

## MANUALES Y TEXTOS

### Otros títulos



#### Matemáticas elementales



#### Topología y sus aplicaciones 6



#### Cálculo diferencial en una variable

## Matemáticas y sus aplicaciones 9

DAVID HERRERA CARRASCO  
FERNANDO MACÍAS ROMERO

(coords.)

Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.

BUAP  
ediciones



MANUALES Y TEXTOS  
ciencias exactas

BUAP  
ediciones

DAVID HERRERA CARRASCO  
FERNANDO MACÍAS ROMERO (coords.)

Matemáticas  
y sus aplicaciones 9



## Matemáticas y sus aplicaciones 9

DAVID HERRERA CARRASCO  
FERNANDO MACÍAS ROMERO

(coords.)

**David Herrera Carrasco** (1955). Estudió la licenciatura en Matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). Comenzó a trabajar como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (de la UAP) del 1975-1981. Desde 1981 a la fecha es Profesor de Tiempo Completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Ha concluido la dirección de varias tesis de matemáticas.

**Fernando Macías Romero** (1961) Estudió la licenciatura, una maestría y un doctorado en Matemáticas, llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1982. Como formador de nuevo talento matemático, ha dirigido 31 Tesis de Licenciatura, 7 de Maestría y 3 de Doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis más en proceso. Como docente, ha impartido múltiples cursos tanto en licenciatura como en posgrado así como conferencias de divulgación. Por esta labor, ha sido reconocido con el nivel IX dentro del Programa de Estímulos al Desempeño del Personal Docente 2018. Actualmente, es Investigador Nacional reconocido por el SNI.





# *Matemáticas y sus aplicaciones 9*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

David Herrera Carrasco  
Fernando Macías Romero  
Coordinadores

Primera edición: 2018

ISBN: 978-607-525-520-0

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000

Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00

[www.buap.mx](http://www.buap.mx)

Dirección General de Publicaciones

2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000

Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764

[www.dgp.buap.mx](http://www.dgp.buap.mx)

[dgp@correo.buap.mx](mailto:dgp@correo.buap.mx)

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B

Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570

Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552

[www.fcfm.buap.mx](http://www.fcfm.buap.mx)

[direccion@fcfm.buap.mx](mailto:direccion@fcfm.buap.mx)

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

- *Rector*: José Alfonso Esparza Ortiz
- *Secretario General*: José Jaime Vázquez López
- *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: Fernando Santiesteban Llaguno
- *Director Genenal de Publicaciones*: César Cansino Ortiz
- *Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Impreso y hecho en México

Printed and made in Mexico

# Matemáticas y sus aplicaciones 9

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación  
presentados en el  
International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA),  
FCFM, BUAP.

## Coordinadores

David Herrera Carrasco  
Fernando Macías Romero

## Comité científico internacional

Jorge Bustamante González (BUAP), Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Jiling Cao (AUT AC, NZ), Agustín Contreras Carreto (BUAP), Miguel Ángel García Ariza (BUAP), Lidia Aurora Hernández Rebollar (BUAP), Miguel Antonio Jiménez Pozo (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), Fernando Macías Romero (BUAP), Ángel del Río Mateos (UM, ES), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Faustino Agustín Romano Velázquez (UNAM), Francisco Solano Tajonar Sanabria (BUAP), Azucena Tochimani Tiro (UVA, ES), Teresa de Jesús Valerio López (UAQ), Xinlong Zhou (NUI-DUE, DE).



# Contenido

<b>Presentación</b>	1
Homenaje académico al Profesor M. A. Jiménez Pozo en ocasión de su 80 aniversario	
<b>Capítulo 1. M. A. Jiménez Pozo en ocasión de su 80 aniversario</b>	5
<i>Jorge Bustamante González, Patricia Domínguez Soto y Fernando Macías Romero</i>	
<b>Álgebra</b>	
<b>Capítulo 2. Módulos Cuasi inyectivos y Cuasi proyectivos</b>	29
<i>Tania Gabriela Pérez Quijano, Iván Fernando Vilchis Montalvo, César Cejudo Castilla</i>	
<b>Educación matemática</b>	
<b>Capítulo 3. Dificultades de estudiantes universitarios en tareas de interpretación y construcción del concepto de función</b>	57
<i>Abraham Cuesta Borges, Juana Elisa Escalante Vega, Francisco Sergio Sallem Silva</i>	
<b>Análisis matemático</b>	
<b>Capítulo 4. Algunas variantes del Teorema del Valor Medio</b>	71
<i>Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García</i>	
<b>Capítulo 5. Upper and Lower Estimates for Fejér sums</b>	93
<i>Jorge Bustamante González</i>	
<b>Topología</b>	

<b>Capítulo 6. Continuos sin segundo y sin tercer producto simétrico rígido</b>	113
<i>David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López, Fernando Macías Romero</i>	
<b>Capítulo 7. Continuos con hiperespacio rígido <math>C_n(X)</math></b>	141
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez</i>	
<b>Índice de autores</b>	163

# Presentación

Tenemos la fortuna de hacer un recorrido hacia un proceso creativo sin precedentes. Ha llegado el momento de compartir esta sabiduría, de invitar a todo el mundo a embarcarse en el navío que nos conduce hacia la Fuente de todo lo creado. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Fifth International Conference on Mathematics and its Applications* (5CIMA, 2018), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 5CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este producto no es ni siquiera setemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 5CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a Antonio de Jesús Libreros López por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

*David Herrera Carrasco*  
*Fernando Macías Romero*  
*Editores*



---

**Homenaje académico al Profesor M. A.  
Jiménez Pozo en ocasión de su 80  
aniversario**

---



## Capítulo 1

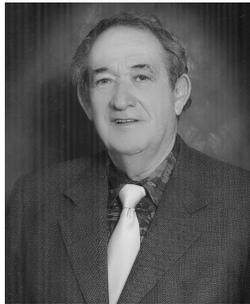
### M. A. Jiménez Pozo en ocasión de su 80 aniversario

Jorge Bustamante González, Patricia Domínguez Soto y Fernando  
Macías Romero  
FCFM, BUAP

#### Resumen

Con este capítulo hacemos un homenaje al Profesor Miguel Antonio Jiménez Pozo en ocasión de sus segundos 40 años. Describimos parte de la ejemplar trayectoria de trabajo de este eminente matemático de origen cubano.

## 1 Breve introducción a la vida y actividad académica del Prof. Jiménez Pozo



Miguel Antonio Jiménez Pozo nació en la ciudad de La Habana, Cuba, el 14 de septiembre de 1938. Los estudios que realizó después de la escuela elemental y media fueron: Telegrafista en la Escuela Oficial del Ministerio de Comunicaciones de Cuba en 1956-57, Bachiller en Ciencias en el Instituto de Segunda Enseñanza de La Habana, Cuba (1952-1957) y Técnico en Telecomunicaciones en la Escuela de la Red Oficial de Comunicaciones por Micro-ondas de Cuba (1959-1960). Trabajó en su natal Cuba como: Telegrafista Honorario de Campo Florido, La Habana, en 1958, Jefe Local de Correos y Telégrafos de la misma oficina de 1958 a 1961 y Técnico



REPUBLICA DE CUBA

MINISTERIO DE COMUNICACIONES

MODELO DE JURAMENTO

7

Yo, Miguel Antonio Jiménez Pozo, natural de La Habana, ciudadano cubano, nombrado para el cargo de Telegrafista honorario. Oficina Local Campo Florido, Hab. juro (o prometo), sin reservas mentales ni propósito de evadir este juramento, mantener y defender la Constitución de la República y las Leyes contra sus enemigos, nacionales o extranjeros, profesar verdadera fe y lealtad a Cuba y a su Gobierno y cumplir fielmente los deberes del cargo que debo desempeñar. Así Dios me ayude.

CAMPO FLORIDO, Hab., 1ro. de Abril de 1958

*M. A. Jiménez*  
Miguel A. Jiménez Pozo.

Jurado ante mí en su fecha.

*M. Gómez*  
M. Gómez PERTIERRA,  
Jefe L. de Comones.



03

en Telecomunicaciones y Jefe del Sector Centro de la Red Oficial de Comunicaciones por Micro-ondas de Cuba (ROCFM) de 1961 a 1969.

Como se puede apreciar desde el mismo párrafo anterior, Miguel Antonio Jiménez se ha caracterizado por la realización simultánea de tareas. A lo que hay obligatoriedad de añadir tareas sociales. Ya desde su temprana juventud ocupó los cargos primero de Secretario y después de Tesorero de la Sociedad Liceo de Campo Florido, pueblo de la antigua provincia de La Habana, que lo vio crecer desde los 6 años. Todos sus estudios universitarios y de posgrado fueron desarrollados como trabajador activo y frecuentemente de manera autodidacta.

Habiéndose ya trasladado a la capital del país para enfrentar su nueva responsabilidad como técnico de la ROCFM y una vez reabierto la Universidad de La Habana (U. H.) después del triunfo de la revolución cubana, no demoró en matricular la Ingeniería Eléctrica como trabajador en el curso vespertino-nocturno. Pero eran tiempos muy difíciles en Cuba, además de las responsabilidades familiares. No alcanzaba el tiempo para las prácticas de laboratorio, de dibujo técnico, y clases normales. Entonces decidió esperar mejores oportunidades y en 1964, ya con 26 años de edad, comenzó a estudiar la Licenciatura en Matemática en la Universidad de la Habana, Cuba. En definitiva su trabajo como técnico era incomparablemente más complejo que las prácticas del laboratorio y se percataba de la necesidad de la matemática para poder avanzar en la Electrónica.

Finalizó la licenciatura con promedio de Excelente en 1969. Los estudios de Posgrado: Maestría en Ciencias Matemáticas y Doctorado en Ciencias Matemáticas, los realizó en la U. H., en 1972 y 1979 respectivamente, con las tesis Algebras Unimodularmente Separantes (Maestría) y Sobre la Convergencia de Sucesiones de Operadores (Doctorado). Siendo tesis pioneras para el área en Cuba, la de doctorado fue previamente presentada y aprobada por el Consejo Científico de la Facultad de Mecánica Matemática de la Universidad Lomonosov de Moscú en 1978. Posteriormente obtuvo el Doctorado en Ciencias (de Nivel Superior) en la U. H., en 1993, con la tesis Contribuciones a la Teoría de la Aproximación y sus Aplicaciones.

El Prof. Miguel A. Jiménez laboró como: Instructor (no graduado) en la U. H., de 1966 a 1969 (de manera paralela a sus estudios y a su trabajo en Comunicaciones), Instructor (ya como graduado y de tiempo completo) en la Universidad de la Habana, de 1970 a 1977 y como Profesor Titular C, en la Universidad de La Habana de 1977 a 1996. Cabe mencionar que Titular C es la máxima categoría en la escala de las universidades cubana que se obtiene mediante evaluación y oposiciones.

Miguel A. Jiménez labora desde 1994 como Profesor-Investigador Titular C de Tiempo Completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (máxima categoría en la escala de esta universidad). La experiencia académica, sus investigaciones, el apoyo y el entusiasmo del

Dr. Jiménez, han contribuido significativamente para que el posgrado en Ciencias Matemáticas de la FCFM, BUAP se encuentre entre los mejores del país. La labor que desarrolla en esta institución, el respeto y el cariño mexicano que siempre recibió, y el amor que él mismo siente por México sin menoscabo del amor que igualmente siente por su país de origen, lo llevaron a nacionalizarse en 2008.

La experiencia docente (más de 50 años) de Miguel A. Jiménez es extensa y se puede comprobar en los más de 400 cursos impartidos en los niveles de licenciaturas y posgrados de la Educación Superior de Cuba y de México. Las áreas de investigación de Miguel A. Jiménez son diversas, pero principalmente se enfocan en Análisis Matemático, Medida e Integración, Variable Compleja, Análisis Funcional, Topología, Análisis Armónico, Teoría de la Aproximación, Optimización y en otras ramas del Análisis en sentido amplio; así como aplicaciones de la Matemática en la Industria y las Ciencias, y la Historia y la Educación en la región.

Miguel A. Jiménez ha impartido cursos por invitación en la Universidad Central de Caracas, Venezuela, sobre Análisis Multirresolución con Wavelets y de Teoría de la Aproximación y en la Universidad de Jaén, España, en diferentes años en sus planes de doctorado. También merece mencionar que ha impartido conferencias y cursos cortos organizados en congresos y encuentros regionales, nacionales e internacionales.

Las membresías, premios y distinciones relevantes que se le han otorgado a Jiménez son muchas, de ellas mencionamos las siguientes:

1. Profesor Honorario, Universidad Técnica de Cluj Napoca, Rumania. 2008.
2. Profesor Catedrático Invitado del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Jaén, 2000-2015.
3. Profesor Titular oficialmente registrado en la Universidad Central de Venezuela, 1997.
4. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores de México desde 1996 (S.N.I. nivel II).
5. Antes de su nacionalización, dos veces acreditado con diplomas municipales como Visitante Distinguido de la Ciudad de Puebla, 1995 y 2002.
6. Perfil deseable de profesor (Beca Académica, PROMEP, PRODED, etc) desde su llegada a Puebla en 1994.
7. Presidente de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación de 1982 a 1991.
8. Premio Nacional Pablo Miquel de Investigaciones de 1980 de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación (Fue el primero en recibirlo)
9. Orden Carlos J. Finlay, 1995, no recibida físicamente por situaciones ajenas no académicas, pero que se cita por constituir la principal distinción científica de Cuba, otorgada según Decreto de Estado correspondiente al año, y en ocasión de su entrega por vez primera a matemáticos.

10. Medalla de la ciudad de Cluj Napoca y orden de la Asociación de Inventores e Innovadores de Rumanía.
11. Acreditaciones distintivas de XXV Años en la Educación Cubana (1991) y XX Años en la BUAP 2015.
12. Homenajead por el 70 aniversario de su nacimiento en el Congreso Internacional de Aproximación de la Universidad de Jaén, España, en 2008, con diploma conmemorativo de plata.
13. Presidente de la Comisión de Matemática y Computación del Consejo Científico Superior de la Academia de Ciencias de Cuba 1990-1993.
14. Editor Jefe de la Revista Internacional Jaen Journal on Approximation desde su fundación.
15. Reviewer de Zentralblatt für Mathematik durante 30 años.
16. Representante de Cuba ante la Comisión Internacional para la Enseñanza de la Matemática (ICMI) en los años 80.
17. Presidente de los jurados de las olimpiadas internacionales de matemática en La Habana: Mundial (1987), Iberoamericana (1988).
18. Miembro de Consejo Científico, VIEP, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por cuatro años.
19. Ex-alumno oficialmente de la Universidad Estatal Lomonosov de Moscú y Alumni del Servicio de Intercambio Académico Alemán (DAAD).
20. Co-fundador (1987) y representante del Comité Ejecutivo de la serie de trece congresos internacionales hasta 2016 sobre Aproximación y Optimización en el Caribe.
21. Miembro regular de la Academia Mexicana de Ciencias desde 2010.

Miguel A. Jiménez ha sido director de más de 50 tesis en los niveles de licenciatura y posgrado en Cuba y México- A continuación se mencionan sus tesis graduados de doctorado.

1. José Luis Fernández Muñiz, 1982, en La Habana, sobre Funciones analíticas en bandas infinitas del plano complejo y teoremas de tipo Korovkin.
2. Eduardo López, 1992, en La Habana, en temas de Riemann-convergencia.
3. Estela de Lourdes Juárez Ruíz, 2000, Puebla, México. Tesis: Transformación de algunos problemas de aproximación mixta por métodos de optimización.
4. Raúl Linares Gracia, 2004, Puebla, México. Tesis: Aproximación polinomial trigonométrica en espacios de Lipschitz generalizados.
5. Gerardo Martínez Guzmán, 2006, Puebla, México. Tesis: Espacios de Lipschitz en grupos topológicos.
6. Ivonne L. Martínez Cortés, 2009, Puebla, México. Tesis: Aproximación polinomial mediante bandas de amplitudes variantes.

7. José Margarito Hernández Morales, 2012. Tesis: Espacios de Hölder de funciones integrables con peso.

8. José Nobel Méndez Alcocer, 2017. Tesis: Aproximación racional asimétrica.

La experiencia del Miguel A. Jiménez como jurado en exámenes o proyectos importantes es ampliamente reconocida a nivel nacional e internacional, como por ejemplo: Presidente de jurados de olimpiadas internacionales de Matemática, Miembro del Jurado de Examen de Estado en 1978, en la carrera de Matemáticas, de la Universidad Lomonosov en Moscú, Miembro de tribunales de selección de premios en la Universidad de La Habana, en la Academia de Ciencias de Cuba y en la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. Evaluador de proyectos de investigación en Cuba, en México (CONACyT y PRODEP-BUAP) y en España. Miembro de tribunales de grado de tercer ciclo en Nancy, Francia.

Entre sus principales publicaciones en matemáticas se encuentran: Redacción de guías de estudio, Notas de cursos, Artículos de divulgación científica, Autor de libros de textos. Editor de memorias científicas, Revisiones (reviews) sobre artículos y libros para Zentralblatt Mathematik y Artículos de investigación en diversas revistas de circulación internacional. A continuación se enuncian con detalle sus libros y monografías publicados.

*Libro de texto:*

Medida, Integración y Funcionales. Editora Pueblo y Educación. Habana 1989, 504 páginas.

*Monografía de investigación:*

Algebras Unimodularmente Separantes. Revista Ciencias. Serie 1 (Matemática) No. 10, 1974, 35 págs.

*Memorias (con co-autores):*

1. Approximation and Optimization. Lecture Notes in Mathematics 1354, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

2. Approximation and Optimization in the Caribbean II. Peter Lang, Series Approximation and Optimization, Vol 8, 1995.

3. Approximation and Optimization in the Caribbean III. Aportaciones Matemáticas. Serie Comunicaciones. Nr 24, México, 1998.

4. Tópicos de Teoría de la Aproximación. Coloquio Internacional de Aproximación. 50 Aniversario de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas. Textos Científicos de la BUAP, Puebla, México, 2003.

5. Tópicos de Teoría de la Aproximación II. Coloquio de Aproximación y Temas

Afines 2006, Textos Científicos de la BUAP, Puebla, México, 2007 ISBN 978 968 9282 412.

6. Tópicos de Teoría de la Aproximación III, 250 páginas, Textos Científicos de la BUAP, ISBN 978 968 9282 41 2 (2009).

7. Tópicos de Teoría de la Aproximación IV , Memorias del Coloquio de Aproximación y Temas Afines, Textos Científicos de la BUAP, 220 páginas, 2012.

Uno de los aspectos más sobresalientes en la obra del Dr. Scient. Miguel A. Jiménez, y sin embargo menos conocida para quienes no están en su entorno cercano, es su capacidad de organización para el trabajo de la ciencia y la técnica, así como su voluntad de llevar a buen destino los planes y metas propuestos. En efecto, si pudo estudiar la carrera de Matemática siendo jefe del principal sector de comunicaciones de la ROCMI, fue por su voluntad y por la organización interna que desarrolló en su sector. Como estudiante y después docente de Matemática en la Universidad de La Habana, contribuyó notablemente junto a otros colegas a la creación de seminarios científicos, de revistas de ciencias, y particularmente en la formación de los incipientes grupos de investigación, en especial los grupos de Análisis Funcional y Teoría de Funciones. Víctima parcial durante varios años de las contradicciones internas del proceso cubano, se le prohibía frecuentemente la aceptación de invitaciones a congresos, o a estudiar o trabajar en universidades europeas e incluso mexicanas a las que era invitado. Sin embargo, ello no fue óbice para que de manera autodidacta y apoyado por profesores visitantes, escribiera y defendiera su tesis de Maestría. Resultó la primera tesis de Maestría en Matemática Pura -como se le denominaba- que se defendiera en Cuba. Después, con artículos individuales ya publicados en revistas internacionales y aprovechando una sorpresiva posibilidad de visitar la Universidad de Lomonosov en 1978, apoyado por el Prof. Mijail K. Potapov en calidad de Tutor de Tesis de Doctor, presentó sus trabajos en aquella universidad, como ya se adelantó. Elegido más tarde Presidente de la Sociedad Cubana de Matemática en asamblea nacional de sus miembros, organizó junto a un grupo de matemáticos entusiastas el primer Congreso Nacional de Matemática de Cuba, en 1982. Este congreso marcó un antes y un después, en el joven desarrollo de la matemática en Cuba. Su trabajo en la presidencia se prolongó por nueve años, en los cuales organizó los tres congresos nacionales subsiguientes. Amplió la membresía plena a los profesores graduados de Matemática de la segunda enseñanza y a los graduados en Ciencias de la Computación, lo que permitió fortalecer la Sociedad y fundar filiales a lo largo y ancho del país. Ahora la organización se denominaría Sociedad Cubana de Matemática y Computación (SCMC), desde la cual organizó eventos científicos internacionales, fortaleció la relación con la Sociedad Matemática Mexicana e inició nuevas relaciones con otras. Organizó junto al

Ministerio de Educación la Olimpiada Mundial de Matemática correspondiente a 1987. En fin, la Sociedad se elevó a niveles tan altos que hoy, cuarenta años después de su fundación, continua siendo una de las más destacadas en Cuba.

Otras contribuciones a destacar en el desarrollo de la organización de la matemática cubana lo constituyen sus aportes desde la presidencia de la Comisión de Matemática y Computación del Consejo Científico Superior de la Academia de Ciencias de Cuba, la presidencia durante muchos años de la Comisión Nacional de Planes y Programas de Estudios de la Licenciatura en Matemática, membresía a la Comisión de Grados Científicos de la Universidad de La Habana y asesor del Ministerio de Educación, Jefe del Departamento de Teoría de Funciones de la Universidad de La Habana durante tres años, entre otras actividades extra curriculares.

En el ámbito internacional dirigió los trabajos preparatorios de la comisión de Matemática en el Tercer Nivel en los Países en Vías de Desarrollo, que culminaron en el Congreso Internacional de Educación de la ICMI, Budapest 1988. Participó muy significativamente en la organización de los posgrados de Matemática de la FCFM BUAP y en la conformación de los grupos de investigación de Teoría de Funciones y Análisis Funcional en esta universidad, pero también, igualmente, en la Universidad de Jaén, España, donde además es editor en jefe de la revista de reconocido prestigio internacional Jaen Journal on Approximation.

En noviembre de 1983 visita México por vez primera e imparte, precedido en julio del mismo año por el Prof. J. L. Fernández Muñiz, a quién había dirigido el doctorado justamente en temas de Aproximación, lo que serían los cursos pioneros en el flamante programa de la Maestría de Ciencias Matemáticas de la BUAP. En 1994 viene a México mediante una Cátedra Patrimonial de Excelencia Nivel 2 de CONACyT, y permanece como Profesor-Investigador Titular en esta dependencia hasta nuestros días.

En México agrega a su trabajo en el posgrado de la BUAP, la continuación activa en la Serie de Conferencias Internacionales de Aproximación y Optimización del Caribe, participa en la organización de varios eventos internacionales de la BUAP, y se incorpora al Comité Nacional de la Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico, entre otras actividades.

No podríamos concluir esta sección de contenido general sin comentar algunos aspectos de la vida personal de Jiménez. Amante de los deportes, ingresó mediante resultados competitivos en la exitosa preselección cubana de judo en 1960, la que lamentablemente para él tuvo que abandonar tempranamente por lesiones de combates. No obstante, ostentando orgullosamente su cinta negra, continuó practicando este deporte por afición durante muchos años y recibió la distinción de atleta más destacado de la U. H. en esa disciplina. Igualmente practicó durante muchos años la caza submarina y representó a la UH y a su Ministerio de Comunicaciones en

campeonatos de ajedrez nacionales e incluso internacionalmente. De carácter muy sociable, campechano, jocoso y alegre, es amante de la música tanto popular como clásica, en particular es muy apasionado a la música vernácula mexicana. Ama el Arte en sus diferentes manifestaciones y disfruta de los idiomas extranjeros (inglés, francés, ruso), es de tendencia perfeccionista en la escritura de la lengua española, lo que siempre trata de transmitir a sus alumnos. Gusta de compartir y festejar con sus compañeros y amigos, y disfruta de la amistad no sólo con personalidades sino también con las personas más sencillas. Cree en la bondad humana por encima de la maldad y enfoca el mundo desde esa perspectiva. Ama los animales y la naturaleza. Se interesa en los misterios del universo y se aplica en temas filosóficos. Vive permanentemente agradecido a sus profesores.

Su mayor satisfacción y orgullo son quienes fueron sus alumnos, sus amigos cercanos, y la familia toda. En especial sus hijos naturales Michael, Josef y Odette, y de crianza Alexei y Uxmal. Sus nietos Michael Jr., Ella, Tazio, y Emily. Y su esposa Hilda, la compañera que siempre lo ha apoyado y con quien ha compartido lo bueno y lo malo de la vida más de 30 años.

"Honrar, honra". Escribió el insigne maestro de las Américas, José Martí. Nos honramos con homenajear a nuestro amigo Miguel es su 80 aniversario, que coincide por azar con sus 60 años de actividad laboral ininterrumpida, 40 años de la obtención de su primer doctorado y 25 del segundo, y para rematar 35 de impartir su primer curso en esta su casa adoptiva de él, la FCFM de la BUAP.

## 2 Aportes científicos y técnicos

Al analizar el enorme esfuerzo realizado por Jiménez Pozo en trabajos de organización y dirección científica, de horas acumuladas de docencia directa, y de su vida cargada de complejidades, nos sorprende nuevamente ahora con su amplia producción científica y técnica. En efecto, Jiménez ha publicado más de 60 artículos de investigación y ha contribuido de manera aplicada a la solución de problemas de la vida real. En los epígrafes que siguen se presenta un breve recorrido por los resultados más relevantes de su obra, los cuales expondremos de manera fundamentalmente cualitativa y lo más simple posible, evitando muchos "tecnisismos" que no ayudarían a los objetivos de esta presentación destinada a un público amplio.

### Teoremas de tipo Korovkin

Sea  $X$  un espacio métrico compacto y  $C(X)$  el espacio de Banach de todas las funciones continuas  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $Y \subset X$  es compacto, el espacio  $C(Y)$  se define de manera análoga.

Sea  $E$  un subespacio lineal de  $C(X)$  y  $L_n : E \rightarrow C(Y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  una sucesión de operadores lineales y acotados. Un conjunto  $A \subset E$  es una familia de prueba relativa a  $(L_n)$ , si de la relación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - L_n(g)\|_Y = 0, \quad \text{para toda } g \in A,$$

se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(f)\|_Y = 0, \quad \text{para toda } f \in E.$$

Si  $Y$  consta de un solo elemento estaríamos considerando convergencia puntual. La definición se puede extender a otros espacios de Banach. Encontrar familias de prueba finitas no siempre es posible sin hipótesis adicionales. Los resultados que muestran familias de este tipo se denominan teoremas de tipo Korovkin. La terminología proviene de un hecho impactante.

Denotemos  $e_k(x) = x^k$ , para  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Theorem 2.1.** (Teorema cualitativo) *Sea  $L_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  una sucesión de operadores lineales y positivos y  $A = \{e_0, e_1, e_2\}$ . Si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_k - L_n(e_k)\|_\infty = 0, \quad \text{para } k = 0, 1, 2,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(f)\|_\infty = 0, \quad \text{para toda } f \in C[0, 1].$$

Para  $f \in C[a, b]$  se define el módulo de continuidad de primer orden como

$$\omega(f, t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \leq t\}.$$

**Theorem 2.2.** (Teorema cuantitativo) *Consideremos intervalos  $[c, d] \subset [a, b]$ . Sea  $\{L_n\}$ ,  $L_n : C[a, b] \rightarrow C[c, d]$  una sucesión de operadores lineales y positivos y*

$$\alpha_n(x) = L_n((t - x)^2, x).$$

Para  $f \in C[a, b]$  y  $x \in [c, d]$  se satisface la desigualdad

$$\begin{aligned} |f(x) - L_n(f, x)| &\leq |f(x)| |e_0(x) - L_n(e_0, x)| \\ &+ \left(L_n(e_0, x) + \sqrt{L_n(e_0, x)}\right) \omega(f, \alpha_n(x)). \end{aligned}$$

Jiménez cuenta haber quedado tan sorprendido la noche que accidentalmente conoció el teorema de Korovkin, que no fue a dormir hasta comprender cabalmente

el porqué era posible semejante resultado. Después dedicó varios años de investigación al estudio de variantes cualitativas y cuantitativas de los teoremas anteriores (vea primeramente [2] y [3]).

En el caso del espacio  $C[a, b]$ , la prueba del teorema cuantitativo en la forma presentada con el módulo  $\omega$ , depende de una propiedad interesante de los módulos de continuidad. Si  $t, \lambda > 0$ ,

$$\omega(f, \lambda t) \leq (1 + [\lambda])\omega(f, t),$$

donde  $[x]$  denota a la parte entera de  $x$ . Desafortunadamente esta propiedad no se conserva cuando se desea extender el teorema cuantitativo de Korovkin a espacios de funciones definidas en subconjuntos no convexos de  $\mathbb{R}^n$ . Uno de los resultados importantes de Jiménez fue la introducción de la noción de *deformación de la convexidad* (vea [5]). Generalizando la fórmula precedente, Jiménez demostró teoremas cuantitativos de tipo Korovkin para espacios  $C(X)$ , cuando  $X$  es un espacio métrico compacto con coeficiente de deformación de la convexidad finito (vea [5], [6], [10], y [39]).

## Otros resultados vinculados

Los intereses de Jiménez no se limitaron estrictamente a los espacios de funciones continuas acotadas y operadores positivos. Vinculados a la temática precedente ha publicado investigaciones relacionadas con:

- (a) Problemas de aproximación en espacios pesados (vea [7], [48] y [49]).
- (b) El caso cuando el operador límite no es la identidad o los operadores no son necesariamente positivos (vea [8]).
- (c) Espacios de funciones analíticas de variable compleja en varias variables (vea [4]). Aquí la complejidad resulta de que el interior del cono convexo de las funciones positivas es vacío. Hipótesis incumplida que es piedra angular en toda la teoría de espacios de Banach ordenados. El caso cuantitativo necesitó de cálculos muy finos y técnicos, pero el cualitativo para una variable fue producto de una aplicación muy ingeniosa del teorema de Riemann de representaciones conformes que realizó en cooperación con el Dr. Guillermo López Lagomasino (vea [13]).
- (d) Espacios de las funciones integrables según Riemann (vea [16]).
- (e) Propiedades específicas de algunos operadores concretos, trabajo conjunto con el Dr. Bustamante [50], con quien también escribió la monumental recopilación analizada [51].

Hemos preferido guardar otros espacios y resultados vinculados pensando que estarán mejor ubicados en los epígrafes que siguen.

## Aproximación en normas de Lipschitz (Hölder)

Los profesores Jiménez y Bustamante, y algunos de sus alumnos han participado conjuntamente en variados proyectos de investigación inscritos en CONACyT y en la VIEP-BUAP. Una de las temáticas más abordadas en estos proyectos lo fueron precisamente del tipo de aproximación ahora abordado.

Sea  $C_{2\pi}$  el espacio de las funciones continua y  $2\pi$ -periódica con la norma del supremo.

Para  $0 < \alpha \leq 1$ , el espacio de Lipschitz (también llamado de Hölder) de orden  $\alpha$  es  $Lip_\alpha = \{f \in C_{2\pi} : \theta_\alpha(f) < \infty\}$ , donde

$$\theta_\alpha(f) = \sup_{t>0} \frac{\omega(f, t)}{t^\alpha} < \infty.$$

Se sabe que  $Lip_\alpha$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \theta_\alpha(f).$$

Como  $Lip_\alpha$  no es separable, los polinomios trigonométricos no pueden ser densos. La clausura de los polinomios en  $Lip_\alpha$  es la familia  $lip_\alpha$  dada por las  $f \in Lip_\alpha$  para las cuales

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(f, t)}{t^\alpha} = 0.$$

Para  $\alpha > 1$  se pueden definir espacios similares, pero considerando módulos de continuidad de orden mayor. Los casos  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ , usualmente se tratan con módulos de orden  $2, 3, 4, \dots$ , respectivamente.

Los espacios  $lip_\alpha$  también se definen para  $1 \leq p < \infty$  y los espacios  $L^p$  de funciones integrables.

Jiménez ha dedicado muchos esfuerzos al estudio de la teoría de la aproximación en los espacios  $lip_\alpha$ . (vea [22] a [29], [34] a [36], [38], [40], [45]-[46] y [52]). Los resultados abarcan diferentes clases de problemas:

- a) Desigualdades directas relacionadas con la mejor aproximación.
- b) Desigualdades inversas.
- c) Teoremas tauberianos: Habiendo introducido previamente junto a Bustamante el concepto de conjuntos equilipschitzianos, Jiménez lo había extendido más tarde con uno de sus alumnos a los espacios  $L^p$ , [27]. Después descubre que la idea desarrollada alcanza una mayor universalidad que incluye teoremas importantes conocidos y publica estos resultados en [32]-[33]
- d) Aproximación mediante operadores clásicos.

## Problemas Mixtos de Aproximación, Optimización y Aplicaciones

Debido a trabajos para la industria que no son publicables, pero siendo detonantes de otras investigaciones, nos extenderemos algo más en las explicaciones de este epígrafe.

Motivado por la visita a Cuba de especialistas de Optimización de la Universidad Humboldt de Berlín, y de la tesis doctoral de Francisco Guerra, de la cual sería sinodal; Jiménez Pozo se interesó en algunos temas de Optimización. Desarrolló entonces junto al propio Guerra una fórmula recurrente para el cálculo de puntos extremales de tipo Pareto (vea [11]), a la que revendría más tarde con el propio Guerra y una de sus alumnas en [31]. En la misma temática realizó otra publicación [12], en la cual discretiza el problema de optimización multiobjetivo para soluciones numéricas aproximadas.

Pero el verdadero interés de Jiménez en la Optimización surgió al involucrarse en proyectos de investigación directamente vinculados a la industria cubana de prospección y explotación del petróleo. La evolución de las investigaciones prácticas demandaba resultados teóricos nuevos. En efecto, en el occidente de ese país, existen pozos de trayectoria alabeada denominada inclinada, que saliendo desde la costa se adentran en los fondos marinos. Para el cálculo de reservas petroleras por métodos determinísticos es esencial contar con buenas mediciones de los datos a utilizar, lo que a su vez requiere de modelos apropiados para describir las trayectorias de los pozos, bastante irregulares y alejadas de la planeación debido a factores casuísticos de los suelos y dificultades técnicas de perforación. Jiménez modeló estas trayectorias por medio de splines paramétricos cuadráticos con extremo libre, donde la novedad, bastante poco usual en la literatura matemática general, es la condición de que las curvas descritas tienen longitudes prefijadas, acorde a las mediciones de longitudes reales de las trayectorias de los pozos. El problema inherente a esta modelación es que la ecuación de la longitud de arco involucra de manera no lineal a varias incógnitas, mientras que la integral para la longitud de arco, no integra usualmente con funciones elementales. Jiménez programó un complejo modelo computacional para uso privado de la industria y después, con el trabajo matemático teórico propiamente, escribió el artículo [14]. Como continuación del trabajo, ya fuera de los convenios, intentó modelar las trayectorias con splines cúbicos, de manera de mantener constantes las curvaturas de las trayectorias, según los diseños iniciales de los ingenieros. El estudio fue publicado en [15], pero no satisfizo lo anhelado, pues las soluciones no son únicas y el modelo, aunque justificado numéricamente, viola ecuaciones de manera que en la práctica real se introducen errores grandes si los datos no son pequeños. La solución final teórica a un modelo matemático general vino años más tarde en la propia FCFM BUAP, con la realización de una tesis de maestría para el caso cúbico, y una publicación

posterior para la solución completa de un caso hipotético abstracto de splines de diversos ordenes,  $n$ -variables e hipótesis arbitrariamente prefijadas (vea [41]).

La modelación más exacta de las trayectorias de los pozos, constituye solamente un paso previo antes de acometer un modelo determinístico para el cálculo de reservas. Afortunadamente, debido a la existencia de otros modelos ya conocidos y al conocimiento de la industria de datos sobre el petróleo de la zona costera, el problema final se redujo al cálculo directo del volumen de roca productiva a partir de puntos de coordenadas tridimensionales conocidos en las superficies de los estratos y de otros datos similares calculados por métodos estadísticos con probabilidades de error conocidos aproximadamente. De entre diversos métodos posibles y atendiendo las características locales, se decidió modelar las superficies de los estratos mediante polinomios en dos variables que interpolan aproximadamente los datos conocidos y ajustan los puntos estadísticos teniendo en cuenta las probabilidades de error. Esto se logró por Jiménez mediante la utilización de la programación convexa con finitas restricciones y la utilización del teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT en el futuro). Los multiplicadores de Lagrange cuya existencia se garantizan en el teorema, se estiman mediante un algoritmo de diálogo entre el usuario y la máquina diseñado y programado por Jiménez, a quien tomó más de un año la elaboración de los correspondientes programas computacionales para el uso privado de la industria según los convenios.

Como usualmente ocurre, quedaron problemas teóricos abiertos que resolver. El primero se refiere a la interpolación aproximada no puntual sino en entornos alrededor de los puntos aproximados de mediciones. Esto convierte el modelo en un problema de programación convexa semi-infinita. Para contar con una teoría de polinomios aplicable, se necesita reducir el problema a polinomios en una variable, lo que se logra mediante la reducción del problema a curvas de nivel. El problema teórico formulado en esencia consiste en reducir a un problema libre, de extremos, un problema de programación semi-infinita con restricciones. Esto lo lograron conjuntamente Jiménez, ya en la BUAP, y el Dr. Francisco Guerra, en la Universidad de las Américas de Puebla (Vea [20]). Pero la solución del nuevo problema trajo aparejado otros resultados y conexiones matemáticas inimaginables a priori. Por la trascendencia, trataremos de explicarlo al menos cualitativamente.

Para aplicar el teorema generalizado de KKT en programación convexa semi-infinita, se necesita comprobar ciertas hipótesis de regularidad que se cumplen automáticamente en el caso de la programación finita con condiciones de restricción de tipo afín; pero no así en la situación presente. Al verificar estas condiciones Jiménez y Guerra observaron la existencia de un caso particular en que la llamada *qualificación extendida de restricción* según Mangasarian y Fromovitz no puede aplicarse y por lo tanto no se puede inferir la regularidad necesaria. En este caso Jiménez

y Guerra aplicaron el principio lógico de que con hipótesis falsa todo es cierto, y vía el conocido lema de Farkas aplicaron el mencionado teorema de KKT en su forma generalizada. Los multiplicadores de Lagrange en esta situación son medidas positivas regulares, aunque otros argumentos utilizables sirven para sustituirlas por un número finito de medidas puntuales. Este resultado fue algo sorprendente para los especialistas en programación semi-infinita.

Pero Jiménez y Guerra no estaban tranquilos sin conocer realmente que ocurría cuando violaban el uso de la cualificación extendida de restricciones. En estudios posteriores demostraron que en ese caso se cumple el resultado siguiente:

"Sea  $Z$  compacto en  $\mathbb{R}$  con al menos  $n + 2$  puntos;  $f, h_1, h_2 : Z \rightarrow \mathbb{R}$  continuas,  $h_1, h_2$  estrictamente positivas y  $P(x, z), x := (x_0, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}, z \in \mathbb{R}$ , un polinomio algebraico de orden a lo más  $n$ . Considere el conjunto factible

$$M := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \forall z \in Z, -h_2(z) \leq P(x, z) - f(z) \leq h_1(z)\}.$$

Entonces el vector  $0$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  pertenece a la envoltura compacta convexa de los gradientes  $\pm(1, z, \dots, z^n)$ , donde  $z \in Z$  son los puntos indizados en los cuales la función de restricción es activa para algún  $x^* \in M$ , si y sólo si  $M$  es un conjunto con un solo elemento."

O sea, un teorema generalizado de alternancia de Tchebychev, del cual se infiere que el resultado final de la optimización no depende del peso que se emplee, simplemente porque el conjunto donde se optimiza contiene un solo elemento. Esto arroja luz sobre lo que puede ocurrir cuando se emplea legítimamente el teorema de KKT a pesar de violar otras hipótesis. Estos resultados fueron rápidamente analizados y extendidos internacionalmente en varias direcciones. En particular vea el trabajo posterior de Jiménez en colaboración con ideas del Dr. M. Todorov [30]. En el contexto de Estabilidad en la programación semi-infinita, vea también el trabajo previo de Jiménez con el Prof. J. J. Ruckmann [19].

El descubrimiento de una forma generalizada del teorema de alternancia de Tchebyshev, piedra angular de la Teoría de la Aproximación Polinomial Uniforme, condujo a Jiménez a regresar a esa temática. Comenzó por definir una nueva forma de aproximación polinomial, a la que denominó "*Aproximación por bandas de amplitudes variantes*". Situó la entonces estudiante de Maestría Ivonne Lilian Martínez Cortés, a trabajar su tesis de ella con él en el tema de esta aproximación. Los primeros resultados fueron publicados en [42]-[43]. Sin embargo, con el trabajo de investigación ya muy avanzado, descubrieron que este tipo de aproximación se podría alcanzar por otras dos vías diferentes e independientemente, pero equivalentes: Aproximación con pesos generalizados de Moursond, en Estados Unidos, y Aproximación por Normas Asímetricas de Krein (puede existir  $f$ , tal que  $\|-f\| \neq \|f\|$ ), en los antiguos Países del Este, que a su vez habían conducido a la introducción

de los denominados *funcionales sensibles al signo*. No obstante, el contar con un nuevo punto de vista permitió a Jiménez desarrollar exitosamente tres tesis de doctorado en el tema, con la alumna ya mencionada y actual doctora, y los también ahora doctores Margarito Morales y José Nobel Méndez. Vea los artículos publicados conjuntamente en [49], [48], y [54], sobre Aproximación polinomial asimétrica, Espacios de Hölder de funciones integrables con pesos asimétricos, y Aproximación racional asimétrica, respectivamente. Este último incluye una comparación entre los tres enfoques mencionados para definir la aproximación.

## Teoría de la Medida y su utilización.

El libro *Medida, Integración y Funcionales*, todavía vigente oficialmente en los planes de estudio cubanos y ya citado en la sección primera, contiene numerosos resultados de investigación distribuidos a lo largo de sus páginas. En particular dedica espacios a la transformación de problemas de integración al espacio de las funciones continuas sobre el Algebra de Boole Métrica. Resultados en esa dirección pueden encontrarse después en [55].

La referencia [18], citada anteriormente en otro contexto, contiene una presentación muy interesante de la integral de Riemann liberada de hipótesis de acotamiento.

La referencia [8], en colaboración con M. K. Potapov, citada en el contexto de aproximación de funciones continuas, merecería un estudio separado si dispusiéramos de espacio suficiente. La llamada Aproximación Angular en los antiguos países del Este, en esta presentación, corresponde a la aproximación mediante Sumas Booleanas. El mencionado artículo fue de los primeros en ese contexto y sirvió de punto de partida a investigadores de otros países. Por otra parte, mientras que la conmutatividad de la suma booleana se demostraba mediante productos tensoriales, Jiménez-Potapov emplearon el teorema de Fubini. Esto era un enfoque diferente pero debía de legitimizarse en el caso de espacios topológicos generales, pues conocido es que la  $\sigma$ -álgebra boreliana generada por una topología producto puede ser más amplia que la  $\sigma$ -álgebra producto de las respectivas  $\sigma$ -álgebras borelianas. Pero ¿qué sucede si se completan las estructuras medibles con las medidas topológicas involucradas? El problema de referencia se mantuvo abierto durante muchos años a la comunidad internacional bajo el nombre de *Problema de la Medida Producto* hasta que se resolvió negativamente. Pero la respuesta sí es positiva en el caso de los espacios métricos empleados en Aproximación. El problema fue cuidadosamente estudiado en [44] y de manera más general y abstracta en [47].

## Historia y Educación

No siempre se valora la investigación en Historia y Educación como merece, sin embargo ambos temas, íntimamente relacionados, son fundamentales en nuestro trabajo profesional. Como ya se comentó en la sección primera, Jiménez ha empleado muchísimas horas de investigación, de análisis y de discusión en reuniones en Cuba, México, España, y en reuniones internacionales, para recomendar orientaciones a los dirigentes educacionales y para la confección de planes y programas de estudio. En particular ha influido significativamente en los planes de estudio de los posgrados de Matemática de la FCFM-BUAP durante los últimos 25 años.

Aparte de los planes y programas escritos, cabe citar las contribuciones siguientes:

-Acuerdos internacionales tomados en el Congreso Internacional de Educación Matemática en Budapest 1988, para la política de desarrollo en el tercer nivel de Educación en países en vías de desarrollo (vea [55]).

-Encuestas, entrevistas y estudio de la incidencia en la actividad profesional de los ex-alumnos participantes en olimpiadas internacionales de Matemática. En colaboración con el Dr. Luis Davidson y otros profesores del Instituto Superior Pedagógico de Pinar del Río, Cuba (vea [56]).

-Historia y evolución de la Matemática de nivel superior en Cuba durante los primeros 30 años desde la apertura universitaria de manera independiente de esa carrera. Trabajo en conjunto con el Dr. C. Sánchez, de la U.H. (vea [57]).

- Contribución al estudio sobre la evolución cubana en el libro de la Matemática y su Enseñanza en los países americanos del sur. En colaboración con dos profesores cubano-mexicanos (vea [58]).

## Bibliografía

- [1] M. A. Jiménez Pozo, *Sur les opérateurs positifs et la méthode des fonctions tests*, C. R. Acad. Sc. Paris 278. Serie A. 1974. 149-152.
- [2] M. A. Jiménez Pozo, *Convergencia de operadores lineales y el método de las funciones de prueba*, Rev. Centro. Serie Matemática. Univ. de las Villas. No. 3. 1975. 67-72.
- [3] M. A. Jiménez Pozo, *On the convergence of sequences of linear operators* (Russian). Vestnik Moskovskovo Universiteta. Serie Math. 4 (1978) 7-15.
- [4] M. A. Jiménez Pozo, *Déformation de la convexité et théorèmes du type Kovo-kin*, C. R. Acad. Sc. Paris. Serie A. 290. 1978. 213-215.

- [5] M. A. Jiménez Pozo, *Aproximación polinomial en varias variables por medio de teoremas de tipo Korovkin*, Rev. Ciencias Matemáticas. Univ. de La Habana. Vol I. No. 1. 1980.
- [6] M. A. Jiménez Pozo y M. Baille Baldet, *Estimados del orden de convergencia de una sucesión de operadores lineales en espacios de funciones con peso*, Rev. Ciencias Matemáticas. Univ. de la Habana. Vol 2. No. 1. 1981. 16-28.
- [7] M. A. Jiménez Pozo, *Convergence of sequences of linear functionals*, Z.A.A.M. 61. 1981. 495-500.
- [8] M. A. Jiménez Pozo y M. K. Potapov, *Sobre la aproximación en espacios de funciones continuas*, Rev. Ciencias Matemáticas. Univ. de La Habana. Vol. 2. 1981. 101-110.
- [9] M. A. Jiménez Pozo, *Quantitative theorems of Korovkin type in bounded functions spaces*, Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory. Varna. 1981. 488-493.
- [10] M. A. Jiménez Pozo and F. Guerra, *A general recurrent formula for the Pareto vectorial optimization problem*, Jahrestagung "Mathematische Optimierung" Humboldt Univ. zu Berlin. Vortragsauszüge. 1982.
- [11] M. A. Jiménez Pozo, *Discretization of the Pareto vectorial optimization problem*, Z.A.A.M. 63. 1983. pag. 269.
- [12] M. A. Jiménez Pozo, *On the convergence of a sequence of operators or functionals on spaces of bounded functions*, Seminar on Harmonic Analysis 1983-1984. Publ. Math, Orsay. 85-2. Univ. Paris XI. Orsay. 1985. 148-172.
- [13] M. A. Jiménez Pozo and G. López, *Korovkin type theorems for certain classes of analytic functions*, Rev. Ciencias Matemáticas. Univ. de La Habana. Vol. 8. No. 2. 1987. 25-29.
- [14] M. A. Jiménez Pozo, *Modelación de las trayectorias de pozos inclinados de petróleo mediante splines paramétricos con extremos libres*, Rev. Ciencias Matemáticas. Univ. de La Habana. Vol. IX. No. 1. 1988. 13-18.
- [15] M. A. Jiménez Pozo, *On the trajectories of inclined oil-wells*, Lect. Notes in Mathematics 1354. Springer Verlag. 1988. 164-168.
- [16] M. A. Jiménez Pozo and E. López, *Teoremas cualitativos de tipo Korovkin en el espacio de las funciones Riemann integrables*, Rev. Ciencias Matemáticas. Univ. de la Habana. Vol XI. No. 2. 1990.

- [17] M. A. Jiménez Pozo, *Aproximación lineal y teoremas de tipo Korovkin*, Memorias del Seminario Internacional Avanzado en Teoría de Aproximación, Laredo. España. 1992. Editado por las Univ. Carlos III de Madrid y de Cantabria en Santander, 1994, 21-54.
- [18] M. A. Jiménez Pozo, J. Rückmann and E. López, *Sequential convergence in the space of absolutely Riemann integrable functions*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen (J. Analysis and its Applications) 13. 1994. 4. 567-576.
- [19] M. A. Jiménez Pozo and J. Rückmann, *On equivalent stability properties in semi-infinite optimization*, Zeitschrift für Operations Research. 41. 1995.
- [20] M. A. Jiménez Pozo and F. Guerra, *A semi-infinite programming approach to a mixed approximation problem*, Proceedings of the IV International Conference on Parametric Optimization. Univ. of Twente. The Netherlands, July 1995. Published by Peter Lang Series in Approximation and Optimization. 1997-
- [21] M. A. Jiménez Pozo and F. Guerra, *On feasible sets defined by polynomials Chebyshev approximation: The singleton case*, ZOR, Vol 47, Nr 2, 1998.
- [22] M. A. Jiménez Pozo, *Sobre la aproximación de funciones periódicas de Lipschitz por polinomios trigonométricos*, Asociación Venezolana de Matemáticas, Vol. 5, Nr 1 de 1998. 43-55.
- [23] M. A. Jiménez Pozo and J. Bustamante, *The degree of approximation in the Lipschitz norm by trigonometric polynomials*, Aportaciones Matemáticas. Serie Comunicaciones Nr. 25, 1999, 23-30.
- [24] M. A. Jiménez Pozo, *A new approach to Lipschitz spaces of integrable functions*, Aportaciones Matemáticas. Serie Comunicaciones Nr. 25, 1999, 153-157.
- [25] M. A. Jiménez Pozo and J. Bustamante, *Fourier series and convergence in Lipschitz norms*, Aportaciones Matemáticas. Serie Comunicaciones Nr. 25, 1999, 147-151.
- [26] M. A. Jiménez Pozo and J. Bustamante, *Chebyshev and Hölder approximation*, Aportaciones Matemáticas. Serie Comunicaciones Nr. 27, 2000, 147-151.
- [27] M. A. Jiménez Pozo and G. Martínez Guzmán *Equilipschitzian sets of Hölder integrable functions*, Aportaciones Matemáticas. Serie Comunicaciones Nr. 29, 2001, 55-60.

- [28] M. A. Jiménez Pozo and J. Bustamante, *Trends in Hölder approximation*, Proceedings of the 5th Int. Conf. on Approx. and Optimization in the Caribbean. Edited by Marc Lassonde. Physics Verlag. Alemania. 2001. 81-96.
- [29] M. A. Jiménez Pozo y J. Bustamante, *Series de Fourier y funciones de Lipschitz*, Margarita Mathematica en Memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández. Universidad de La Rioja, Logroño, España, 2001, 559-568.
- [30] M. A. Jiménez Pozo and M. Todorov, *Unicity of the solutions of infinite linear inequality systems*, Comptes-Rendus de l'Académie bulgare des Sciences Tome 54, Nr. 6, 2001, 17-20.
- [31] M. A. Jiménez Pozo, F. Guerra and E. de L. Juárez, *Transformation of some mixed approximation problems by optimization methods*, Optimization. Vol 51, Nrs 1-2, 2002.
- [32] M. A. Jiménez Pozo, *Characterization of the convergent sequences in a class of Banach spaces*, Comptes Rendus de l'Académie bulgare des Sciences. 55 Nr. 4, 2002, 13-16.
- [33] M. A. Jiménez Pozo, *A tauberian theorem for a class of function spaces*, Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza, Nr. 20, 2002, 77-85
- [34] M. A. Jiménez Pozo, *Espacios de Banach homogéneos y funciones de Hölder*, Memorias del Seminario Internacional de Teoría de la Aproximación, 50 Aniversario de la fundación de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la BUAP. Textos Científicos BUAP, 2003, 199-219
- [35] M. A. Jiménez Pozo and R. Linares, *Another approach to generalized Lipschitz spaces*, In Guddat, J. at al. Parametric Optimization and Related Topics. Serie Investigaciones, Aportaciones Matemáticas 18, 2004, 155-167.
- [36] M. A. Jiménez Pozo, *Convergence of Fourier series in Hölder norm*, Journal of Functional Analysis and Appl., (JAFA) Vol 1, nr. 1, 2006.
- [37] M. A. Jiménez Pozo y A. López, *Aplicaciones del álgebra de Boole métrica a la teoría de la medida*, Gaceta Matemática de la RSME. Vol 9.1, 2006, 59-68
- [38] M. A. Jiménez Pozo, D. Cárdenas and F. J. Muñoz *Some remarks on Hölder approximation by Bernstein polynomials*, Applied Mathematics Letters. 2006.
- [39] M. A. Jiménez Pozo, *The coefficient of convex deformation*, Memorias ENOAN 2006, Universidad de Tlaxcala, 2006, 304-310.

- [40] M. A. Jiménez Pozo, J. Bustamante and R. Linares, *Direct and inverse theorems in generalized Lipschitz spaces*, Automation Computers Applied Math. Vol. 15 (2006) No. 1, pages 7-15.
- [41] M. A. Jiménez Pozo and R. Linares, *A class of splines with constrained length*, Applied Math. Letters, Volumen 20, 2007.
- [42] M. A. Jiménez Pozo, *Varying amplitudes as measure of approximation*, Abstracts extendidos de MAMERN'07, Granada España, 2007.
- [43] M. A. Jiménez Pozo y I. L. Martínez, *Mejor aproximación polinomial en bandas no uniformes*, Tópicos de Teoría de la Aproximación II, 2007, 97-110.
- [44] M. A. Jiménez Pozo and Y. Martínez, *On the completion of the product of topological measures*, Tópicos de Teoría de la Aproximación II, 2007, 111-128,
- [45] M. A. Jiménez Pozo y R. Linares, *Teoremas directos e inversos en espacios de Lipschitz generalizados*, Tópicos de Teoría de la Aproximación II, 2007, 129-136.
- [46] M. A. Jiménez Pozo, *Study of Lipschitz trigonometric polynomial approximation in infinitely many variables and connectedness*, Automation Computers Applied Mathematics, vol. 18, 2009, 133-145.
- [47] M. A. Jiménez Pozo, *Another look at the product measure problem*, Real Analysis Exchange, 35 (2), 2009/2010, 493-500.
- [48] M. A. Jiménez Pozo and J. M. Hernández, *Asymmetric Hölder spaces of sign sensitive weighted integrable functions*, Communications in Math. And applications 3,. RGN Publications, 2012, 39-50.
- [49] M. A. Jiménez Pozo, I. L. Martínez, J. N. Méndez and V. M. Méndez *Generalized uniform weighted approximation of continuous functions from Haar spaces*, Tópicos de Teoría de la Aproximación IV, 2012, 125-139.
- [50] M. A. Jiménez Pozo and J. Bustamante, *Cheney and Sharma type operators and Korovkin test functions*, Jaen Journal Approx. December 2012 Vol 4 nr. 2, 137-156.
- [51] M. A. Jiménez Pozo and J. Bustamante, *Meyer-König and Zeller operators and some of their modifications*, Jaen Journal Approx. 2013 Vol 5. 101-177.

- [52] M. A. Jiménez Pozo and J. Bustamante, *Contributions to the study of polynomial approximation in Hölder spaces*, Matemáticas y sus Aplicaciones 3, BUAP, 2013, 5-24.
- [53] M. A. Jiménez Pozo, *Classification of the continuous translations in spaces of weighted integrable functions*, Matemática y sus Aplicaciones 7, Textos Científicos de la BUAP, 109-121.
- [54] M. A. Jiménez Pozo, I. L. Martínez and J. N. Méndez *Rational asymmetric approximation and normal functions*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation, and Convexity. Vol 15, 2017, 13-25.
- [55] M. A. Jiménez Pozo et al, *Third level education in development countries*. Proceedings of the Sixth International Congress of Mathematical Education (pags. 174-176), Malev, Hungry, 1988.
- [56] M. A. Jiménez Pozo et al, *International Mathematics Olympiad: Its influence on the development of the Cuban participants. Math. Competition*. Journal of the World Federation of National Comp. Australia. Vol. 3. No. 2. 1990. 28-34
- [57] M. A. Jiménez Pozo y C. Sánchez Fernández, *Panorama de la Matemática en Cuba*. Rev. Ciencias Matemáticas. Univ. de La Habana. Vol. 14. No. 2. 1993. 1-27.
- [58] M. A. Jiménez Pozo, Otilio B. Mederos, y José M. Sigarreta, *Cuba: The Mathematics and its Teaching*. Capítulo del libro The Mathematics and its Teaching, editado por la Univ. de Columbus, Series on Mathematics Education: Volume 10, World Scientific, 2015

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

jbusta@fcfm.buap.mx  
pdsoto@fcfm.buap.mx  
fmacias@fcfm.buap.mx

---

# Álgebra

---



## Capítulo 2

### Módulos Cuasi inyectivos y Cuasi proyectivos

Tania Gabriela Pérez Quijano\*, Iván Fernando Vilchis  
Montalvo\*\*, César Cejudo Castilla\*\*

\*Facultad de Ciencias, UNAM

\*\*FCFM, BUAP

#### Resumen

En este trabajo caracterizamos a los anillos para los que todo  $R$ -módulo cuasi inyectivo es cuasi proyectivo y todo  $R$ -módulo cuasi proyectivo es cuasi inyectivo. Esta clase de anillos resulta ser la de los anillos artinianos de ideales principales. Además, exponemos algunos teoremas clásicos de módulos cuasi inyectivos y cuasi proyectivos.

## 1 Introducción

Un anillo  $R$  es cuasi Frobenius si es artiniano izquierdo y autoinyectivo izquierdo. En 1967, Faith y Walker demostraron, en [3], que un anillo  $R$  es cuasi Frobenius, precisamente, cuando todo  $R$ -módulo proyectivo es inyectivo o, equivalentemente, cuando todo  $R$ -módulo inyectivo es proyectivo. En 1961, Johnson y Wong, en [14], generalizan el concepto de módulo inyectivo y definen módulo cuasi inyectivo. Por su parte, Wu y Jans en 1967, en [14], generalizan el concepto de módulo proyectivo y definen módulo cuasi proyectivo. Posteriormente, en 1969, Fuller demuestra, en [4], que un anillo  $R$  es artiniano de ideales principales si y solamente si todo  $R$ -módulo cuasi proyectivo es cuasi inyectivo. Finalmente, en 1970, Byrd demuestra, en [1], que todo  $R$ -módulo cuasi inyectivo es cuasi proyectivo, justamente, cuando  $R$  es un anillo artiniano de ideales principales. En este trabajo proporcionamos una demostración de los resultados de Fuller y Byrd diferente de las originales. Pero creemos que la principal virtud de este trabajo es aportar una demostración de este bello teorema, accesible para todo lector que cuente con conocimientos generales de la teoría de anillos y módulos, que se encuentra, por ejemplo, en [8].

En lo sucesivo,  $R$  denotará un anillo asociativo con unidad. Además, todos los  $R$ -módulos aquí considerados, serán  $R$ -módulos izquierdos. Como es usual, si  $N$  es un submódulo superfluo en  $M$ , lo denotaremos por  $N \ll M$ . Además, « $E(M)$ »

denotará a la cápsula inyectiva de un módulo  $M$ , y « $J(R)$ » indicará al radical de Jacobson del anillo  $R$ .

## 2 Módulos cuasi inyectivos.

**Definición 2.1.** Sean  $M$  y  $N$  dos módulos. Decimos que  $M$  es inyectivo si para todo submódulo  $L \leq N$ , se tiene que cualquier morfismo  $f : L \rightarrow M$  se puede extender a un morfismo  $g : N \rightarrow M$ . Es decir, para todo morfismo  $f : L \rightarrow M$  existe un morfismo  $g : N \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \hookrightarrow & N \\ & & \downarrow f & \swarrow g & \\ & & M & & \end{array}$$

**Definición 2.2.** Decimos que un módulo  $M$  es cuasi inyectivo si para todo submódulo  $N \leq M$ , se verifica que cualquier morfismo  $f : N \rightarrow M$  se puede extender a un endomorfismo de  $M$ . Es decir, para cualquier morfismo  $f : N \rightarrow M$ , existe un endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & M \\ & & \downarrow f & \swarrow g & \\ & & M & & \end{array}$$

Claramente todo módulo inyectivo es cuasi inyectivo y, por el Criterio de Baer,  $R$  es inyectivo como  $R$ -módulo izquierdo si y solo si es cuasi inyectivo. Sin embargo, no todo módulo cuasi inyectivo es inyectivo, como veremos más adelante, en el ejemplo 2.4.

Recordemos que un submódulo  $N \leq M$  es un sumando directo de  $M$  en caso de que exista un submódulo  $L \leq M$  tal que  $M = N \oplus L$ . Denotamos por  $N \leq_{\oplus} M$  que  $N$  sea sumando directo de  $M$ .

**Ejemplo 2.3.** Todo módulo semisimple es cuasi inyectivo.

*Demostración.* Sean  $M$  un módulo semisimple,  $N \leq M$  un submódulo y  $f : N \rightarrow M$  un morfismo. Como  $M$  es semisimple, entonces  $N \leq_{\oplus} M$ . Así que, podemos considerar  $L \leq M$  un submódulo tal que  $N \oplus L = M$ . Ahora, definamos el endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  por  $g = f\pi_N$ , donde  $\pi_N : M \rightarrow N$  es la proyección en  $N$ . De este modo, si  $n \in N$  e  $i : N \hookrightarrow M$  es la inclusión, entonces

$$g(i(n)) = g(n) = f(\pi_N(n)) = f(n).$$

Es decir,  $g$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 N \hookrightarrow & i & M \\
 f \downarrow & g \swarrow & \downarrow \pi_N \\
 M & \longleftarrow & N.
 \end{array}$$

Por lo tanto,  $M$  es cuasi inyectivo. □

Una consecuencia inmediata del ejemplo anterior es que todo módulo simple es cuasi inyectivo.

Recordemos que, si  $G$  es un grupo abeliano, decimos que  $G$  es divisible si para todo  $x \in G$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $y \in G$  tal que  $ny = x$ . También tengamos presente que los  $\mathbb{Z}$ -módulos divisibles son, precisamente, los  $\mathbb{Z}$ -módulos inyectivos.

**Ejemplo 2.4.** El  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\mathbb{Z}_p$  es cuasi inyectivo, pero no inyectivo, para todo  $p \in \mathbb{N}$  primo.

*Demostración.* El  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\mathbb{Z}_p$  con  $p \in \mathbb{N}$  primo, es simple y, en consecuencia, es cuasi inyectivo. Por otro lado, ningún grupo abeliano finito y distinto de cero puede ser divisible, como veremos posteriormente. Por lo tanto  $\mathbb{Z}_p$  no es inyectivo. □

Es bien conocido que una suma directa de dos módulos  $M$  y  $N$  es inyectiva si y solo si  $M$  y  $N$  lo son. Esto no se verifica para los módulos cuasi inyectivos, aunque una implicación sí se cumple, como veremos a continuación.

**Proposición 2.5.** *Sumandos directos de módulos cuasi inyectivo son cuasi inyectivos.*

*Demostración.* Sean  $M$  un módulo cuasi inyectivo y  $N \leq_{\oplus} M$  un sumando directo. Además, sean  $K \leq N$  un submódulo y  $f : K \rightarrow N$  un morfismo. Consideremos  $L \leq M$  un submódulo tal que  $N \oplus L = M$  y designemos  $i : K \hookrightarrow N$  y  $j : N \hookrightarrow M$  a las inclusiones correspondientes. Así que, como  $M$  es cuasi inyectivo, existe un endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{j} & M \\
 & & f \downarrow & & & \swarrow g & \\
 & & N & \xrightarrow{j} & M & & 
 \end{array}$$

Luego, podemos considerar al endomorfismo  $g|_N : N \rightarrow N$  la restricción de  $g$  en  $N$ . Notemos que este endomorfismo hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{j} & M \\
 & & \downarrow f & \searrow g|_N & \swarrow j & & \nearrow g \\
 & & N & \xrightarrow{j} & M & & 
 \end{array}$$

En cuyo caso,  $N$  es cuasi inyectivo. □

Como se sugirió antes, la suma directa de dos módulos cuasi inyectivos, no necesariamente resulta ser cuasi inyectiva. Más adelante veremos un ejemplo de este hecho, pero antes introduciremos algunos resultados clásicos de teoría de grupos que nos servirán para este fin.

**Lema 2.6.** *Si  $M$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo simple, entonces  $M \cong \mathbb{Z}_p$  para algún  $p \in \mathbb{N}$  primo.*

**Lema 2.7.** *Sean  $G$  y  $H$  grupos abelianos y  $f : G \rightarrow H$  un morfismo de grupos. Si  $G$  es divisible, entonces  $f(G)$  es divisible.*

*Demostración.* Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $y \in f(G)$ . Entonces existe  $x \in G$  tal que  $f(x) = y$ . Además, como  $G$  es divisible, existe  $z \in G$  tal que  $nz = x$ , de modo que,  $y = f(nz) = nf(z)$ . En consecuencia,  $f(G)$  es divisible. □

**Lema 2.8.** *Todo grupo abeliano divisible no trivial es infinito.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo abeliano divisible no trivial. Supongamos que  $G$  es finito de orden  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $0 \neq x \in G$ . Como  $G$  es divisible, entonces existe  $y \in G$  tal que  $ny = x$ , pero esto es una contradicción pues  $n$  es el orden del grupo, es decir,  $ng = 0$  para toda  $g \in G$ . La contradicción muestra que  $G$  es infinito. □

**Proposición 2.9.** *Si  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  con  $p \in \mathbb{N}$  primo, es un morfismo, entonces  $f$  es el morfismo cero.*

*Demostración.* Sea  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  un morfismo de grupos. Supongamos que  $f$  es distinto al morfismo cero. Como  $\mathbb{Q}$  es divisible, por el Lema 2.7,  $f(\mathbb{Q})$  es divisible. Además, como  $f$  no es el morfismo cero, entonces  $f(\mathbb{Q}) \neq \{0\}$ , así que, por el Lema 2.8,  $f(\mathbb{Q})$  es infinito. Pero  $f(\mathbb{Q}) \leq \mathbb{Z}_p$  y  $\mathbb{Z}_p$  es finito. Esto es una contradicción. Se sigue que  $f$  es el morfismo cero. □

**Ejemplo 2.10.** El  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$  con  $p \in \mathbb{N}$  primo, no es cuasi inyectivo.

*Demostración.* Primero notemos que  $\mathbb{Q}$  es divisible y, por lo tanto, inyectivo. Además,  $\mathbb{Z}_p$  es simple. Resulta entonces que  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Z}_p$  son  $\mathbb{Z}$ -módulos cuasi inyectivos. Ahora, consideremos la inclusión  $j : \{0\} \oplus \mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ , y el morfismo  $h : \mathbb{Z} \oplus \{0\} \rightarrow \{0\} \oplus \mathbb{Z}_p$  tal que  $h((z, \bar{0})) = (0, \bar{z})$ . Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \oplus \{\bar{0}\} & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p \\ \downarrow f & & \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p & & \end{array}$$

donde  $i : \mathbb{Z} \oplus \{\bar{0}\} \hookrightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$  es la inclusión y  $f : \mathbb{Z} \oplus \{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$  es el morfismo definido por  $f = jh$ . Veremos que el morfismo  $f$  no se puede extender a un endomorfismo de  $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ , y con esto quedará demostrado que  $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$  no es cuasi inyectivo. Supongamos lo contrario, es decir, que existe un endomorfismo  $g : \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$  tal que  $gi = f$ . Notemos que  $g$  no es el morfismo cero pues si tomamos  $z_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $p \nmid z_0$ , entonces  $(z_0, 0) \in \mathbb{Q} \oplus \{0\}$ , luego

$$g((z_0, 0)) = gi((z_0, 0)) = f((z_0, 0)) = (0, \bar{z}_0) \neq \bar{0}.$$

Ahora, consideremos la inclusión  $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$  y la proyección  $\pi : \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$ , y definamos el morfismo  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  por  $\varphi = \pi g \iota$ . Observemos que

$$\varphi(z_0) = \pi(g(\iota(z_0))) = \pi(g((z_0, 0))) = \pi((0, \bar{z}_0)) = \bar{z}_0 \neq \bar{0}.$$

Así que,  $\varphi$  es distinto al morfismo cero, lo que contradice la Proposición 2.9. Esto demuestra que  $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$  no es cuasi inyectivo.  $\square$

**Definición 2.11.** Sea  $R$  un anillo. Si ocurre que todo  $R$ -módulo izquierdo cuasi inyectivo es inyectivo, entonces diremos que  $R$  es un anillo  $QI$ .

**Teorema 2.12.** Son equivalentes, para un anillo  $R$ , las siguientes condiciones:

- i)  $R$  es  $QI$ ,
- ii) La suma directa de cualesquiera dos  $R$ -módulos cuasi inyectivos es cuasi inyectiva.

*Demostración.*  $i) \Rightarrow ii)$  Sean  $M$  y  $N$   $R$ -módulos cuasi inyectivos. Luego, por hipótesis,  $M$  y  $N$  son inyectivos, por lo que  $M \oplus N$  es inyectivo y, en consecuencia, es cuasi inyectivo.

$ii) \Rightarrow i)$  Sean  $M$  un  $R$ -módulo cuasi inyectivo y  $E(M)$  su cápsula inyectiva. Entonces, por hipótesis,  $M \oplus E(M)$  es cuasi inyectivo. Consideremos las inclusiones

respectivas  $i : M \hookrightarrow E(M)$ ,  $j_1 : M \hookrightarrow M \oplus E(M)$  y  $j_2 : E(M) \hookrightarrow M \oplus E(M)$ . Además, tomemos  $\pi_1 : M \oplus E(M) \rightarrow M$  el epimorfismo tal que  $\pi_1 j_1 = Id_M$ . Dado que  $M \oplus E(M)$  es cuasi inyectivo, entonces existe  $g \in End(M \oplus E(M))$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xhookrightarrow{i} & E(M) & \xhookrightarrow{j_2} & M \oplus E(M) \\
 & & \downarrow j_1 & & & \swarrow g & \\
 & & M \oplus E(M) & & & & 
 \end{array}$$

Ahora, definamos el morfismo  $f : E(M) \rightarrow M$  por  $f = \pi_1 g j_2$ . Entonces

$$f i = (\pi_1 g j_2) i = \pi_1 (g j_2 i) = \pi_1 j_1 = Id_M.$$

De modo que  $f$  se escinde. Así pues,  $M$  es un sumando directo de  $E(M)$  y, en consecuencia,  $M$  es inyectivo. Por lo tanto,  $R$  es  $QI$ .  $\square$

**Definición 2.13.** Sea  $R$  un anillo. Decimos que  $R$  es  $V$ -anillo izquierdo si todo  $R$ -módulo simple izquierdo es inyectivo.

El siguiente teorema es un resultado clásico de la teoría de módulos que el lector podrá consultar en [11, Teorema 3.75].

**Teorema 2.14.** Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo  $R$ :

- i)  $R$  es  $V$ -anillo izquierdo,
- ii)  $Rad(M) = \{0\}$ , para todo  $R$ -módulo  $M$ .

**Corolario 2.15.** Sea  $R$  un anillo. Si  $R$  es  $QI$ , entonces  $R$  es noetheriano izquierdo y  $V$ -anillo izquierdo.

*Demostración.* Si  $S$  es un  $R$ -módulo simple, entonces es cuasi inyectivo. Luego, por hipótesis, es inyectivo. Por consiguiente,  $R$  es un  $V$ -anillo. Por otro lado, sea  $M = \oplus_{i \in I} E(S_i)$ , donde  $I$  es un conjunto y  $S_i$  es simple, para toda  $i \in I$ . Dado que  $R$  es un  $V$ -anillo, entonces  $E(S_i) = S_i$ , para todo  $i \in I$ , por ello  $M = \oplus_{i \in I} S_i$ . Por lo tanto  $M$  es semisimple, lo que implica, que es cuasi inyectivo. En consecuencia,  $M$  es inyectivo. Luego, por [8, Teorema 6.5.1],  $R$  es noetheriano izquierdo.  $\square$

**Proposición 2.16.** Sea  $R$  un anillo. Si  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi inyectivo y existe un submódulo  $N \leq M$  tal que  $N \cong R$ , entonces  $M$  es inyectivo.

*Demostración.* Sean  $I \leq R$  un ideal izquierdo y  $f : I \rightarrow M$  un morfismo. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $R$  es un submódulo de  $M$ . Dicho esto, consideremos las inclusiones  $i : I \hookrightarrow R$  y  $j : R \hookrightarrow M$ . Luego, como  $M$  es cuasi inyectivo, entonces existe un endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que  $gji = f$ . Tomemos  $g|_R : R \rightarrow M$  la restricción de  $g$  en  $R$ . Resulta que  $g|_R$  hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R & \xrightarrow{j} & M \\
 & & \downarrow f & \searrow g|_R & \searrow g & \dashrightarrow & \\
 & & & & & & M
 \end{array}$$

Lo que equivale, a saber, a que  $M$  sea inyectivo.  $\square$

**Definición 2.17.** Decimos que un anillo  $R$  es autoinyectivo izquierdo si es inyectivo como  $R$ -módulo izquierdo ( ${}_R R$  es inyectivo).

**Definición 2.18.** Sea  $R$  un anillo. Decimos que  $R$  es cuasi Frobenius si es noetheriano izquierdo y autoinyectivo izquierdo.

**Teorema 2.19.** Para un anillo  $R$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $R$  es semisimple,
- ii)  $R$  es autoinyectivo y  $QI$ ,
- iii) Todo  $R$ -módulo es cuasi inyectivo,
- iv) Todo  $R$ -módulo finitamente generado es cuasi inyectivo,
- v) Todo  $R$ -módulo generado por dos elementos es cuasi inyectivo.

*Demostración.*  $i) \Rightarrow iii)$  Es claro, pues si asumimos que  $R$  es semisimple, entonces todo  $R$ -módulo es inyectivo y, por lo tanto, cuasi inyectivo.

$iii) \Rightarrow iv)$  Es claro.

$iv) \Rightarrow v)$  Es claro.

$v) \Rightarrow i)$  Sea  $M$  un  $R$ -módulo cíclico. De la hipótesis resulta que  ${}_R R \oplus M$  es cuasi inyectivo. Así, por la Proposición 2.16, tenemos que  $M$  es inyectivo. De modo que todo  $R$ -módulo cíclico es inyectivo. Concluimos que  $R$  es semisimple. Ver [11, Corolario 6.47].

$iii) \Rightarrow ii)$  Por hipótesis  ${}_R R$  es cuasi inyectivo, entonces, por el Lema de Baer,  $R$  es autoinyectivo. Además, por la hipótesis,  $M \oplus N$  resulta ser cuasi inyectivo para cualesquiera  $M$  y  $N$   $R$ -módulos, particularmente si  $M$  y  $N$  son cuasi inyectivos. De modo que  $R$  es  $QI$ , según el Teorema 2.12.

$ii) \Rightarrow i)$  Por el Corolario 2.15,  $R$  es  $V$ -anillo noetheriano izquierdo. En virtud de ello,  $R$  es inyectivo izquierdo y noetheriano izquierdo o, en otras palabras,  $R$  es cuasi Frobenius. De ahí que  $R$  es artiniiano [8, Proposición 13.2.3]. Pero además, como  $R$  es  $V$ -anillo, entonces  $J(R) = \{0\}$ . En consecuencia  $R$  es semisimple.  $\square$

**Lema 2.20.** *Sea  $R$  un anillo e  $I \leq R$  un ideal bilateral. Entonces  $M$  es un  $R/I$ -módulo si y solo si  $M$  es un  $R$ -módulo tal que  $IM = \{0\}$ .*

*Demostración.*  $(\Rightarrow)$  Si  $M$  es un  $R/I$  módulo, entonces  $M$  es un  $R$ -módulo con el producto  $\cdot : R \times M \rightarrow M$  dado por  $r \cdot m = (r + I)m$ . Así que, si  $r \in I$  y  $m \in M$ , entonces  $r \cdot m = (r + I)m = (0 + I)m = 0$ . Se sigue que  $IM = \{0\}$ .

$(\Leftarrow)$  Definamos el producto  $\cdot : R/I \times M \rightarrow M$  por  $(r + I) \cdot m = rm$ , para cualesquiera  $r \in R$ ,  $m \in M$ . Además, consideremos  $r, r' \in R$  tales que  $r + I = r' + I$ . Entonces  $rm = (r + I) \cdot m = (r' + I) \cdot m = r'm$ , para toda  $m \in M$ . De modo que,  $(r - r') \in I$ , luego  $(r - r') \cdot m = 0$ , para toda  $m \in M$ . Así que  $rm = r'm$ , para toda  $m \in M$ . Es decir, que el producto está bien definido. Por lo tanto,  $M$  es un  $R/I$ -módulo.  $\square$

**Lema 2.21.** *Sean  $R$  un anillo e  $I \leq R$  un ideal bilateral. Si  $M$  es un  $R/I$ -módulo inyectivo, entonces  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi inyectivo.*

*Demostración.* Sean  $N \leq M$  un submódulo y  $f : N \rightarrow M$  un  $R$ -morfismo. Como  $IN \leq IM = \{0\}$ , entonces  $IN = \{0\}$ . Luego, por el Lema 2.20,  $N$  es un  $R/I$ -módulo. Notemos que  $f$  es un  $R/I$ -morfismo. En efecto, si  $r \in R$  y  $n \in N$ , entonces

$$f((r + I)n) = f(rn) = rf(n) = (r + I)f(n).$$

Además,  $M$  es un  $R/I$ -módulo inyectivo, así que existe un  $R/I$ -endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & R/I N \hookrightarrow R/I M \\ & & \downarrow f \quad \swarrow g \\ & & R/I M \end{array}$$

Pero  $g$  es a su vez un  $R$ -morfismo, ya que

$$g(rm) = g((r + I)m) = (r + I)g(m) = rg(m).$$

De tal suerte, que  $f$  se puede extender como  $R$ -morfismo a un  $R$ -endomorfismo de  $M$ , a saber,  $g$ . Esto evidencia, que  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi inyectivo.  $\square$

**Lema 2.22.** *Sea  $R$  un anillo e  $I \leq R$  un ideal bilateral. Entonces  $M$  es un  $R/I$ -módulo cuasi inyectivo si y solo si  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi inyectivo tal que  $IM = \{0\}$ .*

*Demostración.*  $(\Rightarrow)$  Esta demostración es semejante a la del Lema 2.21.

$(\Leftarrow)$  Sea  $N \leq M$  un  $R/I$ -submódulo y  $f : M \rightarrow M$  un  $R/I$ -morfismo. Notemos que, por el Lema 2.20,  $N$  es un  $R$ -módulo tal que  $IN = \{0\}$ . Notemos también que  $f$  es un  $R$ -morfismo, ya que, para cada  $n \in N$  y  $r \in R$ , ocurre que

$$f(rn) = f((r + I)n) = (r + I)f(n) = rf(n).$$

Así, como  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi inyectivo, existe un  $R$ -endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & M \\ & & \downarrow f & \nearrow g & \\ & & M & & \end{array}$$

Sin embargo, como  $IM = \{0\}$  por hipótesis, entonces  $M$  es un  $R/I$ -módulo, en vista del Lema 2.20. Además,  $g$  es también un  $R/I$ -morfismo, pues

$$g((r + I)n) = g(rn) = rg(n) = (r + I)g(n).$$

Es decir,  $f$  se extiende como  $R/I$ -morfismo mediante el  $R/I$ -endomorfismo  $g$ . Concluimos que  $M$  es un  $R/I$ -módulo cuasi inyectivo.  $\square$

Recordemos que, si  $M$  es un módulo y  $N \leq M$  un submódulo, decimos que  $N$  es fuertemente invariante en  $M$  si para todo  $f \in \text{End}(M)$ , se verifica que  $f(N) \subseteq N$ .

**Teorema 2.23.** *Sea  $M$  un módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i)  $M$  es cuasi inyectivo,*
- ii)  $M$  es fuertemente invariante en  $E(M)$ .*

*Demostración.*  $i) \Rightarrow ii)$  Sean  $f \in \text{End}(E(M))$  y  $N \leq M$  el submódulo definido por  $N = \{x \in M \mid f(x) \in M\}$ . Consideremos  $f|_N$  la restricción de  $f$  en  $N$  y tomemos  $i : N \hookrightarrow M$  y  $j : M \hookrightarrow E(M)$  las inclusiones concernientes. Como  $M$  es cuasi inyectivo, entonces existe un endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que el siguiente

diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{j} & E(M) \\
 & & \downarrow f|_N & \swarrow g & & & \\
 & & M & & & & \\
 & & \downarrow j & & & \swarrow f & \\
 & & E(M) & & & & 
 \end{array}$$

Además, si  $y \in M \cap (f|_M - g)(M)$ , entonces  $f(m) = y + g(m) \in M$ , para algún  $m \in M$ . Luego  $m \in N$  y, por tanto,  $f(m) = g(m)$ . Así que  $y = 0$ . Esto demuestra que  $M \cap (f|_M - g)(M) = \{0\}$ , y como  $M$  es esencial en  $E(M)$ , se tiene que  $f(M) = g(M) \subseteq M$ .

$ii) \Rightarrow i)$  Sean  $N \leq M$  un submódulo y  $h : N \rightarrow M$  un morfismo. Consideremos  $i : N \hookrightarrow M$  y  $j : M \hookrightarrow E(M)$  las inclusiones correspondientes. Luego, como  $E(M)$  es inyectivo, entonces existe un endomorfismo  $g : E(M) \rightarrow E(M)$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{j} & E(M) \\
 & & \downarrow h & & & & \\
 & & M & & & & \\
 & & \downarrow j & & & \swarrow g & \\
 & & E(M) & & & & 
 \end{array}$$

Luego, podemos considerar  $g|_M : M \rightarrow M$  la restricción de  $g$  en  $M$ . Este endomorfismo hace que conmute el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{j} & E(M) \\
 & & \downarrow h & \swarrow g|_M & & & \\
 & & M & & & & \\
 & & \downarrow j & & & \swarrow g & \\
 & & E(M) & & & & 
 \end{array}$$

Lo que demuestra que  $M$  es cuasi inyectivo. □

**Teorema 2.24.** *Si  $M$  es un módulo cuasi inyectivo, entonces  $M^{(n)}$  es cuasi inyectivo, para toda  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sea  $f : E(M^{(n)}) \rightarrow E(M^{(n)})$  un endomorfismo. Consideremos  $i_k : E(M) \hookrightarrow E(M^{(n)})$  la  $k$ -ésima inclusión y  $\pi_k : E(M^{(n)}) \twoheadrightarrow E(M)$  la  $k$ -ésima proyección. Naturalmente

$$\sum_{j=1}^n i_j \pi_j = Id_{E(M^{(n)})}.$$

Así que, si  $m \in M^{(n)}$ , entonces

$$\pi_k f(m) = \pi_k f \left( \sum_{j=1}^n i_j \pi_j(m) \right) = \sum_{j=1}^n (\pi_k f i_j)(\pi_j(m)).$$

Ahora, notemos que  $\pi_k f i_j \in \text{End}(E(M))$  y que  $\pi_j(m) \in M$ , para toda  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Así que,  $(\pi_k f i_j)(\pi_j(m)) \in M$ , para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Luego  $f(m) \in M^{(n)}$ . Esto demuestra que  $f(M^{(n)}) \subseteq M^{(n)}$ . Entonces, por el Teorema 2.23,  $M^{(n)}$  es cuasi inyectivo, para toda  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

### 3 Módulos cuasi proyectivos.

**Definición 3.1.** Decimos que un módulo  $M$  es proyectivo si para cualesquiera módulos  $N$  y  $L$ , y para todo epimorfismo  $q : L \twoheadrightarrow N$ , se verifica que cualquier morfismo  $f : M \rightarrow N$ , se puede extender a un morfismo  $g : M \rightarrow L$ . Es decir, para cualquier morfismo  $f : M \rightarrow N$ , existe un morfismo  $g : M \rightarrow L$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow g & \downarrow f \\ L & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

**Definición 3.2.** Decimos que un módulo  $M$  es cuasi proyectivo si para todo módulo  $N$  y para todo epimorfismo  $q : M \twoheadrightarrow N$ , se tiene que, cualquier morfismo  $f : M \rightarrow N$ , se puede extender a un endomorfismo de  $M$ . Es decir, para cualquier morfismo  $f : M \rightarrow N$ , existe un endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow g & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

Es claro que todo módulo proyectivo es cuasi proyectivo. También los módulos semisimples y, por lo tanto, los módulos simples, son cuasi proyectivos. A continuación vamos a estudiar un resultado que nos va ayudar a demostrar ese hecho.

**Lema 3.3.** Sean  $M$  y  $N$  módulos, y  $f : M \rightarrow N$  un morfismo. Si  $Núcl(f) \leq_{\oplus} M$ , entonces existe un morfismo  $h : Im(f) \rightarrow M$  tal que  $fh = Id_{Im(f)}$ .

*Demostración.* Sea  $N \leq M$  un submódulo tal que  $Núcl(f) \oplus N = M$ . Consideremos  $f|_N : N \rightarrow N$  la restricción de  $f$  en  $N$ . Luego, si  $m \in M$  donde  $m = a + b$  con  $a \in Ker(f)$  y  $b \in N$ , entonces

$$f(m) = f(a) + f(b) = 0 + f(b) = f|_N(b).$$

Por lo tanto,  $f|_N$  es un morfismo de  $N$  en  $Im(f)$ , más aun,  $f|_N$  es un epimorfismo. Por otro lado,  $Núcl(f|_N) = Núcl(f) \cap N = \{0\}$ , es decir,  $f|_N$  es un monomorfismo. Se tiene que  $f|_N$  es un isomorfismo. Entonces podemos considerar  $h : Im(f) \rightarrow M$  con  $h = f|_N^{-1}$ . En efecto,  $fh = Id_{Im(f)}$ .  $\square$

**Ejemplo 3.4.** Todo módulo semisimple es cuasi proyectivo.

*Demostración.* Supongamos que  $M$  es un módulo semisimple,  $N$  un módulo,  $f : M \rightarrow N$  un morfismo y  $q : M \rightarrow N$  un epimorfismo. Como  $M$  es semisimple, entonces  $Núcl(q) \leq_{\oplus} M$ . Luego, por el Lema 3.3, existe un morfismo  $h : Im(q) \rightarrow M$  tal que  $qh = Id_{Im(q)}$ . Pero  $q$  es un epimorfismo, así que,  $Im(q) = N$ . Describimos la situación con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} N & \xleftarrow{f} & M \\ \downarrow h & & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

Ahora, si definimos el endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  por  $g = hf$ , tenemos que:

$$qg = q(hf) = (qh)f = (Id_N)f = f.$$

Es decir,  $g$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \swarrow g & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

Esto demuestra que  $M$  es cuasi proyectivo.  $\square$

Habiamos mencionado que los módulos proyectivos son cuasi proyectivos, sin embargo, no todos los módulos cuasi proyectivos son proyectivos, como lo establece el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.5.** El  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\mathbb{Z}_2$  es cuasi proyectivo pero no proyectivo.

*Demostración.* Como  $\mathbb{Z}_2$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo simple, en efecto, es un  $\mathbb{Z}$ -módulo cuasi proyectivo. Ahora, supongamos que  $\mathbb{Z}_2$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo proyectivo, y consideremos el  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\mathbb{Z}_4$  y el endomorfismo identidad de  $\mathbb{Z}_2$ . Además, consideremos el epimorfismo  $q : \mathbb{Z}_4 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$  tal que  $q(\bar{0}) = q(\bar{2}) = \bar{0}$  y  $q(\bar{1}) = q(\bar{3}) = \bar{1}$ . Notemos que  $q$  es el único epimorfismo de  $\mathbb{Z}_4$  a  $\mathbb{Z}_2$ . Luego, por hipótesis, existe un morfismo  $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{Z}_2 & \\
 f \swarrow & & \downarrow Id_{\mathbb{Z}_2} \\
 \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{q} & \mathbb{Z}_2
 \end{array}$$

Así que  $qf = Id_{\mathbb{Z}_2}$ . Sin embargo,  $\bar{1} \in \mathbb{Z}_4$  es un elemento de orden 2, luego  $f(\bar{1}) \in \mathbb{Z}_2$  es de orden 2, pero el único elemento de orden 2 en  $\mathbb{Z}_2$ , es  $\bar{2}$ , por lo tanto,  $f(\bar{1}) = \bar{2} = \bar{0}$ . Entonces,

$$\bar{1} = Id_{\mathbb{Z}_2}(\bar{1}) = qf(\bar{1}) = q(f(\bar{1})) = q(\bar{2}) = \bar{0},$$

lo que es una contradicción. De esta contradicción se sigue que  $\mathbb{Z}_2$  no es proyectivo. □

**Proposición 3.6.** *Sumandos directos de módulos cuasi proyectivos son cuasi proyectivos.*

*Demostración.* Consideremos un módulo cuasi proyectivo  $M$  y un sumando directo  $N \leq_{\oplus} M$ . Además, sean  $L$  un módulo,  $q : N \twoheadrightarrow L$  un epimorfismo y  $f : N \rightarrow L$  un morfismo. Adicionalmente, consideremos el morfismo  $f\pi_N : M \rightarrow L$  y el epimorfismo  $q\pi_N : M \twoheadrightarrow L$ , donde  $\pi_N : M \twoheadrightarrow N$  es la proyección. Luego, como  $M$  es cuasi proyectivo y  $q\pi_N$  es un epimorfismo, entonces existe un endomorfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & M \\
 & & & & \downarrow \pi_N \\
 & & & & N \\
 & & & & \downarrow f \\
 & & g \swarrow & & L \\
 M & \xrightarrow{\pi_N} & N & \xrightarrow{q} & L
 \end{array}$$

Luego, si  $g|_N$  es la restricción de  $g$  en  $N$ , entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & M & \\
 & & & \downarrow \pi_N & \\
 & & g & & N \\
 & & \swarrow & & \downarrow f \\
 M & \xrightarrow{\pi_N} & N & \xrightarrow{q} & L
 \end{array}$$

Por consiguiente,  $N$  es cuasi proyectivo. □

**Teorema 3.7.** *Si  $R$  es un anillo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i)  $R$  es semisimple,*
- ii)  $R \oplus S$  es cuasi proyectivo para todo  $R$ -módulo simple  $S$ ,*
- iii) Suma directa de cualesquiera dos  $R$ -módulos cuasi proyectivos es cuasi proyectiva,*
- iv) Suma directa de cualesquiera dos  $R$ -módulos cuasi proyectivos finitamente generados es cuasi proyectiva.*

*Demostración.* *i)  $\Rightarrow$  iii)* Como  $R$  es semisimple, todo  $R$ -módulo es proyectivo y, por tanto, cuasi proyectivo.

*iii)  $\Rightarrow$  iv)* Es claro.

*iv)  $\Rightarrow$  ii)* Se sigue del hecho de que  $R$  y  $S$  son  $R$ -módulos cuasi proyectivos finitamente generados.

*ii)  $\Rightarrow$  i)* Sean  $S$  un módulo simple y  $\pi_1 : R \oplus S \twoheadrightarrow R$  y  $\pi_2 : R \oplus S \twoheadrightarrow S$  las proyecciones correspondientes. Consideremos  $q : R \twoheadrightarrow S$  un epimorfismo que existe por ser  $S$  simple e  $i_2 : S \hookrightarrow R \oplus S$  la inclusión correspondiente. Luego, como  $R \oplus S$  es cuasi proyectivo, entonces existe un endomorfismo  $g : R \oplus S \rightarrow R \oplus S$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & R \oplus S & \\
 & & & \downarrow \pi_2 & \\
 & & g & & S \\
 R \oplus S & \xrightarrow{\pi_1} & R & \xrightarrow{q} & S
 \end{array}$$

Ahora, definamos el morfismo  $f : S \rightarrow R$  por  $f = \pi_1 g i_2$ . Entonces

$$qf = q(\pi_1 g i_2) = (q\pi_1 g)i_2 = \pi_2 i_2 = Id_S.$$

Es decir, el morfismo  $f$  se escinde y, por lo tanto,  $S$  es un sumando directo de  $R$ . Se concluye que todo  $R$ -módulo simple es proyectivo y, esto implica, que  $R$  es semisimple. Ver [13, 20.7].  $\square$

**Definición 3.8.** Sean  $M$  y  $N$  módulos. Decimos que un módulo  $P$  es proyectivo respecto a  $M$  si para todo epimorfismo  $q : M \twoheadrightarrow N$  y para todo morfismo  $f : P \rightarrow N$ , existe un morfismo  $g : P \rightarrow M$  tal que  $qg = f$ .

**Teorema 3.9.** Sean  $R$  un anillo y  $\mathcal{C} \subseteq R\text{-Mod}$  una clase de módulos tal que para todo  $M \in R\text{-Mod}$ , existen un módulo  $C \in \mathcal{C}$  y un monomorfismo  $f : M \rightarrow C$ . Si un  $R$ -módulo  $P$  es proyectivo respecto a la clase  $\mathcal{C}$ , es decir,  $P$  es proyectivo respecto a  $C$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $P$  es proyectivo.

*Demostración.* Sea  $N \leq M$  un submódulo y  $f : P \rightarrow M/N$  un morfismo. Consideremos  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $M \cong M'$  para algún  $M' \leq C$ . Entonces podemos decir, sin pérdida de generalidad, que  $M/N \leq C/N$ . Luego, como  $P$  es proyectivo con respecto a la clase  $\mathcal{C}$ , entonces existe un morfismo  $g : P \rightarrow C$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 & \swarrow \text{---} & \downarrow f \\
 & & M/N \\
 & \swarrow g & \downarrow i \\
 C & \xrightarrow{\pi} & C/N
 \end{array}$$

donde  $i : M/N \hookrightarrow C/N$  es la inclusión y  $\pi : C \twoheadrightarrow C/N$  es el epimorfismo natural. Por otro lado, sea  $x \in P$  y supongamos que  $f(x) = c + N$  con  $c \in M$ . Entonces

$$g(x) + N = \pi(g(x)) = (\pi g)(x) = (if)(x) = i(f(x)) = f(x) = c + N.$$

Por lo tanto,  $(g(x) - c) \in N$ . Pero  $c \in M$ , luego  $((g(x) - c) + c) \in M$ , es decir,  $g(x) \in M$ . De modo que,  $g(P) \leq M$ . Ahora, si  $g|_M : P \rightarrow M$  es el morfismo  $g$  correstricto a  $M$  y  $\pi|_M : M \twoheadrightarrow M/N$  el epimorfismo  $\pi$  restringido a  $M$ , entonces, para toda  $p \in P$ , se verifica que

$$\pi|_M(g|_M)(p) = \pi|_M(g(p)) = \pi(g(p)) = if(p) = f(p).$$

Es decir,  $\pi|_M(g|_M) = f$ . Por lo tanto,  $g|_M$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 g|_M \swarrow & & \downarrow f \\
 M & \xrightarrow{\pi|_M} & M/N
 \end{array}$$

Y en consecuencia,  $P$  es proyectivo.  $\square$

**Corolario 3.10.** *Sea  $M$  un módulo. Si  $M$  es proyectivo respecto a la clase de los módulos inyectivos, entonces  $M$  es proyectivo.*

**Teorema 3.11.** *Sean  $M$  y  $N$  dos módulos. Si  $N \oplus M$  es cuasi proyectivo para todo módulo inyectivo  $N$ , entonces  $M$  es proyectivo.*

*Demostración.* Por el Corolario 3.10, para demostrar que  $M$  es proyectivo, basta con completar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow f & \\ N & \xrightarrow{\pi} & N/K. \end{array}$$

donde  $N$  es un módulo inyectivo,  $K \leq N$  es un submódulo y  $\pi : N \twoheadrightarrow N/K$  es el epimorfismo natural. Para ello, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & N \oplus M & \\ & \downarrow \bar{f} & \\ N \oplus M & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \frac{N \oplus M}{K \oplus \{0\}}. \end{array}$$

donde  $\bar{\pi}$  es el epimorfismo natural y el morfismo  $\bar{f} : N \oplus M \rightarrow N \oplus M / (K \oplus \{0\})$  es tal que  $\bar{f}((n, m)) = (x, 0) + K \oplus \{0\}$ , para todo  $(n, m) \in N \oplus M$  con  $x \in N$  tal que  $x + K = f(m)$ . Por otro lado como  $N \oplus M$  es cuasi inyectivo, entonces existe un endomorfismo  $\bar{h} : N \oplus M \rightarrow N \oplus M$  tal que  $\bar{\pi}\bar{h} = \bar{f}$ . Así que, si  $(0, m) \in N \oplus M$ ,  $x \in N$  y  $f(m) = \pi(x)$ , entonces  $\bar{\pi}\bar{h}((0, m)) = \bar{f}((0, m)) = (x, 0) + K \oplus \{0\}$ , es decir,  $\bar{h}((0, m)) + K \oplus \{0\} = (x, 0) + K \oplus \{0\}$ , entonces  $\bar{h}((0, m)) - (x, 0) \in K \oplus \{0\}$ . Luego, si asumimos que  $\bar{h}((0, m)) = (n', m')$ , entonces  $n' - x \in K$ . Así que, si  $\pi_N : N \oplus M \twoheadrightarrow N$  es la proyección en  $N$ , se tiene que

$$\pi(\pi_N \bar{h}((0, m))) = \pi(n') = n' + K = x + K = \pi(x) = f(m).$$

Por lo tanto, si  $h : M \rightarrow N$  es el morfismo definido por  $h = \pi_N \bar{h} i_2$ , donde  $i_2 : M \hookrightarrow N \oplus M$  es la inclusión, entonces  $\pi h = f$ . Es decir,  $h$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ h \swarrow & \downarrow f & \\ N & \xrightarrow{\pi} & N/K. \end{array}$$

Por lo tanto,  $M$  es proyectivo.  $\square$

**Lema 3.12.** Sean  $R$  un anillo y  $M$  un  $R$ -módulo. Si  $M^{(X)}$  es cuasi proyectivo para todo conjunto  $X$ , y  $M$  contiene un submódulo isomorfo a  ${}_R R$ , entonces  $M$  es proyectivo.

*Demostración.* Sean  $N$  y  $E$   $R$ -módulos con  $E$  inyectivo. Además, sean  $f : M \rightarrow N$  y  $q : E \twoheadrightarrow N$ , un morfismo y un epimorfismo respectivamente. Tenemos una situación como la que se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

Por hipótesis, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $R \leq M$  y, por lo tanto, que  $R^{(X)} \leq M^{(X)}$ , para todo conjunto  $X$ . Luego, podemos considerar la inclusión  $i : R^{(X)} \hookrightarrow M^{(X)}$ , para todo conjunto  $X$ . Además, notemos que existe un epimorfismo  $\rho : R^{(X)} \rightarrow E$ , para algún conjunto  $X$ . Luego, como  $E$  es inyectivo, existe un morfismo  $g : M^{(X)} \rightarrow E$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & R^{(X)} & \xhookrightarrow{i} & M^{(X)} \\ & & \downarrow \rho & \swarrow g & \\ & & E & & \end{array}$$

Entonces tenemos que  $gi = \rho$ , pero  $\rho$  es un epimorfismo, luego  $g$  es un epimorfismo. Ahora, como  $M^{(X)}$  es cuasi proyectivo, entonces existe un endomorfismo  $\bar{h} : M^{(X)} \rightarrow M^{(X)}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & M^{(X)} & & \\ & & \downarrow \pi_k & & \\ & & M & & \\ & & \downarrow f & & \\ M^{(X)} & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

$\swarrow \bar{h}$

donde  $\pi_k : M^{(X)} \rightarrow M$  es la  $k$ -ésima proyección. Por otro lado, consideremos  $\iota_k : M \hookrightarrow M^{(X)}$  la  $k$ -ésima inclusión y definamos el morfismo  $h : M \rightarrow E$  por

$h = g\bar{h}\iota_k$ . Entonces, si  $m \in M$  tenemos que:

$$\begin{aligned}qh(m) &= q(g\bar{h}\iota_k)(m) \\ &= (qg\bar{h})\iota_k(m) \\ &= (f\pi_k)\iota_k(m) \\ &= f(\pi_k\iota_k)(m) \\ &= f(1d_M(m)) \\ &= f(m).\end{aligned}$$

Es decir,  $h$  hace conmutar el primer diagrama. Esto es:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \swarrow h & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{q} & N\end{array}$$

conmuta. Luego, por el Corolario 3.10,  $M$  es proyectivo. □

**Lema 3.13.** Sean  $R$  un anillo e  $I \leq R$  un ideal bilateral. Si  $M$  es un  $R/I$ -módulo proyectivo, entonces  $M$  es un  $R$ -módulo casi proyectivo.

*Demostración.* Sean  $N$  un  $R$ -módulo,  $f : M \rightarrow N$  un  $R$ -morfismo y  $q : M \rightarrow N$  un  $R$ -epimorfismo. Notemos que  $N$  es un  $R/I$ -módulo, en virtud de Lema 2.20, ya que,  $IN = Iq(M) = q(IM) = q(\{0\}) = \{0\}$ . Además,  $f$  es un  $R/I$ -morfismo pues, para cualesquiera  $r \in R$  y  $m \in M$ , se tiene que  $f((r + I)m) = f(rm) = rf(m) = (r + I)f(m)$ . Luego, como  $M$  es un  $R/I$ -módulo proyectivo, entonces existe un  $R/I$ -morfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & R/I M & \\ & \swarrow g & \downarrow f \\ R/I M & \xrightarrow{q} & R/I N.\end{array}$$

Pero  $g$  es a su vez un  $R$ -morfismo. En efecto, si  $r \in R$  y  $m \in M$ , entonces  $g(rm) = g((r + I)m) = (r + I)g(m) = rg(m)$ . De modo que,  $f$  se puede extender como  $R$ -morfismo a un  $R$ -endomorfismo de  $M$ , a saber  $g$ . Luego,  $M$  es un  $R$ -módulo casi proyectivo. □

**Lema 3.14.** Sea  $R$  un anillo e  $I \leq R$  un ideal bilateral. Entonces  $M$  es un  $R/I$ -módulo casi proyectivo si y solo si  $M$  es un  $R$ -módulo casi proyectivo tal que  $IM = \{0\}$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Nótese que la demostración es análoga a la del Lema 3.13.

( $\Leftarrow$ ) Sean  $N$  un  $R/I$ -módulo,  $f : M \rightarrow N$  un  $R/I$ -morfismo y  $q : M \twoheadrightarrow N$  un  $R/I$ -epimorfismo. Notemos que, por el Lema 2.20,  $M$  es un  $R/I$ -módulo y  $N$  es un  $R$ -módulo tal que  $IN = \{0\}$ . Además,  $f$  es un  $R$ -morfismo pues, para cualesquiera  $m \in M$  y  $r \in R$ , se tiene que  $f(rm) = f((r + I)m) = (r + I)f(m) = rf(m)$ . Luego, como  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi proyectivo, entonces existe un  $R$ -morfismo  $g : M \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \swarrow g & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

Pero  $g$  es, al mismo tiempo, un  $R/I$ -morfismo pues, si  $r \in R$  y  $m \in M$ , entonces  $g((r + I)m) = g(rm) = rg(m) = (r + I)g(m)$ . De hecho,  $g$  como  $R/I$ -morfismo extiende al  $R/I$ -morfismo  $f$ . Consecuentemente,  $M$  es un  $R/I$ -módulo cuasi proyectivo.  $\square$

**Proposición 3.15.** *Si  $P$  es un módulo proyectivo y  $T \leq P$  un submódulo fuertemente invariante en  $P$ , entonces  $P/T$  es cuasi proyectivo.*

*Demostración.* Sean  $N$  un módulo,  $h : P/T \rightarrow N$  un morfismo y  $q : P/T \twoheadrightarrow N$  un epimorfismo. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} P/T \longrightarrow 0$$

Notemos que, por ser  $P$  proyectivo, existe un endomorfismo  $f : P \rightarrow P$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p} & P/T \\ & & & \swarrow f & & & \downarrow h \\ & & P & \xrightarrow{p} & P/T & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

Además, dado que  $f(T) \leq T$ , tenemos que,  $p(f(T)) \leq p(T) = \{0\}$ . Así que,  $pf(T) = \{0\}$ , luego  $pf_i(T) = \{0\}$ . Por otra parte, por la propiedad universal del conúcleo, existe un endomorfismo  $g : P/T \rightarrow P/T$  tal que  $gp = pf$ . Entonces se verifica que

$$hp = qpf = q(pf) = q(gp) = (qg)p.$$

Por lo tanto,  $h = qg$ . Es decir,  $g$  hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & & P/T \\
 & \swarrow g & \downarrow h \\
 P/T & \xrightarrow{q} & N
 \end{array}$$

Esto demuestra que  $P/T$  es cuasi proyectivo. □

Recordemos que, si  $M$  y  $N$  son módulos y  $q : M \rightarrow N$  es un epimorfismo, decimos que  $q$  es superfluo si  $Núcl(q) \ll M$ . Además, una pareja  $(P, q)$  donde  $P$  es un módulo proyectivo y  $q : P \rightarrow M$  es un epimorfismo superfluo, recibe el nombre de cubierta proyectiva de  $M$ .

**Proposición 3.16.** *Sea  $M$  un módulo cuasi proyectivo. Si  $P \xrightarrow{q} M$  es una cubierta proyectiva de  $M$ , entonces  $Núcl(q)$  es fuertemente invariante en  $P$ .*

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Núcl(q) \xrightarrow{i} P \xrightarrow{q} M \longrightarrow 0,$$

y un morfismo  $f \in End(P)$ . Vamos a demostrar que  $f(Núcl(q)) \subseteq Núcl(q)$ . Para ello, consideremos el módulo  $T = Núcl(q) + f(Núcl(q))$  y notemos que  $f(Núcl(q)) \subseteq T$ , así que, podemos definir el morfismo  $\bar{f} : P/Núcl(q) \rightarrow P/T$  tal que  $\bar{f}(x + Núcl(q)) = f(x) + T$  con  $x \in P$ . También podemos definir el morfismo  $g : P/T \rightarrow M/q(T)$  por  $g(x + T) = q(x) + q(T)$ . Además, observemos que  $M \cong P/Núcl(q)$  y denotemos por  $\varphi$  al isomorfismo entre  $M$  y  $P/Núcl(q)$ . Adicionalmente, definamos el morfismo  $h : P/T \rightarrow M/q(T)$  por  $h = g\bar{f}\varphi$ . Tenemos una situación como la que indica el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & & M \\
 & & \downarrow h \\
 M & \xrightarrow{\pi} & M/q(T)
 \end{array}$$

donde  $\pi : M \rightarrow M/q(T)$  es el epimorfismo natural. Luego, como  $M$  es cuasi inyectivo, entonces existe un endomorfismo  $\mu : M \rightarrow M$  que hace conmutar el diagrama anterior, esto es,  $\pi\mu = h$ . Y como  $P$  es proyectivo, entonces existe un endomorfismo

$\rho : P \rightarrow P$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & & \swarrow \rho \\
 & & \downarrow q \\
 & & M \\
 & \swarrow \rho & \downarrow \mu \\
 P & \xrightarrow{q} & M
 \end{array}$$

Por otra parte, si  $X = \{y \in P \mid f(y) - \rho(p) \in Núc(q), \text{ para algún } p \in P\}$ , entonces afirmamos que  $X + Núc(q) = P$ . En efecto, podemos considerar los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{q} & M \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \mu \\
 P & \xrightarrow{q} & M \xrightarrow{\pi} M/q(T) \\
 & & \searrow h
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{q} & M \\
 f \downarrow & & \searrow h \\
 P & \xrightarrow{q} & M \xrightarrow{\pi} M/q(T)
 \end{array}$$

El segundo de estos diagramas conmuta porque, si tomamos un  $x \in P$ , entonces, por un lado,  $f q \pi(x) = q(f(x)) + q(T)$ , y por otro,  $h q(x) = ((g\bar{f}\varphi)q)(x)$ , pero el Primer Teorema de Isomorfismo nos asegura que  $\varphi(q(x)) = x + Núc(q)$ , luego

$$\begin{aligned}
 (g\bar{f}\varphi q)(x) &= (g\bar{f})(\varphi q(x)) \\
 &= g\bar{f}(x + Núc(q)) \\
 &= g(f(x) + T) \\
 &= q(f(x)) + q(T) \\
 &= f q \pi(x).
 \end{aligned}$$

Entonces, para cada  $p \in P$ , se verifica que  $(\pi q(f - \rho))(p) = 0$ , por lo tanto,  $(q(f - \rho))(p) \in Núc(\pi) = q(T)$ . Esto demuestra que  $q(f - \rho)(P) \subseteq q(T)$  y, por tanto,  $(f - \rho)(P) \subseteq T + Núc(q) = T$ . Así que, para todo  $p \in P$ , se cumple que  $f(p) - \rho(p) = n_1 + f(n_2)$ , para algunos  $n_1, n_2 \in Núc(q)$ . De modo que,  $p - n_2 \in X$ , lo que confirma que,  $X + Núc(q) = P$ . Pero, además,  $Núc(q) \ll P$ , entonces, lo que realmente tenemos, es que  $X = P$ . Por otra parte,  $q(\rho(Núc(q))) = \mu q(Núc(q)) = \{0\}$  y, en consecuencia,  $\rho(Núc(q)) \subseteq Núc(q)$ . Finalmente, tomemos un elemento

$x \in f(Núc(q))$ . Entonces existe  $y \in Núc(q) \subseteq P$  tal que  $x = f(y)$ , pero  $P = X$ , luego  $f(y) - \rho(y) \in Núc(q)$  y, además,  $\rho(y) \in \rho(Núc(q)) \subseteq Núc(q)$ . Así que,  $x = f(y) = (f(y) - \rho(y)) + \rho(y) \in Núc(q)$ . Se concluye que,  $f(Núc(q)) \subseteq Núc(q)$ .  $\square$

**Corolario 3.17.** *Sea  $M$  un módulo. Si  $M$  es cuasi proyectivo y tiene cubierta proyectiva, entonces  $M^{(I)}$  es cuasi proyectivo para todo conjunto  $I$ .*

*Demostración.* Sea  $0 \longrightarrow Núc(q) \hookrightarrow P \xrightarrow{q} M$  una cubierta proyectiva para  $M$ . Entonces  $0 \longrightarrow Núc(q)^{(I)} \hookrightarrow P^{(I)} \xrightarrow{q^{(I)}} M^{(I)}$  es una cubierta proyectiva de  $M^{(I)}$ . Por la Proposición 3.15, basta demostrar que  $f(Núc(q)^{(I)}) \subseteq (Núc(q)^{(I)})$ , para todo  $f \in \text{End}(P^{(I)})$ . Para esto, tomemos  $x \in (Núc(q)^{(I)})$ , donde  $x = x_{i_1} + \dots + x_{i_n}$  con  $x_{i_j} \in Núc(q)$ . Luego, si  $\iota_k : P \rightarrow P^{(I)}$  es la  $k$ -ésima inclusión, entonces  $x = \iota_1(x_{i_1}) + \dots + \iota_n(x_{i_n})$ , por lo tanto,  $f(x) = f(x_{i_1}) + \dots + f(x_{i_n}) = f\iota_1(x_{i_1}) + \dots + f\iota_n(x_{i_n})$  y, en consecuencia,  $\pi_j f(x) = \pi_j f\iota_1(x_{i_1}) + \dots + \pi_j f\iota_n(x_{i_n})$ , donde  $\pi_j : P^{(I)} \rightarrow P$  es la  $j$ -ésima proyección. Pero  $\pi_j f\iota_k \in \text{End}(P)$ , así que la Proposición 3.16 nos asegura que  $\pi_j f\iota_k(x_{i_k}) \in Núc(q)$ , para toda  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Se sigue que  $(\pi_j f)(x) \in Núc(q)$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ , luego  $f(x) \in (Núc(q))^{(I)}$ , es decir que,  $f(Núc(q)^{(I)}) \subseteq Núc(q)^{(I)}$ . Esto demuestra que  $M^{(I)}$  es cuasi proyectivo.  $\square$

## 4 Anillos artinianos de ideales principales.

**Definición 4.1.** Sea  $R$  un anillo. Decimos que  $R$  es artiniano de ideales principales si es artiniano derecho e izquierdo y de ideales principales derechos e izquierdos.

**Teorema 4.2.** *Si  $R$  es un anillo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i)  $R$  es artiniano de ideales principales,
- ii)  $R/I$  es cuasi Frobenius para todo  $I \leq R$  ideal bilateral.

*Demostración.* Ver [2, Proposición 25.4.6 B].  $\square$

**Teorema 4.3** (Faith-Walker). *Sea  $R$  un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i)  $R$  es cuasi Frobenius,
- ii) Todo  $R$ -módulo inyectivo es proyectivo,
- iii) Todo  $R$ -módulo proyectivo es inyectivo.

*Demostración.* El lector la puede encontrar en [8, Teorema 13.6.1].  $\square$

**Definición 4.4.** Si  $R$  es un anillo, un  $R$ -módulo  $M$  es fiel si para cada  $m \in M \setminus \{0\}$  existe un  $r \in R$  con  $rm \neq 0$ .

**Teorema 4.5.** *Sea  $R$  un anillo artiniiano. Si  $M$  es un  $R$ -módulo fiel, entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $M^{(n)}$  tiene un submódulo isomorfo a  ${}_R R$ .*

*Demostración.* Asumamos que  $M$  es un módulo fiel. Consideremos

$$J = \bigcap \{Núc(f) \mid f \in Hom_R({}_R R, M)\}.$$

Entonces  $J \leq R$  es un ideal izquierdo. Por otro lado, si  $0 \neq r_0 \in R$ , como  $M$  es fiel, entonces existe  $m_0 \in M$  tal que  $r_0 m_0 \neq 0$ . Luego, si  $f : R \rightarrow M$  es un morfismo tal que para cada  $r \in R$ , ocurre que  $f(r) = r m_0$ , entonces  $r_0 \notin Núc(f)$  y, por lo tanto,  $r_0 \notin J$ . Esto demuestra que  $J = \{0\}$ . Por otra parte, como  $R$  es artiniiano, entonces es finitamente cogenerado y, en consecuencia, existen  $f_i \in Hom_R({}_R R, M)$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , tales que

$$\bigcap_{i=1}^n Núc(f_i) = \{0\}.$$

Entonces, podemos considerar el morfismo  $g : R \rightarrow M^{(n)}$  definido por  $g(r) = (f_1(r), \dots, f_n(r))$ , para cada  $r \in R$ . Luego

$$Núc(g) = \bigcap_{i=1}^n Núc(f_i) = \{0\}.$$

Esto equivale a decir que  $g$  es un monomorfismo y, de este hecho se sigue, que  $R$  es isomorfo a un submódulo de  $M$ .  $\square$

Recordemos que si  $R$  es un anillo y  $M$  es un  $R$ -módulo, el anulador de  $M$  se define por  $\{r \in R \mid rm = 0 \text{ para toda } m \in M\}$ . Denotamos al anulador de  $M$  por  $(0:M)$ . Notemos que si  $M$  es un  $R$ -módulo fiel, entonces  $(0:M) = \{0\}$ . Además el anulador de cualquier  $R$ -módulo  $M$  es, claramente, un ideal bilateral de  $R$ .

**Teorema 4.6.** *Sea  $R$  un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i)  $R$  es artiniiano de ideales principales,
- ii) Todo  $R$ -módulo cuasi inyectivo es cuasi proyectivo,
- iii) Todo  $R$ -módulo cuasi proyectivo es cuasi inyectivo.

*Demostración.*  $i) \Rightarrow ii)$  Consideremos un  $R$ -módulo cuasi inyectivo  $M$  y al anillo  $R/(0:M)$ . Notemos que, en consecuencia del Lema 2.20,  $M$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo. Además,  $M$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo fiel ya que

$$(0_M : M_{\frac{R}{(0:M)}}) = (0:M) = \{0_{\frac{R}{(0:M)}}\}.$$

Entonces, por el Teorema 4.5,  $\frac{R}{(0:M)} \leq M^{(n)}$ , para alguna  $n \in \mathbb{N}$ . Así que, debido al Teorema 2.24, se tiene que  $M^{(n)}$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo cuasi inyectivo. Luego, por la Proposición 2.16,  $M$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo inyectivo. Pero de la hipótesis se obtiene que  $\frac{R}{(0:M)}$  es un anillo cuasi Frobenius, por lo tanto,  $M$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo proyectivo. Siendo así, se sigue del Lema 3.13, que  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi proyectivo.

$ii) \Rightarrow i)$  Sea  $I \leq R$  un ideal bilateral. Primero observemos que, si todo  $R$ -módulo cuasi inyectivo es un  $R$ -módulo cuasi proyectivo, entonces todo  $R/I$ -módulo cuasi inyectivo es un  $R/I$ -módulo cuasi proyectivo. En efecto, si  $M$  es un  $R/I$ -módulo cuasi inyectivo, entonces, por el Lema 2.22,  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi inyectivo tal que  $IM = \{0\}$ . Luego, por hipótesis,  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi proyectivo, pero además es tal que  $IM = \{0\}$ . Esto, según el Lema 3.14, significa, precisamente, que  $M$  es un  $R/I$ -módulo cuasi proyectivo, como habíamos afirmado. Ahora, sean  $I \leq R$  un ideal bilateral y  $M$  un  $R/I$ -módulo inyectivo. Entonces  $M \oplus M$  es un  $R/I$ -módulo inyectivo y, en consecuencia, es un  $R/I$ -módulo cuasi inyectivo. Así que, debido a la hipótesis junto con la observación anterior, resulta que  $M \oplus M$  es un  $R/I$ -módulo cuasi proyectivo, pero esto implica, en vista del Teorema 3.11, que  $M$  es un  $R/I$ -módulo proyectivo. En conclusión, tenemos que todo  $R/I$ -módulo inyectivo es un  $R/I$ -módulo proyectivo, esto para cualquier  $I \leq R$  ideal bilateral. Dicho de otro modo,  $R/I$  es un anillo cuasi Frobenius, para todo  $I \leq R$  ideal bilateral, y esto equivale a decir, que  $R$  es un anillo artiniiano de ideales principales.

$i) \Rightarrow iii)$  Sea  $M$  un  $R$ -módulo cuasi proyectivo. Del Lema 3.14, resulta que  $M$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo cuasi proyectivo. Luego, como  $R$  es un anillo artiniiano y  $M$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo fiel, se sigue de la Proposición 4.5, que  $\frac{R}{(0:M)} \leq M^{(n)}$ , para alguna  $n \in \mathbb{N}$ . Además, como  $R$  es artiniiano, entonces es perfecto izquierdo y, por tanto,  $M$  tiene cubierta proyectiva. Esto implica, de acuerdo con el Corolario 3.17, que  $M^{(n)}$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo cuasi proyectivo. Del mismo modo,  $M^{(n)}$  tiene cubierta proyectiva, así que, una vez más por el Corolario 3.17,  $(M^{(n)})^{(X)}$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo cuasi proyectivo, para cualquier conjunto  $X$ . Luego, por el Lema 3.12,  $M^{(n)}$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo proyectivo. Pero  $\frac{R}{(0:M)}$  es un anillo cuasi Frobenius por hipótesis, de modo que,  $M$  es un  $\frac{R}{(0:M)}$ -módulo inyectivo, lo que implica, conforme al Lema 3.14, que  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi inyectivo.

*iii)  $\Rightarrow$  i)* Observemos que, si todo  $R$ -módulo cuasi proyectivo es un  $R$ -módulo cuasi inyectivo, entonces todo  $R/I$ -módulo cuasi proyectivo es un  $R/I$ -módulo cuasi inyectivo. Efectivamente, si  $M$  es un  $R/I$ -módulo cuasi proyectivo, por el Lema 3.13, tenemos que  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi proyectivo tal que  $IM = \{0\}$ . Luego, por hipótesis,  $M$  es un  $R$ -módulo cuasi inyectivo, pero además es tal que  $IM = \{0\}$ . Esto significa, en vista del Lema 2.22, que  $M$  es un  $R/I$ -módulo cuasi inyectivo, justamente, lo que queríamos verificar. Dicho esto, sean  $I \leq R$  un ideal bilateral y  $M$  un  $R/I$ -módulo proyectivo. Como  $M$  es proyectivo, entonces es sumando directo de un  $R/I$ -módulo libre  $F$ . Por otro lado, como  $F$  es un  $R/I$ -módulo libre, entonces es un  $R/I$ -módulo proyectivo y, por lo tanto, es un  $R/I$ -módulo cuasi proyectivo. Se sigue de la hipótesis junto con la observación precedente, que  $F$  es un  $R/I$ -módulo cuasi inyectivo. Pero además, por ser  $F$  libre, existe  $N \leq F$  tal que  $N \cong R/I$ , lo que implica, por la Proposición 2.16, que  $F$  es un  $R/I$ -módulo inyectivo. Lacónicamente, cualquier sumando directo de  $F$  es inyectivo; en particular  $M$  es un  $R/I$ -módulo inyectivo. En conclusión,  $R/I$  es un anillo cuasi Frobenius, o en otras palabras,  $R$  es artinian de ideales principales.  $\square$

## Agradecimientos

Agradecemos al árbitro por la lectura tan cuidadosa que realizó, haciendo que este trabajo mejorará notablemente.

## Bibliografía

- [1] K. A. Byrd, *Some characterizations of uniserial rings*, Math. Ann. **186** (1970), 163–170.
- [2] C. Faith, *Algebra II Ring Theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 191, Springer-Verlag, (1976).
- [3] C. Faith, E.A. Walker, *Direct-sum representations of injective modules*, J. Algebra **5**(3) (1967), 203 – 221.
- [4] K. Fuller, *On direct representations of quasi-injectives and quasi-projectives*, Arch. Math. **20**(5) (1969), 495–502.
- [5] J. S. Golan, *Characterization of rings using quasiprojective modules*, Israel J. Math. **8**(1) (1970), 34–38.
- [6] M. Harada, *Note on quasi-injective modules*, Osaka J. Math. **2**(2) (1965), 351–356.

- [7] R.E. Johnson, E.T. Wong, *Quasi-Injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc. **36**(1) (1961), 260–268.
- [8] F. Kasch, *Modules and Rings*, Academic Press (1982).
- [9] A. Koehler, *Quasi-projective covers and direct sums*, Proc. Amer. Math. Soc. **24**(4) (1970), 655–658.
- [10] A. Koehler, *Quasi-projective and quasi-injective modules*, Pacific J. Math. **36**(3) (1971), 713–720.
- [11] T.Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, 1999.
- [12] K. Morita, *On S-rings in the sense of F. Kasch*, Nagoya Math. J. **27**(2) (1966), 687–695.
- [13] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers (1991).
- [14] L. E. T. Wu, J. P. Jans, *On quasi projectives*, Illinois J. Math. **11**(3) (1967), 439–448.

Facultad de Ciencias, UNAM.

Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N Delegación Coyoacán, Ciudad  
Universitaria.

Ciudad de México. C.P. 04510

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP.

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

tanquijanos@ciencias.unam.mx

vilchis.f@gmail.com

cesarcc@ciencias.unam.mx

---

## **Educación matemática**

---



## Capítulo 3

# Dificultades de estudiantes universitarios en tareas de interpretación y construcción del concepto de función

Abraham Cuesta Borges, Juana Elisa Escalante Vega, Francisco  
Sergio Salem Silva

FEI,FM,UV

### Resumen

Se reporta una investigación, acerca de las dificultades del estudiante en la solución de tareas escolares, que tienen relación con la construcción del concepto de función. Dentro del tema funciones y gráficas, es un estudio diagnóstico realizado con la participación de estudiantes de la Licenciatura en Economía de la Universidad Veracruzana. El objetivo es conocer si, conocimientos previos, como velocidad, perímetro y área, puedan causar dificultades en la solución de las tareas propuestas. Se proponen varias situaciones, que representan dependencia funcional entre variables. La investigación identifica dificultades en tareas de interpretación y construcción del concepto de función.

## 1 Introducción

Para realizar el estudio, el equipo de investigación propuso un curso opcional con el objeto de proporcionar, a los estudiantes de nuevo ingreso, la opción de consolidar o, en algunos casos, adquirir habilidades elementales de cálculo numérico–algebraico, destrezas y aptitudes para la representación gráfica de relaciones cuantitativas. Un objetivo del curso opcional fue el trabajo con funciones y, más concretamente, con sus diferentes formas de representación. En dicho curso, mediante una secuencia de tareas, se les guía a través del concepto de función, sus características y sus elementos globales.

Como una actividad previa, se analizan las respuestas a un conjunto de preguntas relacionadas con tareas de su interpretación y/o construcción del concepto de función, a partir de situaciones gráficas y/o geométricas, que son expresadas con enunciados verbales. Se pudo constatar que, los estudiantes no reconocen la dependencia funcional entre las variables implicadas en una situación concreta. Estas dificultades son producidas por el efecto combinado de los significados que poseen

los estudiantes sobre el concepto y del conocimiento que se tiene sobre el contexto en que se deben realizar dichas tareas [9, 5].

Las actuaciones de los estudiantes ponen de manifiesto la existencia de errores y dificultades al responder las tareas propuestas; aspecto que, podría constituirse en un obstáculo para acceder a las complejas estructuras y relaciones que exige el estudio de las funciones, y en particular sus distintos sistemas de representación en los lenguajes algebraico y/o gráfico.

## 2 Marco teórico y antecedentes

La investigación en didáctica de la matemática (matemática educativa) se ha estado ocupando, entre otros aspectos, de los problemas relativos al aprendizaje para lograr mayor comprensión de las dificultades y encontrar vías para superar estos problemas dentro del sistema educativo [1]. En el caso particular del concepto de función, se documenta que existe una amplia variedad de obstáculos y dificultades en el proceso de aprendizaje, especialmente en la etapa transitoria, desde una etapa inicial de comprensión donde el concepto es concebido de una manera intuitiva o basado en la experiencia, a otra etapa donde el concepto se especifica mediante una definición formal a través de la deducción lógica. Como señalaron Dreyfus y Eisenberg (1982), en uno de los primeros trabajos sobre el tema de funciones, las dificultades en el aprendizaje son causadas por:

- Su relación con otros conceptos matemáticos como: dominio, imagen, crecimiento, decrecimiento y extremos; todos ellos necesarios para determinar el concepto de función.
- La relación que posee el concepto de función con otros campos de la matemática, como la geometría y el álgebra.
- La existencia de una amplia gama de lenguajes de representación del concepto de función: descripción verbal, tabla de valores, gráficas, expresiones y diagramas.

La representación es un término complejo, en tanto que abarca diversos significados y puede ser utilizado en una gran variedad de ámbitos; sin embargo, su exhaustiva clarificación, en educación matemática, permite concebirlo como parte esencial del aparato conceptual necesario para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas [11].

Las representaciones constituyen el conjunto de “notaciones simbólicas o gráficas, mediante las que se expresan conceptos y procedimientos matemáticos, así

como sus características y propiedades más relevantes” [3, pág. 96], que se clasifican en registros de representación [7] y de cuya comprensión depende de si la representación mental es parte de una red de representaciones [10, 8, 11].

En la representación de funciones existen dos tareas que son esenciales, a saber: la interpretación y la construcción. La interpretación (global o local) se refiere al acto de adquirir sentido de una situación, por medio de una gráfica, una ecuación o una tabla; en ella se obtiene un significado (o información) [9]. En la construcción, en cambio, el alumno genera una cosa nueva, consiste en pasar de la descripción verbal de una situación a la gráfica y/o tabla; aunque toda construcción se apoya a menudo en algún tipo de interpretación. De este modo, la representación del concepto de función se examina a través de dos tipos fundamentales de traducciones [7]:

- La interpretación, que consiste en pasar, por ejemplo, de la gráfica de una situación a su descripción verbal.
- La construcción, que consiste en pasar de la descripción verbal de una situación a la gráfica y/o tabla.

### 3 Metodología

La investigación es de tipo exploratoria, que se sirve de un cuestionario escrito, compuesto por 6 situaciones (tareas) y de entrevistas individuales. Todas las tareas son formuladas verbalmente y giran en torno a un objeto sobre el cual se realizan las preguntas. A efectos de este trabajo se muestran los resultados de dos tareas: la primera se relaciona con el concepto de velocidad, y la segunda en relación a los conceptos perímetro y área de una figura rectangular. Las entrevistas individuales sirvieron para aclarar dudas, de los investigadores, acerca de la forma de resolución ejecutada por los estudiantes.

Posteriormente, se analizan las actuaciones utilizando el método de análisis de contenido, entendido como el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos en datos escritos, y cuya finalidad es descubrir la estructura interna de la comunicación, estudiando para ello su contenido semántico [4, 11].

#### Sujetos de estudio y toma de datos

De una población de 110 estudiantes, que ingresan a la Licenciatura, se seleccionan los 64 estudiantes que se inscriben, voluntariamente, al curso introductorio. Para mantener el anonimato de las respuestas, cada estudiante se clasifica de acuerdo al orden en que son registrados sus datos:  $E_1 \dots E_{64}$ . En este contexto la investigación se realiza en tres etapas:

1. Aplicación de prueba escrita: compuesta por preguntas sobre situaciones contextualizadas, donde se requiere realizar tareas de interpretación y/o construcción [9]. Éstas fueron tomadas —con ligeras adaptaciones— de Azcárate y Deulofeu (1990) y de Shell Centre for Mathematical Education (1990).
2. Categorización de las actuaciones: la lectura previa de las respuestas escritas permitió describir y analizar los errores y dificultades de los estudiantes. Dicha clasificación será tratada, de manera particular, en el análisis de cada una de las situaciones propuestas.
3. Entrevista individual: a una muestra de 9 estudiantes, seleccionada bajo el criterio de que las respuestas sean representativas de la categorización realizada. Es grabada en audio, en un contexto de intercambio de ideas, con la finalidad obtener datos sobre la forma en que los estudiantes llegan a la solución de las tareas planteadas.

## 4 Resultados

De acuerdo con el objetivo antes expuesto, se muestra el análisis de las dos situaciones de interés para este trabajo: “velocidad” y “perímetro-área”. La primera presenta una descripción verbal y requiere que el estudiante realice, a partir de la interpretación del concepto de velocidad, una representación en entorno gráfico. La segunda, también descrita de manera verbal, requiere una reflexión sobre el concepto de área y su relación con la idea de perímetro.

Situación 1 (velocidad): Una persona, en una bicicleta, realiza la siguiente excursión:

1ra Fase: Va por un terreno llano.

2da Fase: Sube una montaña.

3ra Fase: Baja la montaña.

4ta Fase: Va, de nuevo, por un terreno llano hasta el final.

- Dibuja la gráfica: “Cambio de velocidad con respecto al tiempo”.
- ¿La velocidad, es una función que depende del tiempo?

Las respuestas (ver Tabla 1) ponen en evidencia, que existen dificultades causadas por una interpretación inadecuada de la situación; sólo el 26.5 % de los estudiantes puede representar correctamente cómo cambia la velocidad con respecto al tiempo. Las actuaciones incorrectas más relevantes son:

**Tabla 1: Porcentaje de respuestas incorrectas a la situación 1**

Actuaciones incorrectas por:	% del Grupo
Construcción Icónica	56.3
Construcción Incoherente	9.4
No Responde	7.8
Total	73.5

**Construcción Icónica:** Se realiza un dibujo de la montaña, para describir gráficamente el cambio de la velocidad con respecto al tiempo, provocado por interpretación literal (icónica) de la situación. (Ver Figura 1).



Figura 1: Respuesta del estudiante  $E_{16}$  a las situación 1

En este fragmento de la entrevista con  $E_{16}$ , se muestra cómo fluye en las respuestas, no sólo en la imagen visual sino también en la imagen mental del estudiante.

Profesor: En la segunda fase va subiendo la montaña, ¿Qué sucede con la velocidad?

$E_{16}$ : Disminuye.

P: Y, ¿en tu gráfica como representas?

$E_{16}$ : Yo lo hago aumentando la velocidad.

P: En la tercera fase baja la montaña, ¿Qué ocurre con la velocidad?

$E_{16}$ : Aumenta, y yo lo dibujo mal. Es que yo me guío por lo que hace la montaña.

P: Pero en esta situación no se te da ningún dibujo.

$E_{16}$ : Es que pensé en el movimiento de la persona por la montaña.

P: Pero se te pide la velocidad no el movimiento de la persona.

$E_{16}$ : es que dibujó la montaña me confunde.

**Construcción Incoherente:** La respuesta del estudiante resulta ser incoherente con la situación y la pregunta planteada, como se muestra en las situaciones de  $E_{50}$  y  $E_{45}$  (ver figura 2).

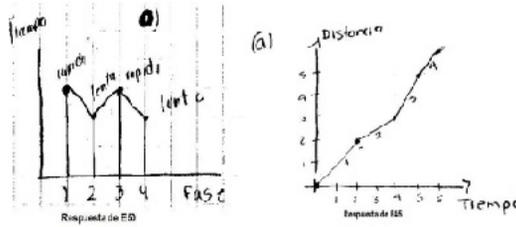


Figura 2: Respuestas de los estudiantes  $E_{50}$  y  $E_{45}$  a la situación 1

Una dificultad adicional se halla en el reconocimiento de la relación de dependencia entre variables. De los cinco estudiantes, que esbozan la representación gráfica de la situación estudiada solo dos reconocen esta dependencia cuando responden a la pregunta “¿La velocidad es una función que depende del tiempo?”.

En otros casos no se reconoce la dependencia (ver Figura 3), tal y como expone el estudiante  $E_{22}$  cuando escribe: “La velocidad depende del tiempo ya que a mayor velocidad menor tiempo transcurrido y a menor velocidad el tiempo aumenta”. Asume que el tiempo (tiempo de llegada), es quien depende de la velocidad de la bicicleta, en el sentido de que a mayor velocidad menor es el tiempo de llegada.

b) La velocidad depende de tiempo ya que a mayor velocidad
menor tiempo transcurrido y a menor velocidad el tiempo
aumenta.

Figura 3: Respuesta del estudiante  $E_{22}$  sobre la relación de dependencia

Situación 2 perímetro-área: La suma de los lados adyacentes de un rectángulo es 15 cm. Se desea estudiar como varía el área del rectángulo cuando variamos la longitud de los lados.

- Representar mediante tabla de valores y gráfica los valores de un lado y los valores del área que se obtengan.
- Representar esta relación mediante una ecuación algebraica.

A esta pregunta responden de manera correcta sólo el 25 % de los estudiantes (ver Tabla 2). La primera dificultad se origina por la incomprensión del lenguaje natural. Cabe mencionar que, durante el desarrollo de la prueba, muchos estudiantes preguntaron: “¿Qué significa la palabra adyacentes?”.

**Tabla 2: Porcentaje de respuestas incorrectas a la situación 2**

Actuaciones incorrectas por:	% del Grupo
Incomprensión del Lenguaje Natural	25
Conversión al Lenguaje Algebraico	33
No Responde	17
Total	75

Una segunda dificultad es causada por la conversión, es decir, el proceso de traslación de ideas, expresadas en lenguaje geométrico, al lenguaje de funciones; el 33 % del grupo comprende la tarea pero no logra plantear la tabla de valores y/o la gráfica. Un ejemplo es la respuesta del estudiante  $E_{34}$  (ver Figura 4).

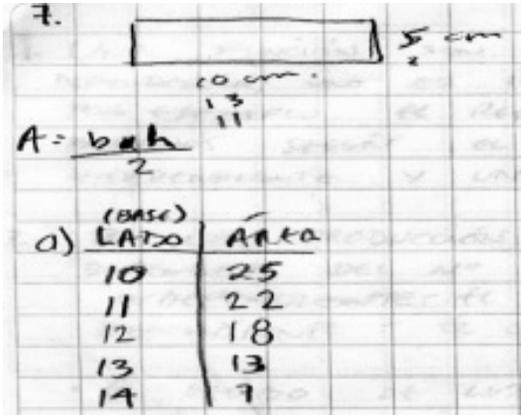


Figura 4: Respuestas del estudiante  $E_{34}$  a la situación 2

Obsérvese que: (i) necesita realizar operaciones aritméticas por el método de probar varios resultados (tanteo), (ii) desconoce la fórmula para determinar el área de la figura geométrica, y (iii) no logra expresar la representación gráfica.

Cabe mencionar otro hallazgo no menos importante: los 16 estudiantes que fueron capaces de representar la tabla y la gráfica, no responden de igual manera a la tarea de representar la ecuación algebraica, que exprese el área como una función de la longitud de los lados.

- En 6 de las respuestas se realiza la traducción (conversión), de la tabla y gráfica, a la ecuación de la forma :  $A=x (15-x)$ .
- En 8 respuestas no se realiza esta traducción y se responde con una de las expresiones:  $A = L*L$  o  $A = b*a$ .

- En dos casos no responden a esta pregunta.

Unido a ello, resulta interesante que el resto del grupo aun cuando no logran responder a la primera pregunta, intentan expresar la ecuación algebraica en la forma  $A = L * L$ , como resultado de un nivel de conocimiento muy elemental sobre los contextos geométrico y algebraicos que solo le permite recordar una actividad reiterada en clase.

Lo anterior pone de manifiesto que, aunado a la incomprensión de la idea expresada en el lenguaje natural existe una dificultad relacionada con el conocimiento que se tiene sobre los contextos, tanto geométrico como algebraico un ejemplo se halla en la respuesta del estudiante  $E_8$  (ver Figura 5).

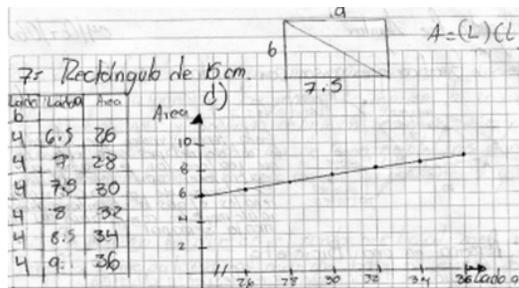


Figura 5: Respuestas del estudiante  $E_8$  a la situación 2

De este modo, la tarea de construcción del concepto queda afectada cuando se desarrolla en un contexto geométrico. A causa de:

1. La incomprensión de un término del lenguaje común (lados adyacentes) crea un conflicto en la tarea de concebir la función desde un contexto geométrico.
2. El nivel de conocimiento sobre el contexto geométrico es muy elemental, hasta el punto que en muchos estudiantes se crea un conflicto para construir las diferentes formas de representación del concepto de función.
3. Muchos estudiantes no pueden transferir la función, de la tabla y/o gráfica a la ecuación algebraica.

## Conclusiones

El estudio pudo corroborar la existencia de errores en tareas de interpretación y/o construcción del concepto de función. Los estudiantes de este estudio no pueden identificar la relación entre las cantidades (desconocidas y conocidas), a causa de

la falta de asociaciones entre las representaciones expresadas en diferentes registros (verbal, figural, geométrico, aritmético y algebraico). Las representaciones, que realizan muchos de los estudiantes, son un indicativo del bajo nivel de comprensión del concepto matemático de función y/o de otros conceptos que fueron analizados en los niveles previos a la universidad.

Se ponen de manifiesto errores en las respuestas del estudiante, causados por la forma en que los estudiantes entienden y comunican su significado de “velocidad” (situación 1). Muchos estudiantes realizan una interpretación icónica de los cambios de la velocidad; para estos estudiantes la gráfica que debe representar los cambios de velocidad es, en esencia, una representación (una imagen) de la montaña. Este resultado constituye uno de los errores conceptuales: “las dificultades son producidas por el efecto combinado de los significados que poseen los estudiantes sobre el concepto y del conocimiento que se tiene sobre el contexto en que se deben realizar dichas tareas” [9].

Por otra parte, el significado que se tiene sobre conceptos como área y perímetro (situación 2), que fueron estudiados en los primeros semestres de bachillerato, no permite resolver las tareas. Lo que saben hacer los estudiantes, hasta terminar el bachillerato, es un conjunto de procedimientos carentes de significado. Existe un nivel de conocimiento elemental sobre la forma (y fórmula) para calcular el área de un rectángulo, que es insuficiente para establecer el nexo necesario, entre la condición del problema y la expresión algebraica como modelo de esta situación.

En resumen, las actuaciones mostradas ponen en evidencia la existencia de un problema relacionado con el nivel de conocimiento con el que los estudiantes ingresan a la universidad. Se constata que, conceptos fundamentales como velocidad y área no han sido construidos de manera apropiada, lo cual constituye un obstáculo para abordar analíticamente el estudio de la matemática universitaria.

## Bibliografía

- [1] Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2), pp.117-124.
- [2] Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). Funciones y gráficas. Colección. Madrid: Editorial Síntesis.
- [3] Castro, L., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 95-124). Barcelona:Horsori.

- [4] Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres, Reino Unido: Routledge.
- [5] Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 4, p. 6-16.
- [6] Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, p. 33-48.
- [7] Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad Del Valle.
- [8] Hitt, F. (2001) El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al professor Mauricio Castro*. (pp. 165-177). Granada: Universidad de Granada.
- [9] Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- [10] Martí, E., & Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y aprendizaje: Journal for Study of Education and Development* 23(90), 11-30.
- [11] Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA* 4(1), 1-14.
- [12] Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada: Comares.
- [13] Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Traducción y adaptación de Félix Alayo. Ministerio de Educación y Cultura. Universidad del País Vasco.

Facultad de Estadística e Informática, UV  
Avenida Xalapa s/n, Obrero Campesino,  
Xalapa Enríquez, Ver. C.P. 91020.

Facultad de Matemáticas, UV.  
Gonzalo Aguirre Beltrán, Isleta,  
Xalapa Enríquez, Ver.C.P. 91090.

acuesta@uv.mx

jescalante@uv.mx

fsergios@gmail.com



---

# **Análisis matemático**

---



## Capítulo 4

# Algunas variantes del Teorema del Valor Medio

Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García  
FCFM, BUAP

### Resumen

Este capítulo tiene como objetivo presentar a todo aquel que quiera profundizar en el estudio del Teorema del Valor Medio algunas de sus variantes tales como el Teorema de Flett, el Teorema de Roy Myers y otros.

## 1 Introducción

Uno de los teoremas más importantes dentro del cálculo diferencial es sin duda, el Teorema del Valor Medio que relaciona los valores de una función en los extremos de un intervalo con el valor de la derivada de la función en un punto intermedio del mismo. Para ser precisos, afirma que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces hay un número  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Hay diferentes versiones de la ecuación anterior y que se expresan en la forma  $f'(c) = F(a, b, c)$  para alguna función  $F$ . En este capítulo discutimos y probamos algunas de esas versiones.

En la siguiente sección se hace acopio de nociones y resultados básicos que se usan en el resto del capítulo. En la sección 3 se desarrollan los teoremas principales que dan el nombre a este trabajo, es decir, se enuncian y prueban distintos resultados cercanos al Teorema del Valor Medio. En la última sección enunciamos proposiciones relacionadas con el Teorema de Cauchy (Teorema 2.7).

## 2 Resultados generales

En esta sección se resumen los conceptos básicos y algunos resultados acerca de estos, que son parte de la formación básica de cualquier estudiante de matemáticas,

los cuales pueden ser consultados en [1] o en [7]. Probaremos algunos de ellos, aquellos que no siempre se acostumbra demostrar en los cursos de cálculo de cualquier licenciatura en matemáticas. Todo lo que aquí presentamos servirá de base para el tema que le da el nombre al capítulo y que desarrollamos en las siguientes dos secciones.

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , el intervalo abierto  $(a, b)$  es el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  y el intervalo cerrado  $[a, b]$  es el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ .

Dada una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in [a, b]$  diremos que  $f$  es continua en  $x_0$  si

para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ,

$f$  es continua en  $a$  por la derecha si

para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $a < x < a + \delta$ , entonces  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ,

$f$  es continua en  $b$  por la izquierda si

para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $b - \delta < x < b$ , entonces  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

En caso de que  $f$  sea continua en  $x_0$  lo denotaremos como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  y si  $f$  es continua en  $x$  para todo  $x \in [a, b]$  diremos que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , es claro que en  $x_0 = a$  la continuidad es por la derecha la cual se denotará como  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  y en  $x_0 = b$ , la continuidad es por la izquierda la cual denotaremos como  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

Para una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in (a, b)$  diremos que  $f$  es derivable en  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe,}$$

$f$  es derivable en  $a$  por la derecha si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe,}$$

y  $f$  es derivable en  $b$  por la izquierda si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \text{ existe.}$$

En el caso de que  $f$  sea derivable en  $x_0$  denotaremos como  $f'(x_0)$  al límite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Si para cada  $x \in [a, b]$ ,  $f$  es derivable en  $x$  diremos que  $f$  es derivable en  $[a, b]$ . Una vez más, para  $x = a$  la derivada es por la derecha y para  $x = b$  la derivada es por la izquierda.

Uno de los teoremas fundamentales para el cálculo de una variable, que es equivalente al axioma del supremo, es el teorema del valor intermedio que enunciamos a continuación (ver [9]).

**Teorema 2.1.** (*Teorema del Valor Intermedio*) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  tal que  $f(a) < f(b)$  (o  $f(b) < f(a)$ ), entonces para cada  $c \in (f(a), f(b))$  (o  $c \in (f(b), f(a))$ , respectivamente), existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(x_0) = c$ .

Como un caso particular tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.2.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  tal que  $f(a) < 0 < f(b)$ , entonces existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = 0$ .

Es bien conocido que el siguiente teorema es una consecuencia del Teorema 2.1.

**Teorema 2.3.** (*Teorema de los valores extremos*) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces existen  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tales que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  para cada  $x \in [a, b]$ .

Los siguientes teoremas resumen algunas de las propiedades importantes de las funciones derivables.

**Teorema 2.4.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in (a, b)$  es tal que  $f$  es derivable en  $x_0$  y  $f(x_0) \leq f(x)$  para cada  $x \in [a, b]$  o  $f(x) \leq f(x_0)$  para cada  $x \in [a, b]$ , entonces  $f'(x_0) = 0$ .

**Teorema 2.5.** (*Teorema de Rolle*) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$  tal que  $f(a) = f(b)$ , entonces existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f'(x_0) = 0$ .

**Teorema 2.6.** (*Teorema del Valor Medio*) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Teorema 2.7.** (*Teorema de Cauchy*) Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$ .

**Lema 2.8.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $[a, b]$  tal que  $f'(b) < 0$  (o  $f'(b) > 0$ ), entonces existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(x_0) > f(b)$  ( $f(x_0) < f(b)$ ).

*Demostración.* Supongamos que  $f'(b) < 0$  y que para todo  $x \in (a, b)$ ,  $f(x) \leq f(b)$ , es decir,  $f(x) - f(b) \leq 0$  y como  $x < b$  se sigue que  $x - b < 0$  lo cual implica que  $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq 0$  para cada  $x \in (a, b)$ , de donde se sigue que  $f'(b) \geq 0$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(x_0) > f(b)$ .

El caso cuando  $f'(b) > 0$  es análogo al anterior: si para todo  $x \in (a, b)$ ,  $f(x) \geq f(b)$ , entonces  $f(x) - f(b) \geq 0$ , es decir,  $f(x) - f(b) \geq 0$  y como  $x - b < 0$  se sigue que  $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$  para todo  $x \in (a, b)$  lo cual implica que  $f'(b) \leq 0$  que contradice la hipótesis del teorema. Por lo tanto existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(x_0) < f(b)$ .  $\square$

En forma similar se demuestra el siguiente corolario.

**Corolario 2.9.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $[a, b]$ , tal que  $f'(a) > 0$  ( $f'(a) < 0$ ), entonces existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(x_0) > f(a)$  ( $f(x_0) < f(a)$ ).*

**Teorema 2.10.** *(Teorema de Darboux) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y  $y \in (f'(a), f'(b))$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$f'(c) = y.$$

*Demostración.* Sea  $y \in (f'(a), f'(b))$ . Definamos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = yx - f(x).$$

Es claro que  $g$  es continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y  $g'(x) = y - f'(x)$  de donde se sigue que

$$g'(a) = y - f'(a) > 0 \text{ y } g'(b) = y - f'(b) < 0.$$

Si se aplican el Lema 2.8 y el Corolario 2.9, existen  $x_1, x_2 \in (a, b)$  tales que  $g(x_1) > g(b)$  y  $g(x_2) > g(a)$ , lo cual implica que  $g$  no alcanza su máximo ni en  $a$ , ni en  $b$ . Por lo tanto existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g(c) \geq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  y como  $g$  es derivable en  $c$  se sigue que  $g'(c) = 0$ , lo cual implica que

$$f'(c) = y. \quad \square$$

En caso de que  $f'(a) > f'(b)$  se satisface una versión análoga del Teorema de Darboux.

**Lema 2.11.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y  $f'(b)[f(b) - f(a)] \leq 0$ , entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

*Demostración.* Si existen  $x_0, x_1 \in [a, b]$  tales que  $f'(x_0)$  y  $f'(x_1)$  tienen signos contrarios, el Teorema 2.10 garantiza la conclusión del teorema. También, como  $f'(b)[f(b) - f(a)] \leq 0$ , entonces  $f'(b)[f(b) - f(a)] = 0$  o  $f'(b)[f(b) - f(a)] < 0$ . Si  $f'(b)[f(b) - f(a)] = 0$  se sigue que  $f'(b) = 0$  o  $f(b) = f(a)$ , si  $f'(b) = 0$  tomando  $c = b$  se sigue el resultado. Si  $f(a) = f(b)$ , como  $f$  satisface las hipótesis del Teorema 2.5, se sigue que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

Supongamos que  $f'(b)[f(b) - f(a)] < 0$  y  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Como  $(b - a) > 0$  se sigue que  $f'(b) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ ; además, del Teorema 2.6, se sigue que existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  lo cual implica que  $f'(b)f'(x_0) < 0$  y como  $f'(x_0) > 0$ , se sigue que  $f'(b) < 0$ . Por lo tanto, del Lema 2.8 se sigue que existe  $x_1 \in (a, b)$  tal que  $f(x_1) > f(b)$ .

Como  $f'(x_0) > 0$ , entonces  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$  lo cual implica que  $f(a) < f(b)$  y como  $f(b) < f(x_1)$  se sigue que  $f(a) < f(b) < f(x_1)$ . Si se aplica el Teorema 2.1 a  $f$  en el intervalo  $[a, x_1]$  implica que existe  $x_2 \in (a, x_1)$  tal que  $f(x_2) = f(b)$ . Por lo tanto si se aplica el Teorema 2.5 a  $f$  en el intervalo  $[x_2, b]$  existe  $r \in (x_2, b)$  tal que  $f'(r) = 0$  lo cual es una contradicción.

Supongamos que  $f'(b)[f(b) - f(a)] < 0$  y  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Como  $(b - a) > 0$  se sigue que  $f'(b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$ ; además del Teorema 2.6 se sigue que existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  lo cual implica que  $f'(b)f'(x_0) < 0$  y, dado que  $f'(x_0) < 0$ , se sigue que  $f'(b) > 0$ . Por lo tanto, del Lema 2.8 se sigue que existe  $x_1 \in (a, b)$  tal que  $f(x_1) < f(b)$ .

Como  $f'(x_0) < 0$ , entonces  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$  lo cual implica que  $f(b) < f(a)$  y como  $f(x_1) < f(b)$  se sigue que  $f(x_1) < f(b) < f(a)$ . Si se aplica el Teorema 2.1 a  $f$  en el intervalo  $[x_1, b]$  se tiene que existe  $x_2 \in (x_1, b)$  tal que  $f(x_2) = f(a)$ . Por lo tanto al aplicar el Teorema 2.1 a  $f$  en el intervalo  $[a, x_2]$  existe  $r \in (a, x_2)$  tal que  $f'(r) = 0$  lo cual es una contradicción.

Por lo tanto existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ . □

### 3 Teorema de Flett

En esta sección tratamos con uno de los teoremas destacados enunciados en el resumen del capítulo, el Teorema de Flett, que tiene una fácil interpretación geométrica e intuitiva. A diferencia del Teorema del Valor Medio se pide que  $f$  sea derivable en los extremos del intervalo  $[a, b]$  y que las rectas tangentes en esos puntos sean paralelas. El teorema asegura que existe  $c \in (a, b)$  con la propiedad de que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(c, f(c))$  coincide con la recta que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(c, f(c))$ .

En lo que resta de esta sección veremos resultados donde también se modifican algunas de las hipótesis del Teorema del Valor Medio y se obtienen conclusiones análogas.

**Teorema 3.1.** (Flett [3]) *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $[a, b]$  tal que  $f'(a) = f'(b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $f'(a) = f'(b) = 0$  ya que si no fuera éste el caso, la función  $h(x) = f(x) - xf'(a)$  sí satisface tal condición y se trabajaría con ella en lugar de la función  $f$ .

Definamos una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(a) = f'(a) = 0 \text{ y } g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x \neq a.$$

Es claro que  $g$  es una función derivable en  $[a, b]$  y que  $g(a) = 0$ . Si  $g(b) = 0$ , entonces  $g$  satisface el Teorema 2.5 lo cual implica que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$  y como  $g'(x) = -\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} + \frac{f'(x)}{x-a}$  para  $x \neq a$  se tiene que  $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ .

Ahora, si  $g(b) \neq 0$ , entonces  $g(b) > 0$  o  $g(b) < 0$ .

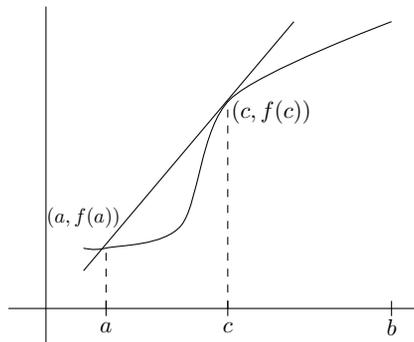
Si  $g(b) > 0$ , como  $g'(b) = -\frac{g(b)}{b-a}$  y  $b - a > 0$ , entonces  $g'(b) < 0$  así que, por el Lema 2.8 se sigue que existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $g(x_0) > g(b)$ , lo cual implica que  $g(a) < g(b) < g(x_0)$ . Por lo tanto, del Teorema 2.1 aplicado a  $g$  en el intervalo  $[a, x_0]$  implica que existe  $x_1 \in (a, x_0)$  tal que  $g(x_1) = g(b)$  de donde del Teorema 2.5 aplicado a  $g$  en el intervalo  $[x_1, b]$  se tiene que existe  $c \in (x_1, b)$  tal que  $g'(c) = 0$  de donde se sigue que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \quad \square$$

Si  $g(b) < 0$ , dado que  $g'(b) = -\frac{g(b)}{b-a}$  y  $b - a > 0$ , entonces  $g'(b) > 0$  y así, por el Lema 2.8, se sigue que existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $g(x_0) < g(b)$  lo cual implica que  $g(x_0) < g(b) < g(a)$ . Por lo tanto, del Teorema 2.1 aplicado a  $g$  en el intervalo  $[a, x_0]$  implica que existe  $x_1 \in (a, x_0)$  tal que  $g(x_1) = g(b)$  de donde, del Teorema 2.5 aplicado a  $g$  en el intervalo  $[x_1, b]$  se tiene que existe  $c \in (x_1, b)$  tal que  $g'(c) = 0$  de donde se sigue que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Al igual que el Teorema del Valor Medio, el Teorema de Flett tiene una interpretación geométrica. En este caso se tiene que la recta que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(c, f(c))$  y la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(c, f(c))$ , coinciden.



De manera análoga, al considerar el punto  $(b, f(b))$  se obtiene un resultado similar al Teorema 3.1.

**Teorema 3.2.** (Myers [5]) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $[a, b]$ , tal que  $f'(a) = f'(b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $f'(a) = f'(b) = 0$ .

Definamos una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(b) = f'(b) \text{ y } g(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \text{ si } x \neq b.$$

Como

$$g'(x) = \frac{-(b-x)f'(x) + (f(b) - f(x))}{(b-x)^2} = \frac{f(b) - f(x)}{(b-x)^2} - \frac{f'(x)}{b-x},$$

entonces

$$g'(a) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)^2} - \frac{f'(a)}{b-a}.$$

Si  $g(a) = 0$ , dado que  $g(b) = 0$ , entonces  $g$  satisface el Teorema 2.5 por lo tanto existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$  de donde se sigue que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

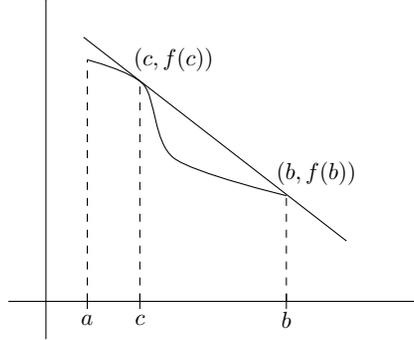
Si  $g(a) \neq 0$ , entonces  $g(a) > 0$  o  $g(a) < 0$ . Si  $g(a) > 0$  como  $g'(a) = \frac{g(a)}{b-a}$  y  $b - a > 0$ , entonces  $g'(a) > 0$ . Por lo tanto, del Corolario 2.9 se sigue que existe  $x_1 \in (a, b)$  tal que  $g(x_1) > g(a)$  y, como  $g(a) > g(b)$  y  $g$  es continua, entonces  $g$  satisface las condiciones del Teorema 2.1 en el intervalo  $[a, x_1]$ . Por lo tanto, existe  $x_2 \in [a, x_1]$  tal que  $g(x_2) = g(a)$  y así,  $g$  satisface las condiciones del Teorema 2.5 en el intervalo  $[a, x_2]$  y por lo tanto, existe  $c \in (a, x_2)$  tal que  $g'(c) = 0$  lo cual implica que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

En forma análoga se demuestra que si  $g(a) < 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}. \quad \square$$

Una vez más, igual que el Teorema del Valor Medio y el Teorema de Flett, el Teorema de Myers tiene una interpretación geométrica. En este caso se tiene que la recta que pasa por los puntos  $(b, f(b))$  y  $(c, f(c))$  y la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(c, f(c))$  coinciden.



El siguiente teorema es una generalización del Teorema 3.1 pues debilita la hipótesis de que  $f'(a) = f'(b)$ .

**Teorema 3.3.** (Trahan [12]) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $[a, b]$  tal que

$$\left[ f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] \left[ f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] \geq 0,$$

entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

*Demostración.* Definamos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(a) = f'(a) \text{ y } g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x \neq a.$$

Es claro que  $g$  es continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$ ,  $g(a) = f'(a)$ ,  $g(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  y que si  $x \neq a$ ,

$$g'(x) = \frac{(x - a)f'(x) - (f(x) - f(a))}{(x - a)^2},$$

así que  $g'(b) = \frac{(b - a)f'(b) - (f(b) - f(a))}{(b - a)^2}$  de donde se sigue que

$$g'(b)[g(b) - g(a)] = -\frac{1}{b - a} \left( f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \left( f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \leq 0.$$

Por lo tanto, del Lema 2.11 se sigue que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ , es decir,  $g'(c) = \frac{(c - a)f'(c) - (f(c) - f(a))}{(c - a)^2} = 0$  lo cual implica que  $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ .  $\square$

**Corolario 3.4.** (Trahan [12]) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $[a, b]$ , tal que

$$f'(a) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ y } f'(b) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ o}$$

$$f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ y } f'(b) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

**Teorema 3.5.** (Tong [10]) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces son válidas las siguientes proposiciones:

1. Existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = -\frac{f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}{c - \frac{a+b}{2}};$$

2. Existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{c - \frac{a+b}{2}}{f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}};$$

3. Existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = -\frac{c - \frac{a+b}{2}}{f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}.$$

*Demostración.* 1. Si se define la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g(x) = [f(x) - f(a)][x - b] + [f(x) - f(b)][x - a],$$

entonces  $g$  es una función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y  $g(a) = 0 = g(b)$ . Por lo tanto, se puede aplicar el Teorema 2.5 para obtener  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$  y, dado que

$$g'(x) = f'(x)[2x - (a + b)] + [2f(x) - (f(a) + f(b))],$$

se tiene que  $g'(c) = f'(c)[2c - (a + b)] + [2f(c) - (f(a) + f(b))] = 0$ . Por lo tanto, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = -\frac{f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}{c - \frac{a+b}{2}}.$$

2. De manera similar a 1., basta definir la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g(x) = [f(x) - f(a)][f(x) - f(b)] - [x - a][x - b].$$

3. De la misma forma que en 1. y 2., al definir la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g(x) = [f(x) - f(a)][f(x) - f(b)] + [x - a][x - b].$$

se obtiene la conclusión. □

Con la finalidad de simplificar los enunciados de los siguientes teoremas damos la siguiente definición.

**Definición 3.6.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Se definen los siguientes números

$$M(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad I(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt, \quad N(f) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

**Teorema 3.7.** (Tong [11]) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , tal que  $M(f) = I(f)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

*Demostración.* Definamos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2}(x - a) - \int_a^x f(t) dt.$$

Es claro que  $g$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , que  $g(a) = 0$  y que

$$g(b) = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a) - \int_a^b f(t) dt = (b - a)[M(f) - I(f)] = 0,$$

lo cual implica que  $g$  satisface las hipótesis del Teorema 2.5; por lo tanto, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$  y como

$$g'(x) = \frac{1}{2}f'(x)(x - a) + \frac{1}{2}[f(x) + f(a)] - f(x),$$

se sigue que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \quad \square$$

**Teorema 3.8.** (Tong [11]) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^2}(c - a).$$

*Demostración.* La función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = f(x) - \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^2}(x - a)(x - b)$$

es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ ,  $g(a) = f(a)$  y  $g(b) = f(b)$  lo cual implica que  $M(g) = M(f)$ . Además

$$\begin{aligned} I(g) &= \frac{1}{b - a} \int_a^b g(t) dt = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt - \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^3} \left[ \frac{t^3}{3} - (a + b) \frac{t^2}{2} + abt \right]_a^b \\ &= I(f) - \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^3} (b - a) \left[ \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a + b)^2}{2} + ab \right] \\ &= I(f) + \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^3} \frac{(b - a)^3}{6} = I(f) + [M(f) - I(f)] = M(f) = M(g). \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.7 se sigue que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = \frac{g(c) - g(a)}{c - a}$  y como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^2}(2x - a - b)$$

se sigue que

$$f'(c) - \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^2}(2c - a - b) = \frac{1}{c - a} [f(c) - \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^2}(c - a)(c - b) - f(a)]$$

lo cual implica que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^2}(c - a). \quad \square$$

**Teorema 3.9.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $[a, b]$ , entonces

1. (Davitt et al. [4]) existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b - a)}(c - a) \text{ y}$$

2. (Cakmak [2]) existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} - \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b - a)}(b - c).$$

*Demostración.* 1. Definamos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = f(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b - a)}(x - a)^2.$$

Es claro que  $g$  es una función derivable en  $[a, b]$  y que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(x - a),$$

de donde se sigue que  $g'(a) = f'(a) = g'(b)$ . Por lo tanto del Teorema 3.1 se sigue que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = \frac{g(c) - g(a)}{c - a}$  lo cual implica que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b - a)}(c - a).$$

2. La función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = f(a + b - x)$$

es una función derivable en  $[a, b]$  y, por la parte 1., existe  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$g'(\xi) = \frac{g(\xi) - g(a)}{\xi - a} + \frac{g'(b) - g'(a)}{2(b - a)}(\xi - a).$$

Si usamos la regla de la cadena y consideramos  $c = a + b - \xi$  obtenemos que existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} - \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b - a)}(b - c). \quad \square$$

**Teorema 3.10.** (Tan et al. [8]) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces son válidas las siguientes proposiciones:

1. Existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{4(M(f) - N(f))}{(b - a)^2}(c - a).$$

2. Existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} - \frac{4(M(f) - N(f))}{(b - a)^2}(b - c).$$

*Demostración.* 1) Definamos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{4(M(f) - N(f))}{(b - a)^2}(x - a).$$

Es claro que  $g$  es una función continua en  $[\frac{a+b}{2}, b]$  y derivable en  $(\frac{a+b}{2}, b)$  y que

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - a) - (f(x) - f(a))}{(x - a)^2} - \frac{4(M(f) - N(f))}{(b - a)^2},$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{b-a}{2}} - \frac{2(M(f) - N(f))}{b - a} \\ &= \frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2f(a) - 2(M(f) - N(f))}{b - a} \\ &= \frac{4f\left(\frac{a+b}{2}\right) - 3f(a) - f(b)}{b - a}, \end{aligned}$$

y que

$$g(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \frac{4(M(f) - N(f))}{b - a} = \frac{4f\left(\frac{a+b}{2}\right) - 3f(a) - f(b)}{b - a}.$$

Es decir,  $g\left(\frac{a+b}{2}\right) = g(b)$ . Por lo tanto, del Teorema 2.5 se sigue que existe  $c \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right) \subset (a, b)$  tal que

$$0 = g'(c) = \frac{f'(c)(c - a) - (f(c) - f(a))}{(c - a)^2} - \frac{4(M(f) - N(f))}{(b - a)^2}$$

lo cual implica que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{4(M(f) - N(f))}{(b - a)^2}(c - a).$$

2) La función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = f(a + b - x).$$

es una función derivable en  $(a, b)$  y por la parte 1 existe  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$g'(\xi) = \frac{g(\xi) - g(a)}{\xi - a} - \frac{4(M(g) - N(g))}{(b - a)^2}(\xi - a),$$

Es claro que  $M(g) = M(f)$  y  $N(g) = N(f)$ , por lo tanto, aplicando la regla de la cadena y considerando  $c = a + b - \xi$  obtenemos que existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} + \frac{4(M(f) - N(f))}{(b - a)^2}(b - c). \quad \square$$

**Teorema 3.11.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces las siguientes proposiciones son válidas.*

1. (Myers [5]) Existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{c - a}.$$

2. (Myers [5]) Existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{b - c}.$$

3. (Tong [11]) Si  $M(f) = I(f)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{2(c - a)}.$$

4. (Tong [11]) Si  $M(f) = I(f)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = 2 \frac{f(c) - f(a)}{b - a}.$$

*Demostración.* 1) Definamos una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = xf(b) - (x - a)f(x).$$

Es claro que  $g$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$  y que  $g(a) = af(b) = g(b)$ . Por lo tanto  $g$  satisface las hipótesis del Teorema 2.5 lo cual implica que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ , y como  $g'(x) = f(b) - [(x - a)f'(x) + f(x)]$ , entonces  $g'(c) = f(b) - [(c - a)f'(c) + f(c)] = 0$  de donde se sigue que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{c - a}.$$

Las demostraciones de los incisos restantes son análogas. Todas resultan ser consecuencia del Teorema 2.5, lo único que cambia es la función a la que se le aplica, y que se define en cada uno de los casos.

2) Considere la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = xf(a) + (b - x)f(x).$$

3) Aquí, la función adecuada es  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt - [f(x) - f(b)](x - a) - \frac{x - a}{b - a} \int_a^b f(t) dt.$$

4) Defina la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g(x) = \frac{1}{2}(b - a)f(x) - \int_a^x f(t) dt + f(a)(x - b). \quad \square$$

**Teorema 3.12.** (Myers [5]) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable en  $[a, b]$  tal que  $f'$  es continua en  $[a, b]$ .

1. Si  $[f(b) - f(a)][f(b) - f(a) - (b - a)f'(b)] < 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{c - a}.$$

2. Si  $[f(b) - f(a)][f(b) - f(a) - (b - a)f'(a)] < 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - c}.$$

3. Si  $[f(b) - f(a)][f(b) - f(a) - (b - a)f'(b)] > 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{b - a}.$$

4. Si  $[f(b) - f(a)][f(b) - f(a) - (b - a)f'(a)] > 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - a}.$$

*Demostración.* 1) Definamos la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = f(b) - f(a) - (x - a)f'(x).$$

Es claro que  $g$  es una función continua en  $[a, b]$  y que

$$g(a) = f(b) - f(a) \text{ y } g(b) = f(b) - f(a) - (b - a)f'(b).$$

Como, por hipótesis  $g(a)g(b) < 0$ , entonces  $g(a)$  y  $g(b)$  tiene signos opuestos; por lo tanto  $g$  satisface las hipótesis del Teorema 2.1 de donde se sigue que existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$0 = g(c) = f(b) - f(a) - (c - a)f'(c),$$

lo cual implica que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{c - a}.$$

Las demostraciones de los incisos restantes son análogas. Todas resultan ser consecuencia del Teorema 2.1, lo único que se tiene que cambiar es la función a la que se le aplica. En cada uno de los casos que sigue se define tal función. 2) Considere la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = f(b) - f(a) - (b - x)f'(x).$$

3) Aquí la función adecuada es  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = f(x) - f(a) - (b - a)f'(x).$$

4) Defina la función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b - a)f'(x). \quad \square$$

Ahora consideremos una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , la recta que pasa por los puntos extremos de su gráfica,  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ , y la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(c, f(c))$ . En 1946 Pompeiu ([6]) encontró que, bajo ciertas condiciones, estas rectas tienen la misma intersección con el eje  $y$ . Finalizamos esta sección con este bello resultado.

**Teorema 3.13.** (*Pompeiu*) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable en  $[a, b]$  y  $0 \notin [a, b]$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(c) - cf'(c).$$

*Demostración.* Como  $0 \notin [a, b]$  podemos suponer que  $0 < a < b$  y definir una función  $g : [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

Es claro que  $g$  es continua en  $[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$ , derivable en  $(\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$  y que  $g'(x) = f(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}f'(\frac{1}{x})$ . Por lo tanto, del Teorema 2.6 tenemos que existe  $t \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$  tal que

$$\frac{g(\frac{1}{a}) - g(\frac{1}{b})}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = g'(t).$$

Por lo tanto, al considerar  $c = \frac{1}{t}$  tenemos que

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(c) - cf'(c). \quad \square$$

## 4 Teorema de Cauchy

En esta sección damos algunos teoremas relacionados con el Teorema de Cauchy (ver Teorema 2.7). Los resultados que veremos se pueden encontrar en [12] o en [10].

**Teorema 4.1.** (Trahan [12]) Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones derivables en  $[a, b]$  tales que  $g'(a) \neq 0$  y  $g(x) \neq g(a)$  para todo  $x \in (a, b]$  y

$$\left[ \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] [(g(b) - g(a))f'(b) - (f(b) - f(a))g'(b)] \geq 0,$$

entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$[g(c) - g(a)]f'(c) = [f(c) - f(a)]g'(c).$$

*Demostración.* Definamos la función  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$h(a) = \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ y } h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \text{ si } x \neq a,$$

Es claro que

$$h(b) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, h(a) = \frac{f'(a)}{g'(a)}, h'(x) = \frac{[g(x) - g(a)]f'(x) - [f(x) - f(a)]g'(x)}{[g(x) - g(a)]^2} \text{ y}$$

$$h'(b) = \frac{[g(b) - g(a)]f'(b) - [f(b) - f(a)]g'(b)}{[g(b) - g(a)]^2}.$$

Como

$$\begin{aligned} h'(b)[h(b) - h(a)] &= \left[ \frac{(g(b) - g(a))f'(b) - (f(b) - f(a))g'(b)}{[g(b) - g(a)]^2} \right] \left[ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} - \frac{f'(a)}{g'(a)} \right] \\ &= - \left[ \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] \left[ \frac{(g(b) - g(a))f'(b) - (f(b) - f(a))g'(b)}{[g(b) - g(a)]^2} \right] \\ &= \frac{-1}{(g(b) - g(a))^2} \left[ \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] \\ &\quad [(g(b) - g(a))f'(b) - (f(b) - f(a))g'(b)] \quad y \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] [(g(b) - g(a))f'(b) - (f(b) - f(a))g'(b)] \geq 0$$

se sigue que  $h'(b)[h(b) - h(a)] \leq 0$ . Por lo tanto  $h$  satisface las hipótesis del Lema 2.11 lo cual implica que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$  lo cual implica que

$$h'(c) = \frac{[g(c) - g(a)]f'(c) - [f(c) - f(a)]g'(c)}{[g(c) - g(a)]^2} = 0,$$

de donde se sigue que

$$[g(c) - g(a)]f'(c) = [f(c) - f(a)]g'(c). \quad \square$$

**Corolario 4.2.** (Trahan [12]) Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones derivables en  $[a, b]$  tales que  $g'(a) \neq 0$  y  $g(x) \neq g(a)$  para todo  $x \in (a, b]$ ,  $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}$  y  $g'(b)[g(b) - g(a)] > 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$(g(c) - g(a))f'(c) = (f(c) - f(a))g'(c).$$

*Demostración.* Definamos la función  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$h(x) = \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ si } x = a \text{ y } h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \text{ si } x \neq a,$$

Es claro que

$$h(b) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, h(a) = \frac{f'(a)}{g'(a)}, h'(x) = \frac{[g(x) - g(a)]f'(x) - [f(x) - f(a)]g'(x)}{[g(x) - g(a)]^2} \quad y$$

$$h'(b) = \frac{[g(b) - g(a)]f'(b) - [f(b) - f(a)]g'(b)}{[g(b) - g(a)]^2}.$$

Como

$$\begin{aligned} h'(b)[h(b) - h(a)] &= \left[ \frac{(g(b) - g(a))f'(b) - (f(b) - f(a))g'(b)}{[g(b) - g(a)]^2} \right] \left[ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} - \frac{f'(a)}{g'(a)} \right] \\ &= - \left[ \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] \left[ \frac{(g(b) - g(a))f'(b) - (f(b) - f(a))g'(b)}{[g(b) - g(a)]^2} \right] \\ &= \frac{-1}{(g(b) - g(a))^2} \left[ \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] \\ &\quad [(g(b) - g(a))f'(b) - (f(b) - f(a))g'(b)] \\ &= \frac{-g'(b)(g(b) - g(a))}{(g(b) - g(a))^2} \left[ \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] \left[ \frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right]. \end{aligned}$$

Como  $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}$  y  $g'(b)[g(b) - g(a)] > 0$  se sigue que

$$h'(b)[h(b) - h(a)] = \frac{-g'(b)(g(b) - g(a))}{(g(b) - g(a))^2} \left[ \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right]^2 < 0.$$

Por lo tanto del Lema 2.11 tenemos el resultado deseado.  $\square$

**Teorema 4.3.** (Trahan [12]) Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones derivables en  $[a, b]$  tales que

$$[g'(a)(f(b) - f(a)) - f'(a)(g(b) - g(a))][g'(a)f'(b) - f'(a)g'(b)] \leq 0,$$

entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f'(c)g'(a) = f'(a)g'(c).$$

*Demostración.* Definamos la función  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$h(x) = [f(x) - f(a)]g'(a) - [g(x) - g(a)]f'(a).$$

Es claro que  $h(a) = 0$ ,

$$h(b) = [f(b) - f(a)]g'(a) - [g(b) - g(a)]f'(a),$$

$$h'(x) = f'(x)g'(a) - g'(x)f'(a) \text{ y}$$

$$h'(b) = f'(b)g'(a) - g'(b)f'(a)$$

se sigue que

$$h'(b)[h(b) - h(a)] = [g'(a)(f(b) - f(a)) - f'(a)(g(b) - g(a))][g'(a)f'(b) - f'(a)g'(b)],$$

lo cual implica que  $h'(b)[h(b) - h(a)] \leq 0$ . Por lo tanto  $h$  satisface las hipótesis del Lema 2.11 lo cual implica que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$  se sigue que

$$f'(c)g'(a) = f'(a)g'(c). \quad \square$$

**Teorema 4.4.** Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas en  $[a, b]$ , derivables en  $(a, b)$  tales que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = -\frac{f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}{g(c) - \frac{g(a)+g(b)}{2}}.$$

*Demostración.* Definamos la función  $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$k(x) = [f(x) - f(a)][g(x) - g(b)] + [f(x) - f(b)][g(x) - g(a)].$$

Es claro que  $k$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ ,  $k(a) = 0$ ,  $k(b) = 0$  y que

$$\begin{aligned} k'(x) &= f'(x)[g(x) - g(b)] + g'(x)[f(x) - f(a)] + f'(x)[g(x) - g(a)] \\ &\quad + g'(x)[f(x) - f(b)] \\ &= f'(x)[2g(x) - (g(a) + g(b))] + g'(x)[2f(x) - (f(a) + f(b))]. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $k$  satisface las hipótesis del Teorema 2.5 de donde se sigue que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $k'(c) = 0$ . Lo anterior implica que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = -\frac{f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}{g(c) - \frac{g(a)+g(b)}{2}}. \quad \square$$

Las demostraciones de los Teoremas 4.5, 4.6 y 4.7 son análogas a la demostración del Teorema 4.4. Todas son consecuencias del Teorema 2.5, lo único que cambia es la función a la que se le aplica y que se define en cada uno de los casos.

**Teorema 4.5.** Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas en  $[a, b]$ , derivables en  $(a, b)$  tales que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}{g(c) - \frac{g(a)+g(b)}{2}}.$$

*Demostración.* Definamos la función  $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$k(x) = [f(x) - f(a)][g(x) - g(b)] - [f(x) - f(b)][g(x) - g(a)]. \quad \square$$

**Teorema 4.6.** Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas en  $[a, b]$ , derivables en  $(a, b)$  tales que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = -\frac{g(c) - \frac{g(a)+g(b)}{2}}{f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}.$$

*Demostración.* Definamos la función  $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$k(x) = [f(x) - f(a)][f(x) - f(b)] + [g(x) - g(b)][g(x) - g(a)]. \quad \square$$

**Teorema 4.7.** Si  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas en  $[a, b]$ , derivables en  $(a, b)$  tal que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{g(c) - \frac{g(a)+g(b)}{2}}{f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}.$$

*Demostración.* Definamos la función  $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada como

$$k(x) = [f(x) - f(a)][f(x) - f(b)] - [g(x) - g(b)][g(x) - g(a)]. \quad \square$$

## Agradecimientos

Agradecemos encarecidamente a los árbitros su revisión exhaustiva del trabajo. Sus sugerencias y comentarios permitieron mejorar sustancialmente una primera versión del mismo.

## Bibliografía

- [1] Juan Angoa, J. Arroyo, A. Contreras, D. Herrera, M. Ibarra, R. Linares, F. Macías, A. Martínez, C. Soriano, F. Velázquez, *Cálculo diferencial en una variable*, Fomento Editorial BUAP, serie Textos Científicos, México, (2005).
- [2] Devrim Cakmak, A. Tiriyaki, *Mean value theorem for holomorphic functions*, Electronic Journal of Differential Equations 34 (2012) 1-6.
- [3] Thomas M. Flett, *A Mean Value Theorem*, The Mathematical Gazzete, 42, (1958) 38-39.
- [4] Richard M. Davitt, R.C. Powers, T. Riedel and P.K. Sahoo *Flett's Mean Value Theorem for Holomorphic Functions*, Mathematics Magazine, 72, (1999), 304-307.
- [5] Roy E. Myers, *Some elementary results related to the mean value theorem*. The Two-Year College Mathematics, 8, (1977), 51-53.
- [6] Dimitrie Pompeiu, *Sur une proposition analogue au theoreme des accroissements finis*. Mathematica Cluj, 22, (1946), 143-146.

- [7] Michael Spivak, *Calculus. Cálculo infinitesimal*, Segunda edición, Editorial re-verté, España, (2001).
- [8] Chengguan Tan and S. Li, *Some new mean value theorems of Flett type*, International Journal Mathematical Education In Science and Technology, 45:7, (2014), 1103-1107.
- [9] Holger Teismann, *Toward a More Complete List of Completeness Axioms*, The American Mathematical Monthly, 120 (2), (2013), 99-114.
- [10] Jingcheng Tong, *Classroom notes: The mean value theorems of Lagrange and Cauchy (II)*, International Journal Mathematical Education In Science and Technology, 31, (2000), 447-449.
- [11] Jingcheng Tong, *On Flett's mean value theorem*, International Journal Mathematical Education In Science and Technology, 35, (2004), 936-941.
- [12] Donald H. Trahan, *A new type of mean value theorem*, Mathematics Magazine, 39 (1966), 264-268.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

mibarra@fcfm.buap.mx

maga@fcfm.buap.mx

## Capítulo 5

### Upper and Lower Estimates for Fejér sums

Jorge Bustamante González  
FCFM, BUAP

#### Resumen

In this paper we present a characterization of the rate of convergence of the Fejér sums in the form

$$\|f - \sigma_n(f)\|_p \sim \frac{1}{n+1} \left\| \int_{\pi/(n+1)}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Estimates of the involved constants are included.

## 1 Introduction

Let  $C_{2\pi}$  denote the Banach space of all  $2\pi$ -periodic continuous functions  $f$  defined on the real line  $\mathbb{R}$  with the sup norm

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

For  $1 \leq p < \infty$ , the Banach space  $\mathbb{L}^p$  consisting of all  $2\pi$ -periodic, Lebesgue measurable functions  $f$  on  $\mathbb{R}$  for which

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

While  $\mathbb{L}^{\infty}$  is the family of the essentially bounded functions. In order to avoid confusion between  $\mathbb{L}^{\infty}$  and  $C_{2\pi}$ , we use the following notations:

$$X^p = \begin{cases} \mathbb{L}^p, & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ C_{2\pi}, & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

By  $W_p^r$  we mean the family of all functions  $f \in X^p$  such that  $f, f', \dots, f^{(r-1)}$  are absolutely continuous and  $f^{(r)} \in X^p$ . We use the notations  $D(f) = f'$  and  $D^{r+1}(f) = D(D^r(f))$ .

The symmetric difference of order  $r$  is defined by

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f(x + r(h/2) - kh).$$

If  $r \in \mathbb{N}$ ,  $f \in X^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), and  $t > 0$ , the modulus of smoothness of order  $r$  of  $f$  is defined by

$$\omega_r(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^r f\|_p.$$

Recall that the conjugate function is defined by [14, page 51]

$$\tilde{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\pi} \int_h^\pi \frac{f(x+s) - f(x-s)}{2 \tan(s/2)} ds, \quad f \in X^1,$$

whenever the limit exists. It is known that  $\tilde{f}(x)$  exists almost everywhere [14, page 92] and  $\tilde{f} \in C_{2\pi}$  for any differentiable function  $f$ . To avoid complicated notations sometimes we write  $Q(f)$  instead of  $\tilde{f}$ .

Let  $\mathbb{T}_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) denote the family of all (real) trigonometric polynomials up to degree  $n$ .

The Fejér operator (see [5]) is defined by

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x+t) F_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) F_n(t) dt,$$

where the Fejér kernel  $F_n$  is given by

$$F_n(x) = \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{2(n+1) \sin^2(x/2)}. \quad (1)$$

It can be proved that

$$\sigma_n(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)),$$

where  $a_k(f)$  and  $b_k(f)$  are the Fourier coefficients of  $f$ .

For continuous functions Xie and Zhou characterized the rate of convergence of Fejér sums as follows.

**Theorem 1.1.** (Xie and Zhou, [12, Th. 1]) *There exist positive constants  $C_1$  and  $C_2$  such that, for each  $f \in C_{2\pi}$  and  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$C_1 \|f - \sigma_n(f)\|_\infty \leq \frac{1}{n} \left\| \int_{1/n}^\infty \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{t^2} dt \right\|_\infty \leq C_2 \|f - \sigma_n(f)\|_\infty.$$

Here we present a variant of the previous theorem with several differences. 1) Our results hold for all  $X^p$  spaces. 2) We obtain estimates analogous to the one in Theorem 1.1, but in the form

$$C_3 \|f - \sigma_n(f)\|_p \leq \frac{1}{n+1} \left\| \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p \leq C_4 \|f - \sigma_n(f)\|_p.$$

3) We provide estimates (which do not depend on  $p$ ) for the constants  $C_3$  and  $C_4$  (see Theorem 4.6).

A difficult part of this article is related with the proof of inequalities of the form

$$\omega_3(f, h)_p \leq C h \left\| \int_h^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p,$$

and

$$\omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p \leq C \frac{1}{n+1} \left\| \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p.$$

This is accomplished in Section 3. In the last section we present the main results: Theorems 4.3 and 4.6. We remark that Section 3 is not needed for proving the first two inequalities in Theorem 4.6. Some parts of our proofs are similar to the one of Xie and Zhou, but there is a great difference. Xie and Zhou used a result from [8] (Theorem 1.3) which is based on properties of the Gauss-Weierstrass operator. Here we do not use the results of [8].

## 2 Auxiliary results

We recall in Theorem 2.1 some known inequalities. For a proof of (2) see [11, pages 213-214], and a proof of (3) can be seen in [14, T. II, page 12].

**Theorem 2.1.** *If  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r, n \in \mathbb{N}$  and  $T_n \in \mathbb{T}_n$ , then*

$$\|D^r(T_n)\|_p \leq \left( \frac{n}{2 \sin(nh/2)} \right)^r \|\Delta_h^r T_n\|_p \leq n^r \|T_n\|_p, \quad (2)$$

for any  $h \in (0, 2\pi/n)$ . Moreover

$$\|D(\widetilde{T}_n)\|_p \leq n \|T_n\|_p. \quad (3)$$

The best approximation of order  $n \in \mathbb{N}_0$  of a function  $f \in X^p$  from  $\mathbb{T}_n$  is defined by

$$E_{n,p}(f) = \inf_{T \in \mathbb{T}_n} \|f - T\|_p, \quad f \in X^p.$$

**Proposition 2.2.** (Foucart et al, [6, Theorem 2.5]) *If  $f \in X^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) and  $n \in \mathbb{N}$ , then*

$$E_{n,p}(f) \leq \frac{9}{10} \omega_3\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \quad (4)$$

and

$$E_{n,p}(f) \leq \frac{5}{8} \omega_2\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p. \quad (5)$$

### 3 Inequalities for moduli of continuity

For  $\beta > 1$  and  $0 < h < \pi$ , let  $K(t) = K_{\beta,\lambda}(t)$  denote the  $2\pi$ -periodic function such that

$$K(t) = \begin{cases} \lambda \frac{\sin^\beta(h/2)}{h} \frac{1}{|\sin(t/2)|^\beta}, & h \leq |t| \leq \pi, \\ 0, & |t| < h, \end{cases} \quad (6)$$

where  $\lambda = \lambda(h, \beta)$  is chosen from the condition

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t) dt = 1. \quad (7)$$

As usually, for  $f, g \in X^1$  the convolution is defined by

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t-x) dt.$$

The following lemma is inspired in part from the proof of Theorem 1.1 in [9], but our proof is simpler and provides estimates for the constants.

**Proposition 3.1.** *Fix  $\beta > 1$  and  $h > 0$  such that  $h \leq 2^{-1/(\beta-1)} \pi$ . If  $K(t)$  is defined by (6), then*

(i)  *$K$  is a non-negative even function and*

$$\frac{2^\beta(\beta-1)}{\pi^{\beta-1}} < \lambda(h, \beta) \leq \frac{\beta-1}{(2\pi)^{\beta-1}}.$$

(ii) *If  $H(x) = (K * K * K)(x)$ , then  $H \in C_{2\pi}^1$  and*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(H'(t))^2}{H(t)} dt \leq \frac{\beta^2}{4 \sin^2(h/2)}. \quad (8)$$

*Proof.* (i) The first assertion follows from the definition of  $K$ . From (6) one has

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t) dt = \lambda \frac{\sin^{\beta}(h/2)}{h\pi} \int_h^{\pi} \frac{1}{\sin^{\beta}(t/2)} dt \\ &\geq \lambda \pi^{\beta} \frac{h^{\beta}}{h\pi} \int_h^{\pi} \frac{1}{(t/2)^{\beta}} dt = 2^{\beta} \lambda \pi^{\beta-1} \frac{h^{\beta-1}}{(\beta-1)} (h^{1-\beta} - \pi^{1-\beta}) \\ &\geq 2^{\beta-1} \lambda \pi^{\beta-1} \frac{h^{\beta-1}}{(\beta-1)} h^{1-\beta} = \frac{(2\pi)^{\beta-1}}{\beta-1} \lambda. \end{aligned}$$

On the other hand

$$1 = \lambda \frac{\sin^{\beta}(h/2)}{h\pi} \int_h^{\pi} \frac{1}{\sin^{\beta}(t/2)} dt \leq \lambda \frac{h^{\beta-1}}{2^{\beta}\pi} \pi^{\beta} \int_h^{\pi} \frac{1}{t^{\beta}} dt < \lambda \frac{h^{\beta-1} \pi^{\beta-1}}{2^{\beta}(\beta-1)} \frac{1}{h^{\beta-1}}.$$

(ii) Set  $F(x) = (K * K)(x)$ . Notice that, for  $x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x+t)K(t) dt = \lambda \frac{\sin^{\beta}(h/2)}{2h\pi} \int_{h \leq |t| \leq \pi} \frac{K(x+t) dt}{|\sin(t/2)|^{\beta}} \\ &= \lambda \frac{\sin^{\beta}(h/2)}{2h\pi} \int_h^{\pi} \frac{K(x+t) + K(x-t) dt}{\sin^{\beta}(t/2)}. \end{aligned}$$

The previous identity can be used to prove that  $F(x)$  is continuous and has a continuous derivative in  $[-\pi, \pi] \setminus \{-2h, 0, 2h\}$  and it follows from these properties of  $F$  that  $H \in C_{2\pi}^1$ .

In order to prove the equation (8), first notice that

$$\begin{aligned} |H'(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t+v)F'(v) dv \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K(t+v)(F'(v))^2}{F(v)} dv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t+v)F(v) dv} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K(t+v)(F'(v))^2}{F(v)} dv} \sqrt{H(t)}, \end{aligned}$$

and

$$|F'(v)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(v+w)K'(w) dw \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{h \leq |w| \leq \pi} K(v+w)K'(w) dw \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\lambda \sin^\beta(h/2)}{4h\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{h \leq |w| \leq \pi} K(v+w) \frac{\beta}{|\sin(w/2)|^{\beta+1}} dw \\
&\leq \frac{\lambda \beta \sin^{\beta-1}(h/2)}{4h\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{h \leq |w| \leq \pi} K(v+w) \frac{dw}{|\sin(w/2)|^\beta} \\
&= \frac{\beta}{2 \sin(h/2)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(v+w) K(w) dw = \frac{\beta}{2 \sin(h/2)} F(v).
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(H'(t))^2}{H(t)} dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K(t+v)(F'(v))^2}{F(v)} dv dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(F'(v))^2}{F(v)} dv \\
&\leq \frac{\beta^2}{4 \sin^2(h/2)} \int_{-\pi}^{\pi} F(v) dv = \frac{\pi \beta^2}{2 \sin^2(h/2)}. \quad \square
\end{aligned}$$

By modifying the proof of Theorem 2.1 of [7] we get

**Theorem 3.2.** *Let  $\Phi \in C_{2\pi}^1$  be a positive function satisfying  $\int_0^{2\pi} \Omega(t) dt = 2\pi$  and*

$$\varepsilon^{-2} := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\Phi'(t))^2}{\Phi(t)} dt < \infty. \quad (9)$$

If  $f \in X^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ),  $M(f) = f * \Phi$ , and  $s > 0$ , then

$$\omega_3(f, s)_p \leq \left(24 + \frac{s^3}{\varepsilon^3}\right) \|(I - M)(f)\|_p.$$

The next result is the analogous of Theorem 1.1 of [9].

**Theorem 3.3.** *If  $f \in X^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) and  $n \in \mathbb{N}$ , then*

$$\omega_3\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \leq \left(3 + 8^2 \pi^6\right) \frac{1}{\pi^2(n+1)} \left\| \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p.$$

*Proof.* Set  $h = 1/(\pi(n+1))$  and define the operator  $L_h$  by

$$L_h(f, x) = \frac{\lambda \sin^2(h/2)}{2h} \int_h^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{\sin^2(u/2)} du = (f * K)(x),$$

where  $K(x)$  and  $\lambda = \lambda(h, 2)$  are defined as in equations (6) and (7) respectively, with  $\beta = 2$ . Then

$$f(x) - L_h(f, x) = \frac{\lambda \sin^2(h/2)}{h} \int_h^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(x)}{\sin^2(u/2)} du. \quad (10)$$

If  $H(x) = (K * K * K)(x)$ , it follows  $(f * H)(x) = L_h^3(f, x)$ . If

$$\varepsilon^{-2} := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(H'(t))^2}{H(t)} dt,$$

from equation (8) and Proposition 3.1 we know that

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{\sin^2(h/2)}} \leq \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{h} \leq \frac{8}{h} \quad \text{and} \quad \lambda(h, 2) \leq \frac{1}{2\pi}.$$

Now, from Theorem 3.2 obtain

$$\begin{aligned} \omega_3\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p &\leq \left(24 + \frac{\pi^3}{(n+1)^3\varepsilon^3}\right) \|(I - L_h)(f)\|_p \\ &\leq \left(24 + \frac{(8\pi)^3}{(n+1)^3h^3}\right) \frac{\sin^2(h/2)}{2\pi h} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p \\ &\leq \left(3 + 8^2\pi^6\right) \frac{h}{\pi} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposition 3.4.** *If  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , and  $T_n \in \mathbb{T}_n$ , then*

$$\|D^3(\tilde{T}_n)\|_p \leq 2(n+1)\|D^2T_n\|_p.$$

*Demostración.* It is known that  $T \in \mathbb{T}_n$ , thus

$$(I - \sigma_n)(T) = \frac{1}{n+1}(\tilde{T})', \quad (11)$$

where  $I$  is the identity operator. Therefore

$$D^3(\tilde{T}_n) = D^2(D(\tilde{T}_n)) = (n+1)D^2(I - \sigma_n(T)) = (n+1)(I - \sigma_n)(D^2(T)).$$

□

**Proposition 3.5.** *Assume  $f \in X^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ),  $n \in \mathbb{N}$ , and  $T_n \in \mathbb{T}_n$  satisfies  $E_{n,p}(f) = \|f - T_n\|_p$ . Then for  $n > 1$ ,*

$$\left(\frac{1}{\pi(n+1)}\right)^2 \|D^2(T_n)\|_p \leq \frac{1 + 144\pi^3}{(n+1)} \left\| \int_{1/(\pi(n+1))}^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p.$$

*Proof.* Set  $h = 1/(\pi(n + 1))$  and  $g = DQ(T_n)$ . Notice that

$$D^2T_n = -DQ(g) \quad \text{and} \quad D^2g = D^3(\tilde{T}_n).$$

The following known formula can be proved by mean of integration by parts:

$$DQ(g)(x) = (\tilde{g})'(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\Delta_t^2 g(x)}{\sin^2(t/2)} dt. \quad (12)$$

If  $L_h$  is defined as in Theorem 3.3, we use the Minkowski inequality and (10) to obtain

$$\begin{aligned} \|DQ(g)\|_p &\leq \left\| \frac{1}{4\pi} \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 g(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p + \|D^2g\|_p \frac{1}{4\pi} \int_0^h \frac{t^2}{\sin^2(t/2)} dt \\ &\leq \left\| \frac{1}{4\pi} \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 g(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p + \frac{\pi}{4} \|D^2g\|_p h \\ &= \frac{h}{4\pi \lambda \sin^2(h/2)} \|g - L_h(g)\|_p + \frac{\pi}{4} h \|D^3\tilde{T}_n\|_p. \end{aligned} \quad (13)$$

Using Szegő inequality (3) and (10), one has

$$\begin{aligned} \|g - L_h(g)\|_p &= \|DQ(T_n) - L_h(DQ(T_n))\|_p = \left\| DQ\left(T_n - L_h(T_n)\right) \right\|_p \\ &\leq n \|T_n - L_n(T_n)\|_p \leq n \left( \|f - T_n\|_p + \|L_h(f - T_n)\|_p + \|f - L_h(f)\|_p \right) \\ &\leq n \left( 2\|f - T_n\|_p + \frac{\lambda \sin^2(h/2)}{h} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Recall that (see Proposition 3.1)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(h, 2)} < \frac{\pi}{4}.$$

From (13), (14) and Proposition 3.4, we obtain

$$\begin{aligned} \|D^2(T_n)\|_p &= \|DQ(g)\|_p \leq \frac{\pi h}{4} 2(n + 1) \|D^2(T_n)\|_p \\ &\quad + \frac{nh}{4\pi \lambda \sin^2(h/2)} \left( 2\|f - T_n\|_p + \frac{\lambda \sin^2(h/2)}{2h\pi} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \|D^2(T_n)\|_p + \frac{\pi n \|f - T_n\|_p}{2h\lambda} + \frac{n}{8\pi^2} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|D^2(T_n)\|_p + \frac{\pi^3 n(n+1) \|f - T_n\|}{8} + \frac{n}{8\pi^2} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p.$$

From the previous inequality, (4) and Theorem 3.3 one has

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\pi(n+1)}\right)^2 \|D^2(T_n)\|_p &\leq \frac{\pi \|f - T_n\|}{4} + \frac{1}{4(n+1)\pi^4} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p \\ &\leq \frac{\pi}{4} \frac{9}{10} \omega_3\left(f, \frac{\pi}{(n+1)}\right)_p + \frac{1}{4(n+1)\pi^3} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p \\ &\leq \left(\frac{\pi}{4} \frac{9}{10} \frac{3 + 8^2 \pi^6}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^3}\right) \frac{1}{(n+1)} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p \\ &\leq (1 + 144\pi^3) \frac{1}{(n+1)} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p. \quad \square \end{aligned}$$

**Theorem 3.6.** *If  $f \in X^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) and  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 1$ ), then*

$$\omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p \leq \left(3 + 4^5 \pi^4 + 144\pi^3\right) \frac{1}{n+1} \left\| \int_{1/(\pi(n+1))}^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p.$$

*Proof.* Set  $h = 1/(\pi(n+1))$ , and chose  $T_n \in \mathbb{T}_n$  such that

$$E_n(f) = \|f - T_n\|_p.$$

From Proposition 3.5, Theorem 3.3, and Proposition 3.5, we obtain

$$\begin{aligned} \omega_2(f, h)_p &\leq 4 \|f - T_n\| + h^2 \|D^2(T_n)\|_p \\ &\leq \frac{18}{5} \omega_3(f, h)_p + \frac{1 + 144\pi^3}{(n+1)} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(u/2)} du \right\|_p \\ &\leq \left(\frac{18}{5} \frac{(3 + 8^2 \pi^6)}{\pi^2} + 1 + 144\pi^3\right) \frac{1}{n+1} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p \\ &\leq \left(3 + 4^5 \pi^4 + 144\pi^3\right) \frac{1}{n+1} \left\| \int_h^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p. \quad \square \end{aligned}$$

## 4 Applications to Fejér sums

**Proposition 4.1.** *Assume  $1 \leq p \leq \infty$ . If  $n \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ , then*

$$\frac{1}{\pi(4\pi^2 + 5)} \frac{1}{(n+1)} \left\| \frac{1}{4\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p \leq \|f - \sigma_n(f)\|_p.$$

*Demostración.* Set  $Q = \|f - \sigma_n(f)\|_p$ . Notice that

$$\begin{aligned} \left\| \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p &\leq 4Q \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\pi^2 dt}{t^2} + \left\| \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 \sigma_n(f, \cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p \\ &\leq 4\pi^3(n+1)Q + \left\| \int_0^{1/(\pi(n+1))} \frac{\Delta_t^2 \sigma_n(f, \cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p + \left\| \int_0^{\pi} \frac{\Delta_t^2 \sigma_n(f, \cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p \\ &\leq 4\pi^3(n+1)Q + \pi^2 \|\sigma_n''(f)\|_p \int_0^{1/(\pi(n+1))} \frac{t^2}{t^2} dt + 4\pi \|(\tilde{\sigma}_n(f))'\|_p \\ &\leq 4\pi^3(n+1)Q + \frac{\pi}{n+1} \|\sigma_n''(f)\|_p + 4\pi \|(\tilde{\sigma}_n(f))'\|_p, \end{aligned}$$

where we have used (12). Hence, taking into account (3) (recall  $\sigma_n(f) \in \mathbb{T}_n$ ) and (11), one has

$$\begin{aligned} \left\| \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p &\leq 4\pi^3(n+1)Q + 5\pi \|(\tilde{\sigma}_n(f))'\|_p \\ &= 4\pi^3(n+1)Q + 5\pi(n+1) \|\sigma_n((I - \sigma_n)(f))\|_p \leq \pi(4\pi^2 + 5)(n+1)Q. \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.2.** *Fix  $1 \leq p \leq \infty$ . If  $f \in X^p$ ,  $n > 1$ , and  $T$  is a trigonometric polynomial, then*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{4\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} \cos(nt) dt \right\|_p &\leq \pi^2(4\pi + 1)(n+1) \|T - f\|_p \\ &\quad + \pi^3(n+1) \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p + \pi^2(3 + 6\pi) \frac{\|T''\|_p}{n}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Set  $a = 1/(\pi(n + 1))$  and denote

$$A_n(x) = \frac{1}{4\pi} \int_a^\pi \frac{\Delta_t^2 T(x)}{\sin^2(t/2)} \cos(nt) dt.$$

First notice that

$$\frac{1}{4\pi} \int_a^\pi \frac{\|\Delta_t^2 f(\cdot) - \Delta_t^2 T(\cdot)\|_p}{\sin^2(t/2)} dt \leq \frac{\|f - T\|_p}{\pi} \int_a^\pi \frac{\pi^2}{t^2} dt \leq \pi^2(n + 1) \|f - T\|_p.$$

Hence

$$\left\| \frac{1}{4\pi} \int_a^\pi \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} \cos(nt) dt \right\|_p \leq \pi^2(n + 1) \|f - T\|_p + \|A_n\|_p.$$

Now we should estimate  $\|A_n\|_p$ . We use the following relations: for each trigonometric polynomial  $T$

$$\Delta_t^2 T(x) = \int_0^t \int_{-s}^s T''(x + w) dw ds,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \Delta_t^2 T(x) \right) = \int_{-t}^t T''(x + s) ds = \Delta_{2t} T'(x),$$

and

$$\frac{d}{dt} \Delta_{2t} T'(x) = \frac{d}{dt} \int_{-t}^t T''(x + s) ds = T''_n(x + t) + T''(x - t).$$

Denote

$$I_{n,1}(x) = -\frac{\Delta_a^2 T(x)}{\sin^2(a/2)} \left( \frac{\sin(na)}{n} \right)$$

and

$$I_{n,2}(x) = -\frac{1}{4n^2\pi} \left( \frac{\Delta_{2a} T'(x)}{\sin^2(a/2)} - \frac{\Delta_a^2 T(x) \cos(a/2)}{\sin^3(a/2)} \right) \cos(na).$$

Since  $\sin(j\pi) = 0$  and  $\Delta_{2\pi} T'_n(x) = 0$ , twice integration by part yields

$$\begin{aligned} A_n(x) - I_{n,1}(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_a^\pi \frac{\Delta_t^2 T(x)}{\sin^2(t/2)} \frac{d}{dt} \left( \frac{\sin(nt)}{n} \right) dt - I_{n,1}(x) \\ &= -\frac{1}{4n\pi} \int_a^\pi \sin(nt) \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta_t^2 T(x)}{\sin^2(t/2)} \right) dt \\ &= \frac{1}{4n\pi} \int_a^\pi \left( \frac{\Delta_{2t} T'(x)}{\sin^2(t/2)} - \frac{\Delta_t^2 T(x) \cos(t/2)}{\sin^3(t/2)} \right) \frac{d}{dt} \left( \frac{\cos(nt)}{n} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\cos(na)}{4n^2\pi} \left( \frac{\Delta_{2a}T'(x)}{\sin^2(a/2)} - \frac{\Delta_a^2T(x) \cos(a/2)}{\sin^3(a/2)} \right) \\
&\quad - \frac{1}{4n^2\pi} \int_a^\pi \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta_{2t}T'(x)}{\sin^2(t/2)} - \frac{\Delta_t^2T(x) \cos(t/2)}{\sin^3(t/2)} \right) \cos(nt) dt \\
&= I_{n,2}(x) - \frac{1}{4n^2\pi} \int_a^\pi \frac{T''(x+t) + T''(x-t)}{\sin^2(t/2)} \cos(nt) dt \\
&\quad + \frac{1}{4n^2\pi} \int_a^\pi \frac{\Delta_{2t}T'(x) \cos(t/2)}{\sin^3(t/2)} \cos(nt) dt \\
&\quad + \frac{1}{4n^2\pi} \int_a^\pi \left( \frac{2\Delta_tT'(x) \cos(t/2) - \Delta_t^2T(x) \sin(t/2)}{2\sin^3(t/2)} \right) \cos(nt) dt \\
&\quad - \frac{3}{2} \frac{1}{4n^2\pi} \int_a^\pi \left( \frac{\Delta_t^2T(x) \cos^2(t/2)}{\sin^4(t/2)} \right) \cos(nt) dt \\
&= I_{n,2}(x) + I_{n,2}(x) + I_{n,3}(x) + I_{n,4}(x) + I_{n,5}(x) + I_{n,6}(x).
\end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{\pi/n}^2T\|_p &\leq \frac{\pi^2}{n^2} \|T''\|_p, & \|\Delta_{\pi/n}T'\|_p &\leq \frac{\pi}{n} \|T''\|_p, \\
\|\Delta_tT'\|_p &\leq t\|T''\|_p, & \text{and } \|\Delta_t^2T\|_p &\leq t^2\|T''\|_p,
\end{aligned}$$

one has

$$\begin{aligned}
\|I_{n,1}\|_p &\leq \frac{1}{\sin^2(1/(2\pi(n+1)))} \left( \frac{\sin(n/(\pi(n+1)))}{n} \right) \|\Delta_{1/(\pi(n+1))}^2T\| \\
&\leq \frac{4\pi^4(n+1)^2}{4} \frac{1}{\pi(n+1)} \left( 4\|T-f\|_p + \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p \right) \\
&= \pi^3(n+1) \left( 4\|T-f\|_p + \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p \right), \\
\|I_{n,2}\|_p &\leq \frac{1}{4n^2\pi} \left( \frac{2}{\pi(n+1)} \frac{\pi^2}{4} 4\pi^2(n+1)^2 + \frac{\pi^6(n+1)^3}{\pi^2(n+1)^2} \right) \|T''\|_p \\
&\leq \frac{1}{4n^2} \left( 2\pi^2(n+1) + \pi^3(n+1) \right) \|T''\|_p = \frac{\pi^2(2+\pi)}{2n} \|T''\|_p, \\
\|I_{n,3}\|_p &\leq \frac{1}{4n^2\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^\pi \frac{2\|T''\|_p dt}{\sin^2(t/2)} \leq \frac{\|T''\|_p}{2n^2} \pi^2(n+1) = \frac{\pi^2}{n+1} \|T''\|_p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|I_{n,4}\|_p &\leq \frac{\|T''\|_p}{2n^2\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{t}{\sin^3(t/2)} dt \leq \frac{\pi^2\|T''\|_p}{2n^2} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{1}{t^2} dt \\ &\leq \frac{\pi^3(n+1)}{2n^2} \|T''\|_p \leq \frac{\pi^3}{n} \|T''\|_p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|I_{n,5}\|_p &\leq \frac{\|T''\|_p}{4n^2\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{4t + t^2 \sin(t/2)}{2 \sin^3(t/2)} dt \\ &\leq \frac{\|T''\|_p}{8n^2} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \left( \frac{4\pi^2}{t^2} + \pi \right) dt \leq \frac{\|T''\|_p}{8n^2} (4\pi^3(n+1) + \pi^2) \\ &\leq \frac{(1 + \pi^3)}{n} \|T''\|_p, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|I_{n,6}\|_p &\leq \frac{3\|T''\|_p}{8n^2\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{t^2}{\sin^4(t/2)} dt \leq \frac{3\pi^3\|T''\|_p}{8n^2} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{dt}{t^2} \\ &\leq \frac{3\pi^4(n+1)}{8n^2} \|T''\|_p \leq \frac{3\pi^4}{4n} \|T''\|_p \leq \frac{3\pi^3}{n} \|T''\|_p. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \|A_n\|_p &\leq \pi^3(n+1) \left( 4\|T - f\|_p + \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p \right) \\ &\quad + \left( \frac{\pi^2(2+\pi)}{2} + \pi^2 + \pi^3 + 1 + \pi^3 + 3\pi^3 \right) \frac{\|T''\|_p}{n} \\ &\leq \pi^3(n+1) \left( 4\|T - f\|_p + \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p \right) + \pi^2(3+6\pi) \frac{\|T''\|_p}{n}. \end{aligned}$$

□

**Theorem 4.3.** Assume  $1 \leq p \leq \infty$ . If  $n > 1$  and  $f \in X^p$ , then

$$\|\sigma_n(f) - f - G_n(f)\|_p \leq (1 + 6\pi^3) \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p + 2\pi^2(1 + 8\pi) E_{n,p}(f),$$

where

$$G_n(f, x) = \frac{1}{4n\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(x)}{\sin^2(t/2)} dt. \quad (15)$$

*Proof.* Take  $T \in \mathbb{T}_n$  such that  $E_{n,p}(f) = \|f - T\|_p$ . Taking into account that  $2\sin^2(nt/2) = (1 - \cos(nt))$ , one has

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) - f(x) - \frac{1}{4n\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(x)}{\sin^2(t/2)} dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{1/(\pi(n+1))} \Delta_t^2 f(x) F_n(t) dt \\ &+ \frac{1}{4n\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \Delta_t^2 f(x) \frac{2\sin^2((n+1)t/2) - 1}{\sin^2(t/2)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{1/(\pi(n+1))} \Delta_t^2 f(x) F_n(t) dt - \frac{1}{4n\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \Delta_t^2 f(x) \frac{\cos((n+1)t)}{\sin^2(t/2)} dt. \end{aligned}$$

From Proposition 4.2 we obtain

$$\begin{aligned} \left\| \sigma_n(f) - f - \frac{1}{4n\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p &\leq \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p \\ &+ 2\pi^2(4\pi + 1)\|T - f\|_p + 2\pi^3\omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p + \pi^2(3 + 6\pi) \frac{\|T''\|_p}{n^2}. \end{aligned}$$

From Theorem 2.1 (with  $h = 1/(\pi(n+1))$ )

$$\begin{aligned} \frac{\|T''\|_p}{n^2} &\leq \left(\frac{1}{2\sin(nh/2)}\right)^2 \|\Delta_h^2 T\|_p \leq \left(\frac{\pi^2(n+1)}{2n}\right)^2 (2\|f - T\|_p + \|\Delta_h^2 f\|_p) \\ &\leq \pi^4 \left(2\|f - T\|_p + \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p\right). \quad \square \end{aligned}$$

**Remark 4.4.** Estimates as the one given in Theorem 4.3 were considered by Zamansky and Efimov for continuous functions. Zamansky [13, page 37] considered only functions satisfying a Lipschitz condition and Efimov ([3, Theorem 1] and [4, Theorem 1]) proved the extension in terms of the second order modulus of continuity, but with an unspecified constant. In fact Efimov modified some of the Zamansky's ideas. For functions satisfying  $\omega_2(f, t)_p \leq C(f)t$  it was noticed by Butzer and Görlich in [1, Lemma (4.5)] the extension of Zamansky's results to  $X^p$  spaces. Later, the analysis in  $X^p$  spaces was done by Lebed and Avdeenko in [10]. In all these quoted papers the authors used integrals over an infinity interval (like in Theorem 1.1), instead of the function  $G_n(f, x)$  given above.

**Remark 4.5.** Estimates as the one given in Theorem 4.3 were considered by Zamansky and Efimov for continuous functions. Zamansky [13, page 37] considered only functions satisfying a Lipschitz condition and Efimov ([3, Theorem 1] and [4, Theorem 1]) proved the extension in terms of the second order modulus of continuity,

but with an unspecified constant. In fact Efimov modified some of the Zamansky's ideas. For functions satisfying  $\omega_2(f, t)_p \leq C(f)t$  it was noticed by Butzer and Görlich in [1, Lemma (4.5)] the extension of Zamansky's results to  $X^p$  spaces. Later, the analysis in  $X^p$  spaces was done by Lebed and Avdeenko in [10]. In all these quoted papers the authors used integrals over an infinity interval (like in Theorem 1.1), instead of the function  $G_n(f, x)$  given above.

**Theorem 4.6.** *Assume  $1 \leq p \leq \infty$ . If  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 1$ ) and  $f \in X^p$ , then*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi(4\pi^2 + 5)} \frac{1}{(n+1)} \left\| \frac{1}{4\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p &\leq \|f - \sigma_n(f)\|_p \\ &\leq \frac{1}{n} \left\| \frac{1}{4\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p + C_1 \omega_2\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \\ &\leq C_2 \frac{1}{n+1} \left\| \frac{1}{4\pi} \int_{1/(\pi(n+1))}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p, \end{aligned}$$

where

$$C_1 = 1 + 6\pi^3 + 5(1 + 8\pi)(1 + \pi^2)^2 \quad \text{and} \quad C_2 = 2 + C_1(3 + 4^5\pi^4 + 144\pi^3).$$

*Demostración.* The first inequality was given in Proposition 4.1. For the second one we use Theorem 4.3, (5) and Theorem 3.6 to obtain

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_n(f)\|_p &\leq \|G_n(f)\|_p + \|\sigma_n(f) - f - G_n(f)\|_p \\ &\leq \|G_n(f)\|_p + (1 + 6\pi^3) \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p + 2\pi^2(1 + 8\pi)E_{n,p}(f) \\ &\leq \|G_n(f)\|_p + (1 + 6\pi^3) \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p + 2\pi^2(1 + 8\pi) \frac{5}{8} \omega_2\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p \\ &\leq \|G_n(f)\|_p + \left(1 + 6\pi^3 + 5(1 + 8\pi)(1 + \pi^2)^2\right) \omega_2\left(f, \frac{1}{\pi(n+1)}\right)_p \\ &\leq \left(2 + \left(1 + 6\pi^3 + 5(1 + 8\pi)(1 + \pi^2)^2\right)\right) \left(3 + 4^5\pi^4 + 144\pi^3\right) \\ &\quad \times \left\| \frac{1}{4\pi} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi} \frac{\Delta_t^2 f(\cdot)}{\sin^2(t/2)} dt \right\|_p. \end{aligned}$$

□

## Bibliografía

- [1] P. L. Butzer and E. Gorlich, *Zur Charakterisierung von Saturationsklassen in der Theorie der Fourierreihen*, Tôhoku Math. J., 2 (17) (1965), 29-54.
- [2] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, New York-Base1 (1971).
- [3] A. V. Efimov, *On approximation of some classes of continuous functions by Fourier sums and Fejér sums*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math., 22 (1958), 81-116.
- [4] A. V. Efimov, *Approximation of conjugate functions by Fejér means*, Uspehi Math. Nauk, 14 (1959), 183-188.
- [5] L. Fejér, *Untersuchungen über Fourierreihe Reihen*, Math. Annalen, 58 (1904), 51-69.
- [6] S. Foucart, Y. Kryakin and A. Shadrin, *On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric*, Constr. Approx. 29 (2009), 157-179.
- [7] H-B. Knoop and X. Zhou, *The lower estimate for linear positive operators, I*, Constr. Approx., 11 (1995), 53-66.
- [8] H-B. Knoop and X. Zhou, *Some inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives*, International Series of Numerical Mathematics Vol. 132 (1999), Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 87-94.
- [9] H-B. Knoop and X. Zhou, *Lower bounds of some singular integrals and their applications*, Arch. Math., 88 (2007), 249-258
- [10] G. K. Lebed and A. A. Avdeenko, *Approximation of periodic functions by Fejér sums*, Math. USSR Izvestija, 1 (5) (1971), 86-96.
- [11] A. F. Timan, *Theory of Approximation of Functions of Real Variable*, Pergamon Press, 1963.
- [12] T. Xie and X. Zhou, *Lower bounds of some singular integrals and their applications*, Arch. Math., 88 (2007), 249-258.
- [13] M. Zamansky, *Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et application à quelques problèmes d'approximation*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup., 3 (66) (1949), 19-93.

- [14] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Third Edition, Vol I and II combined, Cambridge Mathematical Library, 2002.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

`jbusta@fcfm.buap.mx`.



---

# Topología

---



## Capítulo 6

# Continuos sin segundo y sin tercer producto simétrico rígido

David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López,  
Fernando Macías Romero  
FCFM, BUAP

### Resumen

Dado un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos el hiperespacio  $F_n(X)$  de subconjuntos de  $X$  no vacíos con a lo más  $n$  puntos. El hiperespacio  $F_n(X)$  es rígido si para cualquier homeomorfismo  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(X)$ , se cumple que  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ . En este capítulo se presentan condiciones suficientes sobre un continuo  $X$  para el cual  $F_n(X)$  no es rígido con  $n \in \{2, 3\}$ .

## 1 Introducción

Para un espacio métrico compacto, K. Borsuk y S. Ulam introdujeron el hiperespacio  $F_n(X)$  en 1931 ([3]) y lo llamaron el  $n$ -ésimo producto simétrico de  $X$ . Otras investigaciones relacionadas con este hiperespacio son [1] – [6], [8], [9], [11], [12] y [16]. La rigidez de hiperespacios fue introducida por R. Hernández Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de la Vega en [7], donde se estudió la rigidez de los hiperespacios  $C_n(X)$  para ciertos continuos  $X$ . En [8] se estudió la rigidez de los hiperespacios  $F_n(X)$  para ciertos continuos  $X$ .

Nuestro interés en este capítulo es estudiar qué condiciones debe satisfacer un continuo para que su segundo o tercer producto simétrico no sea rígido. Los siguientes resultados fueron probados en [8], aquí damos una prueba más detallada de estos.

- ◇ Si un continuo  $X$  contiene un pelo, entonces  $F_2(X)$  no es rígido.
- ◇ Sea  $X$  un continuo casi enrejado. Entonces  $F_2(X)$  es rígido si y solo si  $X$  no contiene pelos.
- ◇ Si un continuo  $X$  contiene un arco libre, entonces  $F_3(X)$  no es rígido.

## 2 Preliminares

Dado un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$ , el  $\text{int}_X(A)$  y  $\text{cl}_X(A)$  denotan el *interior* y la *cerradura* de  $A$  en  $X$ , respectivamente. Todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  será considerado con la topología euclidiana.

Una función  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos es *continua* si la preimagen de cada abierto de  $Y$  es abierto de  $X$ . Un *homeomorfismo* es una biyección continua con inversa continua.

**Definición 2.1.** Un **continuo** es un espacio métrico  $X$  con más de un punto conexo y compacto. Dado  $Y \subset X$ , diremos que  $Y$  es un **subcontinuo** de  $X$  si  $Y$  es un continuo.

**Teorema 2.2.** *Un espacio  $X$  es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto de  $X$  son abiertos de  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es localmente conexo. Sean  $U$  abierto de  $X$  y  $C$  componente de  $U$ . Sea  $p \in C \subset U$ . Como  $X$  es localmente conexo, tenemos que existe  $V$  abierto y conexo de  $X$  tal que  $p \in V \subset U$ . Luego, por la maximalidad de  $C$ ,  $p \in V \subset C$ . Por lo tanto,  $C$  es abierto de  $X$ .

Ahora, supongamos que las componentes de cada subconjunto abierto de  $X$  son conjuntos abiertos de  $X$ . Dados  $p \in X$  y  $U$  abierto de  $X$  que contiene a  $p$ . Sea  $C$  la componente de  $U$  que contiene a  $p$ . Luego,  $C$  es abierto y conexo de  $X$  tal que  $p \in C \subset U$ . Por lo tanto,  $X$  es localmente conexo.  $\square$

**Teorema 2.3.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo,  $Y$  es un espacio métrico y  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y suprayectiva, entonces  $Y$  es un continuo localmente conexo.*

*Demostración.* Como  $f$  es continua, tenemos que  $Y$  es un continuo. Luego,  $f$  es cerrada. Veamos que  $Y$  es localmente conexo. Por el teorema 2.2, bastará probar que las componentes de los conjuntos abiertos de  $Y$  son abiertos de  $Y$ . Sea  $U$  abierto de  $Y$  y  $C$  una componente de  $U$ . Supongamos que  $x \in f^{-1}(C)$  y sea  $D_x$  la componente de  $f^{-1}(U)$  que contiene a  $x$ . Dado que  $f^{-1}(U)$  es abierto de  $X$  y  $X$  es localmente conexo, por el teorema 2.2, se sigue que  $D_x$  es abierto de  $X$ . Como  $f$  es continua y  $D_x$  es conexo, tenemos que  $f(D_x)$  es conexo. Así,  $f(D_x) \subset U$  conexo y  $f(x) \in f(D_x)$ . Como  $C$  es la componente de  $U$  que contiene a  $f(x)$ , tenemos que  $f(D_x) \subset C$ , y en consecuencia  $D_x \subset f^{-1}(C)$ . De esto que,  $f^{-1}(C)$  es abierto de  $X$ . Como  $f$  es cerrada, tenemos que  $f(X - f^{-1}(C))$  es cerrado de  $Y$ . Note que  $f(X - f^{-1}(C)) = Y - C$ . De esto que,  $C$  es abierto de  $Y$ . Por lo tanto,  $Y$  es localmente conexo.  $\square$

**Definición 2.4.** Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Sea  $h : [0, 1] \rightarrow \alpha$  un homeomorfismo, decimos que  $h(0)$  y  $h(1)$  son los puntos extremos del arco  $\alpha$ .

**Definición 2.5.** Sea  $X$  un continuo.

- ◊ Decimos que  $a$  es un **punto extremo** de  $X$  si es punto extremo de todo arco que lo contiene.
- ◊ Un **arco libre** de  $X$  es un arco  $\alpha$  con puntos extremos  $a$  y  $b$  tal que  $\alpha - \{a, b\}$  es abierto de  $X$ .
- ◊ Un **pelo** de  $X$  es un arco  $\alpha$  con puntos extremos  $a$  y  $b$  tal que  $\alpha - \{a\}$  es abierto de  $X$ .

**Lema 2.6.** Sea  $X$  un continuo. Si  $\alpha$  es un pelo de  $X$ , entonces  $\alpha$  es un arco libre de  $X$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha$  un pelo con puntos extremos  $a$  y  $b$  tal que  $\alpha - \{a\}$  es abierto de  $X$ . Como  $\alpha - \{a, b\} = (\alpha - \{a\}) \cap (X - \{b\})$ , tenemos que  $\alpha - \{a, b\}$  es abierto de  $X$ . Por lo tanto,  $\alpha$  es un arco libre de  $X$ . □

**Definición 2.7.** Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos tales que dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos.

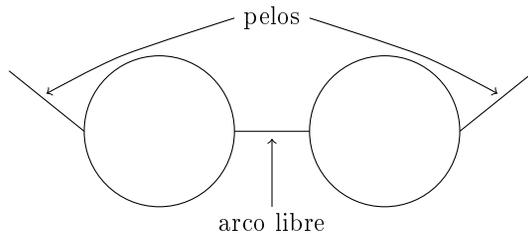


Figura 1: Gráfica finita

**Teorema 2.8.** Toda gráfica finita es la unión de sus arcos libres.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica finita. Entonces  $G = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i$ , donde cada  $\alpha_i$  es un arco con puntos extremos  $a_i$  y  $b_i$ . Además, si  $i \neq j$ , entonces  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  son ajenos o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos. De esto que, si  $i \neq j$ ,

entonces  $(\alpha_i - \{a_i, b_i\}) \cap \alpha_j = \emptyset$ . Sea  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Sabemos que  $\{a_i, b_i\}$  es cerrado en  $G$ , y por tanto,  $G - \{a_i, b_i\}$  es abierto en  $X$ . Por otro lado, tenemos que cada  $\alpha_j$  es compacto, entonces cada  $\alpha_j$  es cerrado en  $G$ . Así,  $\bigcup_{j \neq i} \alpha_j$  es cerrado en  $G$ , y en consecuencia,  $G - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j$  es abierto en  $G$ . Por tanto,  $(G - \{a_i, b_i\}) \cap (X - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j)$  es abierto en  $G$ . Como  $(G - \{a_i, b_i\}) \cap (X - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j) = \alpha_i - \{a_i, b_i\}$ , se tiene que  $\alpha_i - \{a_i, b_i\}$  es abierto en  $G$ . Así,  $\alpha_i$  es un arco libre en  $G$ . Por lo tanto,  $G$  es la unión de sus arcos libres.  $\square$

**Definición 2.9.** Dado un continuo  $X$ , sea

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ pertenece al interior de una gráfica finita}\}, \text{ y}$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Decimos que  $X$  es **casi enrejado** si el conjunto  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$ .

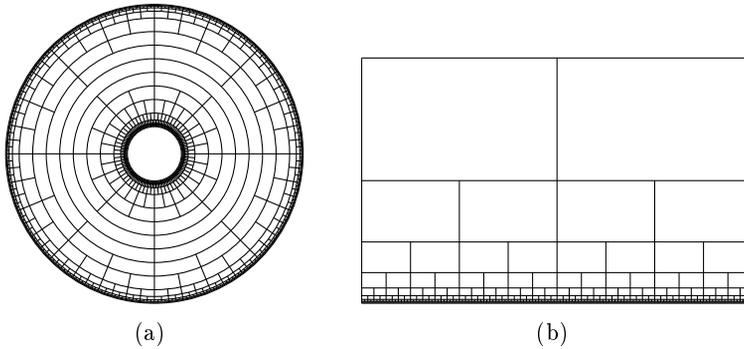


Figura 2: Casi enrejados

**Teorema 2.10.** Si  $X$  es un continuo casi enrejado, entonces la unión de los arcos libres de  $X$  es denso en  $X$ .

*Demostración.* Sea  $U$  subconjunto abierto de  $X$  y no vacío. Entonces existe  $p \in U \cap \mathcal{G}(X)$ , y por tanto, existe  $G$  gráfica finita tal que  $p \in \text{int}_X(G)$ . Luego, por teorema 2.8, existe  $\alpha$  un arco libre de  $G$  con extremos  $a, b$  tal que  $p \in \alpha$ . Sea  $r > 0$  tal que  $B(r, p) \subset G$ . Sea  $\beta$  la componente de  $\alpha \cap B(r, p)$  que contiene a  $p$ . Sea  $\bar{\beta} = \text{cl}_X(\beta)$ . Notemos que  $\bar{\beta} \subset \alpha$ . Luego,  $\bar{\beta}$  es un arco. Como  $\alpha$  es arco libre de  $G$  y  $\bar{\beta} \subset \alpha$ , tenemos que  $\bar{\beta}$  es arco libre de  $G$ . Sean  $a_\beta, b_\beta$  los extremos de  $\bar{\beta}$ . Así,  $\bar{\beta} - \{a_\beta, b_\beta\}$  es abierto de  $G$  contenido en  $B(r, p)$ , y por tanto,  $\bar{\beta} - \{a_\beta, b_\beta\}$  es abierto

de  $X$ . En consecuencia,  $\bar{\beta}$  es arco libre de  $X$  tal que  $p \in U \cap \bar{\beta}$ . De esto que, la unión de los arcos libres de  $X$  es denso en  $X$ .  $\square$

**Definición 2.11.** Sea  $X$  un continuo. Se dice que  $X$  es **descomponible** si existen  $A, B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Un continuo es **indescomponible** si no es descomponible.

En la figura 3 se muestra un continuo indescomponible con la propiedad de que todo subcontinuo propio de este es un arco, para ver la construcción de este continuo puede consultar [14].

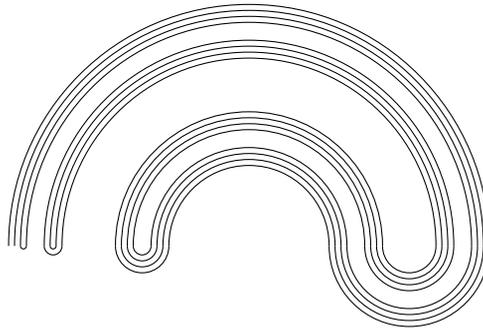


Figura 3: Arcoiris de Knaster

**Lema 2.12.** Sea  $X$  un continuo y  $Z$  un subcontinuo de  $X$ . Si  $X - Z = A \cup B$  tales que  $A, B$  son subconjuntos de  $X$  no vacíos que están separados, entonces  $Z \cup A$  y  $Z \cup B$  son subcontinuos de  $X$ .

*Demostración.* Sean  $A, B$  subconjuntos de  $X$  no vacíos tales que  $A, B$  están separados y  $X - Z = A \cup B$ . Supongamos que  $Z \cup A$  es desconexo. Entonces existen  $H, K$  subcojuntos de  $X$  no vacíos y separados tales que  $Z \cup A = H \cup K$ . Como  $Z$  es conexo, tenemos que  $Z$  está contenido en  $H$  o en  $K$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $Z \subset H$ . Luego,  $K \subset A$ . De esto que,  $K$  y  $B$  están separados. Notemos que  $X = (B \cup H) \cup K$ . Más aún,  $B \cup H, K$  están separados, lo cual contradice la conexidad de  $X$ . Por lo tanto,  $Z \cup A$  es conexo.

Por otro lado, notemos que  $Z \cup A = Z \cup \text{cl}_X(A)$ , porque  $A, B$  estan separados. Así,  $Z \cup A$  es subconjunto cerrado de  $X$ , y por tanto, compacto. Por lo tanto,  $Z \cup A$  es subcontinuo de  $X$ . Análogamente, se tiene que  $Z \cup B$  es subcontinuo de  $X$ .  $\square$

**Lema 2.13.** Un continuo  $X$  es descomponible si y solo si existe un subcontinuo propio con interior no vacío.

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo. Supongamos que  $X$  es descomponible. Entonces existen  $A, B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Note que  $X - B \subset B$ . Como  $B$  es un subconjunto propio y cerrado de  $X$ , tenemos que  $\emptyset \neq X - B \subset \text{int}_X(A)$ . Así,  $A$  es un subcontinuo propio con interior no vacío.

Ahora, supongamos que existe  $A$  subcontinuo propio de  $X$  con interior no vacío. Consideremos los dos siguientes casos:

**Caso 1.**  $X - A$  es conexo. Entonces  $\text{cl}_X(X - A)$  es cerrado y conexo en  $X$ , y por tanto, un subcontinuo de  $X$ . Notar que  $\text{int}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) = \emptyset$ . Como  $\text{int}_X(A) \neq \emptyset$ , tenemos que  $\text{cl}_X(X - A)$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Luego,  $X = A \cup \text{cl}_X(X - A)$ .

**Caso 2.**  $X - A$  es desconexo. Entonces existen  $H, K$  subconjuntos no vacíos de  $X$  separados tales que  $X - A = H \cup K$ . Por el lema 2.12,  $A \cup H$  y  $A \cup K$  son subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = (A \cup H) \cup (A \cup K)$ .

En cada caso se tiene que  $X$  es la unión de dos subcontinuos propios de  $X$ . Por lo tanto,  $X$  es descomponible.  $\square$

**Definición 2.14.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ .

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\},$$

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Una  $n$ -**celda** es un espacio homeomorfo a  $D^n$ .

El teorema 2.15 nos hace ver que conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  son  $n$ -celdas, y así tenemos una forma más simple para probar cuando un conjunto es una  $n$ -celda sin tener que encontrar un homeomorfismo que en muchos casos sería muy difícil de escribir.

**Teorema 2.15.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $E$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , convexo y acotado con  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(E) \neq \emptyset$ , entonces  $E$  es una  $n$ -celda.

*Demostración. Caso particular.* Supongamos que  $\mathbf{0} \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(E)$ . Sea  $r > 0$  tal que  $D_r^n \subset \text{int}_{\mathbb{R}^n}(E)$ , donde  $D_r^n = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(B_{\mathbb{R}^n}(r, \mathbf{0}))$ . Como  $E$  es acotado,  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida para cada  $v \in S^{n-1}$  por  $f(v) = \sup\{a > 0 : av \in E\}$  es una función bien definida. Note que para cada  $v \in S^{n-1}$ ,  $f(v) \geq r$ , y además, al ser  $E$  cerrado, para cada  $v \in S^{n-1}$  se tiene que  $f(v)v \in E$ . Veamos que  $f$  es continua. Sean  $v \in S^{n-1}$  y  $0 < \varepsilon < f(v)$ . Como  $E$  es convexo,  $\{tv : 0 \leq t \leq f(v)\} \subset E$ . Luego,  $p = (f(v) - \frac{\varepsilon}{2})v \in E$ . Sean  $\lambda_1 = \frac{r\varepsilon}{2f(v)}$ ,  $u \in B(\lambda_1, p)$  y  $w = f(v)v + \frac{2f(v)}{\varepsilon}(u - f(v)v)$ , entonces

$$\|w\| = \frac{2f(v)}{\varepsilon} \left\| \frac{\varepsilon}{2}v + u - f(v)v \right\| = \frac{2f(v)}{\varepsilon} \|u - p\| < \frac{2f(v)}{\varepsilon} \frac{r\varepsilon}{2f(v)} = r.$$

Así,  $w \in D_r^n$ . Como  $u = \frac{2f(v)}{\varepsilon}w + \left(1 - \frac{2f(v)}{\varepsilon}\right) f(v)v$ , tenemos que  $u \in E$ . De esto que,  $B(\lambda_1, p) \subset E$ .

Por otro lado, note que  $q = (f(v) + \frac{\varepsilon}{2})v \notin E$ . Como  $E$  es cerrado, existe  $\lambda_2 > 0$  tal que  $B(\lambda_2, q) \cap E = \emptyset$ . Sea  $\delta = \min \left\{ \frac{\lambda_1}{f(v) - \frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\lambda_2}{f(v) + \frac{\varepsilon}{2}} \right\}$ . Luego, si  $u \in B(\delta, v) \cap S^{n-1}$ , entonces

$$\left\| \left( f(v) - \frac{\varepsilon}{2} \right) u - p \right\| = \left( f(v) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \|u - v\| < \left( f(v) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\lambda_1}{\left( f(v) - \frac{\varepsilon}{2} \right)} = \lambda_1,$$

$$\left\| \left( f(v) + \frac{\varepsilon}{2} \right) u - q \right\| = \left( f(v) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \|u - v\| < \left( f(v) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\lambda_2}{\left( f(v) + \frac{\varepsilon}{2} \right)} = \lambda_2,$$

es decir,  $(f(v) - \frac{\varepsilon}{2})u \in B(\lambda_1, p)$  y  $(f(v) + \frac{\varepsilon}{2})u \in B(\lambda_2, q)$ . Luego,  $(f(v) - \frac{\varepsilon}{2})u \in E$  y  $(f(v) + \frac{\varepsilon}{2})u \notin E$ , y por tanto,  $f(v) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(u) < f(v) + \frac{\varepsilon}{2}$ . Así,  $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ . Por lo tanto,  $f$  es continua.

Ahora definamos  $g : E \rightarrow D^n$  como sigue

$$g(v) = \begin{cases} \frac{v}{\|v\|} & \text{si } v \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} & \text{si } v = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Sea  $v \in E - \{\mathbf{0}\}$ . Como  $\|v\| \leq f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ , se tiene que  $g(v) \in D^n$ . De esto que,  $g$  esta bien definida. Es claro que  $g$  es continua en todo punto distinto de  $\mathbf{0}$ . Sea  $\{v_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión en  $E - \{\mathbf{0}\}$  que converge a  $\mathbf{0}$ . Como  $f\left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right) \geq r$ , tenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|g(v_n)\| \leq \frac{1}{r}\|v_n\|$ . De esto que,  $\{g(v_n)\}_{n=1}^\infty$  converge a  $\mathbf{0}$ . Por lo tanto,  $g$  es continua.

Sean  $u, v \in E$  tal que  $g(v) = g(u)$ . Si  $u = \mathbf{0}$ , entonces  $g(v) = \mathbf{0}$ , y así,  $v = \mathbf{0}$ . Supongamos que  $u \neq \mathbf{0} \neq v$ . Entonces  $u = \eta v$ , donde  $\eta = f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) / f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ . Luego,  $\frac{u}{\|u\|} = \frac{\eta v}{\|\eta v\|} = \frac{\eta v}{\eta \|v\|} = \frac{v}{\|v\|}$ . Así,  $f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ , y por tanto,  $u = v$ . De esto que,  $g$  es inyectiva. Además, dado  $w \in D^n$  distinto de  $\mathbf{0}$ , sea  $t = f\left(\frac{w}{\|w\|}\right)$ . Luego,  $t \frac{w}{\|w\|} \in E$ . Como  $E$  es convexo y  $\|w\| \leq 1$ , tenemos que  $tw = \|w\|t \frac{w}{\|w\|} \in E$ . Así, existe  $tw \in E$  tal que  $g(tw) = w$ . En consecuencia,  $g$  es suprayectiva. De esto que  $g$  es una biyección continua entre el compacto  $E$  y el espacio de Hausdorff  $D^n$ , así,  $g$  es un homeomorfismo. Por lo tanto,  $E$  es una  $n$ -celda.

**Caso general.** Sea  $x_0 \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(E)$ . Note que la función  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $h(v) = v - x_0$  es un homeomorfismo tal que  $h(x_0) = \mathbf{0}$ . Como,  $h(x_0) \in$

$h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(E)) \subset h(E)$  y  $h(\text{int}_{\mathbb{R}^n}(E))$  es abierto de  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que  $\mathbf{0} \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h(E))$ . Además, para  $u, v \in E$  y  $t \in [0, 1]$

$$h(u) + t(h(v) - h(u)) = u - x_0 + t(v - x_0 - (u - x_0)) = u + t(v - u) - x_0 = h(u + t(v - u))$$

Al ser  $E$  convexo, se tiene que  $h(u + t(v - u)) \in h(E)$ , es decir,  $h(u) + t(h(v) - h(u)) \in h(E)$ . De esto que,  $h(E)$  es convexo. Luego, por el **caso particular**, tenemos que  $h(E)$  es una  $n$ -celda. Por lo tanto,  $E$  es una  $n$ -celda.  $\square$

**Lema 2.16.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $p \in D^n$  y  $U$  es abierto de  $D^n$  tal que  $p \in U$ , entonces existe una  $n$ -celda  $\mathcal{C}_1$  tal que  $p \in \text{int}_{D^n}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1 \subset U$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in D^n$  y  $U$  abierto de  $D^n$  tal que  $p \in U$ . Como  $U$  es abierto de  $D^n$ , tenemos que existe  $r > 0$  tal que  $B_{\mathbb{R}^n}(r, p) \cap D^n \subset U$ . Sea

$$\mathcal{C}_1 = \text{cl}_{\mathbb{R}^n} \left( B_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{r}{2}, p \right) \right) \cap D^n \subset U.$$

Notemos que  $\mathcal{C}_1$  es cerrado, acotado y convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Como  $p \in \text{cl}_{\mathbb{R}^n} \left( \text{int}_{\mathbb{R}^n}(D^n) \right)$ , tenemos que  $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{C}_1) = B_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{r}{2}, p \right) \cap \text{int}_{\mathbb{R}^n}(D^n) \neq \emptyset$ . Luego, por el teorema 2.15,  $\mathcal{C}_1$  es una  $n$ -celda tal que  $p \in \text{int}_{D^n}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1 \subset U$ .  $\square$

Como una  $n$ -celda es homeomorfo a  $D^n$ , el siguiente corolario es consecuencia directa del lema 2.16.

**Corolario 2.17.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\mathcal{C}$  una  $n$ -celda,  $p \in \mathcal{C}$  y  $U$  es abierto de  $\mathcal{C}$  tal que  $p \in U$ . Entonces existe una  $n$ -celda  $\mathcal{C}_1$  tal que  $p \in \text{int}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1 \subset U$ .*

Aunque el lema 2.18 tiene una versión más simple para funciones continuas, aquí lo presentamos para homeomorfismos porque es la manera en que lo usamos en resultados posteriores.

**Lema 2.18.** *Sean  $X, Y$  continuos,  $X_1, X_2$  cerrados de  $X$  y  $Y_1, Y_2$  cerrados de  $Y$  tales que  $X_1 \cup X_2 = X$  y  $Y_1 \cup Y_2 = Y$ . Si  $h_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  y  $h_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  son homeomorfismos tales que*

(a) *para cada  $x \in X_1 \cap X_2$ ,  $h_1(x) = h_2(x)$  y*

(b) *para cada  $y \in Y_1 \cap Y_2$ ,  $h_1^{-1}(y) = h_2^{-1}(y)$ ,*

*entonces  $h : X \rightarrow Y$  dada por*

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{si } x \in X_1, \\ h_2(x) & \text{si } x \in X_2. \end{cases}$$

*es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Note que las condiciones (a) y (b) garantizan que  $h$  es función inyectiva, además,  $h$  es suprayectiva porque  $h_1$  y  $h_2$  lo son. Por lo tanto,  $h$  es biyección. Dados  $A \subset X$  y  $B \subset Y$ , tenemos que

$$h(A) = h(A \cap (X_1 \cup X_2)) = h((A \cap X_1) \cup (A \cap X_2)) = h_1(A \cap X_1) \cup h_2(A \cap X_2),$$

$$h^{-1}(B) = h^{-1}(B \cap (Y_1 \cup Y_2)) = h^{-1}((B \cap Y_1) \cup (B \cap Y_2)) = h_1^{-1}(B \cap Y_1) \cup h_2^{-1}(B \cap Y_2).$$

Es decir,

$$h(A) = h_1(A \cap X_1) \cup h_2(A \cap X_2) \text{ y } h^{-1}(B) = h_1^{-1}(B \cap Y_1) \cup h_2^{-1}(B \cap Y_2).$$

Con esto veamos que  $h$  es continua y cerrada. Sea  $G$  subconjunto cerrado de  $Y$ . Entonces  $G \cap Y_1$  y  $G \cap Y_2$  son subconjuntos cerrados de  $Y_1$  y  $Y_2$ , respectivamente. Como  $h_1$  y  $h_2$  son continuas tenemos que  $h_1^{-1}(G \cap Y_1)$  y  $h_2^{-1}(G \cap Y_2)$  son subconjuntos cerrados de  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente. Luego,  $h_1^{-1}(G \cap Y_1)$  y  $h_2^{-1}(G \cap Y_2)$  son cerrados de  $X$ , pues  $X_1$  y  $X_2$  son cerrados de  $X$ . En consecuencia,  $h^{-1}(G) = h_1^{-1}(G \cap Y_1) \cup h_2^{-1}(G \cap Y_2)$  es cerrado de  $X$ . Por lo tanto,  $h$  es continua.

Por otro lado, sea  $F$  subconjunto cerrado de  $X$ . Entonces  $F \cap X_1$  y  $F \cap X_2$  son subconjuntos cerrados de  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente. Como  $h_1$  y  $h_2$  son cerradas tenemos que  $h_1(F \cap X_1)$  y  $h_2(F \cap X_2)$  son subconjuntos cerrados de  $Y_1$  y  $Y_2$ , respectivamente. Luego,  $h_1(F \cap X_1)$  y  $h_2(F \cap X_2)$  son cerrados de  $Y$ , pues  $Y_1$  y  $Y_2$  son cerrados de  $Y$ . En consecuencia,  $h(F) = h_1(F \cap X_1) \cup h_2(F \cap X_2)$  es cerrado de  $Y$ . Por lo tanto,  $h$  es cerrada. De aquí,  $h$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Definición 2.19.** Un **triodo simple** es una gráfica finita  $T$  que es la unión de 3 arcos que únicamente se intersectan en un punto extremo  $v$  de dichos arcos. El punto  $v$  es llamado el **vértice** de  $T$ .

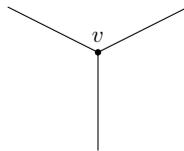


Figura 4: Triodo simple

**Teorema 2.20.** Si  $T$  un triodo simple y  $n \geq 2$ , entonces  $T \times [0, 1]^{n-1}$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Sea  $T$  un triodo simple con vértice  $v$ . Sean  $L_1, L_2$  y  $L_3$  arcos tales que  $T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$  y  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{v\}$ . Entonces existen  $f_1 : L_1 \rightarrow [0, 1]$ ,  $f_2 : L_2 \rightarrow [0, 1]$  y  $f_3 : L_3 \rightarrow [0, 1]$  homeomorfismos tales que  $f_1(v) = 1$  y  $f_2(v) = f_3(v) = 0$ . De aquí,  $f : L_1 \cup L_2 \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{f_1(x)}{2} & \text{si } x \in L_1, \\ \frac{1}{2} + \frac{f_2(x)}{2} & \text{si } x \in L_2, \end{cases}$$

es un homeomorfismo. Sea

$$h_1 : (L_1 \cup L_2) \times [0, 1]^{n-1} \rightarrow [0, 1]^n \times \{0\}$$

$$(x, a_2, \dots, a_n) \mapsto (f(x), a_2, \dots, a_n, 0)$$

Como  $f$  es un homeomorfismo, se tiene que  $h_1$  lo es también. Ahora, sea

$$h_2 : L_3 \times [0, 1]^{n-1} \rightarrow \{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]^n$$

$$(x, a_2, \dots, a_n) \mapsto (\frac{1}{2}, a_2, \dots, a_n, f_3(x))$$

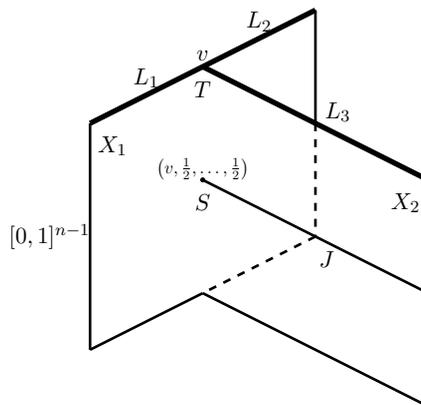


Figura 5: Representación de la prueba para  $n = 2$ .

Como  $f_3$  es un homeomorfismo, se tiene que  $h_2$  lo es también. Sean  $X_1 = (L_1 \cup L_2) \times [0, 1]^{n-1}$ ,  $X_2 = L_3 \times [0, 1]^{n-1}$ ,  $Y_1 = [0, 1]^n \times \{0\}$ ,  $Y_2 = \{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]^n$  y  $Y = Y_1 \cup Y_2$ . Note que  $X_1 \cup X_2 = T \times [0, 1]^{n-1}$ . Como  $X_1$  y  $X_2$  son compactos, tenemos que son subconjuntos cerrados de  $T \times [0, 1]^{n-1}$ . Por esta misma razón  $Y_1$  y  $Y_2$  son subconjuntos cerrados de  $Y$ . Luego, por el lema 2.18,  $h : T \times [0, 1]^{n-1} \rightarrow Y$  dada por

$$h(x, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} h_1(x, a_2, \dots, a_n) & \text{si } x \in L_1 \cup L_2, \\ h_2(x, a_2, \dots, a_n) & \text{si } x \in L_3. \end{cases}$$

es un homeomorfismo. Sean  $J = L_3 \times \{(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})\} \subset X_2$  y  $S = X_1 \cup J$ . Entonces,  $h(S) = ([0, 1]^n \times \{0\}) \cup (\{(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})\} \times [0, 1])$ . En consecuencia,  $T \times [0, 1]^{n-1}$  contiene a  $h(S)$ . Por [15, Teorema 3.33],  $T \times [0, 1]^{n-1}$  no es encajable en  $\mathbb{R}^n$ . La prueba para el caso  $n = 2$  está representada en la figura 5. □

### 3 Hiperespacios de un continuo

Algo necesario para entender lo que se verá más adelante es conocer la principal teoría de hiperespacios, como lo es su métrica y topología, y la relación que hay entre estas.

Dado un continuo  $X$ , los **hiperespacios** del continuo  $X$  son familias de subconjuntos de  $X$  que cumplen cierta propiedad específica. Consideramos los siguientes hiperespacios de  $X$ .

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

dado un número natural  $n$

$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$  es conocido como el  **$n$ -ésimo hiperespacio** de  $X$ ,

$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$  es conocido como el  **$n$ -ésimo producto simétrico** de  $X$ .

El hiperespacio  $F_1(X)$  es una copia isométrica de  $X$  contenida en cada uno de los hiperespacios  $2^X, C_n(X)$  y  $F_n(X)$ . Más adelante se ven ejemplos de  $F_2(X)$  y  $F_3(X)$ .

**Definición 3.1.** Sea  $X$  un continuo con métrica  $d$ . Para cualesquiera  $A \subset X$  y  $\varepsilon > 0$ , definimos la **nube** de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $A$ , denotada por  $N(\varepsilon, A)$ , como el conjunto

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon, \text{ para algún } a \in A\}.$$

Definimos la función  $H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$  como

$$H(A, B) = \inf \{r > 0 : A \subset N(r, B) \text{ y } B \subset N(r, A)\}.$$

**Teorema 3.2.** [10, Teorema 2.2] Si  $X$  es un continuo, entonces la función  $H$  es una métrica para  $2^X$ , conocida como la **métrica de Hausdorff**.

Dado que  $C_n(X)$  y  $F_n(X)$  son subespacios de  $2^X$ , los hiperespacios antes mencionados son considerados con la métrica de Hausdorff.

**Notación.** Sean  $X$  un continuo con métrica  $d$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $A \in 2^X$  denotamos por  $B^H(\varepsilon, A) = \{B \in 2^X : H(B, A) < \varepsilon\}$ .

**Definición 3.3.** Sean  $X$  un continuo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $A_1, \dots, A_n$  subconjuntos no vacíos de  $X$ . El **vietórico** de  $A_1, \dots, A_n$ , denotado por  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ , es el conjunto

$$\left\{ B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

**Teorema 3.4.** [10, Teorema 1.3] Si  $X$  es un continuo con una topología  $\tau$ , entonces la colección

$$\{\langle S_1, \dots, S_n \rangle : S_i \in \tau \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}\},$$

es una base para una topología para  $2^X$ .

La topología generada por la base mencionada en el teorema 3.4 es conocida como la **topología de Vietoris**.

**Teorema 3.5.** [10, Teorema 3.1] Si  $X$  es un continuo, entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff sobre  $2^X$  coincide con la topología de Vietoris.

## 4 Segundo y tercer producto simétrico

Antes de empezar a probar los resultados principales (teoremas 4.4, 4.6 y 4.7), veamos algunos ejemplos ilustrativos donde no se de la rigidez para el segundo y tercer producto simétrico.

**Definición 4.1.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $F_n(X)$  es **rígido** si para cualquier homeomorfismo  $h : F_n(X) \rightarrow F_n(X)$ , se tiene que  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ .

**Ejemplo 4.2.** Sean  $X = [0, 1]$  y  $T_2$  el triángulo en  $\mathbb{R}^2$  con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ .

Definamos a  $f : F_2(X) \rightarrow T_2$  como

$$f(A) = \begin{cases} (a, a) & \text{si } A = \{a\}, \\ (a, b) & \text{si } A = \{a, b\} \text{ y } a < b. \end{cases}$$

Definamos a  $g : F_2(X) \longrightarrow T_2$  como

$$g(A) = \begin{cases} (a, 1) & \text{si } A = \{a\}, \\ (a, a + (1 - b)) & \text{si } A = \{a, b\} \text{ y } a < b. \end{cases}$$

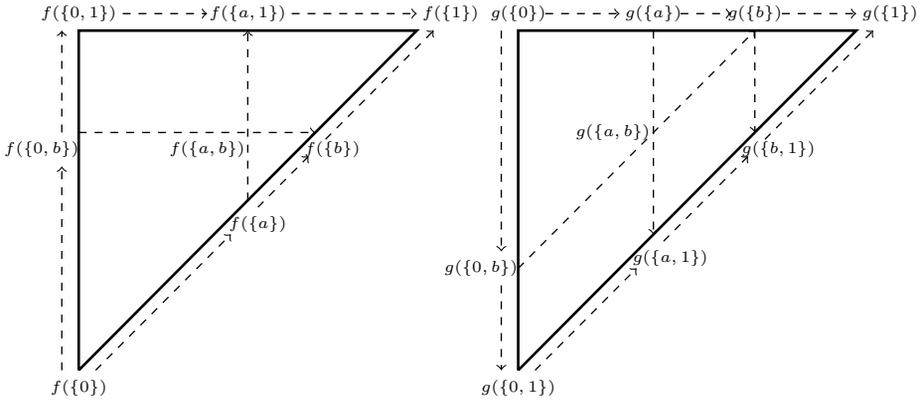


Figura 6: Comportamiento de las funciones  $f$  y  $g$  sobre  $T_2$

De la figura 6 se puede observar que  $f$  y  $g$  son homeomorfismos. Así,

$$h : F_2(X) \longrightarrow F_2(X)$$

$$A \longmapsto g^{-1}(f(A))$$

es un homeomorfismo. Además,  $h(F_1(X)) = \{A \in F_2(X) : 1 \in A\} \neq F_1(X)$ . Por lo tanto,  $F_2(X)$  no es rígido.

**Ejemplo 4.3.** Sean  $X = [-1, 1]$  y  $D^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

Sean  $a, b, c \in X$  tal que  $a < b < c$ . Sea

$$\theta_{abc} = \frac{\pi}{2} - 2\pi \left( \frac{b-a}{c-a} \right).$$

Definamos a  $f : F_3(X) \longrightarrow D^3$  como

Para  $A = \{a\}$ ,

$$f(A) = (0, a, 0).$$

Para  $A = \{a, c\}$ ,

si  $0 < c$  y  $-c \leq a < c$ ,

$$f(A) = \left(0, c \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2c}\right)\right), c \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2c}\right)\right)\right).$$

si  $a < 0$  y  $a < c \leq -a$ ,

$$f(A) = \left(0, a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2a}\right)\right), a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2a}\right)\right)\right).$$

Para  $A = \{a, b, c\}$ ,

si  $0 < c$  y  $-c \leq a < b < c$ ,

$$f(A) = \left(c \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2c}\right)\right)\cos(\theta_{abc}), c \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2c}\right)\right), c \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2c}\right)\right)\operatorname{sen}(\theta_{abc})\right).$$

si  $a < 0$  y  $a < b < c \leq -a$ ,

$$f(A) = \left(a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2a}\right)\right)\cos(\theta_{abc}), a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2a}\right)\right), a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{c-a}{2a}\right)\right)\operatorname{sen}(\theta_{abc})\right).$$

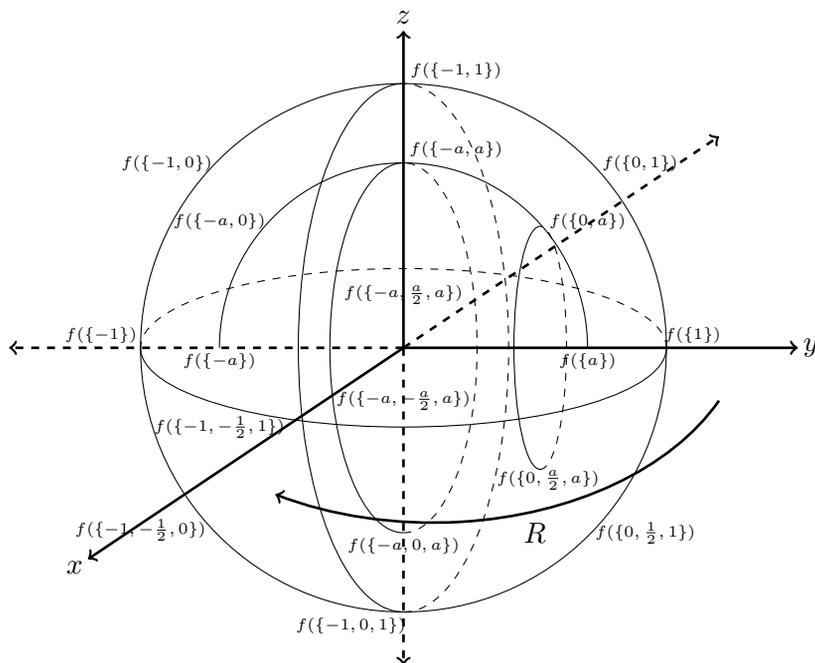


Figura 7: Comportamiento de  $f$  sobre  $D^3$

Para entender mejor el comportamiento de  $f$  véase la figura 7. De esto se puede observar que  $f$  es un homeomorfismo. Sea

$$R: D^3 \longrightarrow D^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (y, -x, z)$$

Note que  $R$  es una rotación de  $-90^0$  de la esfera unitaria sobre el eje  $z$ , como se puede observar en la figura 7, y por tanto es un homeomorfismo. Así,

$$h: F_3(X) \longrightarrow F_3(X)$$

$$A \longmapsto f^{-1}\left(R(f(A))\right)$$

es un homeomorfismo. Además,

$$h(F_1(X)) = \left\{ \left\{ -a, -\frac{a}{2}, a \right\} \in F_3(X) : a \in [-1, 1] \right\} \neq F_1(X).$$

Por lo tanto,  $F_3(X)$  no es rígido.

En los teoremas 4.4 y 4.7 se da una condición que generaliza los ejemplos 4.2 y 4.3, respectivamente.

**Teorema 4.4.** *Si un continuo  $X$  contiene un pelo, entonces  $F_2(X)$  no es rígido.*

*Demostración.* Sea  $\alpha$  un pelo con puntos extremos  $a, b$  tal que  $\alpha - \{a\}$  es abierto de  $X$ . Podemos suponer que  $\alpha \neq X$ . Así,  $E = X - (\alpha - \{a\})$  es un subconjunto cerrado y no vacío de  $X$ . Sean  $T_2$  el triángulo en  $\mathbb{R}^2$  con vértices en  $(0, 0), (0, 1)$  y  $(1, 1)$ , y  $r = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ . Definamos a  $k: T_2 \longrightarrow T_2$  como sigue

Sean

$$l_1(x) = \begin{cases} \frac{1-r}{r}x & \text{si } 0 \leq x \leq r, \\ 1-x & \text{si } r \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$l_2(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } r \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$l_3(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq r, \\ 1 - \frac{r}{1-r}(1-x) & \text{si } r \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Si  $0 \leq x \leq r$  y  $\frac{1-r}{r}x \leq y \leq 1-x$ , entonces

$$k((x, y)) = (x, y).$$

Si  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  y  $x \leq y \leq l_1(x)$ , entonces

$$k((x, y)) = ((1-r)(y-x), (2-r)(y-x)) + 2|(1-r)y - (2-r)x|(1, 1).$$

Si  $r \leq x \leq 1$  y  $l_2(x) \leq y \leq 1 - \frac{r}{1-r}(1-x)$ , entonces

$$k((x, y)) = (1 - (y-x), 1) - (1-r)(2y-1, y-x).$$

Si  $0 \leq x \leq 1$  y  $l_3(x) \leq y \leq 1$ , entonces

$$k((x, y)) = ((1-r)(1-y) + rx, y).$$

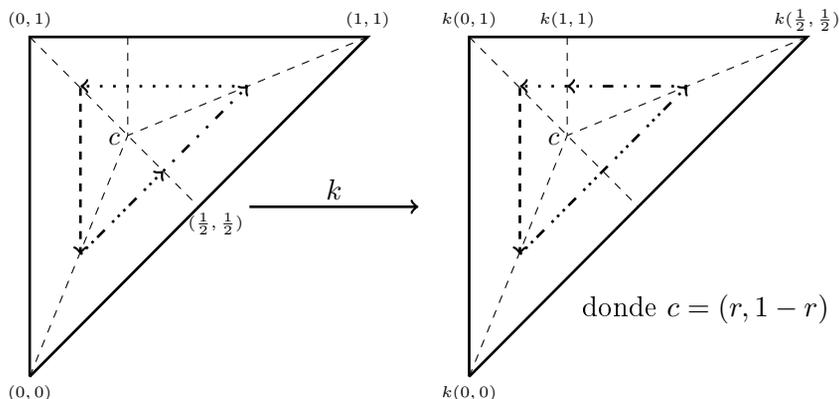


Figura 8: Comportamiento de  $k$  sobre  $T_2$

Se puede observar de la figura 8 que  $k$  es un homeomorfismo. Dado que  $\alpha$  es un arco, existe  $\phi : \alpha \rightarrow [0, 1]$  homeomorfismo tal que  $\phi(a) = 0$  y  $\phi(b) = 1$ . Sea  $f : F_2([0, 1]) \rightarrow T_2$  dada por

$$f(A) = \begin{cases} (x, x) & \text{si } A = \{x\}, \\ (x, y) & \text{si } A = \{x, y\} \text{ y } x < y. \end{cases}$$

Definamos a

$$\begin{aligned} f_* : F_2(\alpha) &\rightarrow T_2 \\ A &\mapsto f(\phi(A)) \end{aligned}$$

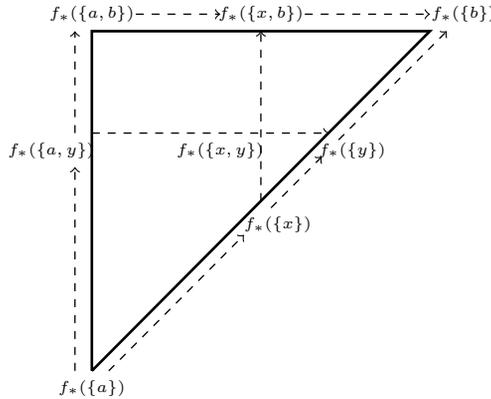


Figura 9: Comportamiento de la función  $f_*$  sobre  $T_2$

Notemos que  $\phi(A)$  es la imagen de  $A$  bajo  $\phi$  y  $f^*$  es un homeomorfismo. Sea  $h : F_2(X) \rightarrow F_2(X)$  dada por

$$h(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \cap E \neq \emptyset, \\ f_*^{-1}(k(f_*(A))) & \text{si } A \subset \alpha. \end{cases}$$

Sean  $X_1 = \{A \in F_2(X) : A \cap E \neq \emptyset\}$  y  $X_2 = F_2(\alpha)$ . Dado que  $\alpha$  es un continuo, tenemos que  $F_2(\alpha)$  es un continuo. En particular,  $X_2$  es compacto, y por tanto, cerrado de  $F_2(X)$ . Veamos que  $X_1$  es cerrado de  $F_2(X)$ . Sea  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  sucesión en  $X_1$  que converge a  $A$ . Supongamos que  $A \notin X_1$ , entonces  $A \subset X - E$ . Luego,  $\langle X - E \rangle \cap F_2(X)$  es abierto de  $F_2(X)$  que contiene a  $A$ , pues  $E$  es cerrado de  $X$ . Así, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $A_N \in \langle X - E \rangle \cap F_2(X)$ , es decir,  $A_N \cap E = \emptyset$ , lo cual contradice que  $A_N \in X_1$ . Por lo tanto,  $A \in X_1$ . En consecuencia,  $X_1$  es cerrado de  $F_2(X)$ . Tomando a  $Y_1 = X_1$ ,  $Y_2 = X_2$ ,  $h_1$  la identidad en  $X_1$  y  $h_2 = f_*^{-1} \circ k \circ f_*$ , por el lema 2.18, tenemos que  $h$  es un homeomorfismo. Además, tenemos que  $\{\{x, b\} \in F_2(X) : \phi(x) \in (1/2, 1]\} \subset h(F_1(X))$ . En consecuencia,  $h(F_1(X)) \neq F_1(X)$ . Por lo tanto,  $F_2(X)$  no es rígido.  $\square$

**Teorema 4.5.** [10, Teorema VI 9] (Invarianza del dominio) Sea  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $h$  un homeomorfismo de  $X$  en otro subconjunto  $h(X)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x$  es un punto interior de  $X$ , entonces  $h(x)$  es un punto interior de  $h(X)$ . En particular, si  $A$  y  $B$  son subconjuntos homeomorfos de  $\mathbb{R}^n$  y  $A$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $B$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

Aunque uno pensaría que el teorema 4.5 es sencillo de probar, la dificultad viene del hecho de que si  $Y \subset X$  y  $A$  un subconjunto abierto de  $Y$ , este no necesariamente es abierto en  $X$ , por lo que en la prueba se usa algo muy técnico que tiene que ver con extensión de funciones.

**Teorema 4.6.** *Sea  $X$  un continuo casi enrejado. Entonces  $F_2(X)$  es rígido si y solo si  $X$  no contiene pelos.*

*Demostración.* La necesidad se da por el teorema 4.4. Ahora, supongamos que  $X$  no contiene pelos. Sea  $h : F_2(X) \rightarrow F_2(X)$  un homeomorfismo. Probaremos que  $h(F_1(X)) \subset F_1(X)$ . Por el teorema 2.10, bastará probar que  $h(\{p\}) \in F_1(X)$ , para  $p \in \alpha - \{a, b\}$ , donde  $\alpha$  es un arco libre en  $X$  con extremos  $a$  y  $b$ . Sea  $\alpha$  arco libre y  $p \in \alpha - \{a, b\}$ . Supongamos que  $h(\{p\}) = \{x, y\}$ , donde  $x \neq y$ . Sea  $\mathcal{U} = \langle \alpha - \{a, b\} \rangle \cap F_2(X)$ . Entonces  $\mathcal{U}$  es un subconjunto abierto de  $F_2(X)$  que contiene a  $\{p\}$ . Sea  $f_* : F_2(\alpha) \rightarrow T_2$  el homeomorfismo como en la prueba del teorema 4.4.

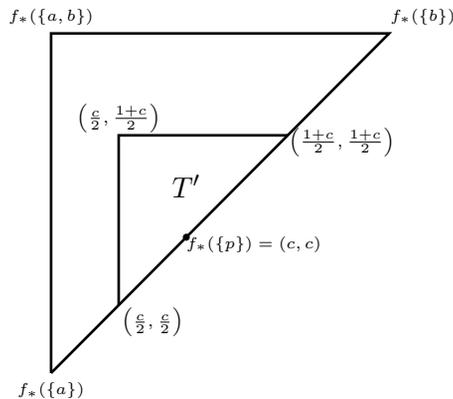


Figura 10: Vecindad  $T'$  de  $f_*(\{p\})$

Entonces  $f_*(\{p\}) = (c, c)$ , para algún  $c \in (0, 1)$ . Sea  $T'$  el triángulo con vértices  $(\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ ,  $(\frac{1+c}{2}, \frac{1+c}{2})$  y  $(\frac{c}{2}, \frac{1+c}{2})$ , véase la figura 10. Note que  $T'$  es vecindad de  $(c, c)$  y una 2-celda. Luego,  $f_*^{-1}(T')$  es vecindad de  $\{p\}$  y una 2-celda. Sea  $\mathcal{M} = h(f_*^{-1}(T'))$ , entonces  $\mathcal{M}$  es vecindad de  $\{x, y\}$  en  $F_2(X)$  y una 2-celda. Dado que  $x \neq y$ , existen  $U_1$  y  $V_1$  subconjuntos abiertos de  $X$  ajenos tales que  $x \in U_1$  y  $y \in V_1$ . Además, existen  $U_2, V_2$  abiertos de  $X$  tal que  $\{x, y\} \in \langle U_2, V_2 \rangle \cap F_2(X) \subset \mathcal{M}$ . Podemos suponer que  $x \in U_2$  y  $y \in V_2$ . Sean  $U = U_1 \cap U_2$  y  $V = V_1 \cap V_2$ . Luego,  $\{x, y\} \in \langle U, V \rangle \cap F_2(X) \subset \mathcal{M}$ . Como  $\langle U, V \rangle \cap F_2(X)$  es un subconjunto abierto de  $\mathcal{M}$ , por el corolario 2.17, tenemos que existe una 2-celda  $\mathcal{N}$  tal que  $\{x, y\} \in \text{int}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}) \subset$

$\mathcal{N} \subset \langle U, V \rangle \cap F_2(X)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $B^H(\varepsilon, \{x, y\}) \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ ,  $B(\varepsilon, x) \subset U$  y  $B(\varepsilon, y) \subset V$ .

Dado  $E \in \mathcal{N}$ , tenemos que  $E \cap U \neq \emptyset$  y  $E \cap V \neq \emptyset$ . Al ser  $U$  y  $V$  ajenos, concluimos que  $E$  tiene exactamente dos elementos. Así, para cada  $E \in \mathcal{N}$ , denotamos a  $E_x$  y  $E_y$  como los únicos elementos en  $E \cap U$  y  $E \cap V$ , respectivamente. De esto que podemos definir las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \pi_x : \mathcal{N} &\longrightarrow U & \pi_y : \mathcal{N} &\longrightarrow V \\ E &\longmapsto E_x & E &\longmapsto E_y \end{aligned}$$

Veamos que  $\pi_x$  es continua. Sea  $W$  abierto de  $U$ . Note que

$$\pi_x^{-1}(W) = \langle W, V \rangle \cap \mathcal{N}$$

Como  $U$  es abierto de  $X$ , se tiene que  $W$  es abierto de  $X$ . Luego,  $\langle W, V \rangle \cap \mathcal{N}$  es abierto de  $\mathcal{N}$ . Por lo tanto,  $\pi_x$  es continua. Similarmente, se tiene que  $\pi_y$  es continua. Sean  $A = \pi_x(\mathcal{N})$  y  $B = \pi_y(\mathcal{N})$ . Entonces, por el teorema 2.3,  $A$  y  $B$  son continuos localmente conexos. Note que  $A \cap B = \emptyset$  y  $\langle A, B \rangle \cap F_2(X) \subset \langle U, V \rangle \cap F_2(X) \subset \mathcal{M}$ . Veamos que  $B(\varepsilon, x) \subset A$  y  $B(\varepsilon, y) \subset B$ . Dado  $x_0 \in B(\varepsilon, x) \subset U$ , tenemos que  $\{x_0, y\} \in \langle U, V \rangle \cap F_2(X) \subset \mathcal{M}$  y  $H(\{x_0, y\}, \{x, y\}) < \varepsilon$ . Así,  $\{x_0, y\} \in B^H(\varepsilon, \{x, y\}) \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ , lo cual implica que,  $x_0 \in A$ . Por lo tanto,  $B(\varepsilon, x) \subset A$ . Similarmente se prueba que  $B(\varepsilon, y) \subset B$ .

Supongamos que  $A$  contiene un triodo simple  $T$ . Como  $B$  contiene un arco  $\beta$ , tenemos que  $\mathcal{M}$  contiene al conjunto  $\{\{u, v\} : u \in T \text{ y } v \in \beta\}$  el cual es homeomorfo a  $T \times \beta$ , implicando que  $T \times \beta$  puede ser encajado en  $\mathbb{R}^2$ , lo cual contradice el teorema 2.20. Por lo que  $A$  no contiene triodos simples. De igual manera,  $B$  no contiene triodos simples. Por lo tanto,  $A$  y  $B$  son arcos o curvas cerradas simples. Y dado que  $x \in \text{int}_X(A)$  y  $y \in \text{int}_X(B)$ , tenemos que existen arcos  $\alpha'$  y  $\beta'$  tales que  $x \in \text{int}_X(\alpha') \subset \alpha' \subset A$  y  $y \in \text{int}_X(\beta') \subset \beta' \subset B$ .

Supongamos  $x$  es un extremo de  $\alpha'$ . Dado que  $x \in \text{int}_X(\alpha')$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B(\delta, x) \subset \text{int}_X(\alpha')$ . Sea  $P$  la componente de  $B(\delta, x)$  que contiene a  $x$ . Entonces  $P$  es homeomorfo a  $[0, 1)$ , porque  $x$  es punto extremo de  $\alpha'$ . Luego,  $\text{cl}_X(P) = P \cup \{e\}$ , para algún  $e \in \alpha'$ , es un arco. Además, como  $\alpha'$  es localmente conexo y  $P$  es componente de  $B(\delta, x) \subset \alpha'$ , tenemos que  $P$  es abierto de  $\alpha'$ . Así,  $P$  es abierto en  $X$ , porque  $P \subset \text{int}_X(\alpha')$ . De esto que,  $\text{cl}_X(P)$  es un pelo de  $X$ , lo cual contradice nuestra hipótesis. En consecuencia,  $x$  no es punto extremo de  $\alpha'$ . Por razones similares,  $y$  no es punto extremo de  $\beta'$ .

Sean  $C_x$  la componente de  $\text{int}_X(\alpha')$  que contiene a  $x$  y  $C_y$  la componente de  $\text{int}_X(\beta')$  que contiene a  $y$ . Entonces  $C_x$  y  $C_y$  son homeomorfos a  $(0, 1)$ . Así,  $\langle C_x, C_y \rangle \cap F_2(X)$  es homeomorfo a  $C_x \times C_y$ , y por lo tanto, homeomorfo a  $(0, 1)^2$ . Sean  $g : (0, 1)^2 \longrightarrow \langle C_x, C_y \rangle \cap F_2(X)$  homeomorfismo y  $g((a_x, b_y)) = \{x, y\}$ .

Entonces

$$h' : (0, 1)^2 \longrightarrow T'$$

$$(p, q) \longmapsto f_* \left( h^{-1} \left( g((p, q)) \right) \right)$$

es un encaje tal que  $h'((a_x, b_y)) = (c, c)$ . Esto contradice el teorema 4.5, porque  $(a_x, b_y)$  es un punto interior de  $(0, 1)^2$  y  $(c, c)$  es un punto frontera de  $T'$ . De esto que  $x = y$ , y por tanto,  $h(\{p\}) \in F_1(X)$ . Así,  $h(F_1(X)) \subset F_1(X)$ . Desde que  $h^{-1}$  es también un homeomorfismo, se tiene de manera análoga que  $h^{-1}(F_1(X)) \subset F_1(X)$ , o bien,  $F_1(X) \subset h(F_1(X))$ . Por lo tanto,  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ . Por lo tanto,  $F_2(X)$  es rígido.  $\square$

**Teorema 4.7.** *Si un continuo  $X$  contiene un arco libre, entonces  $F_3(X)$  no es rígido.*

*Demostración.* Sea  $\alpha$  un arco libre con extremos  $a$  y  $b$ . Podemos suponer que  $\alpha \neq X$ . Sea  $\phi : \alpha \longrightarrow [-1, 1]$  un homeomorfismo. Sea  $E = X - (\alpha - \{a, b\})$ . Entonces  $E$  es un subconjunto cerrado y no vacío de  $X$ . Sea  $f : F_3([-1, 1]) \longrightarrow D^3$  como en el ejemplo 4.3, el cual es un homeomorfismo. Definamos a

$$f_* : F_3(\alpha) \longrightarrow D^3$$

$$A \longmapsto f(\phi(A))$$

Note que  $\phi(A)$  es la imagen de  $A$  bajo  $\phi$  y  $f^*$  es un homeomorfismo. Para  $(x, y, z) \in D^3$ , sea

$$\theta(x, y, z) = \frac{\pi}{2} \left( \sqrt{1 - z^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

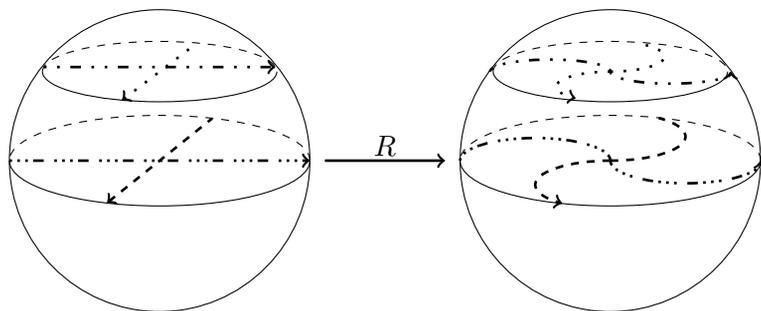


Figura 11: Comportamiento de  $R$  sobre  $D^3$

Definamos a  $R : D^3 \rightarrow D^3$  como

$$R((x, y, z)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(x, y, z)) & \operatorname{sen}(\theta(x, y, z)) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta(x, y, z)) & \cos(\theta(x, y, z)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por la continuidad de las funciones  $\operatorname{sen}$ ,  $\cos$  y  $\theta$ , y con la ayuda de la figura 11 se puede observar que  $R$  es un homeomorfismo. Además, note que  $R$  deja a los puntos de la frontera de  $D^3$  fijos. Sea  $h : F_3(X) \rightarrow F_3(X)$

$$h(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \cap E \neq \emptyset, \\ f_*^{-1}(R(f_*(A))) & \text{si } A \subset \alpha. \end{cases}$$

Sean  $X_1 = \{A \in F_3(X) : A \cap E \neq \emptyset\}$  y  $X_2 = F_3(\alpha)$ . Dado que  $\alpha$  es un continuo, tenemos que  $F_3(\alpha)$  es un continuo. En particular,  $X_2$  es compacto, y por tanto, cerrado de  $F_3(X)$ . Veamos que  $X_1$  es cerrado de  $F_3(X)$ . Sea  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  sucesión en  $X_1$  que converge a  $A$ . Supongamos que  $A \notin X_1$ , entonces  $A \subset X - E$ . Luego,  $\langle X - E \rangle \cap F_3(X)$  es abierto de  $F_3(X)$  que contiene a  $A$ , pues  $E$  es cerrado de  $X$ . Así, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $A_N \in \langle X - E \rangle \cap F_3(X)$ , es decir,  $A_N \cap E = \emptyset$ , lo cual contradice que  $A_N \in X_1$ . Por lo tanto,  $A \in X_1$ . En consecuencia,  $X_1$  es cerrado de  $F_3(X)$ . Tomando a  $Y_1 = X_1$ ,  $Y_2 = X_2$ ,  $h_1$  la identidad en  $X_1$  y  $h_2 = f_*^{-1} \circ R \circ f_*$ , por el lema 2.18, tenemos que  $h$  es un homeomorfismo. Además, para  $p = \phi^{-1}(\frac{1}{2}) \in \alpha$  tenemos que

$$\begin{aligned} h(\{p\}) &= f_*^{-1}(R(f_*(\{p\}))) = f_*^{-1}(R((0, \frac{1}{2}, 0))) \\ &= f_*^{-1}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)\right) = \phi^{-1}\left(\left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right\}\right) \notin F_1(X). \end{aligned}$$

En consecuencia,  $h(F_1(X)) \neq F_1(X)$ . Por lo tanto,  $F_3(X)$  no es rígido.  $\square$

Con ayuda de los teoremas que se han probado a lo largo del capítulo podemos concluir lo siguiente.

**Observación 4.8.** Sea  $X$  un continuo.

- (a) Si  $X$  contiene un pelo, entonces  $F_2(X)$  y  $F_3(X)$  no son rígidos.
- (b) Si  $X$  es casi enrejado, entonces  $F_3(X)$  no es rígido.
- (c) Si  $X$  es una gráfica finita con puntos extremos, entonces  $F_2(X)$  y  $F_3(X)$  no son rígidos.

*Demostración.* (a) Sea  $X$  un continuo que contiene un pelo. Por el lema 2.6, un pelo de  $X$  también es un arco libre de  $X$ . Luego, por lo teorema 4.4,  $F_2(X)$  no es rígido y, por el teorema 4.7, el hiperespacio  $F_3(X)$  no es rígido.

(b) Sea  $X$  un continuo casi enrejado. Por el teorema 2.10, la unión de arcos libre de  $X$  es densa en  $X$ , en particular,  $X$  contiene un arco libre. Luego, por el teorema 4.7, el hiperespacio  $F_3(X)$  no es rígido.

(c) Sea  $X$  una gráfica finita con  $p$  punto extremo. Por el teorema 2.8,  $X$  es la unión de sus arcos libres, así, existe  $\alpha$  arco libre de  $X$  que contiene a  $p$ . Notemos que  $p$  es punto extremo de  $\alpha$ , sea  $a$  el otro punto extremo de  $\alpha$ . Supongamos que  $p$  es punto frontera de  $\alpha$ . Entoces existe un arco libre  $\beta$  tal que  $p \in \beta$ . Luego,  $\alpha \cup \beta$  es un arco donde  $p$  no es punto extremo, lo cual contradice la definición de punto extremo en un continuo. De esto que,  $p \in \text{int}_X(\alpha)$ , y por tanto,  $\alpha - \{a\}$  es abierto en  $X$ , es decir,  $\alpha$  es un pelo. Luego, por (a),  $F_2(X)$  y  $F_3(X)$  no son rígidos.  $\square$

Muchos pensarían que todo continuo formado por arcos tiene arcos libres y por tanto su tercer producto no sería rígido, sin embargo el teorema 4.9 nos muestra que hay continuos que no poseen arcos libres, en particular el arcoiris de Knaster, el cual tiene como propiedad particular que todo subcontinuo propio es un arco, es decir, es un continuo formado por arcos, véase la figura 3.

**Teorema 4.9.** *Si  $X$  es un continuo indescomponible, entonces  $X$  no tiene arcos libres.*

*Demostración.* Suponagamos por el contrario que existe  $\alpha$  arco libre de  $X$  con extremos  $a, b$ . Entonces  $\alpha - \{a, b\} \subset \text{int}_X(\alpha)$ . Así,  $\alpha$  es un subcontinuo propio de  $X$  con interior no vacío, lo cual contradice el lema 2.13. Por lo tanto,  $X$  no contiene arcos libres.  $\square$

## 5 Ejemplos del segundo producto simétrico

Sin antes haberlo mencionado, en los ejemplos 4.2 y 4.3, se dieron modelos para el segundo y tercer producto simétrico de un arco, respectivamente, es decir, hemos visto que cuando  $X$  es un arco,  $F_2(X)$  es homeomorfo a un triángulo y  $F_3(X)$  es homeomorfo a  $D^3$ . Para más modelos de hiperespacios ver [12] o [10].

**Ejemplo 5.1.** Modelo geométrico para  $F_2(T)$  con  $T$  un triodo simple.

Consideremos a  $T$  formado por los arcos  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  con vértice  $v$ . Ahora, consideremos los arcos  $J_1 = L_2 \cup L_3$ ,  $J_2 = L_1 \cup L_3$  y  $J_3 = L_1 \cup L_2$ . Sabemos que para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $F_2(J_i)$  es homeomorfo a un triángulo. Notemos que si  $a, b \in T$ , entonces existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  tal que  $\{a, b\} \in F_2(J_i)$ . De esto que,

$F_2(T) = F_2(J_1) \cup F_2(J_2) \cup F_2(J_3)$ . Así que solo habrá que ver cómo pegar los conjuntos  $F_2(J_i)$  para obtener el modelo de  $F_2(T)$ . Dado  $\{a, b\} \in F_2(J_1) \cap F_2(J_2)$ , se tiene que  $\{a, b\} \subset J_1 \cap J_2 = L_3$ , y por tanto,  $\{a, b\} \in F_3(L_3)$ . De aquí que,  $F_2(J_1) \cap F_2(J_2) = F_2(L_3)$ . Similarmente se ve que  $F_2(J_1) \cap F_2(J_3) = F_2(L_2)$  y  $F_2(J_2) \cap F_2(J_3) = F_2(L_1)$ .

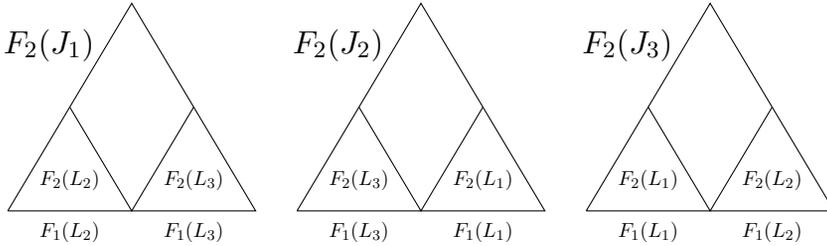


Figura 12: Pegado de  $F_2(J_1)$ ,  $F_2(J_2)$  y  $F_2(J_3)$

Al ser  $L_3$  un arco, tenemos que  $F_2(L_3)$  es un triángulo contenido en  $F_2(J_1)$  y  $F_2(J_2)$ . De manera que tenemos que pegar a  $F_2(J_1)$  y  $F_2(J_2)$  por este triángulo  $F_2(L_3)$ . Y por argumentos similares tenemos que  $F_2(J_1)$ ,  $F_2(J_2)$  y  $F_2(J_3)$  deben ser pegados por los triángulos  $F_2(L_3)$ ,  $F_2(L_1)$  y  $F_2(L_2)$ , véase la figura 12. Realizando el pegado se puede observar que el resultado de esto es homeomorfo a un triángulo con 3 triángulos más pegados a este, véase la figura 13, teniendo así nuestro modelo geométrico para  $F_2(T)$ .

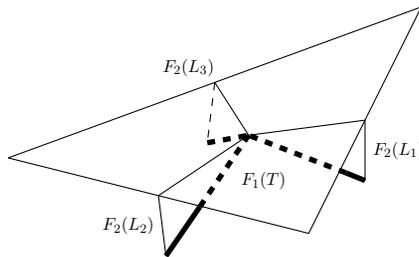


Figura 13:  $F_2(T)$

Como  $L_1$  es un pelo de  $T$ , por el teorema 4.4, tenemos que  $F_2(T)$  no es rígido. Otra forma de ver esto es tomar el modelo que hemos construido y hacer un homeomorfismo que mueva los singulares que están en uno de los triángulos pequeños como se hizo en la prueba del teorema 4.4, obteniendo así que  $F_2(T)$  no es rígido.

**Ejemplo 5.2.** Modelo geométrico para  $F_2(S^1)$ .

Sean  $P = \{ \{a, -a\} \in F_2(S^1) : a \in S^1 \}$  y  $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < \|(x, y)\| \leq 1 \}$ . Dado  $A = \{a, b\} \in F_2(S^1) - P$ , existe un arco menor que une a  $a$  y  $b$ , y denotamos al punto medio y la longitud de dicho arco por  $m(A)$  y  $l(A)$ , respectivamente. Sea  $G : F_2(S^1) - P \rightarrow D$  dada por  $G(A) = (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A)$ , véase la figura 14.

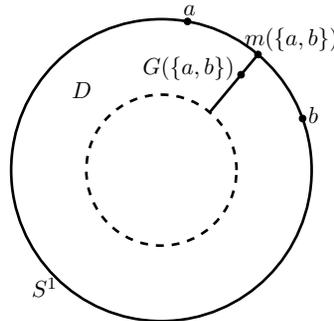


Figura 14: Comportamiento de la función  $G$  sobre  $D$

Notemos que  $G$  es una biyección, y que para cada  $a \in S^1$ ,  $G(\{a\}) = a$ , y por tanto,  $G(F_1(S^1)) = S^1$ . Sean  $S_0 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = \frac{1}{2} \}$  y  $\overline{D} = D \cup S_0$ . Sea  $g : \overline{D} \rightarrow F_2(S^1)$  dada por

$$g((x, y)) = \begin{cases} G^{-1}((x, y)) & \text{si } (x, y) \in D, \\ \{(2y, -2x), (-2y, 2x)\} & \text{si } (x, y) \in S_0. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $g$  es una función suprayectiva pero no inyectiva. Además, se puede observar que cuando los puntos  $a$  y  $b$  tienden a ser puntos antípodos,  $l(\{a, b\})$  tiende a  $\pi$ , y así,  $G(\{a, b\})$  se acerca a  $S_0$ . De esto que  $g$  es continua. Sea  $G_g = \{g^{-1}(A) : A \in F_2(S^1)\}$  la cual es una partición de  $\overline{D}$ . Denotamos por  $\overline{D}/G_g$  al espacio cociente. Sea  $\Phi_g : \overline{D}/G_g \rightarrow F_2(S^1)$  definida por  $\Phi_g([x]) = g(x)$ . Como  $\overline{D}$  es compacto y  $F_2(S^1)$  es métrico, por [15, Corolario 2.10], tenemos que  $\Phi_g$  es un homeomorfismo.

Notemos que el espacio  $\overline{D}/G_g$  se obtiene al identificar los puntos antípodos de  $S_0$ , es decir, en hacer un pegado de los puntos antípodos de  $S_0$ . Para ver que es lo que nos resulta al hacer este pegado hagamos lo siguiente, primero ponemos 2 flechas en la circunferencia  $S_0$  etiquetadas con la letra  $c$ . Notemos que pegar puntos antípodos en  $S_0$  es equivalente a pegar las flechas empezando por sus colas y en las direcciones marcadas por ellas. Ahora partimos el disco en 2, marcando los cortes

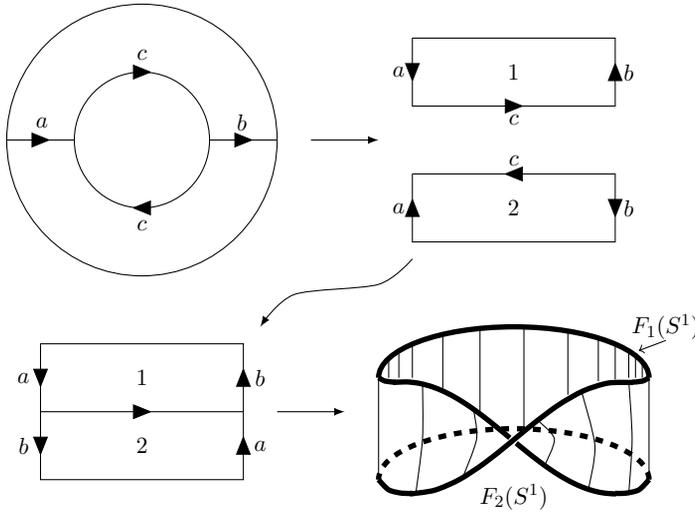


Figura 15: Identificación de los puntos antípodas de  $S_0$

con las flechas  $a$  y  $b$  para que cuando se vuelva ha hacer el pegado se haga con el orden correcto.

Después del corte obtenemos las pieza 1 y 2 como se observa en la segunda imagen de la figura 15. Con esto, podemos pegar las flechas marcadas por  $c$  girando la pieza 2, obteniendo como resultado un rectángulo al cual hay que pegar dos lados opuesto como lo indican las flechas  $a$  y  $b$ . Para esto, retorremos el rectángulo de tal manera que las flechas coincidan en la dirección y así poder hacer el pegado, lo cual nos da como resultado la **banda de Moebius**, véase la figura 15. Más aún, siguiendo la construcción que se hizo, podemos ver que  $\Phi_g^{-1}(F_1(S^1))$  es la orilla de la banda de Moebius, la cual es una curva cerrada simple.

Como  $S^1$  no contiene pelos, por el teorema 4.6, tenemos que  $F_2(S^1)$  es rígido. Veamos otra forma de ver esto. Sea  $M$  la banda de Moebius y  $\partial M$  la orilla de  $M$ . Supongamos que existe  $h : M \rightarrow M$  homeomorfismo tal que para algún punto  $p \in \partial M$ ,  $h(p) \notin \partial M$ . Sea  $r = d(h(p), \partial M)$  y  $B = \{q \in M : d(q, h(p)) \leq r\}$ . Notemos que  $B$  es un subconjunto cerrado de  $M$ . Luego, por la continuidad de  $h$ ,  $D = h^{-1}(B)$  es cerrado en  $M$ . Además,  $B$  y  $D$  pueden ser encajados en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, existen  $B^*$  y  $D^*$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfos a  $B$  y  $D$ , respectivamente. Sean  $f : B \rightarrow B^*$  y  $g : D \rightarrow D^*$  homeomorfismos. Se puede ver que  $f(h(p))$  es punto interior de  $B^*$  y  $g(p)$  es punto frontera de  $D^*$ . Definimos a  $h^* : B^* \rightarrow D^*$  como  $h^*(x) = g \circ h^{-1} \circ f^{-1}(x)$ . Notemos que  $h^*(f(h(p))) = g(p)$ , es decir,  $h^*$  manda un punto interior de  $B^*$  en un punto frontera de  $D^*$ , lo cual contradice el teorema 4.5.

Por lo tanto, todo homeomorfismo de  $M$  en  $M$  mueve puntos de  $\partial M$  en puntos de  $\partial M$ . Al ser  $F_2(S^1)$  homeomorfo a  $M$  y que  $F_1(S^1)$  coincida con  $\partial M$ , tenemos por lo anterior que  $F_2(S^1)$  es rígido.

Es por esto que es de gran ayuda tener modelos geométricos, pues aportan ideas para poder hacer pruebas para espacios para los cuales no hay un modelo geométrico.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haber dedicado su valioso tiempo y empeño para la revisión de este trabajo, gracias a sus sugerencias y comentarios es como se obtuvo la calidad del contenido de este material.

## Bibliografía

- [1] G. Acosta, R. Hernández Gutiérrez, V. Martínez de la Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glas. Math. Ser. III 44 (1) (2009) 195–210.
- [2] J. G. Anaya, E. Castañeda Alvarado, A. Illanes, *Continua with unique symmetric product*. Comment. Math. Univ. Carolin. 54 (2013) 397–406.
- [3] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931) 875–882.
- [4] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topol. Appl. 153 (2006) 1434–1450.
- [5] V. Córdova Salazar, D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product*, enviado a Topology and its Applications.
- [6] L. A. Guerrero Méndez, D. Herrera Carrasco, M. de J. López, F. Macías Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, Topol. Appl. 191 (2015) 16–27.
- [7] R. Hernández Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez de la Vega, *Rigidity of hyperspaces*, Rocky Mt. J. Math. 45 (1) (2015) 213–236.
- [8] R. Hernández Gutiérrez, V. Martínez de la Vega, *Rigidity of symmetric products*, Topol. Appl. 160 (2013) 1577–1587.

- [9] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, F. Vázquez Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, J. Math. Res. 4 (4) (2012) 1–9.
- [10] W. Hurewicks, H. Wallman, *Dimension theory*, Princenton University Press, Princenton, NJ. 1974, ninth printing.
- [11] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace  $F_2(X)$* , JP J. Geom. Topol. 2 (1) (2002) 75–96.
- [12] A. Illanes, *Models of Hyperspaces*, Topol. Proc. 41 (2013) 39–64.
- [13] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [14] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N.Y., 1968.
- [15] A. J. Libreros López, *Espacios cociente y encajes*, Tesis de Licenciatura, <https://www.fcm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/AntonioDeJesusLibrerosLopez.pdf>, (2016).
- [16] J. M. Martínez Montejano, *Non-confluence of the natural map of products onto symmetric products*, in: Continuum Theory, Denton, TX, 1999, in: Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 230, Dekker, New York, 2002, pp. 229–236.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcm.buap.mx  
216470298@fcm.buap.mx  
fmacias@fcm.buap.mx



## Capítulo 7

### Continuos con hiperespacio rígido $C_n(X)$

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán  
Montero Rodríguez  
FCFM, BUAP

#### Resumen

Dado un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , el  $n$ -ésimo hiperespacio de  $X$  es el espacio  $C_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado de } X \text{ y tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$  y sea  $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ . El hiperespacio  $C_n(X)$  es rígido si para cualquier homeomorfismo  $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ , se cumple que  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ . En este capítulo se presentan condiciones suficientes para un continuo  $X$ , de tal manera que  $C_n(X)$  sea rígido. Consideramos las siguientes familias de continuos: continuos localmente conexos, abanicos suaves y continuos hereditariamente indescomponibles.

## 1 Introducción

La teoría de los espacios topológicos, conexos y compactos son temas fascinantes que tienen aplicaciones en muchas áreas de la matemática. Nuestro interés es sobre la teoría de continuos. Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

En este capítulo estudiamos la siguiente pregunta: ¿qué condiciones debe satisfacer un continuo  $X$  para que el  $n$ -ésimo hiperespacio de  $X$  sea rígido?

Los resultados que mostramos en este capítulo fueron probados en la referencia [4]:

- Si  $X$  es un continuo localmente conexo que no es casi enrejado y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $C_n(X)$  no es rígido. Véase el teorema 4.6.
- Si  $X$  es un continuo casi enrejado, localmente conexo, sin pelos y  $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ , entonces  $C_n(X)$  es rígido. Véase el teorema 4.12.
- Si  $X$  es un abanico suave tal que  $C(X)$  es rígido y  $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ , entonces  $C_n(X)$  es rígido. Véase el teorema 5.10.

También mencionamos un resultado que garantiza la rigidez del  $n$ -ésimo hiperespacio de un continuo para todo número natural.

Si  $X$  es un continuo hereditariamente indescomponible y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $C_n(X)$  es rígido. Véase [9, Teorema 4.4, Claim 4].

Otros estudios relacionados con el tema de este capítulo los podemos encontrar en [3], [6], [7] y [15].

## 2 Preliminares

A lo largo de este capítulo, si  $X$  es un espacio topológico y  $A$  un subconjunto de  $X$ , los símbolos  $\text{cl}_X(A)$ ,  $\text{Fr}_X(A)$  e  $\text{int}_X(A)$  denotan la **cerradura** de  $A$ , la **frontera** de  $A$  y el **interior** de  $A$  en el espacio  $X$ , respectivamente. La cardinalidad de un conjunto  $A$  se representa por  $|A|$ . Como es usual, los símbolos  $\emptyset$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^+$  y  $\mathbb{R}^2$ , representan el conjunto vacío, los números naturales, los números racionales, los números reales, los números reales positivos y el plano euclidiano, respectivamente; el símbolo  $\aleph_0$ , denota la cardinalidad de los números naturales. Un espacio topológico es **no degenerado** si tiene más de un punto.

**Definición 2.1.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $p \in X$ ; un subconjunto  $V$  de  $X$  es una **vecindad** de  $p$  si existe un conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $p \in U \subset V$ .

**Definición 2.2.** Sean  $X$  un espacio métrico con métrica  $d$ ,  $p \in X$  y  $\varepsilon > 0$ . La **bola abierta** en  $X$  con centro en  $p$  y radio  $\varepsilon$ , denotada por  $B(p, \varepsilon)$ , es el conjunto  $B(p, \varepsilon) = \{x \in X : d(p, x) < \varepsilon\}$ . Escribimos  $B_X(p, \varepsilon)$  cuando el espacio  $X$  necesita ser mencionado.

A continuación definimos el concepto de localmente conexo. Este concepto lo utilizamos a lo largo de esta sección y en las secciones 3 y 4.

**Definición 2.3.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $p \in X$ . El espacio  $X$  es **localmente conexo en  $p$**  si para cada conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $p \in U$ , existe un conjunto abierto y conexo  $V$  en  $X$  tal que  $p \in V \subset U$ . Si  $X$  es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que  $X$  es **localmente conexo**.

Respecto a la definición anterior tenemos un resultado que utilizaremos posteriormente, el cual menciona que un espacio es localmente conexo si y solo si las componentes de abiertos son abiertos, como lo enuncia el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.** *Un espacio  $X$  es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto en  $X$  son abiertas en  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es localmente conexo. Sean  $U$  abierto en  $X$  y  $C$  componente de  $U$ . Sea  $p \in C \subset U$ . Como  $X$  es localmente conexo, tenemos que existe  $V$  abierto y conexo en  $X$  tal que  $p \in V \subset U$ . Luego, por la maximalidad de  $C$ ,  $p \in V \subset C$ . Por lo tanto,  $C$  es abierto en  $X$ .

Ahora, supongamos que las componentes de cada subconjunto abierto de  $X$  son abiertas. Dados  $p \in X$  y  $U$  abierto en  $X$  que contiene a  $p$ . Sea  $C$  la componente de  $U$  que contiene a  $p$ . Luego,  $C$  es abierto y conexo en  $X$  tal que  $p \in C \subset U$ . Por lo tanto,  $X$  es localmente conexo.  $\square$

**Definición 2.5.** Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Si  $f : [0, 1] \rightarrow \alpha$  es un homeomorfismo, a  $f(0)$  y  $f(1)$  son llamados los **puntos extremos** del arco  $\alpha$ . Un arco de  $f(0)$  a  $f(1)$  significa un arco con puntos extremos  $f(0)$  y  $f(1)$ .

**Definición 2.6.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Una **n-celda** es un espacio topológico homeomorfo a la bola unitaria  $B_n(\mathbf{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_n \leq 1\}$ . Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ .

Otro concepto imprescindible en nuestro estudio es el siguiente.

**Definición 2.7.** Un espacio topológico  $X$  es **arco-conexo**, si para cualesquiera  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , existe un arco contenido en  $X$  de  $x$  a  $y$ .

Uno de los conceptos más importantes en nuestro estudio es el siguiente:

**Definición 2.8.** Un **continuo**  $X$  es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un continuo  $X$  es **descomponible** si  $X$  se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios, de otra forma decimos que el continuo  $X$  es **indescomponible**. Un continuo  $X$  es **hereditariamente indescomponible** si todo subcontinuo de  $X$  es indescomponible. Un **arco continuo indescomponible** es un continuo indescomponible tal que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos.

**Definición 2.9.** Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos tales que dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos.

**Definición 2.10.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Un **n-odo simple** es la unión de  $n$  arcos que se intersectan solamente en un punto extremo  $v$ . El punto  $v$  es llamado el **vértice** de  $G$ . Un 3-odo simple es llamado **triado simple**.

**Definición 2.11.** Sea  $X$  un continuo. Un **pelo** de  $X$  es un arco  $\alpha$  con puntos extremos  $a$  y  $b$  tal que  $\alpha - \{a\}$  es abierto de  $X$ . Un **arco libre** de  $X$  es un arco  $\alpha$  con puntos extremos  $a$  y  $b$  tal que  $\alpha - \{a, b\}$  es abierto de  $X$ . Un **punto extremo**

de  $X$  es un punto  $x \in X$  tal que  $x$  es un punto extremo de cualquier arco que lo contenga.

**Ejemplo 2.12.** (a) Un **arco libre** en el continuo  $X = [0, 1]$  es el intervalo  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ .

(b) Sea el continuo  $X = [0, 1]$ . Un **pelo** en  $X$  es el intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$ .

**Definición 2.13.** Dado un continuo  $X$ , sean

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ pertenece al interior de una gráfica finita contenida en } X\} \text{ y}$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Un continuo  $X$  es **casi enrejado** si el conjunto  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$ , es decir, si  $\text{cl}_X(\mathcal{G}(X)) = X$ , véase [5, pág. 2583 y 1584].

**Observación 2.14.** El continuo  $X$  no es casi enrejado si y solo si existe un abierto no vacío  $U$  en  $X$  tal que  $U \subset \mathcal{P}(X)$ . Además,  $\mathcal{G}(X)$  es abierto de  $X$ , y en consecuencia  $\mathcal{P}(X)$  es cerrado de  $X$ .

Algunos ejemplos de continuos casi enrejados son:

(a) Sean los puntos en  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $a_n = (1, \frac{1}{n})$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos  $Z = \bigcup \{va_n : v = (0, 0) \text{ y } va_n \text{ denota el segmento de recta que une a } v \text{ con } a_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$ . El espacio  $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(Z)$  es conocido como el abanico armónico.

(b) El continuo  $\text{sen}(\frac{1}{x})$  es  $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(W) = \{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ .

(c) Sean los puntos en  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $b_n = (1, \frac{1}{n^2})$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos  $F_\omega = \bigcup \{vb_n : v = (0, 0) \text{ y } vb_n \text{ denota el segmento de recta que une } v \text{ con } b_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$ .

Por supuesto también presentamos un ejemplo de un continuo que no es casi enrejado, la dendrita  $D_3$ , véase la figura 2.

**Definición 2.15.** Sea  $X$  un continuo. Un **alambre** de  $X$  es un subconjunto  $W$  de  $X$  tal que  $W$  es homeomorfo a uno de los espacios  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$ ,  $[0, 1]$  o  $S^1$  y además  $W$  es una componente de un subconjunto abierto de  $X$ .

**Definición 2.16.** Dado un continuo  $X$ , sea

$$W(X) = \bigcup \{W \subset X : W \text{ es un alambre de } X\}.$$

El continuo  $X$  es **alambrado** si  $W(X)$  es denso en  $X$ , es decir, si  $\text{cl}_X(W(X)) = X$ .

El siguiente resultado es conocido como “teorema de golpes en la frontera”.

**Teorema 2.17.** [14, Teorema 20.3] Si  $X$  es un continuo,  $E$  un subconjunto propio no vacío de  $X$  y  $K$  una componente de  $E$ , entonces  $\text{cl}_X(K) \cap \text{Fr}(E) \neq \emptyset$  (Equivalentemente, como  $\text{cl}_X(K) \subset \text{cl}_X(E)$ , entonces  $\text{cl}_X(K) \cap \text{cl}_X(X - E) \neq \emptyset$ ).

Por el teorema 2.17 resulta que si  $W$  es un alambre compacto de un continuo  $X$ , entonces  $W = X$ , es decir, si  $W$  es un alambre de un continuo  $X$  homeomorfo a  $[0, 1]$  o  $S^1$ , entonces  $X$  es un arco o una curva cerrada simple. Como lo afirma el siguiente resultado.

**Teorema 2.18.** Si  $W$  es un alambre compacto de un continuo  $X$ , entonces  $W = X$ .

*Demostración.* Supongamos que  $W$  es un alambre en  $X$  compacto, es decir, que  $W$  es homeomorfo a uno de los espacios  $[0, 1]$  o  $S^1$ . Luego, existe un subconjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que  $W$  es una componente de  $U$ . Note que  $W$  es cerrado de  $X$ . Supongamos que  $U \subsetneq X$ , entonces por el teorema 2.17 se tiene que  $\text{cl}_X(W) \cap \text{cl}_X(X - U) \neq \emptyset$ . Pero  $W$  es cerrado y  $U$  abierto, entonces  $W \cap (X - U) \neq \emptyset$ . Como  $W \subset U$ , entonces  $U \cap (X - U) \neq \emptyset$ , lo cual es una contradicción. Por tanto, no puede ser que  $U \subsetneq X$ , es decir,  $X = U$ . Como  $W$  es componente de  $X$ , entonces  $W = X$ .  $\square$

**Observación 2.19.** Si  $\alpha$  es un arco libre en un continuo  $X$ , donde  $a$  y  $b$  son los puntos extremos de  $\alpha$ , entonces  $\alpha - \{a, b\}$  es un alambre en  $X$ . Así, un continuo en el que la unión de sus arcos libres es denso es un continuo alambrado.

Por tanto, las clases de continuos alambrados incluye gráficas finitas, dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado, continuos casi enrejados, compactificaciones del rayo  $[0, \infty)$ , compactificaciones de la línea real y arco continuos indescomponibles, véase [4, Lema 2.2].

**Definición 2.20.** Sean  $X$  una gráfica finita,  $p \in X$  y  $\beta$  un número cardinal. El **orden de  $p$  en  $X$**  es menor o igual que  $\beta$ , denotado por  $\text{ord}_X(p) \leq \beta$ , si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $p \in U$ ,  $\text{diám}(U) < \varepsilon$  y  $|\text{Fr}(U)| \leq \beta$ . El  $\text{ord}_X(p) = \beta$  si  $\text{ord}_X(p) \leq \beta$  y  $\text{ord}_X(p) \not\leq \eta$ , para cualquier número cardinal  $\eta < \beta$ . Los conjuntos  $E(X) = \{x \in X : \text{ord}_X(x) = 1\}$ ,  $O(X) = \{x \in X : \text{ord}_X(x) = 2\}$  y  $R(X) = \{x \in X : \text{ord}_X(x) \geq 3\}$  son el conjunto de puntos extremos de  $X$ , el conjunto de puntos ordinarios de  $X$  y el conjunto de puntos de ramificación de  $X$ , respectivamente.

Un concepto indispensable dentro del desarrollo de nuestro trabajo es el de dimensión, el cual definimos a continuación.

**Definición 2.21.** Dado cualquier número entero  $n$  mayor o igual que  $-1$ , vamos a definir recursivamente cuándo un espacio métrico separable  $X$  tiene **dimensión** menor o igual que  $n$ , lo cual denotamos por  $\dim[X] \leq n$ , de la siguiente forma:

- (a) Para cualquier espacio métrico separable  $X$ ,  $\dim[X] \leq -1$  si y solo si  $X = \emptyset$ .
- (b) Dada  $n \geq 0$ , supongamos que hemos definido cuándo un espacio métrico separable tiene dimensión menor o igual que  $n - 1$ . Entonces, para cualquier espacio métrico separable  $X$  y cualquier  $p \in X$ ,  $\dim_p[X] \leq n$  si  $X$  tiene una base local de vecindades de  $p$  cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a  $n - 1$ . Además, si para cada  $p \in X$  se satisface que  $\dim_p[X] \leq n$ , entonces  $\dim[X] \leq n$ .

Definimos también lo siguiente:

- (a) Para cualquier espacio métrico separable  $X$  y cualesquiera  $p \in X$  y  $n \geq 0$ ,  $\dim_p[X] = n$  si  $\dim_p[X] \leq n$  y es falso que  $\dim_p[X] \leq n - 1$ .
- (b) Para cualquier espacio métrico separable  $X$  y cualquier  $n \geq 0$ , la dimensión de  $X$  es  $n$ , denotada por  $\dim[X] = n$ , si  $\dim[X] \leq n$  y es falso que  $\dim[X] \leq n - 1$ .
- (c) Para cualquier espacio métrico separable  $X$ , la dimensión de  $X$  es  $\infty$ , denotada por  $\dim[X] = \infty$ , si  $\dim[X] \leq n$  es falso para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Cabe mencionar que la dimensión es una propiedad topológica, es decir, que se preserva bajo homeomorfismos. Además, en nuestro caso trabajamos con continuos los cuales son espacios métricos separables, véase la referencia.....

El siguiente resultado refleja cómo se comporta la dimensión con respecto a subespacios.

**Teorema 2.22.** [1, Teorema 1.68] Si  $X$  es un espacio topológico,  $A$  un subespacio de  $X$  y  $p \in A$ , entonces

- (a)  $\dim[A] \leq \dim[X]$ .
- (b)  $\dim_p[A] \leq \dim_p[X]$ .
- (c) Si  $X$  es regular y  $p \in \text{int}_X(A)$ , entonces  $\dim_p[A] = \dim_p[X]$ .

### 3 Hiperespacios

Dado un continuo  $X$ , un **hiperespacio** de  $X$  es un espacio que tiene como elementos una clase especial de subconjuntos de  $X$ . Los hiperespacios más conocidos y estudiados de un continuo son los siguientes:

**Definición 3.1.** Dados un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos los hiperespacios de  $X$  siguientes.

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es no vacío y es cerrado de } X\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{aligned}$$

Todos los hiperespacios son considerados con la métrica de **Hausdorff**  $H$ , véase [14, Observación (0.4)], definida como

$$H(A, B) = \max\{\max\{d(a, B) : a \in A\}, \max\{d(b, A) : b \in B\}\},$$

donde  $d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\}$ .

El hiperespacio  $F_n(X)$  es el  $n$ -ésimo **producto simétrico** de  $X$  y  $C_n(X)$  es el  $n$ -ésimo **hiperespacio** de  $X$ . Escribimos simplemente  $C(X)$  para denotar a  $C_1(X)$ . Es claro que  $C(X)$  es la clase de los subcontinuos de  $X$ , conocido como el **hiperespacio de los subcontinuos** de  $X$ . Note que  $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$  es una copia isométrica de  $X$ , ya que la función  $\psi : X \rightarrow F_1(X)$  que identifica a cada elemento  $x \in X$  con el elemento  $\{x\} \in F_1(X)$  es una isometría.

**Definición 3.2.** Dados un continuo  $X$  y subconjuntos  $U_1, U_2, \dots, U_m$  de  $X$ , con  $m \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle$  al siguiente subconjunto de  $2^X$ :

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, m\}\}.$$

Dados un continuo  $X$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  y  $U_1, U_2, \dots, U_m$  subconjuntos de  $X$ , denotamos por  $\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n$  al siguiente subconjunto de  $C_n(X)$ :

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n = \langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle \cap C_n(X).$$

El siguiente resultado lo utilizamos en el teorema 3.7.

**Teorema 3.3.** [13, Teorema 2.4] Si  $X$  es una gráfica finita y  $A$  un elemento de  $C_n(X)$ , entonces

$$(a) \dim_A[C_n(X)] = 2n + \sum_{p \in (R(X) \cap A)} (\text{ord}_X(p) - 2).$$

$$(b) \dim[C_n(X)] = \dim_X[C_n(X)].$$

$$(c) \dim[C_n(X)] = 2(n - 1) + \dim[C(X)].$$

Cabe mencionar que el teorema 3.3 (c) lo estamos escribiendo de una manera diferente a como aparece originalmente en [13, Teorema 2.4], debido a un error existente.

**Teorema 3.4.** [5, Teorema 4] Si  $X$  es un continuo localmente conexo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $A \in C_n(X)$ , entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.

- (a)  $\dim_A[C_n(X)]$  es finita.
- (b) Existe una gráfica finita  $G$  en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$ .
- (c)  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ .

**Definición 3.5.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Sean los conjuntos

- (a)  $\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \text{cada componente de } A \text{ está contenida en un alambre de } X\}$ .
- (b)  $\mathcal{Z}_n(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) : \text{existe una vecindad, } \mathcal{M}, \text{ de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que la componente } \mathcal{C} \text{ de } \mathcal{M} \text{ que contiene a } A \text{ es una } 2n - \text{celda}\}$ .

**Definición 3.6.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Un continuo  $X$  **preserva  $n$ -alambrados** si para cualquier homeomorfismo  $h : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ , se cumple que  $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$ .

**Teorema 3.7.** Si  $X$  es un continuo localmente conexo y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un arco o una curva cerrada simple. Note que siempre  $\mathcal{W}_n(X) \subset C_n(X)$ .

Sea  $A \in C_n(X)$ . Como  $A \subset X$ , para cada componente  $C$  de  $A$  tenemos que  $C \subset X$  y como  $X$  es un alambre, tenemos que  $A \in \mathcal{W}_n(X)$ . Por tanto,  $\mathcal{W}_n(X) = C_n(X)$ .

Por otro lado, si  $A \in C_n(X)$ , por el teorema 3.3, tenemos que  $\dim_A[C_n(X)] = 2n + \sum_{p \in (R(X) \cap A)} (\text{ord}_X(p) - 2)$ , ya que  $X$  es una gráfica finita. Pero  $X$  no tiene puntos de ramificación ( $R(X) = \emptyset$ ). Por lo que  $\dim_A[C_n(X)] = 2n$ . Así,  $C_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$ . Por tanto,  $\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$ .

Supongamos que  $X$  es un continuo localmente conexo que no es un arco ni una curva cerrada simple. Sea  $A \in \mathcal{W}_n(X)$ , es decir, cada componente de  $A$  está contenida en un alambre de  $X$ . Supongamos que  $\mathcal{C}$  es una componente de  $A$ . Entonces existe un alambre  $W$  de  $X$  tal que  $\mathcal{C} \subset W$ . Si  $W$  es compacto, es decir, homeomorfo a  $[0, 1]$  o  $S^1$ , entonces por el teorema 2.18,  $W = X$ , de donde  $X$  es un arco o una

curva cerrada simple, lo cual es una contradicción. Así, tenemos que  $W$  es homeomorfo a  $(0, 1)$  o a  $[0, 1)$  y además  $W$  es la componente de un subconjunto abierto  $U$  de  $X$ . Como  $X$  es un continuo localmente conexo, las componentes de abiertos en  $X$  son abiertos en  $X$ , véase el teorema 2.4, es decir, que  $W$  es abierto de  $X$ .

Como  $\mathcal{C} \subset W$ , con  $W$  abierto y además homeomorfo a  $(0, 1)$  o  $[0, 1)$ , es posible encontrar un arco que contenga a  $\mathcal{C}$  en su interior y contenido en  $W$ . Es decir, sea  $B$  un arco tal que  $\mathcal{C} \subset \text{int}_X(B) \subset B \subset W$ . Entonces cada punto de  $\mathcal{C}$  tiene una vecindad en  $X$  que es un arco. Por tanto, cada punto de  $A$  tiene una vecindad en  $X$  que es un arco, es decir,  $A \subset \mathcal{G}(X)$ , de donde,  $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ . Entonces por el teorema 3.4, se tiene que  $\dim_A[C_n(X)]$  es finita y existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$ , de donde,  $A \in \langle \text{int}_X(G) \rangle_n \subset \langle G \rangle_n = C_n(G)$ . Así,  $C_n(G)$  es una vecindad de  $A$  en  $C_n(X)$ . Como cada punto de  $A$  tiene una vecindad en  $X$  que es un arco, entonces  $A$  no tiene puntos de ramificación de  $G$ , de modo que por el teorema 3.3, tenemos que  $2n = \dim_A[C_n(G)]$  y por el teorema 2.22 (c) se tiene que  $\dim_A[C_n(G)] = \dim_A[C_n(X)]$ . Por tanto,  $\dim_A[C_n(X)] = 2n$ . Por tanto,  $\mathcal{W}_n(X) \subset \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$ .

Ahora, sea  $A \in \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$ . Por el teorema 3.4, existe una gráfica finita  $G$  contenida en  $X$  tal que  $A \subset \text{int}_X(G)$ , de donde,  $A \in \langle \text{int}_X(G) \rangle_n \subset \langle G \rangle_n = C_n(G)$ . Es decir,  $C_n(G)$  es una vecindad de  $A$  en  $C_n(X)$ . Luego por el teorema 2.22 (c), tenemos que  $\dim_A[C_n(G)] = \dim_A[C_n(X)] = 2n$ . Así, si  $R(G)$  denota el conjunto de todos los puntos de ramificación de  $G$ , entonces  $A \cap R(G) = \emptyset$ , de acuerdo al teorema 3.3. Si  $\mathcal{C}$  es una componente de  $A$ , entonces  $\mathcal{C} \subset \alpha - \{a, b\}$ , para algún arco libre  $\alpha$  de  $G$  con puntos extremos  $a$  y  $b$ . Sea  $W$  la componente  $\text{int}_X(G) \cap (X - R(G))$  que contiene a  $\mathcal{C}$ , entonces  $W$  es subconjunto conexo de  $\alpha$ . Como  $\alpha$  es un arco o una curva cerrada simple y  $X$  no es un arco ni curva cerrada simple, tenemos que  $W$  es homeomorfo a  $(0, 1)$  o a  $[0, 1)$ , es decir, que  $W$  es un alambre en  $X$ . Por tanto,  $A \in \mathcal{W}_n(X)$ . Por tanto,  $\{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\} \subset \mathcal{W}_n(X)$ .

Así, tenemos que  $\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$ . □

**Teorema 3.8.** *Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $X$  es un continuo localmente conexo, entonces  $X$  preserva  $n$ -alambrados.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un continuo localmente conexo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$  es un homeomorfismo. Por el teorema 3.7, tenemos que

$$\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}. \quad (1)$$

Si  $A \in \mathcal{W}_n(X)$ , por (1), tenemos que  $\dim_A[C_n(X)] = 2n$ . Como  $h$  es un homeomorfismo, tenemos que  $h(A) \in C_n(X)$  y  $\dim_{h(A)}[C_n(X)] = 2n$ . Por (1), tene-

mos que  $h(A) \in \mathcal{W}_n(X)$ . Por tanto,  $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$ . Así,  $X$  preserva  $n$ -alambrados.  $\square$

**Definición 3.9.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos el conjunto  $\mathcal{V}$  como:

$$\mathcal{V} = \{A \in C_n(X) : \text{existe una vecindad } \mathcal{M} \text{ de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que si } \mathcal{C} \text{ es la componente de } \mathcal{M} \text{ que contiene a } A, \text{ entonces } \dim[\mathcal{C}] = 2n\}.$$

**Definición 3.10.** Un continuo  $X$  es **unicoherente** si para cualquier pareja  $A, B \in C(X)$  tales que  $X = A \cup B$ , entonces  $A \cap B$  es conexo. Un Continuo es **hereditariamente unicoherente** si para cualquier  $A \in C(X)$  es unicoherente. Un **dendroide** es un continuo arco conexo hereditariamente unicoherente.

Cabe mencionar que en un dendroide  $X$  no contiene curvas cerradas simples, pues estas no son unicoherentes y por tanto ponemos definir al único arco que une a  $p$  y  $q$  en  $X$  por  $pq$  si  $p \neq q$  y  $pq = \{p\}$  si  $p = q$ .

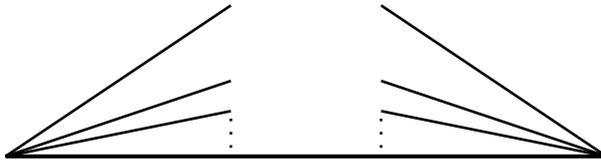


Figura 1: Dendroide  $X$

El siguiente resultado nos ayuda demostrar el teorema 3.12.

**Teorema 3.11.** [4, Lema 4] Si  $X$  es un continuo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $\mathcal{V}$  como en la definición 3.9, entonces

- (a)  $\mathcal{W}_n(X) \subset \mathcal{V}$ .
- (b) Si  $X$  es un dendroide, entonces  $\mathcal{W}_n(X) = \mathcal{V}$ .

**Teorema 3.12.** Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $X$  es dendroide, entonces  $X$  preserva  $n$ -alambrados.

*Demostración.* Sean  $X$  un dendroide,  $n \in \mathbb{N}$  y  $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$  un homeomorfismo. Por el teorema 3.11, tenemos que

$$\mathcal{W}_n(X) = \mathcal{V}. \tag{2}$$

Si  $A \in \mathcal{W}_n(X)$ , por (2), existe una vecindad  $\mathcal{M}$  de  $A$  en  $C_n(X)$  tal que la componente  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{M}$  que contiene a  $A$  tiene dimensión  $2n$  ( $\dim[\mathcal{C}] = 2n$ ). Como  $h$  es un homeomorfismo, tenemos que  $h(\mathcal{M})$  es una vecindad de  $h(A)$  en  $C_n(X)$

y que  $h(\mathcal{C})$  es la componente de  $h(\mathcal{M})$  que contiene a  $h(A)$  con dimensión  $2n$  ( $\dim[h(\mathcal{C})] = 2n$ ). Luego,  $h(A) \in \mathcal{V}$ . Por (2), tenemos que  $h(A) \in \mathcal{W}_n(X)$ . Por tanto,  $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$ . Así,  $X$  preserva  $n$ -alambrados.  $\square$

**Teorema 3.13.** [4, Teorema 3.6] *Si  $X$  es un continuo y  $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ , entonces*

$\mathcal{W}_1(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X) : A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \text{ si } \mathcal{C} \text{ es la componente de } \mathcal{U} \text{ que contiene a } A, \text{ entonces } \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) \text{ es conexo}\}.$

## 4 Rigidez de hiperespacios

En esta sección presentamos los resultados que tratan en cuanto al concepto de rigidez del  $n$ -ésimo hiperespacio de un continuo, en el que demostramos que el  $n$ -ésimo hiperespacio de un continuo casi enrejado, localmente conexo y sin pelos es rígido para todo natural  $n$  distinto del 2, véase teorema 4.12. También presentamos un resultado en el que el  $n$ -ésimo hiperespacio, de un continuo localmente conexo que no es casi enrejado, no es rígido para todo número natural  $n$ , véase teorema 4.6.

En la sección anterior ya se mencionaron los hiperespacios que más se han estudiado,  $2^X$ ,  $C_n(X)$  y  $F_n(X)$ . Es indispensable definir qué se entiende por que que el  $n$ -ésimo hiperespacio de un continuo sea rígido.

**Definición 4.1.** Sean  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ . El hiperespacio  $C_n(X)$  es rígido si para cualquier homeomorfismo  $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ , se cumple que  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ .

Antes de presentar los resultados principales, que tratan de rigidez del  $n$ -ésimo hiperespacio de un continuo, revisamos unas definiciones y resultados que nos ayudarán más adelante en las pruebas de los resultados.

**Definición 4.2.** Sea  $X$  un continuo con métrica  $d$ . Un subconjunto  $A$  de  $X$  es un **Z-conjunto** en  $X$  si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe una función continua  $f: X \rightarrow X - A$  tal que  $d(x, f(x)) < \varepsilon$  para todo  $x \in X$ .

Vamos a mencionar algunos resultados que utilizaremos en la prueba de uno de los teoremas importante de esta sección, el cual menciona para qué familia de continuos el hiperespacio  $C_n(X)$  no es rígido.

**Definición 4.3.** Sean  $X$  un continuo,  $K$  un subconjunto cerrado de  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos el conjunto  $C_n(X, K)$  como:

$$C_n(X, K) = \{A \in C_n(X) : A \cap K \neq \emptyset\}.$$

**Teorema 4.4.** [5, Teorema 16] Si  $X$  es un continuo localmente conexo,  $n \in \mathbb{N}$  y  $R$  un subconjunto no vacío cerrado de  $\mathcal{P}(X)$ , entonces  $C_n(X, R)$  es un cubo de Hilbert.

**Teorema 4.5.** [10, Teorema de Homogeneidad de Anderson 11.9.1] Si  $\mathcal{Q}$  es un cubo de Hilbert,  $A, B$  dos  $Z$ -conjuntos de  $\mathcal{Q}$  y  $h: A \rightarrow B$  es un homeomorfismo, entonces  $h$  puede ser extendida a un homeomorfismo  $H: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ .

El resultado siguiente es uno de los principales de esta sección.

**Teorema 4.6.** Si  $X$  es un continuo localmente conexo que no es casi enrejado y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $C_n(X)$  no es rígido.

*Demostración.* Como  $\mathcal{P}(X)$  es cerrado de  $X$ , y  $X$  es localmente conexo, por el teorema 4.4, se tiene que  $C_n(X, \mathcal{P}(X))$  es homeomorfo al cubo de Hilbert. Como  $X$  no es casi enrejado, existen un conjunto abierto  $U$  de  $X$  y  $p \in X$  tal que  $p \in U \subset \mathcal{P}(X)$ . Tomamos un subcontinuo no degenerado  $T$  de  $X$  tal que  $p \in T \subset U$ .

Sea  $\mathcal{A} = \text{Fr}_{C_n(X)}(C_n(X, \mathcal{P}(X)))$  y  $\mathcal{B} = \{\{p\}, T\}$ . Note que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son subconjuntos cerrados de  $C_n(X, \mathcal{P}(X))$ . Como  $p \in T \subset U \subset \mathcal{P}(X)$ , entonces  $\{p\}, T \in \langle U \rangle_n \subset C_n(X, \mathcal{P}(X))$ . Entonces  $\{p\}, T \in \text{int}_{C_n(X)}(C_n(X, \mathcal{P}(X)))$ . Luego  $\{p\}, T \notin \mathcal{A}$ , es decir, que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ . Por [5, Claim 1, Teorema 20], se tiene que  $\mathcal{A}$  es un  $Z$ -conjunto de  $C_n(X, \mathcal{P}(X))$  y como  $\mathcal{B}$  es un subconjunto finito del cubo de Hilbert  $C_n(X, \mathcal{P}(X))$ , tenemos que  $\mathcal{B}$  es un  $Z$ -conjunto de  $C_n(X, \mathcal{P}(X))$ , véase [10, pág. 78]. Entonces, por [10, Ejercicio 9.4], se tiene que  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  es un  $Z$ -conjunto de  $C_n(X, \mathcal{P}(X))$ .

Consideremos la siguiente función  $h: \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  definida como sigue:

$$h(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \in \mathcal{A}. \\ \{p\} & \text{si } A \in \mathcal{B} \text{ y } A = T. \\ T & \text{si } A \in \mathcal{B} \text{ y } A = \{p\}. \end{cases}$$

Note que  $h$  es un homeomorfismo entre  $Z$ -conjuntos en el cubo de Hilbert  $C_n(X, \mathcal{P}(X))$ . Por el teorema 4.5, existe un homeomorfismo del cubo de Hilbert  $C_n(X, \mathcal{P}(X))$  sobre él mismo, digamos  $g: C_n(X, \mathcal{P}(X)) \rightarrow C_n(X, \mathcal{P}(X))$ , que extiende a  $h$ .

Veamos que podemos extender a  $g$  a un homeomorfismo,  $f$ , de  $C_n(X)$  en  $C_n(X)$  tal que  $f(F_1(X)) \neq F_1(X)$ , lo cual prueba que el hiperespacio  $C_n(X)$  no es rígido.

Sea la función  $f: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$  definida como:

$$f(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \in C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X)). \\ g(A) & \text{si } A \in C_n(X, \mathcal{P}(X)). \end{cases}$$

Note que  $f$  es biyectiva. Mostremos que  $f$  es continua en  $\text{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X)))$ .

Sean  $H \in \text{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X)))$  y  $\{H_i\}_{i=1}^\infty$  una sucesión en  $C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X))$  tal que  $\{H_i\}_{i=1}^\infty$  converge a  $H$ . Por demostrar que  $\{f(H_i)\}_{i=1}^\infty$  converge a  $f(H)$ .

Puesto que  $H_i \in C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X))$ , tenemos que  $f(H_i) = H_i$ . Además,  $\{H_i\}_{i=1}^\infty$  converge a  $H$ , de donde  $\{f(H_i)\}_{i=1}^\infty$  converge a  $H$ . Veamos que  $f(H) = H$ .

Si  $H \in C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X))$ , entonces  $f(H) = H$ . Por tanto,  $\{f(H_i)\}_{i=1}^\infty$  converge a  $f(H)$ . Así, tenemos que  $f$  es continua. Si  $H \in C_n(X, \mathcal{P}(X))$  y como  $C_n(X, \mathcal{P}(X))$  es cerrado de  $C_n(X)$ , entonces  $H \in \text{cl}_{C_n(X)}(C_n(X, \mathcal{P}(X)))$  y como  $H \in \text{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X)))$ , entonces  $H \in \mathcal{A}$ . Como  $h$  restringida a  $\mathcal{A}$  es la identidad, entonces  $f(H) = H$ . Por tanto,  $\{f(H_i)\}_{i=1}^\infty$  converge a  $f(H)$ . Así,  $f$  continua en  $H$ .

Por tanto,  $f$  es un homeomorfismo de  $C_n(X)$  en  $C_n(X)$  tal que  $f(\{p\}) = T$  con  $T \notin F_1(X)$ , es decir,  $f(F_1(X)) \neq F_1(X)$ . Por tanto,  $C_n(X)$  no es rígido.  $\square$

A continuación, presentamos un ejemplo de un continuo  $X$  que cumple con las condiciones del teorema 4.6, por lo que el  $n$ -ésimo hiperespacio de  $X$  no es rígido para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 4.7.** Sea la dendrita  $D_3$  como en [11, Sección 3]. En la figura 2 se muestran los primeros tres pasos de la construcción del continuo  $D_3$ . Por ser  $D_3$  una dendrita, tenemos que  $D_3$  es localmente conexo y como  $D_3$  no tiene arcos libres, tenemos que  $\mathcal{G}(D_3) = \emptyset$ . Por tanto,  $D_3$  no es casi enrejado, de acuerdo al teorema 4.6,  $C_n(D_3)$  no es rígido para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

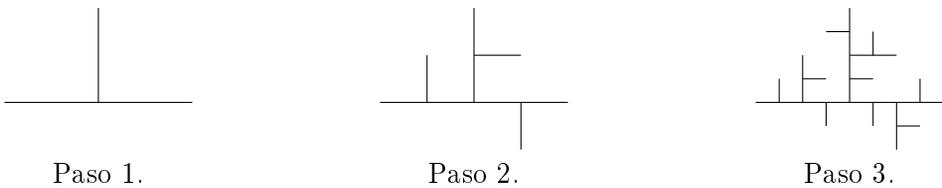


Figura 2: Construcción de la dendrita  $D_3$ .

**Definición 4.8.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Una  $n$ -variedad es un espacio métrico separable  $M$  tal que cada  $p \in M$  tiene una vecindad en  $M$  homeomorfa a  $[0, 1]^n$ . El interior como variedad de una  $n$ -variedad  $M$ , denotado por  $\text{intv}(M)$ , es

$$\{p \in M : p \text{ tiene una vecindad en } M \text{ homeomorfa a } \mathbb{R}^n\}.$$

La **frontera como variedad** de  $M$ , denotado por  $\partial M$ , es:

$$\{p \in M : p \notin \text{intv}(M)\}.$$

**Ejemplo 4.9.** Si  $X$  es un arco con puntos extremos  $p$  y  $q$ , entonces  $C(X)$  es una 2-celda y  $\partial C(X) = F_1(X) \cup \{A \in C(X) : p \in A\} \cup \{A \in C(X) : q \in A\}$ .

Si  $X$  es una curva cerrada simple, entonces  $C(X)$  es una 2-celda y  $\partial C(X) = F_1(X)$ , véase [10, Ejemplo 5.2].

Veamos un resultado que nos ayuda en la prueba del teorema 4.12

**Teorema 4.10.** Sean  $X$  un continuo localmente conexo que no contiene pelos y  $h: C(X) \rightarrow C(X)$  es un homeomorfismo. Si  $p \in \alpha - \{a, b\}$  para algún arco libre  $\alpha$  de  $X$  con puntos extremos  $a$  y  $b$ , entonces  $h(\{p\}) \in F_1(X)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es una curva cerrada simple y  $\alpha$  un arco libre de  $X$  con puntos extremos  $a, b$ . Sea  $h: C(X) \rightarrow C(X)$  un homeomorfismo y  $p \in \alpha - \{a, b\}$ . Entonces  $C(X)$  es una 2-celda tal que su frontera como variedad es  $F_1(X)$ , es decir, que  $\partial C(X) = F_1(X)$ . Como  $h$  es un homeomorfismo y la frontera como variedad y el interior como variedad se preservan bajo homeomorfismos, es decir,  $h(\partial C(X)) = \partial C(X)$ , tenemos que  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ . En particular,  $h(\{p\}) \in F_1(X)$ .

Supongamos que  $X$  no es una curva cerrada simple. Como  $X$  no contiene pelos, tenemos que  $X$  no es un arco. Sea  $A = h(\{p\})$ . Sea  $\mathcal{U} = \langle \alpha - \{a, b\} \rangle \cap C(X)$ . Entonces  $\mathcal{U}$  es un subconjunto abierto de  $C(X)$  que contiene a  $\{p\}$ . Por [10, Ejemplo 5.1], existe un homeomorfismo  $t: \mathcal{U} \rightarrow [0, 1) \times [0, 1)$  tal que  $t(\{p\}) = (0, 0)$ . Así,  $A$  tiene una vecindad  $\mathcal{M}$  en  $C(X)$  tal que  $\mathcal{M}$  es una 2-celda y  $A$  pertenece a la frontera como variedad de  $\mathcal{M}$ . En particular,  $\dim_A[C(X)] = 2$ .

Por el teorema 3.7,  $A \in \mathcal{W}_1(X)$ . Así, existe un subconjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que la componente  $B$  de  $U$  que contiene a  $A$  es homeomorfa a  $(0, 1)$  o  $[0, 1)$ , de acuerdo al teorema 2.18. Por la conexidad local de  $X$ , se tiene que  $B$  es abierto de  $X$ , véase el teorema 2.4. Si existe un homeomorfismo  $f: [0, 1) \rightarrow B$ , entonces  $f([0, \frac{1}{2}))$  es un arco tal que  $f([0, \frac{1}{2})) = B - f([\frac{1}{2}, 1))$  es abierto de  $X$ . Así,  $f([0, \frac{1}{2}))$  es un pelo en  $X$ , lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo que tenemos que  $B$  es homeomorfo a  $(0, 1)$ , en consecuencia  $B \subset \beta$ , donde  $\beta$  es un arco de  $X$ . Como  $A \subset B$ , se tiene que  $A$  es un arco o un conjunto de un solo punto. Si  $A$  es un arco, entonces  $A \in \langle B \rangle \cap C(X) \subset \langle \beta \rangle \cap C(X) = C(\beta)$ . Luego, por el ejemplo 4.9, tenemos que  $C(\beta)$  es una 2-celda contenida en  $C(X)$  tal que  $A$  está en el interior como variedad de  $C(\beta)$ .

Como  $\mathcal{M}$  es vecindad de  $A$ , existe  $U$  abierto de  $C(X)$  tal que  $A \in U \subset \mathcal{M}$ . Entonces existe una 2-celda,  $\mathcal{D}$ , tal que  $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{D}) \subset C(\beta) \cap U \subset \text{int}_{C(X)}(\mathcal{M})$ . Por tanto,  $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{M})$ , es decir, que  $A$  está en interior como variedad de  $\mathcal{M}$

lo cual contradice el teorema del dominio invariante, véase [8, Teroema VI 9]. Por tanto,  $A$  no puede ser un arco, de donde  $A \in F_1(X)$ . Por tanto,  $h(\{p\}) \in F_1(X)$ .  $\square$

**Definición 4.11.** Sea  $X$  un continuo. Definimos el conjunto  $\mathcal{FA}(X)$  como sigue:

$$\mathcal{FA}(X) = \bigcup \{ \text{int}_X J : J \text{ es un arco libre en } X \}.$$

A continuación presentamos el segundo teorema principal de la sección.

**Teorema 4.12.** Si  $X$  es un continuo localmente conexo, casi enrejado, sin pelos y  $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ , entonces el hiperespacio  $C_n(X)$  es rígido.

*Demostración.* Caso  $n = 1$ .

Sean  $X$  un continuo localmente conexo, casi enrejado, sin pelos y  $h: C(X) \rightarrow C(X)$  un homeomorfismo. Como  $X$  es casi enrejado, por [5, Lema 1], tenemos que el conjunto  $\mathcal{FA}(X)$  es denso en  $X$ , es decir, que  $\text{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) = X$ .

Si tomamos un  $x \in X$ , entonces  $x \in \text{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ . Luego, existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\mathcal{FA}(X)$  que converge a  $x$ . Como para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in \mathcal{FA}(X)$ , existe un  $J_n$  arco libre de  $X$  tal que  $x_n \in \text{int}_X J_n$ . Como  $x_n$  y  $X$  cumplen las hipótesis del teorema 4.10 y como  $h$  es un homeomorfismo, tenemos que  $h(\{x_n\}) = \{y_n\} \in F_1(X)$ .

Por la continuidad de  $h$ , tenemos que  $\{h(\{x_n\})\}_{n=1}^\infty$  converge a  $h(\{x\})$ . Como  $\{h(\{x_n\})\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión en  $F_1(X)$  y  $F_1(X)$  es cerrado, tenemos que  $h(\{x\}) = \{y\} \in F_1(X)$ . Luego, tenemos que  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ . Así, el hiperespacio  $C(X)$  es rígido.

Caso  $n \geq 3$ .

Sea  $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$  un homeomorfismo. Como  $X$  es localmente conexo, por el teorema 3.8,  $X$  preserva  $n$ -alambrados, es decir, que  $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$ . Esto implica que  $h(\mathcal{Z}_n(X)) = \mathcal{Z}_n(X)$ . Como  $n \geq 3$ , por el teorema 3.13, tenemos que  $\mathcal{W}_1(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X) : A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \text{ si } \mathcal{C} \text{ es la componente de } \mathcal{U} \text{ que contiene a } A, \text{ entonces } \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) \text{ es conexo}\}$ . Luego,  $h(\mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{W}_1(X)$ .

Si  $X$  es una curva cerrada simple, entonces  $C(X) = \mathcal{W}_1(X)$ . Luego  $h(C(X)) = C(X)$ , es decir,  $h|_{C(X)}$  es un homeomorfismo. Por el caso anterior tenemos que  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ , es decir,  $C_n(X)$  es rígido.

Supongamos que  $X$  no es una curva cerrada simple. Sea  $p \in X$  un punto de la forma  $p \in \alpha - \{a, b\}$  para  $\alpha$  un arco libre de  $X$  con puntos extremos  $a$  y  $b$ . Procediendo como en la prueba del teorema 4.10, llegamos a que  $h(\{p\}) \in F_1(X)$ . Sea  $\mathcal{FA}^*(X) = \{\{p\} : p \in \mathcal{FA}(X)\}$ . Entonces  $h(\mathcal{FA}^*(X)) \subset F_1(X)$ . Así,  $\text{cl}_{C(X)}(h(\mathcal{FA}^*(X))) \subset F_1(X)$ . Como  $X$  es casi enrejado,  $\text{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) = X$ , luego  $\text{cl}_{C(X)}(\mathcal{FA}^*(X)) = F_1(X)$ . Así,  $h(F_1(X)) = h(\text{cl}_{C(X)}(\mathcal{FA}^*(X))) = \text{cl}_{C(X)}(h(\mathcal{FA}^*(X))) \subset F_1(X)$ . Entonces  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ , de esto se sigue que el hiperespacio  $C_n(X)$  es rígido.  $\square$

**Ejemplo 4.13.** En la figura 3 se muestra una aproximación para la construcción de un continuo  $X$  el cual es localmente conexo, casi enrejado y sin pelos. Por el teorema 4.12, se tiene que  $C_n(X)$  es rígido para cada  $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ .

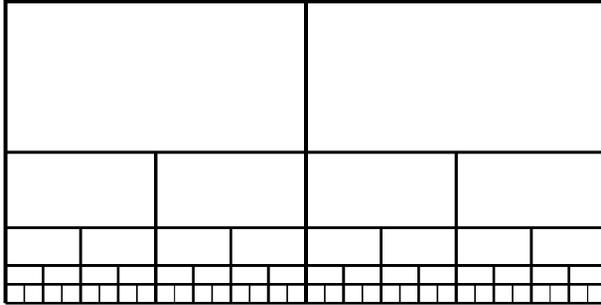


Figura 3: Continuo  $X$

Como consecuencia del teorema anterior, resulta interesante preguntarse, ¿qué pasa en el caso  $n = 2$ ?. El siguiente resultado muestra que cuando existen arcos libres en un continuo  $X$ , el hiperespacio  $C_2(X)$  no es rígido.

**Teorema 4.14.** [4, Teorema 20] *Si  $X$  es un continuo con al menos un arco libre, entonces  $C_2(X)$  no es rígido.*

## 5 Abanicos suaves

En esta sección trabajamos con los abanicos suaves. En el teorema 5.10 presentamos un resultado en el que se muestra la rigidez del  $n$ -ésimo hiperespacio de un continuo.

Para un continuo arco conexo aceptamos la siguiente definición.

**Definición 5.1.** Sean  $X$  un continuo arco conexo,  $p \in X$  y  $r \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ . El punto  $p$  es **de orden  $r$  en  $X$** , (denotado por  $r = \text{ord}_p X$ ), si  $p$  es un punto extremo común de exactamente  $r$  arcos en  $X$  que no se intersectan en ningún otro punto, véase [12, pág. 6]. Si  $X$  es un continuo arco conexo, definimos los siguiente.

- (a)  $p$  es un **punto extremo de  $X$**  si  $\text{ord}_p X = 1$ . El conjunto de puntos extremos de  $X$  lo denotamos por  $E(X)$ .
- (b)  $p$  es un **punto ordinario de  $X$**  si  $\text{ord}_p X = 2$ . El conjunto de puntos ordinarios de  $X$  lo denotamos por  $O(X)$ .

(c)  $p$  es un **punto de ramificación de  $X$**  si  $\text{ord}_p X \geq 3$ . El conjunto de puntos de ramificación de  $X$  lo denotamos por  $R(X)$ .

**Ejemplo 5.2.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $X$  es un  $n$ -odo simple con vértice  $p$ , entonces  $p$  es un punto de orden  $n$  en  $X$ , es decir,  $\text{ord}_p X = n$ .

**Definición 5.3.** Un **abanico** es un dendroide  $X$  con exactamente un punto de ramificación  $v$ , llamado el **vértice** de  $X$ .

**Observación 5.4.** Si  $X$  es un abanico con vértice  $v$ , entonces se puede observar que:

$$X = \bigcup_{e \in E(X)} ve.$$

**Definición 5.5.** Un abanico  $X$  con vértice  $v$  es **suave** si para cualquier sucesión  $\{x_i\}_{i=1}^\infty$  en  $X$  convergente a un punto  $x \in X$  ( $\lim x_i = x$ ), se tiene que la sucesión de arcos  $\{vx_i\}_{i=1}^\infty$  converge y converge al arco  $vx$  ( $\lim vx_i = vx$ ) en  $C(X)$ .

**Definición 5.6.** Sea  $X$  es un abanico suave con vértice  $v$ . Definimos  $E_0(X) := \text{cl}_X(E(X)) - E(X)$ , donde  $E(X)$  es el conjunto de puntos extremos de  $X$ .

**Definición 5.7.** Supongamos que  $X$  es un abanico suave contenido en el cono sobre el conjunto de Cantor, donde el conjunto de Cantor es el conjunto ternario usual construido en  $[0, 1] \times \{0\}$  en el plano y el vértice del cono es el punto  $v = (0, 1)$ . Consideramos la proyección sobre la segunda coordenada  $\pi: X \rightarrow [0, 1]$ . Note que  $\pi(v) = 1$ . Definimos el conjunto  $X_0$  por:

$$X_0 = \{v\} \cup \text{cl}_X(\bigcup\{vx: x \in E_0(X)\}).$$

Note que  $X_0$  es un subcontinuo de  $X$  y cuando  $E_0(X) = \emptyset$ , entonces  $X_0 = \{v\}$ . El subcontinuo  $X_0$  nos va dar una caracterización de la rigidez del hiperespacio  $C(X)$ , véase el teorema 5.9.

**Definición 5.8.** Sean  $X$  un abanico suave con vértice  $v$ . Definimos los conjuntos  $X_v$  y  $\mathcal{L}(e)$  como:

(a)  $X_v = \{A \in C(X): v \in A\}$ .

(b) Para cada  $e \in E(X)$ , sea  $\mathcal{L}(e) = \{A \in C(X): A \subset ve - \{v\}\}$ .

Note que

$$C(X) = X_v \cup (\bigcup\{\mathcal{L}(e): e \in E(X)\}).$$

Ahora mencionamos una caracterización de la rigidez del hiperespacio  $C(X)$  cuando  $X$  es un abanico suave.

**Teorema 5.9.** [4, Teorema 5.4] *Sea  $X$  un abanico suave. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  $C(X)$  es rígido.
- (b)  $X = X_0$ .

Veamos el resultado principal de esta sección que relaciona a  $C(X)$  con  $C_n(X)$  cuando  $X$  es un abanico suave.

**Teorema 5.10.** *Si  $X$  es un abanico suave tal que  $C(X)$  es rígido y  $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ , entonces  $C_n(X)$  es rígido.*

*Demostración.* Supongamos que  $n \geq 3$  y que  $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$  es un homeomorfismo. Como  $X$  es un dendroide, por el teorema 3.12, tenemos que  $X$  preserva  $n$ -alambrados, es decir,  $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$ . Luego,  $h(\mathcal{Z}_n(X)) = \mathcal{Z}_n(X)$ . Por el teorema 3.13, tenemos que  $\mathcal{W}_1(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X) : A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \text{ si } \mathcal{C} \text{ es la componente de } \mathcal{U} \text{ que contiene a } A, \text{ entonces } \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) \text{ es conexo}\}$ . Así,  $h(\mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{W}_1(X)$ . Note que  $\mathcal{W}_1(X) = \{A \in C(X) : v \notin A\}$  y que  $X_v = C(X, \{v\})$ .

Como  $C(X)$  es rígido, por el teorema 5.9, tenemos que  $X = X_0$ . Si  $E(X)$  es finito, entonces  $E(X) = \text{cl}_X(E(X))$ , de donde,  $E_0(X) = \emptyset$ . Así,  $X_0 = \{v\} \neq X$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $E(X)$  es infinito. Por [2, Teorema 3.1 (3)], tenemos que  $X_v$  es homeomorfo al Cubo de Hilbert. Sea  $\mathcal{A} = \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{W}_1(X))$ . Luego,  $h(\mathcal{A}) = h(\text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{W}_1(X))) = \text{cl}_{C_n(X)}(h(\mathcal{W}_1(X))) = \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{A}$ , es decir  $h(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ . Así,  $h(\mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X)$ .

Note que  $\mathcal{A} = \{A \in C(X) : \text{existe } e \in E(X) \text{ tal que } A \subset ve\}$ . Luego  $\mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X) = X_v \cap \mathcal{A}$ . Luego  $h(X_v \cap \mathcal{A}) = h(\mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X) = X_v \cap \mathcal{A}$ , es decir,  $h(X_v \cap \mathcal{A}) = X_v \cap \mathcal{A}$ . Luego, la restricción  $h|_{X_v \cap \mathcal{A}}: X_v \cap \mathcal{A} \rightarrow X_v \cap \mathcal{A}$  es un homeomorfismo. Por [2, Teorema 3.1 (2)], tenemos que  $X_v \cap \mathcal{A}$  es un  $Z$ -conjunto de  $X_v$ . Así,  $h|_{X_v \cap \mathcal{A}}$  es un homeomorfismo entre  $Z$ -conjuntos del cubo de Hilbert  $X_v$ . Por el teorema 4.5, el homeomorfismo  $h|_{X_v \cap \mathcal{A}}$  puede ser extendido a un homeomorfismo  $g: X_v \rightarrow X_v$ .

Definimos  $f: X_v \cup \mathcal{A} \rightarrow X_v \cup \mathcal{A}$  por

$$f(A) = \begin{cases} g(A) & \text{si } A \in X_v. \\ h(A) & \text{si } A \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Note que  $g|_{X_v \cap \mathcal{A}} = h|_{X_v \cap \mathcal{A}}$ , por lo que  $f$  está bien definida. Más aún como  $g$  y  $h$  son homeomorfismos,  $f$  es un homeomorfismo.

Note que  $X_v \cup \mathcal{A} = C(X)$ . Luego  $f$  es un homeomorfismo de  $C(X)$  en  $C(X)$  y como  $C(X)$  es rígido, se tiene que  $f(F_1(X)) = F_1(X)$ .

Si  $p \in X - \{v\}$ , entonces  $\{p\} \in \mathcal{W}_1(X)$ . Como  $\mathcal{W}_1(X) \subset \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{A}$ , tenemos que  $\{p\} \in \mathcal{A}$ . Así,  $h(\{p\}) = f(\{p\}) \in F_1(X)$ .

Como  $v$  es el vértice de  $X$ , tenemos que existe una sucesión  $\{v_n\}_{n=1}^\infty$  en  $X - \{v\}$  que converge a  $v$ . Como  $v_n \in X - \{v\}$ , tenemos que  $h(\{v_n\}) \in F_1(X)$ . Por la continuidad de  $h$ , tenemos que  $h(\{v_n\})$  converge a  $h(\{v\})$ . Como  $h(\{v_n\})$  es una sucesión en  $F_1(X)$  y  $F_1(X)$  es cerrado, tenemos que  $h(\{v\}) \in F_1(X)$ . Por tanto, concluimos que  $h(F_1(X)) \subset F_1(X)$ . De manera similar se llega a que  $h^{-1}(F_1(X)) \subset F_1(X)$ . Así, tenemos que  $h(F_1(X)) = F_1(X)$ . Es decir,  $C_n(X)$  es rígido.  $\square$

## 6 Continuos hereditariamente indescomponibles

Hasta aquí hemos logrado mostrar la rigidez del  $n$ -ésimo hiperespacio para todo natural diferente del 2, para los continuos localmente conexos casi enrejados sin pelos y para los abanicos suaves que cumplen la condición de que  $C(X)$  sea rígido.

Terminamos nuestro estudio presentando un resultado que afirma la rigidez del  $n$ -ésimo hiperespacio para todo número natural, para una familia de continuos distinta a las mencionadas anteriormente.

**Teorema 6.1.** *Si  $X$  es un continuo hereditariamente indescomponible y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $C_n(X)$  es rígido.*

*Demostración.* Véase [9, Teorema 4.4, Claim 4].  $\square$

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haber dedicado su valioso tiempo y empeño para la revisión de este trabajo, gracias a sus sugerencias y comentarios es como se obtuvo la calidad del contenido de este material.

## Bibliografía

- [1] José Gerardo Ahuatzi Reyes, *Los continuos enrejados tienen  $n$ -ésimo hiperespacio único*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

<https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/JoseGerardoAhuatziReyes.pdf>

- [2] Carl Eberhart y Sam Bernardo Nadler, Jr., *Hyperspaces of cones and fans*, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), 279-288.
- [3] Luis A. Guerrero-Méndez, David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, Topology and its Applications ISSN: 0166-8641, 191 (2015) 16–27. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864115001704>
- [4] Rodrigo Hernández-Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of Hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math. 45 (1) (2015) 213-236.
- [5] Rodrigo Hernández-Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mountain J. Math. 43 (2013), 1583-1624.
- [6] David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, *Framed continua have unique  $n$ -fold hyperspace suspension*, Topology and Its Applications ISSN: 0166-8641, 196 (2015) 652 — 667. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864115002047>
- [7] David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, Topology and its Applications (ISSN: 0166-8641), 209 (2016) 1–13. <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2016.05.013>
- [8] Witold Hurewicz and Henry Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Novena impresión, 1974.
- [9] Alejandro Illanes, *Hereditarily indecomposable Hausdorff continua have unique hyperspaces  $2^X$  and  $C_n(X)$* , Publ. Inst. Math. (Beograd). (S.N.) 89 (103) (2011), 49-56.
- [10] Alejandro Illanes y Sam Bernardo Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [11] Janusz Jerzy Charatonik, *Monotone Mappings of universal dendrites*, Topology Appl. 38 (1991), 163-187.
- [12] Janusz Jerzy Charatonik, *On fans*, Dissertationes Math. 54, (1967).

- [13] Verónica Martínez-de-la-Vega, *Dimension of the  $n$ -fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. 32, (2006), 783-799.
- [14] Sam Bernardo Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [15] Sam Bernardo Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

218570078@alumnos.fcfm.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx



# Índice de autores

Bustamante González, Jorge, 5, 93

Cejudo Castilla, César, 29

Cuesta Borges, Abraham, 57

Domínguez Soto, Patricia, 5

Escalante Vega, Juana Elisa, 57

Herrera Carrasco, David, 113, 141

Ibarra Contreras, Manuel, 71

Libreros López, Antonio de Jesús, 113

Macías Romero, Fernando, 5, 113, 141

Martínez García, Armando, 71

Montero Rodríguez, Germán, 141

Pérez Quijano, Tania Gabriela, 29

Salem Silva, Francisco Sergio, 57

Vilchis Montalvo, Iván Fernando, 29

Matemáticas y sus aplicaciones 9  
su composición, diseño y cuidado, estuvo a cargo de  
David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero  
se terminó de imprimir el 26 de octubre de 2018, en los talleres  
de El Errante editor, S. A. de C. V., sito en Privada Emiliano Zapata 5947  
Col. San Baltazar Campeche, Puebla, Pue., México  
El tiraje consta de 500 ejemplares.