soluciones de un problema de la forma $\mathbf{P}'$ se requiere primero transformarlo en uno de la forma $\mathbf{P}$. El proceso involucra dos pasos

- convertir el problema de minimización en uno de maximización con función objetivo positiva, y
- discretizar el conjunto factible I para obtener un conjunto de la forma $\{0, 1\}^l$.

El problema $\mathbf{P}'$ se transforma en uno de maximización y para garantizar que la nueva función objetivo es positiva se suma $\lambda + 1$, donde λ es una cota superior de $\{f(x) | x \in I\}$, obteniendo el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & -f(x) + \lambda + 1 \\ \text{sujeto a:} \quad & x \in I, \end{aligned}$$

Para la discretización del conjunto factible, tómese un número entero positivo l , tal que es un múltiplo entero de k . El entero l define una malla para I de tamaño 2^l de la manera siguiente: para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ sea

$$\wp_j = \{c_i^j = a_j + i\Delta_j | i = 0, 1, \dots, 2^{l/k} - 1\},$$

la partición uniforme de $[a_j, b_j]$, donde

$$\Delta_j = \frac{b_j - a_j}{2^{l/k} - 1}.$$

Con estas particiones se define una malla $\mathcal{M}_l$ para I , de tamaño 2^l , mediante el producto cartesiano:

$$\mathcal{M}_l := \wp_1 \times \dots \times \wp_k.$$

Para transformar $\mathcal{M}_l$ al conjunto $\{0, 1\}^l$ se define una biyección de la malla $\mathcal{M}_l$ al conjunto $\{0, 1\}^l$ dada por la composición

$$h := \varphi \circ \phi : \{0, 1\}^l \rightarrow \mathcal{M}_l(I),$$

donde $\phi : \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1, \dots, 2^l - 1\}$ es la función que transforma una cadena binaria en un número entero en la manera usual, esto es, para $e = [e_0 e_1 \dots e_{l-1}] \in \{0, 1\}^l$:

$$\phi(e) := \sum_{r=1}^l 2^{r-1} e_{l-r},$$

y $\varphi : \{0, 1, \dots, 2^l - 1\} \rightarrow \mathcal{M}$ es la función que transforma un número entero z entre 0 y $2^l - 1$ en un punto $(\varphi_1(z), \dots, \varphi_k(z)) \in \mathbb{R}^k$, donde, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$\varphi_j(z) := a_j + \lfloor \bar{z}_j / 2^{l(j-1)/k} \rfloor \Delta_j.$$

En esta última expresión, $\lfloor \cdot \rfloor$ representa la función piso definida por $\lfloor x \rfloor := \max\{w \in \mathbb{Z} | w \leq x\}$, y $\bar{z}_j := z$ cuando $j = k$, en otro caso:

$$\bar{z}_j := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \equiv \bar{z} \pmod{2^{l/k}}, \\ 1 & \text{si } 1 \equiv \bar{z} \pmod{2^{l/k}}, \\ \vdots & \\ 2^{l/k} - 1 & \text{si } (2^{l/k} - 1) \equiv \bar{z} \pmod{2^{l/k}}. \end{cases}$$

Nótese que mientras mayor sea l , la malla $\mathcal{M}$ será más fina.
Con los elementos anteriores, a $\mathbf{P}'$ se le asocia el problema

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_l : \quad & \text{Maximizar} \quad (-f \circ h)(x) + \lambda + 1 \\ & \text{sujeto a:} \quad x \in \{0, 1\}^l. \end{aligned}$$

Claramente, $\mathbf{P}_l$ no es equivalente al problema original, ya que se trata de un problema de optimización sobre un conjunto finito, mientras que en $\mathbf{P}'$ se optimiza sobre un conjunto continuo. Por otra parte, el AGE está diseñado para aproximar la solución óptima de $\mathbf{P}_l$. Por lo tanto, el error de la aproximación encontrada por el AGE será mayor o igual que la diferencia entre el óptimo de $\mathbf{P}$ y el óptimo de $\mathbf{P}'$.

Observación 1. Se puede demostrar, bajo condiciones de continuidad para la función objetivo, que la sucesión de valores óptimos $\{\max \mathbf{P}_l\}_{l=1}^{\infty}$ converge al valor óptimo $\max \mathbf{P}'$.

6 Resultados numéricos obtenidos con el AGE

Algunas de las características deseables de los algoritmos de optimización son:

- capacidad de exploración del espacio de búsqueda,
- escapar de óptimos locales,
- eficiente en regiones donde la función presenta poca variación, y
- útil en situaciones en las que las técnicas clásicas no pueden emplearse.

Para evaluar la capacidad de exploración del espacio de búsqueda, se puede usar un problema que presente un máximo local y un óptimo global, con la característica de que, en proporción, el área de atracción del máximo local sea mucho mayor que la del óptimo global, como en la función Damavandi (fig 1(A)). Llevado esto a la práctica, si un algoritmo es atrapado por el máximo local, se concluye que es deficiente en la exploración del espacio de búsqueda. Para evaluar la habilidad

de escapar de máximos locales, se emplean problemas que presenten un único óptimo global rodeado de máximos locales, por ejemplo, la función Ackley3 (fig 1(B)). Si en una ejecución del algoritmo, la aproximación encontrada tiene un mejor objetivo que el de los máximos locales, se puede concluir que, en esa ejecución, el algoritmo ha escapado de los máximos locales. Por otra parte, se pone a prueba la capacidad para escapar de regiones con poca variación en la función objetivo mediante problemas cuya función objetivo presenta valles o mesetas en su gráfica, como es el caso de la función Wayburn (fig 1(C)). Se usan problemas con función objetivo discontinua o no diferenciable para evaluar la utilidad del algoritmo en problemas donde las técnicas clásicas no pueden aplicarse, como la función Tipod (fig 1(D)).

Con el fin de evaluar en AGE en las características mencionadas, se eligieron cuatro problemas, tomados de una colección de problemas benchmark para problemas de optimización no restringida, propuestos en Momin(2013). Se realizó una implementación del AGE, en lenguaje C, disponible en Landa(2014). Para llevar a cabo las ejecuciones del AGE se estableció el siguiente conjunto de parámetros: longitud de la representación $l = 24$; tamaño de la población $n = 22$; probabilidad de mutación $p_m = 0.07$; número de generaciones $T = 10000$; y distribución de probabilidad para la cruza

$$p_c = \begin{cases} 1/l & \text{si } i = 1, 2, \dots, l-1, \\ 1 - (l-1)/l & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para cada problema se realizaron 8 ejecuciones y se presenta la información de la mejor aproximación al valor óptimo.

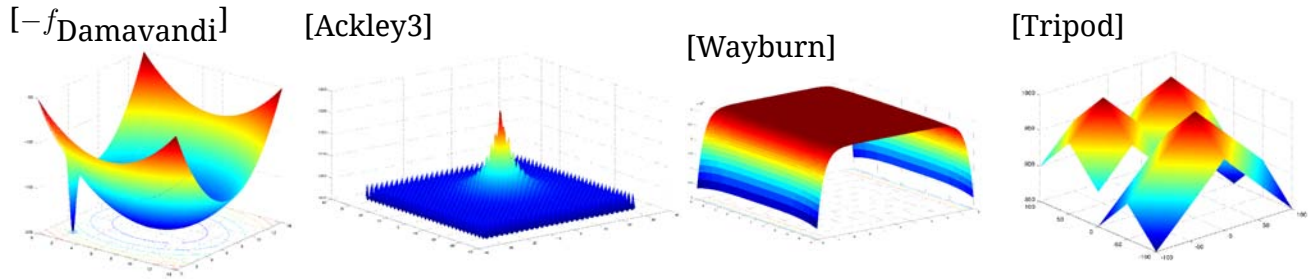


Figura 1: Gráficas de la funciones Benchmark.

Función Damavandi:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar :} \quad & f_{42}(x, y) = - [2 + (x - 7)^2 + 2(y - 7)^2] [1 - |g(x, y)|^5] + 200 \\ \text{sujeto a :} \quad & x, y \in [0, 14], \end{aligned}$$

donde

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(x-2)) \sin(\pi(y-2))}{\pi^2(x-2)(y-2)} & \text{si } x \neq 2 \text{ \& } y \neq 2, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función Damavandi alcanza un máximo local en $(7, 7)$, con $f(7, 7) = 198$, mientras que el óptimo global se encuentra en $x^* = (2, 2)$, con valor $f(x^*) = 200$. La función objetivo es diferenciable, por lo que puede abordarse el problema con técnicas clásicas basadas en el gradiente, aunque es bien sabido que éstas tienden a quedar atrapadas en el máximo local. La aproximación al valor óptimo que se encontró con el AGE es $f(x_{approx}^*) = 199.9258$, donde $x_{approx}^* = (1.9897, 1.9965)$. Se concluye que el AGE ha explorado exitosamente el espacio de búsqueda, pues $f(x_{approx}^*) > f(7, 7)$, es decir, escapó del óptimo local.

Función de Ackley3:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar : } & f_3(x, y) = 200e^{-0.2\sqrt{x^2+y^2}} + 5e^{\cos(3x)+\sin(3y)} + 1000 \\ \text{sujeto a : } & x, y \in [-32, 32]. \end{aligned}$$

La función de Ackley3 tiene 961 máximos locales acotados superiormente por 1165. La solución óptima x^* es única, por otra parte, las aproximaciones dadas en Momin(2013) son $x^* \approx (0, 0.4)$, con $f(x^*) \approx 1219.1418$. La aproximación al valor óptimo que se encontró con el AGE es $f(x_{aprox}^*) = 1218.2839$, donde $x_{aprox}^* = (0.0234, 0.4766)$. Se concluye que el AGE ha escapado de los máximos locales, pues $f(x_{aprox}^*) > 1165$.

Función de Wayburn:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & f_{162}(x, y) = -(x^6 + y^4 - 17)^2 - (2x + y - 4)^2 + 300000000 \\ \text{sujeto a : } & x, y \in [-5, 5]. \end{aligned}$$

La función Wayburn Seader 1 tiene solución óptima única $x^* = (1, 2)$, con valor $f(x^*) = 300000000$. La aproximación al valor óptimo, conocida en la literatura, es $f(x^{**}) = 299999999.9998$, donde $x^{**} = (1.597, 0.806)$, ver Momin(2013). Note que la aproximación al valor óptimo es buena, sin embargo, x^{**} está significativamente alejada de x^* . Este fenómeno es común en problemas que presentan valles o mesetas en la función objetivo, y se debe a que en estas circunstancias los algoritmos de optimización convergen lentamente. La aproximación al valor óptimo que se encontró con el AGE es $f(x_{aprox}^*) = 299999999.9984$, donde $x_{aprox}^* = (1.5982, 0.7704)$. Se observa una buena aproximación al valor óptimo, pero x_{aprox}^* está significativamente alejado de x^* .

Función Tripod:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & f(x, y) = -p(y)(1 + p(x)) - |x + 50p(y)(1 - 2p(x))| - |y + 50(1 - 2p(y))| + 1000 \\ \text{sujeto a : } & x, y \in [-100, 100], \end{aligned}$$

donde

$$p(w) = \begin{cases} 1 & w \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función Tripod es no diferenciable y tiene un máximo local en $(50, 50)$, donde $f(50, 50) = 998$, y otro en $(-50, 50)$, con $f(-50, 50) = 999$. La solución óptima se encuentra en $x^* = (0, -50)$, con valor $f(x^*) = 1000$. La aproximación al valor óptimo que se encontró con el AGE es $f(x_{aprox}^*) = 999.9145$, donde $x_{aprox}^* = (-0.0732, -49.9877)$, por lo tanto el AGE ha escapado de los máximos locales. Se concluye que el AGE encontró resultados satisfactorios para un problema en el que las técnicas clásicas de optimización basadas en el gradiente no pueden utilizarse.

Conclusiones

El objetivo consistió en analizar la viabilidad de los Algoritmos Genéticos desde los enfoques teórico y práctico. En el enfoque teórico se construyeron cadenas de Markov para modelar el AGS y el AGE, y se mostró como asociar un AG a un problema de optimización de la forma **P**. Utilizando dichos modelos se demostró que el AGS asociado al problema **P** no converge al óptimo del problema, mientras que el AGE si converge. Por otra parte, como se afirma en la observación 1, un problema de optimización no restringida de la forma **P'** puede ser aproximado por problemas de tipo **P**. De esta manera, desde el punto de vista teórico, el AGE es una herramienta viable para encontrar aproximaciones a soluciones óptimas en problemas de optimización no restringida.

En virtud de las conclusiones en el enfoque teórico, la investigación práctica se limitó al análisis de los AGE. A partir de la evidencia numérica se concluye que la implementación del AGE es eficiente en explorar el espacio de búsqueda, escapar de óptimos locales, problemas donde la función objetivo presenta valles o mesetas, y en problemas donde las técnicas clásicas no pueden aplicarse.

Referencias

- [1] Alexandru Agapie, Genetic algorithms: minimal conditions for convergence, In Artificial Evolution European Conference, AE'97, Springer, 1998.
- [2] A.E. Eiben; E.H.L. Aarts; K.M. Van Hee, *Global convergence of genetic algorithms: An infinite Markov chain analysis*, Computing Science Notes, Eindhoven University of Technology, 1990.
- [3] Carlos A. Coello Coello, *Introducción a la Computación Evolutiva*, CINVESTAV-IPN, 2012.
- [4] Günter Rudolph, *Convergence analysis of canonical genetic algorithms*, I.E.E.E. transactions on neural networks, Vol. 5, No. 1, january 1994.
- [5] Jhon Holland Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence, The University of Michigan, 1975.
- [6] Javier Landa, *Algoritmos Genéticos: una alternativa viable de solución para problemas de optimización*, tesis licenciatura, 2014.
- [7] Joe Suzuki, *A construction of Bayesian networks from databases based on an MDL Principle Uncertainty in artificial intelligence*, Proceedings of the Ninth Conference, 1993.
- [8] M. Iosifescu, Finite Markov Chains Processes and their Applications, Chichester: Wiley, 1980.
- [9] Momin Jamil; Xin-She Yang, *A literature survey of benchmark functions for global optimization problems*, Int. Journal of mathematical modelling and numerical optimization, Vol. 4, No. 2, pp. 150-194, 2013.
- [10] Olleg Häggström, Finite Markov Chains and Algorithmic Applications, Cambridge University Press, 2002.
- [11] S. N. Sivanandam; S. N. Deepa, Introduction to Genetic Algorithms, Springer, 2008.
- [12] T.E. Davis, J.C. Principe, *A Markov chain framework for the simple genetic algorithm*, Evolutionary Computation, 1(3), 269-288, 1993.
- [13] U.K. Chakraborty; D.G. Dastidar, *Using reliability analysis to estimate the number of generations to convergence in genetic algorithms*, Information Processing Letters, No. 46, 1993.

Topología

Axiomas de separación fuerte en espacios bitopológicos

José M. Hernández Morales

jmhbm@mixteco.utm.mx

Luz del Carmen Álvarez Marín

lalvarez@mixteco.utm.mx

Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Tecnológica de la Mixteca

Resumen

En este trabajo, dado un espacio bitopológico X , mencionamos y demostramos algunas caracterizaciones de los axiomas de separación por pares fuertemente: Hausdorff, regular y normal.

1 Introducción

Un conjunto X en el cual están definidas dos topologías τ_1 y τ_2 es llamado un espacio bitopológico y se denota por (X, τ_1, τ_2) . Si (X, ρ) es un espacio cuasi-semimétrico (ver [2]), entonces $(X, \tau_\rho, \tau_{\bar{\rho}})$ es un espacio bitopológico. En (X, τ_1, τ_2) , a los elementos de τ_i , $i = 1, 2$, los llamaremos τ_i -abiertos. Un conjunto F es τ_i -cerrado si es el complemento de un τ_i -abierto. Dado $A \subset X$, denotemos por $\text{int}_{\tau_i} A$ al interior de A respecto a la topología τ_i , y por $\text{cl}_{\tau_i} A$, a la clausura de A respecto a la topología τ_i . En 1963, Kelly en [4] define por primera vez los axiomas de separación para espacios bitopológicos, tales conceptos generalizan los existentes para espacios topológicos, esto es, en el caso de que $\tau_1 = \tau_2$. En [5], se dan algunos resultados que muestran caracterizaciones de dichos conceptos. En 2013, Ajoy Mukharjee en [1] define los axiomas de separación fuerte y muestra que éstos implican a los dados por Kelly, además de ser también una generalización de los correspondientes para espacios topológicos. En este trabajo, damos algunas caracterizaciones de los conceptos de separación fuerte por pares; además de otras caracterizaciones adicionales para los axiomas de separación por pares que se mencionan en [5]. Siempre que aparezcan juntas i y j se entenderá que $i \neq j$. La referencia principal de este trabajo es el artículo de Ajoy Mukharjee [1].

A continuación daremos los conceptos dados por Kelly en [4].

2 Axiomas de separación por pares

De las caracterizaciones de Hausdorff por pares que enseguida mencionamos, algunas se pueden encontrar en [5]. Aquí damos las demostraciones de las equivalencias entre todas ellas para una mejor claridad y comprensión.

Definición 1. (Kelly) Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares si para cualesquiera $x, y \in X$, $x \neq y$, existen U τ_i -abierto y V τ_j -abierto, tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \phi$.

Ejemplo 1. ([1], Ejemplo 2.2, p 167) Si $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, con τ_1 como la topología usual y

$$\tau_2 = \{X, \phi\} \cup \{U \cup (x, +\infty) : U \in \tau_1, x \in \mathbb{R}\}$$

entonces (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares.

Definición 2. (Kelly) Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico, se dice que τ_1 es regular respecto a τ_2 , si para cada $x \in X$ y G τ_1 -cerrado, con $x \notin G$, existen $U \in \tau_1$, $V \in \tau_2$ tales que $x \in U$, $G \subset V$ y $U \cap V = \phi$.

Definición 3. (Kelly) El espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es regular por pares si τ_i es regular respecto a τ_j , para $i = 1, 2$.

Definición 4. (Kelly) El espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es normal por pares si para cualesquiera par de conjuntos, F τ_i -cerrado y G τ_j -cerrado, existen $U \in \tau_i$, $V \in \tau_j$ tales que $G \subset U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \phi$.

Ejemplo 2. El conjunto $X = \{a, b, c\}$ con las topologías

$$\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}\},$$

$$\tau_2 = \{X, \phi, \{b, c\}\}$$

es normal por pares. En efecto, los únicos cerrados disjuntos respecto a topologías contrarias son $F = \{b, c\}$ τ_1 -cerrado, $G = \{a\}$ τ_2 -cerrado y claramente $U = \{b, c\}$ es τ_2 -abierto, $V = \{a\}$ τ_1 -abierto cumplen lo requerido.

El teorema siguiente, nos muestra algunas equivalencias del concepto de Hausdorff por pares.

Teorema 1. Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico, los siguientes enunciados son equivalentes:

- 1) X es Hausdorff por pares.
- 2) Dada $x \in X$, para cada $y \in X$, $x \neq y$, existe U τ_i -abierto tal que $x \in U$ y $y \notin cl_{\tau_j} U$.
- 3) Para cada $x \in X$, se cumple:

$$\cap \{cl_{\tau_i} U : x \in U, U \text{ } \tau_j\text{-abierto}\} = \{x\}.$$

- 4) En el espacio bitopológico $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2, \tau_2 \times \tau_1)$, el conjunto

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$$

es $\tau_i \times \tau_j$ -cerrado.

- 5) Toda base de filtro convergente respecto a τ_i y a τ_j converge a un único elemento, respecto a τ_i y a τ_j .

Demostración. 1) $\rightarrow$ 2) Para $y \in X$ con $x \neq y$, existen U τ_i -abierto y V τ_j -abierto, tales que

$$x \in U, y \in V \text{ y } U \cap V = \phi.$$

Claramente $y \notin X - V$ el cual es τ_j -cerrado, además $U \subset X - V$, luego $cl_{\tau_j} U \subset X - V$, pero $y \notin X - V$, por tanto $y \notin cl_{\tau_j} U$.

2) $\rightarrow$ 3) Sea $x \in X$ y sea

$$A = \{U : x \in U, U \text{ } \tau_i\text{-abierto}\}.$$

Claramente $x \in \cap \{cl_{\tau_j} U : U \in A\}$. Ahora, para cada $y \in X$, $y \neq x$ existe un conjunto U τ_i -abierto, tal que $y \notin cl_{\tau_j} U$, luego

$$y \notin \cap \{cl_{\tau_j} U : U \in A\},$$

por tanto, x es el único elemento de $\cap \{cl_{\tau_j} U : U \in A\}$.

3) $\rightarrow$ 1) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si suponemos que se cumple 3), entonces

$$\{x\} = \cap \{cl_{\tau_j} U : x \in U, U \text{ } \tau_i\text{-abierto}\}$$

y por tanto

$$y \notin \cap \{cl_{\tau_j} U : x \in U, U \text{ } \tau_i\text{-abierto}\},$$

así que existe U τ_i -abierto, con $x \in U$, y tal que $y \notin cl_{\tau_j} U$. Tomando a $V = X - cl_{\tau_j} U$, se cumple que $y \in V$ y $U \cap V = \phi$.

2) $\rightarrow$ 4) Supongamos que se cumple (2), probemos que $X - \Delta$ es $\tau_i \times \tau_j$ -abierto. Sea $(x, y) \in X - \Delta$, luego $x \neq y$, por (2), existe U τ_i -abierto tal que $x \in U$ y $y \notin cl_{\tau_j} U$, entonces $y \in X - cl_{\tau_j} U$, el cual es τ_j -abierto, así, el $\tau_i \times \tau_j$ -abierto

$$U \times (X - cl_{\tau_j} U) \subset X - \Delta.$$

4) $\rightarrow$ 1) Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$, entonces $(x, y) \in X - \Delta$, por (4), existe un $\tau_i \times \tau_j$ -abierto $U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V$ con $U \times V \subset X - \Delta$, $x \in U$, $y \in V$. Si $a \in U \cap V$ entonces

$$(a, a) \in U \times V \subset X - \Delta,$$

lo cual no puede ser, por tanto $U \cap V = \phi$.

1) $\rightarrow$ 5) Sea $\mathcal{F}$ una base de filtro convergente respecto a τ_i y a τ_j , supongamos que $\mathcal{F}$ converge a x con respecto a τ_i y a y respecto a τ_j . Si $x \neq y$, por (1), existen U τ_1 -abierto y V τ_2 -abierto, tales que

$$x \in U, y \in V \text{ y } U \cap V = \phi.$$

Por la convergencia de $\mathcal{F}$, existen $A, B \in \mathcal{F}$, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$, luego

$$A \cap B \subset U \cap V = \phi,$$

pero esto no puede ocurrir porque $A \cap B \in \mathcal{F}$. Por tanto $x = y$.

5) $\rightarrow$ 1) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si X no es Hausdorff por pares, entonces para cualesquiera U τ_1 -abierto y V τ_2 -abierto tales que $x \in U$, $y \in V$ se cumple que $U \cap V \neq \phi$, entonces la base de filtro $U(x) \cap V(y)$ es más fina que las bases $U(x)$ y que $V(y)$. Pero $U(x)$ converge a x y $V(y)$ converge a y , por tanto se cumple que $U(x) \cap V(y)$ converge tanto a x como a y , pero por hipótesis, el límite es único, luego $x = y$, contradiciendo lo supuesto. Así X es de Hausdorff por pares. $\square$

Nótese que si (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares, entonces cada punto $x \in X$ se puede ver como un conjunto τ_1 -cerrado.

Es fácil ver que si (X, τ_1, τ_2) es un espacio Hausdorff por pares, entonces (X, τ_1) y (X, τ_2) ambos son T_1 .

Hemos obtenido resultados análogos al Teorema 1 para los otros conceptos dados por Kelly, sin embargo, por ser parecidos a los presentados en la siguiente sección, hemos decidido omitirlos en este trabajo.

3 Axiomas de separación por pares fuertemente.

3.1 Hausdorff por pares fuertemente.

Definición 5. (Ajoy Mukharjee) Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Un subconjunto $A \subset X$ es (τ_i, τ_j) -dualmente abierto si existe un τ_j -abierto B tal que $A = \text{int}_{\tau_i} B$. Análogamente, un subconjunto C de X es (τ_i, τ_j) -dualmente cerrado, si existe un τ_j -cerrado D , tal que $C = \text{int}_{\tau_i} D$.

Ejemplo 3. ([1], Ejemplo 2.5, p 165) Sea $X = \mathbb{R}$, con las topologías

$$\tau_1 = \{\mathbb{R}, \phi, (-\infty, a), [a, +\infty)\},$$

$$\tau_2 = \{\mathbb{R}, \phi, (-\infty, a), (a, +\infty), \mathbb{R} - \{a\}\}.$$

Nótese que $(a, +\infty)$ es (τ_2, τ_1) -dualmente abierto pues $[a, +\infty)$ es τ_1 -abierto es tal que $(a, +\infty) = \text{int}_{\tau_2}[a, +\infty)$. Notemos también que $(-\infty, a)$ es también (τ_2, τ_1) -dualmente abierto, sin embargo, la unión de ellos, $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ no lo es.

Definición 6. (Ajoy Mukharjee) Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) se dice Hausdorff por pares fuertemente, si para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$, existe U τ_i -abierto y V τ_j -abierto, tales que

$$x \in \text{int}_{\tau_j} U, y \in \text{int}_{\tau_i} V \text{ y } U \cap V = \phi.$$

Ejemplo 4. ([1], Ejemplo 2.2, p 167) Sea $X = \mathbb{R}$, con τ_1 la topología usual y τ_2 la topología del límite superior. Dados $x, y \in X$, con $x < y$, sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < x < b < y < c$, hagamos $U_1 = (a, b) \in \tau_1$, $V_1 = (b, c] \in \tau_2$. Claramente $x \in \text{int}_{\tau_2} U_1$, $y \in \text{int}_{\tau_1} V_1$ y $U_1 \cap V_1 = \phi$. De igual manera, haciendo $U_2 = (b, c) \in \tau_1$, $V_2 = (a, b] \in \tau_2$ se cumple que $x \in \text{int}_{\tau_1} V_2$, $y \in \text{int}_{\tau_2} U_2$ y $U_2 \cap V_2 = \phi$. Por tanto (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares fuertemente.

Dado que siempre se cumple que $\text{int}_{\tau_j} U \subset U$ e $\text{int}_{\tau_i} V \subset V$, podemos concluir que ser Hausdorff por pares fuertemente implica Hausdorff por pares, sin embargo, en [1] se muestra que éstos no son conceptos equivalentes. El resultado siguiente muestra algunas caracterizaciones del concepto de Hausdorff por pares fuertemente, generalizaciones de las mencionadas en el teorema 1 de este trabajo y análogas a las que se presentan en [3].

Teorema 2. Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico, los siguientes enunciados son equivalentes:

- 1) X es Hausdorff por pares fuertemente.
- 2) Dada $x \in X$, para cada $y \in X$, $x \neq y$, existe U τ_i -abierto tal que:

$$x \in \text{int}_{\tau_j} U \text{ y } y \notin \text{cl}_{\tau_i} (\text{cl}_{\tau_j} U).$$

3) Para cada $x \in X$, se cumple:

$$\cap \{cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}U) : x \in int_{\tau_j}U, U \text{ } \tau_i\text{-abierto}\} = \{x\}.$$

4) El conjunto $X - \Delta$ es una unión de subconjuntos A $(\tau_j \times \tau_i, \tau_i \times \tau_j)$ -dualmente abiertos, para los cuales $A = int_{\tau_j \times \tau_i}W$, con $W \subset X - \Delta$ $\tau_i \times \tau_j$ -abierto en el espacio bitopológico $(X \times X, \tau_i \times \tau_j, \tau_j \times \tau_i)$.

Demostración. 1) $\rightarrow$ 2) Supongamos que se cumple 1), sea $x \in X$, para cada $y \in X$, $x \neq y$, existe U τ_i -abierto y V τ_j -abierto, tales que

$$x \in int_{\tau_j}U, y \in int_{\tau_i}V \text{ y } U \cap V = \phi.$$

Como $U \subset X - \Delta$ y es τ_j -cerrado, se tiene que $cl_{\tau_j}U \subset X - \Delta$ pero $int_{\tau_i}V \subset V$, luego $X - V \subset X - (int_{\tau_i}V)$, el cual es τ_i -cerrado, de aquí $cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}U) \subset X - (int_{\tau_i}V)$ y como $(int_{\tau_i}V) \cap (int_{\tau_j}U) = \phi$, $y \notin cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}U)$.

2) $\rightarrow$ 3) Sea $x \in X$, consideremos

$$M = \cap \{cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}U) : x \in int_{\tau_j}U, U \text{ } \tau_i\text{-abierto}\}.$$

Claramente $x \in M$; para $y \neq x$, existe U τ_i -abierto tal que $x \in int_{\tau_j}U$ y $y \notin cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}U)$, luego $y \notin M$, por tanto $M = \{x\}$.

3) $\rightarrow$ 4) Sean $(x, y) \in X - \Delta$, $x \neq y$, por 3) existe U τ_i -abierto tal que $x \in int_{\tau_j}U$ y $y \notin cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}U)$, luego

$$y \in X - (cl_{\tau_i}(cl_{\tau_j}U)) = int_{\tau_i}(X - cl_{\tau_j}U).$$

Sea $V = X - cl_{\tau_j}U$, V es τ_j -abierto y

$$(x, y) \in int_{\tau_j}U \times int_{\tau_i}V = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V);$$

como $U \subset cl_{\tau_j}U$ y $V = X - cl_{\tau_j}U \subset X - U$, se tiene que $V \cap U = \phi$ y de aquí $W = U \times V \subset X - \Delta$.

4) $\rightarrow$ 1) Si $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces $(x, y) \in X - \Delta$, luego existe A $(\tau_j \times \tau_i, \tau_i \times \tau_j)$ -dualmente abierto tal que $(x, y) \in A = int_{\tau_j \times \tau_i}(U \times V)$, con $U \times V$ $\tau_i \times \tau_j$ -abierto y $U \times V \subset X - \Delta$. De lo anterior, claramente se tiene que $x \in int_{\tau_j}U$, $y \in int_{\tau_i}V$ y $U \cap V = \phi$. $\square$

3.2 Regularidad por pares fuertemente

Definición 7. (Ajoy Mukharjee) Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) , se dice que es regular por pares fuertemente, si para cada F τ_i -cerrado, y para cada $x \in X$, con $x \notin F$, existe un τ_j -abierto V y un τ_i -abierto W tales que $F \subset int_{\tau_i}V$, $x \in W$ y $W \cap V = \phi$.

Ejemplo 5. ([1], Ejemplo 2.4, p 168) Sea X el conjunto de los números reales. Sea τ_1 la topología del límite superior y τ_2 la topología del límite inferior. Dado cualquier τ_1 -cerrado F y cualquier $x \in X$, con $x \notin F$, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (a, b] \subset X - F$. Elijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $a < \alpha < x < b$, hagamos $U = (\alpha, b] \in \tau_1$ y $V = (-\infty, \alpha) \cup [b, +\infty) \in \tau_2$. Claramente $x \in U$, $F \subset int_{\tau_1}V$ con $U \cap V = \phi$. De igual manera, para F τ_2 -cerrado y $x \in X$, con $x \notin F$, se puede hacer una contrucción análoga y con esto, (X, τ_1, τ_2) es regular por pares fuertemente.

Al igual que en el caso anterior, la regularidad por pares fuerte implica la regularidad por pares dada por Kelly, sin embargo, en [1] se muestra un ejemplo donde no se da la equivalencia. A continuación presentamos un teorema de caracterización.

Teorema 3. Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1) X es regular por pares fuertemente.

2) Para cada $x \in X$ y U τ_i -abierto, con $x \in U$, existe W τ_i -abierto y C τ_j -cerrado tal que

$$x \in W \subset C \subset cl_{\tau_i} C \subset U.$$

3) Para cada $x \in X$ y U τ_i -abierto, con $x \in U$, existe un conjunto W τ_i -abierto tal que

$$x \in W \subset cl_{\tau_j} W \subset cl_{\tau_i} (cl_{\tau_j} W) \subset U.$$

Demostración. 1) $\rightarrow$ 2) Sea $x \in X$ y U τ_i -abierto, con $x \in U$. Como $x \notin X - U$, el cual es τ_i -cerrado, existen W τ_i -abierto, V τ_j -abierto tales que $X - U \subset int_{\tau_i} V$ y $x \in W$, con $W \cap V = \phi$, de lo anterior,

$$W \subset X - V \subset X - (int_{\tau_i} V) = cl_{\tau_i} (X - V) \subset U.$$

Hagamos $C = X - V$, el cual es claramente τ_j -cerrado, con esto se concluye que $x \in W \subset C \subset cl_{\tau_i} C \subset U$.

2) $\rightarrow$ 1) Sean F τ_i -cerrado, y $x \in X$, con $x \notin F$, luego $x \in X - F$, por (2), existe W τ_i -abierto y C τ_j -cerrado tal que $x \in W \subset C \subset cl_{\tau_i} C \subset X - F$, de la última contención, tenemos que $F \subset X - (cl_{\tau_i} C) = int_{\tau_i} (X - C)$, haciendo $V = X - C$, el cual es τ_j -abierto, se cumple que

$$W \cap V \subset W \cap (X - W) = \phi.$$

1) $\rightarrow$ 3) Sea $x \in X$ y U τ_i -abierto, con $x \in U$. Como $x \notin X - U$, el cual es τ_i -cerrado, por (1), existe W τ_i -abierto, V τ_j -abierto tales que $x \in W$, $X - U \subset int_{\tau_i} V$ con $W \cap V = \phi$. De esto último

$$x \in W \subset X - V \subset cl_{\tau_i} (X - V) \subset U.$$

Como $X - V$ es τ_j -cerrado, $cl_{\tau_j} W \subset X - V \subset cl_{\tau_i} (X - V)$ y dado que éste último es τ_i -cerrado, tenemos que

$$x \in W \subset cl_{\tau_j} W \subset cl_{\tau_i} (cl_{\tau_j} W) \subset U.$$

3) $\rightarrow$ 1) Sea $x \in X$, F τ_i -cerrado, con $x \notin F$, como $X - F$ τ_i -abierto, por (3), existe W τ_i -abierto tal que

$$x \in W \subset cl_{\tau_j} W \subset cl_{\tau_i} (cl_{\tau_j} W) \subset X - F,$$

luego $F \subset X - cl_{\tau_i} (cl_{\tau_j} W) = int_{\tau_i} (X - cl_{\tau_j} W)$. Hagamos $V = (X - cl_{\tau_j} W)$ el cual es τ_j -abierto y claramente $W \cap V \subset W \cap (X - W) = \phi$. $\square$

3.3 Normalidad por pares fuertemente

Definición 8. (Ajoy Mukharjee) Un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) , se dice que es normal por pares fuertemente, si para cada F τ_i -cerrado, G τ_j -cerrado, con $F \cap G = \phi$, existe un τ_j -abierto U y un τ_i -abierto V tales que $F \subset int_{\tau_i} U$, $G \subset int_{\tau_j} V$ y $U \cap V = \phi$.

Ejemplo 6. ([1], Ejemplo 2.5, p 168) Sea $X = \mathbb{R}$, con las topologías $\tau_1 = \{X, \phi, (-\infty, a], (a, \infty)\}$ y $\tau_2 = \{X, \phi, \mathbb{R} - \{a\}, (-\infty, a), (-\infty, a], (a, \infty)\}$. es normal por pares fuertemente.

A continuación mostramos algunas caracterizaciones de la normalidad por pares fuerte.

Teorema 4. Sea (X, τ_1, τ_2) un espacio bitopológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1) (X, τ_1, τ_2) es normal por pares fuertemente.

2) Para cada F τ_i -cerrado, U τ_j -abierto, con $F \subset U$, existe W τ_j -abierto, y D τ_i -cerrado tales que

$$F \subset \text{int}_{\tau_i} W \subset W \subset D \subset \text{cl}_{\tau_j} D \subset U.$$

3) Para cada F τ_i -cerrado, U τ_j -abierto, con $F \subset U$, existe W τ_j -abierto tal que

$$F \subset \text{int}_{\tau_i} W \subset \text{cl}_{\tau_i} W \subset \text{cl}_{\tau_j} (\text{cl}_{\tau_i} W) \subset U.$$

4) Para cada par de conjuntos F τ_i -cerrado, G τ_j -cerrado, con $F \cap G = \phi$, existe un τ_j -abierto W tal que

$$F \subset \text{int}_{\tau_i} W \text{ y } G \cap \text{cl}_{\tau_j} (\text{cl}_{\tau_i} W) = \phi.$$

Demostración. 1) $\rightarrow$ 2) Supongamos que (X, τ_1, τ_2) es normal por pares fuertemente, sean F τ_i -cerrado, U τ_j -abierto, con $F \subset U$. Como $X - U$ es τ_j -cerrado, y $F \cap (X - U) = \phi$, existen W τ_j -abierto y V τ_i -abierto tales que $F \subset \text{int}_{\tau_i} W$ y $X - U \subset \text{int}_{\tau_j} V$ con $W \cap V = \phi$. De lo anterior, $\text{cl}_{\tau_j} (X - V) = X - \text{int}_{\tau_j} V \subset U$ y

$$\text{int}_{\tau_j} V \subset V \subset X - W \subset X - \text{int}_{\tau_i} W \subset X - F,$$

luego $F \subset \text{int}_{\tau_i} W \subset W \subset X - V \subset X - \text{int}_{\tau_j} V = \text{cl}_{\tau_j} (X - V) \subset U$. Haciendo $D = X - V$, el cual es τ_i -cerrado, se obtiene el resultado.

2) $\rightarrow$ 3) Sea F τ_i -cerrado, U τ_j -abierto, con $F \subset U$, como $X - U$ es τ_j -cerrado y $F \cap (X - U) = \phi$, existe W τ_j -abierto y D τ_i -cerrado tales que $F \subset \text{int}_{\tau_i} W \subset W \subset D \subset \text{cl}_{\tau_j} D \subset U$. Dado que D es τ_i -cerrado $\text{cl}_{\tau_i} W \subset D \subset \text{cl}_{\tau_j} D$, luego $\text{cl}_{\tau_j} (\text{cl}_{\tau_i} W) \subset \text{cl}_{\tau_j} D \subset U$. Así

$$F \subset \text{int}_{\tau_i} W \subset \text{cl}_{\tau_i} W \subset \text{cl}_{\tau_j} (\text{cl}_{\tau_i} W) \subset U.$$

3) $\rightarrow$ 4) Sean F τ_i -cerrado, G τ_j -cerrado, tales que $F \cap G = \phi$, luego $F \subset X - G$ el cual es τ_j -abierto. Por 3), existe W τ_j -abierto, tal que $F \subset \text{int}_{\tau_i} W \subset \text{cl}_{\tau_i} W \subset \text{cl}_{\tau_j} (\text{cl}_{\tau_i} W) \subset X - G$, luego $G \subset X - \text{cl}_{\tau_j} (\text{cl}_{\tau_i} W)$, de aquí, $G \cap \text{cl}_{\tau_j} (\text{cl}_{\tau_i} W) = \phi$.

4) $\rightarrow$ 1) Sean F τ_i -cerrado y G τ_j -cerrado, tales que $F \cap G = \phi$, por 4) existe W τ_j -abierto tal que $F \subset \text{int}_{\tau_i} W$ y $G \cap \text{cl}_{\tau_j} (\text{cl}_{\tau_i} W) = \phi$, luego $G \subset \text{int}_{\tau_j} (X - \text{cl}_{\tau_i} W)$, haciendo $V = X - \text{cl}_{\tau_i} W$, el cual es τ_i -abierto y cumple $V \cap W \subset (X - W) \cap W = \phi$. $\square$

De igual manera que en los conceptos de Hausdorff y regular por pares fuertemente, la normalidad por pares fuertemente implica la normalidad por pares de Kelly, pero en [1] se da un ejemplo donde el recíproco no se cumple.

Referencias

- [1] Ajoy Mukharjee. Some new bitopological notions. Publications de L'Institut Mathématique. Nouvelle série, tome 93 (107). (2013) 165-172.
- [2] Cobzas S., *Functional Analysis in Asymmetric normed Spaces* Mathematics FA arXiv: 006.117v, 2010.

- [3] James Dugundji. Topology. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.-London.Sydney, (1966).
- [4] J. C. Kelly, Bitopological spaces, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 13. (1963), 71-89.
- [5] Adem Kilicman, Zabidin Salleh. On pairwise Lindelöf bitopological spaces. Topology and its Applications. Elsevier. 154 (2007) 1600-1607.

The elusive fixed point property

Karen Clemente Robles
waterfly_blue@hotmail.com

David Herrera Carrasco
dherrera@fcfm.buap.mx

Fernando Macías Romero
fmacias@fcfm.buap.mx

BUAP

Definition 1. Let X a topological space and a continuous function $f : X \rightarrow X$. A point $p \in X$ is a fixed point of f if $f(p) = p$. A topological space has a fixed point property if each continuous function of X in X , has a fixed point.

Importance of the fixed point property in topological spaces.

Definition 2. Let X, Y topological spaces and a function $f : X \rightarrow Y$, f is a homeomorphism of X in Y if it has the following properties: f is a bijection, f is continuous and the inverse function f^{-1} is continuous. If such a function exists, then X and Y are homeomorphic.

A topological property or topological invariant is a property of a topological space which is invariant under homeomorphisms. That is, a property of spaces is a topological property if whenever a space X possesses that property every space homeomorphic to X possesses that property. A common problem in topology is to decide whether two topological spaces are homeomorphic or not. To prove that two spaces are not homeomorphic, it is sufficient to find a topological property which is not shared by them.

Theorem 3. The fixed point property, is a topological invariant.

Proof. Let X and Y topological spaces, such that X has a fixed point property, $f : X \rightarrow Y$ is a homeomorphism and a continuous function $g : Y \rightarrow Y$. As f, f^{-1} and g are continuous functions, then $f^{-1} \circ g \circ f : X \rightarrow X$ are continuous function.

Let $x \in X$ a fixed point of the function $f^{-1} \circ g \circ f$, then $(f^{-1} \circ g \circ f)(x) = x$. Then $g(f(x)) = f(x)$. Finally if $y = f(x)$, then $g(y) = y$. Therefore Y has the fixed point property.

Sets with the fixed point property.

Example 4. The interval $[0, 1]$ has the fixed point property.

Proof. Let $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ and arbitrary continuous function. Now we define the function $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ given by $g(t) = f(t) - t$. Note then that g is a continuous function such that $g(0) = f(0) \geq 0$ and that $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Therefore, for the Intermediate Value Theorem there is $p \in [0, 1]$ such that $g(p) = 0$. So we conclude that $f(p) = p$.



Definition 5. An arc is a topological space homeomorphic to the closed interval $[0, 1]$.

Example 6. An arc has the fixed point property.

Since arc is homeomorphic to closed interval $[0, 1]$ by definition, and $[0, 1]$ has the fixed point property then an arc has the fixed point property, by Theorem 2.

The dog and rabbit.

Definition 7. A n -cell is a topological space homeomorphic to:

$$B^n = \{(x_1, \dots, (x_n)) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

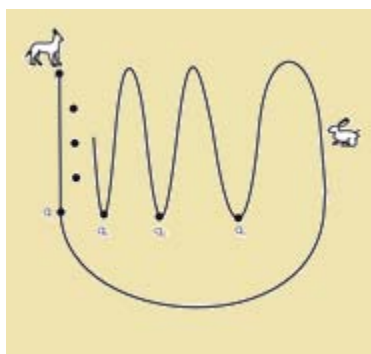
Theorem 8. Each n -cell has the fixed point property.

Example 9. The $\sin 1/x$ circle has the fixed point property.

This object is represented in Figure, as the union of the closure of the graph of $y = \sin 1/x$ ($0 < x \leq 1$), and an arc from $p_2 = (0, 1)$ to $p_3 = (1/\Pi, 0)$. The point $(0, -1)$ is labeled p_1 . Suppose f is a map of the $\sin 1/x$ circle into itself.

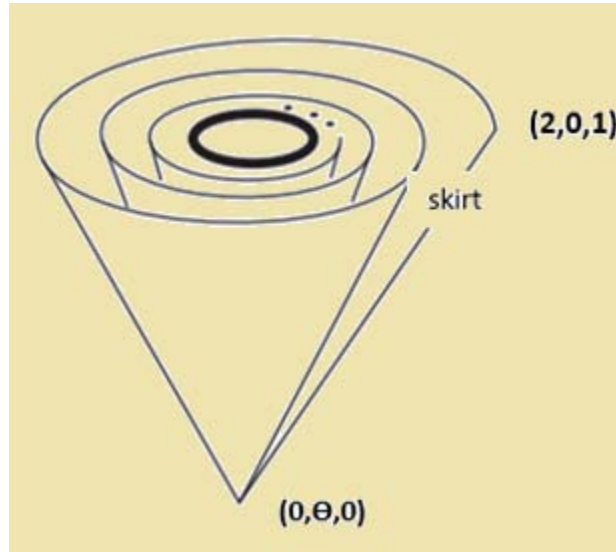
We use the dead-end method to prove that f leaves some point fixed. Consider a dog chasing a rabbit, where a variable point x represents the dog, $f(x)$ the rabbit, and the direction along the arc in the $\sin 1/x$ circle from x to $f(x)$ the direction of the chase. Let the dog start at p_1 . After he moves slightly beyond p_1 toward p_2 is his chase of his image, we note that the rabbit is in front of the dog in the sense that x is between p_1 and $p(x)$ on the arc $[p_1, f(x)]$ of the $\sin 1/x$ circle. It follows by continuity that even as x moves past p_3 and then back along the $\sin 1/x$ graph to near $[p_1, p_2]$, $f(x)$ stays in front of x . Each point q_0 of $[p_1, p : 2]$ is the limit of a sequence of points $q_1, q_2, \dots$, of the $\sin 1/x$ graph. Since $f(q_1)$ is ahead of q_2 , then $f(q_1), f(q_2), \dots$, approaches $[p_1, p_2]$.

Hence $f(q_0) \in [p_1, p_2]$. Since $f[p_1, p_2] \subset [p_1, p_2]$, Theorem implies that f leaves some point of $[p_1, p_2]$ fixed.



Sets that does not have the fixed point property.

Example 10. The cone over a circle with a spiral as shown in Figure does not have the fixed point property.



Suppose that in cylindrical coordinates (r, θ, z) the circle is defined by $[z = 1, r = 1]$, the spiral by $[z = 1, r = 1 + 1/(1 + \theta), \theta \geq 0]$ and the vertex by $(0, \theta, 0)$. We call cone over the spiral, the skirt of the cone. The fixed point free map f of the cone-with-a-skirt onto itself that we shall define sends the skirt to the skirt and the cone to a union of the cone and a segment from its vertex.

If $0 \leq z_0 \leq 1/3$, the horizontal cross section of the cone at level z_0 goes to the point that divides the segment from $(2, 0, 1)$ to $(0, \theta, 0)$ in the same ratio that s_0 divides 0 to $1/3$.

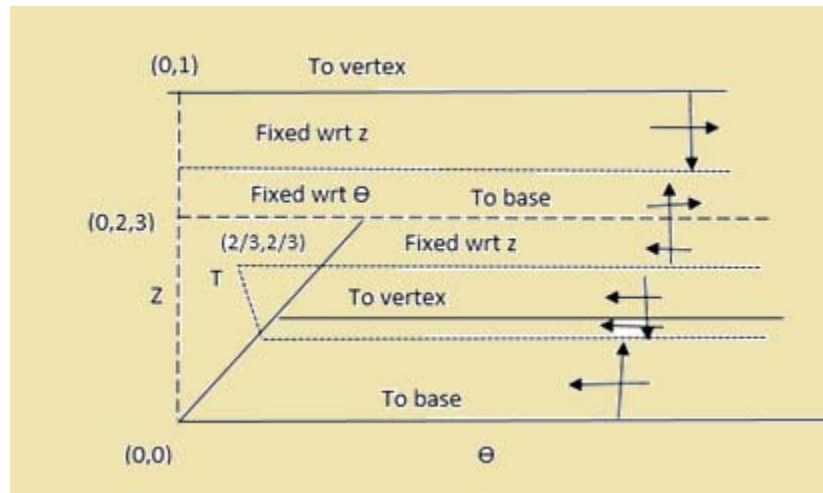
Suppose f_z is the function that sends 0 to 1, $1/3$ to 0, $2/3$ to 1, 1 to 0 and is linear on each of $[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$, while $f_\theta(\theta, z) = \theta + z - 2/3$. For each point (r, θ, z) of the cone with $1/3 \leq z \leq 1$, the fixed point free map is defined by $f(r, \theta, z) = (f_z(z), f_\theta(\theta, z), f_z(z))$. Note that $f_z(z) = z$ only at leaves $z = 1/4, 1/2, 3/4$. At levels $1/2$ and $3/4$ there is rotation and the $1/4$ level is not sent onto the cone.

In order to describe f on the skirt, we unroll it, the unrolled skirt shown in Figure is not to scale since horizontal rays in the half strip represent horizontal cross sections of the skirt, vertical segments in the half strip represent segments from the vertex of the skirt to the base, and the top edge of the half strip represents the vertex of the cone. Arrows on the right of the figure indicate motion in both θ and z directions.

We use rectangular coordinates to describe f on the skirt. We ignored r since

$r = z(1 + 1/(1 + \theta))$. The θ value of $f(\theta, z)$, for a point (θ, z) of the strip, is given by 0 if $0 \leq z \leq 1/3$ and by $\max(0, \theta + z - 2/3)$ for $1/3 < z \leq 1$. There is lack of continuity on the horizontal ray to the right from $(1/3, 1/3)$ but this does not matter since this ray will be sent into the vertex of the cone. The θ values of all points of the skirt are changed except those on the vertical segment from $(0, 0)$ to $(0, 2/3)$ and the horizontal ray to the right from $(0, 2/3)$. This invariant set with respect to θ is shown with a dashed line next figure.

We now describe the z values of images of points of the skirt. Except on the triangular disk T with vertices $(0, 0), (0, 2/3), (2/3, 2/3)$ these z values are given by $f_z(z)$ where f_z was the function used



to give the z values of images of points of the cone. For each point (θ, z) of T , we define the z value of its image to be $3\max[|z - 1/3|, |\theta - 1/3|]$.

Points of the skirt whose z values are invariant under f are shown as dotted. Since dotted set misses the dashed one, each point of the skirt is moved. It is interesting to note that the cone over the cone-with-a-skirt does not have the fixed point property either.

Bibliography.

- [1]. Illanes Alejandro, *La veleidosa propiedad del punto fijo*, Miscelánea Matemática, Instituto de Matemáticas, UNAM, Noviembre 2009.
- [2.] López Sánchez Cristina, *Propiedad del Punto Fijo: Lema Sperner*, Tesis Licenciatura, FCFM, BUAP, junio 2014.
- [3.]Rupert Henry Bing, *The elusive fixed point property*, Amer. Math. Monthly, 76(1969), 119-132.

The problem of the seven bridges of Königsberg

Fernando Macias Romero

fmacias@fcfm.buap.mx

BUAP

Juana Onofre Cortez

140787juana@gmail.com

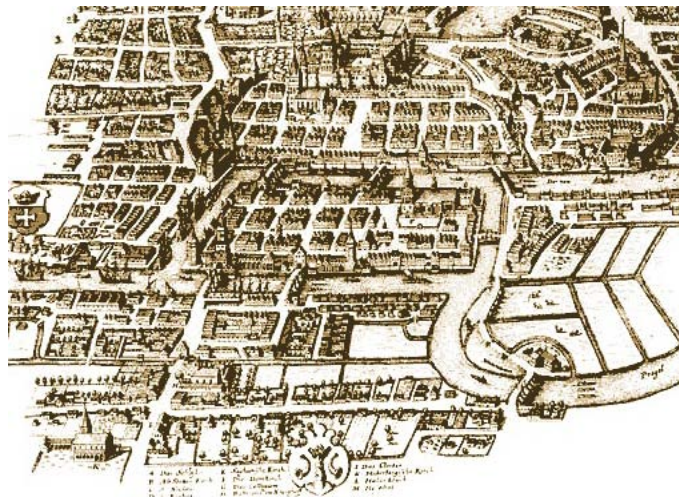
BUAP

SUMMARY:

The Seven Bridges of Königsberg, also called more specifically the problem of the seven bridges of Königsberg is a famous mathematical problem solved by Leonhard Euler in 1736 and whose resolution led to the birth of combinatorial topology. In this paper the problem is resolved by Euler shown and some applications of this theory to the solution of problems are discussed.

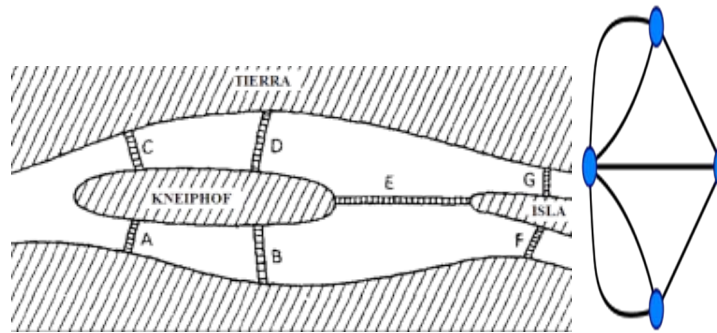
INTRODUCTION:

Mathematics occur with some frequency puzzles, paradoxes and problems inconsequential appearance have given way theories and results of great importance and depth. This is the case of curiosity aroused by the problem of driving on the bridges of Königsberg (now Kaliningrad) head that brought many of its inhabitants still a curiosity that was not going beyond jokes walkers and when it occupied Leonard Euler (1707-1783) and treated mathematically resulted in a new branch of mathematics known as graph theory. With graph theory problems strategies games, calculation of optimal routes, and their application to diverse issues such as optimizing logistics, robotics, genetics, sociology and network design are resolved.



THE PROBLEM:

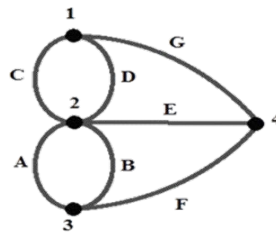
The problem that gave rise to graph theory was, as noted, the walk through the seven bridges over the river Pregel. This river was an island Kneiphof island amid the coming five bridges, two on each side and another leading to another island in the river, which in turn was linked to the shore by two bridges, just as shown in the following figure:



The problem raised by the walkers of Königsberg was: How can take a walk through once each of the seven bridges ?. Experience had shown that it was impossible to make such a trip, but when the problem was studied by Euler obtained a series of results that gave birth to this math problem and opened new horizons.

SIMPLIFYING PROBLEM:

Euler was in St. Petersburg when he received the news of the problem of passers Königsberg. To solve Euler drew a simplified diagram of the situation. The basic idea was to replace the Earth points and bridges by arches.



Points 1 and 3 represent the riverbanks, point 2 Kneiphof island and point 4 represents the other island. The lines drawn between the points are the bridges that are designated with the same letters that have designated bridges in the graph above.

The problem now is reduced to whether this graph, we call graph, you can be drawn with a continuous line, without lifting the pencil from the paper and "repainting" no arc.

LITTLE VOCABULARY:

The graph above graph is called, it is designated G, and is formed by a finite number of points, called vertices or nodes, connected by a series of lines, called arches. vertex has even degree if he attend an even number of arcs. vertex has odd degree if he attend an odd number of arcs. Note: The above graph vertices 1, 3 and 4 of order three fifth-order 2. A graph is called connected if there is a path linking every pair of vertices. A path on a graph is called Eulerian if passing through each edge exactly once. A circuit is a closed path. The degree of a vertex is the number of edges arriving at it.

EULER SOLUTION:

Euler determined in the context of the problem, the intermediate points of a possible path necessarily have to be connected to an even number of lines. Indeed, if we reach a point from a line, then the only way out of that point is a different line. This means that both the starting point and the end would be the only ones that could be connected with an odd number of lines.

However, the additional requirement of the problem says that the starting point must be equal at the end, so it might be no point connected to an odd number of lines. In particular, as in this diagram the four points have an odd number of incident lines (three of them affect three lines, and the remaining affects five), then it follows that it is impossible to define a path with the desired characteristics that are 7 bridges of Königsberg. As a result of this outcome defined degree of a vertex and said, according to this concept the main consequences of the Seven Bridges of Königsberg, expressed in terms of graphs. Among others we include the following:

- Property 1: The sum of the degrees of the nodes of a graph is twice the number of edges.
From the above it follows property, naturally, the following
- Property 2: The number of nodes of a graph odd degree must be even.
- Property 3: If all vertices are pairs can be a journey starting and ending at the same vertex.
- Property 4: If a graph has $2n$ odd vertices need exactly n different trips to tour (you have to raise $n - 1$ times the pencil from the paper).

AFTERMATH:

Moreover, the publication of Euler is the first that refers to a geometry in which only interested in structural properties of objects, not their actions, as traditionally done. The mathematician calls this new way of seeing the geometric objects "geometria situs", a term that translates today as topology, current area of mathematics whose origin can be placed directly in the solution of this problem.

REFERENCES:

- 1.- Jump to: a b Euler, Leonhard (1736). "Solutio ad geometriam problematis pertinentis situs". *Comment. Acad. Sci. U. PetroP* 8 128-40 (Latin) (Reprinted *Omnia Opera Prima Series*, Vol. 7 pp. 1-10, 1766). Retrieved April 11, 2010.
- 2.- Jump to: a b Astrocosmo (2001-2002). "The Seven Bridges of Königsberg". Retrieved April 28, 2010.
- 3.- Weisstein, Eric W. "Seven Bridges of Königsberg". In Weisstein, Eric W. *MathWorld* (in English). Wolfram Research.
- 4.- Dunham, William (1999). *Euler: The Master of Us All*. The Mathematical Association of America. pp. xxiv-xxv.

Topología de Conjuntos

Un primer curso

Publicaciones Electrónicas SMM

Juan Antonio Pérez

japerez@uaz.edu.mx

Universidad Autónoma de Zacatecas

Resumen

En este trabajo se reseña el libro "Topología de Conjuntos. Un primer curso", con el fin de presentarlo en el seno de los trabajos del II Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones, en su versión 2015, con sede en Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, de la ciudad de Puebla, Puebla, México. Las seis primeras secciones describen la perspectiva desde la cual se aborda la temática de la Topología General, en tanto que los tres restantes detallan algunas características técnicas que distinguen a la obra que se reseña, de los textos disponibles en el mercado.

1 Introducción

El presente material es el resultado de 30 años de ejercicio docente en Topología de Conjuntos a nivel de licenciatura, en la Universidad Autónoma de Zacatecas, y se ha nutrido de la rica experiencia que un ramillete de estudiantes entusiastas han ido aportando. Los primeros intentos de escribir el presente texto tuvieron lugar desde la impartición del primer curso, y tanto su contenido como su estructura se han modificado de forma radical en más de una ocasión, atendiendo a los intereses de los estudiantes tanto como a la maduración que mi entendimiento de la topología y sus usos me han ido proporcionando.

El orden de presentación de los temas, así como la profundidad con la que son tratados se han ido moldeando con cada una de las generaciones de estudiantes con los que he tenido el privilegio de interactuar. Puedo afirmar que este libro es de la autoría de ellos, aunque ciertamente, cada uno de los errores me pertenece en absoluto. Puede encontrarse en este texto la huella de cada uno de mis estudiantes en el transcurso de los años sin excepción alguna, varios de ellos de forma muy significativa.

La primera versión, por ejemplo, consistió de las notas de clase que de mi curso tomó la ahora doctora en Matemática Educativa Leticia Sosa Guerrero, en tanto que en la limpieza de la última versión fue particularmente valioso el aporte de la estudiante Andrea Arlette España Tinajero. No quiero dejar de agradecer la también invaluable crítica de los árbitros, sin cuyo apoyo habría

en esta obra más errores de los que seguramente conserva, todos los cuales han escapado a mis numerosos escrutinios y son, por supuesto, de mi entera y exclusiva responsabilidad.

La paciencia y atingencia de Emilio Lluís, editor de las Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana son dignas de todo mi reconocimiento, por la dedicación puesta en la serie de la que el texto que hoy presento forma parte.

2 Introducción

La Topología es la más joven de las disciplinas consideradas como pilares fundamentales de la Matemática contemporánea, y sin embargo, pensada como la rama de las matemáticas cuyo objeto de estudio es la continuidad, sus orígenes se pierden con facilidad en la Historia.

La convergencia es otra de las propiedades naturalmente topológicas, y es ella una de las primeras caracterizaciones de la continuidad a la que se recurre en el trayecto del aprendizaje matemático. En realidad, continuidad y convergencia no son sino dos manifestaciones del mismo fenómeno. Tanto la continuidad como la convergencia se definen en términos de una noción de cercanía o proximidad, lo que no necesariamente significa distancia.

Intuitivamente, un espacio topológico es un conjunto sobre el que se ha definido una noción de proximidad, que es la que le proporciona una estructura topológica. Un elemento de un conjunto, se convierte en un punto, cuando el conjunto adquiere una estructura topológica. Una vecindad de un punto es una colección de puntos cercanos a él.

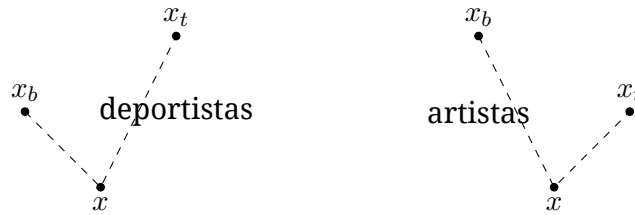
Una aplicación es continua si las imágenes de puntos cercanos son también puntos cercanos, lo que se expresa mejor en términos de vecindades: la preimagen de una vecindad es también una vecindad.

3 La matemática del amor

Consideremos el siguiente ejemplo, extraído de las relaciones afectivas que se dan entre los miembros de una sociedad, en donde los puntos del espacio son las personas, y en donde la vecindad más inmediata de un punto es su núcleo familiar. La familia es la célula de la sociedad, y tiene su origen en una pareja que decide compartir la vida, de manera que la mínima vecindad que una persona puede tener está constituida por ella misma y su pareja. La familia en primer grado incluye a padres y hermanos durante la soltería, y a los hijos luego de la constitución de la pareja. La familia en segundo grado incluye a primos y tíos, en cuando se irán agregando familiares políticos como suegros, yernos y nueras. El entorno familiar llega a ser tan grande que incluye a la sociedad toda.

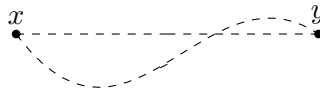
En estos términos, la familia en primer grado, en segundo, tercero, la extendida y todas sus posibles ampliaciones constituyen vecindades de una persona. Otras vecindades se construyen a través de la formación de lazos de compañerismo, amistad, afinidad política y otros. Las intersecciones entre ellas, necesariamente finitas, son también vecindades. Ejemplos son los miembros de la familia con la misma profesión o semejante orientación política.

La distancia física, geométrica o geográfica, da paso a la idea de proximidad afectiva o afinidad, que no necesariamente tiene una expresión numérica. El afecto también se construye a través de la cotidianeidad y las coincidencias: clubes, escuelas, equipos deportivos y otros colectivos se constituyen en vecindades de una persona. La persona x , aficionada al baloncesto y el teatro, tiene dos hijos, que identificaremos por x_b y x_t , que practican el baloncesto y el teatro respectivamente. La comunidad deportiva percibirá una mayor cercanía de x con x_b que con x_t , mientras que la percepción de la colectividad artística será la exactamente opuesta. La persona x se asume como igualmente cercano con cada uno de sus dos hijos.



Notemos, por ejemplo, que una vez que x constituye una pareja con y , toda vecindad de x incluye a y , al tiempo que toda vecindad de y contiene también a x . Técnicamente decimos que los dos puntos distintos x, y no son topológicamente distinguibles. La “distancia” de x a y y viceversa es cero, a pesar de que no son el mismo punto, por lo que concluimos que la noción de proximidad o la de lejanía no se identifican, en este caso, con la de una métrica.

Las relaciones afectivas no se corresponden necesariamente con los nexos en un espacio métrico, y ni siquiera con los de un espacio pseudométrico, puesto que la intensidad del afecto que x siente por y , no es necesariamente igual al recíproco.



La noción de cercanía que proporciona la estructura topológica, entonces, no siempre se corresponde con una pseudométrica. Técnicamente: no todo espacio topológico es metrizable. Caracterizar a los espacios topológicos metrizable es una de las misiones de la Topología de Conjuntos.

4 El antecedente euclidiano

La recta euclidiana no es un simple conjunto de puntos, pues ya de suyo, la recta euclidiana tiene una estructura topológica, a la que llamamos, consecuentemente, topología euclidiana. Una de las definiciones que se encuentran en los textos de geometría elemental caracteriza a la recta como una unión de puntos que tienen la misma “dirección”. Esta definición ingenua esconde las ideas de orientación, orden y dirección, que como veremos más adelante, son definitorias de topologías específicas.

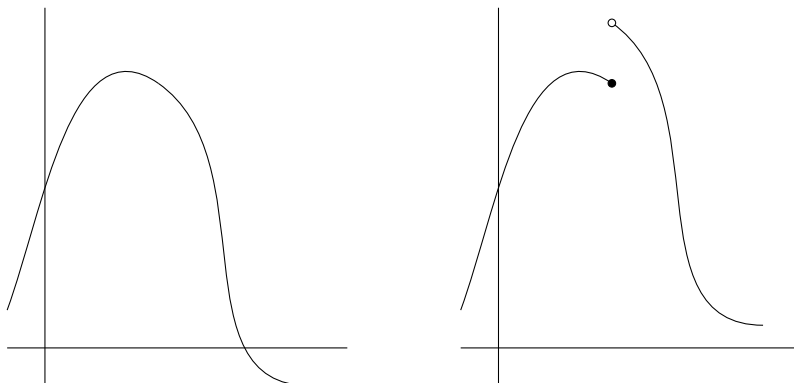
Uno de los axiomas de la geometría euclidiana postula que dados dos puntos distintos a y b , existe un tercer punto c , sobre la misma recta, que se encuentra entre ellos. Si denotamos $a < b$ se ha elegido una orientación para la recta, y un orden coincidente con ella; el axioma postula la existencia de un tercer punto c que satisface $a < c < b$. La topología euclidiana es la topología del orden determinada por este orden.



La topología del plano euclidiano es la topología producto sobre el producto de dos copias de la recta euclidiana, y así para cualquier producto de copias de la recta. El espacio de las sucesiones reales es el espacio topológico producto $\mathbb{R}^\infty$, o más precisamente $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Intuitivamente, una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si su gráfica no se “rompe”, asumiendo la topología euclidiana en ambas “copias” de la recta. La gráfica de una función continua es, en

este sentido, una “recta curvada”. Nos referimos en este caso a un ejemplo de continuidad, al que podríamos llamar “continuidad euclidiana”, puesto que se refiere a la continuidad de funciones entre espacios euclidianos, que son metrizables. De hecho, la topología euclidiana es determinada por la métrica euclidiana.

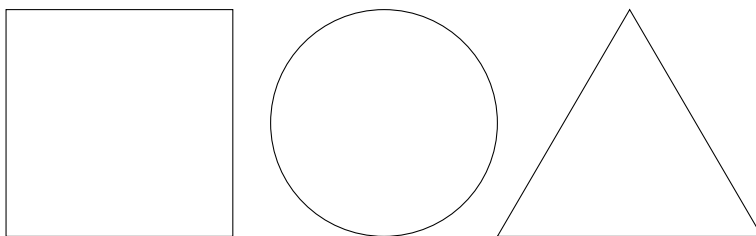


En este sentido, la gráfica de una función continua es una copia de la recta, que imita el hecho de que la recta no se “rompe”. Esta propiedad de la recta es también una propiedad topológica, y recibe el nombre de completitud. Este hecho de “no romperse” de la recta expresa de forma intuitiva que la recta euclidiana es un espacio métrico completo. En general, los espacios euclidianos son espacios métricos completos.

5 La geometría de la deformación

El primer paso en el estudio de los espacios topológicos es la clasificación, y en función de que la continuidad es la propiedad fundamental en Topología, dos espacios se consideran “esencialmente el mismo” si cada uno de ellos puede “deformarse continuamente en el otro”. Es decir, si dados dos espacios topológicos X, Y , existen una biyección bicontinua $f : X \rightarrow Y$, lo que significa que la inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es también continua.

Si existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ se dice que los espacios X, Y son homeomorfos, y el homeomorfismo es claramente una relación de equivalencia, puesto que la composición de aplicaciones continuas es una aplicación continua. Un círculo es homeomorfo con un cuadrado, y este a su vez con un triángulo. Lo que aquí parece esencial es que se trata de curvas planas cerradas con exactamente “un agujero”.



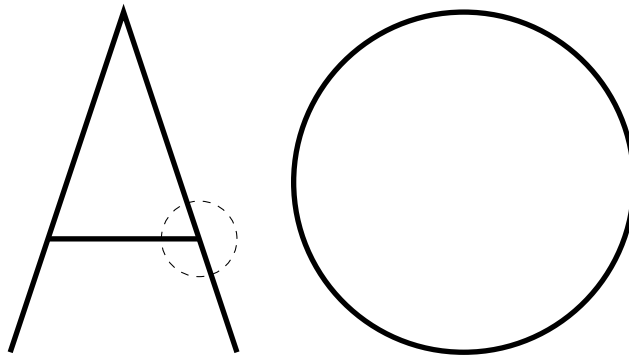
Se ha dicho que un topólogo es un matemático que no distingue entre una dona y una taza. El significado es que estos dos objetos son objetos homeomorfos, es decir, topológicamente equivalentes. La dona y la taza pertenecen a la misma clase de homeomorfismo. Las letras de del alfabeto castellano pueden clasificarse mediante homeomorfismo. Los conjuntos siguientes son las distintas clases de homeomorfismo correspondientes.

- $\{A, R\}$

- {B}
- {C, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z}
- {D, O}
- {Ñ}
- {E, F, G, T, Y}
- {H, K}
- {X}
- {P}
- {Q}

La letra “Ñ” es la única letra mayúscula del alfabeto castellano que no es conexa. Entre las minúsculas, ni la “i” ni la “j” son conexas. La determinación de las clases de homeomorfismo de los espacios topológicos ha resultado ser, en general, un problema extraordinariamente complicado, por lo que se ha recurrido a clasificaciones más gruesas. Una de ellas es la homotopía. Dos espacios son homotópicamente equivalentes, si uno de ellos puede deformarse continuamente en el otro.

Las letras “A” y “O” son homotópicamente equivalentes, porque la “A” puede deformarse continuamente “encogiéndose” sus “patas”, en tanto que “O” es homeomorfa con la parte superior de la letra “A”. Estas dos letras no son homeomorfas, dado que la letra “O” no tiene un punto con una vecindad como la que se muestra en la ilustración que sigue.



La relación de homotopía es también una relación de equivalencia, y las clases de homotopía de las letras del alfabeto castellano son las siguientes.

- {A, D, O, P, Q, R}
- {B}
- {C, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S, T, U, V, W, X, Y, Z}
- {Ñ}

La letra “ $\mathbb{N}$ ” no es ni homomorfa ni homotópicamente equivalente con ninguna otra, dado que es la única que no es conexa. Las letras en la clase de homotopía de la letra “ C ” son simplemente conexas, porque pueden ser deformadas en un punto. Las letras “ B ” y “ D ”, por ejemplo, no son homotópicamente equivalentes, puesto que presentan cantidades distintas de “orificios”.

La clasificación de espacios topológicos via homeomorfismo es un problema tan intrincado que no parece tener solución a corto plazo. Muchos invariantes son desarrollados con el objetivo de obtener clasificaciones parciales, y seguramente el lector disfrutará el trayecto que conduce a la confección de un catálogo semejante.

6 Topología Básica

La elección del tema *Espacios Pseudométricos* como tem inicial no es casual, porque corresponde a la perspectiva histórica desde la que se construye lo que hoy conocemos como Topología General. Se introduce el concepto de continuidad para aplicaciones entre espacios pseudométricos, bajo la “filosofía” de que compacidad y convergencia son dos manifestaciones del mismo fenómeno, análogamente a la forma en la que la Física Relativista entiende la masa y la energía. Por supuesto, dado que todo espacio métrico es 1° -numerable, la continuidad y la convergencia puede ser estudiada completamente a partir de sucesiones.

En la última sección se estudia brevemente el cubo de Hilbert, en tanto que espacio métrico modelo, puesto que, en el capítulo 7 se demuestra el Teorema de Metrización de Urysohn, que demuestra que todo espacio topológico metrizable es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.

Teorema 1. *Todo espacio regular, T_1 y 2° -numerable es metrizable.* $\square$

Con este fin, en el capítulo 7 se complementa, con la presentación de los axiomas de separación de conjuntos, la exposición de los axiomas de separación. Los axiomas de separación de puntos se introducen en el capítulo 4, dedicado a la compacidad.

De forma natural, en el segundo capítulo se introducen las definiciones básicas de la Topología de Conjuntos, enfatizando la continuidad como generalización de las nociones típicas de los cursos de Cálculo. En él, se presenta la noción de homeomorfismo y los problemas clásicos relativos al concepto, mismos que desembocan en la aparición de la Topología Algebraica.

7 Topología Generadas

El capítulo 3 es crucial en el desarrollo de las ideas desde las cuales se construye el texto, y en él, la idea de topología cociente es protagonista. Se inicia con las nociones de Topología Inicial y de *f*-fuente de aplicaciones, teniendo como cúspide la definición de Topología Producto.

Las nociones de Topología de Identificación y Topología Cociente se introducen a partir de los conceptos de Topología Final y *p*-pozo de aplicaciones, en tanto que topologías construidas para garantizar la continuidad de las aplicaciones involucradas.

El desarrollo descrito está pensado para favorecer, por una parte, la posterior introducción de los espacios de funciones, útiles en la construcción de los primeros invariantes homotópicos. La Topología Compacto-abierto, en el capítulo 4, se presenta como una generalización natural de la Topología Producto.

Simultáneamente, la sección dedicada a las construcciones topológicas se dedica al examen de espacios topológicos que se obtienen como cociente, productos, identificaciones, adjunciones, suspensiones y conos de espacios dados. Es una sección de alto valor lúdico que proporciona una generosa colección de ejemplos, útiles en capítulos subsecuentes.

8 Propiedades Topológicas

El capítulo 4 se dedica a la compacidad y el 5 a la conexidad, propiedades que se entienden como cruciales en Topología, y se presentan como características de la Matemática Cantoriana. El capítulo 4 puede considerarse como el eje de la presentación, conteniendo una buena cantidad de conceptos y resultados claves como la compactificación de Alexandroff, la paracompacidad, y la consecuente existencia de Particiones de la Unidad, piedra de toque del estudio de las variedades.

Teorema 2 (de Tychonoff, 1930). *Un producto es compacto si y sólo si cada uno de los factores es compacto.* $\square$

Adicionalmente, se presenta en este capítulo el célebre Teorema de Kelley.

Teorema 3 (Kelley, 1950). *El axioma de elección es equivalente con el Teorema de Tychonoff.* $\square$

El capítulo 5, distingue al texto de la mayoría de los disponibles en varios sentidos. En primer lugar, se presenta una demostración detallada y completa del Teorema de los Productos Conexos, y el análogo del teorema de Kelley para conexidad. Con ello, se arriba a una interesante equivalencia cantoriana.

Teorema 4 (de los productos conexos). *El producto cartesiano de una familia de espacios topológicos es un espacio conexo si y sólo si cada factor es un espacio conexo.* $\square$

Teorema 5. *El teorema de los productos conexos es equivalente con el axioma de elección.* $\square$

Corolario 1. *El teorema de los productos conexos es equivalente con el teorema de Tychonoff.* $\square$

Un punto central del capítulo es el énfasis en la dualidad suspensión - espacios de lazos.

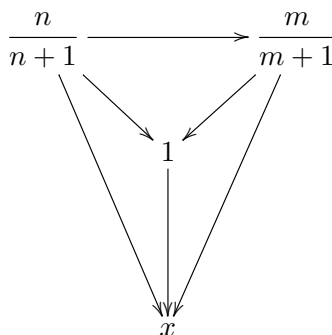
9 Convergencia

El capítulo 6 es también distintivo, tanto que en él se presentan tanto la versión Bourbaki de convergencia de filtros, como la Moore-Smith en términos de convergencia de redes. Se presenta además la equivalencia de ambas versiones por medio de los dos resultados siguientes.

Teorema 6. *Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre X , s una red inducida por $\mathcal{F}$ y $x \in X$ un punto. Entonces $\mathcal{F} \rightarrow x$ si y sólo si $s \rightarrow x$.* $\square$

Teorema 7. *Sean $s : D \rightarrow X$ una red y $\mathcal{F}_s$ es el filtro inducido por s . Entonces, $s \rightarrow x$ si y sólo si $\mathcal{F}_s \rightarrow x$.* $\square$

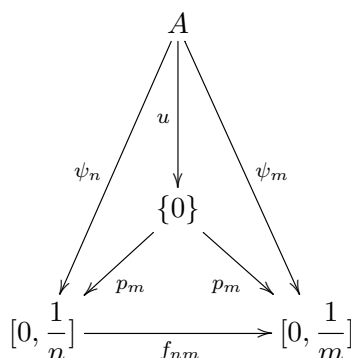
Las nociones de límite directo y límite inverso se presentan, como tradicionalmente, en conexión con las construcciones topológicas que no son de tipo finito, enfatizando su naturaleza topológica presentando una buena colección de ejemplos.



El diagrama anterior ilustra la convergencia euclidiana

$$\frac{n}{n+1} \rightarrow 1,$$

mientras que el diagrama



ilustra la convergencia euclidiana

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

10 Homotopía

No es usual que un capítulo sobre *Homotopía* aparezca en un texto con el título *Topología de Conjuntos*. Es el caso en la presente obra se incluye como consecuencia de la "filosofía" que define el texto. Se concibe a π_0 como el primero de los invariantes homotópicos y se explotan sus propiedades functoriales, con la intención de ampliar el horizonte del estudiante.

Es parte también de la propuesta filosófica explotar la dualidad con el fin de construir, a partir de π_0 , los grupos de homotopía, en tanto que invariantes homotópicos en dimensión positiva. En el mismo sentido, se calculan en ejemplos y ejercicios invariantes homotópicos de espacios topológicos finitos.

Referencias

- [1] Aguilar, Marcelo; Gitler, Samuel; Prieto, Carlos. *Topología Algebraica: un enfoque homotópico*. Mc Graw Hill, México 1998.
- [2] Alexandroff, P. S. "Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Rumen. *Math. Ann.* 92 (1924) 294-301
- [3] Amor Montaña, José Alfredo. *Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias*. Facultad de Ciencias UNAM, México 2013.
- [4] Amor Montaña, José Alfredo; Campero Arena, Gabriela; Miranda Perea Favio. *Teoría de Conjunto, Curso Intermedio*. Facultad de Ciencias UNAM, México 2014.
- [5] Bourbaki, Nicolas. *General Topology I Seire "Elements of Mathematics"*. Hermann-Addison Wesley, London 1966.
- [6] Bourbaki, Nicolas. *General Topology II Seire "Elements of Mathematics"*. Hermann-Addison Wesley, London 1966.
- [7] Bryant, Victor. *Metric Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge 1985.

- [8] Cartan, Henri. *Théorie des filtres*. CR Acad. Paris, 205 (1937) 595–598.
- [9] Cartan, Henri. *Filtres et ultrafiltres*. CR Acad. Paris, 205 (1937) 777–779.
- [10] Casarrubias Segura, Fidel; Tamariz Marascarúa, Ángel. *Elementos de Topología General*. Aportaciones Matemáticas, Textos No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, México 2012.
- [11] Čech, E. *On Bicomact Spaces*. Ann. Math, 38 (1937) 823–844.
- [12] Copson, E. T. *Metric Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge 1968.
- [13] Croosley, Martin D. *Essential Topology*. Springer-Verlag, London 2005.
- [14] Davis, Sheldon W. *Topology* Ma Graw Hill, Boston 2005.
- [15] Devlin, Keith. *The joy of sets*, second edition. Springer-Verlag, Berlin 1993.
- [16] Dugundji, James. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston 1966.
- [17] Enderton, Herbert B. *Elements of Set Theory*. Academic Press, London 1970.
- [18] Engelking, Ryszard; Sieklucki, Karol. *Outline of General Topology*. American Elsevier Publishing Company, New York 1968.
- [19] Engelking, Ryszard. *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin 1989.
- [20] Engelking, Ryszard; Sieklucki, Karol. *Topology: a geometric approach*. Heldermann Verlag, Berlin 1992.
- [21] Freyd, Peter J.; Scedrov, Andre. *Categories, Allegories*. North-Holland, Netherlands 1989.
- [22] Fulton, W. *Algebraic Topology: a first course*. Springer-Verlag, New York 1995.
- [23] García Máñez, Adalberto. *Introducción a la Topología de Conjuntos*. Aportaciones Matemáticas, Textos No. 36, Sociedad Matemática Mexicana, México 2011.
- [24] García Máñez, Adalberto; Tamariz Mascarúa, Ángel. *Topología General*. Editorial Porrúa, México 1988.
- [25] Gitler, Samuel. *Introducción a la Topología Algebriaca*. El Colegio Nacional, México 2013.
- [26] Gómez Laveaga, Carmen. *Introducción a la Teoría Intuitiva de los Conjuntos*. Facultad de Ciencias UNAM, México 2007.
- [27] Halmos, Paul R. *Naive Set Theory*. Springer-Verlag, Berlín 1974.
- [28] Hernández Hernández, Fernando. *Teoría de Conjuntos. Una introducción*. Aportaciones Matemáticas Textos No. 13, Sociedad Matemática Mexicana, México 2011.
- [29] Hocking, John G.; Young, Gail S. *Topology*. Addyson-Wesley, London 1961.
- [30] Hrbacek, Karel; Jech, Thomas. *Introduction to Set Theory*. third edition. Marcel Dekker, New York 1999.
- [31] Hu, Sze-Tsen. *Introduction to General Topology*. Holden Day, San Francisco 1966.
- [32] James, I. M. *General Topology and Homotopy Theoy*. Elsevier, Amsterdam, 1995.
- [33] Jech, Thomas. *Set Theory*, third edition. Springer-Verlag, Berlin 2003.

- [34] Kelley, John L. "The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice", *Fundamenta Mathematica*, Textos No. 37 (1950) 75-76.
- [35] Kelley, John L. *General Topology*. Springer Verlag GTM no. 27, New York 1975.
- [36] Kum, Sangho. "A correction of Kelley's proof on the equivalence between the Tychonoff product theorem and the axiom of choice", *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, vol. 16, no. 2 (2003) 75-78.
- [37] Kuratowski, Kazimierz. *Introduction to Set Theory and Topology*. Pergamon Press, New York 1961.
- [38] Kuratowski, Kazimierz. *Topology*. Academic Press, New York 1966.
- [39] Lawson, Terry. *Topology: a geometric approach*. Oxford University Press, Oxford 2003.
- [40] Lawvere, F. William; Schanuel, Stephen. *Conceptual Mathematics: a first introduction to Categories*. Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [41] McCarty, Goerge. *Topology: an introduction with application to topological groups*. Mc Graw Hill, New York 1967.
- [42] Mac Lane, Saunders. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, Berlin 1971.
- [43] Mamuzić, Zlatko P. *Introduction to General Topology*. Noordhoff Ltd., Netherlands 1963.
- [44] Massey, W. S. *Algebraic Topology: an introduction*. Harcourt, Brace and World, New York 1967.
- [45] May, Peter. *A concise course in Algebraic Topology*. Chicago University Press, Chicago 1999.
- [46] Moore E. H.; Smith, H. L. A General Theory of Limits. *Amer. J. Math. Soc.* **17** (1916) 131-164.
- [47] Munkres, James R. *Topology*. Prentice Hall, Massachusetts 1975.
- [48] Simmons, George F. *Topology and Modern Analysis*. Mc Graw Hill, New York 1963.
- [49] Sundström, Manya Raman. A pedagogical history of compactness. arXiv:1006.4131v1 (2010).
- [50] Moore, Eliakim Hastings and Smith, Herman Lyle. A general theory of limits. *Amer. J. Math.* **44** (1922) 102-121.
- [51] Pérez, Juan Antonio; de Ávila Martínez, Maribel. *El Anillo de Cobordismo de Thom*. Publicaciones Electrónicas, Cursos No. **1**, Sociedad Matemática Mexicana, México 2012.
- [52] Pérez, Juan Antonio. *Teoría Cantoriana de los Conjuntos*. Publicaciones Electrónicas, Cursos No. **2**, Sociedad Matemática Mexicana, México 2012.
- [53] Prieto, Carlos. *Topología Básica*. Fondo de Cultura Económica, México 2003.
- [54] Salicrup, Graciela. *Introducción a la Topología*. Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, Textos No. **1**, México 1993.
- [55] Schubert, Horst. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston 1968.
- [56] Shen, A.; Vereshchagin, N. K. *Basic Set Theory*. Student Mathematical Library **17**, American Mathematical Society, Rhode Island 2002.

- [57] Spanier, Edwin H. *Algebraic Topology*. Mc Graw Hill, New York 1966.
- [58] Tychonoff, A. N. "Über die topologische Erweiterung von Räumen. *Mathematische Annalen* 102 (1930) 544-561.
- [59] Vasiliev, V. A. *Introduction to Topology*. Student Mathematical Library 14, American Mathematical Society, Rhode Island 2001.
- [60] Whyburn, Gordon; Duda, Edwin. *Dynamic Topology*. Springer-Verlag, New York 1979.
- [61] Willard, Stephen. *General Topology*. Addison-Wesley, Amsterdam 1968.

Índice de autores

A

Adrian López, Jesús, 305
Alexandrov, Vladimir, 39
Álvarez Marín, Luz del Carmen, 481
Álvarez Mena, Jorge, 461
Avalos Rogel, Alejandra, 59
Ávila Sandoval, Mario Silvino, 121

B

Baltazar Larios, Fernando, 375
Benítez Armas, Adrián Fabio, 89, 97
Blažek, José Eduardo, 7

C

Cano Vaca, Oscar Lucio, 375
Cardaña Mejía, Álvaro J., 347
Cervantes Gómez, Lucía, 293
Chacón Acosta, Guillermo, 151
Clemente Robles, Karen, 489
Cruz Kuri, Luis, 359

D

Díaz Marín, Homero Geovani, 157
Domínguez May, Roger, 243, 347
Durante Murillo, José Antonio, 403

E

Elizondo Aldape, Roberto Abel, 109
Espíndola Pozos, Armando, 31
Estrada González, Luis Estrada, 195

F

Fajardo Rendón, Marcos, 53, 137, 271
Flores Estrada, Claudia, 65
Flores Hernández, Rosa María, 389

G

Gálvez Gamboa, José Javier, 175
García Reyna, Mayra Guadalupe, 251
Garza García, Mitzué, 259
Gasca Leyva, Eucario, 243, 347
Gómez Reyes, Adriana, 65

González Cabrera, Lucía, 89
González Gaxiola, Oswaldo, 151, 283, 313
Grebennikov, Alexandre I., 31

H

Hernández Ibarra, Oscar, 259
Hernández Morales, José M., 481
Herrera Armendia, Francisco, 59
Herrera Armendia, Francisco Guillermo, 53, 137, 271
Herrera Carrasco, David, 489
Herrera Valdez, Marco Arieli, 293
Huerta y Munive, Jonathan Julián, 203

I

Isa Massa, Fernando Gustavo, 421

K

Kanagúsico Muñoz, María Isabel, 75, 109
Konovalenko, Iryna, 39

L

Landa Tonil, Javier, 461
Leal Enríquez, Erik, 323
Linares Fleites Gladys, 367
Linares Fleites, Gladys, 415
López Corona, Oliver X., 323
López Rubalcaba, Carlos, 121

M

M. Rincón, Rafael, 179
Macías Romero, Fernando, 489
Macías Romero, Fernando, 493
Marciano Melchor, Magdalena, 175
Márquez Yáñez, Marly Graciela, 389
Martínez Ortiz, Juan, 251, 305
Martínez Ordaz, María del Rosario, 195
Matías Castillo, Brenda Catalina, 367
Mejía Pérez, Sara, 403
Montes López, Yesenia Carolina, 75
Morales Zamora, Ana Luisa, 403
Moreno Trujillo, John Freddy, 335

Muñoz Aguirre, Evodio, 461

N

Narro Ramírez, Patricia del Socorro, 75, 109

Neri, Iris, 231

O

Olivares Aguayo, Héctor Alonso, 437, 445

Olivares Rodríguez, Ricardo, 121

Onofre Cortez, Juana, 493

Oroza Hernández, Ana Aleyda, 415

Ortigoza, Gerardo M., 231

Ortiz Bejar, Jesús, 219

Ortiz Bejar, José, 219

Ortiz Ramírez, Ambrosio, 437, 445

P

Paz Cendejas, Francisco, 283

Pérez Pérez, Luis Antonio, 23

Pérez, Juan Antonio, 497

R

Ramírez Hernández, Leticia Adriana, 251, 305

Remedios Santiago, Leonardo, 293

Rodríguez Nava, Abigail, 445

Rosales Flores, Roberto, 389

Ruiz Ramírez, Juan, 359

Ruiz Zavala, Martha Leticia, 219

S

Santiago García, José Antonio, 151, 313

Sobczyk, Garret, 129

Sosa Galindo, Ismael, 359

T

Taud, Hind, 175

Temoltzi Avila, Raul, 39

Trejo Reséndiz, Raciél, 53

V

Valera Pérez, Miguel Ángel, 367, 415

Z

Zamudio Sánchez, Francisco J., 323

Proceedings of the Second International Conference
on Mathematics and its Applications
su composición, diseño y cuidado, estuvo a cargo
de Fernando Macías Romero
Edición electrónica, 21.9 MB
disponible en

<http://www.fcfm.buap.mx/cima/assets/docs/2015/memoriasCIMA2015.pdf>
a partir de octubre 2015