PROCEEDINGS

Seventh International Conference on Mathematics and its Applications

H. Puebla de Z., January 8, 2021

7CIMA

INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

CONFERENCE PROGRAM
PROGRAMA DEL CONGRESO

31 de agosto al 4 de septiembre de 2020

BUAP

VIEP Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado

FCFM

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Comunidad GeoGebra Latinoamericana

Contenido

Capítulo 1

Las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único

Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, German Montero Rodriguez
FCFM-BUAP

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos el hiperespacio $F_n(X)$ de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X con a lo más n puntos. Note que $F_1(X) = \{\{x\} \colon x \in X\}$. Dado $n \geq 2$, el *n-ésimo producto simétrico suspensión* de X es el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$ y es denotado por $SF_n(X)$. En este capítulo probamos lo siguiente: si X es una gráfica finita y Y es un continuo tal que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces Y es una gráfica finita.

Las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único

Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. El conjunto de los números enteros positivos lo denotamos por $\mathbb{N}$.

En 1979, S. B. Nadler Jr. introduce el concepto de hiperespacio suspensión de un continuo, véase [Pág. 125]Afixedpoint. En 2004, Sergio Macías lo generaliza al $n-$ésimo hiperespacio suspensión de un continuo y es definido como el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$ el cual se obtiene de $C_n(X)$ al identificar a $F_n(X)$ en un punto y se denota como $HS_n(X)$, véase [Pág. 127]Macias2004. El $(n, m)-$*ésimo hiperespacio suspensión* de un continuo X es el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$ que se obtiene de $C_n(X)$ al identificar a $F_m(X)$ a un punto, donde $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, y lo denotamos por $HS^n_m(X)$.

Ahora, dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, por el *n-ésimo producto simétrico suspensión* de X, denotado por $SF_n(X)$, pensamos en el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, el cual es obtenido de $F_n(X)$ al identificar a $F_1(X)$ a un punto con la topología cociente; en Franco podemos encontrar ejemplos y propiedades de este hiperespacio.

Dado un continuo X, denotamos por $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X. Una clase de continuos λ es $\mathcal{H}$-cerrada si prueba lo siguiente: si $X \in \lambda$ y Y un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces $Y \in \lambda$.

En este trabajo demostramos esta propiedad para cuando λ es la clase de las gráficas finitas y $\mathcal{H}(X)$ es el $n-$ésimo producto simétrico suspensión de X.

Los siguientes resultados son bien conocidos respecto a la propiedad $\mathcal{H}(X)$-cerrada, para el caso particular de las gráficas finitas.

(1) La clase de las gráficas finitas es F_n-cerrada, para algún $n \in \mathbb{N}$, (véase [1, Corolario 3.5]).

(2) La clase de las gráficas finitas es C_n-cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$, (véase las pruebas de los siguientes resultados: [9, Teorema 4.1] y [10, Teorema 3.8]).

(3) La clase de las gráficas finitas es HS_m^n-cerrada, para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, (véase [2, Teorema 3.3]).

Para más conceptos y resultados relacionados a la teoría de este capítulo se puede consultar: [7], [13], [11].

El resultado principal en este trabajo muestra que: si X es una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, y Y es un continuo tal que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces Y es una gráfica finita, (véase el Teorema 3.7)

1 Preliminares

Dado un subconjunto A de un continuo X, el *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de A en X, son denotados por $\text{int}_X(A)$, $\text{cl}_X(A)$ y $\text{bd}_X(A)$, respectivamente. Si d es la métrica de X, $t \in X$ y $\varepsilon > 0$, sea $B_X(t, \varepsilon) = \{x \in X : d(t, x) < \varepsilon\}$. Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, representan el conjunto vacío, los números reales y el plano euclidiano, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Un *arco* es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Una *n-celda* es un espacio topológico homeomorfo a la bola unitaria $B_n(\text{bd}\, 0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_n \leq 1\}$. Una *curva cerrada simple* es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 :$

$||x||_2 = 1\}$. Para $n \geq 3$, un *n-odo simple* Y es la unión de n arcos $J_1, \ldots, J_n$ en Y con la propiedad $J_l \cap J_k = \{v\}$ si $l \neq k$ y v es un punto extremo de los arcos J_l. El punto v es llamado el *vértice* de Y. Un 3-odo simple es llamado *triodo simple*.

Una *gráfica finita* es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan únicamente en uno o en ambos de sus puntos extremos.

Sea X un continuo y $x \in X$. Sea β un número cardinal. Decimos que x *tiene orden menor o igual que* β*, en* X, denotado por $\operatorname{ord}(x, X) \leq \beta$, cuando x tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ en X tal que la cardinalidad de la frontera de U en X es menor o igual que β, para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que x *tiene orden igual que* β*, en* X ($\operatorname{ord}(x, X) = \beta$) si prueba que $\operatorname{ord}(x, X) \leq \beta$ y $\operatorname{ord}(x, X) \nleq \alpha$ para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$. Sea $E(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x, X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x, X) = 2\}$, y $R(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x, X) \geq 3\}$. Los elementos de $E(X)$ (respectivamente, $O(X)$ y $R(X)$) se llaman *puntos extremos* (respectivamente, *puntos ordinarios* y *puntos de ramificación*) de X.

Dada una gráfica finita X, un *arco libre* en X es un arco J con puntos extremos x y z tal que $J - \{x, z\}$ es un asubconjunto abierto de X. Un *arco libre maximal* en X es un arco libre en X el cual es maximal con respecto a la inclusión. Un *ciclo* en X es una curva cerrada simple J en X tal que $J - \{a\}$ es un subconjunto abierto en X para algún $a \in J$. Sean

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X\colon J \text{ es un ciclo en } X\},\\
\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X\colon J \text{ es un arco libre maximal en } X\} \cup \mathcal{A}_R(X),\\
\mathcal{A}_E(X) = \{J \subset X\colon J \text{ es un arco libre maximal tal que } |J \cap R(X)| = 1\}.
\end{gathered}$$

Dada una gráfica finita X, los elementos de $\mathcal{A}_S(X)$ se conocen como *aristas* de X.

Lema 1.1. *Sean X una gráfica finita con $R(X) \neq \emptyset$ y $J, K \in \mathcal{A}_S(X)$. Entonces*

(a) si $p \in \operatorname{int}_X(J)$, entonces $p \notin R(X)$,

(b) si $p \in \operatorname{bd}_X(K)$, entonces $p \in R(X)$ y

(c) si $J \neq K$, entonces $\operatorname{int}_X(J) \cap K = \emptyset$.

Demostración. (*a*) Sea $p \in \operatorname{int}_X(J)$ y sea U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Entonces, enxiste un arco L en J tal que $p \in \operatorname{int}_J(L) \subset L \subset U \cap \operatorname{int}_X(J)$. Como $U \cap \operatorname{int}_X(J)$ es un subconjunto abierto de X, tenemos que $\operatorname{int}_J(L)$ es un subconjunto abierto de X. Así, $\operatorname{bd}_X(\operatorname{int}_J(L)) = L - \operatorname{int}_J(L)$. Como $L - \operatorname{int}_J(L)$ tiene a lo más dos elementos, tenemos que $\operatorname{bd}_X(\operatorname{int}_J(L))$ tiene a lo más dos elementos. Esto implica que $p \in E(X) \cup O(X)$. Así, $p \notin R(X)$.

(*b*) Sea $p \in \operatorname{bd}_X(K)$ y sea $\mathcal{B}$ una base de vecindades de p en X. Como $R(X) \neq \emptyset$ existe $q \in X - K$ y dado que X es localmente conexo existe L un arco en X con puntos extremos p y q.

Caso 1. Supongamos que K es un ciclo. Como $K - \{p\}$ es un subconjunto abierto de X tenemos que $K \cap L = \{p\}$. Sea $r = d(p, q)$ y $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset B_X(p, r)$. Note que $\operatorname{bd}_X(U)$ tiene al menos tres elementos. Esto implica que $p \notin E(X) \cup O(X)$. Así, $p \in R(X)$.

Caso 2. Supongamos que K es un arco. Note que p es un punto extremo de K. Sea a el otro punto extremo de K. Como $K - \{a, p\}$ es un subconjunto abierto de X, tenemos que $K \cap L \subset \{a, p\}$. Podemos suponer que $K \cap L = \{p\}$. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(p, \epsilon) \subset K \cup L$. Sea C_p la componente de $B_X(p, \epsilon)$ tal que $p \in C_p$ y sea $L_p = \operatorname{cl}_X(C_p)$. Así, L_p es un arco. Más aún, $K \cup L_p$ es un arco libre. Esto contradice la maximalidad de K. Por tanto, para cualquier $\epsilon > 0$, tenemos que $B_X(p, \epsilon) \not\subset K \cup L$. Esto implica que existe un arco M en X tal que $(K \cup L) \cap M = \{p\}$. Sea z el otro punto extremo de M y sea $r = min\{d(a, p), d(p, q), d(p, z)\}$. Así, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset B_X(p, r)$. Note que $\operatorname{bd}_X(V)$ tiene al menos tres elementos. Así, $p \in R(X)$.

(*c*) Supongamos que $p \in \operatorname{int}_X(J) \cap K$. Como $p \in \operatorname{int}_X(J)$, por (*a*), tenemos que $p \notin R(X)$. Como $p \in K$, entonces $p \in \operatorname{int}_X(K)$ o $p \in \operatorname{bd}_X(K)$. Si $p \in \operatorname{bd}_X(K)$, por (*b*), tenemos que $p \in R(X)$, lo cual es una contradicción. Así, $p \in \operatorname{int}_X(K)$. Por tanto, $\operatorname{int}_X(J) \cap K = \operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K)$. Esto implica que, $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K)$ es un subconjunto abierto y cerrado del conjunto conexo $\operatorname{int}_X(J)$. Así, $\operatorname{int}_X(J) = \operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K)$ y $\operatorname{int}_X(J) \subset \operatorname{int}_X(K)$. Por tanto, $J \subset K$. Esto contradice que $J \neq K$. □

Teorema 1.2. *Un espacio X es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto en X son abiertas en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U abierto en X y C componente de U. Sea $p \in C \subset U$. Como X es localmente conexo, tenemos que existe V abierto y conexo en X tal que $p \in V \subset U$. Luego, por la maximalidad de C, $p \in V \subset C$. Por lo tanto, C es abierto en X.

Ahora, supongamos que las componentes de cada subconjunto abierto de X son abiertas. Dados $p \in X$ y U abierto en X que contiene a p. Sea C la componente de U que contiene a p. Luego, C es abierto y conexo en X tal que $p \in C \subset U$. Por lo tanto, X es localmente conexo. $\square$

El siguiente resultado menciona que la conexidad local se preserva bajo funciones continuas, en espacios métricos, compactos y conexos.

Lema 1.3. *Sean X, Y continuos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sea U un abierto de Y y C una componente de U. Consideramos $x \in f^{-1}(C)$ y C_x la componente de $f^{-1}(U)$ tal que $x \in C_x$. Como X es localmente conexo y $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X, por el Teorema 1.2, C_x es abierto de X. Como f es continua, entonces $f(C_x)$ es conexo. Además, $f(x) \in f(C_x) \subset U$. Como C es componente de U y $f(x) \in C$, entonces $f(C_x) \subset C$. Así, $C_x \subset f^{-1}(C)$. Es dedir, $f^{-1}(C)$ es un subconjunto abierto de X. Luego, $X - f^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de X y dado que f es cerrada, entonces $f(X - f^{-1}(C)) = Y - C$ es un subconjunto cerrado de Y. Así, C es abierto de Y. Por el Teorema 1.2, Y es localmente conexo. $\square$

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos los siguientes hiperespacios de X.

$$\begin{aligned}
2^X &= \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado de } X\}, \\
F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \\
C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, \\
C(X) &= C_1(X). \\
F_1(X) &= \{\{x\} : x \in X\}.
\end{aligned}$$

Sea X un continuo con métrica d. Para cualesquiera $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la *nube* de radio ε alrededor de A, denotada por $N(\varepsilon, A)$, como el conjunto

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon, \text{ para algún } a \in A\}.$$

Escribiremos $N_X(\varepsilon, A)$ cuando el espacio topológico X necesite ser mencionado.

Sea X un continuo con métrica d. Para $A, B \in 2^X$, definimos la función $H\colon 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como

$$H(A,B) = \text{ínf}\,\{r > 0 : A \subset N(r,B) \text{ y } B \subset N(r,A)\}.$$

Si X es un continuo, entonces la función H es una métrica para 2^X, conocida como la *métrica de Hausdorff*.

Todos los hiperespacios definidos anteriormente son considerados con la métrica de Hausdorff. Los hiperespacios $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son llamados el *n-ésimo producto simétrico* de X y el *n-ésimo hiperespacio* de X, respectivamente.

Sean X un continuo con métrica d, $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$ definimos

$$B^H(\varepsilon, A) = \{B \in 2^X \colon H(B,A) < \varepsilon\}.$$

Sean X un continuo, $r \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_r$ subconjuntos no vacíos de X. El *vietórico* de $A_1, \ldots, A_r$, denotado por $\langle A_1, \ldots, A_r \rangle$, es el conjunto $\langle A_1, \ldots, A_r \rangle_{2^X} \cap F_n(X)$ donde $\langle A_1, \ldots, A_r \rangle_{2^X}$ es el conjunto
$\left\{B \in 2^X \colon B \subset \bigcup_{i=1}^r A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, r\}\right\}$.

Teorema 1.4 (Teorema 0.11)**.** *Nadler78 Si X es un continuo con una topología τ, entonces la colección*

$$\{\langle S_1, \ldots, S_r \rangle_{2^X} : S_i \in \tau \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, r\}, r \in \mathbb{N}\},$$

es una base para una topología para 2^X.

La topología generada por la base mencionada en el Teorema 1.4 es conocida como la *topología de Vietoris*.

Teorema 1.5. *[12, Teorema 0.13] Si X es un continuo, entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff sobre 2^X coincide con la topología de Vietoris.*

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideramos el subespacio de $F_n(X)$

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) \colon A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ la cual es una } n\text{−celda}\}.$$

Lema 1.6. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.*

Demostración. Si $B \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces existe una n-celda $\mathcal{M}$ en $F_n(X)$ tal que $B \in \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$. Así, existe un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $F_n(X)$ tal que $B \in \mathcal{U} \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Sea $B_1 \in \mathcal{U} - \{B\}$. Esto implica que $B_1 \in \mathcal{U} \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es una n-celda en $F_n(X)$, entonces $B_1 \in \mathcal{E}_n(X)$. Por tanto, $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. □

Teorema 1.7 (Theorem 5.2)**.** *Franco Un continuo es localmente conexo si y solo si $SF_n(X)$ es localmente conexo para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$.*

Teorema 1.8. *[1, Lemma 3.1] Si X es un continuo localmente conexo y $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces no existen puntos de A que sean el vértice de un triodo simple de X.*

Teorema 1.9. *[1, Lemma 3.2] Si X es un continuo localmente conexo el cual no es una gráfica finita, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, X contiene una gráfica finita con al menos k aristas.*

Teorema 1.10. *[1, Lemma 3.3] Si α es un arco en $F_n(X)$ y α une los elementos A y B, entonces $\bigcup \alpha$ tiene un número finito de componentes tal que cada una de ellas es localmente conexa e intersecta a los conjuntos A y B.*

Dados X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, q_X denota la proyección natural $q_X \colon F_n(X) \to SF_n(X)$ y F_X^1 denota el elemento $q_X(F_1(X))$. Note lo siguiente:

$$q_X|_{F_n(X)-F_1(X)} \colon F_n(X) - F_1(X) \longrightarrow SF_n(X) - \{F_X^1\} \quad \text{es un homeomorfismo.}$$

A continuación presentamos algunos ejemplos de modelos geométricos del n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo dado, en los cuales se puede apreciar algunas características interesantes.

2 Resultados previos

En esta sección presentamos algunos resultados que son necesarios para obtener el resultado principal.

Lema 2.1. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $A \in \mathcal{U}$. Supongamos que $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, donde $m \leq n$.. Si $m = n$, entonces $A \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$.

Supongamos que $m < n$. Como $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$, existe un $r > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$. Sean $a_{m+1}, \ldots, a_n \in B_X(r, a_1)$ todos diferentes de $a_1, \ldots, a_m$ y sea $B = \{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$. Note que $H(A, B) < r$. Así, $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$. Esto implica que $B \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$. Por tanto, $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. $\square$

Dado un continuo X sea $\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x$ tiene una vecindad G en X tal que G es una gráfica finita$\}$. X es *casi enrejado* si prueba que $\mathcal{G}(X)$ es un subconjunto denso en X, véase enrejados.

Lema 2.2. *Si X es una gráfica finita, entonces $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X.*

Demostración. Note que $\mathcal{G}(X) = X$ y por [Teorema 9.10]ContinuumTheory $R(X)$ es un conjunto finito. Veamos que $X \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$.

Sea $p \in R(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos a $p_n \in B_X(p, \frac{1}{n}) - R(X)$. Como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, entonces $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Así, $R(X) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Esto implica que

$$X = \mathcal{G}(X) = (\mathcal{G}(X) - R(X)) \cup R(X) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X)).$$

Por tanto, $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X. $\square$

Dada una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, consideramos

$$\mathcal{N}_n(X) = \{A \in F_n(X) - F_{n-1}(X) \colon A \cap R(X) = \emptyset\}.$$

Lema 2.3. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $F_n(X)$. Por Lemma 2.1, $\mathcal{U} \cap (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U} \cap (F_n(X) - F_{n-1}(X))$ y supongamos que $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como $\mathcal{U}$ es abierto de $F_n(X)$, existe un $r_1 > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r_1) \subset \mathcal{U}$.

Sea $\delta = \text{mín}\{d(p_i, p_j) \colon i, j \in \{1, \ldots, n\}$ donde $i \neq j\}$. Sea $r = \text{mín}\{r_1, \frac{\delta}{2}\}$. Note que $B_X(p_i, r) \cap B_X(p_j, r) = \emptyset$, donde $p_i, p_j \in A$ y $i \neq j$. Como X es una gráfica finita, por Lemma 2.2, $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X)) \neq \emptyset$. Así, existe $b_i \in B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X))$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Esto implica que $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X) \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. □

Lema 2.4. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Supongamos que $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Sean $J_1, \ldots, J_n$ arcos ajenos por pares de X tal que $(J_1 \cup \cdots \cup J_n) \cap R(X) = \emptyset$ y $p_i \in \text{int}_X(J_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Note que la asociación que manda $(t_1, \ldots, t_n)$ al conjunto $\{t_1, \ldots, t_n\}$ es un homeomorfismo. Así, $J_1 \times \cdots \times J_n$ es homeomorfo a $\langle J_1, \ldots, J_n \rangle$. Por tanto, $\langle J_1, \ldots, J_n \rangle$ es una n-celda y es vecindad de A en $F_n(X)$. Por tanto, $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Luego, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$. □

Lema 2.5. *Sean X una gráfica finita, $E \in \mathcal{A}_S(X)$ y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Si $A, B \in \langle \text{int}_X(E) \rangle$ tal que $|A| = |B| = m$, entonces existe un arco $\mathcal{A}$ en $\langle \text{int}_X(E) \rangle$ con puntos extremos A, B y si $C \in \mathcal{A}$, entonces $|C| = m$.*

Demostración. Supongamos que $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Consideramos un homeomorfismo $\beta \colon (0, 1) \longrightarrow \text{int}_X(E)$. Para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, sean $r_{a_l}, r_{b_l} \in (0, 1)$ tal que $\beta(r_{a_l}) = a_l$ y $\beta(r_{b_l}) = b_l$. Sea T_l el intervalo con puntos extremos r_{a_l}, r_{b_l} y definimos

$$\alpha_l \colon [0, 1] \longrightarrow T_l \text{ tal que } \alpha_l(t) = r_{a_l} + t(r_{b_l} - r_{a_l}).$$

En caso de que $r_{a_l} = r_{b_l}$, entonces α_l es una función constante. En cualquier caso, α_l es una función continua. Note lo siguiente: si $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ y $t \in (0, 1)$, entonces $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$. Supongamos que $\alpha_i(t) = \alpha_j(t)$ y que si $j \geq i$, entonces $r_{a_j} \geq r_{a_i}$ y $r_{b_j} \geq r_{b_i}$. Así, $r_{a_i} + t(r_{b_i} - r_{a_i}) = r_{a_l} + t(r_{b_l} - r_{a_l})$. Luego, $r_{a_i} - r_{a_j} = t(r_{b_j} - r_{b_i} + r_{a_i} - r_{a_j})$. Como $r_{a_i} \neq r_{a_j}$, tenemos que

$$t = \frac{r_{a_i} - r_{a_j}}{(r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})}. \tag{1}$$

Como $t \in (0, 1)$ y $r_{a_i} - r_{a_j} < 0$, tenemos que (1) implica que $r_{a_i} - r_{a_j} > (r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})$. Así, $0 > r_{b_j} - r_{b_i}$, lo cual es una contradicción. Pot tanto, $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$. Así, $\gamma_l = \beta \circ \alpha_l \colon [0, 1] \longrightarrow \text{int}_X(E)$ es una función continua.

Afirmación. La función $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow \langle \mathrm{int}_X(E)\rangle$ definida para cada $t \in [0,1]$ como $\alpha(t) = \{\gamma_1(t).\dots,\gamma_m(t)\}$ es continua.

Prueba de la Afirmación. Notemos que $\alpha(0) = \{\beta(\alpha_1(0)),\dots,\beta(\alpha_m(0))\} = \{a_1,\dots,a_m\} = A$. Así, $\alpha(0) = A$. De manera similar $\alpha(1) = B$ y $|\alpha(t)| = m$, para cada $t \in \{1,\dots,m\}$. Sean $t_0 \in [0,1]$ y $\varepsilon_0 > 0$. Como $\beta\circ\alpha_l$ es continua en t_0, para cada $l \in \{1,\dots,m\}$, existe $\delta_l > 0$, tal que si $t \in [0,1]$ y $|t_0 - t| < \delta_l$, entonces $d(\beta(\alpha_l(t_0)),\beta(\alpha_l(t))) < \varepsilon_0$. Sea $\delta_0 = \text{mín}\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$. Si $t \in [0,1]$ y $|t_0 - t| < \delta_0$, entonces $d(\beta(\alpha_l(t_0)),\beta(\alpha_l(t))) < \varepsilon_0$, para cada $l \in \{1,\dots,m\}$. Así, $\alpha(t_0) \subset N(\epsilon_0,\alpha(t)))$ y $\alpha(t) \subset N(\epsilon,\alpha(t_0))$. Luego, $H(\alpha(t_0),\alpha(t)) < \varepsilon_0$. Por tanto, α es continua. Así, la Afirmación es verdadera.

Como $[0,1]$ es localmente conexo, por Lema 1.3, tenemos que $\alpha([0,1])$ es localmente conexo. En particular, $\alpha([0,1])$ es arco conexo. Así, existe un arco $\mathcal{A}$ en $\alpha([0,1]) \subset \langle \mathrm{int}_X(E)\rangle$ con puntos extremos A y B. $\square$

De ahora en adelante, cuando nos referimos a X como una gráfica finita significa que X tiene $E_1,\dots,E_m$ aristas, con $m \in \mathbb{N}$.

Sea X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)$ como el subconjunto de $F_n(X)$ tal que cada miembro de $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)$ tiene exactamente i_j elementos en el interior de la arista E_j, donde $i_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, es decir,

$$\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m) = \{A \in F_n(X)\colon \mid A \cap \mathrm{int}_X(E_j) \mid = i_j, \text{ para cada } j \in \{1,\dots,m\}\}.$$

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{gathered}\mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m) \text{ si } i_j = n \text{ para algún } j \in \{1,\dots,m\} \text{ y}\\ \mathcal{K}_X(i_1,i_2) = \mathcal{K}_X(i_1,i_2,\dots,i_m) \text{ si } i_1 \neq 0, i_2 \neq 0 \text{ y } i_j = 0 \text{ para cada}\\ j \in \{3,\dots,m\}.\end{gathered}$$

Note que $\mathcal{K}_X^j \subset \langle \mathrm{int}_X(E_j)\rangle$ y $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j) = \langle E_j\rangle$.
Sea

$$\Omega(X) = \{\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)\colon i_1 + \cdots + i_m = n\}.$$

Haciendo uso del Lemma 2.5, podemos probar las siguietes propiedades de los conjunto definidos anteriormente.

Lema 2.6. *Si X es una gráfica finita y $m \in \mathbb{N}$, donde m es el número de aristas de X, entonces las siguientes resultados se cumplen.*

(a) $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)$ *es arco conexo.*

(b) $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)\cap\mathcal{K}_X(l_1,\dots,l_m)=\emptyset$ *if and only if there is* $j\in\{1,\dots,m\}$ *such that* $i_j\neq l_j$.

(c) $|\Omega(X)|=1$ *si y solo si* $m=1$.

(d) Si $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)\in\Omega(X)$, *entonces* $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)$ *es un subconjunto abierto de* $\mathcal{E}_n(X)$.

Demostración. (a). Sea $A,B\in\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)$. Si $A,B\subset \operatorname{int}_X(E_j)$, para algún $E_j\in\mathcal{A}_S(X)$, por el Lema, existe un arco con puntos extremos A,B, es decir, $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)$ es arco conexo.

Para cada $j\in\{1,\dots,m\}$, sea $A_j=A\cap\operatorname{int}_X(E_j)$ y $B_j=B\cap\operatorname{int}_X(E_j)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_1,\dots,A_k,B_1,\dots,B_k$ son conjuntos no vacíos, con $k\le m$. Así, $A=A_1\cup\dots\cup A_k$ y $B=B_1\cup\dots\cup B_k$. Note que para cada $j\in\{1,\dots,k\}$, los conjuntos A_j y B_j cumplen las condiciones del Lema 2.5. Así, para cada $j\in\{1,\dots,k\}$, existe un arco $\mathcal{A}_j$, con puntos extremos A_j,B_j, tal que $|C|=i_j$, para cada $C\in\mathcal{A}_j$. Así, existe un homeomorfismo $\alpha_j\colon[0,1]\longrightarrow\mathcal{A}_j$, para cada $j\in\{1,\dots,k\}$. Así, de manera similar como en la prueba del Lema 2.5, la función $\alpha\colon[0,1]\longrightarrow\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)$ definida como:

$$\alpha(t)=\bigcup_{j=1}^{k}\alpha_j(t) \tag{2}$$

es continua. También, $\alpha(0)=A$ y $\alpha(1)=B$. Por tanto, por Lema 1.3, $\alpha([0,1])$ es un continuo localmente conexo, en particular, es arco conexo. Así, existe un arco $\mathcal{A}$ en $\alpha([0,1])\subset\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)$ con puntos extremos A,B. Por tanto, , $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)$ es arco conexo.

(b). Supongamos que $A\in\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)\cap\mathcal{K}_X(l_1,\dots,l_m)$. Por un lado, $|A\cap\operatorname{int}_X(E_j)|=i_j$ y por otro lado tenemos que $|A\cap\operatorname{int}_X(E_j)|=l_j$, para cada $j\in\{1,\dots,m\}$. Así, $i_j=l_j$, para cada $j\in\{1,\dots,m\}$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)=\mathcal{K}_X(l_1,\dots,l_m)$.

(c). Supongamos que $|\Omega(X)|=1$ y $m\ge 2$. Esto implica que existen $E_1,E_2\in\mathcal{A}_S(X)$, con $E_1\neq E_2$. Si $i_1=n$ y $l_2=n$, entonces $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m),\mathcal{K}_X(l_1,\dots,l_m)\in\Omega(X)$. Por (b), $\mathcal{K}_X(i_1,\dots,i_m)\cap\mathcal{K}_X(l_1,\dots,l_m)=\emptyset$. Así, $|\Omega(X)|\ge 2$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $m=1$.

(d). Sea $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)\in\Omega(X)$ y $A\in\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$. Esto implica que $A\in\mathcal{N}_n(X)$. Por Lema 2.4, $A\in\mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)\subset\mathcal{E}_n(X)$. Supongamos que $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Sean $I_1,\ldots,I_n$ arcos ajenos por pares de X tales que $I_i\cap R(X)=\emptyset$ y $a_i\in\operatorname{int}_X(I_i)$, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$. Luego, $A\in\langle\operatorname{int}_X(I_1),\ldots,\operatorname{int}_X(I_n)\rangle$. Note que $\langle\operatorname{int}_X(I_1),\ldots,\operatorname{int}_X(I_n)\rangle\subset\mathcal{N}_n(X)$. Por Lema 2.4, $\langle\operatorname{int}_X(I_1),\ldots,\operatorname{int}_X(I_n)\rangle$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. Es claro que si $B\in\langle\operatorname{int}_X(I_1),\ldots,\operatorname{int}_X(I_n)\rangle-\{A\}$, entonces $|B|=n$. Dado $j\in\{1,\ldots,m\}$, como $|A\cap\operatorname{int}_X(E_j)|=i_j$, entonces $\operatorname{int}_X(E_j)$ contiene i_j de los arcos $I_1,\ldots,I_n$. Como los arcos $I_1,\ldots,I_n$ son ajenos por pares, tenemos que $|B\cap\operatorname{int}_X(E_j)|=i_j$. Esto implica que $B\in\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$. Así, $\langle\operatorname{int}_X(I_1),\ldots,\operatorname{int}_X(I_n)\rangle\subset\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. □

El siguiente teorema es una caracterización de las gráficas finitas, el cual es de gran importancia para el propósito de este trabajo.

Teorema 2.7. *Un continuo localmente conexo X es una gráfica finita si y solo si para algún (para cada) $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$ con un número finito de componentes.*

Demostración. Sean X una gráfica finita y $n\in\mathbb{N}$. Por Lema 2.4, $\mathcal{N}_n(X)\subset\mathcal{E}_n(X)$ y por Lema 2.3, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso $F_n(X)$. Por tanto, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.

Consideramos a los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ definidos anteriormente.

Notemos que si $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)\in\Omega(X)$, entonces $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)\subset\mathcal{N}_n(X)$. Por Lemma 2.4, $\mathcal{N}_n(X)\subset\mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)\subset\mathcal{E}_n(X)$. Mostraremos que $\bigcup\Omega(X)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{E}_n(X)$.

Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{E}_n(X)$. Supongamos que $i_1+\cdots+i_m=n$. Por Lemma 1.6, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Esto implica que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Como X es una gráfica finita, por Lema 2.3, tenemos que $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Así, $\mathcal{U}\cap\mathcal{N}_n(X)\neq\emptyset$. Sea $A\in\mathcal{U}\cap\mathcal{N}_n(X)$. Esto implica que $|A|=n$ y $A\cap R(X)=\emptyset$. Así, $|A\cap\operatorname{int}_X(E_j)|=l_j$, donde $l_j\in\{0,1,\ldots,n\}$, para cada $j\in\{1,\ldots,m\}$. Como $|A|=n$, tenemos que $l_1+\cdots+l_m=n$. Así, $A\in K_X(l_1,\ldots,l_m)$ y $K_X(l_1,\ldots,l_m)\in\Omega(X)$. Luego, $\mathcal{U}\cap\bigcup\Omega(X)\neq\emptyset$. Por tanto, $\bigcup\Omega(X)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{E}_n(X)$. Como $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $F_n(X)$ es localmente conexo, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$

es localmente arco conexo, véase [Teorema 8.25]ContinuumTheory. Así, cada componente de $\mathcal{E}_n(X)$ intersecta a un conjunto de la forma $\mathcal{K}(i_1, \ldots, i_m)$. Como existe una cantidad finita de conjuntos $\mathcal{K}(i_1, \ldots, i_m)$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ tiene una cantidad finita de componentes.

Ahora, supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$, con r componentes, donde $r \in \mathbb{N}$ y que X no es una gráfica finita. Como $F_n(X)$ es un continuo localmente conexo, las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son arco conexas [Theorem 8.26]ContinuumTheory. Por Lema 1.9 existe una gráfica finita G contenida en X tal que G contiene al menos $k = 2r + 1$ aristas. Supongamos que $J_1, \ldots, J_k$ son las aristas de G.

Consideramos puntos $p_i \in \text{int}_G(J_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Elegimos subconjuntos abiertos y conexos de X ajenos por pares $V_1, \ldots, V_k$ tales que $p_i \in V_i$ y $V_i \cap G \subset \text{int}_G(J_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $\{p_i\} \in \langle V_i \rangle$ y $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$, podemos elegir elementos $A_i \in \langle V_i \rangle \cap \mathcal{E}_n(X)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Así, tenemos $2r+1$ conjuntos, digamos $A_1, \ldots, A_{2r+1}$. Por el principio de las casillas, existe una componente $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_n(X)$ que contiene tres de los conjuntos A_i : podemos suponer que A_1, A_2 y A_3 pertenecen a $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es arco conexa, existe un arco α_1 en $\mathcal{C}$ tal que α_1 une a A_3 y A_1, y un arco α_2 en $\mathcal{C}$ tal que α_2 une a A_3 y A_2. Tomamos un punto $x \in A_3$. Por Teorema 1.10, existe C_1 y C_2 componentes de $\bigcup \alpha_1$ y $\bigcup \alpha_2$, respectivamente, tal que $x \in C_1 \cap C_2$. Así, $C = C_1 \cup C_2$ es un continuo localmente conexo de $\bigcup \alpha_1 \cup \bigcup \alpha_2$ que intersecta a A_1, A_2 y A_3.

Note que cada punto $p \in C$, pertenece a un elemento de $\mathcal{E}_n(X)$. Por Teorema 1.8, p no es el vértice de un triodo simple de X, es decir, C es un continuo localmente conexo sin triodos simples. Por [8.40]ContinuumTheory, C es un arco o una curva cerrada simple. En cualquier caso, podemos concluir que existe un arco en X, el cual intersecta a los tres conjuntos A_1, A_2 y A_3. Sea β un arco en C con puntos extremos a_1 y a_2 tal que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ y $a_3 \in A_3 \cap \beta - \{a_1, a_2\}$. Por [Teorema 8.26]ContinuumTheory los conjuntos $V_1, \ldots, V_k$ son arco conexos. Como $a_3 \in V_3$, existe un arco α en V_3 con puntos extremos a_3 y p_3. Como los puntos de β no son vértice de un triodo simple de X y $a_3 \in \alpha \cap \beta$, entonces $\alpha \cap \beta$ es un arco. Como $a_1 \in V_1$ y $a_2 \in V_2$, entonces a_1 y a_2 no están en V_3. Esto implica que $a_1, a_2 \notin \alpha$ y que $\alpha \subset \beta$. Así, β intersecta el arista J_3. Como J_3 tiene un vértice v de un triodo simple de X, entonces $v \notin \beta$. Luego, $J_3 \not\subset \beta$. Nuevamente, como β no contiene vértice de un triodo simple de X, tenemos que $a_1 \in J_3$ o $a_2 \in J_3$. Si $a_1 \in J_3$, entonces $a_1 \in V_1 \cap J_3$ y como $V_1 \cap G \subset \text{int}_G(J_1)$, entonces $a_1 \in J_3 \cap \text{int}_G(J_1)$, lo cual es una contradicción, ya que J_1 y J_3 son aristas de la gráfica finita G, véase Lema 1.1. Por tanto, X es una gráfica finita. $\square$

3 Resultados principales

En esta sección se demuestra que la clase de las gráficas finitas es SF_n-cerrada, véase el Teorema 3.7.

Teorema 3.1 (Teorema 3.1). *conPaco2012 Para un continuo localmente conexo X las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) X es casi enrejado.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.

(c) Cada subconjunto abierto y no vacío de X contiene un arco libre de X.

Teorema 3.2 (Teorema 3.5). *conPaco2012 Sea X un continuo localmente conexo tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso en $F_n(X)$, donde $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $A \in F_{n-1}(X)$, entonces no existe vecindades de A en $F_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.3. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$.*

Demostración. Por Lema 2.4, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.

Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Por Teorema 1.8, no existen puntos de A que sean el vértice de un triodo simple de X, es decir, $A \cap R(X) = \emptyset$. Como X es una gráfica finita, por Theorem 2.7, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Supongamos que $A \in F_{n-1}(X)$. Por Theorem 3.2, no existen vecindades de A en $F_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$, lo cual es una contradicción ya que $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Esto implica que $A \in F_n(X) - F_{n-1}(X)$. Por tanto, $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$. $\square$

El siguiente resultado nos dice quiénes son los conjuntos que son las componentes del subespacio $\mathcal{E}_n(X)$, para una gráfica finita X.

Teorema 3.4. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son los conjuntos de la forma:*

$$\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m), \text{ donde } i_1 + \cdots + i_m = n.$$

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Note que $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\bigcup \Omega(X) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Esto implica que $|A| = n$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, sea $l_k = |A \cap \operatorname{int}_X(E_k)|$. Así, $A \in \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m)$. Como $|A| = n$, tenemos que $l_1 + \cdots + l_m = n$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m) \in \Omega(X)$. Así, $A \in \bigcup \Omega(X)$. Luego, $\mathcal{N}_n(X) \subset \bigcup \Omega(X)$. Así, $\mathcal{N}_n(X) = \bigcup \Omega(X)$. Por el Lema 3.3, tenemos que $\mathcal{E}_n(X) = \bigcup \Omega(X)$. Por el Lema 2.6, los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ son abiertos, conexos y ajenos por pares de $\mathcal{E}_n(X)$, y por tanto, éstas son las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$. □

Teorema 3.5. *Si X es un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces no existen vecindades de F_X^1 en $SF_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $SF_n(X)$ tal que $F_X^1 \in \mathcal{U}$. Por un lado, $\mathcal{U} - \{F_X^1\}$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$, y como la función cociente q_X es continua, entonces $q_X^{-1}(\mathcal{U} - \{F_X^1\})$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Sea $\mathcal{V} = q_X^{-1}(\mathcal{U} - \{F_X^1\})$. Por otro lado, como $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{SF_n(X)}(F_X^1, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Sea $\{a\} \in F_1(X)$. Como q_X es continua, existe un delta $\delta > 0$ tal que

$$q_X(B_{F_n(X)}(\{a\}, \delta)) \subset B_{SF_n(X)}(F_X^1, \epsilon). \tag{3}$$

Como X es conexo, la cardinalidad de $B_X(a, \delta)$ no es finito. Sea $b \in B_X(a, \delta) - \{a\}$. Luego, $\{a, b\} \in B_{F_n(X)}(\{a\}, \delta)$. Por (3), $q_X(\{a, b\}) \in B_{SF_n(X)}(F_X^1, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Por tanto, $q_X(\{a, b\}) \in \mathcal{U}$. Más aún, $q_X(\{a, b\}) \in \mathcal{U} - \{F_X^1\}$. Así, $\{a, b\} \in \mathcal{V}$.

Como X es un continuo localmente conexo casi enrejado, por Teeorema 3.1, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Como $\{a, b\} \in F_{n-1}(X)$ y $\mathcal{V}$ es una vecindad de $\{a, b\}$ en $F_n(X)$, por Teorema 3.2, tenemos que $\mathcal{V}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Así, $q_X(\mathcal{V}) = \mathcal{U} - \{F_X^1\}$, no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Como $\mathcal{U} - \{F_X^1\} \subset \mathcal{U}$, tenemos que $\mathcal{U}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. □

Teorema 3.6. *[5, Proposición 1] Sean X un continuo y $k \in \mathbb{N}$.*

(a) Si $V \subset X$ es una k-celda y U es un subconjunto abierto de X tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces existe una k-celda τ tal que $\tau \subset U \cap V$.

(b) Si $V \subset X$ es tal que $V \approx I^{\infty}$ y U es un subconjunto abierto de X tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $U \cap V$ contiene un espacio homeomorfo a I^{∞}.

El siguiente resultado es el principal objetivo de este trabajo, en el cual hacemos uso de los Teoremas 2.7, 3.5 y 3.6.

Teorema 3.7. *Sean X, Y continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces X es gráfica finita si y solo si Y es gráfica finita*

Demostración. Supongamos que Xes una gráfica finita y que Y es un continuo tal que $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ es un homeomorfismo, para algún $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$. Es claro que X es localmente conexo. Así, por Teorema 1.7, Y es localmente conexo.

Como X es una gráfica finita, por Teorema 2.7, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$ con r componentes, donde $r \in \mathbb{N}$. Note que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X) - F_1(X)$, ya que

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_{F_n(X)-F_1(X)}(\mathcal{E}_n(X)) &= \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{E}_n(X)) \cap (F_n(X) - F_1(X)) \\ &= F_n(X) \cap (F_n(X) - F_1(X)) \\ &= F_n(X) - F_1(X). \end{aligned}$$

Así, $q_X(\mathcal{E}_n(X))$ es un subconjunto denso de $SF_n(X) - \{F_X\}$.

Sean $A_x \in F_n(X)$ y $A_y \in F_n(Y)$ tales que $h(q_X(A_x)) = F_Y$ and $h^{-1}(q_Y(A_y)$ $= F_X$. Así, $h\colon SF_n(X) - \{F_X, q_X(A_x)\} \to SF_n(Y) - \{F_Y, q_Y(A_y)\}$ es un homeomorfismo.

Afirmación I. $q_Y(\mathcal{E}_n(Y) - \{A_y\}) = h(q_X(\mathcal{E}_n(X) - \{A_x\}))$.

Prueba de la afirmación I. Sean $B \in \mathcal{E}_n(Y) - \{A_y\}$ y $\mathcal{M}$ una vecindad de B en $F_n(Y)$ tal que $\mathcal{M}$ es una n-celda. Luego, Existe $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(Y)$ tal que $B \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Note que $\mathcal{U} - F_1(Y)$ es un subconjunto abierto de $F_n(Y)$ tal que $B \in \mathcal{U} - F_1(Y) \subset \mathcal{M}$. Luego, por Teorema 3.6, existe una n-celda $\mathcal{W}$ en $F_n(Y)$ tal que $B \in \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{U} - F_1(Y)$. Esto implica que $\mathcal{W}$ es una n-celda en $F_n(Y) - F_1(Y)$ y es una vecindad de B. Así, tenemos que $q_Y(\mathcal{W})$ es una n-celda en $SF_n(Y) - \{F_Y, q_Y(A_y)\}$ y es una vecinda de $q_Y(B)$. Como h es un homeomorfismo, existe $A \in F_n(X) - (F_1(X) \cup \{A_x\})$ tal que $h(q_X(A)) = q_Y(B)$. Así, $h^{-1}(q_Y(\mathcal{W}))$ es una vecindad de $q_X(A)$ en $SF_n(X) - \{F_X^1, q_X(A_x)\}$ tal que $h^{-1}(q_Y(\mathcal{W}))$ es una n-celda. Esto implica que

$A \in \mathcal{E}_n(X) - \{A_x\}$. Así, $q_Y(B) \in h(q_X(\mathcal{E}_n(X) - \{A_x\}))$. De manera simiar se prueba la otra contención. Por tanto, la Afirmación I es verdadera.

Como $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $F_n(X)$ es localmente conexo, por Lema 1.2, las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son abiertas en $F_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X) - \{A_X\}$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Por Afirmación I, $\mathcal{E}_n(Y) - \{A_Y\}$ es un subconjunto denso de $F_n(Y)$. Por tanto, $\mathcal{E}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $F_n(Y)$.

Afirmación II. Si $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces $h(q_X(A)) \neq F_Y$.

Prueba de la Afirmación II. Supongamos que existe $A \in \mathcal{E}_n(X)$ tal que $h(q_X(A)) = F_Y$. Sea $\mathcal{M}$ una vecindad de A en $F_n(X)$ tal que $\mathcal{M}$ es una n-celda. Luego, $A \in \mathcal{M} \cap (F_n(X) - F_1(X)) \subset \mathcal{M}$, es decir, $\mathcal{M} \cap (F_n(X) - F_1(X))$ es una vecindad de A en $F_n(X) - F_1(X)$. Sea $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cap (F_n(X) - F_1(X))$. Como $\mathcal{M}$ es encajable en $\mathbb{R}^n$, tenemos que $\mathcal{M}^*$ es encajable en $\mathbb{R}^n$. Así, $h(q_X(\mathcal{M}^*))$ es una vecindad de F_Y $SF_n(Y)$ tal que $h(q_X(\mathcal{M}^*))$ es encajable en $\mathbb{R}^n$, lo cual contradice al Teorema 3.5. Por tanto, $h(q_X(A)) \neq F_Y$, para cada $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Así, la Afirmación II es verdadera.

Como una consecuencia de Afirmación II, tenemos que $A_x \notin \mathcal{E}_n(X)$. Con argumentos similares, podemos afirmar que $A_y \notin \mathcal{E}_n(Y)$. Así, por Afirmación I, tenemos que $\mathcal{E}_n(Y)$ tiene un número finito de componentes. Por Teorema 2.7, Y es una gráfica finita.

Esto demuestra quela clase de las gráficas finitas es SF_n-cerrada. $\square$

Bibliografía

[1] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topol. Appl. 153 (2006) 1434–1450.

[2] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace $HS_m^n(X)$ for a finite graph X is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.

[3] Charles O. Christenson, William L. Voxman, *Aspects of Topology*, n, Pure and Applied Mathematics, Vol. 39, Marcel Dekker, Inc., E.U. New York and Basel, 1977.

[4] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products,* Topol. Appl. 160 (2013) 1577–1587.

[5] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace,* Houst. J. Math. 33 (3) (2007) 795–805.

[6] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products,* J. Math. Res. 4 (4) (2012) 1–9.

[7] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$,* Topol. Proc. 44 (2014) 75–95.

[8] D. Herrera Carrasco, A. de J. Libreros López, F. Macías Romero, *Continuos sin segundo y sin tercer producto simétrico rígido* (Capítulo 6) Matemáticas y sus aplicaciones 9, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 113-139. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-520-0.

[9] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique,* Glas. Mat. 37 (57) (2002) 347–363.

[10] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$,* Topol. Proc. 27 (2003) 179–188.

[11] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[12] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[13] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique n-fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 2019–233.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
mjlopez@fcfm.buap.mx
218570078@alumnos.fcfm.buap.mx

Capítulo 2

Generalizando el hiperespacio C(p,X)

Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, Gerardo Hernández Valdez
FCFM-BUAP

Dado un continuo X y $p \in X$, consideramos el hiperespacio $C(p, X)$ el cual contiene a todos los subcontinuos X que a su vez contienen a p. Dada una familia de continuos $\mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$ y $p \in X$, se dice que el par (X, p) posee hiperespacio único $C(p, X)$ si cada que $Y \in \mathcal{C}$, $q \in Y$ y $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$, existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(p) = q$. En este capítulo, se prueba que la clase de árboles posee hiperespacio único $C(p, X)$.

Un **continuo** es un espacio métrico conexo, compacto y no degenerado. Un hiperespacio de un continuo X es una colección de subconjuntos del continuo que cumplen ciertas características. Si $n \in \mathbb{N}$ y $p \in X$, consideremos los hiperespacios siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset, \quad A \text{ es cerrado en } X\}.$$
$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ posee a lo más } n \text{ componentes}\}.$$
$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ posee a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Estos hiperespacios son a su vez continuos, cada que X es un continuo, bajo la métrica de Hausdorff Nadler. En [2] se introdujo el hiperespacio $C(P, X)$ donde P es un subcontinuo del continuo X. Sin embargo, no fue hasta el 2003 cuando se tomó $P = \{p\}$ que se estudiaron propiedades generales de dicho hiperespacio [3]. Más aún, en el mismo artículo se construyeron modelos para este hiperespacio con continuos elementales.

Años después, en [4] y [5] se profundizó el estudio de este hiperespacio para continuos atriódicos, es decir, continuos que no contienen triodos simples, se presentaron modelos de estos y sus propiedades topológicas.

De manera más reciente, en [1] comenzó el estudio de la unicidad del hiperespacio $C(p, X)$ para ciertas familias de continuos. En contraste con la definción de unicidad Illanes utilizada para los hiperespacios $C_n(X)$ o $F_n(X)$, utilizaremos la siguiente: dada una familia de continuos $\mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$ y $p \in X$, se dice que el par (X, p) posee hiperespacio único $C(p, X)$ si cada que $Y \in \mathcal{C}$, $q \in Y$ y $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$, existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(p) = q$.

1 Preliminares

Algunas familias muy conocidas de continuos son las siguientes:

Una **gráfica finita** es un continuo que puede ser descrito como la unión finita de arcos tales que se intersectan en a lo más una cantidad finita de puntos.

Un **árbol** es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

En las gráficas finitas, destacan tres tipos distintos de puntos, los puntos extremos, los puntos ordinarios y los puntos de ramificación, los cuales denotaremos por $E(X), O(X)$ y $R(X)$, respectivamente.

$$E(X) = \{x \in X \colon \operatorname{ord}_X(x) = 1\}$$

$$O(X) = \{x \in X \colon \operatorname{ord}_X(x) = 2\}$$

$$R(X) = \{x \in X \colon \operatorname{ord}_X(x) \geq 3\}$$

Los árboles están compuestos sólo por arcos, los cuales llamaremos aristas y el conjunto de las aristas que componen un árbol X, estará denotado por $edge(X)$.

Un **subárbol** es un subcontinuo Y de un árbol X tal que si $e \in edge(Y)$, entonces $e \in edge(X)$.

Dado un entero positivo n, un $n-$**odo simple** es una gráfica finita la cual es la unión de n arcos, cuya intersección consta de un solo punto denotado por v y conocido como vértice. Denotaremos por T_n a los $n-$odos simples. Note que un n-odo es un subárbol sí mismo.

Un continuo X se dice que es **descomponible** si existen dos subcontinuos propios de X, A, B tales que $A \cup B = X$. Un continuo que no es descomponible, se conoce como **indescomponible**. Un continuo es **hereditariamente indescomponible**, si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Utilizaremos el concepto de dimensión como en Nadler2. Observe que en el caso de gráficas finitas (y por ende, de los árboles) la definición de dimensión se limitará a la cardinalidad de la frontera de una vecindad del punto en cuestión.

Ejemplo 1.1. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Veamos que si $p \in X$, $C(p, X)$ es un arco. Procederemos por contradicción, si existe un $p_0 \in X$ tal que $C(p_0, X)$ no es un arco, tomemos $\{p_0\} \in C(p_0, X)$, y así, existe un arco ordenado $\alpha_1 : [0, 1] \to C(p_0, X)$ tal que $\alpha_1(0) = \{p_0\}$ y $\alpha_1(1) = X$. Por otro lado, dado que $C(p_0, X)$ no es un arco, existe $K \in C(p_0, X) - \alpha_1([0, 1])$ y un arco ordenado $\alpha_2 : [0, 1] \to C(p_0, X)$ tal que $\alpha_2(0) = \{p_0\}$, $\alpha_2(1) = X$ y $\alpha_2(t) = K$, para algún $t \in [0, 1]$. De este modo, $\alpha_1([0, 1]) \neq \alpha_2([0, 1])$. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Tomemos $s \in [0, 1]$ tal que $\alpha_1(s) \notin \alpha_2([0, 1])$ y sea $r = \mu(\alpha_1(s))$. Considere también $t \in [0, 1]$ tal que $r = \mu(\alpha_2(t))$. Luego, de acuerdo a la definición de función de Whitney, $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(t)$ no son comparables. De esta manera, $\alpha_1(s) - \alpha_2(t) \neq \emptyset$ y $\alpha_2(t) - \alpha_1(s) \neq \emptyset$. Sin embargo, dado que $p_0 in \alpha_1([0, 1]) \cap \alpha_2([0, 1])$, tenemos que $\alpha_1([0, 1]) \cup \alpha_2([0, 1]) \in C(X)$ y así, es descomponible. Luego, X no es hereditariamente indescomponible, lo cual es una contradicción.

De esta manera, tenemos que si X es un continuo hereditariamente indescomponible, $C(p, X)$ es un arco para cada $p \in X$. Por [Teorema 3.17]Paty1, si Y es un arco con puntos extremos a y b, entonces $C(a, Y)$ y $C(b, Y)$ son arcos. Esto muestra que (X, p) no posee hiperespacio único $C(p, X)$ en la clase de los continuos.

Ejemplo 1.2. Sea Z el continuo de Knaster con dos puntos finales a, b [p. 205]Kuratowski. Entonces, $C(a, Z)$, $C(b, Z)$ son ambos arcos y $C(p, Z)$ es una 2-celda para cada $p \in Z - \{a, b\}$. Así, si X es un arco y $p \in X$, tenemos que (X, p) no posee hiperespacio único $C(p, X)$ en la clase de continuos.

Ejemplo 1.3. Sean X un arco con puntos extremos a, b y Y una curva cerrada simple. Entonces, $C(p, X)$ y $C(q, Y)$ son 2-celdas para cada $p \in X - \{a, b\}$ y $q \in Y$. Esto nos muestra que (X, p) no posee hiperespacio único en la clase de las gráficas finitas.

2 Unicidad del hiperespacio

En esta sección, denotaremos a la familia de árboles por τ. La estrategia a seguir en la demostración de la unicidad del hiperespacio $C(p,X)$ para elementos de la familia τ, será particionar dicha familia en las siguientes subfamilias: $\mathcal{I}$ denotará la subfamilia de los arcos en τ; por $\mathcal{N}$ se entenderá a los n-odos simples en τ. Finalmente, $\hat{\tau} = \tau - (\mathcal{I} \cup \mathcal{N})$. Con esta partición, se probará la unicidad del hiperespacio en cada una de ellas. Comenzamos con un resultado importante (véase [Teorema 3.3]Hugo:

Teorema 2.1. *Sea X una gráfica finita y $p \in X$. Entonces para cada $A \in C(p,X)$ y $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto $\mathcal{A} \subset C(p,X)$ tal que $\mathcal{A}$ contiene una $n-$celda, donde $n = \operatorname{ord}(p,X)$ y $\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \{A\})$.*

Este resultado es auxiliar para probar el siguiente:

Lema 2.2. *Sean $X, Y \in \tau$ y $p \in X, q \in Y$.Si $C(p,X)$ es homeomorfo a $C(q,Y)$, entonces $\operatorname{ord}(p,X) = \operatorname{ord}(q,Y)$.*

Demostración. Supongamos que $\operatorname{ord}(p,X) = n$, $\operatorname{ord}(q,Y) = m$ y $n < m$. Puesto que $C(p,X)$ es homeomorfo a $C(q,Y)$, existe un homeomorfismo $h : C(p,X) \to C(q,Y)$. Dado que $\operatorname{ord}(p,X) = n$, esto implica que $\{p\}$ tiene una base de vecindades que consiste de $n-$celdas en $C(p,X)$. Por el homeomorfismo, $h(\{q\})$ también tiene una base de vecindades consistente de $n-$celdas en $C(q,Y)$. Sin embargo, por Teorema 2.1 esto es imposible, pues tomando ε suficientemente pequeño, podemos encontrar un subconjunto $\mathcal{A}$ de $C(q,Y)$ que contiene una $m-$celda. Esto implicaría que $m \leq n$. De manera análoga, obtenemos $n \leq m$, y se sigue el resultado. $\square$

Podemos encontrar la prueba del siguiente teorema en [4, Teorema 3.15].

Teorema 2.3. *Sea X un continuo, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si p está en el corazón de un $n-$odo, entonces $C(p,X)$ contiene una $n-$celda.*

Haremos uso del Lema 2.2 y el Teorema 2.3 para probar la unicidad del hiperespacio $C(p,X)$ en la familia $\mathcal{I}$.

Teorema 2.4. *Si $X \in \mathcal{I}$ y $p \in X$, entonces (X,p) posee hiperespacio único en τ.*

Demostración. Si X es un arco con puntos finales a y b, y $p \in X$, tenemos que $C(p, X)$ es un arco si $p \in \{a, b\}$ y $C(p, X)$ es una 2-celda si $p \in X - \{a, b\}$. Si Y es un continuo y $q \in Y$ es tal que $C(q, Y)$ es un arco o una 2-celda, entonces q no puede estar en el corazón de un triodo en Y. De esta manera, puesto que $Y \in \tau$, tenemos que Y debe ser un arco. Por 2.2, $C(p, X)$ homeomorfo a $C(q, Y)$ implica que existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(p) = q$. □

Seguiremos la estrategia planteada al inicio de esta sección, probando la unicidad del hiperspacio sobre la familia $\mathcal{N}$, de los n-odos simples. Para ello, consideremos la siguiente definición.

Dado $x \in E(X)$, denotamos por $v(x)$ al único punto en $R(X)$ tal que la componente C de $X - \{v(x)\}$ que contiene a x satisface que $C \cup \{v(e_1)\}$ es un arco. A este único punto, se le conoce como *vecino* de x. El siguiente resultado involucra la definición anterior.

Teorema 2.5. *Sea X una gráfica finita que no es un arco. Si $e_1, e_2 \in E(X)$ y $C(e_1, X)$ es homeomorfo a $C(e_2, X)$, entonces* $\mathrm{ord}(v(e_1), X) = \mathrm{ord}(v(e_2), X)$.

Demostración. Sea $h : C(e_1, X) \to C(e_2, X)$ un homeomorfismo. Denotaremos por l_1 y l_2 las aristas de X, $e_1v(e_1)$ y $e_2v(e_2)$, respectivamente. Luego, si $A \in C(e_1, l_1) - \{l_1\}$, por Teorema 2.1, tenemos que $h(A) \in C(e_2, l_2)$. Por continuidad de h, en particular tenemos que $h(l_1) \in C(e_2, l_2)$. Una vez más, utilizando Teorema 2.1, tenemos que $h(l_1) = l_2$ y $\mathrm{ord}(v(e_1), X) = \mathrm{ord}(v(e_2), X)$. □

La subfamilia de los n-odos simples en τ posee hiperespacio único $C(p, X)$:

Teorema 2.6. *Si $X \in \mathcal{N}$ y $p \in X$, entonces (X, p) posee hiperespacio único en τ.*

Demostración. Sea $p \in X$ y supongamos que $Y \in \tau$ y $q \in Y$ son tales que $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$. Dividimos la demostración en dos casos:

Caso 1. Si $p \in R(X)$. Por 2.2, tenemos que $q \in R(Y)$ y $\mathrm{ord}(p, X) = \mathrm{ord}(q, Y)$. Si $n = \mathrm{ord}(p, X)$, entonces $C(p, X)$ y $C(q, Y)$ son $n-$celdas. De esta manera, Y es un $n-$odo simple con vértice q.

Caso 2. Si $p \in E(X) \cup O(X)$, por Teorema 2.2, tenemos que $q \in E(Y) \cup O(Y)$. Considere l_p y l_q aristas en X y Y que contienen a p y q, respectivamente. Sean $x \in (V(X) - \{p\}) \cap l_p$ y $y \in (V(Y) - \{q\}) \cap l_q$. Por Teorema 2.5, tenemos que $\mathrm{ord}(x, X) = \mathrm{ord}(y, Y)$. Si Y contiene un $r \in R(Y) - \{y\}$, entonces $C(q, Y)$ contiene una $[\mathrm{ord}(r, Y) + \mathrm{ord}(y, Y)]-$celda, lo cual es una contradicción, pues $\dim(C(q, Y)) = \dim(C(p, X)) = \mathrm{ord}(x, X) = \mathrm{ord}(y, Y)$. Entonces, tal $r \in R(X)$ no existe, por lo que Y es un $\mathrm{ord}(x, X)-$odo simple.

□

Nuestra atención pasará a los árboles que no son ni arcos ni n-odos simples. Se probarán resultados que serán antecedentes al teorema principal del capítulo.

Sea X un árbol, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos el siguiente conjunto:

$U_n(X) = \{A \in C(p, X) \colon A$ *tiene una vecindad en C(p,X) homeomorfa a* $I^n\}$,

denotamos $\mathcal{U}(X) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n(X)$, $\pi_0(\mathcal{U}(X))$ denota el conjunto de las componentes conexas de $\mathcal{U}(X)$.

Dado un árbol que no es un arco ni un $n-$odo simple, consideramos el subcontinuo (que también es un subárbol):

$$T(X) = \bigcup \{e \in edge(X) \colon e \cap E(X) = \emptyset\}.$$

Para cada $x \in E(X)$ existe exactamento un punto $r_x \in R(X)$ tal que el arco que une x con r_x, $\overline{r_x x}$ es un arista de X. Considerando esta notación, el continuo $T(X)$ se puede ver como sigue:

$$T(X) = X - \bigcup_{x \in E(X)} \overline{r_x x}.$$

Observemos que $T(X)$ es un subárbol de X y $R(T(X)) \subset R(X) \subset T(X)$.

Sea $Sub_p(T(X))$ la colección de todos los árboles de $T(X)$ que contienen a p. Buscamos establecer una correspondencia inyectiva entre $Sub_p(T(X))$ y las componentes de $\mathcal{U}(X)$. Para esto, sea $Y \in Sub_p(T(X))$ y supongamos que

$$\{e \in edge(X) - edge(Y) \colon e \cap Y \neq \emptyset\} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

Para cada $1 \leq j \leq n$ y dado que la intersección $e_j \cap Y$ consiste exactamente de un sólo punto (de ramificación de X) como se muestra en la Figura, podemos tomar un homeomorfismo $h_j : [0,1] \to e_j$ tal que $h_j(0) \in Y$.

Definimos U_y de la siguiente manera:

$$U_Y = \{Y \cup \bigcup_{j=1}^{n} h_j([0,t_j]) \colon (t_1, t_2, ..., t_n) \in (0,1)^n\}.$$

Por construcción, $U_Y \subset C(Y, X)$ y es homeomorfo a $(0,1)^n$. En términos de la topología de Vietoris, tenemos que $U_Y = \{Y \cup A \in C(X) \colon A \in \langle \text{int}(e_1), ..., \text{int}(e_n) \rangle \}$.

De esta manera, U_Y es abierto y conexo en $\mathcal{U}(X)$ (por el homeomorfismo).

Definamos $\phi_X : Sub_p(T(X)) \to \mathcal{U}(X)$, dada por $\phi_X(Y) = U_Y$. Sean $Y, Y' \in Sub_p(T(X))$ es tal que $U_Y \cap U_{Y'} \neq \emptyset$. Entonces existe $B \in U_Y \cap U_{Y'}$ tal que $B = Y \cup A = Y' \cup A'$. Notemos que si existe $e \in B$ tal que $e \in edge(Y) - edge(Y')$, entonces $e \subset A - A'$, lo cual es una contradicción, pues así, $B \notin U_{Y'}$. De esta manera, $Y = Y'$; así, tenemos que ϕ_X es una función inyectiva. Veamos que es suprayectiva. Para ello, sea $B \in \mathcal{U}(X)$ y consideremos $Y = \bigcup \{A \in Sub_p(T(X)) \colon A \subset B\}$. De este modo, tenemos que $Y \in C(p, X) \cap Sub_p(T(X))$ y $B \in U_Y$.

Lema 2.7. *Sea $X \in \hat{\tau}$. Sea $G = e_1 \cup e_2 \cup ... \cup e_k \subset T(X)$ y $f_1, ..., f_m$ aristas de $X - G$ incidentes en G. Entonces, $m \geq 2$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre k. Para $k = 1$, tenemos que $G = e_1 = \overline{p_1 p_2}$. Entonces, $\text{ord}(p_2, X) \geq 3$, pues todos los vértices de $T(X)$ son puntos de ramificación de X. Así, hay al menos dos aristas incidentes en G. Supongamos ahora que la proposición es válida para $k = n$ y sea $G = e_1 \cup ... \cup e_{k+1}$. Dado que $T(X)$ es un árbol, asumimos que e_{k+1} intersecta a alguno de $e_1, ..., e_k$. Sean $f_1, ..., f_m$ aristas incidentes en $G' = e_1 \cup ... \cup e_{k+1}$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $m \geq 2$. Sea q un punto extremo de e_{k+1} que no está en G', y tenemos que $\text{ord}(q, X) \geq 3$. Así, los aristas incidentes en G son en total $m - 1 + \text{ord}(q, X) - 1 \geq m + 1 \geq 2$. □

Lema 2.8. *Sea $X \in \hat{\tau}$. Sean $G, G' \in Sup_p(T(X))$ y supongamos que existe un arista $e \in edge(G)$ tal que $e \cap G' = \emptyset$. Entonces, $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} = \emptyset$.*

Demostración. Sean $f_1, f_2, ..., f_m$ aristas de $X - G$ incidentes en G. De manera similar,$f'_1, ..., f'_{m'}$ aristas de $X - G'$ incidentes en G'. Notemos que un elemento

$K' \in \overline{U}_{G'}$ es de la forma $K' = G' \cup \bigcup_{j=1}^{m'} \{A_i \colon A_i \in C(f_j')\}$, mientras que un elemento $K \in \overline{U}_G$ es de la forma $K = G \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{A_i \colon A_i \in C(f_i)\}$. Así, K no puede estar en $\overline{U}_{G'}$. $\square$

Consideramos una manera más cómoda para escribir un subárbol $G \in Sub_p(T(X))$. Sean $e_1, e_2, ..., e_k$ las aristas de G y $f_1, f_2, ..., f_m$ las aristas de $X - G$ que inciden en G. Entonces, escribimos

$$G = [e_1, e_2, ..., e_k; f_1, f_2, ..., f_m].$$

Proposición 2.9. *Sea $X \in \hat{\tau}$. Considere $G, G' \in Sub_p(T(X))$ tales que $G' = G \cup e$ para algún $e \in edge(T(X))$. Entonces,*

(i) $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} \neq \emptyset$,

(ii) $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'}) = \dim(U_G) - 1$,

(iii) $\dim(U_{G'}) = \dim(U_G) + \operatorname{ord}(p', X) - 2$, *donde p' es el vértice de e que no está en G.*

Viceversa, si $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} \neq \emptyset$ y $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} = \dim(U_G) - 1$, entonces existe un único $E \in edge(T(X))$ tal que $G' = G \cup e$.

Demostración. Consideremos $G = [e_1, ..., e_k; d_1, ..., d_n, e]$ y $G' = [e_1, ..., e_k, e; d_1, ..., d_n, f_1, ..., f_m]$, donde $e, f_1, ..., f_m$ son incidentes en p'. De este modo, observamos que

$$\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} = \{G' \cup A \in C(X) \colon A \in \langle \operatorname{int}(d_1), ..., \operatorname{int}(d_n) \rangle.$$

De esta manera, se tiene la condición (i). La condición (ii) se sigue de las libertades que tiene A, en este caso, hay n libertades (tantas como aristas incidentes en G, véase Figura. Así, $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'}) = n$. Más aún, por las libertades para G y G', se tiene que $\dim(U_G) = n + 1$ y $\dim(U_{G'}) = n + m = \dim(U_G) - 1 + \operatorname{ord}(p', X) - 1$.

Por el contrario, observemos que $\overline{U}_G \cap \overline{U}'_G \neq \emptyset$, de donde por Lema 2.8, se tiene que todos los aristas de $G - G'$ inciden en G' y todos los aristaas de $G' - G$ inciden en G. Además, se tiene $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}'_G) = n$. De esta manera, tenemos que $n = n + l + m - 1$, donde l es la cantidad de aristas en $G' - G$

que inciden en G y m son las aristas incidentes en G que no están en G', esto es, $k + m = 1$, de donde $(l, m) = (0, 1)$ o $(l, m) = (1, 0)$. Si $l = 1$ y $m = 0$, tenemos que esto es imposible por Lema 2.7, pues deben de incidir en G al menos 2 aristas. Así, el caso posible es cuando $l = 0$ y $m = 1$, esto es, $G' = G \cup e$. $\square$

Dado X árbol, $p \in X$, Y árbol y $q \in Q$ tal que $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$, construiremos un homeomorfismo entre X y Y, haciendo uso de los conjuntos $\overline{U}_G$ para $G \in Sub_p(T(X))$, reconstruyendo el continuo X en Y.

Definición 2.10. Sean $p, p' \in X$ vértices tales que $X \in \tau$. Denotamos por $\overline{pp'}$ al subárbol más pequeño que contenga a p, p'.

Proposición 2.11. *Sean $X, Y \in \tau$, $p \in X$, $q \in Y$. Si $h : C(p, X) \to C(q, Y)$ es un homeomorfismo, entonces para cada vértice $p' \in T(X)$ existe un único $q' \in T(Y)$ tal que $h(U_{\overline{pp'}}) = U_{\overline{qq'}}$. Más aún, si $\overline{pp'}$ consiste de aristas $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$ con $i = 1, ..., n$ con $p = p_0$ y $\overline{qq'}$ consiste de las aristas $f_i = \overline{q_{i-1}q_i}$, con $i = 1, ..., m$ y $q = q_0$, entonces $m = n$ y $h(U_{\overline{pp_i}})$ para i.*

Demostración. Considere un arista $e = \overline{pp'} \subset T(X)$ y sean $G = \{p\}$ y $G' = G \cup e$. Por Proposición 2.10, tenemos que $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} \neq \emptyset$ y $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'}) = \dim(U_G) - 1$. Estas condiciones se preservan bajo homeomorfismos, por lo que $h(\overline{U}_G) \cap h(\overline{U}_{G'}) \neq \emptyset$, $\dim(h(\overline{U}_G) \cap h(\overline{U}_{G'})) = \dim(h(U_G)) - 1$ y sabemos que $h(U_G) = U_{\{q\}}$. Dado que ϕ_Y es una biyección, existe $F' \in Sub_p(T(Y))$ tal que $\phi_Y(F') = U_{F'} = h(U_{G'})$. Por la segunda parte de la proposición 2.9, aplicado a $U_{\{q\}}$ y $U_{F'}$, existe un arista $f' \in edge(T(Y))$ tal que $F' = \{q\} \cup f'$. En otras palabras, existe un vértice único $q' \in T(X)$ y un arista $f' = \overline{qq'} \subset T(Y)$ tal que $h(U_{\overline{pp'}}) = U_{\overline{qq'}}$.

Supongamos ahora que la proposición es válida para n y considere el subárbol $\overline{pp'}$ con aristas $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$, $i = 1, ..., n+1$. Sea $G = e_1 \cup ... \cup e_n$, $G' = G \cup e_{n+1}$. Entonces, $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} \neq \emptyset$ y $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'}) = \dim(U_G) - 1$. Una vez más, estas condiciones se preservan bajo homeomorfismos, por lo que $h(\overline{U}_G) \cap h(\overline{U}_{G'}) \neq \emptyset$, $\dim(h(\overline{U}_G) \cap h(\overline{U}_{G'})) = \dim(h(U_G)) - 1$, y por hipótesis de inducción, tenemos que $h(U_{\overline{pp_i}}) = U_{\overline{qq_i}}$ para cada $i = 1, ..., n$; en particular, se tiene que $h(U_G) = U_{\overline{qq_n}}$. Sea $F' \in Sub_p(T(Y))$ tal que $U_{F'} = h(U'_G)$, y por la proposición 2.9, existe $f' \in edge(T(Y))$ tal que $F' = \overline{qq_n} \cup f'$. En otras palabras, existe un único $q' = q_{n+1} \in T(X)$ y un arista $f' = \overline{q_j q_{n+1}} \subset T(Y)$ tal que $h(U_{\overline{pp'}}) = U_{\overline{qq'}}$. Veamos que $j = n$.

Sea $G_i = \{p_0\} \cup e_1 \cup ... \cup e_i$ y $G' = \{p_0\} \cup e_1 \cup ... \cup e_{n+1}$. Notemos que e_{n+1} no es incidente en G_i, por lo que $\overline{U}_{G_i} \cap \overline{U}_{G'} = \emptyset$, de donde se sigue que $\overline{U}_{\overline{qq_i}} \cap h(\overline{U}_{G'}) = h(\overline{U}_{G_i}) \cap h(\overline{U}_{G'}) = \emptyset$, así, el arista $f' = \overline{q_j q_{n+1}}$ no es incidente en ningún $q_0, ..., q_{n-1}$, por lo que es incidente en q_n. $\square$

Dado $p \in R(X)$, podemos extender la función de la Proposición 2.11 a todo X, y así conseguir el homeomorfismo entre X y Y, cumpliéndose así la unicidad del hiperespacio para este caso.

Teorema 2.12. *Sean $X, Y \in \tau$, $p \in R(X)$ y $q \in Y$. Si $h : C(p, X) \to C(q, Y)$ es un homeomorfismo, entonces existe un homeomorfismo $\hat{h} : X \to Y$ con $\hat{h}(p) = q$.*

Demostración. Por la Proposición 2.11, existe una función $\langle : V(T(X)) \to V(T(Y))$ dada por $\overline{h}(p') = q'$ si $h(U_{\overline{pp'}}) = U_{\overline{qq'}}$. Por la proposició anterior, esta función es biyectiva. Veamos que esta función preserva aristas. Sea un arista $e = \overline{p'p''} \subset T(X)$ y supongamos que $\overline{pp''}$ es un subárbol que consiste de los aristas $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$ con $i = 1, ..., n$ con $p = p_0$, $p' = p_{n-1}$ y $p'' = p_n$. Por la proposición anterior, tenemos que $\overline{qq''}$ consiste de las aristas $f_i = \overline{q_{i-1}q_i}$ con $i = 1, ..., n$, con $q_i = \overline{h}(p_i)$, $q = q_0$, $q_{n-1} = q'$ y $q'' = q_n$. De este modo, existe un arista entre $q' = \overline{h}(p')$ y $q'' = \overline{h}(p'')$.

Veamos ahora que esta función se puede extender a $V(X)$. Sea $p' \in E(X)$; entonces existe un elemento $p_n \in T(X)$ tal que $e = \overline{p_n p'}$ es un arista. Sea $l(p_n) = |\{p' \in E(X) \colon \text{ existe un arista } e = \overline{p_n p'} \subset X\}|$. Veamos que $l(p_n) = l(\overline{h}(p_n))$. Considere $\overline{pp_n}$ que consiste de las aristas $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$, $i = 1, ..., n$ con $p = p_0$. Podemos contar $l(p_n)$ de la siguiente manera:

$$l(p_n) = \operatorname{ord}(p_n, X) - \operatorname{ord}(p_n, T(X))$$

$$= \dim(U_{G'}) - \dim(U_G) + 2 - \operatorname{ord}(p_n, T(X))$$

$$= \dim(h(U_G)) - \dim(h(U_{G'})) + 2 - \operatorname{ord}(q_n, T(Y))$$

$$= \dim(U_{\overline{qq_{n+1}}}) - \dim(U_{\overline{qq_n}}) + 2 - \operatorname{ord}(q_n, T(Y))$$

$$= \operatorname{ord}(q_n, Y) - \operatorname{ord}(q_n, T(Y)).$$

De esta manera, tenemos una biyección entre los conjuntos $\{p' \in E(X)\colon$ existe un arista $e = \overline{p_n p'} \subset X\}$ y $\{q' \in E(Y)\colon$ existe un arista $e = \overline{q_n q'} \subset X\}$. $\square$

Analizaremos el caso cuando $p \in E(X) \cup O(X)$ como uno solo. Para ello, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 2.13. *Sean $X, T \in \tau$, $p \in R(X)$ y $q \in R(Y)$. Si existen aristas l_p en X y l_q en Y, que contienen a p y q, respectivamente, tales que $l_q \cap E(X) \neq \emptyset$, $l_q \cap E(Y) \neq \emptyset$ y $C(p, (X - l_q) \cup \{p\})$ es homeomorfo a $C(q, (Y - l_q) \cup \{q\})$, entonces $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$.*

Demostración. Sea $h : C(p, (X - l_q) \cup \{p\}) \to C(q, (Y - l_q) \cup \{q\})$ homeomorfismo y sean $f : [0, 1] \to l_p$ y $g : [0, 1] \to l_q$ parametrizaciones de l_p y l_q, respectivamente, tales que $f(0) = p$ y $g(0) = q$. Considere la función

$$H(A) = h(A \cap ((X - l_p) \cup \{p\}) \cup h(f^{-1}(A \cap l_p))$$

para cada $A \in C(p, X)$. Esta función es el homeomorfismo deseado. $\square$

Teorema 2.14. *Sea $X \in \tau$ y $p \in O(X) \cup E(X)$. Entonces, (X, p) posee hiperespacio único $C(p, X)$ en τ.*

Demostración. Sea $p \in O(X)$ y supongamos que $Y \in \tau$ y $q \in Y$ es tal que $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$. Entonces, $\mathrm{ord}(q, X) = \mathrm{ord}(q, Y)$. Dado que X se puede encajar en el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$, supongamos que X es subespacio de $\mathbb{R}^4$ tal que $X \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ y $p = (0, 0, 0, 0)$. De manera análoga para Y. Considere $X' = X \cup ((0, 0, 0) \times [0, 1])$ y $Y' = Y \cup ((0, 0, 0) \times [0, 1])$. Por Lema anterior, $C(p, X')$ es homeomorfo a $C(q, Y')$, por lo que existe un homeomorfismo entre X' y Y', por ende, entre X y Y. $\square$

Con este resultado, aunado al Teorema 2.12, obtenemos el teorema principal:

Teorema 2.15. *Sea $X \in \tau$ y $p \in X$, entonces, (X, p) posee hiperespcio único $C(p, X)$ en τ.*

3 Generalizando el hiperespacio

Sea X un continuo y $p, q \in X$ tales que $p \neq q$. Consideramos el espacio $C_2(\{p,q\},X)$, el cual consiste de elementos en $C_2(X)$ que contengan al subconjunto $\{p,q\}$.

Teorema 3.1. *Si X es un continuo y $p, q \in X$ tales que $p \neq q$, entonces $C_2(\{p,q\},X)$ es un continuo.*

Demostración. Observe que $C_2(\{p,q\},X) \subset C_2(X)$. Sea $A \in \mathrm{cl}(C_2(\{p,q\},X)$ y consideremos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_2(\{p,q\},X)$ convergente a A. Es claro que $A \in C_2(X)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $q \notin A$. Esto implica que $\varepsilon = d(q,A) > 0$. De esta manera, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A,A_n) < \varepsilon/2$. Por definción de métrica de Hausdorff, $A_n \subset N_d(\varepsilon/2, A)$, lo cual es una contradicción, pues $q \in A_n$. Concluimos que $\{p,q\} \subset A$ y así, $C_2(\{p,q\},X)$ es un conjunto cerrado en el compacto $C_2(X)$, lo que a su vez conlleva a que este conjunto sea compacto.

Para demostrar conexidad, tomemos $A, B \in C_2(\{p,q\},X)$. Existen arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to [0,1]$ tales que $\alpha_1(0) = \{p,q\}$, $\alpha_1(1) = A$ y $\alpha_2(0) = \{p,q\}$, $\alpha_2(1) = B$. De esta manera, $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$ es un arco que conecta A con B. Por consiguiente, $C_2(\{p,q\},X)$ es arco conexo, lo que implica a su vez la conexidad de este espacio. □

Ejemplo 3.2. Sea $X = [0,1]$. Analizaremos los modelos de $C_2(\{p,q\},X)$.

Caso 1. Sean $p = 0$ y $q = 1$. Esto implica que

$$C_2(\{p,q\},X) = \{[0,s] \cup [t,1] \colon s \leq t\}$$

Observemos que si $s = t$, obtenemos el espacio completo X. Construyamos la función $\gamma : [0,1]^2 \to C_2(\{p,q\},X)$ definida por $\gamma((s,t)) = [0,s] \cup [1-t,1]$ donde $s \leq 1-t$. Esta función define un homeomorfismo entre $[0,1]^2$ y $C_2(\{p,q\},X)$, por lo que el hiperespacio es una $2-$celda.

Caso 2. Sean $p = 0$ y $q \in \mathrm{int}(X)$. Los elementos del hiperespacio $C_2(\{p,q\},X)$ son de la forma $[0,x_1] \cup [x_2,x_3]$, donde $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq q \leq x_3 \leq 1$. Es así que $C_2(\{p,q\},X)$ es homeomorfo a una $3-$celda.

Caso 3. Finalmente, consideremos $p, q \in \text{int}(X)$. Entonces, $C_2(\{p, q\}, X) = \{[x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \colon 0 < x_1 \leq p \leq x_2 \leq x_3 \leq q \leq x_4 < 1\} \cup \{X\}$.

Así, $C_2(\{p, q\}, X)$ será homeomorfo a una $4-$celda, siguiendo la misma lógica que en los casos anteriores.

Ejemplo 3.3. Sea $X = \mathcal{S}^1$, y sean $p, q \in X$. Observemos que $C_2(\{p, q\}, X)$ está compuesto por elementos de la forma $l_p \cup l_q$ donde l_p, l_q son subarcos de $\mathcal{S}^1$ que contienen a p y q, respectivamente. Para la construcción del modelo de este hiperespacio, supondremos que $l_p \cap l_q = \emptyset$. De esta manera, tenemos que

$$C_2(\{p, q\}, X) = \{l_p \cup l_q \colon p \in l_p, \quad q \in l_q\} \cup \{X\}$$

Tomando la notación del Caso 3 en el Ejemplo 3.2, tenemos que l_p es homeomorfo a $[x_1, x_2]$, mientras que l_q es homeomorfo a $[x_3, x_4]$, por lo que $C_2(\{p, q\}, X)$ será una $4-$celda.

Con este ejemplo, es claro que si X es una gráfica finita y $p, q \in X$, entonces $(X, \{p, q\})$ no posee hiperespacio único $C_2(\{p, q\}, X)$ en la clase de continuos. Con estos ejemplos surge la pregunta:

Pregunta 1. *¿$(X, \{p, q\})$ posee hiperespacio único $C_2(\{p, q\}, X)$ para la clase de los continuos?*

Bibliografía

[1] Charles O. Christenson, William L. Voxman, *Aspects of Topology*, n, Pure and Applied Mathematics, Vol. 39, Marcel Dekker, Inc., E.U. New York and Basel, 1977.

[2] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products,* Topol. Appl. 160 (2013) 1577–1587.

[3] D. Herrera Carrasco, A. de J. Libreros López, F. Macías Romero, *Continuos sin segundo y sin tercer producto simétrico rígido* (Capítulo 6) Matemáticas y sus aplicaciones 9, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 113-139. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-520-0.

[4] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces C(p,X)*, Topology and its Applications, 27 (1) (2003) 259-285.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

2170734@alumnos.fcfm.buap.com
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 3

Continuidad de la función ω_f en el intervalo $[0, 1]$

Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, Felipe de Jesús Aguilar Romero
FCFM-BUAP

En el presente trabajo se revisan algunas propiedades de los sitemas dinámicos. Damos una breve introducción a la dinámica de funciones de X en X, así como funciones del hiperespacio 2^X en 2^X. Se define el conjunto omega límite y se enuncian algunas de sus propiedades. Finalmente se presenta la función ω_f, que depende de una función f y se caracteriza al tipo de funciones f que hacen cotinuas a la función ω_f, cuando X es el intervalo $[0, 1]$.

1 Preliminares

La acción de iterar ha estado presente en matemáticas desde hace tiempo, esta acción es lo que da vida a los sistemas dinámicos. Dado $n \in \mathbb{N}$, f^n denota la composición de f consigo misma n veces y f^0 es la función identidad.

Definición 1.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua, para cada $x \in X$ el conjunto

$$\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\},$$

es la **órbita de x bajo** f.

Podemos interpretar $f^n(x)$ como el n-ésimo momento de x, así la órbita de x da el desplazamiento de x sobre el espacio. A su vez la órbita de un punto se puede interpretar como una sucesión, por tanto sería interesante saber si converge o no converge. Con base a esto la pareja (X, f) brinda un modelo matemático del movimiento, esto es lo que entenderemos como *sistema dinámico*.

La siguiente definición proporciona una noción de estabilidad entre órbitas y es fundamental para este trabajo.

Definición 1.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es **equicontinua** en un punto x si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B(x, \delta)$, entonces $f^n(y) \in B(f^n(x), \varepsilon)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

A la colección de los puntos fijos de una función f lo denotaremos por

$$\mathcal{F}(f) = \{x \in X : f(x) = x\}.$$

Si x_0 es un punto fijo bajo f, se tiene que $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0\}$. A pesar de que la órbita de un punto fijo es muy simple, los puntos fijos juegan un papel importante en la dinámica inducida por f.

2 Dinámica de f

En esta sección enunciamos algunas propiedades dinámicas, para funciones que van de un espacio métrico sobre sí mismo.

Teorema 2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $f : X \to X$ una función continua, entonces $\mathcal{F}(f)$ es un conjunto cerrado en X.*

Demostración. Si $cl(\mathcal{F}(f)) = \emptyset$ se tiene lo deseado. Supongamos que $cl(\mathcal{F}(f))$ $\neq \emptyset$. Sea $x \in \mathrm{cl}(\mathcal{F}(f))$, podemos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $\mathcal{F}(f)$ que converge a x. Como f es continua, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, dado que $x_n \in \mathcal{F}(f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(x_n) = x_n$. Se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, y por unicidad del límite en espacios métricos, concluimos que $f(x) = x$ y así, $x \in \mathcal{F}(f)$, por lo tanto $\mathcal{F}(f) = cl(\mathcal{F}(f))$, es decir, $\mathcal{F}(f)$ es cerrado en X. $\square$

Teorema 2.2. *Sean J un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : J \to J$ una función continua. Sea $[a, b] \subset J$.*

(i) Si $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

(ii) Si $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Demostración. (i) Como $f([a,b]) \subset [a,b]$, entonces

$$a \leq f(a) \text{ y } f(b) \leq b.$$

Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$. La función h es continua en el intervalo $[a,b]$ y además,

$$h(b) \leq 0 \leq h(a).$$

Por el Teorema del valor intermedio existe $c \in [a,b]$, tal que $h(c) = 0$. Así, $f(c) = c$.

(ii) Como $[a,b] \subset f([a,b])$, entonces existen α y β en $[a,b]$, tales que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$, luego

$$f(\alpha) \leq \alpha \text{ y } f(\beta) \geq \beta.$$

Supongamos sin perder generalidad que $\alpha \leq \beta$, definiendo la función $h : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, con $h(x) = f(x) - x$, tenemos que

$$h(\alpha) \leq 0 \leq h(\beta).$$

Nuevamente, por el Teorema del valor intermedio existe $c \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tal que $h(c) = 0$. Por lo tanto $f(c) = c$. □

Los siguientes resultados, además de ser interesantes, son de gran utilidad para este trabajo. Por comodidad se han enunciado para el intervalo $[0,1]$, pero se cumplen para cualquier intervalo cerrado.

Teorema 2.3. *Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua. Si $\mathcal{F}(f)$ es disconexo, entonces $\mathcal{F}(f^2)$ es disconexo.*

Demostración. Notar que $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ ya que el conjunto vacío es conexo. Además $\mathcal{F}(f)$ no puede constar de un único elemento, por lo que podemos tomar $a, b' \in \mathcal{F}(f)$ tal que $a < b'$. Sea $b = \inf\{x \in \mathcal{F}(f) : a < x\}$. De la definición de b, se tiene que $f(x) \neq x$ para cada $x \in (a,b)$. Como $\mathcal{F}(f)$ es cerrado, podemos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}(f)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. De la continuidad de f se tiene:

$$f(b) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

Por lo que $b \in \mathcal{F}(f)$. Por el Teorema del valor intermedio podemos asegurar que, para toda $x \in (a,b)$, $f(x) < x$ o bien para toda $x \in (a,b)$, $f(x) > x$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(x) < x$ para cada $x \in (a,b)$.

Es claro que $a, b \in f([a,b])$, como f es continua y $[a,b]$ es conexo tenemos que $f([a,b])$ es conexo, así $[a,b] \subset f([a,b])$. Dado $x \in (a,b)$, existe $y_0 \in (a,b)$ tal que $x = f(y_0)$, de esto $f(x) = f^2(y_0) < f(y_0) < y_0$, es decir, $f^2(y_0) < y_0$. De esto existe $y_0 \in (a,b)$ tal que $y_0 \notin \mathcal{F}(f^2)$. Por ende $\mathcal{F}(f^2)$ no puede ser conexo, en caso contrario, como $a, b \in \mathcal{F}(f^2)$ se tendría que $y_0 \in [a,b] \subset \mathcal{F}(f^2)$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $F(f^2)$ es disconexo. $\square$

Teorema 2.4. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y suprayectiva. Si $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, entonces $f^2 = Id$.*

Demostración. Del Teorema 2.2 se tiene que $\mathcal{F}(f^2) \neq \emptyset$. Sean $a = \min \mathcal{F}(f^2)$ y $b = \max \mathcal{F}(f^2)$. Como $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, se tiene que $F(f^2) = [a,b]$. Supongamos que $f^2 \neq Id$. Luego, tenemos alguno de los siguientes dos casos:

Caso 1 $a > 0$.

Note que $f^2(0) > 0$. Si existe $t_0 \in (0,a)$ tal que $f^2(t_0) < t_0$, entonces por el Teorema del valor intermedio, existe c en $(0,t_0)$ tal que $f^2(c) = c$. Esto último contradice que $\mathcal{F}(f^2) = [a,b]$. De este modo, cada $t \in [0,a)$ satisface que $f^2(t) > t$. Por tanto, $0 \notin f^2([0,a))$ y, claramente, $0 \notin f^2([a,b]) = [a,b]$; es decir, $0 \notin f^2([0,b])$. Como f^2 es suprayectiva (ya que f lo es), $f^2([0,1]) = [0,1]$, si $b = 1$, tendríamos que $0 \notin f^2([0,1])$, lo cual es una contradicción, así $b < 1$.

Caso 2 $b < 1$.

Note que $f^2(1) < 1$. Se puede probar de manera análoga al caso 1 que $f^2(t) < t$ para toda $t \in (b,1]$. Por lo tanto $1 \notin f^2((b,1])$ y también $1 \notin f^2([a,b]) = [a,b]$; es decir, $1 \notin f^2([a,1])$ luego por argumentos similares al caso 1 tenemos que $a > 0$.

Tenemos lo siguiente, $0 < a \leq b < 1$, $0 \notin f^2([0,b])$ y $1 \notin f^2([a,1])$.

Observe que, dado cualquier $x \in [a,b]$, $f^2(f(x)) = f(f^2(x)) = f(x)$ y por ende $f(x) \in \mathcal{F}(f^2) = [a,b]$. De este modo, $f([a,b]) \subset [a,b]$. Como $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}(f^2)$, tenemos que $0, 1 \notin \mathcal{F}(f)$ así, $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Veamos que para cada $t \in [0,a)$, $f(t) > t$. Si existe $t_0 \in (0,a)$ tal que $f(t_0) < t_0$, entonces existe $c \in (0,t_0)$ tal que $f(c) = c$, por ende $c \in \mathcal{F}(f^2) = [a,b]$, esta es una contradicción . De esto que $f(t) > t$ para cada $t \in [0,a)$. De forma similar, $f(t) < t$ para cada $t \in (b,1]$. De lo anterior tenemos que $0 \notin f([0,a))$ y $1 \notin f((b,1])$.

Como $f([a,b]) \subset [a,b]$, tenemos que $0, 1 \notin f([a,b])$, por lo que $0 \notin f([0,b])$ y $1 \notin f([a,1])$. Como f es suprayectiva, existen $s_0 \in (b,1]$ y $s_1 \in [0,a)$ tales que $f(s_0) = 0$ y $f(s_1) = 1$.

Veamos que $[0,a] \subset f([b,1])$. Como $f(b) \in [a,b]$, es claro que $a \leq f(b)$, de esto $[0,a] \subset [f(s_0), f(b)]$. Además $f(s_0), f(b) \in f([b,s_0])$ y $f([b,s_0])$ es conexo, así se tienen las contenciones $[f(s_0), f(b)] \subset f([b,s_0]) \subset f([b,1])$. Por tanto, $[0,a] \subset f([b,1])$.

Probemos que $f([0,a)) \subset (b,1]$. Supongamos que existe $r \in [0,a)$ con $f(r) \leq b$. Consideremos $a' = \text{máx}\{r, s_1\}$ y así, $[b,1] \subset [f(r), 1] = [f(r), f(s_1)]$ $\subset f([0,a'])$, de esto que $f([b,1]) \subset f^2([0,a'])$. Como $[0,a'] \subset [0,a] \subset f([b,1])$, se cumple que

$$[0,a'] \subset f([b,1]) \subset f^2([0,a']).$$

Por el Teorema 2.2 existe $p \in [0,a']$ tal que $f^2(p) = p$, esto es una contradicción ya que $p \notin [a,b] = \mathcal{F}(f^2)$. Por lo tanto $f([0,a)) \subset (b,1]$.

Similarmente se prueba que $f((b,1]) \subset [0,a)$. De esas dos contenciones obtenemos,

$$f^2([0,a)) \subset f((b,1]) \subset [0,a).$$

De lo anterior $1 \notin f^2([0,a))$, como $1 \notin f^2([a,1])$, tenemos que $1 \notin f^2([0,1])$, esto contradice el hecho de que f^2 es suprayectiva. Por ende $f^2 = Id$. $\square$

Definición 2.5. Sean (X,d) un espacio métrico, $f : X \to X$ una función continua y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un **punto periódico** de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, decimos que $\mathcal{O}(x,f)$ es una **órbita periódica**.

Dado $x_0 \in Per(f)$. Definimos el periodo de x_0 como,

$$p = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}.$$

En comparación con el conjunto $\mathcal{F}(f)$ podemos decir que $Per(f)$ no necesariamente es cerrado, la función que cumple esto es la famosa función tienda. La función tienda denotada por $T : [0,1] \to [0,1]$ se define como

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sus gráficas dan una idea de como se comporta la dinámica de T.

El siguiente teorema expone en (1) una propiedad importante de la función tienda y en (2) podemos ver que $Per(T)$ no es un conjunto cerrado ya que $\frac{1}{2} \notin Per(T)$.

Teorema 2.6. *[7, Proposición 7.3] Sea T la función tienda.*

1. *Si $(a,b) \subset [0,1]$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N((a,b)) = [0,1]$.*
2. *El conjunto $Per(T)$ es denso en $[0,1]$.*

Los conjuntos $\mathcal{F}(f)$ y $Per(f)$ pueden ser conjuntos vacíos, un ejemplo de esto se puede encontrar en [1, Ejemplo 2.18]. El siguiente teorema para funciones reales sobre un intervalo asegura la existencia de puntos de cualquier periodo siempre que exista al menos un punto de periodo 3.

Teorema 2.7. *(Li-Yorke)[7, Teorema 3.4] Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : A \to A$ una función continua. Si f tiene un punto de periodo 3, entonces f tiene un punto de periodo n.*

3 Dinámica colectiva

Sea X un espacio métrico compacto. Un hiperespacio de X es una familia de subconjuntos de X que cumplen una propiedad. El hiperespacio que será de nuestro interés es:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ } es \text{ } cerrado \text{ } y \text{ } A \neq \emptyset\}.$$

Este hiperespacio se *topologiza* con la llamada métrica de Hausdorff, para definirla damos el concepto de *nube*.

Definición 3.1. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Dados $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la **nube** de radio ε alrededor de A como,

$$N(A,\varepsilon) = \bigcup_{a\in A} B(a,\varepsilon) = \{x \in X : \text{existe } a \in A,\ d(x,a) < \varepsilon\}.$$

Sea $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ la función definida por,

$$H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B,\varepsilon) \text{ } y \text{ } B \subset N(A,\varepsilon)\}.$$

La función H es una métrica en 2^X, una prueba de ello se encuentra en [5, Proposición 2.1]. Como X es un espacio métrico compacto se prueba que 2^X también es compacto, la prueba de esto se puede encontrar en [12, Teorema 4.13], así solo resta dar una función continua de 2^X en 2^X para tener un sistema dinámico.

Una función continua $f : X \to X$ nos da de manera natural una función en el hiperespacio 2^X, a saber

$$2^f : 2^X \to 2^X.$$

Con regla de correspondencia,

$$2^f(A) = f(A).$$

Como f es continua, 2^f esta bien definida, es decir, $2^f(A) \in 2^X$. La función 2^f es conocida como la *función inducida* por f. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $A \in 2^X$ se tiene que

$$(2^f)^n(A) = f^n(A).$$

Teorema 3.2. *La función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$ es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua y X es un espacio métrico compacto, por el Teorema de Heine [6, Teorema 4, sección 6.6] , f es uniformemente continua en X. Luego existe $\delta^* > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in X$ cumplen que $d(x_1, x_2) < \delta^*$, entonces $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Sea $\delta = \delta^*$. Tomemos $A, B \in 2^X$ tales que:

$$H(A, B) < \delta.$$

Para cada $z \in f(A)$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = z$ y dado que $A \subset N(B, \delta)$ podemos tomar $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$, entonces $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$, así $f(a) \in N(f(B), \varepsilon)$ y por lo tanto,

$$f(A) \subset N(f(B), \varepsilon).$$

De manera análoga,

$$f(B) \subset N(f(A), \varepsilon).$$

Luego,

$$H(f(A), f(B)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto 2^f es continua. $\square$

Dada la relación estrecha que existe entre las reglas de correspondencia de f y 2^f, la pregunta que nos hacemos es ¿cuál es la relación entre las propiedades dinámicas de f y las propiedades dinámicas de 2^f? Esta pregunta es muy amplia, los siguientes teoremas muestran algo de esto.

Teorema 3.3. *[7, Proposición 18.12] Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si $Per(f)$ es un conjunto denso en X, entonces $Per(2^f)$ es un conjunto denso en 2^X.*

En términos generales, la densidad de $Per(2^f)$ en 2^X no implica la densidad de $Per(f)$ en X. Un ejemplo de ello se puede encontrar en [7, Sección 18.6].

Resulta que si el espacio donde estamos trabajando es el intervalo $[0, 1]$, entonces la densidad de puntos periódicos en el hiperespacio sí implica densidad de puntos periódicos en $[0, 1]$.

Teorema 3.4. *Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Si $Per(2^f)$ es denso en $2^{[0,1]}$, entonces $Per(f)$ es denso en $[0, 1]$.*

Demostración. Sean (a, b) un intervalo abierto contenido en $[0, 1]$. Tenemos que $(a, b) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, donde $x_0 = \frac{a+b}{2}$ y $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Como $2^f : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ tiene densidad de puntos periódicos en $2^{[0,1]}$, existen $A \in 2^{[0,1]}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$H(\{x_0\}, A) < \varepsilon \;\; y \;\; f^N(A) = A.$$

Luego, $A \subset (a, b)$. Sean $\alpha = \text{mín} A$ y $\beta = \text{máx} A$, tenemos que $a < \alpha \leq \beta < b$. Como $f^N(A) = A$, entonces

$$f^N(\alpha) \geq \alpha \;\; y \;\; f^N(\beta) \leq \beta.$$

Dado que f^N es una función continua en el intervalo $[0, 1]$, por el Teorema del valor intermedio, existe $c \in [\alpha, \beta]$ tal que $f^N(c) = c$. Por lo tanto $Per(f) \cap (a, b) \neq \emptyset$. $\square$

4 El conjunto omega límite

En esta sección X denota un espacio métrico. Dado un punto $x \in X$, estudiaremos la convergencia de la órbita $\mathcal{O}(x, f)$, el ente al que converge es el llamado conjunto omega límite de x.

Definición 4.1. Sea $x_0 \in X$. Decimos que $y \in X$ es un punto límite de la órbita $\mathcal{O}(x_0, f)$, si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales

$$\{n_i\}_{i=1}^{\infty},\ n_1 < n_2 < n_3...$$

tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y.$$

La colección de todos los puntos límites de $\mathcal{O}(x_0, f)$ se llama, **conjunto omega límite** de x_0 bajo f. Denotado por,

$$\omega(x_0, f) = \{y \in X : y \textit{ es un punto límite de } \mathcal{O}(x_0, f)\}.$$

En este sentido decimos que $\mathcal{O}(x_0, f)$ converge a $\omega(x_0, f)$, ya que con el tiempo los puntos de la órbita estan muy cercanos a los puntos del conjunto omega límite. Tenemos la siguiente proposición que es inmediata de la definición.

Teorema 4.2. *Sean $f : X \to X$ una función continua y $x \in X$. Se cumple lo siguiente.*

(*a*) *$\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado.*

(*b*) *Si X es compacto, entonces $\omega(x, f) \neq \emptyset$.*

Demostración. Para (a). Si $\omega(x, f) = \emptyset$, entonces es cerrado. Supongamos que $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Demostraremos que toda sucesión convergente en $\omega(x, f)$ converge a un punto de $\omega(x, f)$. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en $\omega(x, f)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Veamos que $y \in \omega(x, f)$.

Como la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_{n_1}, y) < \frac{1}{2}$. A su vez $y_{n_1} \in \omega(x, f)$, por lo que existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$f^{l_1}(x) \in B(y_{n_1}, \tfrac{1}{2}) \subset B(y, 1).$$

Análogamente, elegimos $n_2 > n_1$ tal que $d(y_{n_2}, y) < \frac{1}{2^2}$. Como $y_{n_2} \in \omega(x, f)$, entonces existe $l_2 > l_1$ tal que,

$$f^{l_2}(x) \in B(y_{n_2}, \tfrac{1}{2^2}) \subset B(y, \tfrac{1}{2}).$$

De manera recursiva encontramos una sucesión creciente de números naturales $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que para toda j,

$$f^{l_j}(x) \in B(y, \tfrac{1}{2^{j-1}}).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{i\to\infty} f^{l_i}(x) = y.$$

Así, y pertenece al conjunto $\omega(x, f)$.

Para (b). Sea $x \in X$, como X es un espacio métrico compacto, entonces es secuencialmente compacto, por ello la sucesión $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente y el punto al que converge pertenece a $\omega(x, f)$, por lo tanto $\omega(x, f) \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 4.3. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Para toda $x \in X$, se tiene que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Es decir, $\omega(x, f)$ es un conjunto estrictamente invariante bajo f.*

Demostración. Tomemos $x_0 \in X$. Veamos primero que $f(\omega(x_0, f)) \subset \omega(x_0, f)$. Sea $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. Entonces existe $z_0 \in \omega(x_0, f)$ tal que $f(z_0) = y_0$, y existe una sucesión $\{n_i\}_{1=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que,

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = z_0.$$

Por la continuidad de f,

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i+1}(x_0) = f(z_0) = y_0.$$

Así, y_0 está en $\omega(x_0, f)$. Por lo tanto, $f(\omega(x_0, f)) \subset \omega(x_0, f)$.

Veamos ahora que $\omega(x_0, f) \subset f(\omega(x_0, f))$. Sea $a_0 \in \omega(x_0, f)$, entonces existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = a_0.$$

Podemos suponer que cada n_i es mayor o igual a 2. Como X es compacto y la sucesión $\{f^{n_i-1}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ esta contenida en X, entonces existe una subsucesión $\{n_{i_j} - 1\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{n_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0) = b_0.$$

Así, $b_0 \in \omega(x_0, f)$ y además,

$$f(b_0) = f(\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0)) = \lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}}(x_0) = a_0.$$

Por lo tanto $a_0 \in f(\omega(x_0, f))$. □

Teorema 4.4. *Sea $f : X \to X$ una función continua. Si X es compacto, entonces 2^f tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Dado $x \in X$ por el Teorema 4.2 tenemos que $\omega(x, f)$ es no vacío y cerrado, así $\omega(x, f) \in 2^X$. Por el Teorema 4.3 $2^f(\omega(x, f)) = f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$, es decir, $\omega(x, f)$ es un punto fijo de 2^f. □

El siguiente teorema aclara la idea de cuando decimos que la órbita de x converge al cojunto omega límite.

Teorema 4.5. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua, $x_0 \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $\omega(x_0, f) \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $f^n(x_0) \in U$.*

Demostración. Dado que U es un conjunto abierto, $X - U$ es un conjunto cerrado y por ser X compacto, $X - U$ también es compacto. Consideremos el siguiente conjunto,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) \in X - U\}.$$

Supongamos que la cardinalidad de A es infinta, podemos tomar una sucesión estrictamente creciente $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $f^{n_i}(x_0) \in X - U$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como X es secuencialmente compacto podemos suponer sin perder generalidad que $\{f^{n_i}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a un punto $z \in X - U$, ya que $X - U$ es cerrado. Por otro lado $z \in \omega(x_0, f) \subset U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto A es finito y así, tomando $N = (\max A) + 1$, se tendrá que para toda $n \geq N$, $f^n(x_0) \in U$. □

Teorema 4.6. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua y $x \in X$. Si $\omega(x, f)$ es finito, entonces existe $y \in \omega(x, f)$ tal que,*

$$\omega(x, f) = \mathcal{O}(y, f).$$

Demostración. Supongamos que $\omega(x,f)$ tiene exactamente k elementos. Digamos

$$\omega(x,f) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}.$$

Tomemos a x_1, por el Teorema 4.3 se tiene que $\mathcal{O}(x_1,f) \subset \omega(x,f)$. Podemos suponer que

$$\mathcal{O}(x_1,f) = \{x_1, x_2, ..., x_m\},$$

donde $m \leq k$. Demostraremos que $\mathcal{O}(x_1,f) = \omega(x,f)$.

Si $m < k$. Es claro que $f(\mathcal{O}(x_1,f)) = \mathcal{O}(x_1,f)$ y por lo tanto el conjunto $\{x_{m+1}, x_{m+2}, .., x_k\}$ es invariante bajo f. Es posible tomar $\delta > 0$ de tal manera que $cl(B(x_1,\delta)), cl(B(x_2,\delta)), ..., cl(B(x_k,\delta))$ son ajenos dos a dos.

Sean

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\delta) \text{ y } W = \bigcup_{i=m+1}^{k} B(x_i,\delta).$$

Tenemos lo siguiente, $\mathcal{O}(x_1,f) \subset U$ y $U \cup W$ es un conjunto abierto que contiene a $\omega(x,f)$ y además $cl(U) \cap cl(W) = \emptyset$. Por el Teorema 4.5, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $f^n(x) \in U \cup W$.

Consideremos los conjuntos

$$E = \{n \geq N : f^n(x) \in U\} \; y \; F = \{n \geq N : f^n(x) \in W\}.$$

Podemos tomar una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ estrictamente creciente, de tal manera que

$$f^{n_i}(x) \in U \text{ y } f^{n_i+1}(x) \in W.$$

Dado que X es secuencialmente compacto, podemos suponer que $\{f^{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente a un punto z en $cl(U)$.

$$cl(U) \cap \omega(x,f) = \{x_1, x_2, ..., x_m\} = \mathcal{O}(x_1,f),$$

y $z \in \omega(x,f)$, entonces $z \in \mathcal{O}(x_1,f)$. Por ser f continua,

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i+1}(x) = f(z).$$

Como la sucesión $\{f^{n_i+1}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ esta contenida en W, entonces $f(z) \in cl(W)$. A su vez $f(z) \in \mathcal{O}(x_1,f) \subset U$, por lo que $cl(U) \cap cl(W) \neq \emptyset$. Esto es una contradicción. Por lo tanto $m = k$, es decir, $\mathcal{O}(x_1,f) = \omega(x,f)$. $\square$

Veamos un caso donde el conjunto omega límite es un conjunto infinito.

Teorema 4.7. *[7, Proposición 12.11] Sea $T:[0,1]\to[0,1]$ la función tienda. Existe $x_0\in[0,1]$ tal que $\omega(x_0,T)=[0,1]$.*

5 La función ω_f

Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Hemos estudiado funciones continuas de X en X y de 2^X en 2^X. Dada una función $f:X\to X$ continua, sabemos que $\omega(x,f)$ es un conjunto cerrado, motivados por ello podemos definir la función $\omega_f : X\to 2^X$ con la siguiente regla de correspondencia,

$$\omega_f(x)=\omega(x,f).$$

Es de interés saber si w_f es continua, esta sección la dedicamos a determinar las condiciones bajo las cuales w_f es continua, en particular cuando $X=[0,1]$.

Teorema 5.1. *Sea X un espacio métrico compacto. Si $f:X\longrightarrow X$ es equicontinua, entonces $\omega_f : X\longrightarrow 2^X$ es continua.*

Demostración. Sea $x\in X$ y $\varepsilon>0$. Como f es equicontinua en x, existe $\delta>0$ tal que si $d(x,y)<\delta$, entonces $d(f^n(x),f^n(y))<\frac{\varepsilon}{3}$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Sea $y\in X$ tal que $d(x,y)<\delta$, veamos que $H(w_f(x),w_f(y))<\varepsilon$. Dado $y_0\in\omega_f(y)$, existe una sucesión de naturales $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ estrictamente creciente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f^{k_n}(y)=y_0$. Como $\{f^{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en el compacto X, existe $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f^{l_n}(x)=x_0$, para algún $x_0\in\omega_f(x)$. Luego, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $d(f^{l_N}(x),x_0)<\frac{\varepsilon}{3}$ y $d(f^{l_N}(y),y_0)<\frac{\varepsilon}{3}$. Así,

$$d(x_0,y_0)\le d(x_0,f^{l_N}(x))+d(f^{l_N}(x),f^{l_N}(y))+d(f^{l_N}(y),y_0)<\varepsilon.$$

En consecuencia, $y_0\in N(\omega_f(x),\varepsilon)$. Por tanto, $\omega_f(y)\subset N(\omega_f(x),\varepsilon)$. Similarmente, se tiene que $\omega_f(x)\subset N(\omega_f(y),\varepsilon)$. Entonces $H(\omega_f(x),\omega_f(y))<\varepsilon$. Por ende, ω_f es continua. □

El siguiente teorema es fundamental para caracterizar a las funciones $f:[0,1]\to[0,1]$ tales que ω_f es continua.

Teorema 5.2. *Si* $f\colon [0,1]\to[0,1]$ *y* $\omega_f\colon [0,1]\to 2^{[0,1]}$ *son funciones continuas, entonces* $\mathcal{F}(f^2)$ *es conexo.*

Demostración. Si $\mathcal{F}(f^2)$ consta de un solo elemento el resultado se cumple. Supongamos que $\mathcal{F}(f^2)$ no es conexo.

Sean $a,b\in\mathcal{F}(f^2)$ tales que $x\notin\mathcal{F}(f^2)$ para todo $x\in(a,b)$, es decir, $f^2(x)\neq x$. Como f^2 es continua, entonces $f^2(x)<x$ para todo $x\in(a,b)$ ó $f^2(x)>x$, para todo $x\in(a,b)$. Sin perder generalidad, supongamos que $f^2(x)>x$ para cada $x\in(a,b)$. Tenemos tres casos.

Caso I. Para todo $x\in(a,b)$, $f^2(x)<b$.
Dado $x\in(a,b)$ tenemos que $a<x<f^2(x)<b$. Luego $f^4(x)=f^2(f^2(x))>f^2(x)$, de esta manera se observa que $\{f^{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es un a sucesión creciente y acotada por b, luego converge al $\sup\{f^{2n}(x)\colon n\in\mathbb{N}\}:=h$. Como b es cota superior, entonces $h\leq b$. Supongamos que $h<b$. Como $\{f^{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a h, entonces por el Teorema 2.2 h es un punto fijo de f^2 lo cual es una contradicción, por tanto $h=b$.
Por continuidad de f la sucesión $\{f^{2n+1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(b)$. Así, $\omega_f(x)=\{b,f(b)\}$. De esto tenemos que para cualquier sucesión en (a,b), convergente a a, se cumple que sus imágenes bajo ω_f convergen a $\omega_f(b)$, esto contradice la continuidad de ω_f.

Caso II. Existe $x_1\in(a,b)$ tal que $f^2(x_1)=b$.
Podemos tomar $x_2\in(a,x_1)$ tal que $f^2(x_2)=x_1$. Siguiendo esta idea podemos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a a tal que $f^2(x_{n+1})=x_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Note que $f^{2n}(x_n)=b$, pues $f^2(x_{n+1})=x_n$ y en particular $f^2(x_1)=b$. Luego, $f^{2n+1}(x_n)=f(b)$ ya que $f^{2n+1}(x_n)=f(f^{2n}(x_n))=f(b)$. Así, $\omega_f(x_n)=\{b,f(b)\}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Como $\omega_f(a)=\{a,f(a)\}$ nuevamente se contradice la continuidad de ω_f en a.

Caso III. Para todo $x\in(a,b)$, $f^2(x)>b$.
Podemos hallar una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en (a,b) que converga a a. Como f^2 es continua debería ocurrir que $\lim\limits_{n\to\infty} f^2(x_n)=f^2(a)=a$. Por la suposición $f^2(x_n)>b$ para toda $n\in\mathbb{N}$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} f^2(x_n)\geq b>a$, esto es una contradicción.

En cualquiera de los 3 casos llegamos a una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo. $\square$

Teorema 5.3. *Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ es una función continua y periódica (en el sentido $f^n = f$, para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$), entonces f es equicontinua.*

Demostración. Sea n el periodo de f. Luego, dado $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, existe $\delta_i > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta_i$, entonces $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, esto ya que cada f^i es continua en x. Tomemos $\delta = \text{mín}(\delta_i)$. Sea $k \in \mathbb{N}$, tenemos dos casos,

Caso I. $k \leq n$.
Si $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f^k(x), f^k(y)) < \varepsilon$. Esto por como se tomo δ.

Caso II. $k > n$.
Tenemos que $k - n > 0$, por el algoritmo de la división existen $m \in \mathbb{N}$, $j \in \{0, ..., n-2\}$ tal que $k-n = (n-1)m+j$, de aquí que $k = n+(n-1)m+j$. Veamos mediante inducción matemática sobre m que $f^{n+(n-1)m} = f$. Para $m = 1$, como $f^n = f$, entonces $f^{n+(n-1)1} = f^n \circ f^{n-1} = f \circ f^{n-1} = f^{1+n-1} = f^n = f$. Supongamos que se cumple para $m \in \mathbb{N}$ con $m > 1$. Así, $f^{n+(n-1)m} = f$, luego

$$\begin{aligned} f^{n+(n-1)(m+1)} &= f^{n+(n-1)m+(n-1)} \\ &= f^{n+(n-1)m} \circ f^{(n-1)} \\ &= f \circ f^{n-1} = f^{1+n-1} = f^n = f. \end{aligned}$$

De esto se tiene que $f^k = f^{n+(n-1)m+j} = f^{n+(n-1)m} \circ f^j = f \circ f^j = f^{j+1}$. Es claro que $j+1 \in \{1, ..., n-1\}$, por ende $d(f^k(x), f^k(y)) = d(f^{j+1}(x), f^{j+1}(y)) < \varepsilon$ si $d(x,y) < \delta$.

Por lo tanto f es equicontinua. □

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes para que ω_f sea continua cuando $X = [0,1]$.

Teorema 5.4. *Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua y suprayectiva. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es equicontinua,*

2. *$\omega_f : [0,1] \longrightarrow 2^{[0,1]}$ es continua,*

3. *$\mathcal{F}(f^2)$ es conexo.*

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Esto se obtiene de forma directa del Teorema 5.1

($2 \Rightarrow 3$) Esta implicación se obtiene del Teorema 5.2.

($3 \Rightarrow 1$) Como $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, por el Teorema 2.4 $f^2 = Id$, de esto que $f^3 = f$, es decir, f es periódica. Luego por el Teorema 5.3 f es equicontinua. □

Ahora nos centráremos en dar una caracterización de las funciones $f : [0,1] \to [0,1]$ que hacen continua a ω_f. Si $f^2 = Id$, implica que f es inyectiva, ya que si $f(x) = f(y)$ se tiene que $f^2(x) = f(f(x)) = f(f(y)) = f^2(y)$, es decir, $x = y$. El siguiente teorema nos da un mejor panorama de como deben ser estas funciones.

Teorema 5.5. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es biyectiva si y solo si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Veamos que $f(0), f(1) \in \{0,1\}$. Supongamos que $f(0) \notin \{0,1\}$, así $f(0) \in (0,1)$. Como f es suprayectiva existen $r, s \in (0,1]$ con $r \neq s$ tales que $f(r) = 0$ y $f(s) = 1$, supongamos sin perder generalidad que $r < s$. Definiendo la función $h(x) = f(x) - f(0)$, tenemos que $h(r) < 0 < h(s)$, por lo que existe $c \in [r,s]$ tal que $f(c) = f(0)$ y así $c = 0$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $f(0) \in \{0,1\}$. De forma análoga se prueba que $f(1) \in \{0,1\}$.

De la inyectividad de f tenemos dos casos,

1. Si $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$, entonces f es estrictamente decreciente.

   Supongamos que existen $x_0, y_0 \in (0,1)$ con $x_0 < y_0$ tales que $f(1) < f(x_0) < f(y_0) < f(0)$, de esto se puede ver que existe $z \in [0, x_0]$ tal que $f(z) = f(y_0)$ y así $z = y_0$, esto es una contradicción. Por lo tanto $f(x) > f(y)$ siempre que $x < y$.

2. Si $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, entonces f es estrictamente creciente.

   Los argumentos son similares al caso anterior.

($\Leftarrow$) La demostración de esto es directa de las definiciones. □

Corolario 5.6. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y suprayectiva. Si $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, entonces f es una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

Teorema 5.7. *Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ una función continua, biyectiva y estrictamente creciente. Si $f^2=Id$, entonces $f=Id$.*

Demostración. Como f es estrictamente creciente, por la demostración anterior tenemos que $f(0)=0$ y $f(1)=1$. Sea $x_0\in(0,1)$ y supongamos que $f(x_0)<x_0$, de esto tendríamos que $f^2(x_0)<f(x_0)$, es decir, $x_0<f(x_0)$, lo cual es una contradicción. Si suponemos que $f(x_0)>x_0$ también se llega a una contradicción. Por lo tanto $f(x_0)=x_0$ para toda $x_0\in[0,1]$. □

Llegado a este punto podemos pensar que cambiando la hipótesis de estrictamente creciente por estrictamente decreciente, deberiamos de obtener una única función que satisfaga las hipótesis, incluso podemos pensar que esta función es $f(x)=1-x$. Sin embargo, esto no ocurre, daremos dos ejemplos de esto y después una caracterización de estas.

Ejemplo 5.8. Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}-3x+1 & \text{si } x\in[0,\frac{1}{4}],\\ -\frac{1}{3}(x-1) & \text{si } x\in[\frac{1}{4},1].\end{cases}$$

Sea $g:[0,1]\to[0,1]$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2} & \text{si } x\in[0,\frac{1}{2}],\\ -\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+\frac{1}{2} & \text{si } x\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Estas funciones son continuas, biyectivas y estrictamente decrecientes, además se puede ver que $f^2=Id$ y $g^2=Id$.

Estos dos ejemplos tienen en común que, la segunda parte de la función es una reflexión de la primera respecto a la función identidad. El siguiente teorema muestra que esto es cierto.

Teorema 5.9. *Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ una función continua, suprayectiva y estrictamente decreciente. Entonces $f^2=Id$ si y solo si existe $b\in(0,1)$ y $g:[0,b]\to[b,1]$ continua, suprayectiva y estrictamente decreciente tal que*

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & \text{si } x\in[0,b],\\ g^{-1}(x) & \text{si } x\in[b,1].\end{cases}$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $x \in [0,1]$, se tienen dos casos:

1. Si $x \in [0,b]$ tenemos que $f(x) = g(x)$, como $g(x) \in [b,1]$, se tiene que $f^2(x) = f(g(x)) = g^{-1}(g(x)) = x$.

2. Si $x \in [b,1]$ se obtiene $f(x) = g^{-1}(x)$, dado que $g(x)^{-1} \in [0,b]$, entonces $f^2(x) = f(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(x)) = x$.

Por lo tanto $f^2 = Id$.

($\Rightarrow$) Por el Teorema 2.2 existe $b \in [0,1]$ tal que $f(b) = b$, por lo visto en la prueba del Teorema 5.5, $b \in (0,1)$. Definamos $g : [0,b] \to [b,1]$ por $g(x) = f(x)$. Veamos que g esta bien definida, es decir, $g([0,b]) \subset [b,1]$, como $f^2 = Id$ y f es estrictamente decreciente tenemos que f es inyectiva y además, $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Supongamos que existe $x_0 \in (0,b)$ tal que $g(x_0) \in (0,b)$. f restringida a $[b,1]$ es continua y se cumple que $f(1) < g(x_0) < f(b)$, así existe $c \in (b,1)$ tal que $f(c) = g(x_0) = f(x_0)$, esto contradice el hecho de que f es inyectiva. Por tanto $g([0,b]) \subset [b,1]$. Es claro que $b, 1 \in g([0,b])$, como $f([0,b]) = g([0,b])$ se tiene que $g([0,b])$ es conexo y por ello $[b,1] \subset g([0,1])$. Por lo tanto $g([0,b]) = [b,1]$, es decir, g es suprayectiva. Por hipótesis g es continua y estrictamente decreciente. Por esto, la función g es continua y biyectiva, luego su función inversa $g^{-1} : [b,1] \to [0,b]$ esta bien definida, es continua, biyectiva y estrictamente decreciente.

Veamos que $f(x) = g^{-1}(x)$ para $x \in [b,1]$. Sea $x \in [b,1]$, $g^{-1}(x) \in [0,b]$, luego como f y g coinciden en el intervalo $[0,b]$ se tiene que $f(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(x)) = x$ y así, $g^{-1}(x) = f^2(g^{-1}(x)) = f(x)$. Esto completa la demostración. $\square$

De esto podemos ver que hay una infinidad de funciones que cumplen con ser continua, biyectiva, estrictamente decreciente y $f^2 = Id$.

Es decir, que $\omega_h(x) = \{x, h(x), h^2(x)\}$ o bien $h^3 = Id$. La respuesta es negativa, ya que de existir h tendría un punto de periodo 3 y por el Teorema 2.7, la función h debe tener un punto de periodo 2, lo cual contradice que $h^3 = Id$.

De aquí, nos preguntamos ¿Existe una función $h : [0,1] \to [0,1]$ continua y suprayectiva tal que $h^n = Id$ para $n \geq 4$? El argumento que se utilizó para cuando $n = 3$ ya no es válido en estos casos, sin embargo, el teorema siguiente responde de forma negativa a esta pregunta.

Teorema 5.10. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y suprayectiva. Si $f^n = Id$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^2 = Id$.*

Demostración. Si $f^n = Id$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^{n+1} = f$, por el Teorema 5.3 se tiene que f es equicontinua, luego por el Teorema 5.4 $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, finalmente por el Teorema 2.4 $f^2 = Id$. □

El anterior teorema nos dice que una función continua y suprayectiva de $[0,1]$ en $[0,1]$, tal que $f^n = Id$ para algún $n \in \mathbb{N}$, no tiene más opción que ser la función identidad o ser una función como las que se describen en el Teorema 5.9.

Bibliografía

[1] F. de J. Aguilar Romero, *Dinámica en el intervalo y en su hiperespacio de compactos* (tesis de licenciatura). Benemérita Universidad Autńoma de Puebla. México. (2019).

[2] C. O. Christenson, William L. Voxman, *Aspects of Topology*, n, Pure and Applied Mathematics, Vol. 39, Marcel Dekker, Inc., E.U. New York and Basel, 1977.

[3] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products,* Topol. Appl. 160 (2013) 1577–1587.

[4] D. Herrera Carrasco, A. de J. Libreros López, F. Macías Romero, *Continuos sin segundo y sin tercer producto simétrico rígido* (Capítulo 6) Matemáticas y sus aplicaciones 9, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 113-139. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-520-0.

[5] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática, ISBN:968-36-3594-6,2004.

[6] I. Iribarren I. *Topología de espacios métricos*, Limusa-Wiley, México, 1973.

[7] J. King, H. Méndez, *Sistemas dinámicos discretos*, Las prensas de la ciencia, Temas de Matemáticas, ISBN: 978-607-02-5263-1, 2014.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 4

Una manera de tratar la rigidez de $F_2(X)$ para continuos arco indescomponibles

Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López
FCFM-BUAP

1 Introducción

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, definimos el **n-ésimo producto simétrico** de X, $F_n(X) = \{A \subset X : A$ tiene a lo más n puntos$\}$ el cual es un continuo con la metrica de Hausdorff. Decimos que $F_n(X)$ es **rígido** si para cualquier homeomorfismo $h : F_n(X) \longrightarrow F_n(X)$ se tiene que $h(F_1(X)) = F_1(X)$.

2 Resultados previos

En [2], Verónica Martínez de la Vega y Rodrigo Hernández obtienen los siguientes resultados:

- ⋄ [2, Corollary 7] Si $n \geq 4$ y X es un continuo alambrado, entonces $F_n(X)$ es rígido.
- ⋄ [2, Theroem 11] Si un continuo X contiene un pelo, entonces $F_2(X)$ no es rígido.
- ⋄ [2, Theroem 14] Si un continuo X contiene un arco libre, entonces $F_3(X)$ no es rígido.

Más aún, por [2, Theorem 24] uno puede inferir que si X es un continuo arco indescoponible sin puntos extremos (por ejemplo un Solenoide), entonces $F_2(X)$ es rígido. Esto da paso a la siguiente pregunta.

3 Objetivo

[2, Question 26]¿Es $F_2(X)$ rígido para cada continuo arco indescomponible X?

Por los argumentos que se usan para probar [2, Theorem 24], uno puede conjeturar que cuando X tiene puntos extremos (por ejemplo el Arcoiris de Knaster), $F_2(X)$ no es rígido, para lo cual sería necesario exhibir un automorfismo g tal que $g(F_1(X)) \not\subset F_1(X)$.

Dada la dificultad para tratar con este tipo de continuos es conveniente buscar otras maneras de estudiarlos, en este caso nos ayudaremos de los limites inversos.

4 Límite inverso

Sea $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ una colección continuos, y para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$ una función continua. A $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ se le conoce como **sistema inverso**. El **límite inverso** de $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotado por $\varprojlim\{X_i, f_i\}$, es el subespacio de $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definido por

$$\varprojlim\{X_i, f_i\} = \left\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : \text{ para cada } i \in \mathbb{N}, f(x_{i+1}) = x_i\right\}.$$

Sea X un continuo arco indescomponible y supongamos que X es homeomorfo a $\varprojlim\{X_i, f_i\}$, donde cada X_i es un continuo y f_i una función continua. Definimos de manera natural a

$$\mathcal{F}_i : F_2(X_{i+1}) \longrightarrow F_2(X_i)$$

como $\mathcal{F}_i(A) = f_i(A)$. Así, $Z = \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\}$ es un continuo.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, la j-ésima proyección es la función

$$\begin{aligned} \pi_j : \prod_{i=1}^{\infty} X_i &\longrightarrow X_j \\ (x_i)_{i=1}^{\infty} &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

5 $F_2(X)$ como límite inverso

Sea $h : X \longrightarrow \varprojlim\{X_i, f_i\}$ un homeomorfismo. Definimos a

$$H : F_2(X) \longrightarrow \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\}$$

$$\{a, b\} \longmapsto (\{\pi_i(h(a)), \pi_i(h(b))\})_{i=1}^{\infty}$$

el cual es un homeomorfismo.

Con esto, en vez de construir un homeomorfismo $g : F_2(X) \longrightarrow F_2(X)$ tal que $g(F_1(X)) \not\subset F_1(X)$ sería más fácil construir un homeomorfismo

$$G : \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\} \longrightarrow \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\}$$

tal que $G((\{a_i\})_{i=1}^{\infty}) = (\{x_i, y_i\})_{i=1}^{\infty}$.

6 Construcción del homeomorfismo

Por [1, Theorem 6.C.8 y Theorem 6.C.9], para poder construir G solo es necesario definir una sucesión de homeomorfismos $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$,

(a) $g_i : F_2(X_i) \longrightarrow F_2(X_i)$ y

(b) $\mathcal{F}_i \circ g_{i+1} = g_i \circ \mathcal{F}_i$,

y definir a G como $G((\{a_i, b_i\})_{i=1}^{\infty}) = (g_i(\{a_i, b_i\}))_{i=1}^{\infty}$.

$$\begin{tikzcd}
F_2(X_1) \arrow[d, "g_1"'] & F_2(X_2) \arrow[l, "\mathcal{F}_1"'] \arrow[d, "g_2"'] & F_2(X_3) \arrow[l, "\mathcal{F}_2"'] \arrow[d, "g_3"'] & \arrow[l, "\mathcal{F}_3"'] \\
F_2(X_1) & F_2(X_2) \arrow[l, "\mathcal{F}_1"] & F_2(X_3) \arrow[l, "\mathcal{F}_2"] & \arrow[l, "\mathcal{F}_3"]
\end{tikzcd}$$

Además, si para algún $(\{a_i\})_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\}$ hacemos que $g_1(\{a_1\}) = \{x_1, y_1\}$ con $x_1 \neq y_1$, entonces

$$\mathcal{F}_1(g_2(\{a_2\})) = g_1(\mathcal{F}_1(\{a_2\})) = g_1(\{a_1\}) = \{x_1, y_1\}.$$

De esto $g_2(\{a_2\}) = \{x_2, y_2\}$ con $x_2 \neq y_2$. Procediendo recursivamente podemos observar que para cada $g_i(\{a_i\}) = \{x_i, y_i\}$ con $x_i \neq y_i$. Consiguiendo que $G((\{a_i\})_{i=1}^{\infty}) = (\{x_i, y_i\})_{i=1}^{\infty}$.

7 Conclusiones

En resumen, para poder probar que el segundo producto simétrico de los continuos arco indescomponibles con puntos extremos no es rígido, solo bastará analizar como se pueden construir los homeomorfismos g_i con las condiciones antes dichas.

Bibliografía

[1] Charles O. Christenson, William L. Voxman, *Aspects of Topology*, n, Pure and Applied Mathematics, Vol. 39, Marcel Dekker, Inc., E.U. New York and Basel, 1977.

[2] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products,* Topol. Appl. 160 (2013) 1577–1587.

[3] D. Herrera Carrasco, A. de J. Libreros López, F. Macías Romero, *Continuos sin segundo y sin tercer producto simétrico rígido* (Capítulo 6) Matemáticas y sus aplicaciones 9, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 113-139. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-520-0.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
218570567@alumnos.fcfm.buap.mx