

ISBN: 978-607-525-376-3



Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.



Matemáticas y sus aplicaciones 8



# Matemáticas y sus aplicaciones 8

María de Jesús López Toriz  
Fernando Macías Romero

Editores

# *Matemáticas y sus aplicaciones 8*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

María de Jesús López Toriz  
Fernando Macías Romero  
Editores

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

José Alfonso Esparza Ortiz

*Rector*

René Valdiviezo Sandoval

*Secretario General*

Ygnacio Martínez Laguna

*Vicerrector de Investigación y Estudios de Posgrado*

Flavio Marcelino Guzmán Sánchez

*E. D. Vicerrectoría de Extensión y Difusión de la Cultura*

Ana María Dolores Huerta Jaramillo

*Directora de Fomento Editorial*

Martha Alicia Palomino Ovando

*Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*

Primera edición, 2017

ISBN: 978-607-525-376-3

© Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Dirección de Fomento Editorial

2 Norte 1404, C.P. 72000

Puebla, Pue.

Teléfono y fax: 01 222 246 8559

Impreso y hecho en México

Printed and made in Mexico

# Matemáticas y sus aplicaciones 8

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación  
presentados en el  
International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA),  
FCFM, BUAP.

## Editores

María de Jesús López Toriz  
Fernando Macías Romero

## Comité científico internacional

Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BR), Ángel Cano (UNAM), J. Alberto Conejero (UPV, ES), Patricia Domínguez Soto (BUAP), Miguel Ángel García Ariza (BUAP), Eduardo Jaime González-Olivares (UCV, CL), Isabel Llatas Salvador (USB, VEN), Fernando Macías Romero (BUAP), Jana Niemeyer (UW, DE), Alfred Peris (UPV, ES), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Guillermo Sierra Loera (UNAM), Teresa Valerio (UAQ), Francisco Venegas Martínez (IPN).

# Contenido

Presentación	1
Álgebra	
<b>Capítulo 1. Unimodalidad del polinomio de independencia de un grafo a través de su independencia fractal</b>	5
<i>César Bautista Ramos, Paulino Antonio Gómez Salgado, Carlos Guillén Galván, Carlos Alberto López Andrade</i>	
Enseñanza de las matemáticas	
<b>Capítulo 2. Problemas didácticos con la demostración por contradicción. Aproximación sintáctica e interpretación semántica</b>	23
<i>Juan Angoa Amador, Emilio Angulo Perkins, Agustín Contreras Carreto</i>	
Modelación matemática	
<b>Capítulo 3. Efecto Allee: descripción y modelos básicos en la dinámica de poblaciones</b>	41
<i>Evodio Muñoz Aguirre, Sandy Gómez Pérez, Jorge Álvarez Mena</i>	
<b>Capítulo 4. Modelo matemático para una población de células cancerígenas</b>	57
<i>Reinaldo Martínez Cruz, Juan Carlos Monter Cortés, José Erasmo Pérez Vázquez</i>	
Probabilidad y estadística	

<b>Capítulo 5. Generación de curvas y superficies de volatilidad implícita con parámetros de volatilidad estocástica calibrados con funciones de pérdida y evolución diferencial</b>	87
<i>Ambrosio Ortiz Ramírez, José Carlos Trejo García, Benjamín Vallejo-Jiménez</i>	
<b>Capítulo 6. Valuación de opciones europeas bajo el modelo de Cox, Ross y Rubinstein y convergencia al modelo de Black-Scholes</b>	111
<i>Carlos Palomino Jiménez, Daniel Soriano Grande, Francisco Solano Tajonar Sanabria</i>	
 Sistemas dinámicos	
<b>Capítulo 7. Un estudio de la dinámica de la familia <math>f_\lambda(z) = \lambda senz</math> con <math>1 &lt; \lambda &lt; 2.14</math></b>	131
<i>Patricia Domínguez Soto, Lizzeth Trujillo Santamaría</i>	
<b>Capítulo 8. Grupos de Klein y su relación con la dinámica de funciones racionales</b>	149
<i>Alexander Bykov, Patricia Domínguez Soto, David Herrera Carrasco</i>	
 Topología	
<b>Capítulo 9. Espacios fibrantes isovariantes</b>	169
<i>Alexander Bykov, Fernando Macías Romero, Marcelino Taxis Taxis</i>	
<b>Capítulo 10. Las gráficas finitas son continuos Whitney determinados</b>	193
<i>Lázaro Flores De Jesús, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
<b>Capítulo 11. Tipos de homotopía en los niveles de Whitney de gráficas finitas</b>	209
<i>José Gerardo Ahuatzi Reyes, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
<b>Índice de autores</b>	225

# Presentación

Tenemos la fortuna de hacer un recorrido hacia un proceso creativo sin precedentes. Ha llegado el momento de compartir esta sabiduría, de invitar a todo el mundo a embarcarse en el navío que nos conduce hacia la Fuente de todo lo creado. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Third International Conference on Mathematics and its Applications (3CIMA, 2016)*, un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 3CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este producto no es ni siquiera setemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 3CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a José Gerardo Ahuatzí Reyes por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

*María de Jesús López Toriz  
Fernando Macías Romero  
Editores*



---

# Álgebra

---



## Capítulo 1

# Unimodalidad del polinomio de independencia de un grafo a través de su independencia fractal

César Bautista Ramos<sup>1</sup>, Paulino Antonio Gómez Salgado<sup>2</sup>,  
Carlos Guillén Galván<sup>2</sup>, Carlos Alberto López Andrade<sup>2</sup>

<sup>2</sup>FCFM, BUAP

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias de la Computación, BUAP

### Resumen

En este trabajo se presenta un estudio del polinomio de independencia reducido de un grafo. Mediante el análisis del sistema dinámico holomorfo ligado al polinomio generado por la operación composición de grafos, a cada grafo se le asocia un fractal llamado su independencia fractal.

Además se expone la independencia fractal de todos los grafos con número de independencia 2, presentados en el artículo *The independence fractal of a graph* [4], y su relación con el concepto de unimodalidad a través de la ubicación de sus raíces.

## 1 Preliminares

En teoría de grafos el estudio de la localización de las raíces de los polinomios ligados a un grafo siempre ha aparecido como algo natural e importante [3, 4, 5, 6, 8, 9]. Además, el estudio de las propiedades del polinomio de independencia tampoco se ha dejado de lado por los investigadores del área, quienes se han interesado principalmente en el concepto de unimodalidad (cf. [10, 11]).

Nuestro objetivo será presentar un análisis de la localización de las raíces del polinomio de independencia de grafos con número de independencia 2 utilizando como herramienta su independencia fractal [4]. Posteriormente se analizará si la ubicación de dichas raíces nos permiten determinar la unimodalidad de su polinomio de independencia con la ayuda de dos criterios conocidos [3].

Se enuncian a continuación los conceptos que serán de utilidad para el desarrollo del trabajo.

**Definición 1.1.** Un *grafo* es un par ordenado de conjuntos  $G = (V, E)$  tal que  $E \subseteq [V]^2$ ; es decir los elementos de  $E$  son subconjuntos de dos elementos de  $V$ .

Los elementos de  $V$  son los *vértices* o *nodos* del grafo  $G$ , los elementos de  $E$  son sus *aristas*, que son conjuntos de dos elementos de  $V$  a los que regularmente se les llama *extremos* de la arista, es decir las aristas no tienen vértice inicial y final, sus extremos sólo la definen pero no se habla de dirección, a este tipo de grafos se les llama regularmente *grafos simples*.

La forma usual de representar un grafo es dibujar un punto por cada vértice y unir dos de ellos por una línea si los vértices correspondientes forman una arista. Muchas de las definiciones y conceptos en la teoría de grafos son sugeridos por esta representación gráfica.

El número de vértices de un grafo es su *orden* y se denota por  $|G|$ . Mientras que el número de aristas se denota por  $\|G\|$ . Un grafo de orden cero o uno es llamado *grafo trivial*. Para el grafo vacío  $(\emptyset, \emptyset)$  escribimos simplemente  $\emptyset$ .

Algunos grafos se caracterizan por sus propiedades y tienen nombres particulares para identificarlos. Un grafo  $G$  es *completo* si para cada par de vértices  $x, y \in G$  la arista  $xy \in G$ , es decir si todas las parejas de vértices en  $G$  son adyacentes. Un *grafo completo* de  $n$  vértices se denota por  $K_n$ . El complemento de un grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , es un grafo con el mismo conjunto de vértices de  $G$  tal que  $\{x, y\} \in \overline{G}$  si, y solo  $\{x, y\} \notin G$ . El complemento de un grafo completo es un grafo *sin aristas*.

Un *camino*  $P$  es un grafo no vacío  $P = (V, E)$  en el cual  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  y  $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ , donde cada  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ . Un grafo no vacío  $G$  es llamado *conectado* si cualquier par de vértices  $x, y \in G$  están unidos por un camino en  $G$ . Si  $U \subseteq V(G)$  y  $G[U]$  es conectado, decimos que  $G$  es conectado en  $U$ . Llamamos *desconectado* a un grafo que es no conectado.

Un grafo conectado que no tiene ciclos es un *árbol*, es decir un árbol es un grafo conectado en donde existe un único camino entre cualquier par de vértices.

La siguiente operación de grafos será útil para definir el concepto de *independencia fractal* que se presenta posteriormente.

**Definición 1.2.** Sean  $G$  y  $H$  dos grafos, la composición  $G[H]$  es un grafo con

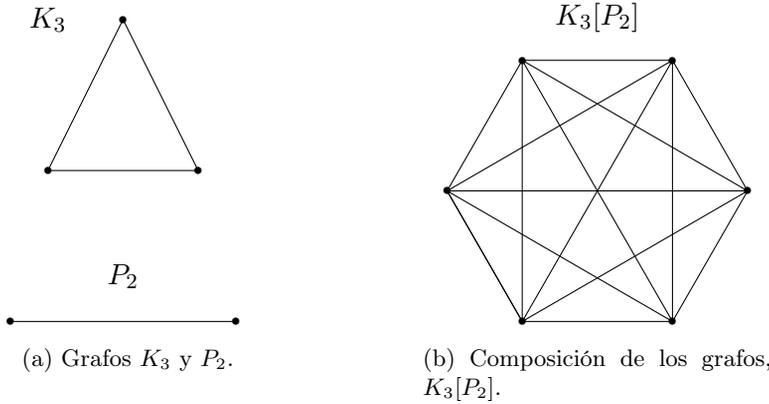


Figura 1: Grafos  $K_3$  y  $P_2$  y su composición  $K_3[P_2]$ .

conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$  y cuyos vértices son pares ordenados de la forma  $(v, x)$  con  $v \in G$  y  $x \in H$ . Dos vértices  $(v, x), (w, y) \in G[H]$  son adyacentes si, y sólo si  $vw \in G$  o bien  $v = w$  y  $xy \in H$ .

El grafo  $G[H]$  es la composición (o producto lexicográfico) de  $G$  y  $H$  y puede ser visto como el grafo que surge de  $G$  y  $H$  por sustituir cada vértice de  $G$  por una copia de  $H$ , como se muestra en la Figura 1, donde se puede ver la composición de los grafos  $K_3$  y  $P_2$ .

**Proposición 1.3.** *La operación composición de grafos es asociativa es decir para  $G, H, F$  grafos se cumple que  $G[(H[F])] = (G[H])[F]$ .*

Hecho que se verifica en [7].

De lo anterior podemos hablar de las potencias del grafo  $G$  definidas de forma inductiva como sigue:

**Definición 1.4.** Sea  $G$  un grafo

- (i)  $G^0 = \emptyset$ ;
- (ii)  $G^1 = G$ ;
- (iii)  $G^k = G[G^{k-1}]$ .

## 2 Polinomio de independencia

En esta sección se presentan los conceptos de independencia y polinomios de independencia reducidos que servirán de base para nuestro objetivo.

**Definición 2.1.** Dos vértices  $x, y \in V(G)$  son llamados *independientes* si no son adyacentes.

**Definición 2.2.** Un subconjunto  $I \subseteq V(G)$  se llama *conjunto independiente* de  $G$  si para cualquier par de vértices  $x, y \in I$  la arista  $xy \notin G$ . Es decir, si cada par de vértices de  $I$  son independientes.

Un grafo es llamado *bien cubierto* si sus conjuntos independientes maximales son de la misma cardinalidad. Estos grafos son importantes por su relación con el concepto de unimodalidad.

**Definición 2.3.** Sea  $k_I$  el número de vértices de un conjunto independiente  $I \subseteq G$ , el *número de independencia* de  $G$  es:

$$\beta_G = \max\{k_I \mid I \text{ es conjunto independiente de } G\}.$$

Para un grafo  $G$  y un entero no negativo  $k$ . Denotamos por  $i_k$  el número de conjuntos independientes de  $G$  de cardinalidad  $k$ .

**Definición 2.4.** El *polinomio de independencia* de  $G$  es el polinomio generado por:

$$i_G(x) = \sum_{k=0}^{\beta_G} i_k x^k,$$

donde  $\beta_G$  es el número de independencia de  $G$ .

El polinomio de independencia reducido de un grafo  $G$  se define como  $f_G(x) = i_G(x) - 1$ , donde  $i_G(x)$  es el polinomio de independencia de  $G$ . Ambos se comportan de manera interesante con respecto a la composición de grafos, como lo describen los siguientes resultados.

**Teorema 2.5.** Si  $G$  y  $H$  son grafos, entonces el polinomio de independencia de  $G[H]$  está dado por:

$$i_{G[H]}(x) = i_G(f_H(x)). \quad (1)$$

**Corolario 2.6.** Si  $G$  y  $H$  son grafos, entonces el polinomio de independencia reducido de  $G[H]$  está dado por:

$$f_{G[H]}(x) = f_G(f_H(x)). \tag{2}$$

La demostración de los resultados anteriores puede ser revisada por el lector en [7].

### 3 Conceptos básicos de sistemas dinámicos holomorfos

El campo del análisis dinámico complejo supone un estudio de funciones racionales iterativas sobre los complejos extendidos  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  véase [2].

Es importante dar una representación geométrica asociada a este nuevo sistema para esto usamos la esfera unitaria en el plano tridimensional denotada por  $S$  donde cada punto puede ser asociado a un número complejo por medio de una correspondencia inyectiva llamada la *proyección estereográfica* ( $P_e(z)$ ) excepto por  $(0, 0, 1)$  por lo que asociamos este punto con  $\infty$ .

La *esfera de Riemann* o plano complejo extendido es la unión del plano complejo con el conjunto formado por el infinito,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , su representación geométrica es precisamente una esfera.

Debido a que nos centraremos únicamente en la solución de polinomios usaremos la métrica del valor absoluto denotada por  $|\cdot|$ , que mide la distancia entre dos puntos  $z, w \in \mathbb{C}$  como  $|z - w|$ .

De lo anterior nuestro estudio se basa en determinar la dinámica que sigue un sistema dinámico discreto en la esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$  generada por una transformación holomorfa:

**Definición 3.1.** Dado un punto  $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ , la sucesión inductivamente definida por  $z_{n+1} = R(z_n)$  es llamada *órbita positiva* de  $z_0$  y es denotada por  $\mathcal{O}^+(z_0)$ .

Si  $z_0 = z_n$  para algún  $n$ , entonces  $z_0$  es un *punto periódico* y  $\mathcal{O}^+(z_0)$  es una *órbita periódica* o simplemente un *ciclo*. Si  $n$  es el primer número natural tal que  $z_0 = z_n$ , entonces  $n$  es llamado el *periodo* de la órbita. Usualmente si el periodo de una órbita es uno, se dice que  $z_0$  es un *punto fijo*.

**Definición 3.2.** Para algún polinomio  $f$  y un entero positivo  $k$  la *potencia de composición* es:

- (i)  $f^{\circ(0)} = I$ ;
- (ii)  $f^{\circ(1)} = f$ ;
- (iii)  $f^{\circ(k)} = f(f^{\circ(k-1)})$ .

**Definición 3.3.** Para un polinomio  $f$ , su *conjunto de Julia completo* denotado por  $K(f)$ , es el conjunto de todos los puntos  $z$  cuya órbita  $\mathcal{O}^+(z)$  es acotada en  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ , mientras que su *conjunto de Julia* es la frontera,  $\partial K(f)$ . Finalmente su *conjunto de Fatou* es el complemento de el conjunto de Julia en  $\mathbb{C}$ , denotados respectivamente por  $J(f)$  y  $F(f)$ .

**Definición 3.4.** Sea  $z_0$  un punto periódico de periodo  $n$ . El número  $\lambda_{z_0} = f^{\circ(n)}(z_0)$  es *valor propio* o *multiplicador* del ciclo, y es independiente de la elección de  $z_0$  en el ciclo. El ciclo se clasifica como:

- (i) *atractor* si  $0 < |\lambda_{z_0}| < 1$ ,
- (ii) *repulsor* si  $|\lambda_{z_0}| > 1$ ,
- (iii) *racional indiferente* si  $\lambda$  es raíz de unidad, y
- (iv) *irracional indiferente* si  $|\lambda_{z_0}| = 1$ , pero  $\lambda_{z_0}$  no es raíz de unidad.

Como se menciona en [4] algunos hechos básicos pero no triviales son los siguientes:

- Proposición 3.5.**
- i) ciclos atractores *están en*  $F(f)$ ,
  - ii) ciclos repulsores *están y son densos en*  $J(f)$ ,
  - iii) ciclos racionales indiferentes *están en*  $J(f)$ , y
  - iv) ciclos irracionales indiferentes *pueden estar tanto en*  $F(f)$  *como en*  $J(f)$ .

**Definición 3.6.** Para  $z_0 \in \mathbb{C}$  su *órbita negativa* con respecto a  $f$  es el conjunto

$$\mathcal{O}^-(z_0) = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{\circ(-k)}(z_0).$$

Si  $f$  es un polinomio,  $z$  es un *punto excepcional* si, y sólo si su órbita negativa  $\mathcal{O}^-(z)$  es finita. Un punto que no es excepcional es llamado *no-excepcional*. Además, un punto excepcional está en  $F(f)$  y un polinomio tiene a lo más un punto excepcional.

**Teorema 3.7.** (Beardon [1]). *Sea  $f$  un polinomio de grado al menos 2.*

i) *Si  $z_0$  es no-excepcional, entonces  $J(f) \subseteq \text{Cl}(\mathcal{O}^-(z_0))$ .*

ii) *Si  $z_0 \in J(f)$ , entonces  $J(f) = \text{Cl}(\mathcal{O}^-(z_0))$ .*

Intuitivamente, como  $J(f)$  es un conjunto repulsor para  $f$  es de alguna manera atractor para  $f^{\circ(-1)}$ . En lugar de buscar la inversa de toda la órbita  $\mathcal{O}^-(z_0)$  buscamos cuando  $f^{\circ(-k)}$  converge en algún sentido a  $J(f)$ . Para lo que necesitamos establecer los siguientes resultados. Recordar que ahora como los conjuntos  $f^{\circ(-k)}(z_0)$  son finitos, son necesariamente compactos.

**Teorema 3.8.** (Hickman [4]). *Sea  $f$  un polinomio, y sea  $z_0$  que no está en algún ciclo atractor o en el disco de Siegel de  $f$ . Entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{\circ(-k)}(z_0) = J(f),$$

donde el límite es tomado con respecto a la métrica de Hausdorff sobre conjuntos compactos de  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ .

La prueba del teorema anterior se puede consultar en [7].

El grado de una función racional se define como su número de ceros o de polos, es decir una función racional de orden  $p$  tiene exactamente  $p$  ceros y  $p$  polos.

**Lema 3.9** (Beardon [1]). *Sea  $f$  una función racional de grado al menos 2, y  $E \subset \mathbb{C}_\infty$  compacto, tal que para todo  $z \in F(f)$ , la sucesión  $\{f^{\circ(k)}(z)\}$  no tiene límite en  $E$ . Entonces para cualquier  $U$  subconjunto abierto de  $J(f)$ , se tiene que  $f^{\circ(-k)}(E) \subseteq U$  para todo  $k$  suficientemente grande.*

La conjugación es un concepto muy importante en la teoría de sistemas dinámicos por las propiedades que tiene, como se verá a continuación.

**Definición 3.10.** Dos polinomios  $f$  y  $g$  son *conjugados* si existe una transformación de Möbius  $\phi$  tal que

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{\circ(-1)}.$$

**Proposición 3.11.** *Si  $f$  y  $g$  son polinomios conjugados, para cualquier entero positivo  $k$  se tiene*

$$g^{\circ k} = \phi \circ f^{\circ k} \circ \phi^{\circ(-1)}.$$

La demostración de esta proposición puede revisarse en [7].

La propiedad anterior es muy importante porque el conjunto de Julia de polinomios conjugados se relaciona a través del siguiente teorema.

**Teorema 3.12.** (Beardon [1]). *Si  $f$  y  $g$  son polinomios conjugados con transformación de Möbius  $\phi$ , entonces  $F(g) = \phi(F(f))$  y  $J(g) = \phi(J(f))$ . Además, los conjuntos  $J(g)$  y  $J(f)$  son llamados analíticamente conjugados, del mismo modo que  $F(g)$  y  $F(f)$ .*

## 4 Teoría general de la independencia fractal de un grafo

Los conceptos presentados en esta sección pueden ser revisados a detalle en [4]. El interés es describir el conjunto de las raíces del polinomio de independencia reducido de las potencias de un grafo  $G$ , es decir las raíces de  $f_{G^k} = f_G^{\circ(k)}$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , para poder asociar un fractal con el grafo  $G$ . Sabemos que para cada  $k \geq 1$  el conjunto,  $R(f_{G^k})$  es un subconjunto finito de  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  y por lo tanto es un conjunto compacto. En general existe el límite de la sucesión  $\{R(f_{G^k})\}_k$  con respecto a la métrica de Hausdorff para conjuntos compactos en  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  por lo que se puede proponer la siguiente definición.

**Definición 4.1.** La *independencia fractal de un grafo  $G$*  es el conjunto

$$\mathcal{F}(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} R(f_{G^k}). \tag{3}$$

De la Ecuación(3), para cada  $k \geq 2$  usando la asociatividad de la composición de grafos podemos escribir  $G^k = G^{k-1}[G]$ , lo que implica

$$f_{G^k} = f_{G^{k-1}} \circ f_G,$$

lo cual deriva en la relación,

$$R(f_{G^k}) = f_G^{\circ(-1)}(R(f_{G^{k-1}})),$$

Para  $k = 1$  tenemos:

$$R(f_G) = f_G^{\circ(-1)}(R(f_{G^0})) = f_G^{\circ(-1)}(R(f_\emptyset)) = f_G^{\circ(-1)}(0).$$

La siguiente proposición será útil para demostrar como se relaciona la independencia fractal de un grafo con los conjuntos de raíces de las iteraciones del grafo.

**Proposición 4.2.** [4] Para cada  $k \geq 1$ , tenemos

$$R(f_{G^k}) = f_G^{\circ(-k)}(0). \quad (4)$$

Y por lo tanto;

$$\mathcal{F}(G) = f_G^{\circ(-k)}(0). \quad (5)$$

Por el Teorema 3.8 vemos que para el grafo  $K_1$ ,  $f_{K_1}(x) = x$  y  $f_{K_1^k}(x) = x$  para todo  $k$ , de donde  $\mathcal{F}(G) = \{0\}$ . El Teorema 4.3 generaliza este hecho.

**Teorema 4.3.** [4] La independencia fractal de un grafo  $G \neq K_1$  denotada por  $\mathcal{F}(G)$ , es precisamente el conjunto de Julia de su polinomio de independencia reducido  $J(f_G)$ . Equivalentemente,  $\mathcal{F}(G)$  es la cerradura de la unión de los conjuntos de raíces de cada polinomio de independencia reducido de las potencias  $G_k$ ,  $k = 1, \dots, \infty$ .

*Demostración.* Si  $G$  tiene número de independencia  $\beta = 1$ , entonces  $G = K_n$  para algún  $n \geq 2$ . Así  $f_G(x) = nx$ , cuyo conjunto de Julia es  $J(f) = \{0\}$  porque cualquier otro punto diferente de cero tiene órbita positiva no acotada. Ahora,  $G^k = K_{n^k}$  para todo  $k$ , es decir,  $f_{G^k}(x) = n^k x$ , y su conjunto de raíces es  $\{0\}$ . Entonces el límite de la unión de los conjuntos de raíces es  $\{0\} = J(f_G)$  y el resultado se mantiene.

Si  $G$  tiene número de independencia  $\beta \geq 2$ , entonces  $f_G(x)$  tiene grado al menos 2, porque:

$$f_G(x) = \sum_{j=0}^{\beta} i_j x^j. \quad (6)$$

De la Ecuación(6) tenemos  $f_G(0) = 0$  y  $f'_G(0) = i_1 = |G| > 1$  y de la Definición 3.4 inciso *ii*) podemos decir que 0 es un *punto fijo repulsor* de  $f_G(x)$  y por la Proposición 3.5 inciso *ii*) está en  $J(f_G(x))$ . Como 0 cumple las hipótesis del Teorema 3.8, entonces  $\mathcal{F}(G) = J(f_G)$ .  $\square$

Ahora, como los conjuntos de Julia son típicamente fractales en esencia asociamos un fractal  $\mathcal{F}(G)$  con un grafo  $G$ .

Estamos interesados en acotar el conjunto de raíces de un grafo y sus iteraciones para poder determinar la unimodalidad de los polinomios de independencia asociados. En la siguiente sección se presentan grafos cuya independencia fractal está acotada. Aprovechando el hecho de que la dinámica de los polinomios cuadráticos ha sido ampliamente estudiada y usando los resultados de conjugación antes presentados y algunos criterios conocidos podremos determinar la unimodalidad de algunas clases de grafos.

## 5 Grafos con número de independencia $\beta_G = 2$

Para un grafo  $G$  con número de independencia  $\beta_G = 2$ ,  $m$  no-aristas (es decir  $\bar{G}$  tiene exactamente  $m$  aristas) y de orden  $n$ , su polinomio de independencia está dado por la Ecuación(7).

$$f_G(x) = mx^2 + nx. \quad (7)$$

Consideremos un polinomio de la forma  $x^2 + c$  donde  $f_G(x)$  es un polinomio conjugado. Directamente obtenemos

$$g_G = \phi \circ f_G \circ \phi^{\circ(-1)},$$

donde

$$g_G(x) = x^2 + \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad (8)$$

y

$$\phi(x) = mx + \frac{n}{2}. \quad (9)$$

Entonces,

$$\phi^{\circ(-1)}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{n}{2m} \quad (10)$$

y por el Teorema 3.12 tenemos:

$$\mathcal{F}(G) = \phi^{\circ(-1)}(J(x^2 + c)), \text{ donde } c = \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2. \quad (11)$$

De lo anterior se observa que  $\mathcal{F}(G)$  es un escalamiento y desplazamiento de  $J(x^2 + c)$ , y como  $c$  es independiente de  $m$ , entonces la conexidad de  $\mathcal{F}(G)$  depende únicamente del orden de  $G$ . Además, como  $E(G)$  es un conjunto no vacío implica que  $n \geq 3$ . La localización de  $\mathcal{F}(G)$ , depende del número de aristas y del orden de  $G$  como se verá a continuación.

**Teorema 5.1.** [4] *Si  $G$  es un grafo con conjunto de aristas  $E(G)$  diferente del vacío con número de independencia  $\beta_G = 2$ , con  $n$  vértices y  $m$  no-aristas, y  $z \in \mathcal{F}(G)$ , entonces*

i)  $-\frac{n}{m} \geq \text{Re}(z) \geq 0$  y

ii)  $\text{Im}(z) = 0$ , a menos que  $n = 3$ , en cuyo caso  $|\text{Im}(z)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2m}$ .

### Grafos de orden 3 con $\beta_G = 2$

Existen exactamente dos grafos de orden 3 con número de independencia  $\beta_G = 2$  (salvo isomorfismos), uno de ellos es  $K_1 \uplus K_2$ , la unión disjunta de un vértice con una arista y  $P_3$  el camino de longitud 2. Sus respectivos polinomios de independencia reducidos son  $f_{K_1 \uplus K_2} = 2x^2 + 3x$  y  $f_{P_3} = x^2 + 3x$ . Así por el Teorema 4.3, la independencia fractal de estos grafos esta dada por  $\mathcal{F}(K_1 \uplus K_2) = J(2x^2 + 3x)$  y  $\mathcal{F}(P_3) = J(x^2 + 3x)$  respectivamente.

**Teorema 5.2.** [4] *Si  $G$  es un grafo de orden 3 con número de independencia  $\beta_G = 2$ , entonces*

$$\mathcal{F}(G) = \phi_G^{\circ(-1)} \left( J \left( x^2 - \frac{3}{4} \right) \right), \quad (12)$$

donde  $\phi_G$  es una transformación de Möbius que depende de  $G$ . Además,

i)  $\mathcal{F}(K_1 \uplus K_2) \subseteq \left[-\frac{3}{2}, 0\right] \times \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right],$

ii)  $\mathcal{F}(P_3) \subseteq [-3, 0] \times \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right].$

### Grafos de orden 4 con $\beta_G = 2$

Para un grafo  $G$  con número de independencia  $\beta_G = 2$  de orden 4 y  $m$  no-aristas de las Ecuaciones (8) y (9) tenemos que  $f_G(x)$  es conjugado de  $g_G(x) = x^2 - 2$  a través de  $\phi(x) = mx + 2$ , además sabemos que  $J(x^2 - 2)$  es el intervalo  $[-2, 2]$ . Aplicando la transformación  $\phi^{\circ(-1)} = \frac{x-2}{m}$  a este intervalo obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.3.** *Si  $G$  es un grafo de orden 4 con número de independencia  $\beta_G = 2$  con  $m$  no-aristas, entonces*

$$\mathcal{F}(G) = \left[-\frac{4}{m}, 0\right].$$

Aplicando el teorema anterior al grafo  $K_4 - e$ , donde  $e$  es cualquier arista en  $K_4$ , tenemos que  $G$  tiene  $m = 1$  no arista, por lo tanto  $\mathcal{F} = [-4, 0]$ .

### Grafos de orden $|G| \geq 5$ con $\beta_G = 2$

Si  $G$  es un grafo con número de independencia  $\beta = 2$  y  $n = |G| \geq 5$ , entonces de la Ecuación(11) tenemos  $c = \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 < -2$ , que está fuera del conjunto de Mandelbröt. Esto implica que  $J(x^2+c)$ , y por lo tanto  $\mathcal{F}(G) = \phi^{\circ(-1)}(J(x^2+c))$ , son conjuntos de Cantor. Más aún (cf. [4]) es sabido que si  $c < -2$ , el conjunto  $J(x^2+c)$  está contenido en el intervalo  $[-q, q]$ , donde  $q = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}$ , con  $c = \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}\right)^2$ , lo que implica que  $q = \frac{n}{2}$ . Aplicando  $\phi^{\circ(-1)}$  dada por la Ecuación (10) a el intervalo  $[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$  obtenemos  $[-\frac{n}{m}, 0]$ .

**Teorema 5.4.** Si  $G$  es un grafo con número de independencia  $\beta = 2$ ,  $n = |G| \geq 5$  y  $m$  no-aristas, entonces  $\mathcal{F}(G)$  es polvo fractal subconjunto del intervalo  $[-\frac{n}{m}, 0]$ .

Observemos que 0 es un punto fijo repulsor de  $f_G$ , está en  $J(f_G)$ . Más aún, tenemos que  $f_G(-\frac{n}{m}) = 0 \in J(f_G)$ , y  $J(f_G)$  es completamente invariante bajo  $f_G$ ,  $-\frac{n}{m} \in J(f_G)$ . Por lo tanto el intervalo  $[-\frac{n}{m}, 0]$  del Teorema 5.4 es cerrado.

**Ejemplo 5.5.** Dado el grafo  $G = K_2 \uplus K_3$ , con número independencia  $\beta = 2$ ,  $n = |G| = 5$  y  $m = 6$  no-aristas; cumple las condiciones del Teorema 5.4. Tenemos que  $f_G(x) = 6x^2 + 5x$ , ya que tiene 6 conjuntos independientes de cardinalidad 2 formados al elegir un vértice de  $K_2$  y después cualquier vértice de  $K_3$  y 5, de cardinalidad 1 (cada vértice); y  $\mathcal{F}(G)$  será polvo fractal totalmente desconexo en el intervalo  $[-\frac{5}{6}, 0]$ .

## 6 La idependencia fractal como herramienta para determinar unimodalidad

La ubicación de las raíces ha sido una herramienta útil para determinar si un polinomio es unimodal, existen algunos resultados conocidos que combinados con la independencia fractal servirán para determinar la unimodalidad no solo de un grafo sino también de sus iteraciones.

**Definición 6.1.** Una sucesión finita de números reales  $(a_0, \dots, a_n)$  es

- (i) *logarítmicamente cóncava* o simplemente *log-cóncava* si  $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, n-1$ .
- (ii) *unimodal* si existe  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$ .
- (iii) *simétrico* si  $a_i = a_{n-i}$  para  $i = 0, \dots, n$ .

Un polinomio  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  es *log-cóncavo*, *unimodal* o *simétrico* si la sucesión de sus coeficientes lo es. Si un polinomio con coeficientes no negativos y sin ceros intermedios es log-cóncavo entonces es unimodal.

Algunas veces se ha conjeturado la unimodalidad de los polinomios de independencia de ciertas familias de grafos, por ejemplo se había conjeturado que el polinomio de independencia de los grafos bien cubiertos era unimodal pero se han encontrado contraejemplos para este hecho (cf [8]). La conjetura más importante es la siguiente.

**Conjetura 6.2** (P. Erdős 1987). (cf. [10]) *El polinomio de independencia de cualquier árbol es unimodal.*

Existen diversas técnicas para determinar la unimodalidad de algunos polinomios, nosotros estamos interesados en utilizar la locación de las raíces para determinar la unimodalidad. Aquí presentamos dos criterios conocidos enunciados en [9].

**Teorema 6.3** (Newton). *Si el polinomio  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  no tiene coeficientes negativos y tiene solamente raíces reales, entonces*

$$a_i^2 \geq a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdot \frac{i+1}{i} \cdot \frac{n-i+1}{n-i}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

El resultado anterior muestra que un polinomio con coeficientes no negativos, cuyas raíces son reales es log-cóncavo y por lo tanto unimodal.

**Teorema 6.4.** *Si el polinomio  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  no tiene coeficientes negativos y toda raíz  $z$  de  $f$  cumple que  $2\pi/3 \leq \text{Arg}(z) \leq 4\pi/3$ , entonces  $f$  es unimodal.*

Aunque estos criterios no sirven para probar la Conjetura 6.2 porque no todos los árboles tienen solo raíces reales y tampoco cumplen la condición del Teorema 6.4. Pero podemos utilizarlos para probar la unimodalidad de otras clases de grafos.

Primero probaremos la unimodalidad de los grafos de  $n$  vértices sin aristas denotados por  $\overline{K}_n$ . Recordemos que su polinomio de independencia es  $f_{\overline{K}_n}(x) = (1+x)^n$ , entonces  $f_{\overline{K}_n}$  tiene solo una raíz  $x_0 = -1$ , por el Teorema 6.3 este polinomio es log-cóncavo y por lo tanto es unimodal. Note que para determinar la unimodalidad de estos polinomios no hemos utilizado el concepto de independencia fractal.

Como vimos en la sección anterior la independencia fractal de un grafo  $G$  con número de independencia 2 y orden mayor o igual que 4 es un subconjunto de los reales negativos por el Teorema 5.1. Ahora por el Teorema 4.3 la independencia fractal es también el conjunto de raíces del polinomio de independencia de cada iteración del grafo inicial. Lo anterior sumado al criterio dado por el Teorema 6.3 nos permite ver que no solo  $G$  sino todas sus potencias tienen polinomio de independencia unimodal.

Finalmente, si  $G$  es un grafo con número de independencia 2 y orden 3 su independencia fractal queda contenida el conjunto  $A = \{z \in \mathbb{C} | 2\pi/3 \leq \text{Arg}(z) \leq 4\pi/3\}$ , como se muestra en las Figuras 2 y 3. Por el Teorema 6.4 tenemos que tanto  $G$  como todas sus potencias son unimodales.

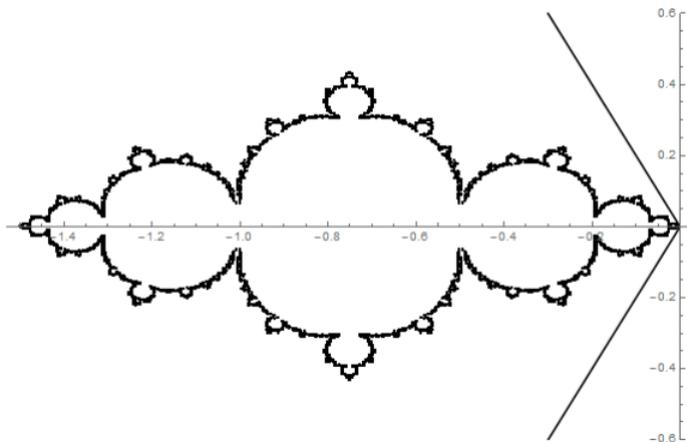


Figura 2. La independencia fractal de  $K_1 \uplus K_2$ ,  $\mathcal{F}(K_1 \uplus K_2)$  contenida en el sector angular  $A$

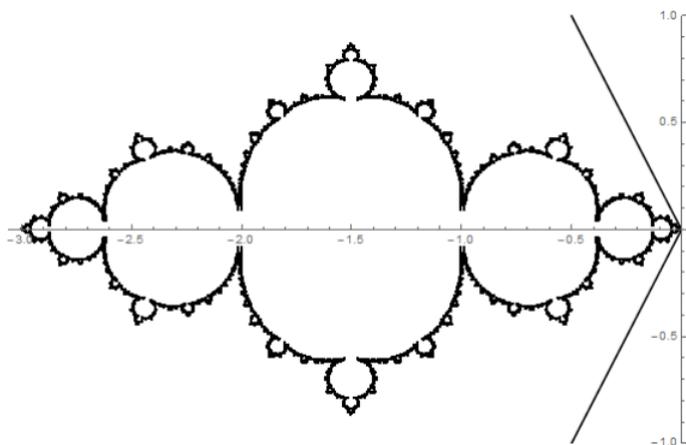


Figura 3. La independencia fractal de  $P_3$ ,  $\mathcal{F}(P_3)$  contenida en el sector angular  $A$

## 7 Conclusiones

En este trabajo se presenta el estudio de la independencia fractal de un grafo con número de independencia 2 que fue estudiado por Brown, Hickman y Nowakowski en [4], quienes mostraron la relación de este objeto con las raíces de las iteraciones del grafo inicial. La importancia de la ubicación de las raíces radica en el hecho de que bajo ciertas condiciones esta nos garantiza la unimodalidad del polinomio de independencia (cf. [8, 10, 11]).

Hemos utilizado la independencia fractal y la ubicación de las raíces para determinar la unimodalidad de ciertas clases de grafos. Lo que nos hace pensar que este objeto podría ser útil para determinar la unimodalidad de otras familias de grafos. Por el momento tenemos un criterio gráfico para determinar si el polinomio de independencia de un grafo y todas sus iteraciones son unimodales.

La dificultad que se presenta al trabajar con grafos con número de independencia mayor radica básicamente en que el cálculo del número de conjuntos independientes de cardinalidad mayor o igual a tres no es sencillo y la dinámica de polinomios de esos grados aún no está completamente determinada.

## Agradecimientos

A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP), por su apoyo al proyecto *Unimodalidad de los polinomios de independencia de sumas de Zyckov (ID: 00263)*.

A los árbitros por sus observaciones y sugerencias que sirvieron para mejorar el trabajo.

## Bibliografía

- [1] Barnsley M. F. (1993). *Fractals Everywhere*. Estados Unidos: Morgan Kaufmann.
- [2] Blanchard P. (1984). *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*. Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 85-141.

- [3] Brown J. I., Dilcher K. y Nowakowski R. J. (2000). *Roots of Independence Polynomials of Well Covered Graphs*. Journal of Algebraic Combinatorics, 11, 197-210.
- [4] Brown J. I., Hickman C. A. y Nowakowski R. J. (2003). *The Independence Fractal of a Graph*. Journal of Combinatorial Theory, B 87, 209-230.
- [5] Brown J. I., Hickman C. A. y Nowakowski R. J. (2004). *On the Location of Roots of Independence polynomials*. Journal of Algebraic Combinatorics, 19, 273-282.
- [6] Brown J. I., Hickman C. A., Thomas H. y Wagner D. G. (2001). *Bounding the Roots of the Independence Polynomials*. Ars Combin., 58, 113-120.
- [7] Gómez Salgado P. A. (2015). *Dinámica de polinomios de independencia reducidos de un grafo*. Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [8] Levit V. E. y Mandrescu E. (2006). *Independence Polynomials of Well-Covered Graphs: Generic Counterexamples for the Unimodality Conjecture*. European Journal of Combinatorics, 27, 2931-939.
- [9] Mandrescu E. (2009). *Boulding Graphs Whose Independence Polynomials Have Only Real Roots*. Graph and Combinatorics, 25, 545-556.
- [10] Mandrescu E. (2012). *Unimodality of Some Independence Polynomials via their Palindromicity*. Australian Journal of Combinatorics, 53, 77-82.
- [11] Srimud K. (2011). *Polynomials with only real zeros*. Science and Technology RMUTT Journal, 1, 39-44.

Facultad de Ciencias de la Computación, BUAP  
Avenida San Claudio y 14 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

bautista@solarium.cs.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

216470051@alumnos.fcfm.buap.mx

cguillen@fcfm.buap.mx

clopez@fcfm.buap.mx

---

# **Enseñanza de las matemáticas**

---



## Capítulo 2

# Problemas didácticos con la demostración por contradicción. Aproximación sintáctica e interpretación semántica

Juan Angoa Amador, Emilio Angulo Perkins,  
Agustín Contreras Carreto  
FCFM, BUAP

### Resumen

Lo que se presenta es un desarrollo de la demostración por contradicción en su versión sintáctica como una propuesta para eliminar algunas de las dificultades que el estudiante presenta al momento de estudiarla, teniendo especial énfasis en eliminar las interpretaciones semánticas que usualmente se imprimen al momento de explicar el método y que son causa de confusiones.

Para esto, se contextualiza la propuesta bajo una perspectiva filosófica; se exhibe un episodio histórico que evidencia la fertilidad creativa del método y por último se estudia la interpretación semántica del método y una propuesta en la que se separa la naturaleza de los elementos usados *en* la demostración y los elementos *sobre* los cuales trata la demostración; tratando así de hacer más asimilable la demostración por contradicción.

## 1 Introducción

En la enseñanza de las matemáticas juega un papel importante transmitir concepciones y no sólo informar. Las actitudes que se tengan serán fundamentales para que el estudiante se sienta cómodo y seguro frente a los conocimientos que debe asimilar. Pero los mismos profesores de matemáticas no se han formado en la comprensión y asimilación de una concepción de la matemática, justificando sus estrategias de enseñanza con razones, las más de las veces ajenas a la matemática, y en el peor de los casos, tales estrategias les son heredadas por pedagogos que entienden poco de la estructura del conocimiento matemático. En la medida en que el núcleo del discurso educativo esté diseñado en atención a una concepción explícita de las matemáticas, este discurso puede realmente seducir a los educandos y sobre todo cumplir una tarea formativa.

Toca a las estrategias de demostración entregar, necesariamente, cuentas a una concepción de la matemática, y esto sucede no sólo para la enseñanza universitaria de la matemática, sino al seno de la matemática básica se encuentran similares problemas. La ausencia de demostraciones también exhibe, aunque no explícita, una concepción de la matemática. En esencia, enseñar matemática es enseñar actitudes y asimilar una concepción; apostar a la manipulación de algoritmos es apostar a la memoria que, desprovista de una concepción, puede reducirse a transmitir conocimientos olvidables, paradójico a su apuesta memorística. Toca a este trabajo exhibir a la demostración por contradicción, como un claro ejemplo de que, en ausencia de una concepción matemática, se generan malentendidos y en consecuencia dificultades para el aprendizaje del tema.

Es de destacar que, para formarse una concepción de una problemática y de ahí generar una estrategia didáctica, se precisa un profundo conocimiento de la matemática, al menos en los aspectos cercanos al tema a desarrollar. En este trabajo, la solución propuesta por los autores exige un conocimiento más que básico de teoría de modelos y léxicos y una comprensión del ámbito semántico y sintáctico, al menos en su expresión matemática. Los problemas de enseñanza no pueden separarse de la obtención de una concepción del conocimiento y de la estructura matemática, temas que a veces están alejados de la cotidiana práctica matemática, así que la enseñanza no sólo exige una actitud didáctica nueva, sino también una especial actitud matemática diferente. Así, aspirar a una educación matemática, conlleva la formación de matemáticos críticos y reflexivos en torno al trabajo del mismo matemático y de los procesos creativos de los mismos.

No solo de técnicas didácticas se nutre el discurso educativo, es necesaria la participación de un matemático que aporte reflexiones acerca de la estructura del conocimiento matemático, de esta feliz reunión se podrá asegurar un discurso y una práctica docente que en realidad forme seres humanos provistos de las prácticas matemáticas más enriquecedoras, lo cual impactará más en lo formativo que en lo informativo.

## **2 La postulación de entidades, actividad fundamental de la matemática**

La conciencia, es decir el pensamiento que se apropia del mundo mediante conceptos y estructuras mentales, asume la exterioridad de un mundo, que es el material de sus trabajos. Así, nos encontramos frente a un mundo creado mediante una actividad proyectada y dirigida por una conciencia que previamente ha pensado

a esa “exterioridad” para después transformar esa realidad “exterior”. La duda de qué tan fiel es la realidad “pensada” a esa realidad “exterior”, es resuelta cuando, mediante una práctica, proyectada y dirigida teniendo como base esa copia mental, la realidad obtenida mediante esta transformación coincide con lo esperado o su coincidencia es casi completa. Nuestra realidad exterior y nuestra realidad pensada son a grandes rasgos dos entes que quisiéramos que coincidieran, pero que siempre se contraponen y se complementan, al menos al interior de la conciencia del hombre.

Teniendo como objeto esa realidad exterior, proyectamos la transformación de ésta mediante un ideal realizado al amparo de la realidad pensada; qué tan cercanos son lo proyectado y lo obtenido es el gran problema de la actividad humana. Este esquema básico, del cual se nutre la ciencia, máxima expresión de la conciencia que tiene como fin la apropiación mental de la realidad exterior, permea otro problema, la existencia de una realidad pensada, al interior de la conciencia, y la existencia de una realidad exterior en espera de ser pensada; dos existencias paralelas teniendo el mismo sustrato que se identifican y se contraponen.

Donde se dan las identificaciones de manera muy dramática es en la matemática. Como ejemplo de esta identificación-confusión, tenemos a los sistemas formales en los cuales no se encuentran connotaciones “reales”; parecieran estar enunciados al capricho de un matemático y no mandatados por alguna realidad, pero sin embargo, tales sistemas formales dramáticamente son la esencia de modelos matemáticos sumamente exitosos en el diseño de transformaciones de la realidad.

*¿cómo obtuvieron esa raíz real?*

Creemos que la matemática siempre es realidad pensada, aunque la relación con la realidad exterior se dé de manera indirecta. La matemática en alguna de sus condiciones iniciales se “enunció” con motivaciones reales, aunque después, dentro de las múltiples consecuencias de tales enunciados, no se logre visualizar estas motivaciones. Es precisamente este andar distancias en el mundo de la conciencia, entre una de las consecuencias lógicas de un enunciado que tenía motivaciones reales, es lo que constituye la grandeza del pensamiento matemático. De los números para contar, a la estructura algebraica de anillo hay una distancia conceptual enorme, pero los anillos son los números para contar y otras cosas más, números para operar, números para medir, etc. El anillo en su definición básica no deja entrever tal riqueza, no porque se quiera ocultar sino más bien como consecuencia de la economía en el enunciado, se elige lo simple arrojando a lo complejo. Afirmamos, basados en el sorprendente hecho de que todo conocimiento matemático, tarde o temprano es “aplicable”, que la matemática en alguna de sus raíces ya tomó una

ración esencial de realidad, lo cual permite a la matemática su exitoso retorno a ella.

Pero este hecho tan sorprendente sólo ejemplifica la enorme complejidad del pensamiento humano, que puede ser el receptáculo de relaciones increíblemente complicadas, enunciadas en formas simples, hecho igualmente sorprendente. Pero el pensamiento humano no sólo es complejo, también es vasto; en él se puede pasar toda la vida auscultándolo y caminando a su interior. Toda deducción, demostración, postulación de axiomas o el enunciado mediante definiciones de nuevas entidades, son actividades al seno de la conciencia que sin embargo, en última instancia, son noticias de esa realidad exterior, y ellas mismas son existencias, al interior de la conciencia, potencialmente reales.

Cuando el número  $i$  se dejó entrever, a través de ecuaciones polinomiales, al seno de los sistemas numéricos en el renacimiento, fue durante muchos años un mal sueño matemático. Existía como entidad que de no aceptarla negaría el acceso a soluciones de ecuaciones polinomiales, incluso que eran números reales; fue aceptada como recurso pragmático para hallar soluciones, como un eslabón en la cadena de deducciones. Sin embargo, tan “imaginario” ente, después de ser domesticado mediante un sistema formal que lo contiene, tiene un éxito enorme como guía para transformar la realidad; es protagonista fundamental en la matemática “aplicada”.

Para los seres de la matemática, el proceso de aceptación de su existencia legal en la matemática, puede ser largo y truculento, pero esto no sucede por no contener realidad, sino más bien por condiciones histórico-sociales de la ciencia de su tiempo. La increíble carga social de la matemática es suministrada por estos procesos; creemos que los matemáticos como representantes involuntarios de la especie humana, deciden, por supuesto usando toda su experiencia cultural, los seres a los que deben buscarles acomodo en algún sitio de la matemática, construirles su residencia en el gran territorio de la matemática. Los complejos fueron la residencia de  $i$ , a su vez cuando se creó el territorio de los cuaterniones de Hamilton, a ese nuevo territorio fueron a vivir los complejos y a otros territorios, el de los campos algebraicamente cerrados, al de los espacios vectoriales de dimensión 1 sobre ellos mismos, o de dimensión 2 sobre los números reales, por ejemplo.

La matemática, en su incesante desarrollo, es la historia de un incesante dar a la vida (matemática) seres diversos, que culminan sus apariciones fantasmales en los intersticios de la matemática, en un nacer definitivo.

### 3 Lenguaje y significado

¿Cómo es que un ente no previsto en un sistema, se manifiesta en el interior de él?  
¿Cómo es que realizando tareas cotidianas de repente un día aparece un no-invitado  
que constata seres no predichos en tal sistema?

Una forma usual de hacerse visibles los entes matemáticos, es descubriendo que cumplen ciertas condiciones comunes a otros entes que son los ciudadanos legales de algún territorio matemático, para después alcanzar la ciudadanía en algún nuevo territorio creado. Sin embargo, los matemáticos han inventado un territorio básico en el que puede uno ir a cazar entes fantasmales, que no se habían predicho, ya que en este territorio se evita predecir. Este territorio es el de los lenguajes formales.

Un lenguaje formal, en donde sólo viven cadenas bien formadas, es de una vastedad grande, ya que la carta de ciudadanía es fácil de obtener. Sobre un léxico se construye un lenguaje formal y, sobre este, un modelo. Esta estructura matemática es más complicada, pero grosso modo, es dotar de significado a algún subconjunto de frases bien formadas. En la relación dialéctica entre estos dos territorios es como se van alcanzando nuevas existencias matemáticas. El existir como frase y el existir esa frase con un significante ahora en un modelo, es un cambio radical, que matemáticamente es posible; gracias a esta posibilidad, la demostración por contradicción tiene una fuerte base matemática.

Vale la pena resaltar que este proceder, la distinta naturaleza de la existencia como significante y significado, entraña el enigma de la naturaleza ontológica-epistemológica de las matemáticas, ya que sugiere, como lo ha señalado Zalamea en [7, p.13–14]<sup>1</sup>, que es necesario oscilar entre posturas ontológicas-epistemológicas contrarias para comprender el quehacer matemático contemporáneo.

¡Atención!, el uso de este tipo de demostración fuera del contexto matemático que resaltamos en este trabajo, sí puede tener inconsistencias lógicas. Su defensa o impugnación de tal método de demostración, fuera del contexto matemático, sólo se puede realizar explicitando los presupuestos filosóficos que se están adoptando. Por ejemplo, si se asume una *ontología realista, como es costumbre en las ciencias*, el razonamiento *reductio ad absurdum* es impropio.

Casi todas las limitaciones que se resaltan en la sección siguiente se deben fundamentalmente a confundir la existencia de un enunciado o frase bien formada

---

<sup>1</sup> Pero el amplísimo rango intermedio entre esas oscilaciones del péndulo es, en el fondo, el que merece ser observado con el mayor cuidado [...] –más allá de un alternar binario sí/no– algunas mixturas son imprescindibles para poder obtener una cabal comprensión del hacer matemático, tanto en su estructuración general, global, como en muchas de sus muy detalladas construcciones particulares, locales.

con asegurar que la frase en un modelo asegura la existencia del ente que surge arropado por el significado que alcanza en tal modelo.

## 4 Sacheri y el V postulado

Según cuenta Proclo, historiador griego del siglo V d. C., desde que los “Elementos” de Euclides aparecieron, alrededor del año 300 a. C., se inauguró el enfoque lógico deductivo de las matemáticas. Sin embargo, hubo inmediatas reacciones acerca de un postulado en particular, el llamado V postulado:

*“Si una recta corta a otras dos formando, de un mismo lado de ella, ángulos internos que juntos midan menos que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente se encuentran en un punto que está en el lado en que los ángulos juntos son menores que dos rectos”*

Si se compara este postulado (considerando postulado como un tipo de axioma) con los restantes, se da uno cuenta de que el enunciado del V no goza de la propiedad clásica atribuida a los axiomas: el ser “autoevidente”. Es muy largo y se tiene que leer más de una vez antes de comprenderlo cabalmente. El postulado IV, como los restantes axiomas, es corto y de fácil comprensión: todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

EL enunciado del V postulado es la proposición recíproca de la proposición 17 del libro I de los Elementos, que asegura que la suma de dos ángulos interiores de cualquier triángulo es menor que dos rectos. Por eso se piensa que Euclides intentó demostrar dicho postulado como un teorema pero, al no lograrlo, entonces trató de no usarlo en las demostraciones de los teoremas que fueran emanando, lo que logró en las demostraciones de los 11 teoremas siguientes del libro I; sin embargo, en la demostración del teorema 29 tuvo que usar por primera vez el V. Sin él comenzaron a aparecer muchos otros teoremas como el 29, que tampoco se podían demostrar. Aceptando el V en cambio, todas las demostraciones se efectuaron sin ningún problema. Decisión sabia de Euclides: mientras no pueda demostrar el V, lo asume como axioma, dada su extrema utilidad. En cambio, muchos matemáticos posteriores a Euclides con la misma percepción de que el V no debería ser un axioma, intentaron demostrarlo como un teorema, a partir de los otros nueve axiomas y lo que se dedujera de ellos. Casi todos los matemáticos que creyeron haber logrado demostrar el famoso postulado cometieron un error del siguiente tipo: sea  $N$  el conjunto de teoremas que se pueden deducir de los axiomas de Euclides excepto el V. Se trataba de demostrar  $N \Rightarrow V$ . En prácticamente todos los intentos de demostración, el autor usaba sin darse cuenta una proposición  $q$ , y lo que hacía era demostrar  $N + q \Rightarrow V$ , es decir, no demostraba el V a partir sólo de  $N$ , sino que usaba, junto

con  $N$ , una proposición  $q$  que no se podía demostrar tampoco usando sólo  $N$  a menos que usarán también el  $V$ ; en pocas palabras, en el sistema axiomático  $N$ ,  $q$  y  $V$  son equivalentes. Esta historia de intentos fallidos mostró, a la postre, que el  $V$  postulado es equivalente, en  $N$ , a muchas de las proposiciones más útiles de la geometría Euclideana como la transitividad del paralelismo, la equidistancia de las rectas paralelas, el teorema de Pitágoras, la teoría de semejanza de triángulos, etc.

No fue sino hasta 1733 cuando la primera investigación realmente científica del postulado de las paralelas fue publicada por el padre jesuita Girolamo Saccheri (1667-1733). Mientras era profesor de matemáticas de la Universidad de Pavía, publicó una pequeña obra titulada *Euclides liberado de toda falla*. En una obra anterior sobre lógica, Saccheri se había fascinado por el poderoso método de reducción al absurdo y concibió la idea de aplicarlo a una investigación del postulado de las paralelas. En  $N$ , Saccheri demostró fácilmente que si en un cuadrilátero  $ABCD$  los ángulos  $A$  y  $B$  (ángulos de la base) son rectos y los lados  $AD$  y  $BC$  son iguales, entonces los ángulos  $D$  y  $C$  (ángulos de la cima) son iguales. Hay tres posibilidades: los ángulos  $D$  y  $C$  son ángulos agudos iguales (hipótesis del ángulo agudo, HA) o los ángulos  $D$  y  $C$  son obtusos iguales (hipótesis del ángulo obtuso, HO) o los ángulos  $D$  y  $C$  son rectos (hipótesis del ángulo recto, HR). Por el axioma de tricotomía de los números reales, aplicado a la medida del ángulo de la cima sabemos (y lo sabía Saccheri) que las tres hipótesis son mutuamente excluyentes y que una de las tres debe cumplirse. Entonces  $N \Rightarrow (N + HA) \vee (N + HO) \vee (N + HR)$ .

Saccheri probó que  $N + HR$  implica el  $V$ , así que el plan de Saccheri consistió en demostrar que, tanto  $N + HA$  como  $N + HO$ , nos llevan a sendas contradicciones y que por lo tanto, la única de las tres afirmaciones que debe cumplirse es  $N + HR$ .

Aclaremos que Euclides usa suposiciones tácitas, como la infinitud de la recta, que, junto con sus nueve axiomas distinto del  $V$ , generan lo que se conoce como geometría neutral, sistema axiomático que estamos denotando por  $N$ . Saccheri, también hace estas suposiciones tácitas y con ello elimina fácilmente la hipótesis del ángulo obtuso. Sólo quedaba demostrar que  $N + HA$  nos lleva a una contradicción. En el curso de su tentativa, Saccheri obtiene muchos de los teoremas de lo que ahora llamamos geometría hiperbólica y, si se hubiera quedado en este punto, se le habría atribuido el mérito de ser el primer descubridor de una geometría no euclidiana; pero fue tan grande su anhelo de vindicar a Euclides, que sus razonamientos dejaron de ser impecables. Entre otras cosas, prueba la existencia de dos rectas paralelas entre sí, pero una de ellas perpendicular y la otra oblicua a una tercera recta, lo cual es, según él, incompatible con la naturaleza de la recta, conclusión que, como no le satisface en el fondo, le obliga a volver al antiguo concepto de equidistancia y si bien no logró su propósito de demostrar la absoluta validez del  $V$ , aunque él si

lo creyó, llegó a resultados importantes que lo colocan como los precursores de las geometrías no euclidianas.

Nosotros ponemos este ejemplo como ilustración de que, a partir de entidades no existentes, se puede ir construyendo una entidad nueva y prometeica, que sólo confirmará su legalidad matemática al paso del tiempo.

## 5 La prueba por contradicción

La prueba por contradicción conocida también como *reductio ad absurdum*, tiene presencia en la matemática, al menos, desde tiempos de Euclides; en su obra Los Elementos, numerosas pruebas se realizan por contradicción. Sin embargo, la naturaleza de esta prueba ha despertado diversas preguntas, desde filosóficas hasta epistemológicas.

Por ejemplo, en [2, p. 401–402]<sup>2</sup> se enuncia que

El debate suscitado por los intuicionistas al principio del siglo veinte es bien conocido. Su rechazo tanto a la prueba por contradicción como contrapositiva estaba basado en el rechazo a la ley del tercero excluido y finalmente sobre una diferente interpretación de los conectivos lógicos. (Dummett 1977, pp. 9–31).

Otro ejemplo paradigmático es la discusión desarrollada entre el siglo dieciséis y diecisiete. Empezando por la postura aristotélica de que la causalidad debería ser la base del conocimiento científico (Mancosu 1996), el debate involucró la aceptabilidad de demostraciones [. . .]. En particular para ser parte del tratamiento científico, una demostración debería proceder de la causa a su efecto. Por lo tanto, de acuerdo con el punto de vista aristotélico, una demostración por contradicción podría no revelar la causa dado que no está basada en premisas verdaderas. Como Mancosu afirma: « Existía por lo tanto un consenso de parte de estos estudiosos que las pruebas por contradicción eran inferiores a las demostraciones directas, a causa de su falta de causabilidad. Las consecuencias que se obtienen desde esta posición son de relevancia para los fundamentos de las matemáticas clásicas.»(Mancosu 1996, p. 26)

Algunos de estos problemas son estudiados en [2] y [3]. [3] identifica los siguientes problemas:

1. Representar lo imposible.
2. La dificultad pragmática del primer enunciado.
3. El problema del culpable.

---

<sup>2</sup>Los textos [2], [3], [5] y [6] se encuentran en inglés, la traducción es por parte de los autores.

#### 4. El problema del acto de fe.

Para entender lo que aseveran estos enunciados, primero exhibamos el esquema de una demostración por contradicción.

Se desea demostrar  $\varphi$ . Se procede suponiendo su negación,  $\neg\varphi$ , más un sistema de propiedades, que puede incluir suposiciones de distinta naturaleza como podrían ser axiomas matemáticos y axiomas lógicos. Se obtiene una contradicción, ya sea directamente con  $\varphi$  o algunas de las propiedades asumidas explícitas o implícitamente en el sistema. Se concluye que  $\neg\varphi$  no es posible y por lo tanto se *verifica*  $\varphi$ .

El primer punto se refiere a que, si la prueba por contradicción es *satisfactoria* en su sentido usual, significa que se ha demostrado la imposibilidad de la “veracidad” de la hipótesis asumida ( $\neg\varphi$ ). El problema es que si es imposible ¿Cómo se llevó a cabo la demostración?

El segundo punto hace referencia a por qué debemos asumir algo,  $\neg\varphi$ , que es exactamente lo contrario de lo que se desea demostrar ( $\varphi$ ).

El tercer problema se refiere al paso en que, habiendo derivado la contradicción ¿Cómo se decide qué es lo que debe rechazarse (es decir, cómo se asevera que  $\neg\varphi$  es la razón de la contradicción)?

El último punto, continuación del anterior, pregunta, si aceptamos el rechazo de  $\neg\varphi$ , por qué debería implicar la demostración de  $\varphi$ .

En [3] se desarrolla un abordaje dialógico que pretende resolver el punto 2. Así como se explicita que los puntos 3 y 4 no conciernen intrínsecamente al método de demostración en cuestión sino a la teoría de la demostración en la que se enmarque.

Sin embargo, después de exponer los problemas del punto 1 sólo se afirma que es un problema que se pueda resolver directamente desde una perspectiva filosófica.

Con este mismo tratamiento peculiar es abordado el problema 1 en [2, p. 402–403].

Leron (1985) identifica una de las principales dificultades en el hecho de asumir y trabajar con hipótesis falsas:

« En pruebas indirectas, sin embargo, algo extraño le ocurre a la ‘realidad’ de estos objetos. Nosotros empezamos una demostración declarando que nos vamos a adentrar a un mundo falso, imposible, y que todos nuestros esfuerzos siguientes estarán dirigidos a ‘destruir’ ese mundo, demostrando así que es en efecto falso e imposible. Entonces, nosotros estamos involucrados en un acto de destrucción matemática, no de construcción. Formalmente, debemos quedar satisfechos con que la contradicción establece en efecto la veracidad del teorema (habiendo falseado su negación), pero psicológicamente muchas incógnitas se mantienen sin respuesta. ¿Qué es realmente lo que hemos demostrado al final? ¿Que hay acerca de esas hermosas construcciones

que realizamos mientras vivimos en el mundo falso? ¿Las vamos a descartar completamente? ¿Y que hay acerca de la realidad mental que creamos temporalmente? Yo pienso que esto es una de las fuentes de frustración, del sentimiento de haber sido engañado, que nada ha sido realmente demostrado, que es meramente algún tipo truco- hechicería- que ha estado jugando con nosotros. (Leron 1985, p. 323)»

Los problemas expuestos anteriormente están vigentes desde una perspectiva ontológica o epistemológica realista. Lo que se expondrá a continuación es una propuesta concreta que pretende resolver estos problemas (principalmente el primero) a partir de una postura particular; ésta, por supuesto no agota ni resuelve el problema en general; sin embargo, es de utilidad porque justifica el proceder usual en la mayoría del quehacer matemático universitario.

## 6 Demostración sintáctica como solución al problema

Si tomamos una postura formalista de las matemáticas, nuestras teorías matemáticas pueden ser visualizadas como sistemas formales. Es posible considerar cada teoría por separado y no necesariamente a partir de la axiomática de la teoría de conjuntos. Es una práctica usual estudiar una teoría matemática a partir de una colección de axiomas. El Análisis Matemático podemos abordarlo (y se hace así en varios libros de texto) suponiendo la existencia del campo de los números reales. Teoría de grupos, trabajando con los entes que satisfacen los axiomas de grupo, Geometría plana a partir de los axiomas de Euclides, etc.

Presentamos la versión resumida de qué es un sistema formal como se hace en [1, p. 21]:

La estructura de sistema formal es una terna que se compone de:

↪ Un *Lenguaje*. Esto es una colección de símbolos y reglas *gramaticales* que nos dicen cuando una cadena, finita, de símbolos es un enunciado válido, al que se le llamará expresión bien formada.

↪ Una lista de *Axiomas*. Los Axiomas son expresiones bien formadas. Los Axiomas se dividen en dos tipos, lógicos y matemáticos. Los axiomas lógicos son los que corresponden a una parte de la lógica formal mencionada en el párrafo anterior. Los axiomas matemáticos son expresiones bien formadas que se eligen por ser de algún interés matemático.

↪ Una colección de *Reglas de Inferencias*. Son reglas que producen nuevas expresiones bien formadas a partir, ya sea de los axiomas del sistema, o de expresiones bien formadas obtenidas previamente por estas mismas Reglas de Inferencias (estas nuevas expresiones bien formadas obtenidas a partir de las reglas de inferencia son

los *teoremas* del sistema formal).

A los dos últimos elementos se les llama el *Sistema Deductivo* del Sistema Formal.

La colección de símbolos que forman parte del *Lenguaje* se divide en dos tipos. El primer tipo, los símbolos lógicos, contiene las variables y conectivos lógicos (dependiendo de los objetivos hay quien considera el símbolo '=' como lógico). El segundo tipo de símbolos componen al *Léxico* del lenguaje, que representaremos por  $\mathcal{L}$ , son los símbolos que podríamos considerar de naturaleza matemática; si se desea trabajar en el lenguaje formal de teoría de grupos es usual usar el léxico  $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ , cuyos elementos son todos símbolos funcionales, si quisiéramos estudiar propiedades de orden, agregaríamos el símbolo proposicional '<'; en teoría de conjuntos, usualmente se trabaja con el reducido léxico  $\mathcal{L} = \{\in\}$  aunque, para facilitar la escritura de las pruebas, se acostumbra añadir símbolos proposicionales como ' $\subset$ ' y símbolos funcionales como ' $\emptyset$ '.

Dotados de la postura formalista, que no contraviene las prácticas usuales de estudiar *entes matemáticos* que satisfacen determinados axiomas, se obtiene una interpretación de la demostración por contradicción que, en un comienzo, no genera conflicto alguno: la interpretación *sintáctica* de la prueba por contradicción. Procedemos a presentar la prueba por contradicción como es hecho en [4]:

A continuación, lo que se entenderá por una prueba formal.

**Definición 6.1.** Si  $\Sigma$  es un conjunto de oraciones de  $\mathcal{L}$ , entonces una *prueba formal* a partir de  $\Sigma$  es una sucesión finita no vacía de oraciones de  $\mathcal{L}$ ,  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ , tal que para cada  $i$  se cumple que,  $\varphi_i \in \Sigma$  o  $\varphi_i$  es un axioma lógico o para algunos  $j, k < i$ ,  $\varphi_i$  se obtiene de  $\varphi_j, \varphi_k$  por Modus Ponens (esto es,  $\varphi_k$  es  $(\varphi_j \rightarrow \varphi_i)$ ). Esta sucesión es una prueba formal **de** la última oración,  $\varphi_n$ .

Ahora veamos lo que es obtener una contradicción.

**Definición 6.2.** Si  $\Sigma$  es un conjunto de oraciones de  $\mathcal{L}$  entonces  $\Sigma$  es *inconsistente sintacticamente* ( $\neg \text{Con}_{+, \mathcal{L}}(\Sigma)$ ) sii existe alguna oración  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$  tal que  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  y  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ . “consistente” significa “no inconsistente”.

Con lo anterior podemos enunciar y demostrar el método de demostración en cuestión.

**Lema 6.3** (Demostración por Contradicción). *Si  $\Sigma$  es un conjunto de oraciones de  $\mathcal{L}$  y  $\varphi$  es una oración de  $\mathcal{L}$ , entonces*

1.  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  sii  $\neg \text{Con}_{+, \mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$ .
2.  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$  sii  $\neg \text{Con}_{+, \mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\varphi\})$

*Demostración.* Para (1), ( $\Rightarrow$ ) Se sigue inmediatamente del hecho trivial que  $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ . Para ( $\Leftarrow$ ), tenemos que  $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  ya que a partir de una colección  $\Sigma$  inconsistente puede demostrarse lo que se desee [4, Lema II.11.3], así que  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \rightarrow \varphi$  por el Teorema Deductivo ([4, Lema II.11.1], también conocido como el método de demostración de hipótesis reforzada). Además tenemos que  $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$  es una tautología, así que aplicando Modus Ponens tenemos que  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ .

(2) Se demuestra de manera análoga. □

Lo que enuncia el Lema es que  $\varphi$  se puede demostrar a partir de las oraciones de  $\Sigma$  (véase como nuestros axiomas) si podemos derivar una contradicción a partir de  $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ , esto es, una prueba de  $\psi \wedge \neg\psi$  para alguna oración  $\psi$ .

¿Cómo resuelve esta interpretación el problema 1 mencionado anteriormente? Esta interpretación es libre de verdad o falsedad, siendo éstas, nociones semánticas. Esta interpretación trabaja únicamente con nociones sintácticas (demostrabilidad). No se está inventando ningún mundo imposible ni falso como se hace referencia en la cita de Lerón y que Antonini refuerza, cuando lo cita, al decir que se trabaja con hipótesis falsas o verdaderas. Asumir la hipótesis  $\neg\varphi$  no conlleva ninguna noción semántica sobre verdad o falsedad.

Por lo tanto, se pueden evitar algunas de las complicaciones mencionadas en la Sección 4, aclarando que el método por contradicción (sintáctico) no hace referencia a valores de verdad. Lo que se busca es la derivación de una oración y a la vez de su negación. La expresión “Supongamos que  $\varphi$  es falso” debe entenderse, en pos de una mejor comprensión, exclusivamente como que, *a nuestra colección  $\Sigma$  de premisas, hemos añadido  $\neg\varphi$ , y así debería exponérsele al estudiante.*

¿Estamos ya libres de cualquier problema? No. Otra costumbre arraigada en el proceso formativo es, que al obtener la contradicción se afirma “la contradicción proviene de haber asumido  $\neg\varphi$ ” Será necesario agregar algunos detalles a esto si es que nuestro interés es ofrecer una mayor claridad al estudiante. El Lema del método de demostración por contradicción *no* afirma que la contradicción provenga de asumir  $\neg\varphi$ , sólo afirma que  $\Sigma \vdash \varphi$ .

Sea  $\varphi_i \in \Sigma$ , si logramos demostrar que  $\neg\text{Con}_{+, \mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$ , la prueba por contradicción nos permite concluir que  $(\Sigma \setminus \{\varphi_i\}) \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi_i$ . Lo que nos lleva a escoger a  $\neg\varphi$  en lugar de  $\varphi_i$  es que *previamente* se ha demostrado o se supone que  $\Sigma$  es consistente. Un mejor modo de concluir sería “*Dado que  $\Sigma$  es consistente, la contradicción proviene de haber asumido  $\neg\varphi$ .*”

Lo anterior es importante no sólo por formalidad, sino porque, si el conjunto de oraciones  $\Sigma$  es inconsistente, entonces  $\Sigma$  demuestra  $\varphi$  y a cualquier otra oración, incluyendo  $\neg\varphi$ .

Con lo expuesto hasta aquí, la demostración por contradicción queda totalmente justificada sin ningún paso oscuro, siempre y cuando se desarrolle a partir de un sistema consistente de premisas.

El problema ahora es cómo verificar la consistencia sintáctica de nuestras premisas. Sin embargo, este problema se presenta de modo distinto al estudiante, ya que el estudio sobre consistencia pertenece a otra área, y por el momento él puede estar convencido de la validez de su método de demostración.

Como se expuso, y era de esperarse, esta solución solo trasladó el problema a otra parte.

## 7 Demostración semántica, de vuelta al problema

Con el desarrollo hasta aquí, se puede presentar al estudiante la demostración por contradicción sin los problemas identificados en la introducción. Si la solución a este problema es tan sencilla ¿Por qué sigue habiendo polémica sobre el método de demostración por contradicción? Lo que hemos hecho es trasladar el problema a la consistencia sintáctica de las hipótesis.

El proceder usual para demostrar la consistencia de una colección  $\Sigma$  de oraciones es mediante la construcción de algún modelo que satisfaga  $\Sigma$ .

**Definición 7.1.** Si  $\Sigma$  es un conjunto de oraciones de  $\mathcal{L}$  entonces  $\Sigma$  es *semánticamente consistente* o *satisfactorio* (denotado simbólicamente por  $\text{Con}_{\models}(\Sigma)$ ) si existe algún  $\mathfrak{A}$  tal que  $\mathfrak{A} \models \Sigma$ ; “inconsistente” significa “no consistente”.

¿Cómo resuelve esto nuestro problema? Gödel demostró, en su tesis doctoral, que la consistencia semántica y la sintáctica son equivalentes, a este resultado se le conoce como el Teorema de Completitud de Gödel. Con esto, si queremos demostrar la consistencia sintáctica de  $\Sigma$  basta demostrar su consistencia semántica.

**Teorema 7.2** (de Completitud de Gödel). *Sea  $\Sigma$  un conjunto de oraciones de  $\mathcal{L}$ . Entonces*

1.  $\text{Con}_{\models}(\Sigma)$  *sii*  $\text{Con}_{\vdash, \mathcal{L}}(\Sigma)$ .
2. *Para toda oración  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$ ,  $\Sigma \models \varphi$  sii  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ .*

La primera parte del Teorema de Completitud nos dice que la consistencia sintáctica de  $\Sigma$  es lógicamente equivalente a la consistencia semántica de  $\Sigma$ . Recordemos que la consistencia semántica de  $\Sigma$  implica la existencia de un modelo  $\mathfrak{A}$  que modela todas las oraciones de  $\Sigma$  (representamos esto como  $\mathfrak{A} \models \Sigma$ ).

La segunda parte dice que, una demostración de la oración  $\varphi$  a partir de  $\Sigma$  es posible si y sólo si  $\varphi$  es válida para todos los modelos posibles de  $\mathcal{L}$ .

Supóngase ahora que deseamos demostrar la consistencia sintáctica de  $\Sigma$ , y para esto procedemos a demostrar la consistencia semántica de  $\Sigma$ ; tendremos que construir un modelo para  $\Sigma$ . Supóngase que se encuentra dificultad en esto, y se empieza a sospechar que no es posible construir dicho modelo. ¿Cómo podríamos demostrar que no existe un modelo para  $\Sigma$ ? *Podemos suponer que existe un  $\mathcal{L}$ -modelo  $\mathfrak{A}$  y derivar una contradicción...*

Hemos vuelto al punto de partida.

## 8 Aspectos fundacionales y aspectos didácticos

La propuesta de interpretar el método por contradicción en su versión sintáctica, para evadir el problema de la representación de lo imposible conlleva a verificar la consistencia sintáctica de  $\Sigma$ . La dificultad de abordar este problema de modo sintáctico es elevada y debe tener en cuenta los teoremas de incompletitud de Gödel.

Sin embargo, bajo esta perspectiva, la validez de la demostración por contradicción *ya no recae en el método en sí* sino en la consistencia de las hipótesis. Lo cual debería brindar mayor confianza al estudiante sobre la demostración.

Si abordamos el problema de la consistencia sintáctica desde la perspectiva semántica, puede conducir (en caso de que  $\Sigma$  sea inconsistente) al problema inicial: Ya sea demostrar sintácticamente la inconsistencia de  $\Sigma$  o recurrir a nuestra prueba por contradicción semántica.

Sobre esta última situación se hará una observación final:

Trabajando en lógica de primer orden tenemos la equivalencia lógica

$$\neg\exists x\varphi(x) \text{ sii } \forall x\neg\varphi(x) \tag{1}$$

El proceso de demostración “para todo elemento  $x$ ”, generalmente se desarrolla bajo el esquema de *Generalización Universal*. Informalmente este método se presenta al estudiante como: si se demuestra para un *elemento arbitrario*  $c$  la propiedad  $(\varphi(c))$  entonces podemos concluir que se cumple para todo elemento  $(\forall x\varphi(x))$  ya que  $c$  era arbitrario.

Por alguna razón este procedimiento no genera dudas ni incomodidad en el estudiante sobre la validez de la demostración, o al menos, no al nivel de la demostración por contradicción.

Sin embargo podemos apreciar que hay oraciones lógicas equivalentes que ligan estos métodos de demostración. ¿No debería haber alguna relación en su interpretación? Es nuestro parecer que sí.

Por más que nos parezca natural “tomar” o “fijar” un elemento arbitrario, no existe tal; y de existir, su naturaleza difiere de la naturaleza intrínseca a los elementos de estudio en cuestión; mas toda afirmación que se haga sobre el “elemento arbitrario” es una abreviación sobre lo deducible de los elementos de estudio.

De este mismo modo debería ser interpretada la naturaleza del modelo en cuestión al trabajarse en el método por contradicción. La existencia de un modelo  $\mathfrak{A}$  que es *imposible* no debería sorprendernos más que la existencia de un elemento *arbitrario*.

Se enfatiza que lo anterior tiene base en la equivalencia lógica (1), por lo cual las interpretaciones que se hagan de una de las oraciones deben ser aplicables a la otra. Con esto, las interpretaciones de *modelos imposibles* y de *elementos arbitrarios* se mantienen ambas de pie o caen juntas.

La prueba por contradicción es un claro e importante ejemplo de que el razonamiento a partir de inconsistencias forma parte de la creatividad humana y que puede desembocar en invenciones o descubrimientos útiles. Coincidimos con Meheus y Smith cuando dicen que “razonar a partir de una teoría inconsistente usualmente juega un papel heurístico importante” y “el uso de representaciones inconsistentes del mundo como guías heurísticas para teorías consistentes es una parte importante del descubrimiento científico.” en [5] y [6], respectivamente.

El “suponer” entidades como punto de partida de una investigación es sumamente fértil, para la exploración en territorios dados. Así dada una ecuación, legalmente matemática, lo primero que se hace, es tomar un elemento ideal que lo solucione, “algo” que aún no existe, y luego ir añadiendo corporeidad en la medida que descubrimos más propiedades que debe cumplir. Paradójico método de suponer una existencia para poder constatar o descartar su existencia misma; pero que visto críticamente, lo que exhibe es la estructura subyacente, ya sea de los axiomas o del mundo mismo.

El matemático que no parte de entidades que no existen cabalmente, podría condenarse a no construir nuevas existencias matemáticas, que agranden el mundo matemático y por tanto el mundo humano.

## Bibliografía

- [1] Emilio Angulo Perkins, *El impacto del método del forcing en el discurso matemático*, Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016.
- [2] Samuel Antonini and Maria Alessandra Mariotti, *Indirect proof: what is specific to this way of proving?*, ZDM, vol. 40, 3, (2008), 401–412.

- [3] Catarina Dutilh Novaes, *Reductio ad absurdum from a dialogical perspective*, Philosophical Studies, vol. 173, 10, (2016), 2605–2628.
- [4] Kennet Kunen, *The Foundations of Mathematics*, Studies in Logic series vol. 19, College Publications, 2009.
- [5] Joke Meheus, *Inconsistencies and the dynamics of science*, Logic and Logical Philosophy, 11, (2003), 129–148.
- [6] Joel M. Smith, *Inconsistency and scientific reasoning*, Studies in History and Philosophy of Science, 19, (1988), 429–445.
- [7] Fernando Zalamea, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, 1 ed., Universidad Nacional de Colombia, 2009.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

eapzfc@gmail.com

jangoa@fcfm.buap.mx

acontri@fcfm.buap.mx

---

# Modelación matemática

---



## Capítulo 3

# Efecto Allee: descripción y modelos básicos en la dinámica de poblaciones

Evodio Muñoz Aguirre, Sandy Gómez Pérez,  
Jorge Álvarez Mena  
Universidad Veracruzana

### Resumen

El efecto Allee es un fenómeno que establece una relación positiva entre algún componente de adaptación individual y el tamaño o densidad de población. El presente Capítulo está dedicado a explicar ecológicamente tal efecto, así como a presentar algunos modelos básicos en ecuaciones diferenciales ordinarias que lo describen; en particular, se realiza un análisis comparativo entre la tasa de crecimiento per cápita del modelo logístico y la tasa correspondiente a dicho modelo al considerar el efecto Allee.

## Introducción

El ecologista Warder Clyde Allee (1885-1956) realizó sus estudios en la Universidad de Chicago, figuró entre los primeros en estudiar a las especies desde una perspectiva ecológica y tuvo un papel importante en el establecimiento de la Ecología como una disciplina independiente de la Biología.

De acuerdo con Courchamp, et. al. [11], el principal objetivo de Allee era determinar los factores que conducen a la formación y continuación de la agrupación de animales, una de sus hipótesis plantea que tales agrupaciones incrementan la sobrevivencia individual. En la búsqueda de contrastar esta hipótesis, Allee estudió diversas especies, en particular, mostró que los gusanos planarios (*Turbellaria*) y las estrellas de mar (*Asteroidea*) pueden sobrevivir mejor a la exposición de rayos UV o a químicos tóxicos cuando son lo suficientemente numerosos como para acondicionar el agua. Con base en la evidencia experimental, Allee concluyó que la evolución de las estructuras sociales no sólo es impulsada por la competencia, sino que la cooperación es otro principio fundamental en las especies animales. Las consecuencias dinámicas de esta agrupación animal llevó a lo que Odum en [27] llamó Principio de Allee, más tarde conocido como “Efecto Allee”.

Cuando una población es pequeña, o se presenta en bajas densidades, suele pensarse que los individuos se verán favorecidos por los recursos presentes en el medio ambiente; sin embargo, este punto de vista no considera el efecto de la cooperación. En [11], Courchamp, et. al. describen como una población se ve beneficiada por la cooperación: los individuos de algunas especies usan estrategias cooperativas para cazar o en su caso para engañar a sus depredadores, buscan comida juntos y/o unen fuerzas para sobrevivir a condiciones abióticas no favorables; cuando hay muy pocos individuos, aunque estos podrían obtener más beneficios de algunos recursos, en muchos casos sufrirán por la escasez de conoespecíficos; si el efecto de la escasez es más fuerte que los beneficios por recursos, entonces su adaptación se reduce. En este sentido, a menor tamaño de la población o densidad de ésta, menor es la adaptación individual. En esencia, lo antes descrito es un efecto Allee y establece una relación positiva entre el número de individuos en una población y su adaptación.

Elaydi y Sacker [14] afirman que en la última década el efecto Allee ha cobrado interés, tanto es así que en 2008 apareció un libro de Biología [11] exclusivamente dedicado al estudio de este fenómeno, el cual se presenta en un gran número de ramas de la Ecología: dinámica de poblaciones [2, 15], ecología del comportamiento [16, 31], conservación de la biodiversidad [11, 34], epidemiología y evolución [21, 24, 35]. Los primeros estudios realizados por Allee y sus estudiantes fueron experimentales, ahora el interés se torna en una dirección diferente: la modelación matemática del efecto Allee y su análisis cualitativo. Por ejemplo, González-Olivares y Rojas-Palma [20] estudian la existencia de ciclos límites y atractores múltiples en modelos depredador presa tipo Gause, considerando el efecto Allee en la ecuación de las presas; Ben y Bourbaker [5] realizan un análisis de bifurcación en modelos depredador presa con efecto Allee llamados BB-modelos, los cuales fueron propuestos por Bazykin y Berezovskaya [4] en 1998; Stoner, Davis y Booker [34] estudian las consecuencias negativas del efecto Allee en poblaciones del caracol pala (*Lobatus Gigas*). Otros enfoques para modelar el fenómeno incluyen ecuaciones en diferencias [6], ecuaciones con retardo [28], ecuaciones en derivadas parciales [29] o ecuaciones diferenciales impulsivas [37].

El objetivo principal de este Capítulo es presentar un escrito que contenga una descripción ecológica del efecto Allee y algunos modelos en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que incluyen este fenómeno. Este documento consta de una introducción y cuatro secciones: en la primera sección se hace una descripción del efecto Allee desde el punto de vista ecológico, y se muestra además una clasificación del mismo; en la segunda sección se explica la equivalencia topológica entre algunas ecuaciones diferenciales con efecto Allee; en la tercera sección se realiza un análisis comparativo entre un modelo con efecto Allee y el modelo de tipo logístico; y por último, en la cuarta sección se presentan las conclusiones del presente

Capítulo.

# 1 Descripción ecológica del efecto Allee

## Clasificación del efecto Allee

Aunque Allee no brindó una definición formal del efecto Allee, en Stephens, et. al. [33] lo definen como “una relación positiva entre un componente de la adaptación individual y el número o densidad de conespecíficos”. Lo anterior se puede interpretar como: la adaptación de un individuo en una población pequeña decrece a medida que el tamaño de la población también disminuye.

En un amplio sentido, adaptación individual se refiere a la contribución genética de un individuo a la siguiente generación, los principales componentes de la adaptación son sobrevivencia y reproducción, de los cuales se derivan otros como desarrollo, primera reproducción, éxito de apareamiento, fecundidad, probabilidad de muerte o reproducción, etc.

Este fenómeno ha recibido diversos nombres, tales como: *depensación*, *efecto de competencia negativa*, *dependencia de densidad inversa o positiva*, *subpoblación* (conocido como *undercrowding*), *alelocatálisis*, etc. El término depensación fue usado por primera vez por el biólogo inglés Ferris Neave [26], y principalmente usado en ciencias pesqueras, mientras que efecto Allee es más común en las áreas de Biología y Ecología. [25]

El efecto Allee se puede clasificar en: efecto Allee demográfico y efecto Allee componente. El primero se refiere a una relación positiva entre la adaptación total de una determinada especie, usualmente cuantificada por la tasa de crecimiento de población per cápita, y el tamaño o densidad de población; mientras que el efecto Allee componente ocurre a nivel de adaptación individual, por ejemplo plantas que se producen a baja densidad pueden recibir una reducida cantidad de polen y en consecuencia sufrir una disminución en el conjunto de semillas [12].

Un efecto Allee demográfico es la prueba de la existencia de al menos un efecto Allee componente, en cambio un efecto Allee componente no siempre genera un efecto Allee demográfico. Por ejemplo, el zorro isleño o zorro gris (*Urocyon Littoralis*) es una especie monogámica, después de la muerte de la pareja, el sobreviviente busca un nuevo compañero entre los individuos de territorios vecinos. Si la densidad es demasiado baja la probabilidad de encontrar un compañero disminuye, es decir se presenta un efecto Allee componente, sin embargo este efecto Allee no es suficiente para contrarrestar la liberación de competencia intraespecífica a baja densidad; cuando la densidad es baja menos zorras se reproducen, pero aquellas que sí lo hacen tienen más recursos y producirán camadas más grandes, como resultado,

la reproducción per cápita es negativamente dependiente de la densidad; a menos que haya otro efecto Allee componente intenso en la sobrevivencia, no habrá efecto Allee demográfico [3].

De acuerdo al impacto ecológico que presente un efecto Allee demográfico se distinguen dos tipos: efecto Allee débil y efecto Allee fuerte. Un efecto Allee demográfico se considera débil si la tasa de crecimiento de población per cápita es positiva para densidades de población pequeñas, donde un incremento en esta densidad produce un incremento en la tasa; y para densidades altas un incremento en la densidad produce un decrecimiento en dicha tasa. Y un efecto Allee fuerte se presenta cuando por debajo de un cierto valor de densidad, llamado umbral de Allee, la tasa de crecimiento per cápita se vuelve negativa. Si una cierta población presenta un efecto Allee fuerte ésta decrecerá a un ritmo acelerado hasta que se extinga [39].

Cabe mencionar que aunque el efecto Allee se da de forma natural para algunas especies animales o vegetales, este fenómeno puede ser creado artificialmente con el objetivo de eliminar algunas especies dañinas para el hombre, por ejemplo, liberando machos estériles como la mosca de la fruta (*Drosophila Melanogaster*) [12].

## Mecanismos que pueden generar efectos Allee

Las poblaciones pueden exhibir efecto Allee debido a un amplio rango de fenómenos biológicos. Un efecto Allee componente puede surgir vía cualquier mecanismo que genere una dependencia positiva de densidad en algún componente de adaptación. Entre los principales mecanismos propuestos para explicar una mejor sobrevivencia en grupos a altas densidades se encuentra la protección proporcionada por las agregaciones animales frente a amenazas externas. Ejemplos incluyen especies como el codorniz de Virginia (*Colinus Virginianus*) quien tiende a agruparse para combatir las bajas temperaturas durante el invierno; o el berrendo americano (*Antilocapra Americana*) que forma una valla defensiva mostrando así una superficie mínima de grupo a lobos y coyotes.

A continuación se describen los principales mecanismos que pueden generar efectos Allee componentes, los cuales pueden ser consultados en las tablas que aparecen en [10, 32], así como ejemplos que representan a cada mecanismo.

## Mecanismos en la reproducción

- **Encuentro de pareja.** A bajas densidades de población es más difícil encontrar pareja. Ejemplos: Bacalao (*Gadus Morhua*), Caracol pala (*Strombus Gigas*).

- **Emisión de desove.** En poblaciones pequeñas se tiene menor probabilidad de encuentros entre el espermatozoide y el óvulo. Ejemplos: Corona de espinas o Acantáster púrpura (*Acanthaster Planci*), Erizo marino (*Echinoidea*).
- **Facilitación de la reproducción.** Los individuos son menos propensos a reproducirse si no perciben que otros se reproducen. Ejemplos: Caracol (*Biomphalaria Glabrata*), Lagarto cola de látigo (*Cnemidophorus*).
- **Escasez de polen.** Disminución de las frecuencias de visita de polinizadores en poblaciones de plantas pequeñas o escasas. Menor probabilidad de polen compatible a bajas densidades de plantas. Ejemplos: Haleakala espada de plata (*Argyroxiphium Sandwicense*), Borraza (*Spartina Alterniflora*).
- **Cooperación para la crianza.** Cuando los grupos reproductores son pequeños tienen menos éxito en la producción y/o crianza de los jóvenes. Ejemplos: Perro salvaje africano (*Lycaon Pictus*).

### Mecanismos en la sobrevivencia

- **Comportamiento antidepredador cooperativo.** Los grupos de presas cuando son pequeños suelen ser menos vigilantes y/o menos eficientes en defensa cooperativa. Pequeños grupos al escapar confunden a los depredadores con menos facilidad. Ejemplos: Suricata (*Suricata Suricatta*), Muflón del desierto (*Ovis Canadensis*), Perro salvaje africano (*Lycaon Pictus*).
- **Saciedad del depredador.** A medida que los grupos de presas se hacen más pequeños, la vulnerabilidad individual de las presas aumenta. Ejemplos: Bacalao (*Gadus Morhua*), Suricata (*Suricata Suricatta*), Corona de espinas o Acantáster púrpura (*Acanthaster Planci*), Caribú del bosque (*Rangifer tarandus Caribou*).
- **Explotación.** Se presenta cuando las tasas de explotación no disminuyen tan rápidamente como la población explotada, en consecuencia aumenta la probabilidad de que un individuo sea capturado. Ejemplos: cualquier especie comercialmente importante, principalmente especies marinas.
- **Efecto antropogénico.** Especies raras consideradas muy valiosas. Este efecto está relacionado con actividades como recolección, caza de animales considerados trofeos, productos de lujo o mascotas exóticas. Ejemplos: Tucán (*Ramphastidae*), Jacinto o Guacamayo azul (*Anodorhynchus Hyacinthinus*), Cachorros de león blanco (*Phanero Leo Candidus*).

## Mecanismos en la reproducción y/o sobrevivencia

- **Eficiencia de búsqueda de comida.** Capacidad de localizar alimento o matar presas. Ejemplos: Albatros de ceja negra (*Thalassarche Melanophris*), Perro salvaje africano (*Lycan Pictus*).
- **Condicionamiento ambiental.** Mejora del estrés ambiental a través de numerosos mecanismos, como la termorregulación social, una mejor resistencia al hielo, etc. Ejemplos: Marmota alpina (*Marmota Marmota*), Mejillón acanalado (*Geukensia Demissa*), Mosca de la fruta (*Drosophila Melanogaster*), Plantas alpinas.
- **Efecto de cultivo.** Pocos peces adultos implican una mayor mortalidad juvenil. Por ejemplo, pocos erizos adultos empeoran el éxito de asentamiento y las condiciones de alimentación de sus crías, disminuyendo así la protección contra la depredación.

## Mecanismos en genética

- **Efecto de muestreo y deriva genética.** Reducción del número de alelos beneficiosos, acumulación de mutaciones perjudiciales y/o reducción del potencial evolutivo en pequeñas poblaciones. Ejemplos: Puma norteamericano (*Felis Concolor Coryi*), Hierba (*Ranunculus Reptans*).
- **Endogamia.** Aumento de la tasa y/o el número de apareamientos entre parientes cercanos en poblaciones pequeñas. Ejemplos: Hierba (*R. Reptans*), Genciana del pantano (*Pneumonanthe*).

## 2 Modelación del efecto Allee

Según Pielou [30], investigar acerca de cómo crece o disminuye una población ha sido, históricamente, uno de los estudios más antiguos de la Ecología Matemática. El principal objetivo de ésta es establecer modelos para la dinámica de poblaciones. Cuando se modela una sólo población, la tasa de cambio de la variable estado a menudo se denota por:

$$\frac{dx}{dt} = xf(x), \quad (1)$$

donde  $x = x(t)$  representa el tamaño de población en el tiempo  $t \geq 0$ , medido en cantidad de individuos, densidad por unidad de área o de volumen; y  $f(x)$  es el

índice o tasa de crecimiento per cápita la cual puede asumir una amplia variedad de formas y puede depender de diversas variables y parámetros. La definición de efecto Allee presentada en la Sección 1.1 establece una relación positiva entre  $f(x)$  y  $x$ ; esta relación es usualmente llamada dependencia inversa de la densidad. Una de las suposiciones ecológicas más aceptada es asumir que el crecimiento de una determinada población se ve afectado por recursos limitados presentes en el medio ambiente, un modelo que describe esta hipótesis es conocido como ecuación logística o ecuación de Verhulst y se expresa mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right), \quad (2)$$

donde  $r$  denota la tasa intrínseca de crecimiento de la población  $x$  y  $K > 0$  es la densidad máxima de población que puede soportar el medio ambiente, y es llamada capacidad de carga.

En este modelo se observa que:

- La tasa de crecimiento de la población,  $dx/dt$ , es proporcional al producto de la densidad de población  $x$  y la diferencia con la capacidad de carga  $(K - x)$ .
- El término  $-\frac{rx^2}{K}$  modela la competencia intraespecífica por los recursos disponibles, lo cual limita el crecimiento.
- La tasa de crecimiento per cápita está dada por  $r(1 - \frac{x}{K})$ , la cual es una función lineal decreciente para  $r > 0$ .
- El modelo implica una disminución lineal de la tasa de crecimiento per cápita respecto a la densidad de población, en otras palabras se tiene una dependencia negativa de la densidad, esto significa que el aporte de cada individuo al crecimiento de la población disminuye a medida que la densidad de población se incrementa, como puede observarse en la Figura 1.

Aunque la ecuación de crecimiento logístico considera la competencia intraespecífica, no toma en cuenta las consecuencias de la cooperación o agrupación entre individuos de la misma especie a bajas densidades de población; la forma más común de incorporar tal situación al modelo (2) es la siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) (x - m), \quad (3)$$

con  $-K \leq m < K$ . Cuando el parámetro  $m$  es positivo se le conoce como tamaño mínimo de población viable o nivel umbral. A la ecuación diferencial (3) se le conoce como modelo multiplicativo del efecto Allee [8, 17]. Cuando  $0 < m \ll K$  la

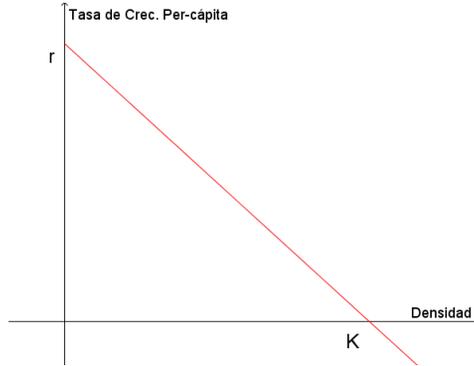


Figura 1: Crecimiento logístico per cápita

población exhibe efecto Allee fuerte, y si  $-K < m \leq 0$  se está ante un efecto Allee débil; el caso  $m = 0$  se llama efecto Allee débil especial, [19, 28], ver Figura 2.

Otras formas matemáticas que han sido utilizadas para modelar el efecto Allee son las siguientes ecuaciones diferenciales.

En [13, 32] se estudia la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{nrx}{x+b}, \quad (4)$$

la cual es conocida como modelo aditivo del efecto Allee [1]. En esta ecuación el término  $nrx/(x+b)$  es una función de tipo Michaelis-Menten, similar a la respuesta funcional hiperbólica de Holling tipo II, este término puede considerarse como el impacto sobre la densidad de población debido a causas externas, por ejemplo migración, predación, etc.

Boukal y Berec [6] presentan la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(1 - \frac{m+n}{x+n}\right), \quad (5)$$

donde  $n$ , con  $n > 0$  y  $m > -n$ , afecta la forma general de la curva de crecimiento per cápita de la población  $x$ , a medida que  $n$  aumenta la curva se vuelve cada vez más plana y alcanza valores máximos inferiores. En [19] reescriben la ecuación anterior como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{rx}{x+n} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x-m), \quad (6)$$

y afirman que la ecuación (6) describe el fenómeno conocido como efecto Allee doble [3], es decir, cuando se tienen dos efectos Allee actuando simultáneamente; un efecto

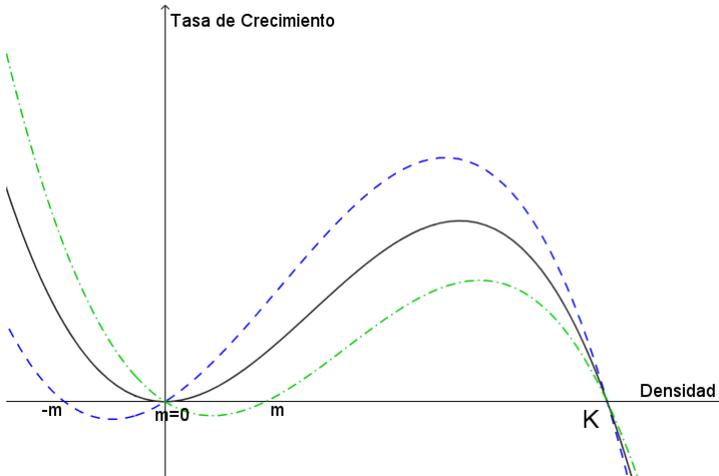


Figura 2: Tasa de crecimiento de la ecuación (3). Efecto Allee fuerte:  $m > 0$ , efecto Allee débil:  $m < 0$ , efecto Allee débil especial:  $m = 0$ .

es expresado por el término  $x - m$ , y el otro efecto por  $r/(x + n)$  el cual es una modificación a la tasa intrínseca de crecimiento de la población, puesto que ahora depende de la densidad.

Una forma particular de (5) se propone en [7] y está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(1 - \frac{m}{x}\right). \quad (7)$$

Nótese que la ecuación anterior no está definida para  $x = 0$ , y si  $m = 0$  se tiene la tasa de crecimiento logístico, motivo por el cual esta ecuación no puede representar a la forma particular del efecto Allee débil.

En [36, 38] utilizan

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{R}\right) \left(\frac{x}{x+b}\right) - D, \quad (8)$$

donde  $\frac{x}{x+b}$  es el término que describe al efecto Allee,  $b$  es llamada constante del efecto Allee,  $D$  es la tasa de muerte per cápita de adultos y  $R$  es la densidad a la cual la tasa de crecimiento per cápita es cero; en este caso la ecuación es equivalente a (2) si  $K = \frac{R(r-D)}{r}$ .

En [13], al modelo de crecimiento de Malthus le agregan una función de tipo Michaelis-Menten o hiperbólica de Holling tipo II, surgiendo así:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(\frac{x}{x+b}\right), \quad (9)$$

donde  $b > 0$  es la constante de saturación media, es decir, la cantidad de población necesaria para alcanzar la mitad de la tasa de crecimiento per cápita. Nótese que en esta ecuación no existe efecto Allee fuerte.

Para el estudio de metapoblaciones, en [22, 23] se propone

$$\frac{dx}{dt} = (rx(h-x) - ex) \left( \frac{x-a}{h-\frac{e}{r}} \right), \quad (10)$$

donde  $a$ , con  $0 < a < h - \frac{e}{r}$ , es conocida como la fracción umbral por debajo de la cual  $\frac{dx}{dt} < 0$  y la metapoblación tiende a extinguirse.

González-Olivares, et. al. en [18] muestran la equivalencia topológica entre la mayoría de las ecuaciones anteriores. Entre los principales resultados que presentan destacan los siguientes:

- El modelo (4) es topológicamente equivalente al modelo (3), siempre que  $b \leq n$  y  $x \geq 0$ .
- Para  $x \geq 0$  y los parámetros  $m, n > 0$ , el modelo (5) es topológicamente equivalente a (3). La demostración de este hecho consiste en observar que al reescalar (5), ésta tiene la misma expresión matemática que (3) pero para un tiempo diferente.
- El modelo (8) es topológicamente equivalente a (3) si y sólo si  $m > 0$ .
- El modelo (9) no es topológicamente equivalente a (3), dado que (9) sólo representa al efecto Allee débil y no existe un nivel umbral de población.
- El modelo (10) es topológicamente equivalente al modelo (3).

### 3 Importancia del efecto Allee

Cuando  $m > 0$ , la ecuación diferencial (3) describe al efecto Allee fuerte, el cual es de especial interés para aquellos ecologistas que se dedican a la conservación de especies, dado que el umbral  $m$  plantea la conservación o extinción de la especie: para  $0 < x < m$  la tasa de crecimiento per cápita,  $f(x)$ , es negativa, es decir, si el tamaño o densidad de población está por debajo de este umbral la especie tenderá a extinguirse; mientras que si el tamaño de la población está por arriba de ese umbral,  $x > m$ , entonces  $f(x)$  es positiva y se conserva la especie.

Cuando  $m \leq 0$ , la tasa de crecimiento per cápita permanece positiva a bajas densidades de población y se está ante la presencia de efecto Allee débil. Cuando  $m < -K$  no existe efecto Allee, porque la tasa de crecimiento per cápita  $f(x)$  es

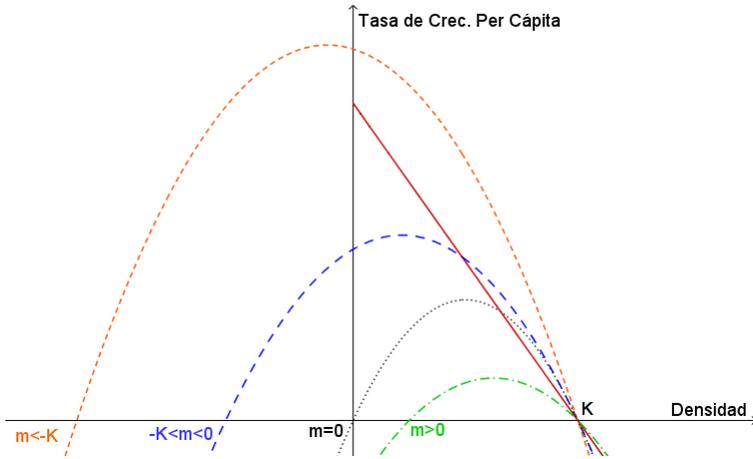


Figura 3: Relación entre la tasa de crecimiento de población per cápita,  $f(x) = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ , y el tamaño de la población  $x$ . Crecimiento logístico (línea recta), efecto Allee débil ( $m < 0$ ), efecto Allee débil Especial ( $m = 0$ ), efecto Allee fuerte ( $m > 0$ ), no efecto Allee ( $m < -K$ ).

negativa para todo  $x \geq 0$ , como sucede con la ecuación logística. De acuerdo con Clark, C.W. [9] a esta curva se le conoce como compensatoria. (Ver Figura 3)

En la Figura 3 se puede observar que en el modelo logístico (2) un incremento en la densidad de población produce un decremento en la tasa de crecimiento per cápita; en cambio, al considerar el modelo multiplicativo (3), el cual incorpora el efecto Allee en el modelo logístico, lo anterior es cierto sólo para altas densidades de población, en tanto que en bajas densidades un incremento de la población es beneficioso para la tasa de crecimiento per cápita y por lo tanto para toda la población.

En Ecología, el estudio del efecto Allee fuerte es importante ya que permite determinar un umbral de densidad por debajo del cual una población no puede sobrevivir, por ejemplo, podría corresponder a una densidad por debajo de la cual es muy difícil encontrar un compañero de manera que la reproducción no compense la mortalidad. Investigaciones recientes sugieren que tal efecto podría tener una influencia importante en la dinámica de la población de muchas plantas y especies animales, motivo por el cual la investigación de las causas y efectos de efectos Allee es importante para la biología de la conservación.

En Matemáticas, los modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias que surgen en la modelización del efecto Allee son fuente de ejemplos de dinámicas diversas; tales modelos han sido utilizados para estudiar las consecuencias en la interacción

de especies, en particular en modelos depredador-presa, como ejemplos: González-Olivares y Rojas-Palma [20] demuestran que formas matemáticas diferentes para el efecto Allee, implican modificaciones en la dinámica de los modelos, obteniendo distintas cantidades de ciclos límites; mientras que González-Olivares, et. al. [19] analizan las consecuencias de considerar efectos Allee dobles.

## 4 Conclusiones

En este capítulo se describió ecológicamente el efecto Allee y se presentaron algunas ecuaciones diferenciales ordinarias que han sido utilizadas para modelar dicho fenómeno.

Bajo condiciones establecidas en la sección 2, las ecuaciones (3),(4),(5),(6),(7),(8) y (10) son topológicamente equivalentes entre sí para  $x > 0$ . Estas ecuaciones modelan el efecto Allee y se obtienen del modelo logístico (2) al agregar hipótesis.

En la sección 3 se observa que la tasa de crecimiento per cápita para el modelo logístico (2) es estrictamente decreciente, mientras que la tasa de crecimiento per cápita para el modelo (3), el cual incluye el efecto Allee, es decreciente sólo para densidades altas y creciente para densidades bajas, lo que explica por que a densidades bajas el comportamiento de ambas ecuaciones diferenciales es diferente.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por su valioso aporte en la revisión y sugerencias para la mejor presentación de este Capítulo. La coautora Sandy Gómez Pérez agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por la beca otorgada para estudios de maestría, así como al doctor Eduardo González Olivares (Grupo Ecología Matemática, Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile) por sus valiosos comentarios, observaciones, y sugerencias.

## Bibliografía

- [1] Aguirre, P., González-Olivares, E. and Sáez, E. *Three Limit Cycles in a Leslie-Gower Predator-Prey Model with Additive Allee Effect*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 69, 2009, 1244–1262.
- [2] Amarasekare, P. *Allee Effects in Metapopulation Dynamics*. American Naturalist Jstor, Vol 152, 1998, 298–302.

- [3] Angulo, E., Roemer, G., Berec, L., Gascoigne, J. and Courchamp, F. *Double Allee Effects and Extinction in the Island Fox*. Conservation Biology, Vol 21, Num 4, 2007, 1082–1091.
- [4] Bazykin, D. *Nonlinear dynamics of interacting populations*. Singapore: World Scientific Series on Nonlinear Sciences, Series A, Vol 22, 1998.
- [5] Boubaker, O. and Ben, A. *On Bifurcation Analysis of the Predator-Prey BB-Model with Weak Allee Effect*. 16th international Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control & computer engineering, 2015, 21–23.
- [6] Boukal, D. and Berec, L. *Single-species Models of the Allee Effect: Extinction Boundaries, Sex Ratios and Mate Encounters*. Journal of Theoretical Biology, 218, 2002, 375–394.
- [7] Brassil, C. *Mean Time to Extinction of a Metapopulation with an Allee Effect*. Ecological Modelling, 143, 2001, 9–16.
- [8] Brauer, F. and Castillo-Chávez, C. *Mathematical models in Population Biology and Epidemiology*. 2nd Edition, Springer-Verlag, 2012.
- [9] Clark, C.W. *Mathematical Bioeconomics: The optimal management of renewable resources*, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [10] Courchamp, F., Berec, L. and Angulo, E. *Multiple Allee Effects and Population Management*. Trends in Ecology and Evolution, Vol 22, Num 4, 2006, 185–191.
- [11] Courchamp, F., Berec, L. and Gascoigne, J. *Allee Effects in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, 2008.
- [12] Courchamp, F., Clutton-Brock, C. and Grenfell, B. *Inverse Density Dependence and the Allee Effect*. Trends and Ecology and Evolution (TREE), 14, 10, 1999, 405–410.
- [13] Dennis, B. *Allee Effects: Population Growth, Critical Density, and the Chance of Extinction*. Natural Resource Modeling, Vol 3, Num 4, 1989, 481–538.
- [14] Elaydi, S. N., and Sacker, R. J. *Population Models with Allee Effect: A New Model*. Journal of Biological Dynamics, 4, 2010, 397–408.
- [15] Fowler, M. and Ruxton, G. *Population Dynamic Consequences of Allee Effects*. Journal of Theoretical Biology, 215, 2002, 39–46.

- [16] Gardner, J. *Winter Flocking Behaviour of Speckled Warblers and the Allee Effect*. *Biological Conservation*, 118, 200, 195–204.
- [17] González-Olivares, E., Gallego-Berrío, L., González-Yañez, B. and Rojas-Palma, A. *Consequences of Weak Allee Effect on Prey in the May–Holling–Tanner Predator–Prey Model*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol 38, 2015, 5183–5196.
- [18] González-Olivares, E., González-Yañez, B. and Mena-Lorca, J. *Modelling the Allee effect: Are the different mathematical forms proposed equivalents?*. In R. Mondaini (Ed.) *Proceedings of the International Symposium on Mathematical and Computational Biology BIOMAT 2006*, E-papers Serviços Editoriais Ltda. Rio de Janeiro, 2007, 53–71.
- [19] González-Olivares, E., González-Yañez, B., Mena-Lorca, J., Rojas-Palma, A. and Flores, J. *Consequences of Double Allee Effect on the Number of Limit Cycles in a Predator–Prey Model*. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 2011, 3449–3463.
- [20] González-Olivares, E., and Rojas-Palma, A. *Allee Effect in Gause Type Predator-Prey Models: Existence of Multiple Attractors, Limit Cycles and Separatrix Curves. A Brief Review*. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, Vol 8, Num 6, 2013, 143–164.
- [21] Hilker, F., Langlais, M. and Malchow, H. *The Allee Effect and Infectious Diseases: Extinction, Multistability, and the (Dis-)Appearance of Oscillations*. *The American Naturalist*, Vol 173, Num 1, 2009, 72–88.
- [22] Hui, C. and Li, Z. *Dynamical Complexity and Metapopulation Persistence*. *Ecological Modelling*, 164, 2003, 201–209.
- [23] Hui, C. and Li, Z. *Distribution Patterns of Metapopulation Determined by Allee Effects*. *Population Ecology*, Vol 46, Num 1, 2004, 55–63.
- [24] Kang, Y. *A Simple Epidemiological Model for Populations in the Wild with Allee Effects and Disease-Modified Fitness*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, Vol 19, Num 1, 2014, 89–130.
- [25] Liermann, M. and Hilborn, R. *Depensation: evidence, models and implications*. *Fish and Fisheries*, 2, 2001, 33–58.
- [26] Neave, F. *Principles Affecting the Size of Pink and Chum Salmon Populations in British Columbia*. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, 9, 1953, 450–491.

- [27] Odum, E. *Fundamentals of Ecology* Saunders, Philadelphia, Pennsylvania, 1953.
- [28] Pal, P., Saha, T. and Sen, M. *A Delayed Predator–Prey Model with Strong Allee Effect in Prey Population Growth*. Nonlinear Dynamics, Springer, 2013.
- [29] Petrovskii, S. and Li B. *An exactly solvable model of population dynamics with density-dependent migrations and the Allee effect*. Mathematical Biosciences, 186, 2003, 79–91.
- [30] Pielou, E. *An Introduction to Mathematical Ecology*. Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [31] Stephens, P. and Sutherland, W. *Consequences of the Allee Effect for Behaviour, Ecology and Conservation*. Trends in Ecology and Evolution (TREE), 14, 1999, 401–405.
- [32] Stephens, P. and Sutherland, W. *Vertebrate Mating Systems, Allee Effects and Conservation*. In: Apolonio, M., Festa-Bianchet, M. and Mainardi, D. (Editors) *Vertebrate Mating Systems*, World Scientific Publishing, 2000, Cap 9.
- [33] Stephens, P., Sutherland, W. and Freckleton, R. *What is the Allee Effect?* Oikos, Vol 87, Num 1, 1999, 185–190.
- [34] Stoner, A., Davis, M. and Booker, C. *Negative Consequences Of Allee Effect Are Compounded By Fishing Pressure: Comparison Of Queen Conch Reproduction In Fishing Grounds And A Marine Protected Area*. Bulletin Of Marine Science, Vol 88, Num 1, 2012, 89–104.
- [35] Usaini, S., Lloyd, A., Anguelov, R., and Garba, S. *Dynamical Behavior of an Epidemiological Model with a Demographic Allee Effect*. Mathematics and Computers in Simulation, 133, 2017, 311–325
- [36] Wang, G., Liang, X. and Wang, F. *The Competitive Dynamics of Populations Subject to an Allee Effect*. Ecological Modelling, 124, 1999, 183–192.
- [37] Wei, C. and Chen, L. *Periodic solution and heteroclinic bifurcation in a predator–prey system with Allee effect and impulsive harvesting*. Nonlinear Dynamic, 76, 2014, 1109–1117.
- [38] Zhou, S. and Wang, G. *Allee-like Effects in Metapopulation Dynamics*. Mathematical Biosciences, 189, 2004, 103–113.

- [39] Zu, J. and Mimura, M. *The Impact of Allee Effect on a Predator–Prey System with Holling type II Functional Response*. Applied Mathematics and Computation, Vol 217, 2010, 3542–3556.

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana  
Lomas del Estadio s/n, Zona Universitaria,  
Xalapa, Veracruz, México.

evmunoz@uv.mx

carlos\_04antonio17@hotmail.com

joalvarez@uv.mx

## Capítulo 4

# Modelo matemático para una población de células cancerígenas

Reinaldo Martínez Cruz, Juan Carlos Monter Cortés,  
José Erasmo Pérez Vázquez  
Universidad Autónoma de Tlaxcala

### Resumen

En este trabajo los autores analizan el comportamiento caótico de un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias que se utiliza para modelizar las distintas subpoblaciones de una población de células cancerígenas, estructuradas en función de su nivel de resistencia a medicinas.

## 1 Introducción

En muchos modelos matemáticos sobre teoría de la población, como en biología y medicina, el proceso de la evolución del tiempo está descrito por un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias. Uno de tales ejemplos es el proceso de gen amplificación y deamplificación con células en proliferación. Este es un fenómeno bien documentado en Cáncer (véase [16], [23] y [24]). En estas citas se considera una población de células cancerígenas divididas en subpoblaciones, y caracterizadas por diferentes niveles de resistencia a medicinas. Debido a un evento mutacional, cada subpoblación constituida por estas células adquieren una copia del gen que hace a éstas resistentes al agente. Las células que pertenecen a la 0-subpoblación no poseen copias del gen y son sensitivas a las drogas. Las células de tipo  $n = 1, 2, 3, \dots$  pertenecen a la  $n$ -subpoblación y están caracterizadas a ser más resistentes conforme se incrementa el valor de  $n$ . Cada célula mutada puede transitar o retroceder según sobreviva o debilite ante la presencia de cierta dosis de medicina. Este proceso como se verá posteriormente, origina de manera natural un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs).

En este capítulo, realizamos una exposición detallada sobre el trabajo realizado en [4] y [5]. Debemos aclarar que lo único nuevo en este trabajo es la forma de organizar y presentar los principales resultados conocidos (o desconocidos) al respecto. Deseamos que este capítulo motive o estimule la curiosidad para buscar más

información acerca de este fenómeno. De cualquier forma difundir esta monografía, es una de las tareas principales que los autores se han propuesto para que el lector encuentre en estas líneas un espacio para que se adentre en su lectura. Para hacerlo, esta obra la hemos dividido en cuatro secciones como indicamos a continuación. En la segunda y tercer sección, damos algunos preliminares sobre teoría de Semigrupos y Caos que nos serán de utilidad en el desarrollo de este capítulo. En la cuarta sección presentamos un breve resumen del proceso gen amplificación-deamplificación con células en proliferación.

En la sección cinco nos centramos en reunir las hipótesis necesarias para aplicar el Teorema 3.3, y culminar con dos teoremas que nos permiten realizar conclusiones referentes al fenómeno gen amplificación-deamplificación.

En cada caso damos las definiciones necesarias. Explicamos brevemente, a nuestro entender, y damos referencias adecuadas para más información. Hemos cuidado escribir de tal modo que si no todos, muchos puedan entender lo que contiene este trabajo.

Finalmente, recordar algunas convenciones en la notación, no está de más. Como es usual,  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{N}$ , y  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  denotan el conjunto de los números reales positivos, enteros positivos y enteros no negativos respectivamente. Por otra parte,  $B(X, X)$ ,  $\mathcal{L}(X)$  y  $X^*$  representan la colección de las transformaciones lineales acotadas, el espacio de las transformaciones lineales y el espacio dual de  $X$ . De igual manera  $i\mathbb{R}^1$  y  $\langle x, y \rangle$  representan el conjunto de los números complejos sin el eje real y el producto interior de cierto espacio. Además, el símbolo  $\square$ , denota el fin de una demostración.

## 2 Teoría de Semigrupos

Para la lectura de esta sección, recomendamos al lector las Bibliografías [1], [7], [8], [11], [14], [18] y [20].

Como una motivación para el estudio de semigrupos de operadores, consideremos el siguiente Problema Abstracto de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t), \quad \text{para } t \geq 0 \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

donde  $x \in X$  es el valor inicial, y  $A$  es un operador lineal definido sobre un subespacio denso  $D(A) \subset X$ . Si el problema anterior tiene una solución única  $u(\cdot, x)$ , entonces  $T(t)x := u(t, x)$ , con  $t \geq 0$  y  $x \in X$  definen el  $C_0$ -semigrupo solución  $\{T(t) : t \geq 0\}$ . A la pareja  $(A, D(A))$  suele llamársele generador de la solución  $C_0$ -semigrupo o equivalentemente, el  $C_0$ -semigrupo tienen un generador infinitesimal,

denotado por  $A$ , el cual es un operador que puede ser acotado (*i.e.*, continuo) o puede no ser acotado (densamente definido y con gráfica cerrada).

**Definición 2.1.** Sea  $X$  un espacio de Banach complejo y separable de dimensión infinita. Una familia  $\mathcal{T} = \{T(t) : X \rightarrow X : t \geq 0\}$  es un semigrupo de operadores acotados si:

- (i)  $T(0) = I$  (operador identidad en  $X$ ),
- (ii)  $T(s+t) = T(s)T(t)$  para cada  $s, t \in \mathbb{R}_+$ . Además, si  $\{T(t) : t \geq 0\}$  satisface
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$ , entonces decimos que es un semigrupo uniformemente continuo.

Si en la definición 2.1, el inciso (iii) es sustituido por:  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$ , para cada  $x \in X$  con respecto a la norma en  $X$ , entonces obtenemos el concepto siguiente.

**Definición 2.2.** Un *semigrupo fuertemente continuo* en un espacio de Banach  $X$  es una familia  $\{T(t) : t \geq 0\}$ , de operadores lineales acotados  $T(t) : X \rightarrow X$  que satisfacen las siguientes propiedades:

- (1)  $T(0) = I$ ,
- (2)  $T(t+s) = T(t)T(s)$ , para cada  $t, s \geq 0$ ,
- (3)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$ , para cada  $x \in X$  con respecto a la norma en  $X$ .

Los dos primeros axiomas son algebraicos y, el estado  $T$ , es una representación del semigrupo  $(\mathbb{R}_+, +)$ , esto es, desde el punto de vista algebraico ésta posee una estructura de semigrupo y, especialmente en el caso lineal, es llamado un semigrupo de operadores; el último es topológico, y el estado  $T$  es continuo con la topología fuerte.

Nótese que, si en la Definición 2.1 inciso (ii), ponemos  $s = h$ , entonces

$$\frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \frac{T(t)T(h) - T(t)}{h} = \left(\frac{T(h) - I}{h}\right)T(t).$$

De aquí,  $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t)$ , que al evaluarlo en  $t = 0$ , nos queda  $\frac{dT(0)}{dt} = A$ . Esto motiva a dar la siguiente

**Definición 2.3.** El *generador infinitesimal*,  $A$ , de un semigrupo fuertemente continuo  $T$  es definido por:

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t) - I)x.$$

Una pregunta que emerge de manera natural es la siguiente: ¿En qué se diferencia los semigrupos fuertemente continuos y los uniformemente continuos? La respuesta a esta pregunta se encuentra en la naturaleza del generador infinitesimal  $A$ . Precisamente  $A$  es un generador de un semigrupo uniformemente continuo  $T(t)$

si y sólo si  $A$  es un operador acotado. Mas aún, la familia de los semigrupos uniformemente continuos están contenidos en la colección de los semigrupos fuertemente continuos.

**Teorema 2.4.** *Si  $A : X \rightarrow X$  un operador acotado, entonces*

$$\left\{ T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} : t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

*es un semigrupo uniformemente continuo.*

*Demostración.* Claramente  $T(0) = I$ . La propiedad (ii) de la definición 2.1, se sigue del hecho siguiente.

$$\begin{aligned} e^{(s+t)A} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (s+t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k t^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k s^k}{k!} \frac{A^{n-k} t^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k s^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A^{n-k} t^{n-k}}{(n-k)!} = e^{As} e^{At}. \end{aligned}$$

La propiedad (iii). Dado que,

$$\|T(t) - I\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} - 1,$$

se sigue que

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{t\|A\|} - 1 = 0.$$

Como  $A$  es acotado,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!}$  converge para cada  $t \geq 0$  al operador lineal acotado  $T(t)$ , y la prueba está completa.  $\square$

Si  $T$  es fuertemente continuo y falla de ser uniformemente continuo, entonces  $T$  tendrá un generador  $A$  no acotado. Esto da lugar al teorema siguiente.

**Teorema 2.5.** *Si  $A$  es un generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo  $T(t)$ , entonces  $D(A)$  es denso en  $X$  y  $A$  es un operador cerrado.*

### 3 Teoría del Caos

En las dos décadas recientes se observó que algunos procesos en fisiología y medicina pueden ser caracterizados por un comportamiento caótico. Sin embargo, como ya lo anunció D.A. Hill en [15]: por ahora *caos y teoría del caos* tiene su aparición en más

de 7000 libros científicos y matemáticos, diccionarios y artículos. Desgraciadamente el significado técnico es confuso y no hay un acuerdo en la definición. El lenguaje más popular de la definición de caos (para sistemas dinámicos en tiempo discreto) es dado por Devaney [11]. Antes de mencionar esta noción, daremos definiciones necesarias para comprender de la mejor manera lo definido por Devaney.

**Definición 3.1.** Un semigrupo fuertemente continuo  $\{T_t : t \geq 0\}$  es **topológicamente transitivo** en  $X$ , si para cualesquiera dos conjuntos abiertos, no vacíos  $U, V$  en  $X$ , existe  $t_0 \geq 0$  tal que  $(T_{t_0}U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Definición 3.2.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una función continua.

(a) Decimos que  $x \in X$  es un **punto periódico** de  $f$ , si existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) = x$ . Al menor de estos números le llamamos el período de  $x$ , y al conjunto de los puntos periódicos de  $f$ , lo definimos como:  $Per(f) = \{x \in X : x \text{ es un punto periódico de } f\}$ . Que el conjunto de puntos periódicos,  $Per(f)$ , sea denso en  $X$  significa que: para cada  $\epsilon > 0$  y cada  $x \in X$ , la bola abierta  $B_\epsilon(x) \cap Per(f) \neq \emptyset$ .

(b)  $f$  es **sensible a las condiciones iniciales** en  $X$  si existe  $\epsilon > 0$  tal que, para toda  $x \in X$  y toda  $\delta > 0$ , existen  $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap X$  y  $n > 0$  tales que  $|f^n(y) - f^n(x)| \geq \epsilon$ .

(c) [Caos de Devaney]  $f$  es **caótico** en  $X$  si posee las propiedades siguientes:

1. Es topológicamente transitivo.
2. El conjunto de puntos periódicos es denso en  $X$ .
3. Es sensible a las condiciones iniciales dependientes (SDIC).

En el artículo [6] demuestran que la condición SDIC es implicada por las otras dos. Por lo que, a pesar del sentido de intuición, la condición SDIC pudiera estar omitida en la definición de Caos de Devaney. Por otra parte, los resultados de Banks [6] muestran que caos es una propiedad topológica y no está relacionada directamente con las propiedades de espacio métrico. En los artículos [9] y [26], sugieren algunas modificaciones a la definición de Caos. Cranell en [9] considera un poco más el concepto intuitivo de mezcla como una alternativa transitiva. Touhey en [26] propone una definición de Caos, equivalente a la de Devaney: una función  $f : X \rightarrow X$  es caótica en  $X$  si cualquier número finito de subconjuntos abiertos no vacíos en  $X$  comparten infinitamente muchas órbitas periódicas. Recientemente fue observado (véase las referencias [10], [12], [13], [17] y [22]), que caos está relacionado con sistemas dinámicos lineales y no lineales (en tiempo discreto o continuo), el cual puede ocurrir siempre que estos sean de dimensión infinita. En [17], los semigrupos

caóticos son asociados con la idea de exactitud. En el presente trabajo consideramos los sistemas dinámicos lineales en tiempo continuo.

El siguiente teorema juega un papel importante en lo que sigue, ya que nos sirve de guía para lo que se realizará en la sección 4. El lector interesado puede consultarlo en [2, Teorema 3.1. p 677].

**Teorema 3.3.** *Sean  $X$  un espacio de Banach separable y  $A$  el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo  $\{T_t : t \geq 0\}$  en  $X$ . Supongamos que el espectro puntual  $\sigma_P(A)$  del operador  $A$ , es tal que existe un conjunto abierto no vacío  $U \subset \sigma_P(A)$  con  $U \cap i\mathbb{R}^1 \neq \emptyset$ . Además, si para cada  $\lambda \in U$  existe su correspondiente eigenvector no cero,  $x_\lambda$ , tal que, para cualquier  $0 \neq \Phi \in X^*$  la función  $\lambda \rightarrow F_\Phi(\lambda) = \langle \Phi, x_\lambda \rangle$  es analítica en  $U$  y no se hace cero en  $U$ , entonces,  $\{T_t : t \geq 0\}$  es topológicamente caótico.*

## 4 Población de células cancerígenas

En esta sección damos una breve explicación sobre el proceso gen amplificación-deamplificación con células en proliferación.

En las citas (véase las referencias [16] y [24]), consideran una población de células cancerígenas divididas en subpoblaciones de diferentes tipos, etiquetadas por los números  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  y caracterizadas por diferentes niveles de resistencia ante la presencia de agentes. Las células de tipo 0 pertenecen a la 0-subpoblación y son sensibles a medicinas sintéticas. Las células de tipo  $n = 1, 2, 3, \dots$  pertenecen a la  $n$ -subpoblación y están caracterizadas a ser más resistentes conforme se incrementa el valor de  $n$ . Debido a un evento mutacional, cada subpoblación constituida por estas células adquieren una copia del gen que hace a éstas resistentes al agente. Dado que el número de copias gen puede ser muy grande en células cancerígenas, es razonable pensar en un modelo con un número infinito de células divididas en subpoblaciones.

El proceso gen amplificación–deamplificación con células en proliferación está caracterizado por dos componentes: a) El conservativo y b) el proliferativo. El componente conservativo, describe la mutación celular, modelado como un proceso de nacimiento y muerte. El nombre de proceso de nacimiento y muerte viene de la Teoría de la población, donde  $n$  es interpretado como el tamaño de una población y los posibles eventos son muertes y nacimientos de individuos.

Si  $X(t)$  denota la población de células cancerígenas en un tiempo  $t \geq 0$ , entonces ésta obedece a un proceso de Poisson (vea [25]) con probabilidad,

$$P[X(t + \Delta t) - X(t) = 1] = \frac{(b_n \Delta t) e^{-b_n \Delta t}}{1!} = (b_n \Delta t) (1 - b_n \Delta t + \frac{1}{2} b_n^2 \Delta t^2 - \dots)$$

$$= b_n \Delta t + o(\Delta t),$$

donde  $o(\Delta t) = -b_n^2 \Delta t^2 + \frac{1}{2} b_n^3 \Delta t^3 - \dots$ , y  $b_n$  denota la razón de cambio de una célula mutada que avanza de la  $n$ -ésima subpoblación a la  $(n + 1)$ -subpoblación. En otras palabras, dicho modelo obedece a  $b_n \Delta t + o(\Delta t)$ , para  $n \geq 0$ .

Similarmente, si  $d_n$  representa la razón de cambio de una célula mutada que retrocede de la  $n$ -ésima subpoblación a la  $(n - 1)$ -subpoblación, entonces el modelo corresponde a  $d_n \Delta t + o(\Delta t)$ , para  $n \geq 1$ .

En el componente proliferativo, las células se multiplican, y por lo tanto el número de ellas se incrementa; denotemos por  $\lambda_n$  la razón de cambio de la multiplicación celular (el proceso de células en proliferación). El componente proliferativo del proceso está relacionado con el supuesto que la división celular se da cuando la célula madre muere.

Sea  $\mathbf{f}(t) = \{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  la función de distribución y, supongamos que esta representa el número de células en la  $n$ -ésima subpoblación en un tiempo  $t \geq 0$ . En esta situación las funciones  $f_n$  tienen sentido de que la probabilidad de la población sea de tamaño  $n$  en un tiempo  $t$ .

El proceso descrito anteriormente se ilustra de manera gráfica en la Figura 1.

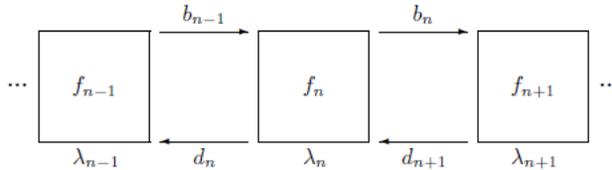


Figura 1: Gen amplificación-deamplificación con células en proliferación.

De aquí se origina el modelo siguiente.

$$\begin{aligned}
 (L\mathbf{f})_0 &= (\lambda_0 - b_0) f_0 + d_1 f_1, \\
 (L\mathbf{f})_1 &= (\lambda_1 - b_1 - d_1) f_1 + b_0 f_0 + d_2 f_2, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 (L\mathbf{f})_n &= (\lambda_n - b_n - d_n) f_n + b_{n-1} f_{n-1} + d_{n+1} f_{n+1} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



$$l^p = \left\{ \{f_n\}_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |f_n|^p < \infty \right\},$$

con  $1 \leq p < \infty$  y norma,

$$\|f\|_p = \left( \sum_{n=1}^\infty |f_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para cada } f \in l^p \tag{4}$$

y la colección  $c_0 = \{ \{f_n\}_{n=1}^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0 \}$  con norma  $\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n| : n \in \mathbb{N}\}$  son espacios de Banach, y serán considerados mas adelante.

En la cita [4], consideran la ecuación general (1) bajo los supuestos siguientes.

**S1)**  $d_0 = 0, d_n > 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $d \in (0, \infty)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$ , e

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n \frac{d_k}{d} > 0,$$

**S2)**  $b_n \geq 0$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

**S3)** Sea  $a_n = b_n + d_n - \lambda_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , existe  $a > 0$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,

**S4)**  $0 < a < d$ ,

**S5)** si  $q_0 \in (0, 1)$  es una constante crítica, entonces existe un  $q \in (0, q_0)$  tal que

$$|a_n - a| \leq dq^{n+1} \quad \text{y} \quad b_n d_{n+1} \leq d^2 q^{2n+4}, \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

Para  $p \in [1, \infty) \cup \{0\}$ , sea  $\mathcal{L}_p : l^p \rightarrow l^p$  el operador definido por

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{f}) = L(\mathbf{f}), \quad \text{para } \mathbf{f} \in l^p,$$

donde  $L$  es la matriz de coeficientes asociada al sistema (1).

En el artículo [4] se demuestra uno de los resultados principales presentados en este trabajo. Para dejar constancia de tal hecho, aquí lo haremos. Pero, antes mencionemos el siguiente comentario. Para relacionar la notación con lo escrito en el Teorema 3.3, pongamos  $X = l^p$ , con  $p \in [1, \infty)$  o  $X = c_0$ . Tenemos que,  $X$  es un espacio separable.

Para continuar con nuestra tarea, enfoquemos nuestra atención en el operador  $\mathcal{L}_1$ ; es decir,  $\mathcal{L}_1(\mathbf{f}) = L(\mathbf{f})$ , para  $\mathbf{f} \in l^1$ . La ecuación para sus eigenvectores toma la forma:

$$\begin{aligned} \lambda f_0 &= -a_0 f_0 + d_1 f_1 \quad \text{y} \\ \lambda f_n &= -a_n f_n + b_{n-1} f_{n-1} + d_{n+1} f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{5}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , sea  $\mu_n = \frac{\lambda + a_n}{d_{n+1}}$ . Notemos que si  $f_0 = 1$ , entonces por (5),  $f_1 = \mu_0$  y, para  $n > 1$ , obtenemos la relación de recurrencia

$$f_{n+1} = \mu_n f_n - \frac{b_{n-1}}{d_{n+1}} f_{n-1}. \quad (6)$$

Observemos que los  $f_n$  son polinomios en la variable  $\lambda$ . Hallar la forma general de estos es complicado, así que solo necesitamos de algunas estimaciones. Para ver esto nos apoyamos del siguiente lema, cuya demostración hace uso del principio de inducción matemática.

**Lema 5.1.** *Si existen constantes  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\beta > 0$  y  $\tilde{\mu} > 0$  tales que para cada  $n \geq n_0$ ,  $b_{n-1} \leq \beta d_{n+1}$  y  $|\mu_n| \leq \tilde{\mu}$ , entonces para toda  $n \geq n_0$ ,*

$$|f_n| \leq g_n, \quad (7)$$

donde

$$g_{n_0} = |f_{n_0}|, \quad g_{n_0+1} = |f_{n_0+1}| \quad (8)$$

y para  $n \geq n_0 + 2$ ,

$$g_n = \tilde{\mu} g_{n-1} + \beta g_{n-2}. \quad (9)$$

Notemos que  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  es una sucesión de Fibonacci. Si denotamos por  $w$  el operador que satisface  $w g_{n-1} = g_n$ , entonces por (9),  $(w^2 - \tilde{\mu} w - \beta) g_{n-2} = 0$ . Se sigue que la ecuación característica viene dada por  $\omega^2 - \tilde{\mu} \omega - \beta = 0$  cuyas raíces son

$$\omega_{\pm} = \frac{\tilde{\mu} \pm \sqrt{\tilde{\mu}^2 + 4\beta}}{2}. \quad (10)$$

Como  $g_n = w^n g_0$ , por el principio de superposición, se tiene que la solución general para la ecuación (9), es la combinación lineal

$$g_n = \varrho_+ \omega_+^n + \varrho_- \omega_-^n, \quad (11)$$

donde  $\varrho_+$  y  $\varrho_-$  son constantes. Para obtenerlos sustituycamos  $n = n_0, n_0 + 1$  en la expresión (8),  $|f_{n_0}| = \varrho_+ w_+^{n_0} + \varrho_- w_-^{n_0}$  y  $|f_{n_0+1}| = \varrho_+ w_+^{n_0+1} + \varrho_- w_-^{n_0+1}$ .

Despejando  $\varrho_+$  y  $\varrho_-$ , se obtiene que

$$\varrho_+ = \left( |f_{n_0}| - \frac{|f_{n_0}| \omega_+ - |f_{n_0+1}|}{\omega_+ - \omega_-} \right) \omega_+^{-n_0} \quad \text{y} \quad \varrho_- = \left( \frac{|f_{n_0}| \omega_+ - |f_{n_0+1}|}{\omega_+ - \omega_-} \right) \omega_-^{-n_0}.$$

Sustituyendo en (11), para toda  $n \geq n_0$

$$g_n = \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left( (\omega_+^{n-n_0} - \omega_-^{n-n_0}) |f_{n_0+1}| + (\omega_-^{n-n_0} \omega_+ - \omega_- \omega_+^{n-n_0}) |f_{n_0}| \right). \quad (12)$$

Si  $|\omega_{\pm}| \leq q < 1$ , entonces existe  $M \geq 0$  tal que

$$|f_n| \leq |g_n| \leq Mq^{n-n_0+1} \quad \text{para cada } n \geq n_0.$$

Se sigue que,  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} Mq^{n-n_0+1} < \infty$ . Luego,

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots) \in l^1.$$

Otro de los requisitos que se establece en el Teorema 3.3, es verificar la existencia de un conjunto abierto  $U \subset \sigma_P(\mathcal{L}_1)$  tal que  $U \cap i\mathbb{R}^1 \neq \emptyset$ .

**Lema 5.2.** *Supongamos que (S1)-(S4) se satisfacen, entonces existe  $r > 0$  tal que*

$$U = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\} \subset \sigma_P(\mathcal{L}_1). \quad (13)$$

*Demostración.* Como (S1)-(S3) se satisfacen, entonces  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \frac{\lambda + a}{d}$ . En otras palabras, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq n_0$ , se tiene que  $|\mu_n - \mu| < \varepsilon$ . Dado que  $|\mu_n| - |\mu| \leq |\mu_n - \mu|$ , se sigue que  $|\mu_n| \leq |\mu| + \varepsilon$  y

$$\frac{b_{n-1}}{d_{n+1}} \leq b' + \varepsilon, \quad \text{para cada } n \geq n_0,$$

donde  $b' = \frac{b}{d}$ . Por el Lema 5.1 y la ecuación (10), para un  $\varepsilon$  pequeño

$$\omega_{\pm}(\lambda) = \frac{|\lambda + a|}{2d} + \frac{\varepsilon}{2} \pm \left( \left( \frac{|\lambda + a|}{2d} + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 + b' + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Pongamos  $x = \frac{|\lambda + a|}{2d} + \frac{\varepsilon}{2}$ . Tenemos que  $x > 0$  y además obtenemos las funciones siguientes,

$$h_{\pm}(x) = x \pm (x^2 + b' + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Notemos que  $|h_{\pm}(0)| = \sqrt{b' + \varepsilon}$  y por el supuesto (S4),  $\varepsilon$  puede elegirse de tal manera que  $|h_{\pm}(0)| < 1$  si y solo si  $b < d - d\varepsilon$ .

Derivando la ecuación (15), obtenemos que  $h'_{\pm}(x) = 1 \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + b' + \varepsilon}}$ . Nótese que, para cada  $x > 0$ ,  $h'_{\pm}(x) > 0$ . En otras palabras, la función  $h_{\pm}$  es creciente en el intervalo  $(0, \infty)$ .

No es difícil de verificar las desigualdades siguientes

$$-1 < -\sqrt{b' + \varepsilon} \leq h_-(x) < 0. \quad (16)$$

Ahora si  $x_0 = \frac{1-b'-\varepsilon}{2}$ , entonces

$$h_+(x_0) = 1, \quad (17)$$

y por consiguiente, para cada  $0 < x < x_0$

$$\sqrt{b'} \leq h_+(x) < h_+(x_0) = 1. \quad (18)$$

Por **(S4)**,  $\varepsilon$  puede ser elegido lo suficientemente pequeño tal que

$$a + b < d - 2\varepsilon d. \quad (19)$$

Por la expresión (19), se sigue que

$$0 < \frac{a}{2d} + \frac{\varepsilon}{2} < x_0. \quad (20)$$

Sustituyendo  $x = \frac{a}{2d} + \frac{\varepsilon}{2}$  en (18), obtenemos que

$$|\omega_{\pm}(0)| = \left| h_+ \left( \frac{a}{2d} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right| < 1. \quad (21)$$

Como  $\omega_{\pm} : \mathbb{C} \rightarrow (-1, 1)$  son funciones continuas, existe  $0 < q < 1$  y una vecindad  $V_{\lambda}$  de  $\lambda = 0$  tal que  $\omega_{\pm}(V_{\lambda}) \subseteq (-q, q)$ . Es decir,  $|\omega_{\pm}(\lambda)| \leq q$ . Así, por las consideraciones que preceden al lema anterior el eigenvector  $\mathbf{f}$  pertenece a  $l^1$ .  $\square$

Denotemos por  $\mathbf{f}(\lambda)$  los eigenvectores correspondientes al eigenvalor  $\lambda$ ,

$$\mathbf{f}(\lambda) = (f_0(\lambda), f_1(\lambda), \dots).$$

Siguiendo el Teorema 3.3, tomemos una sucesión arbitraria  $\Phi = \{\Phi_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \in l^{\infty}$ , donde  $l^{\infty} = l^{1*}$  y consideremos la función

$$\lambda \rightarrow F_{\Phi}(\lambda) = \langle \Phi, \mathbf{f}(\lambda) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n f_n(\lambda), \quad (22)$$

donde la serie converge casi uniformemente al menos en el círculo  $|\lambda| < r$ , y  $r$  es definido como en el Lema 5.2.

Para utilizar propiedades de funciones analíticas, pongamos  $F_{\phi}$  como una serie de potencias en la variable  $\mu = \frac{\lambda + a}{d}$ . Ahora, por el Teorema de Weierstrass en

series dobles véase [19, p. 430], pongamos cada  $\Phi_i f_i$ , con  $i = 0, 1, \dots$  como una serie de potencias en la variable  $\mu$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \Phi_0 f_0(\mu) &= A_{0,0}\Phi_0 + A_{1,0}\Phi_0\mu + A_{2,0}\Phi_0\mu^2 + \dots + A_{n,0}\Phi_0\mu^n + \dots \\ \Phi_1 f_1(\mu) &= A_{0,1}\Phi_1 + A_{1,1}\Phi_1\mu + A_{2,1}\Phi_1\mu^2 + \dots + A_{n,1}\Phi_1\mu^n + \dots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Phi_k f_k(\mu) &= A_{0,k}\Phi_k + A_{1,k}\Phi_k\mu + A_{2,k}\Phi_k\mu^2 + \dots + A_{n,k}\Phi_k\mu^n + \dots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde los coeficientes de una columna forman una serie convergente. De aquí,

$$F_\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n f_n(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left( \sum_{k=n}^{\infty} A_{n,k} \Phi_k \right), \quad \mu = \frac{\lambda + a}{d}, \quad (23)$$

Por la ecuación (6), la matriz  $\{A_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2}$  está dada por la relación de recurrencia

$$A_{n,k} = \begin{cases} 0, & \text{para } k < n; \\ 1, & \text{para } k = n = 0; \\ \left( \prod_{j=1}^n d'_j \right)^{-1}, & \text{para } k = n \geq 1; \\ \frac{1}{d'_k} (A_{n-1,k} + \alpha_{k-1} A_{n,k-1} - b'_{k-2} A_{n,k-2}), & \text{para } k > n \end{cases}$$

donde  $A_{-1,k} = 0$  para cualquier  $k$ .

Para demostrar que, la última hipótesis del Teorema 3.3 se satisface, verifiquemos que, la única solución acotada del sistema lineal infinito triangular superior es cero. Esto es

$$\begin{aligned} \Phi_0 + A_{0,1}\Phi_1 + A_{0,2}\Phi_2 + \dots &= 0, \\ A_{1,1}\Phi_1 + A_{1,2}\Phi_2 + \dots &= 0, \\ A_{2,2}\Phi_2 + \dots &= 0. \\ \dots &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Pero, por el Teorema Weierstrass en series dobles véase [19, p. 430], la función  $F_\Phi$  es analítica y no se hace cero en el círculo  $|\lambda| < r$ , ya que  $f(\lambda) \neq 0$ .

Por otra parte, analizar los coeficientes de la matriz  $A_{n,k}$  es difícil en la mayoría de los casos debido a la aparición del factor  $\frac{1}{d^n}$ . Para subsanar esto, procedamos relacionar los  $A_{n,k}$  con coeficientes análogos del sistema para el caso  $d_n = 1$ . Para tal efecto introducimos un sistema auxiliar

$$\begin{aligned}\lambda f_0 &= -\alpha_0 f_0 + f_1 \\ \lambda f_n &= -\alpha_{n-1} f_n + \gamma_{n-1} f_{n-1} + f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}\tag{25}$$

donde  $\gamma_n = b'_n d'_{n+1} = \frac{b_n d_{n+1}}{d^2}$ , para  $n \in \mathbb{N}_0$ .

De la misma manera que antes encontramos que la serie de potencias (23) correspondiente al sistema (25), está dada por

$$\mathcal{F}_\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \left( \sum_{k=n}^{\infty} B_{n,k} \Phi_k \right),\tag{26}$$

donde la matriz  $\{B_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2}$  se obtiene por la relación de recurrencia

$$B_{n,k} = \begin{cases} 0, & \text{para } k < n, \\ 1, & \text{para } k = n, \\ B_{n-1,k-1} + \alpha_{k-1} B_{n,k-1} - \gamma_{k-2} B_{n,k-2}, & \text{para } k > n, \end{cases}$$

donde  $B_{-1,k} = 0$ , para cualquier  $k$ .

El lema siguiente muestra la relación existente entre los  $A_{n,k}$  y los  $B_{n,k}$

**Lema 5.3.**

$$A_{n,k} = \left( \prod_{j=1}^k d'_j \right)^{-1} B_{n,k}, \quad \text{con } n, k \in \mathbb{N}_0,\tag{27}$$

y  $\prod_{j=1}^0 = 1$ .

*Demostración.* Por cálculos directos comprobaremos la validez de (27) para todas las parejas  $(n, k)$  con  $k \leq 2$  y  $n$  arbitrario (note que debido a la forma de los  $B_{n,k}$  esto se reduce para un número finito de índices  $n : n \leq k$ ).

Supongamos que (27) es válida para todas las parejas  $(n, \hat{k})$ , donde  $\hat{k}$  es un número arbitrario que satisface  $\hat{k} < k$  y  $n \in \mathbb{N}_0$ . Sea  $k$  fijo y tomemos un  $n$  arbitrario (nuevamente hay solamente un rango finito de casos no triviales  $0 \leq n \leq k$ ).

Tenemos que para  $k > n$

$$\begin{aligned}
 A_{n,k} &= \frac{1}{d'_k} (A_{n-1,k-1} + \alpha_{k-1}A_{n,k-1} - b'_{k-2}A_{n,k-2}) \\
 &= \frac{1}{d'_k} \left( \frac{1}{\prod_{j=1}^{k-1} d'_j} B_{n-1,k-1} + \frac{\alpha_{k-1}}{\prod_{j=1}^{k-1} d'_j} B_{n,k-1} - \frac{b'_{k-2}}{\prod_{j=1}^{k-2} d'_j} B_{n,k-2} \right) \\
 &= \left( \prod_{j=1}^k d'_j \right)^{-1} (B_{n-1,k-1} + \alpha_{k-1}B_{n,k-1} - b'_{k-2}d'_{k-1}B_{n,k-2}) \\
 &= \left( \prod_{j=1}^k d'_j \right) B_{n,k},
 \end{aligned}$$

y la ecuación (27) se sigue directamente para  $n \geq k$ . De esta manera el lema es válido para todas las parejas  $(n, \hat{k})$  con  $\hat{k} < k$  arbitrario y  $n \in \mathbb{N}_0$ . Aplicando el principio de inducción matemática a la variable  $k$  demostramos que la ecuación (27), se satisface para toda  $(n, k) \in \mathbb{N}_0^2$ .  $\square$

Para estimar  $B_{n,k}$  tenemos el resultado siguiente

**Lema 5.4.** *Si*

$$|\alpha_n| \leq q^{n+1} \quad \text{y} \quad |\gamma_n| \leq q^{2n+4}, \quad \text{para algún } q \in (0, 1), \tag{28}$$

entonces

$$|B_{n,k}| \leq \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{k-n} \leq k} q^{j_1 + \dots + j_{k-n}}, \quad n < k, \quad (n, k) \in \mathbb{N}_0^2. \tag{29}$$

*Demostración.* Usamos la misma argumentación inductiva como en el Lema 5.3. Por cálculos directos establecemos la validez de (29) para valores iniciales  $n$  y  $k$ .

Supongamos que (29) es válida para  $n = 0$  y  $\hat{k} < k$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}
 |B_{0,k}| &= |\alpha_{k-1}B_{0,k-1} - \gamma_{k-2}B_{0,k-2}| \\
 &\leq q^k \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{k-1} \leq k-1} q^{j_1 + \dots + j_{k-1}} + q^{2k} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{k-2} \leq k-2} q^{j_1 + \dots + j_{k-2}}.
 \end{aligned}$$

La multiplicación en cada término incrementa la longitud de cada cadena de índices a  $k$ . Además, en el primer término el índice  $k$  aparece sólo una vez y en el segundo lo hace dos veces, de tal manera que las sucesiones de índices no puede ser repetida. Así,  $|B_{0,k}| \leq \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq k} q^{j_1 + \dots + j_k}$ .

De manera similar, para  $n > 0$

$$\begin{aligned}
 |B_{n,k}| &= |B_{n-1,k-1} + \alpha_{k-1}B_{n,k-1} - \gamma_{k-2}B_{n,k-2}| \\
 &\leq \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{k-n} \leq k-1} q^{j_1 + \dots + j_{k-n}} + q^k \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{k-n-1} \leq k-1} q^{j_1 + \dots + j_{k-n-1}} \\
 &+ q^{2k} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{k-n} \leq k} q^{j_1 + \dots + j_{k-n}} \\
 &\leq \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{k-n} \leq k} q^{j_1 + \dots + j_{k-n}}.
 \end{aligned}$$

□

Denotemos por  $\mathcal{B}_\infty$  el operador generado por la matriz  $\{B_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2}$  en el espacio  $l^\infty$ .

**Lema 5.5.** *Existe una constante crítica  $q_0 \in (0, 1)$  tal que si (S5) se satisface, entonces el operador  $\mathcal{B}_\infty$  es un isomorfismo en  $l^\infty$ .*

*Demostración.* Dividamos  $\mathcal{B}_\infty$  como sigue

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_\infty &= \mathcal{J} + \begin{bmatrix} 0 & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} & \dots \\ 0 & 0 & B_{1,2} & B_{1,3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & B_{2,3} & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{bmatrix} \\
 &= \mathcal{J} + \hat{\mathcal{B}}_\infty,
 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{J} : l^\infty \rightarrow l^\infty$  está definida por

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \quad \text{para toda } \mathbf{f} \in l^\infty. \quad (30)$$

Para cualquier  $\mathbf{f} = (f_1, f_2 \dots) \in l^\infty$ ,

$$\|\hat{\mathcal{B}}_\infty \mathbf{f}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} B_{n,k} f_k \right| \leq \|\mathbf{f}\|_\infty \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} |B_{n,k}|. \quad (31)$$

Por Lema 5.4, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \Theta_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |B_{n,k}| \\
 &\leq \sum_{1 \leq j_1 \leq n+1} q^{j_1} + \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n+2} q^{j_1 + j_2} + \dots + \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{k-n} \leq k} q^{j_1 + \dots + j_{k-n}} + \dots
 \end{aligned}$$

Cada potencia  $q^j$  con  $j > 2$  puede aparecer varias veces en la suma de arriba. Sin embargo, debido a que solamente existe un número finito de combinaciones posibles de sumandos que satisfacen  $j_1 + \dots + j_r = j$ , entonces la cantidad de veces que aparezca la potencia  $q^j$  no puede ser mayor a  $P(j)$ , donde  $P(j)$  es el número total de soluciones de la expresión  $j_1 + \dots + j_r = j$ . De esta manera podemos escribir

$$\Theta_n \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(j)q^j,$$

así el cálculo es independiente de  $n$ . Usando resultados de combinatoria (véase [27, p. 160]),

$$P(j) < \frac{\pi}{\sqrt{6(j-1)}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2j}{3}}\right), \quad \text{para } j > 2. \tag{32}$$

Como

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3j}}\right) = \exp(0) = 1 \quad \text{y} \quad \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6(j-1)}}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{12}}\right)^{\frac{1}{j}} < 1,$$

entonces  $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} (q^j P(j))^{\frac{1}{j}} \leq q < 1$ .

De esta manera el criterio de Cauchy proporciona la convergencia de cada  $\Theta_n$  con límite independiente de  $n$ .

Definamos  $\theta(q) = \sum_{j=1}^{\infty} P(j)q^j$ . Nótese que  $\theta : (0, 1) \rightarrow (-1, 1)$  es una función continua y satisface que  $\theta(0) = 0$ . Luego, existe  $q_0 \in (0, 1)$  tal que  $|\theta(q)| < 1$  para cada  $0 < q \leq q_0$ . Así, por (31),  $\|\hat{\mathcal{B}}_{\infty} f\|_{\infty} \leq \theta(q)\|f\|_{\infty} < \|f\|_{\infty}$ .

Dado que  $\hat{\mathcal{B}}_{\infty} \neq \mathcal{I}$ , donde  $\mathcal{I}$  es definido por (30), se sigue que,  $\|\hat{\mathcal{B}}_{\infty}\| < 1$ . Además,  $\mathcal{B}_{\infty} = \mathcal{I} + \hat{\mathcal{B}}_{\infty} = \mathcal{I} - (-\hat{\mathcal{B}}_{\infty})$ , así, por Series de Neumann véase [20],  $\mathcal{B}_{\infty}^{-1}$  existe y satisface que,  $(\mathcal{B}_{\infty})^{-1} = [\mathcal{I} - (-\hat{\mathcal{B}}_{\infty})]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathcal{B}_{\infty})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathcal{B}_{\infty})^n$ .

Resta verificar que  $\mathcal{B}_{\infty}$  es un operador inyectivo y sobreyectivo.

Veamos la inyectividad. Si  $\mathcal{B}_{\infty} f = \mathcal{B}_{\infty} g$ , entonces  $\mathcal{B}_{\infty}(f - g) = 0$ . Es decir,  $f - g = (\mathcal{B}_{\infty})^{-1}0 = 0$ .

Para ver la sobreyectividad, sea  $g \in l^{\infty}$  cualquiera. Pongamos  $f = (\mathcal{B}_{\infty})^{-1}g$ , se sigue que  $\mathcal{B}_{\infty} f = g$ . Con todo  $\mathcal{B}_{\infty}$  es un isomorfismo.  $\square$

El Lema 5.5, nos permitió establecer un isomorfismo y así poder heredar todas las propiedades del espacio  $l^{\infty}$ . De manera similar se realiza para los espacios duales.

El siguiente lema nos indica que para valores menores que 0.15, el operador  $\mathcal{B}_{\infty}$  no es un isomorfismo en  $l^{\infty}$ .

**Lema 5.6.** *La constante crítica dada en el Lema 5.5 puede ser elegida no más pequeño que 0.15.*

*Demostración.* Si  $\varrho = \exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\right)$ , entonces para  $j \geq 3$ , obtenemos que

$$P(j) < \frac{\pi}{\sqrt{6(j-1)}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2j}{3}}\right) \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \varrho^j,$$

donde usamos el hecho que la función  $u(x) = \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)$ , es decreciente para  $x > 3$  y satisface  $u(3) = 1$ . Por lo que

$$\theta(q) \leq q + 2q^2 + \frac{\pi}{\sqrt{12}} \sum_{j=3}^{\infty} P(j)q^j \leq q + 2q^2 + \frac{\pi}{\sqrt{12}} \sum_{j=3}^{\infty} (\varrho q)^j = q + 2q^2 + \frac{\pi}{\sqrt{12}} \frac{(\varrho q)^3}{1 - \varrho q}.$$

Si  $q \in [0, 0.1514\dots)$ , entonces  $\left|q + 2q^2 + \frac{\pi}{\sqrt{12}} \frac{(\varrho q)^3}{1 - \varrho q}\right| < 1$ . □

Los resultados numéricos se obtuvieron por medio de un programa realizado en Matlab el cual mostramos en la Figura 2. La primer columna trata sobre el número de iteraciones, la segunda el valor que toma la constante crítica y la tercera ver si se satisface la desigualdad al sustituir este valor.

21	0.147100	0.885281
22	0.147310	0.890425
23	0.147530	0.895850
24	0.147760	0.901561
25	0.148000	0.907566
26	0.148250	0.913869
27	0.148510	0.920477
28	0.148780	0.927398
29	0.149060	0.934637
30	0.149350	0.942204
31	0.149650	0.950105
32	0.149960	0.958349
33	0.150280	0.966946
34	0.150610	0.975905
35	0.150950	0.985235
36	0.151300	0.994948
37	0.151660	1.005053
38	0.152030	1.015563
39	0.152410	1.026490
40	0.152800	1.037847
41	0.153200	1.049647
42	0.153610	1.061904
43	0.154030	1.074634
44	0.154460	1.087851
45	0.154900	1.101574
46	0.155350	1.115818
47	0.155810	1.130604
48	0.156280	1.145950
49	0.156760	1.161876
50	0.157250	1.178405

Figura 2: Resultados numéricos.

Ahora, estamos en condiciones de enunciar el primer teorema principal de este trabajo.

**Teorema 5.7.** *Existe una constante crítica  $q_0 > \frac{15}{100}$  tal que si las sucesiones  $\{\lambda_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{d_n\}$  satisfacen los supuestos **(S1)**-**(S5)**, entonces los semigrupos  $\{T_t^{(p)} : t \geq 0\}$  que resuelven el sistema (1) en el espacio  $l^{(p)}$ , con  $p \in [1, \infty) \cup \{0\}$ , son topológicamente caóticos.*

*Demostración.* Por el Lema 5.2, tenemos que  $\sigma_P(\mathcal{L}_1)$  contiene un conjunto abierto con centro en  $\lambda = 0$ . En otras palabras,  $\sigma_P(\mathcal{L}_1)$  contiene subconjuntos abiertos  $V_+ \subset \mathbb{C}_+ = \{\lambda: \Re\lambda > 0\}$ ,  $V_- \subset \mathbb{C}_- = \{\lambda: \Re\lambda < 0\}$  y un intervalo abierto  $V_0$  del eje

imaginario. Por la ecuación (26),

$$\begin{aligned} F_{\Phi}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left( \sum_{k=n}^{\infty} A_{n,k} \Phi_k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Phi_k}{\prod_{j=1}^k d'_j} B_{n,k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \left( \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\Phi}_k B_{n,k} \right). \end{aligned}$$

Si  $F_{\Phi}(\lambda) = 0$  en uno de estos conjuntos  $V_{\pm}$  o  $V_0$ , entonces  $\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\Phi}_k B_{n,k} = 0$  o equivalentemente  $\mathcal{B}_{\infty} \tilde{\Phi} = 0$ . Pero, por el Lema 5.5,  $\mathcal{B}_{\infty}$  es un isomorfismo en  $l^{\infty}$ , así que, la única solución acotada es  $\tilde{\Phi} = 0$ . Por lo que, si existe una  $\Phi \neq 0$  acotada para el cual  $F_{\Phi}(\lambda) = 0$  en  $V_{\pm}$  y  $V_0$  respectivamente, entonces por **(S2)**,  $\tilde{\Phi} \neq 0$  sería una solución para  $\mathcal{B}_{\infty} \tilde{\Phi} = 0$  lo cual es imposible. Luego, por el Teorema 3.3, el semigrupo  $\{T_1(t) : t \geq 0\}$  es topológicamente caótico en  $l^1$ .

Similarmente, consideremos el mismo problema para los espacios  $c_0$  o  $l^p$  con  $1 < p < +\infty$ . En cada caso el operador  $\mathcal{L}_p$ ,  $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$  es acotado y así genera un semigrupo uniformemente continuo  $\{T_p(t) : t \geq 0\}$ . Además, los eigenvectores pertenecen al espacio  $(l^p)^* = l^q$ , con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y  $1 < p < +\infty$  o  $c_0^* = l^1$ .

Sea  $\mathcal{B}_q : l^q \rightarrow (l^p)^*$  el operador definido por:

$$\mathcal{B}_q(\Phi) = B_{n,k}(\Phi), \quad \text{para cada } \Phi \in l^q.$$

Si la única solución  $\Phi \in l^q$ , con  $1 \leq q \leq +\infty$  de la ecuación  $\mathcal{B}_q \Phi = 0$  es  $\Phi = 0$ , entonces el semigrupo  $\{T_p(t) : t \geq 0\}$  es topológicamente caótico en cada uno de estos espacios. Pero, cualquier elemento del espacio  $l^q$  es necesariamente acotado, de esta manera la afirmación se sigue de la solubilidad única de  $\mathcal{B}_{\infty} \Phi = 0$  en el espacio  $l^{\infty}$ .  $\square$

En [5], demuestran que  $q_0 > (\sqrt{3} - 1)/2$ . Esto es la constante crítica  $q_0$  es mayor que la dada en el teorema 5.7. El siguiente teorema enuncia este resultado e incluimos su demostración.

**Teorema 5.8.** *Existe una constante crítica  $q_0 > \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  tal que si las sucesiones  $\{\lambda_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{d_n\}$  satisfacen los supuestos **(S1)**-**(S5)**, entonces los semigrupos  $\{T_t^{(p)} : t \geq 0\}$  que resuelven el sistema (1) en el espacio  $X^{(p)}$ , con  $p \in [1, \infty) \cup \{0\}$ , son topológicamente caóticos.*

*Demostración.* Uno de los pasos importantes en la prueba del Teorema 5.7 fue la estimación de  $\Theta_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} S_{1,k}$ , donde

$$S_{j,k} = S_{j,k}(q) = \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k} q^{j_1 + j_2 + \dots + j_k}. \quad (33)$$

Pongamos  $j_k = j + l_k$ , entonces

$$\begin{aligned} S_{j,k} &= \sum_{j \leq j+l_1 \leq j+l_2 \leq \dots \leq j+l_k} q^{j+l_1+j+l_2+\dots+j+l_k} \\ &= \sum_{0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_k} q^{jk} q^{l_1+l_2+\dots+l_k} \\ &= q^{jk} \sum_{0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_k} q^{l_1+l_2+\dots+l_k}, \end{aligned}$$

de aquí,

$$S_{j,k} = q^{jk} S_{0,k}, \quad (34)$$

donde

$$S_{0,k} = \sum_{0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_k} q^{l_1+l_2+\dots+l_k}.$$

Por (33) y (34), para  $0 \leq q < 1$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} S_{0,k+1} &= \sum_{0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{k+1}} q^{j_1+j_2+\dots+j_{k+1}} = \sum_{j_1=0}^{\infty} q^{j_1} S_{j_1,k} \\ &= q^0 S_{0,k} + q^1 S_{1,k} + q^2 S_{2,k} + \dots + q^j S_{j,k} + \dots \\ &= S_{0,k} + q q^k S_{0,k} + q^2 q^{2k} S_{0,k} + \dots + q^j q^{jk} S_{0,k} \\ &= S_{0,k} (1 + q^{k+1} + q^{2k+2} + \dots + q^{jk+j} + \dots) \\ &= S_{0,k} (1 + q^{k+1} + q^{2(k+1)} + \dots + q^{j(k+1)} + \dots) \\ &= S_{0,k} (1 + (q^{k+1})^1 + (q^{k+1})^2 + \dots + (q^{k+1})^j + \dots) \\ &= \sum_{j_1=0}^{\infty} q^{j_1+j_1 k} S_{0,k} = S_{0,k} \frac{1}{1 - q^{k+1}} \end{aligned}$$

y

$$S_{0,1} = \frac{1}{1 - q}.$$



Figura 3: Intervalo generado por la constante  $(q_0 = \frac{15}{100})$ .

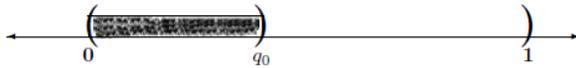


Figura 4: Intervalo generado por la constante  $(q_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2})$ .

Por lo que, para  $0 \leq q < 1$ , se tiene que  $S_{0,k} = \prod_{j=1}^k \frac{1}{1-q^j}$ ,  $k \geq 1$ , y por (34),  $S_{1,k} = q^k S_{0,k} = \prod_{j=1}^k \frac{q}{1-q^j}$ ,  $k \geq 1$ . Luego,  $S_{1,k} \leq \frac{q}{1-q} \frac{q^{k-1}}{(1-q^2)^{k-1}}$ , con  $k \geq 1$ , y la estimación es estricta para  $0 < q < 1$  y  $k > 2$ . Pongamos  $\Gamma(q) = \sum_{k=1}^{\infty} S_{1,k}(q)$ , entonces

$$\Theta_n \leq \Gamma(q) < \frac{q}{1-q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{(1-q^2)^k} = \frac{q(1+q)}{1-q-q^2}, \quad 0 < q < (\sqrt{5}-1)/2.$$

Se sigue que  $\Gamma((\sqrt{3}-1)/2) < 1$ , y así, por la continuidad de  $\Gamma$  existe  $q_0 > (\sqrt{3}-1)/2$  tal que  $\Theta_n < 1$ , para  $0 \leq q < q_0$ . El resto de la prueba se sigue del Teorema 5.7.  $\square$

Los Teoremas 5.7 y 5.8 aseguran la ocurrencia del caos topológico para una tasa de deamplificación grande ("muerte") y una tasa de amplificación pequeña ("nacimiento"). Es decir el proceso es subcrítico según experimentos realizados en [16] y [24]. Las constantes dadas en estos teoremas originan dos intervalos, en los cuales se asegura la ocurrencia del Caos. El intervalo generado por la constante del Teorema 5.7 es mas pequeño que del Teorema 5.8 (véase Figura 3 y Figura 4).

Hasta aquí, todos los resultados anteriores han sido probados usando teoría espectral el cual fue un requerimiento para tratar con el espacio de Banach complejo. Ahora veremos que, el comportamiento caótico en espacios complejos de Banach tiene su contraparte directa en sus partes reales. Comenzamos introduciendo una terminología.

Sea  $X$  un espacio de Banach complejo y  $Y$  un subespacio lineal real de  $X$  tal que existe una proyección lineal real continua  $\mathcal{R}, \mathcal{J} : X \rightarrow X$ , con  $\mathcal{R} + \mathcal{J} = id_X$ ,  $\mathcal{R}(X) = Y$ , e  $\mathcal{J}(X) = iY$ . Así,  $Y$  es un espacio de Banach (la parte real de  $X$ ) y

$X$  puede ser tratado como la complejización de  $Y$  (ver [21]). La proyección  $\mathcal{R}$  es llamado el operador parte real y los elementos de  $Y$  son llamados los vectores reales.

Un operador lineal  $A$  con dominio  $D(A) \subset X$  es llamado real si  $A(D(A) \cap Y) \subset Y$  y  $\mathcal{R}(D(A)) \subset D(A)$ . Así, si  $A$  es acotado, entonces  $A$  es real si y sólo si  $A\mathcal{R} = \mathcal{R}A$ . Si  $A$  es real, entonces  $A$  está determinado por su restricción  $A_{\mathcal{R}}$  al espacio  $Y$  (con dominio  $D(A) \cap Y$ ).

Supongamos que  $\{T_t : t \geq 0\}$  es un  $C_0$ -semigrupo en  $X$  y que  $A$  es su generador infinitesimal. Entonces  $A$  es real si y sólo si  $\{T_t : t \geq 0\}$  (esto es  $T_t$  para cada  $t \geq 0$ ) es real. Más aún, si  $\{T_t : t \geq 0\}$  es real, entonces  $\{(T_t)_{\mathcal{R}} : t \geq 0\}$  es un  $C_0$ -semigrupo en  $Y$  generado por  $A_{\mathcal{R}}$ . Estos hechos son fáciles de probar, cuando  $A$  es acotado. En el caso general, la aproximación de Yosida [8] puede ser usado.

Resulta que el caos complejo implica el caos real para semigrupos reales.

**Proposición 5.9.** *Si  $\{T_t : t \geq 0\}$  es un  $C_0$ -semigrupo topológicamente caótico real en  $X$ , entonces  $\{(T_t)_{\mathcal{R}} : t \geq 0\}$  es topológicamente caótico en  $Y$*

*Demostración.* Como  $\{T_t : t \geq 0\}$  es caótico, está tiene una trayectoria densa en  $X$  y el conjunto de puntos periódicos (valores iniciales que dan soluciones periódicas) es denso en  $X$ . Probaremos lo mismo para el subespacio  $Y$ . Tenemos que  $\mathcal{R}T_t = T_t\mathcal{R}$ , así la parte real de la trayectoria correspondiente a  $x \in X$  es la trayectoria real correspondiente a  $\mathcal{R}x \in X$ . Pero  $\mathcal{R}$  es continua y  $\mathcal{R}(X) = Y$ . Por lo que, la parte real de una trayectoria densa en  $X$  es una trayectoria real densa en  $Y$ , y el conjunto de partes reales de puntos periódicos en  $X$  es un conjunto denso que consiste de puntos periódicos reales en  $Y$ .  $\square$

Podemos aplicar el resultado anterior al espacio complejo  $X$  con  $\mathcal{R}x$  la parte real usual de la sucesión compleja  $x$  (entonces  $Y$  es el espacio real  $l^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $c_0$ ,  $p = 0$ ) y  $A = \mathcal{L}_p$ . Por supuesto  $A$ , es real ya que la matrix  $L$  tiene entradas reales.

Como ya lo mencionaron J. Banasiak, M Lachowicz y M. Moszynski, las propiedades caóticas que se discuten en este trabajo se refieren a la estructura de las soluciones de todo el espacio, mientras que en la mayoría de las aplicaciones solo las soluciones positivas tienen sentido. Por ejemplo, la trayectoria mencionada en la definición 3 del artículo [5] es densa en todo el espacio, es decir, pasa arbitrariamente cerca de todos los valores positivos, negativos e indeterminados, y como tal no tiene sentido físico (la función de distribución  $f(t)$  debe ser no negativa). Por lo que, el caos en el sentido de este documento, el cual es importante, por ejemplo, en el análisis de la estabilidad de los esquemas numéricos, dice nada importante sobre el comportamiento real de las trayectorias físicas. En cada uno de los espacios  $X^p$ ,  $p \in [1, \infty) \cup \{0\}$ , el cono positivo  $X^p_+$  tiene interior vacío, es decir, arbitrariamente

cerca de cualquier elemento positivo  $\mathbf{f}(t)$ , hay elementos no positivos. Por lo que, todos los valores iniciales cercanos a  $\mathbf{f}(t)$ , que causan el caos en el sentido de la definición de Devaney, pueden ser no positivos, y por lo tanto, en principio, todas las soluciones positivas podrían ser regulares. En la actualidad no sabemos hasta qué punto los resultados sobre el caos de todo el espacio  $X^p$  son heredados por su cono positivo.

## Conclusiones

Ahora, mencionamos lo que a nuestro juicio son las conclusiones de este trabajo.

Al analizar una población de células cancerígenas, se obtuvo un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual como vimos puede ser representado por una matriz tridiagonal multiplicada por un vector de funciones (función distribución). Dicha matriz genera un operador lineal, cuyo dominio y codominio son espacios de Banach. Ahora, si los operadores lineales son acotados, éstos generan semigrupos uniformemente continuos, el cual dan solución a dicho sistema.

En el desarrollo de esta interpretación, buscamos reunir las hipótesis del Teorema 3.3, para asegurar el fenómeno de caos topológico en el correspondiente espacio de Banach para una tasa de deamplificación grande ("muerte") y una tasa de amplificación pequeña ("nacimiento"). Es decir, el proceso es subcrítico en términos de las citas [16] y [24].

La principal aportación en este capítulo, se pueden resumir como sigue: Los resultados presentados en las citas [3], [4] y [5] están redactados de una manera compacta, esto trae como consecuencia que sea poco entendible para los lectores que se quieran adentrar en el tema. Subsanaamos esta problemática escribiendo de tal manera que la lectura este al alcance de cualquier persona interesada en la investigación de este trabajo.

Por supuesto, quedan algunas interrogantes:

**Pregunta 1:** ¿Podemos ampliar el intervalo en el que ocurre el fenómeno del caos, que los presentados en [3] y [5]?

**Pregunta 2:** ¿Será posible implementar un programa que nos ayude a comprender más a fondo la interacción de una población de células cancerígenas ante la presencia de medicamentos?

**Pregunta 3:** ¿Podemos implementar el estudio de los cuerpos geométricos que permanecen invariantes a transformaciones continuas al fenómeno de gen amplificación-deamplificación con células en proliferación?

## Agradecimientos

Los autores les damos las gracias al árbitro por la revisión exhaustiva y las sugerencias a nuestro trabajo. Finalmente, agradecemos al PRODEP por el apoyo económico brindado, sin este aliciente el trabajo no hubiese sido posible.

## Bibliografía

- [1] J. Aroza and A. Peris. *Chaotic behaviour of some birth-and-death models*, Journal of Difference Equations and Applications Vol. XX, No. XX (2011) 1-8.
- [2] J. Banasiak: *Birth-and-Death Type Systems with Parameter and Chaotic Dynamic of some Linear Kinetic Models*, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications Vol. 24, No. 4 (2005) 675-690.
- [3] J. Banasiak and M. Lachowicz. *Chaos for a class of linear kinetic models* , Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 2001; see also Internal Report 2/2001, School of mathematical and Statistical Sciences, University of Natal, South Africa.
- [4] J. Banasiak and M. Lachowicz. *Topological chaos for birth-and-death-type models with proliferation*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol. 12, No. 6 (2002) 755-775.
- [5] J. Banasiak, M. Lachowicz and M. Moszynski. *Topological Chaos: When Topology Meets Medicine* , Applied Mathematics Letters 16 (2003) 303-308.
- [6] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey. *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly, 99 (1992) 332-334.
- [7] F. Bayart and É. Matheron. *Dynamics of linear operators*, Cambridge University Press, Vol. 179 (2009).
- [8] L. Butzer Paul and Berens Hubert. *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag New York Inc. 1967.
- [9] A. Crannell. *The role of transitivity in Devaney definition of chaos*, Amer. Math. Monthly, 102 (1995) 788-793.
- [10] W. Desch, W. Schappacher and G.F. Webb. *Hypercyclic and chaotic semi-groups of linear operators*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 17 (1997) 793-819.

- [11] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edn., Addison-Wesley, New York, 1989.
- [12] R. M. Gethner and J. H. Shapiro. *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987) 281-288.
- [13] G. Godefroy and J. H. Shapiro. *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, Funct. Anal. Vol. 98, No. 2, (1991) 229-269.
- [14] K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris. *Linear Chaos*, Universitext, Springer, London, 2011.
- [15] D. A. Hill. *Chaotic chaos*, Math. Intelligencer, Vol. 22, No. 3, (2000) 5.
- [16] M. Kimmel, A. Swierniak and A. Polanski. *Infinite-dimensional model of evolution of drug resistance of cancer cells*, J. Math. Systems Estimation Control, Vol. 8, No. 1, (1998) 1-16.
- [17] C. Kitai. *Invariant closed sets for linear operators*, Thesis, Univ. of Toronto, 1982.
- [18] E. Klaus-Jochen and R. Nagel. *A short Course on Operator Semigrupos*, Springer.
- [19] K. Knopp. *Theory and Application of Infinite Series*, Dover, 1990.
- [20] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- [21] R. Nagel. *One-parameter semigroups of positive operators*, Springer Lect. Notes in Math. 1184, 1986.
- [22] V. Protopopescu and Y. Y. Asmy. *Topological chaos for a class of linear models*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol.2, No.1, (1992) 79-90.
- [23] J. Smieja and A. Swierniak. *Design of chemotherapy protocols-Optimal vs suboptimal periodical solutions*, Proceedings VI National Conference on Applications of Mathematics in Biology and Medicine, Zawoja, (2000) 138-143.
- [24] A. Swierniak, A. Polanski, M. Kimmel, A. Bobrowski and J. Smieja. *Qualitative analysis of controlled drug resistance model-inverse Laplace and semi-group approach*, Control Cybernetics, Vol. 28, No. 1, (1999) 61-73.
- [25] H. M. Taylor and S. Karlin. *An introduction to Stochastic Modelling*, Elsevier, 1984.

- [26] P. Touhey. *Yet another definition of chaos*, Amer. Math. Monthly, Vol. 104, No. 5, (1997) 411-414.
- [27] J. H. van Lint and R. M. Wilson. *A Course in Combinatorics*, Cambridge Univ. Press, 1992.

Facultad de Ciencias Básicas Ingeniería y Tecnología  
Avenida Apizaquito S/N ,  
Apizaco, Tlaxcala. C.P. 90300

reinaldo.martinez.c@uatx.mx  
juancarlos.nuno@upm.es  
joserasmogmail.com



---

# Probabilidad y estadística

---



## Capítulo 5

# Generación de curvas y superficies de volatilidad implícita con parámetros de volatilidad estocástica calibrados con funciones de pérdida y evolución diferencial

Ambrosio Ortiz Ramírez<sup>1</sup>, José Carlos Trejo García<sup>1</sup>,  
Benjamín Vallejo-Jiménez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional

<sup>2</sup>Facultad de Economía, Universidad de Colima

### Resumen

En este trabajo se propone una metodología para calibrar los parámetros del modelo de volatilidad estocástica de Heston con funciones de pérdida y dos métodos distintos: en el primero se determina el mínimo de una función no lineal de varias variables con restricciones, y el segundo con el algoritmo de evolución diferencial. Los dos métodos se aplican a un conjunto de volatilidades implícitas sobre FEMSAUBD con cuatro vencimientos y siete precios de ejercicio. El criterio para la elección de los parámetros es aquel que tenga el valor mínimo del error cuadrático medio de volatilidad implícita. En el caso de funciones de pérdida con el método usual se determinó que la función de pérdida relativa del error cuadrático medio es la que tiene el valor mínimo. En el caso de funciones de pérdida con evolución diferencial se elige a la función de pérdida del error cuadrático medio pero con un tiempo mayor en comparación con el de funciones de pérdida. Asimismo, los resultados indican que en ambos métodos el ajuste de las volatilidades implícitas es ligeramente mejor para opciones con vencimientos de largo plazo que para las de corto plazo y el valor de  $\rho$  resulta negativo, lo que significa que la pendiente de la curva de volatilidad implícita es negativa, lo cual es una consecuencia de que rendimientos negativos grandes son mucho más frecuentes que rendimientos positivos grandes.

## 1 Introducción

La historia de modelar la dinámica de los activos que se negocian en los mercados financieros mediante procesos estocásticos se remonta hacia el año de 1900 con las tesis de doctorado en matemáticas del Louis Bachelier [1]. En la tesis titulada Teoría de la especulación, los precios de las acciones se modelan como un movimiento

browniano con tendencia, aunque un modelo más apropiado se basa en el movimiento browniano geométrico. Bajo el supuesto de equilibrio general en [3] se obtiene una fórmula para valorar una opción europea sobre una subyacente sin pago de dividendos y cuyo precio es conducido por un movimiento browniano geométrico. En la actualidad este modelo se conoce como el modelo de Black-Scholes (BS), aún con sus limitaciones sigue siendo uno de los modelos de valoración de opciones con la mayor relevancia teórica y ampliamente utilizado en la investigación sobre derivados financieros. Es relevante señalar que en [19] se encuentran resultados análogos y varias extensiones interesantes como tasa de interés estocástica y pago de dividendos por mencionar algunas.

El principal inconveniente del modelo Black-Scholes es el supuesto de que la volatilidad de los rendimientos del activo subyacente es constante. Bajo este supuesto, cuando se calcula la volatilidad implícita a partir de información de mercado de precios de opciones y se grafica el precio de ejercicio de la opción y plazo al vencimiento, el resultado debería ser una superficie plana. Sin embargo, en la práctica, la superficie de volatilidad implícita no es plana y la volatilidad implícita tiende a variar con el precio de ejercicio y el plazo al vencimiento. Esta característica se conoce como sesgo de volatilidad.

En consecuencia, esto conduce al desarrollo de modelos con una característica particular que considera a la volatilidad dependiente del tiempo. Una extensión natural se plasma en los denominados modelos de volatilidad estocástica en los cuales la volatilidad es conducida por un proceso estocástico. Existen en la literatura diversos modelos al respecto. Los modelos más representativos se encuentran en [13], [11] y [22]. Para los dos últimos modelos hay fórmulas analíticas, mientras que para el primero es mediante una aproximación de la volatilidad por serie de Taylor hasta tercer momento. Ahora, es bien conocido que estos modelos son capaces de reproducir algunos hechos estilizados empíricos relativos a la valuación de opciones y la determinación de volatilidades implícitas. Por ejemplo, la determinación de precios de productos derivados sobre esos activos bajo esta condición es por lo tanto, un problema relevante. En particular, una manera de resolver tal problema son métodos de valuación con el supuesto de que la volatilidad es estocástica.

En que concierne a la estimación de parámetros de un modelo de volatilidad estocástica se encuentran los métodos estadísticos como pueden ser: máxima verosimilitud, método generalizado de momentos, así como los métodos basados en información de mercado, en los que se minimiza la distancia entre los precios o volatilidades de mercado dados por un modelo teórico y los precios o volatilidades dadas por el mercado, por ejemplo con funciones de pérdida como en [2]. En este sentido el avance en el área de ciencias de la computación ha permitido a varias ramas de la economía financiera beneficiarse de nuevas y poderosas herramientas. Es así como

la computación evolutiva ha desarrollado métodos de optimización basados en algoritmos evolutivos que representan una alternativa cuando los métodos tradicionales de optimización (ya sean determinísticos o estocásticos) presentan dificultad de encontrar una solución a un costo computacional razonable. Los algoritmos genéticos son algoritmos computacionales basados en la evolución darwiniana que hacen uso de operadores como cruza y mutación para dar diversidad genética a través de esos elementos aleatorios, a fin de “evolucionar” los candidatos o soluciones posibles del problema.

Este trabajo está organizado como sigue. En la siguiente subsección se presenta una breve revisión de los modelos de volatilidad estocástica. En la sección 2 se describe brevemente el modelo de Heston y la calibración de parámetros mediante tres funciones de pérdida, así como los pasos del algoritmo de evolución diferencial. En la sección 3 se calibran los parámetros del modelo de Heston con funciones de pérdida y dos métodos: el primero determina el mínimo de una función no lineal de varias variables con restricciones y el segundo con evolución diferencial, ambos métodos se aplican a un conjunto de volatilidades implícitas sobre la acción FEMSAUBD, asimismo se analizan y discuten los resultados obtenidos. Por último, se concluye en la sección 4.

## Modelos de volatilidad estocástica

La evidencia sobre las características empíricas de los rendimientos de las series de tiempo financieras señala que su media parece ser constante mientras su varianza cambia con el tiempo [7]. Además los rendimientos muestran conglomerados (clusters) de volatilidad, esto es, grandes cambios en los rendimientos son seguidos por otros grandes cambios, tal fenómeno fue estudiado por primera vez por Mandelbrot [17]. La determinación de precios de productos financieros derivados sobre esos activos bajo esta condición es por lo tanto, un problema relevante. En particular, una manera de resolver tal problema es mediante métodos de valuación con el supuesto de que la volatilidad es estocástica.

De acuerdo con [14] el precio de opción con un modelo de volatilidad estocástica debe satisfacer una ecuación diferencial parcial (EDP) de dos variables fundamentales: el precio del subyacente y su volatilidad. Dado que la volatilidad no es un activo que se negocie explícitamente, el riesgo por volatilidad no se puede eliminar por métodos de arbitraje. Por lo tanto, su precio de mercado entra explícitamente en la EDP. Usualmente la prima de riesgo asociada se supone que es cero o una proporción constante de la volatilidad. Las condiciones terminales y de frontera para el contrato de opción determinan la solución particular que es la prima de la opción. En el modelo de valuación de la opción, la volatilidad del subyacente se modela de forma explícita y sus parámetros se pueden estimar por métodos estadísticos. La

solución de la EDP de la que se obtiene el precio de la opción es un problema difícil, puesto que es deseable tener formulas cerradas, mientras que la solución analítica es un requisito previo para el trabajo empírico<sup>1</sup>.

Los primeros avances en esta área están representados en [27], [13], [23] y [11]. En [27] se propone un método por diferencias finitas con variables de estado logarítmicas transformadas para resolver la EDP. En [13] se emplea una técnica de aproximación en serie de potencias en base a la distribución del subyacente condicionada al valor medio de la varianza estocástica. En los enfoques de [23] y [11] se propone un enfoque analítico con métodos de inversión de la transformada de Fourier. De estos tres enfoques, la solución numérica de la EDP es la más general, pero también es la más intensiva en uso de recursos computacionales. La aproximación de [13] resulta ser la más manejable. Los enfoques en [13] y [23] dependen de la distribución de la varianza estocástico promedio y suponen una correlación instantánea entre las las variables de estado igual a cero, mientras que en [11] se muestra que el modelo en [23] es susceptible de análisis de Fourier incluso cuando la correlación es distinta de cero. En [22] se suponen dos movimientos brownianos correlacionados y obtienen la función característica del logaritmo del precio en un modelo compuesto por un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas. Por su parte, en [28] propone un modelo de volatilidad estocástica de doble raíz semejante al de Longstaff [16]. En [9] se propone un nuevo modelo de volatilidad aleatoria en el cual la volatilidad se modela mediante una estructura de plazos determinista modificada por una variable aleatoria escalada. Se obtiene una aproximación de forma cerrada para el precio de la opción europea utilizando las griegas de orden superior con respecto a la volatilidad.

## 2 Modelo de volatilidad estocástica de Heston

Una característica relevante del modelo de Heston es que se obtienen las funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo como soluciones de una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Enseguida, por medio de estas probabilidades neutrales al riesgo se determina una fórmula similar a la de BS para valuar una opción europea de compra sobre una acción con el supuesto de que la volatilidad del activo subyacente es estocástica, mientras que el precio de la opción

---

<sup>1</sup>Una gama de diversos modelos y su estimación se encuentran en la literatura. Por ejemplo, en [15] se propone un modelo de volatilidad estocástica con correlación, además de una potencia en el subyacente y su varianza, el precio de la opción se obtiene mediante simulación de Monte Carlo con parámetros estimados por el método de momentos. En [5] se desarrolla un modelo para valuar opciones sobre divisas, suponen reversión a la media con el logaritmo de la volatilidad estocástica y también estiman la volatilidad subyacente por el método de los momentos.

de venta se determina con la condición de paridad de opciones de venta y compra.

Otra ventaja que tiene el modelo de Heston es que presenta una fórmula analítica para el precio de una opción con el supuesto de correlación entre la volatilidad y el precio del activo subyacente. Esta fórmula tiene complicaciones ya que en esta se incluyen variables complejas en términos de integrales. De esta manera, el precio de la opción se obtiene al calcular la probabilidad de que una opción de compra venza dentro del dinero. Esta probabilidad se puede calcular por la inversión de la función característica del logaritmo del precio subyacente. En seguida se presenta el modelo de Heston y la fórmula para el precio de la opción.

El precio de un activo subyacente  $X_t$  es modelado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \alpha dt + \sqrt{v_t} dB_1^t,$$

donde  $\alpha$  es el rendimiento medio del subyacente (tendencia) y  $B_1^t$  es un proceso de Wiener. Es importante mencionar que la volatilidad  $\sqrt{v_t}$  no se modela directamente en el modelo de Heston, sino mediante la varianza  $v_t$ . De hecho la varianza es conducida por un proceso de Ornstein-Uhlenbeck para la volatilidad  $g_t = \sqrt{v_t}$  dada por:

$$dg_t = -\beta g_t dt + \delta dB_2^t,$$

donde  $B_2^t$  es un proceso de Wiener correlacionado con  $B_1^t$ , es decir,  $\text{Cov}(dB_1^t, dB_2^t) = \rho dt$ . Al aplicar el lema de Itô a  $v_t = g_t^2$  se obtiene la dinámica de la varianza<sup>2</sup>  $v_t$ , que en este caso es un proceso de reversión a la media similar al de [8]:

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t} dB_2^t, \tag{1}$$

donde  $\kappa = 2\beta$ ,  $\theta = \delta^2/2\beta$  y  $\sigma = 2\delta$ . Si  $\kappa, \theta$  y  $\sigma$  satisfacen las condiciones  $2\kappa\theta > \sigma^2$  y  $v_0 > 0$ , se puede demostrar que la varianza es siempre positiva puesto que la distribución de (1) es una ji-cuadrada no central. Los parámetros  $\kappa, \theta$  y  $\sigma$ , se interpretan como la tasa de reversión a la varianza de largo plazo, la varianza de largo plazo y la volatilidad de la varianza, respectivamente.

Respecto a la estimación de parámetros se encuentra que  $v_0$  es una variable de estado inicial, que no se puede observar y no es un parámetro como tal [2]. Puesto que la volatilidad es una variable no observable, sólo estimada, y porque  $v_0$  representa esta variable de estado al tiempo cero por lo que tal supuesto es realista. Sin embargo, para efectos de estimación se trata a  $v_0$  como un parámetro más a estimar.

---

<sup>2</sup>Véase el Apéndice 5.

Para obtener el precio de la opción de compra se trae a valor presente con la tasa libre de riesgo  $r$  la esperanza del valor intrínseco:

$$\begin{aligned} C_T(K) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}[(X_T - K, 0)] \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{X_T > K}] - e^{r\tau} K \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_T > K}] \\ &= e^{yt} \Pi_1(y, v, \tau) - e^{-r\tau} K \Pi_2(y, v, \tau) \end{aligned} \quad (2)$$

En la ecuación anterior  $\Pi_j(y, v, \tau)$  representa las probabilidades de que la opción de compra venza dentro del dinero ( $X_T > K$ ) condicional a que  $y_t = \ln S_t$  del subyacente y sobre la volatilidad  $v_t$  al tiempo  $t$ , donde  $\tau = T - t$  es el plazo al vencimiento de la opción, en consecuencia:

$$\Pi_j(y, v, \tau) = \Pr(\ln X_T > \ln K), \quad j = 1, 2.$$

Si se conocen las funciones características  $\varphi_1(\phi; y, v)$  y  $\varphi_2(\phi; y, v)$  correspondientes a  $\Pi_j$ , entonces se puede recuperar cada  $\Pi_j$  a partir de su función característica por el Teorema de inversión<sup>3</sup> (véase [26] para una revisión de los métodos de inversión):

$$\Pi_j = \Pr(\ln X_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} \varphi_j(\phi; y, v)}{i\phi} \right] d\phi \quad (3)$$

Al vencimiento cuando  $t = T$ , de modo que  $\tau = 0$ , las probabilidades están sujetas a la condición terminal  $\Pi_j(y, v, 0) = \mathbf{1}_{y > \ln K}$ , lo cual significa que al vencimiento, cuando  $X_T > K$  la probabilidad de que la opción de compra este dentro del dinero es la unidad. En suma, de acuerdo con [11] el precio de la opción de compra es:

$$C_T(K) = e^{yt} \Pi_1(y, v, \tau) - e^{-r\tau} K \Pi_2(y, v, \tau) \quad (4)$$

con  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  dadas por (3), y las funciones características son de la forma:

$$\varphi_j(\phi; y, v) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v + i\phi x) \quad (5)$$

---

<sup>3</sup>Una propiedad básica de la función característica es la relación uno a uno con la función de distribución. Cada variable aleatoria posee una función característica única y de hecho la función característica caracteriza la distribución de manera única. El Teorema de inversión es el teorema fundamental de la teoría de la función característica porque vincula la función característica con la función de distribución por medio de una transformada inversa de Fourier.

con:

$$\begin{aligned}
 C_j &= r\phi i\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2\ln \left[ \frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right] \right\}, \\
 D_j &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2} \left[ \frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right], \\
 g_j &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi i - d_j}, \\
 d_j &= \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}.
 \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores  $\tau = T - t$  es el plazo al vencimiento,  $i = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria,  $u_1 = 1/2$ ,  $u_2 = -1/2$ ,  $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$  y  $b_2 = \kappa + \lambda$ . El parámetro  $\lambda$  representa la prima al riesgo por volatilidad como función del precio del activo, el tiempo y la volatilidad<sup>4</sup>.

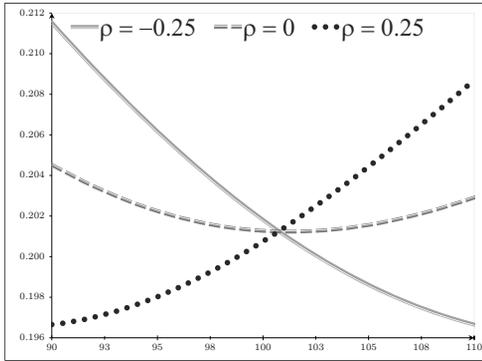
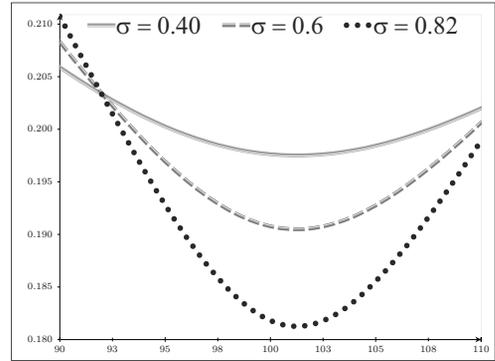
Es preciso destacar que para calcular el precio de la opción es necesario calcular las integrales para  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  en (3), lo cual involucra la aplicación de un método de integración numérica. Para obtener el precio de la opción de venta se recurre a la condición de paridad de opciones de venta y compra:

$$V_T(K) = C_T(K) + Ke^{-r\tau} - X_t. \tag{6}$$

Otra cualidad del modelo de Heston es que las volatilidades implícitas calculadas a partir de los precios de las opciones generadas por el modelo muestran una sonrisa o sesgo, la disposición del sesgo se debe a los valores de los parámetros. Las opciones sobre acciones suelen mostrar una pendiente negativa en sus volatilidades implícitas. Un hecho empírico interesante es que cuando se calibran los parámetros del modelo de Heston con información de esa clase, el valor del parámetro de correlación es negativo en la mayoría de los casos.

El parámetro de correlación  $\rho$  determina la dirección del sesgo, con  $\rho > 0$  corresponde a una pendiente positiva y con  $\rho < 0$  a una pendiente negativa. Este efecto se observa en la gráfica 1a al generar volatilidades implícitas con valores de  $S = 100$ ,  $r = 0.05$ ,  $\tau = T - t = 0.25$ ,  $\kappa = 2$ ,  $\theta = 0.01$ ,  $\lambda = 0$  y  $v_0 = 0.01$  con un rango de precios de ejercicio que varía desde 90 hasta 110. Si se aumentan los valores de la volatilidad de la varianza  $\sigma$  se aumenta la curvatura de la sonrisa. Esto se observa en la gráfica 1b generado con esos mismos valores pero con  $\rho = 0$ . Los parámetros  $\kappa$ ,  $\theta$  y  $v_0$  controlan el nivel de la sonrisa, como se ilustra en la gráfica 2. La velocidad de reversión a la media  $\kappa$  también controla la curvatura, hasta cierto punto,

<sup>4</sup>Un trabajo con el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales y que explica el origen de esa prima al riesgo es [18].

(a) Volatilidad implícita con distintos valores de  $\rho$ .(b) Volatilidad implícita con distintos valores de  $\sigma$ .

Gráfica 1: Efecto de los parámetros de Heston sobre la volatilidad implícita con distintos valores de  $\rho$  (1a) y  $\sigma$  (1b). Fuente: elaboración propia.

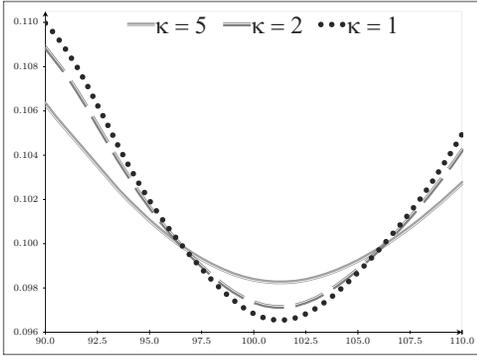
con valores grandes de  $\kappa$  se aplana la curva de volatilidad implícita (gráfica 2a). Al incrementar o disminuir los valores de  $\theta$  y  $v_0$  se observa un desplazamiento paralelo de la curvatura de la sonrisa (gráficas 2b y 2c). Para generar las gráficas anteriores se utiliza el algoritmo de bisección con el modelo de Black y Scholes para encontrar las volatilidades implícitas una vez que se calculan los precios con el modelo de Heston.

## Funciones de pérdida

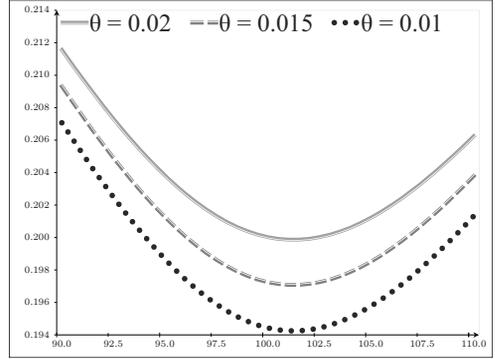
El método más usado para calibrar los parámetros del modelo de Heston es con funciones de pérdida. En este método se minimiza el error entre las cotizaciones de mercado y los precios del modelo, o entre volatilidades implícitas de mercado y las del modelo de Heston. El conjunto de parámetros estimados  $\Theta$  corresponde a aquellos valores que minimizan el valor de la función de pérdida, de tal manera que los precios del modelo o volatilidades implícitas son lo más cercanos posible a las cotizaciones del mercado. Se debe utilizar un algoritmo de minimización con restricciones, de modo que se satisfaga que:

$$\kappa > 0, \theta > 0, \sigma > 0, v_0 > 0, \rho \in [-0.9, 0.9].$$

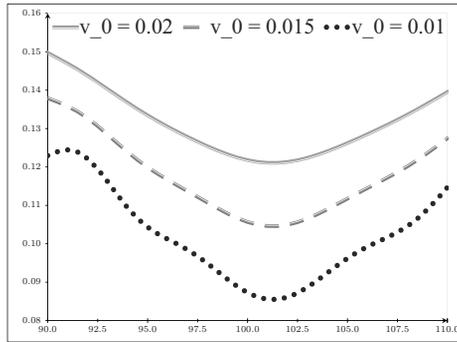
Dado que las funciones de pérdida utilizan precios de mercado de las opciones que se negocian en determinado tiempo como insumos (o la volatilidad implícita derivada de esos precios) dan como resultado los parámetros neutrales al riesgo del modelo de Heston.



(a) Volatilidad implícita con distintos valores de  $\kappa$ .



(b) Volatilidad implícita con distintos valores de  $\theta$ .



(c) Volatilidad implícita con distintos valores de  $v(0)$ .

Gráfica 2: Efecto de los parámetros de Heston sobre la volatilidad implícita con distintos valores de  $\kappa$  (2a),  $\theta$  (2b) y  $v_0$  (2c). Fuente: elaboración propia.

Suponga que se tiene un conjunto de vencimientos  $N_T$  con  $\tau_i (i = 1, \dots, N_T)$  y un conjunto  $N_K$  de precios de ejercicio  $K_k (k = 1, \dots, N_K)$ . Para cada combinación vencimiento-precio de ejercicio  $(\tau_t, K_k)$ , se tiene un precio de mercado  $P(\tau_t, K_k) = P_{tk}$  y un correspondiente precio generado por el modelo de Heston  $P(\tau_t, K_k; \Theta) = P_{tk}^\Theta$ . Se puede asociar a cada opción un peso  $e_{tk}$  opcional. Existen varias formas de definir una función de pérdida, que por lo general caen en alguna de las siguientes categorías: las basadas en *precios* y las basadas en *volatilidades implícitas*.

La primera categoría de funciones de pérdida son las que minimizan el error entre las cotizaciones de mercado y las de un modelo predeterminado. El error se define como la diferencia al cuadrado entre los precios de mercado y las del modelo, o el valor absoluto de la diferencia, también se pueden usar errores relativos. Por ejemplo, se pueden estimar los parámetros mediante la función de pérdida del error cuadrático medio (ECM) al minimizar:

$$L_1 = \frac{1}{N} \sum_{t,k} e_{tk} (P_{tk} - P_{tk}^\Theta)^2, \quad (7)$$

con respecto a  $\Theta$ , donde  $N$  es el número de cotizaciones. Otra función es la denominada función de pérdida relativa del error cuadrático medio (ECMR):

$$L_2 = \frac{1}{N} \sum_{t,k} e_{tk} \frac{(P_{tk} - P_{tk}^\Theta)^2}{P_{tk}}. \quad (8)$$

Otra manera de definir el error en términos del valor absoluto es  $|P_{tk} - P_{tk}^\Theta|$ , y establecer una función de pérdida como en (7) y (8).

Una desventaja de la función de pérdida  $L_1$  es que las opciones con vencimiento corto, muy fuera del dinero y con muy poco valor contribuyen poco a la suma de (7), por lo tanto, la optimización tenderá a ajustar a largo plazo a opciones dentro del dinero también afectando a otras opciones. Una forma de resolver este detalle es usar exclusivamente opciones dentro del dinero, de modo que en (7) se usan opciones de compra para precios de ejercicio que son menores que el precio del subyacente, y usar opciones de venta para precios de ejercicio mayores que el precio del subyacente. Otra solución es con la función de pérdida relativa del error cuadrático medio en (8). No obstante el problema con  $L_2$  es que ocurre el efecto opuesto. De hecho, debido a la presencia de  $P_{tk}$  en el denominador, opciones con bajo valor de mercado sobre-contribuyen a la suma de (8). Aunque la sobre y la sub contribución se puede mitigar mediante la asignación de pesos  $e_{tk}$  a los términos en la función objetivo resulta que la elección de los pesos suele ser subjetiva.

La segunda categoría de funciones de pérdida corresponde a la que minimiza el error entre las volatilidades implícitas de mercado y la de un modelo teórico. De

la misma manera el error se define como las diferencias al cuadrado, las diferencias absolutas o las diferencias relativas entre las volatilidades implícitas de mercado y las del modelo. Esta clase de función de pérdida es sensible, ya que en los mercados de derivados las opciones se cotizan en términos de volatilidad implícita; la precisión del ajuste del modelo se determina al comparar las volatilidades implícitas de mercado y las del modelo. Por ejemplo, la calibración de parámetros por medio de la función de pérdida del error cuadrático medio de volatilidad implícita es:

$$L_3 = \frac{1}{N} \sum_{t,k} e_{tk} (\hat{\sigma}_{tk} - \hat{\sigma}_{tk}^\Theta)^2, \quad (9)$$

donde  $\hat{\sigma}_{tk} = \hat{\sigma}(\tau_t, K_k)$  y  $\hat{\sigma}_{tk}^\Theta = \hat{\sigma}(\tau_t, K_k; \Theta)$  son respectivamente las volatilidades implícitas de mercado y del modelo teórico. También se pueden utilizar las versiones relativas y absolutas de  $L_3$ . La principal desventaja de la ecuación (9) es que requiere cálculos numéricos exhaustivos. De hecho, en cada iteración de la optimización primero se deben obtener todos los precios con el modelo de Heston  $P_{tk}^\Theta$  y luego aplicar un algoritmo de cálculo de raíz como el algoritmo de bisección para extraer la volatilidad implícita  $\hat{\sigma}_{tk}^\Theta$  de  $P_{tk}^\Theta$  para después poder calcular  $(\hat{\sigma}_{tk} - \hat{\sigma}_{tk}^\Theta)^2$ .

### **Evolución diferencial: un algoritmo de la computación evolutiva**

Cuando los métodos convencionales de optimización (i.e., programación lineal, programación cuadrática) son herramientas limitadas para buscar soluciones óptimas en un espacio inmenso, los algoritmos evolutivos ofrecen una buena opción. En los últimos años la mezcla de ciencias de la computación y biología ha traído un nuevo paradigma en la solución de problemas de alta complejidad, y la computación evolutiva es una rama de la primera que ofrece un conjunto novedoso de metodologías que son muy efectivas. En este sentido, la computación evolutiva ofrece un método más preciso para resolver problemas de optimización porque evita óptimos locales y evalúa múltiples soluciones al mismo tiempo utilizando conceptos de evolución genética como cruce o mutación en la que una población de soluciones cambia de acuerdo con ciertas combinaciones de posibles soluciones. Hay tres paradigmas principales que conforman la computación evolutiva: estrategias evolutivas, programación evolutiva y algoritmos genéticos. Aunque los algoritmos evolutivos son el método más común de cómputo evolutivo utilizado en finanzas, trabajan con una única función objetivo, lo cual es una limitación, por ejemplo en la optimización de portafolio y estrategias de negociación. La alternativa es el uso del algoritmos evolutivos multi-objetivo, que puede manejar simultáneamente un conjunto de soluciones [6]. Si el lector requiere una introducción sencilla a la computación evolutiva en el libro de Simon[21] se presenta diversos enfoques a la solución de problemas

de optimización. En particular, se discuten los denominados algoritmos evolutivos y sus aplicaciones en varias ramas de la ciencia.

Los algoritmos genéticos fueron diseñados por John Henry Holland [12] y “utilizan el proceso de selección natural para encontrar la solución óptima a través de una serie de poblaciones que combinan y mutan soluciones hasta alcanzar el óptimo. Diferentes problemas de optimización requieren diferentes métodos de mutación y combinación de soluciones” [4]. Los algoritmos genéticos también son conocidos como algoritmos evolutivos porque están inspirados en la teoría de la evolución de Charles Darwin, en general trabajan con operadores como la reproducción, el cruce y la mutación.

La evolución diferencial (ED) fue desarrollada por Rainer Storn y Kenneth V. Price alrededor de 1995. Como muchos nuevos algoritmos de optimización, la ED fue motivada por problemas del mundo real: la solución de los coeficientes en los polinomios de Chebyshev y la optimización de los coeficientes en filtros digitales. La primera publicación sobre ED fue en 1997 en el Journal of Global Optimization [20]. El algoritmo de ED se describe en cuatro etapas distintas, las cuales son: selección inicial de la población, mutación, recombinación y selección. Estas etapas son típicas en la mayoría de otros algoritmos evolutivos, sin embargo, la ED es única en la manera en que se mutan los conjuntos de parámetros.

Los pasos para aplicar el algoritmo de evolución diferencial en el caso del modelo de Heston son los siguientes:

- 1. Selección inicial de la población.** Formar una matriz de tamaño  $5 \times N_P$  de valores de parámetros elegidos aleatoriamente, donde  $N_P$  es el número de miembros de la población. La matriz debe construirse de manera que cada fila respete las restricciones de los parámetros. Se deben elegir límites inferiores y superiores de tal forma que los valores aleatorios para los parámetros sean razonables, por ejemplo,  $0 < \kappa < 10, \theta > 0, v_0 > 0, \sigma < 3$  y  $-1 < \rho < 1$ . Para que el paso 2 funcione, se deben tener  $N_P \geq 4$ . Esto implica que se tiene la población:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{N_P} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$(5 \times N_P)$

donde cada miembro de  $\mathbf{P}$  es un vector de parámetros a saber:

$$\mathbf{x}_i = (\kappa_i, \theta_i, \sigma_i, v_{0i}, \rho_i)^T.$$

- 2. Mutación de los miembros de la población.** Para cada miembro  $\mathbf{x}_i$  de la población ( $i = 1, \dots, N_P$ ), seleccionar aleatoriamente otros tres miembros  $\mathbf{x}_{r1}, \mathbf{x}_{r2}$  y  $\mathbf{x}_{r3}$  distintos entre sí y de  $\mathbf{x}_i$  también. Esto implica que se deben

seleccionar índices  $r_1, r_2$  y  $r_3$  tales que  $i \neq r_1 \neq r_2 \neq r_3$ . Para cada miembro, generar un miembro donante definido por:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_{r_1} + M (\mathbf{x}_{r_2} - \mathbf{x}_{r_3}), \tag{11}$$

donde  $M \in [0, 2]$  es un factor de mutación constante. Los elementos del miembro donador  $\mathbf{y}_i$  se usan para construir un miembro candidato que puede o no reemplazar a  $\mathbf{x}_i$ , basado en los resultados de los pasos 3 y 4.

- 3. Recombinación de los miembros donantes.** El miembro candidato  $\mathbf{u}_i$  se construye elemento por elemento a partir de los elementos  $y_{ij}$  del donante y los elementos del miembro  $x_{ij} (j = 1, \dots, 5)$ , de acuerdo con la siguiente regla. Para cada elemento  $j$ , se genera un número aleatorio de una v.a. uniforme  $U_{ij}$  y se genera el elemento candidato como:

$$u_{ij} = \begin{cases} y_{ij} & \text{si } U_{ij} \leq R_C, \text{ o } j = R \\ x_{ij} & \text{e.o.c.} \end{cases} \tag{12}$$

Donde  $R$  es un número entero del elegido al azar y  $R_C$  es una probabilidad denominada relación de cruce. El uso de  $R$  garantiza que el candidato no es el mismo que el miembro, esto es, garantiza que  $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{x}_i$ . Esto es porque, inclusive si todos los  $U_{ij}$  son muy pequeños para que la condición  $U_{ij} \leq R_C$  no sea satisfecha para cualquier  $j = 1, \dots, 5$ , la condición  $j = R$  será satisfecha una vez y el elemento correspondiente  $y_{ij}$  se convertirá en el elemento  $u_{ij}$  del candidato  $\mathbf{u}_i$ .

- 4. Selección del candidato.** El miembro  $\mathbf{x}_i$  y su candidato  $\mathbf{u}_i$  cada uno se introduce en la función objetivo  $f(\mathbf{x})$ . Si el valor del candidato es menor que el del miembro, el candidato reemplaza a  $\mathbf{x}_i$  como el  $i$ -ésimo miembro de la población  $\mathbf{P}$  en (10). Por lo que la regla es:

$$\mathbf{P} = \begin{cases} (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{u}_i \cdots \mathbf{x}_{N_P}) & \text{si } f(\mathbf{u}_i) < f(\mathbf{x}_i), \\ (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_i \cdots \mathbf{x}_{N_P}) & \text{e.o.c.} \end{cases} \tag{13}$$

Cuando todos los miembros han recibido el tratamiento, se actualiza la población y la generación siguiente empieza de nuevo en el paso 2. El algoritmo se ejecuta así sobre todas las  $N_G$  generaciones, de esta manera se elige el conjunto de parámetros como el miembro con el menor valor de  $f(\mathbf{x})$  de la población en la generación final.

### 3 Aplicación y análisis de resultados

En esta sección se considera un conjunto de precios de opciones sobre la acción FEMSAUBD. La información se obtuvo del Boletín del Resumen del mercado de opciones del día 13/04/2012 publicado por MexDer. Se consideran cuatro plazos: 45, 98, 261 y 348 días. Se obtuvieron del proveedor de precios la curva TIIE28-IRS para la tasa libre de riesgo, las volatilidades implícitas de las opciones negociadas en ese día. El siguiente cuadro muestra los datos relevantes para la calibración de los parámetros:

Cuadro 1: Datos relevantes.

Fecha Actual	Fecha de vencimiento	Plazo al vencimiento	Tasa libre de riesgo	Precio FEMSAUBD
13/04/2012	28/05/2012	0.1233	4.75	135.14
13/04/2012	20/07/2012	0.2685	4.75	135.14
13/04/2012	30/12/2012	0.7151	4.75	135.14
13/04/2012	27/03/2013	0.9534	4.75	135.14

El cuadro 2 muestra los plazos al vencimiento, precios de ejercicio ( $K$ ) y las volatilidades implícitas de las opciones de compra sobre FEMSAUBD.

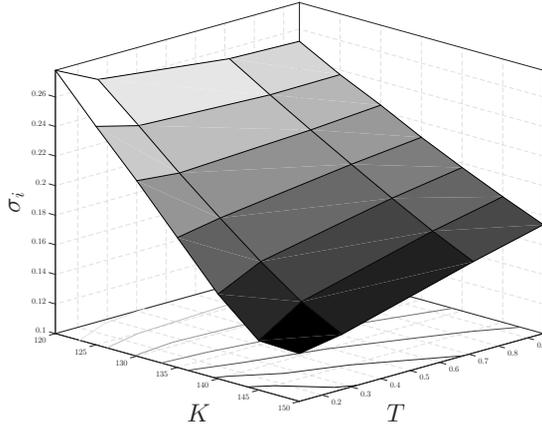
Cuadro 2: Volatilidades implícitas.

	Vencimiento			
$K$	45/365	98/365	261/365	348/365
120	0.2780	0.2638	0.2532	0.2518
125	0.2477	0.2402	0.2364	0.2369
130	0.2186	0.2158	0.2203	0.2239
135	0.1878	0.1930	0.2047	0.2098
140	0.1572	0.1712	0.1894	0.1970
145	0.1334	0.1517	0.1748	0.1849
150	0.1323	0.1373	0.1618	0.1736

Fuente: elaboración propia.

La gráfica 3 muestra la superficie de volatilidad implícita de mercado para la acción de FEMSAUBD que se elaboró a partir de la información del cuadro 2. Se

tienen siete precios de ejercicio y cuatro vencimientos, lo que resulta en un total de 28 volatilidades implícitas, se observa que conforme el precio de ejercicio se incrementa el valor de la volatilidad implícita va disminuyendo ligeramente. Asimismo si se compara el precio del subyacente y el precio de ejercicio resulta que cuatro cotizaciones son de opciones que están dentro del dinero ( $S_t > K$ ) y las tres restantes están fuera del dinero, esto resulta relevante cuando se estiman los parámetros con funciones de pérdida.



Gráfica 3: Superficie de volatilidad implícita de mercado. Fuente: elaboración propia

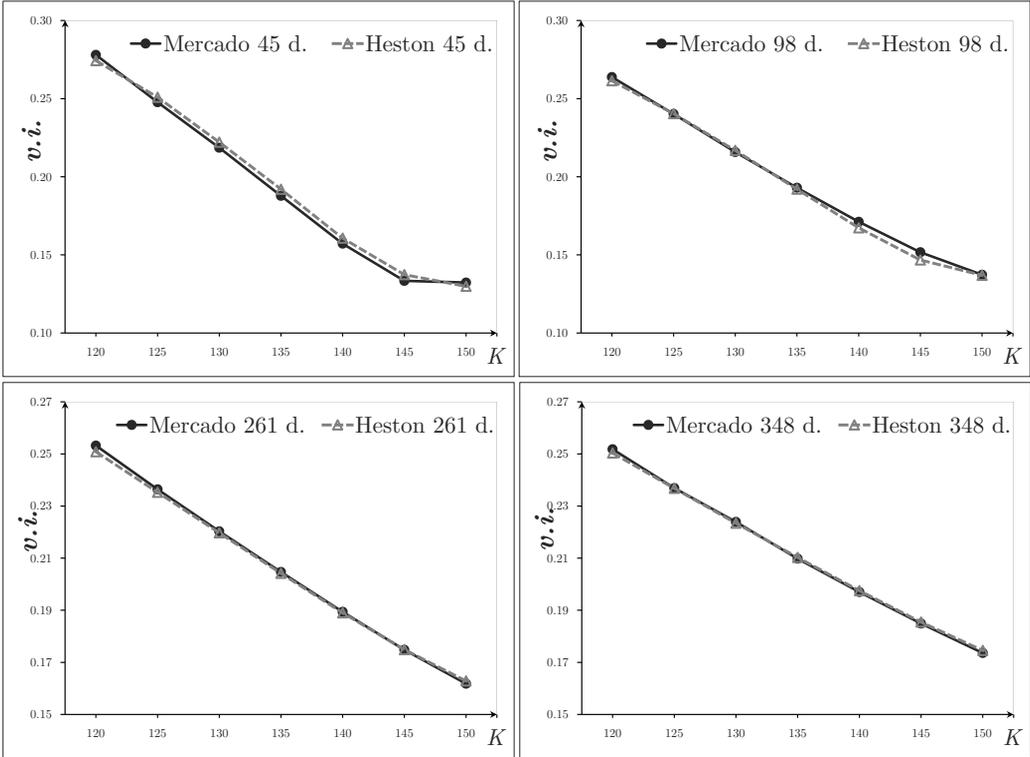
Cuadro 3: Parámetros calibrados con funciones de pérdida.

	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$v(0)$	$\rho$	ECM-VI	Tiempo	Función Ob.
$L_1$	1.4109	0.1025	0.9191	0.0344	-0.7720	5.85E-06	12.81	1.98E-03
$L_2$	1.6825	0.0940	0.9582	0.0343	-0.7691	5.30E-06	11.85	8.06E-04
$L_3$	1.9494	0.1037	1.0123	0.0318	-0.5564	3.49E-04	1.94	7.88E-06

Fuente: elaboración propia.

El cuadro 3 muestra los parámetros del modelo de Heston calibrados con funciones de pérdida: función de pérdida del error cuadrático medio, función de pérdida relativa del error cuadrático medio y la función de pérdida del error cuadrático medio de volatilidad implícita, el tiempo en segundos que tarda la calibración y el valor de cada función objetivo. Los valores iniciales de los parámetros para la calibración son:  $\kappa = 9, \theta = 0.05, \sigma = 0.3, v_0 = 0.05, \rho = -0.8$ . En este caso se determina el mínimo de una función no lineal de varias variables con

restricciones<sup>5</sup>, en la que la función objetivo es cada una de las funciones de pérdida. El conjunto de parámetros que se elige es aquel que tiene el menor valor del error cuadrático medio de volatilidad implícita que es la función  $L_2$ . En los tres casos se observa que el valor de  $\rho$  resulta negativo, lo que significa que la pendiente de la curva de volatilidad implícita es negativa lo cual se observa en la siguiente gráfica:



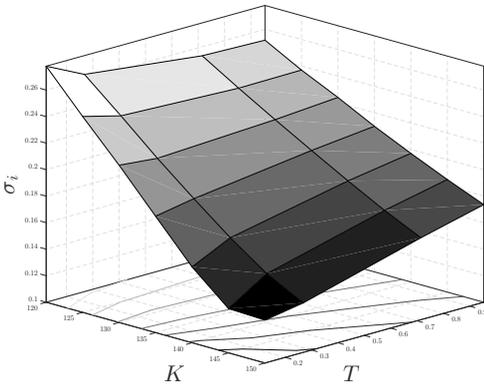
Gráfica 4: Volatilidades implícitas de mercado y de Heston estimadas con la función  $L_2$ . Fuente: elaboración propia.

Los resultados indican que el ajuste de las volatilidades implícitas es ligeramente mejor para opciones con vencimientos de largo plazo que para las de corto plazo. Asimismo el tiempo que tarda el ajuste es mucho menor en comparación con evolución diferencial como se observa en el cuadro 4.

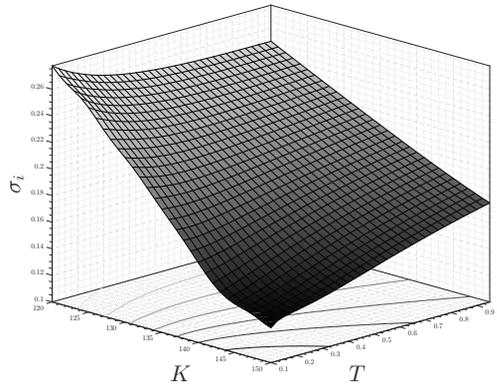
La gráfica 5 muestra la superficie de volatilidad implícita de mercado y la superficie de volatilidad implícita de mercado generada con los parámetros de  $L_2$ . En este caso se consideran 35 plazos al vencimiento que varían desde 36 hasta 342 días

<sup>5</sup>Se plantea y resuelve el problema de optimización no lineal con la función fmincon de Matlab.

y los precios de ejercicio son 35, los cuales varían de uno en uno desde  $K = 120$  hasta  $K = 150$ . La importancia de la superficie radica en lo siguiente, así como la curva de rendimiento en un día cualquiera es una descripción concisa de los precios de los bonos y del mercado de bonos, de la misma manera, para un subyacente particular en un momento dado, la superficie de volatilidad implícita proporciona un resumen del mercado de opciones al que pertenece. Mientras que los bonos se caracterizan por su vencimiento, las opciones se distinguen por su plazo al vencimiento y su precio de ejercicio, en consecuencia requieren de una superficie en lugar de una curva. Otra utilidad de la superficie es que factible valuar una opción exótica con la información que genera la superficie de volatilidad, en caso de que se tengan plazos al vencimiento y precios de ejercicio que no coincidan con los plazos de la superficie se ejecuta un procedimiento de interpolación bilineal.



(a) Superficie de volatilidad implícita de mercado.



(b) Superficie de volatilidad implícita de mercado generada con los parámetros de  $L_2$ .

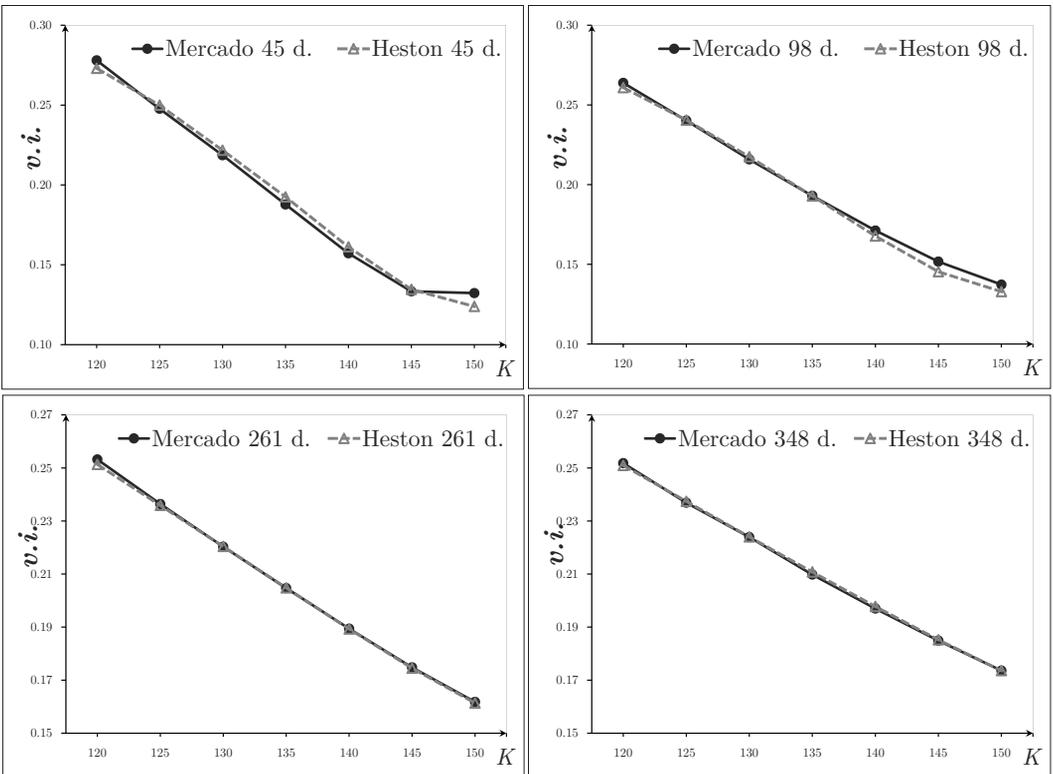
Gráfica 5: Superficie de volatilidad de mercado (5a) y la generada con los parámetros de la función  $L_2$  (5b). Fuente: elaboración propia

Cuadro 4: Parámetros calibrados con funciones de pérdida y evolución diferencial.

	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$v(0)$	$\rho$	ECM-VI	Tiempo
$L_1$	1.6432	0.0939	0.9056	0.0339	-0.8001	8.55E-06	315.20
$L_2$	3.4141	0.0881	2.0000	0.0389	-0.6798	8.78E-05	314.51
$L_3$	1.1933	0.1178	1.0763	0.0350	-0.6473	3.85E-05	2429.00

Fuente: elaboración propia.

El cuadro 4 muestra los parámetros del modelo de Heston calibrados con las tres funciones de pérdida anteriores pero con el algoritmo de evolución diferencial. De acuerdo con [25] se establece el número de miembros de población igual a 30 veces el número de parámetros tal que  $N_P = 150$ , la probabilidad de relación de cruce  $R_C = 0.5$ , el factor de mutación a  $M = 0.8$  y el número de generaciones  $N_G = 400$ . Los valores iniciales de los parámetros para la calibración son:  $\kappa = 9, \theta = 0.05, \sigma = 0.3, v_0 = 0.05, \rho = -0.8$ . El conjunto de parámetros que se elige es aquel que tiene el menor valor del error cuadrático medio de volatilidad implícita que es la función  $L_1$ . En los tres casos se observa que el valor de  $\rho$  resulta negativo, lo que significa que la pendiente de la curva de volatilidad implícita es negativa lo cual se observa en la siguiente gráfica:

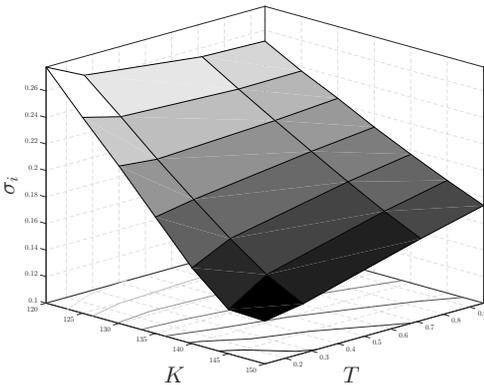


Gráfica 6: Volatilidades implícitas de mercado y de Heston estimadas con la función  $L_1$  por evolución diferencial. Fuente: elaboración propia.

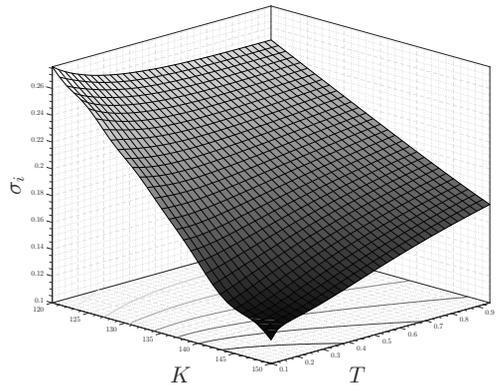
Los resultados indican que el ajuste de las volatilidades implícitas es ligeramente mejor para opciones con vencimientos de largo plazo que para las de corto plazo,

asimismo el tiempo que tarda el ajuste es mucho mayor en comparación con funciones de pérdida con la función  $f_{mincon}$  que determina el mínimo de una función no lineal de varias variables con restricciones.

Por último, La gráfica 7 muestra la superficie de volatilidad implícita de mercado y la superficie de volatilidad implícita de mercado generada con los parámetros de  $L_1$ . Como se observa las volatilidades implícitas para plazos cortos son sensibles al tipo de función, lo que hace que se muestre un cambio significativo en la pendiente de la curva.



(a) Superficie de volatilidad implícita de mercado.



(b) Superficie de volatilidad implícita de mercado generada con los parámetros de  $L_1$  por evolución diferencial.

Gráfica 7: Superficie de volatilidad de mercado (7a) y la generada con los parámetros de la función  $L_1$  (7b). Fuente: elaboración propia

## 4 Conclusiones

En los últimos años ha surgido una clase de algoritmos como un método más robusto y confiable para resolver problemas de optimización global. Estos algoritmos implican trabajar con un conjunto de soluciones en lugar de solo una y se conocen como algoritmos evolutivos. El algoritmo de evolución diferencial pertenece a esta clase de algoritmos y se puede adaptar a la solución de problemas de optimización que se encuentran en la calibración de modelos financieros que involucran varias variables, como modelos de volatilidad estocástica o modelos de tasas de interés de varios factores. Una característica relevante del algoritmo de evolución diferencial es que no requiere parámetros iniciales ya que genera muchos ensayos de una población de manera paralela. De esta forma, la evolución diferencial ejecuta un

muestreo sobre todo el espacio de parámetros, y si se ejecuta lo suficiente prácticamente garantiza la convergencia a un mínimo global. Sin embargo, la desventaja es que requiere de un número considerable de repeticiones que implican un alto costo en tiempo y de recursos computacionales.

Un método para calibrar los parámetros de un modelo de volatilidad estocástica es con funciones de pérdida. En este método se minimiza el error entre las cotizaciones de mercado y los precios del modelo, o entre volatilidades implícitas de mercado y las del modelo teórico. En este marco el modelo de Heston genera sonrisas de volatilidad consistentes con el mercado para vencimientos relativamente lejanos (seis meses y más). Sin embargo para vencimientos cortos presenta problemas ya que no genera sonrisas de volatilidad eficientes, esto debido a que los métodos clásicos de minimización requieren un conjunto inicial de parámetros para que se obtenga un mínimo global.

Se examinó el efecto que tiene la variación de los parámetros del modelo de Heston en la curva de volatilidad implícita. Se observó que el parámetro de correlación  $\rho$  determina la dirección del sesgo, con  $\rho > 0$  corresponde a una pendiente positiva y con  $\rho < 0$  a una pendiente negativa, mientras que la volatilidad de la varianza  $\sigma$  determina la curvatura de la sonrisa. Los parámetros  $\kappa, \theta$  y  $v_0$  controlan el nivel de la sonrisa.

En esta investigación se calibraron los parámetros del modelo de volatilidad estocástica de Heston con funciones de pérdida y dos métodos distintos: en el primero se determina el mínimo de una función no lineal de varias variables con restricciones, y el segundo con el algoritmo de evolución diferencial. Los dos métodos se aplican a un conjunto de volatilidades implícitas sobre FEMSAUBD con cuatro vencimientos y siete precios de ejercicio. El criterio para la elección de los parámetros es aquel que tenga el valor mínimo del error cuadrático medio de volatilidad implícita. En el caso de funciones de pérdida con el método usual se determinó que la función de pérdida relativa del error cuadrático medio es la que tiene el valor mínimo. En el caso de funciones de pérdida con evolución diferencial se elige a la función de pérdida del error cuadrático medio pero con un tiempo mucho mayor en comparación con el de funciones de pérdida. Asimismo, los resultados indican que en ambos métodos el ajuste de las volatilidades implícitas es ligeramente mejor para opciones con vencimientos de largo plazo que para las de corto plazo y el valor de  $\rho$  resulta negativo, lo que significa que la pendiente de la curva de volatilidad implícita es negativa.

Por último, es pertinente señalar que el precio de un derivado por lo general se basa en un modelo teórico que describe la evolución de un proceso subyacente en particular. El proceso de determinar los mejores parámetros del modelo se ejecuta mediante un procedimiento de calibración. Sólo un modelo calibrado con éxito

permitirá el cálculo de precios justos que sean consistentes con los que se negocian en el mercado. Por lo tanto, un proceso de calibración del modelo en el que los parámetros se calibren con la frecuencia necesaria y suficiente es la base de cualquier valuación precisa.

## 5 Apéndice: Dinámica de la varianza

El modelo de Heston se plantea en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{X_t} &= \mu dt + \sqrt{v_t} dB_t^1 \\ d\sqrt{v_t} &= -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dB_t^2 \end{aligned}$$

con  $\text{Cov}(dB_t^1, dB_t^2) = \rho dt$ . Si se realiza un cambio de variable y se suprimen los subíndices entonces  $x = \sqrt{v}$ , la función que se tiene ahora es  $g(t, x) = x^2$ , por lo que al aplicar el lema de Itô:

$$dg(t, x) = g_t dt + g_x dx + \frac{1}{2} g_{xx} (dx)^2.$$

Al sustituir las derivadas parciales indicadas resulta en:

$$dg(t, x) = 0dt + 2x dx + \frac{1}{2} (2) (dx)^2,$$

el último término se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned} (dx)^2 &= (-\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dB_t^2)^2 \\ &= \delta^2 dt. \end{aligned}$$

Por lo cual:

$$dg(t, x) = 2\sqrt{v_t}d\sqrt{v_t} + \delta^2 dt. \tag{14}$$

Al sustituir la expresión para  $d\sqrt{v_t}$  y simplificar términos resulta en:

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dB_t^2, \tag{15}$$

con:  $k = 2\beta, \theta = \frac{\delta^2}{2\beta}, \sigma = 2\delta$ , que es la ecuación (1).

## Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación: “*Calibración de parámetros de volatilidad estocástica con evolución diferencial*” clave SIP-20161048 de la Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional. De la misma manera, los autores agradecemos al dictaminador sus valiosas observaciones y recomendaciones.

## Bibliografía

- [1] Bachelier, L. (1900). *Théorie de la Speculation*, Thèse de Docteur ès Sciences Mathématiques. Université Paris Sorbonne. Gauthier-Villars, Paris.
- [2] Bakshi, G., C. Cao, y Z. Chen, *Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models*, *Journal of Finance*. **52**(5) (1997), 2003–2049.
- [3] Black, F. y M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, *The Journal of Political Economy*. **81**(3) (1973), 637–654.
- [4] Bradshaw, N.-A., Walshaw, C., Ierotheou, C. Parrott, A. K. (2009). *A multi-objective evolutionary algorithm for portfolio optimisation*. En: *Proceedings from Artificial Intelligence and Simulation of Behaviour Symposium 2009 on Evolutionary Systems*. The Society for the Study of Artificial Intelligence and Simulation of Behaviour, London, UK, pp. 27-32. ISBN 1902956761
- [5] Chesney, M. y L. Scott, *Pricing European Currency Options: A Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **24**(3) (1989), 267–284.
- [6] Coello, C. A., López, A. J. y Ponsich, A. *A Survey on Multiobjective Evolutionary Algorithms for the Solution of the Portfolio Optimization Problem and Other Finance and Economics Applications*, *IEEE Transactions on evolutionary computation*, **17**(3) (2013), 321–344.
- [7] Cont, R., *Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues*, *Quantitative Finance*, **1**(2) (2001), 223–236.
- [8] Cox, J. C., Ingersoll, J. E. y Ross S. A. *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, *Econometrica*, **53**(2) (1985), 385–407.
- [9] Date, P. y S., Islyayev, *A fast calibrating volatility model for option pricing*, *European Journal of Operational Research*, **243**(2) (2015), 599–606

- [10] Gilli, M. y E. Schumann (2011). *Calibrating Option Pricing Models with Heuristics*. In Brabazon, A., O'Neill, M., y D. Maringer, editores. *Natural Computing in Computational Finance*, Volumen 4. Berlin: Springer-Verlag.
- [11] Heston, S. L. *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options*, *Review of Financial Studies*, **6**(2) (1993), 327–343.
- [12] Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Michigan: University of Michigan Press.
- [13] Hull, J. y White, A. *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, *Journal of Finance*, **42**(2) (1987), 281–300.
- [14] Garman, M. *A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes*, Working Paper, Univ. of California, Berkeley (1976).
- [15] Johnson, H. y D. Shanno, *Option Pricing when the Variance is Changing*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **22**(2), 143–151.
- [16] Longstaff, F. *A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates*, *Journal of Financial Economics*, **23**(2) (1989), 195–224.
- [17] Mandelbrot, B. *The variation of certain speculative prices*, *The Journal of Business*, **36**(4) (1963), 394–419.
- [18] Martínez Palacios, María Teresa V., Olivares Aguayo, Héctor A., Ortiz-Ramírez A., *Modelo de Heston con ecuaciones diferenciales parciales y calibración de funciones de pérdida cuadráticas: una aplicación a opciones sobre futuros del IPC*, en *Matemáticas y sus Aplicaciones 5*, Capítulo 2, pp. 45-74, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, México 2015. ISBN: 978-607-487-934-6.
- [19] Merton, R. C. *Theory of Rational Option Pricing*, *Bell Journal of Economics*, **4**(1) (1973), 141–183.
- [20] Storn, R. y K. Price. *Differential Evolution-A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization Over Continuous Spaces*, *Journal of Global Optimization*, **11**(4) (1997), 341–359.
- [21] Simon, D. *Evolutionary Optimization Algorithms: Biologically-Inspired and Population-Based Approaches to Computer Intelligence*, John Wiley & Sons, 2013.

- [22] Schöbel, R. y Zhu J.W. *Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: an extension*, European Finance Review, **3**(1) (1999), 23–46.
- [23] Stein, E. M., y Stein, J. C. *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*, Review of Financial Studies, **4**(4) (1991), 727–752.
- [24] Venegas-Martínez, F., Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. Segunda edición, Cengage, México (2008).
- [25] Vollrath, I. y J. Wendland. Calibration of Interest Rate and Option Models Using Differential Evolution. Working Paper, FINCAD Corporation. (2009). Disponible en: SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1367502> o <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1367502>
- [26] Waller, L. A., Turnbull, B. W. y Hardin, J. M. *Obtaining Distribution Functions by Numerical Inversion of Characteristic Functions with Applications*, The American Statistician, **49**(4) (1995), 346–350.
- [27] Wiggins, J. B. *Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates*, Journal of Financial Economics, **19**(2) (1987), 351–372.
- [28] Zhu, J. *Applications of Fourier Transform to Smile Modeling: Theory and Implementation*, Springer Finance Series, 2nd. Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2010).

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional  
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Delegación Miguel Hidalgo  
Ciudad de México, C.P. 11340

amortiz@ipn.mx

jtrejog@ipn.mx

Universidad de Colima, Facultad de Economía  
Josefa Ortiz de Domínguez no. 64, Col. La Haciendita, Villa de Álvarez  
Colima, México, C.P. 28970

benjamin@uacol.mx, matematicastotales@gmail.com

## Capítulo 6

# Valuación de opciones europeas bajo el modelo de Cox, Ross y Rubinstein y convergencia al modelo de Black-Scholes

Carlos Palomino Jiménez<sup>1</sup>, Daniel Soriano Grande<sup>1</sup>,  
Francisco Solano Tajonar Sanabria<sup>2</sup>

<sup>1</sup>FCC-BUAP, <sup>2</sup>FCFM-BUAP

### Resumen

En este trabajo se trata con la valuación de opciones Europeas, se establecen los conceptos de estrategia autofinanciable, admisible y libre de oportunidad de arbitraje, así mismo se enuncia la definición de martingala y finalmente se describe lo que significa un mercado completo. Además, se presentan las condiciones que debe satisfacer el modelo Cox-Ross-Rubinstein y se muestra la convergencia al modelo de Black-Scholes.

## 1 Introducción

Las opciones son contratos mediante los cuales se acuerda la compra o venta de un cierto bien a un cierto precio en una fecha determinada [1]. El poder de compra o venta es un derecho, más no una obligación por parte de quien compra la opción.

**Definición 1.1.** Una opción es un contrato que le ofrece a su tenedor o comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un número fijo de acciones u otros activos financieros de un activo subyacente especificado, a un precio estipulado  $K$  en una fecha determinada  $T$ .

El precio estipulado  $K$  se conoce como precio strike y a la fecha determinada  $T$  se conoce como fecha de expiración o vencimiento del contrato.

Como se observa el contrato puede ser desventajoso para quien emite la opción, ya que el tenedor puede o no ejercer la opción. Para esto, el tenedor o comprador de la opción debe pagar una prima al emisor de ésta, por el derecho de la opción. La prima es independiente del precio strike y se tiene que pagar por adelantado al emisor de la opción, sin importar si se adquiere o no.

## 2 Conceptos Básicos

Primero consideremos el caso de una opción de tipo call, es decir, compramos una opción de compra sobre un activo subyacente, a un precio strike  $K$  fijo, en una fecha establecida  $T$ . Conocemos el precio del activo subyacente al momento de suscribir el contrato y lo denotamos por  $S_0$  y el precio del activo al término del contrato está dado por  $S_T$ , el cual desconocemos.

Al momento de la expiración del contrato, el valor del activo es  $S_T$  y supongamos que  $S_T < K$  el tenedor no le conviene ejercer la opción, ya que el precio del activo es más barato en el mercado que si se ejerciera en ese instante, por el contrario si sucede que  $S_T > K$  el tenedor de la opción le conviene ejercer, en cualquier de los casos su payoff o función de pago está dada por

$$C_T = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T \leq K. \end{cases}$$

Análogamente en el caso de una opción de tipo put su payoff está dado por

$$P_T = (K - S_T)_+ = \begin{cases} K - S_T & \text{si } S_T < K \\ 0 & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Para el modelo a tiempo discreto se trabaja sobre un espacio de probabilidad finito  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con una filtración  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T$ , donde  $\mathcal{F}_t$  es visto como la información disponible hasta el tiempo  $t$ , donde  $T$  corresponde a la fecha de expiración de la opción. Asumiremos que  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_T = \{\mathcal{P}(\Omega)\}$  y para todo  $\omega \in \Omega$   $P(\{\omega\}) > 0$ . Supongamos que el mercado consiste de  $(d + 1)$  activos financieros, cuyos precios al tiempo  $t$  están dados por las variable aleatorias no negativas  $S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d$  medibles con respecto a  $\mathcal{F}_t$ , el activo indicado por 0 es considerado como un activo libre de riesgo denotamos por  $S_0 = 1$ , es decir, si  $r$  es la tasa de interés fija entonces  $S_t^0 = (1 + r)^t$ , denotaremos a  $\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$  como el factor de descuento. Los activos indicados por  $i = 1, 2, \dots, d$  corresponden a los activos con riesgo.

Ahora consideremos una estrategia como un proceso estocástico  $\phi = \{(\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d)\}_{0 \leq t \leq T} \in \mathbb{R}^{d+1}$ , donde  $\phi_t^i$  denota el número de acciones correspondientes al activo  $i$  en el portafolio al tiempo  $t$ .  $\phi$  es previsible, es decir,

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, d\} \begin{cases} \phi_0^i \text{ es } \mathcal{F}_0 \text{ medible} \\ \phi_t^i \text{ es } \mathcal{F}_{t-1} \text{ medible para } t \geq 1. \end{cases}$$

De modo que el valor del portafolio al tiempo  $t$  está determinado por el producto escalar

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^d \phi_t^i S_t^i.$$

Y su valor descontado

$$\bar{V}_t(\phi) = \beta_t(\phi_t \cdot S_t) = \phi_t \cdot \bar{S}_t$$

donde  $\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$  y  $\bar{S}_t = (1, \beta_t S_t^1, \dots, \beta_t S_t^d)$  es el vector de precios descontados.

### 3 Estrategia Autofinanciable

Una estrategia  $\phi$  es autofinanciable si cualquier cambio en el valor del portafolio  $V_t$  es determinado por las ganancias (o pérdidas) netas realizadas en la inversión; el valor del portafolio después del tiempo  $t$  y los precios de los activos antes del tiempo  $t + 1$  son conocidos y esta dado por  $\phi_{t+1} S_t$ . Si el valor total del portafolio ha sido usado para esos ajustes (no hay retiro y los nuevos fondos son invertidos), entonces se satisface que para todo  $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$ ,  $\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t$ . De manera equivalente se tiene que para cualquier  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta \bar{S}_j$$

donde  $\Delta \bar{S}_j = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$ .

**Definición 3.1.** Una estrategia  $\phi$  es admisible si ésta es autofinanciable y  $V_t(\phi) \geq 0$  para cualquier  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ .

El inversionista debe ser capaz de pagar sus deudas del activo con riesgo o sin riesgo en cualquier momento [2]. La noción de arbitraje (la posibilidad de obtener una ganancia sin tener riesgo alguno) se formaliza de la siguiente manera.

**Definición 3.2.** Una estrategia que admite oportunidad de arbitraje, es una estrategia admisible con valor inicial cero y valor final no cero.

Es decir, sin tener dinero podemos pedir dinero prestado, especular en alguna opción de tal manera que al término de está podemos pagar nuestra deuda y generar una ganancia, a esto se le conoce como oportunidad de arbitraje.

## 4 Martingala

Analizaremos la conexión entre martingala y arbitraje. Trabajaremos sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con  $\mathcal{F} = \{\mathcal{P}(\Omega)\}$  y para todo  $\omega \in \Omega$   $P(\{\omega\}) > 0$  equipado con una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Diremos que una sucesión de variables aleatorias  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  es adaptada a la filtración si para cualquier  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ ,  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.

**Definición 4.1.** Una sucesión de variables aleatorias  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  con valores reales adaptada a la filtración y absolutamente integrables, es decir,  $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$  es

- Martingala si  $\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_t$  para todo  $t \leq T - 1$ .
- Supermartingala si  $\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \leq M_t$  para todo  $t \leq T - 1$ .
- Submartingala si  $\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geq M_t$  para todo  $t \leq T - 1$ .

## 5 Mercado completo

Sea una opción Europea de tipo call sobre un activo subyacente  $S^1$  con un precio strike  $K$  y una fecha de expiración  $T$ , su payoff  $h$   $\mathcal{F}_T$ -medible es definido como  $h = (S_T^1 - K)_+$ .

**Definición 5.1.** Un reclamo contingente definido por  $h$ , es alcanzable si existe una estrategia admisible de valor  $h$  al tiempo  $T$ .

Ahora enunciaremos la definición de mercado completo seguido de un teorema que caracteriza los mercados completos y nos da una condición para estos.

**Definición 5.2.** El mercado es completo si cada reclamo contingente es alcanzable.

**Teorema 5.3.** *Un mercado viable es completo si y sólo si existe una única medida de probabilidad  $P^*$  equivalente a  $P$  bajo la cual los precios descontados son martingalas.*

Como el mercado es viable y completo, denotamos por  $P^*$  la única medida de probabilidad equivalente a  $P$  bajo la cual los precios descontados son martingalas. Sea  $h$  un reclamo contingente, la cual es  $\mathcal{F}_T$ -medible y no negativa,  $\phi$  una estrategia admisible que replica el reclamo contingente el cual es definido por

$$h = V_T(\phi).$$

Además, como la sucesión  $(\bar{V}_t)_{0 \leq t \leq T}$  es  $P^*$ - martingala se tiene

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^* [\bar{V}_T(\phi)],$$

esto es,

$$V_0(\phi) = \beta_T \mathbb{E}^* [V_T(\phi)] = \beta_T \mathbb{E}^* [h].$$

Y más general

$$V_t(\phi) = \beta_{T-t} \mathbb{E}^* [h | \mathcal{F}_t], \quad t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}. \quad (1)$$

El precio de la opción tipo call queda determinado por  $V_t(\phi)$ , el cual es el dinero necesario para replicar  $h = (S_T - K)_+$  al tiempo  $T$  siguiendo la estrategia  $\phi$ , es decir, el precio de la opción al momento de suscribir el contrato es determinado por

$$\beta_T \mathbb{E}^* [(S_T - K)_+].$$

## 6 Bases para el modelo de Black-Scholes

El modelo de valuación de opciones desarrollado por Black y Scholes [1], formalizado y generalizado por Merton [4], es muy popular.

Los supuestos de mercado en los que se basa son:

1. El precio de una acción se comporta como un movimiento browniano geométrico. Supone transacciones constantes y no permite brincos en las cotizaciones. Además, en el largo plazo, el precio del activo subyacente siempre tiende a crecer a una tasa constante.

2. El activo subyacente no paga dividendos.

3. La volatilidad es conocida y constante durante la vida de la acción.

4. La tasa de interés es constante durante la vida de la opción. Además, esta tasa aplica tanto a operaciones activas como a operaciones pasivas. En general, cualquier participante del mercado puede prestar o pedir prestado, tanto dinero como necesite a la misma tasa de interés.

5. Un inversionista que venda una opción o una acción en corto tendrá disponibles los recursos producto de la venta.

6. No hay costos de transacción para las acciones o las opciones.

Daremos por conocidos los temas de procesos estocásticos y cálculo estocástico de Ito. Para una mejor lectura de estos temas se recomienda [2], los apéndices A y B de [3] y [5].

Mostraremos que es posible replicar el rendimiento de una opción mediante el rebalanceo continuo de un portafolio autofinanciable que involucra el activo subyacente y bonos sin riesgo.

La suma de ese portafolio y la opción hacen una cobertura perfecta en el sentido de que para pequeños movimientos en el precio del activo subyacente, el valor total de la suma permanece sin cambios. Un portafolio que a cambios del precio del activo subyacente se mantiene “inmóvil” en valor, se llama un portafolio sin riesgo. De esta manera, el precio de cobertura resulta ser el precio de la opción.

## 7 Ecuación de Black-Scholes

A menos que se diga lo contrario, estamos suponiendo que el mercado financiero es completo.

Consideremos una opción europea de tipo *Call* sobre un activo  $S$ , con fecha de expiración  $T$  y precio de ejercicio  $K$ . Sea  $c : R_+ \times [0, T] \rightarrow R$ , la función

$$c(S, t) = SN(d_1(S, t)) - Ke^{-rt}N(d_2(S, t)) \tag{2}$$

donde

$$d_1(S, t) = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \tag{3}$$

$$d_2(S, t) = d_1(S, t) - \sigma\sqrt{t}, \tag{4}$$

y  $N$  es la función de distribución acumulativa gaussiana estándar

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \text{ para todo } x \in R.$$

Sea  $C_t$  el precio de arbitraje de una opción europea tipo *Call*, en el tiempo  $t$  dentro del modelo de Black-Scholes.

**Teorema 7.1.** *El precio de arbitraje en el tiempo  $t \in [0, T]$  de una opción europea tipo call con fecha de expiración  $T$  y precio de ejercicio  $K$  en el mercado Black-Scholes está dado por la fórmula*

$$C_t = c(S_t, T - t), \text{ para todo } t \in [0, T],$$

donde la función  $c : R_+ \times [0, T] \rightarrow R$ , esta dado por (2)-(4). Además, la única estrategia  $\phi$ ,  $P^*$ -admisibles de la opción de tipo call satisfacen

$$\phi_t^1 = \frac{\partial c}{\partial S}(S_t, T - t), \phi_t^2 = e^{-rt} (c(S_t, T - t) - \phi_t^1 S_t)$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

Para la demostración del teorema anterior, primero se obtiene la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes y después se encuentra la fórmula para evaluar la opción europea de tipo call. La demostración de que  $\phi_t^1$  y  $\phi_t^2$  mencionadas son la única estrategia  $P^*$ -admisibles se puede ver en el Teorema 5.1.1 de [5].

**Demostración** (Teorema. 7.1.) Comenzaremos por asumir que el precio de la opción,  $C_t$ , satisface la igualdad  $C_t = v(S_t, t)$  para alguna función  $v : R_+ \times [0, T] \rightarrow R$ . Ahora, asumiremos que la estrategia  $\phi$  que estamos buscando tiene la siguiente forma

$$\phi_t = (\phi_t^1, \phi_t^2) = (g(S_t, t), h(S_t, t)), \quad (5)$$

para  $t \in [0, T]$  donde  $g, h : R_+ \times [0, T] \rightarrow R$ , son funciones desconocidas. Ya que  $\phi$  se asume es autofinanciable, el proceso  $V(\phi)$ , el cual es

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= g(S_t, t) S_t + h(S_t, t) B_t \\ &= v(S_t, t). \end{aligned}$$

Además, esto último necesita satisfacer lo siguiente

$$dV_t(\phi) = g(S_t, t) dS_t + h(S_t, t) dB_t.$$

Así, esta última igualdad puede escribirse de la siguiente forma

$$dV_t(\phi) = (\mu - r) S_t g(S_t, t) dt + \sigma S_t g(S_t, t) dW_t + rv(S_t, t) dt \quad (6)$$

ya que de la segunda igualdad en (6) obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_t^2 &= h(S_t, t) \\ &= B_t^{-1} (v(S_t, t) - g(S_t, t) S_t). \end{aligned}$$

Buscaremos la función  $v$  en la clase de funciones suaves sobre el dominio abierto  $D = (0, \infty) \times (0, T)$ ; más exactamente, asumimos que  $v \in C^{1,2}(D)$ . Una aplicación de la fórmula de Ito a  $v(S_t, t)$  nos lleva a

$$\begin{aligned} dv(S_t, t) &= \left( \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S^2} \right) dt \\ &\quad + \sigma S_t \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S} dW_t. \end{aligned}$$

Combinando esta última expresión con (6), llegamos a la siguiente expresión para la diferencial de Ito del proceso  $Y_t = v(S_t) - V_t(\phi)$

$$\begin{aligned} dY_t &= \left( \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S} dW_t \\ &\quad + (r - \mu) S_t g(S_t, t) dt + \sigma S_t g(S_t, t) dW_t - rv(S_t, t) dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, en vista de (6),  $Y$  se anula idénticamente, esto es  $dY_t = 0$ . Por la unicidad en la descomposición canónica de semimartingalas continuas, el término de la difusión en la descomposición anterior de  $Y$  desaparece. En nuestro caso, esto significa que para todo  $t \in [0, T]$ , tenemos

$$\int_0^t \sigma S_u \left[ g(S_u, u) - \frac{\partial v(S_u, u)}{\partial S} \right] dW_u = 0,$$

o equivalentemente

$$\int_0^t S_u^2 \left[ g(S_u, u) - \frac{\partial v(S_u, u)}{\partial S} \right]^2 du = 0. \tag{7}$$

Para que se cumpla (7), es suficiente y necesario que la función  $g$  satisfaga

$$g(s, t) = \frac{\partial v(s, t)}{\partial S}, \text{ para } (s, t) \in R \times [0, t]. \tag{8}$$

Asumiremos desde ahora que (8) se cumple. Entonces, usando (8) obtenemos otra expresión para  $Y$ ,

$$Y_t = \int_0^t \left[ \frac{\partial v(S_u, u)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 v(S_u, u)}{\partial S^2} + r S_u \frac{\partial v(S_u, u)}{\partial S} - r v(S_u, u) \right] du.$$

Es aparente que  $Y$  desaparece siempre que  $v$  satisfaga la siguiente ecuación diferencial parcial, a la que nos referimos como la Ecuación Diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial v(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v(S, t)}{\partial S^2} + r S \frac{\partial v(S, t)}{\partial S} - r v(S, t) = 0, \tag{9}$$

y que denotaremos por

$$BS[v(S, t)] = 0.$$

Para concluir la demostración, determinemos el precio de arbitraje de  $C_t = v(S_t, t)$  de una opción tipo call al resolver (9) junto con las condiciones finales y de frontera siguientes.

Condiciones finales:

$$C(S, T) = (S - K)_+ \text{ Liquidación de la opción tipo call.} \tag{10}$$

Condiciones de Frontera:

1. Si  $S = 0$ , entonces ¿cual es el valor de  $C(0, t)$ ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} = rC \text{ de (9)} \\ C(0, T) = (0 - K)_+ \text{ condición final} \end{array} \right.$$

$$C(0, T) = C(0, T) e^{-r(T-t)} \equiv 0 \text{ (para opciones tipo call)}. \quad (11)$$

2. Si  $S \rightarrow \infty$ , entonces ¿cuál es el valor de  $C(S, t)$ ?

Cuando el precio del activo de referencia se incrementa, es más probable que la opción sea ejercida y la magnitud del precio de ejercicio es menos importante. Por lo tanto, supondremos que

$$C(S, t) \sim S \text{ cuando } S \rightarrow \infty. \quad (12)$$

**Observación:**  $C(S, t) \sim S$  significa que  $\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{C(S, t)}{S} = 1$ . Resumiendo lo anterior, tenemos el siguiente problema

$$\begin{cases} BS[C] = 0, \\ C(S, T) = (S - K)_+, \\ C(0, t) = 0, & t < T \\ C(S, t) \sim S, & S \rightarrow \infty, t < T. \end{cases} \quad (13)$$

Para resolver el problema anterior, hagamos la siguiente sustitución propuesta por [7],

$$S = Ee^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad C = Ev(x, \tau) \quad (14)$$

La ecuación (9) se transforma en

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - k_1 v, \quad (15)$$

donde  $k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ . La condición inicial se transforma en

$$v(x, 0) = \text{máx}(e^x - 1, 0).$$

La ecuación (15) se parece a la ecuación de la difusión del calor.

Ahora, hagamos la siguiente sustitución

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x - \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} u(x, \tau).$$

Entonces, la ecuación (15) se transforma en

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ para } -\infty < x < \infty, \tau > 0;$$

con

$$u(x, 0) = u_0(x) = \text{máx}\left(e^{-\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0\right). \quad (16)$$

Antes de proseguir, resolvamos el siguiente problema. El problema a resolver es la ecuación de la difusión del calor i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau), \quad \tau \geq 0, \quad x \in R, \\ u(x, 0) &= (e^{(1-\alpha)x} - e^{-\alpha x}) = u(x). \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier

$$U(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \tau) e^{iyx} dx = (Fu)(y, \tau),$$

al problema anterior, se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \tau}(y, \tau) = (-iy)^2 U(y, \tau), \quad \tau \geq 0, \\ U(y, 0) = (Fu_0)(y), \end{cases}$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} U(y, \tau) &= C(y) \exp(-y^2 \tau), \\ U(y, 0) &= C(y) = (Fu_0)(y). \end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$U(y, \tau) = (Fu_0)(y) \exp(-y^2 \tau).$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= (F^{-1}U)(x, \tau) \\ &= F^{-1}[(Fu_0)(y) \exp(-y^2 \tau)](x, \tau). \end{aligned}$$

Ahora tenemos el siguiente

**Teorema 7.2.**  $(Ff \cdot g)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (Ff)(z) (Fg)(y-z) dz.$

Demostración. Ver ([6], Proposición 2.2.1.)

Aplicando este teorema para encontrar  $u(x, \tau)$ , se tiene

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= F^{-1}[(Fu_0)(y) \exp(-y^2 \tau)](x, \tau) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (F^{-1}Fu_0)(z) \cdot (F^{-1} \exp(-y^2 \tau))(x-z) dz, \end{aligned}$$

donde

$$(F^{-1}Fu_0)(z) = u_0(z).$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} F^{-1}(\exp(-y^2\tau))(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2\tau} e^{-iyx} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\tau(y^2 + i\frac{yx}{\tau} - (\frac{x}{2\tau})^2 + (\frac{x}{2\tau})^2))} e^{-y^2\tau - iyx} dy \\ &= \frac{\exp(\frac{x^2}{4\tau})}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau(y + i\frac{x}{2\tau})^2) dy. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned} y' &= \tau(y + i\frac{x}{2\tau})^2, \\ y &= (\frac{y'}{\tau})^{\frac{1}{2}} \frac{-ix}{2\tau}, \\ dy &= \frac{dy'}{2(\tau y')^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

tenemos que,

$$\begin{aligned} F^{-1}(\exp(-y^2\tau))(x) &= \frac{\exp(-\frac{x^2}{4\tau})^2}{\sqrt{2\pi}2} \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} (y')^{\frac{1}{2}-1} e^{-y'} dy' \\ &= \frac{\exp(-\frac{x^2}{4\tau})}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\exp(-\frac{x^2}{4\tau})}{\sqrt{2\tau}}. \end{aligned}$$

Así que,

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(z) \cdot \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\tau}\right) dz,$$

donde  $u_0(z)$  es la condición inicial.

La solución a la ecuación de difusión está dada por:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau} ds. \tag{17}$$

Resta evaluar la integral en la ecuación (17). Para ello hagamos el cambio de variable,  $x' = (x - s)/\sqrt{2\tau}$ , así tenemos:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x' \sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Aquí,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+x'\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau})^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(d_1), \end{aligned}$$

donde,

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau},$$

y

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds,$$

es la distribución acumulativa de la normal.

El calculo de  $I_2$  es idéntico al de  $I_1$ , excepto que  $(k_1 + 1)$  es reemplazado por  $(k_1 - 1)$ .

Finalmente, escribiendo

$$\nu(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x - \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} u(x, \tau),$$

y tomando a  $x = \log(S/E)$ ,  $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$ , y  $C = E\nu(x, \tau)$ , se obtiene

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-(T-t)}N(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}},$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}}.$$

Por lo tanto, el precio de un Call europeo dentro del marco de Black-Scholes es

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-(T-t)}N(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}},$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}}.$$

## 8 Modelo de Cox, Ross y Rubinstein

Para el modelo de CRR consideraremos un activo con riesgo cuyos precios están dados por la sucesión de variables aleatorias  $S_t$ ,  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$  donde  $T$  es la fecha de expiración y un activo sin riesgo con una tasa de interés  $r$  sobre cada periodo de tiempo. El precio del stock inicial  $S_0$  es conocido y el cambio de precio entre dos periodos consecutivos cambia por un factor  $(1 + a)$  o  $(1 + b)$  con  $-1 < a < b$  por lo que el precio del stock está dado por

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t(1 + a) & \text{con probabilidad } p \\ S_t(1 + b) & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases} \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}.$$

El conjunto de posibles estados es entonces  $\Omega = \{1 + a, 1 + b\}^T$  con la filtración natural generada por el valor de los precios del stock, es decir,  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ ,  $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_u \text{ t.q. } u \leq t\}$ , donde  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T = 2^\Omega$  es la sigma álgebra generada por todos los subconjuntos de  $\Omega$ .

La medida  $P$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  es inducida por la razón de los precios del stock y denotamos a  $R_t = S_t/S_{t-1}$  para  $t > 0$ . Para cada  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T) \in \Omega$  definimos

$$P(\{\omega\}) = P(R_t = \omega_t, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

Observemos que si  $P^*$  es una medida de probabilidad equivalente a  $P$  que satisface que los precios decontados son  $P^*$ -martingalas, es decir,

$$\mathbb{E}^* \left[ \bar{S}_t | \mathcal{F}_{t-1} \right] = \bar{S}_{t-1},$$

es equivalente a  $\mathbb{E}^* \left[ \frac{\bar{S}_t}{\bar{S}_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1} \right] = 1$  ya que  $S_{t-1}$  es  $\mathcal{F}_{t-1}$ -medible, y a la vez es equivalente a

$$\mathbb{E}^* \left[ \frac{S_t}{S_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1} \right] = 1 + r$$

ya que  $\beta_t/\beta_{t-1} = 1 + r$ . Como  $P^*$  es una medida equivalente martingala a  $P$ , se tiene  $\mathbb{E}^*[R_t] = 1 + r$ , pero como  $R_t$  sólo toma los valores  $(1 + a)$  o  $(1 + b)$ , el valor esperado de  $R_t$  es igual a  $(1 + r)$  sólo si  $a < r < b$ , lo cual nos diría que el mercado es libre de arbitraje.

Ahora mostremos que el mercado es viable y completo, es decir, que existe una única medida de probabilidad equivalente a  $P$  bajo la cual los precios decontados son martingalas.

**Lema 8.1.**  $\bar{S}_t$  es  $P^*$ -martingala si y sólo si las variables aleatorias  $(R_t)$  son i.i.d. con  $P^*(R_1 = 1 + a) = q$  y  $P^*(R_1 = 1 + b) = 1 - q$  donde  $q = (b - r)/(b - a)$ .

Así el modelo CRR admite una única medida de probabilidad dada por  $P^*$ . Una vez teniendo ésta medida procedemos a calcular el valor de una opción call Europea  $C_T = (S_T - K)_+$  al tiempo  $t$  está dada por la ecuación (1)

$$V_t(C_T) = (1 + r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^* [(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t].$$

Ya que  $S_T = S_t \prod_{i=t+1}^T R_i$  y teniendo en cuenta que cada variable  $R_i$  ( $i > t$ ) es independiente de  $\mathcal{F}_t$  se obtiene

$$V(C_t) = (1 + r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ \left( S_t \prod_{i=t+i}^T R_i - K \right)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right] = v(t, S_t)$$

donde

$$\begin{aligned} v(t, x) &= (1 + r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ \left( x \prod_{i=t+i}^T R_i - K \right)_+ \right] \\ &= (1 + r)^{-(T-t)} \sum_{i=0}^{T-t} \binom{T-t}{i} q^i (1 - q)^{T-t-i} (x(1 + a)^i (1 + b)^{T-t-i} - K)_+ \end{aligned}$$

## 9 Convergencia al modelo de Black Scholes

Consideremos una opción de tipo put sobre un stock con un precio strike  $K$  y fecha de expiración  $T$ . Su payoff esta dado por  $(K - S_T)_+$ . El desarrollo es análogo en el caso de una opción de tipo call.

El precio inicial del stock está dado por  $S_0$ , definimos  $h = T/N$  para algún  $N$  fijo de tal forma que el conjunto  $\{0, h, 2h, \dots, Nh\} \subset [0, T]$ . Para  $r > 0$  fijo, definimos  $R$  la tasa de interés, donde  $R = rT/N$  sobre el intervalo de tiempo  $[0, h]$ . El precio de la opción está dado por

$$\begin{aligned} P_0^N &= (1 + R)^{-N} \mathbb{E}^*[(K - S_0)_+] \\ &= \mathbb{E}^* \left[ \left( (1 + R)^{-N} K - (1 + R)^{-N} S_0 \prod_{n=1}^N R_n^N \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[ \left( (1 + R)^{-N} K - S_0 e^{\sum_{n=1}^N \log\left(\frac{R_n^N}{1+R}\right)} \right)_+ \right] \end{aligned}$$

donde  $R_n^N = S_{nh}^N/S_{(n-1)h}$  toma valores de la forma  $(1 + a)$  y  $(1 + b)$  para  $n \geq 1$ . Además las variables  $(R_n^N)$  son i.i.d. y

$$P^*(R_1^N = 1 + a) = q = \frac{b - R}{b - a}.$$

Supongamos que

$$\log\left(\frac{1+a}{1+r}\right) = -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} = -\sigma\sqrt{h}, \quad \log\left(\frac{1+b}{1+r}\right) = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} = \sigma\sqrt{h}. \quad (18)$$

Ahora una forma simple del teorema central del límite está dado por el siguiente teorema.

**Teorema 9.1.** *Dada una sucesión de variables aleatorias  $(Y_k^N)_{k_N}$  i.i.d. con media  $\mu_n$  tal que  $N\mu_n$  converge a  $\mu$  cuando  $N \rightarrow \infty$  y cuya varianza es de la forma  $\sigma^2/N + o(1/N)$ , la suma  $Z_N = \sum_{k=1}^N Y_k^N$  converge en distribución a una variable aleatoria  $Z$  distribuida  $N(\mu, \sigma^2)$ .*

Para aplicar el teorema anterior definimos

$$Y_n^N = \log\left(\frac{R_n^N}{1+R}\right), \quad Z_N = \sum_{n=1}^N Y_n^N.$$

Los valores posibles de  $Y_1^N$  son  $\pm\sigma\sqrt{h}$  calculando su esperanza se obtiene

$$\mu_N = \mathbb{E}^*[Y_1^N] = -\sigma\sqrt{h}q + \sigma\sqrt{h}(1-q) = (1-2q)\sigma\sqrt{h},$$

usando la ecuación (18) y reescribiendo  $1-2q$  obtenemos

$$\begin{aligned} 1-2q &= 1-2(1-q) = 1-2\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{h}}-1}{e^{\sigma\sqrt{h}}+e^{-\sigma\sqrt{h}}}\right) \\ &= 1-\frac{e^{\sigma\sqrt{h}}-1}{\sinh(\sigma\sqrt{h})}. \end{aligned}$$

Al expandir en series de Taylor el lado derecho se tiene  $1-2q = -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h} + o(1/N)$ . Así  $\mu_N = -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 T}{N} + o(1/N)$ , por lo que  $N\mu_N \rightarrow -\frac{1}{2}\sigma^2 T$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Por último calculamos el segundo momento de la variable  $Y_1^N$

$$\mathbb{E}^*[(Y_1^N)^2] = \sigma^2 \frac{T}{N} q + \sigma^2 \frac{T}{N} (1-q) = \sigma^2 \frac{T}{N}$$

y su varianza es de la forma  $\sigma^2 \frac{T}{N} + o(1/N)$ . Aplicando el teorema de límite central se tiene que  $Z_N \rightarrow Z$  en distribución, donde  $Z \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$ . Teniendo en cuenta  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{rt}{n})^n = e^{rt}$ , el valor de la opción está dada por

$$P_0 = \mathbb{E} \left[ (e^{rT} K - S_0 e^Z)_+ \right].$$

Dado que  $Z \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$  entonces la variable  $X = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(Z + \frac{1}{2}\sigma^2 T)$  tiene una distribución  $N(0, 1)$ . Para encontrar la esperanza evaluamos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( K e^{-rT} - S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} \right)_+ \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

La integral es diferente de cero cuando

$$\gamma = \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} > x$$

cambiando el límite de integración, el precio de la opción put está dado por

$$\begin{aligned} P_0 &= K e^{-rT} \int_{-\infty}^{\gamma} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx - S_0 \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}} e^{\sigma\sqrt{T}x - \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= K e^{-rT} (\Phi(\gamma)) - S_0 (\Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})) \\ &= S_0 \Phi(d_+) - K e^{-rT} \Phi(d_-). \end{aligned}$$

donde

$$d_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Finalmente teniendo en cuenta la ecuación de paridad  $C_t - P_t = S_t - Ke^{-(T-t)}$ , el valor de la opción tipo call es

$$C_0 = S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-). \quad (19)$$

## 10 Conclusiones

Como podemos observar el valor de la opción depende de 5 parámetros  $r, T, K, S_0$  y  $\sigma$ , de los cuales  $\sigma$  es un parámetro no observable, el cual puede ser estimado mediante métodos estadísticos observando la historia de los precios del activo en el pasado.

## Bibliografía

- [1] Black F. and Myron S., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, 1973.
- [2] Grudsky S., *Introduction to the modern financial mathematics*. Lectures: Cinvestav, México 2007.
- [3] Karatzas I., Shreve S., *Brownian Motion and Stochastic calculus*. Springer 1988.
- [4] Merton R., *Theory of Rational Option Pricing*. The Bell Journal of Economics and Management. Vol. 4, No. 1. 1973.
- [5] Musiela M. and Rutkowsky M., *Martingale Methods in Financial Modelling* 2007.
- [6] Pinsky M. A., *Introducción al análisis de fourier y a las ondasletas*. Thompson 2001.
- [7] Wilmott P., Dewynne J. and Howison S., *Option Pricing: Mathematical Model and computation* 1993
- [8] Lamberton D. and Lapeyre B., *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance (First ed.)*, Chapman & Hall, London, 1996.

- [9] Elliott R. J. and Kopp P. E., *Mathematics of Financial Markets (First ed.)*.  
Springer-Verlag, USA, 1999.

Facultad de Ciencias de la Computación, BUAP  
Avenida San Claudio y 14 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72592

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

carlos.palomino@correo.buap.mx  
dansor100@gmail.com  
ftajonar@fcfm.buap.mx

---

# **Sistemas dinámicos**

---



## Capítulo 7

### Un estudio de la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda senz$ con $1 < \lambda < 2.14$

Patricia Domínguez Soto, Lizzeth Trujillo Santamaría  
FCFM, BUAP

#### Resumen

En este capítulo se investiga la dinámica de la familia  $f_\lambda(z) = \lambda senz$  para valores de  $\lambda$  real entre 1 y 2.14. Se definen los conjuntos de Fatou y Julia para la familia de funciones  $f_\lambda$ , el plano de parámetros y el plano dinámico. Se estudian los puntos fijos y los planos dinámicos, para los valores de  $\lambda$  antes mencionados, de la familia  $f_\lambda$ . También, se investiga el comportamiento de los puntos fijos cuando  $z = it$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Finalmente, se enuncian algunas conjeturas relacionadas con los conjuntos de Fatou y Julia de la familia  $f_\lambda$ .

## 1 Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos en el campo de la dinámica holomorfa se dio a comienzos del siglo XX, con los estudios de los matemáticos franceses Gaston Julia (1893-1978) y Pierre Fatou (1878-1929). Estos dos matemáticos anunciaron, casi de manera simultánea, dos resultados relacionados con iteración de funciones racionales de variable compleja. Uno constaba de dos páginas y el otro de tres, estos trabajos fueron publicados en los *Comptes Rendus* de la Academia Francesa de Ciencias, véase [8] y [11]. Estas breves notas fueron el inicio de un inmenso trabajo sobre iteración de funciones de variable compleja. Cada uno de estos resultados utiliza la teoría de Montel sobre familias normales. Los objetos principales de estudio de la teoría son: el conjunto de Fatou o conjunto estable donde las iteradas forman una familia normal y el conjunto de Julia o conjunto caótico, que es el complemento del conjunto de Fatou.

En 1926 Fatou extiende resultados de la teoría de funciones racionales a la teoría de funciones enteras trascendentes, donde el infinito es singularidad esencial, véase [9]. En 1929 Fatou muere dejando varias preguntas abiertas relacionadas con la dinámica de funciones enteras trascendentes. Esas preguntas fueron respondidas entre 1965 y 1975 por el notable matemático I. Noel Baker, véase [1] [2] y [3].

Una de las principales ideas en dinámica compleja es dividir el plano complejo en los conjuntos de Fatou y Julia, donde el conjunto de Fatou tiene componentes que pueden ser periódicas, preperiódicas o errantes. Las componentes periódicas se pueden clasificar en: atractoras, parabólicas, discos de Siegel, anillos de Herman y dominios de Baker, véase definiciones en la Sección 2.

Entre las propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia podemos enunciar las siguientes: el conjunto de Julia es perfecto, los conjuntos de Fatou y Julia son completamente invariantes y los puntos periódicos repulsivos son densos en el conjunto de Julia.

Las familias  $\lambda e^z$  y  $\lambda senz$  son familias de funciones enteras trascendentes. La dinámica de la familia exponencial  $\lambda e^z$  ha sido estudiada por varios matemáticos en particular, por Devaney and Krych [4] y Devaney and Golberg [5]. Erroneamente se pensaba que la dinámica de la familia  $\lambda senz$  era similar a la de la familia exponencial, pero McMullen en [13] demuestra que los conjuntos de Julia de las familias, antes mencionadas, tienen diferentes medidas de Lebesgue. Con esa información Domínguez y Sienna en [6] demuestran varios resultados relacionados con la dinámica de la familia  $\lambda senz$ , para  $\lambda$  complejo, donde  $0 < |\lambda| < 1$  o  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda$  raíz de la unidad. Ellos observaron que en efecto, la familia  $\lambda e^z$  y la familia  $\lambda senz$  tienen comportamientos completamente diferentes. A partir de la investigación de Domínguez y Sienna se pueden formular varias preguntas abiertas relacionadas con el plano de parámetros de la familia  $\lambda senz$  y los planos dinámicos asociados a un parámetro dado. Por ejemplo, ¿cómo son los puntos fijos de  $\lambda senz$  para parámetros reales entre 1 y 2.14. ¿Cómo son sus conjuntos de Fatou y Julia para esos parámetros? ¿Cómo son los puntos fijos de  $\lambda senz$  si  $z = it$  con  $t$  real? En este capítulo se estudian las preguntas antes mencionadas y se enuncian algunas conjeturas interesantes que pueden ser investigadas por estudiantes de Posgrado.

Para el desarrollo del capítulo, necesitaremos algunas definiciones y resultados de la variable compleja y de la dinámica de funciones analíticas. Recordemos, que las *funciones enteras trascendentes* son funciones analíticas en el plano complejo que no son polinomios. De otra forma, son funciones definidas y analíticas en todo el plano complejo que tienen una singularidad esencial en  $\infty$ .

Consideremos la siguiente clase de funciones:

$$\mathcal{E} = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es entera trascendente}\}.$$

Las familias  $f_\lambda(z) = \lambda senz$  y  $f_\lambda(z) = \lambda e^z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pertenecen a la clase  $\mathcal{E}$ .

Sea  $f$  una función en la clase  $\mathcal{E}$ , la **n-ésima iterada de  $f$**  se define por

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \circ f,$$

donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\circ$  denota composición,  $f^0(z) = z$  y  $f^1(z) = f(z)$ .

La **órbita hacia adelante** de un punto  $z_0$  de una función  $f$  de variable compleja se define como:

$$O^+(z_0) = \{f^n(z_0), n \in \mathbb{N}\}.$$

**Definición 1.1.** Sea  $f \in \mathcal{E}$ . Si  $f^n(z_0) = z_0$  decimos que  $z_0$  es un **punto fijo periódico**. Cuando  $n$  es el menor natural que satisface esta igualdad, decimos que  $z_0$  es **punto fijo de periodo  $n$** . Cuando  $f(z_0) = z_0$  el punto  $z_0$  es llamado **punto fijo**.

Sea  $f \in \mathcal{E}$  y  $z_0$  un punto fijo de  $f$ . El punto fijo  $z_0$  se clasifica como:

- (i) **Super-atractor** si  $|f'(z_0)| = 0$ .
- (ii) **Atractor** si  $|f'(z_0)| < 1$ .
- (iii) **Repulsor** si  $|f'(z_0)| > 1$ .
- (iv) **Indiferente racional** si  $|f'(z_0)| = 1$  y  $f'(z_0)$  es raíz de la unidad.
- (v) **Indiferente irracional** si  $|f'(z_0)| = 1$ , pero  $f'(z_0)$  no es una raíz de la unidad.

## 2 Conjuntos de Fatou y Julia

Como se mencionó en la introducción, el estudio de la dinámica generada por funciones enteras trascendentes se inició con los trabajos de los matemáticos P. Fatou [9] y I. N. Baker [1], donde los principales conjuntos estudiados se definen de la siguiente forma.

Sea  $f \in \mathcal{E}$ , el **conjunto de Fatou**, denotado por  $F(f)$ , se define como el conjunto de puntos  $z \in \mathbb{C}$  tal que la sucesión de iteradas  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  es normal en alguna vecindad de  $z$ . El **conjunto de Julia** es el complemento del conjunto de Fatou y se denota por  $J(f)$ .

Algunas propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia para funciones enteras trascendentes se enuncian a continuación, para su demostración véase [1], [9] y [10].

- (a)  $F(f)$  es abierto y  $J(f)$  es cerrado.
- (b)  $J(f)$  es perfecto.

- (c)  $F(f)$  y  $J(f)$  son completamente invariantes, es decir,  $z \in F(f)$  si, y sólo si  $f(z) \in F(f)$  y  $z \in J(f)$  si, y sólo si  $f(z) \in J(f)$ .
- (d)  $F(f^n) = F(f)$  y  $J(f^n) = J(f)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f \in \mathcal{E}$  y  $U$  es una componente del conjunto de Fatou, el comportamiento de la órbita de  $U$  bajo  $f$  tiene tres posibilidades:

- (1) Si  $f^n(U) \subset U$  para algún  $n \geq 1$  decimos que  $U$  es una **componente periódica** de  $F(f)$ . El mínimo  $n$  es el período de la componente  $U$ . En particular, si  $n = 1$  la componente  $U$  es llamada invariante.
- (2) Si  $f^m$  es periódica para algún entero  $m \geq 1$ , llamamos a  $U$  una **componente pre-periódica**.
- (3) Si la componente  $U$  no es periódica ni pre-periódica decimos que  $U$  es una **componente errante**.

Si  $f \in \mathcal{E}$  y  $U$  es una componente periódica de periodo  $p$  en el conjunto de Fatou. La clasificación de  $U$  puede ser de la siguiente forma:

- (i) Si  $z_0 \in U$  con  $f^p(z_0) = z_0$  y  $|f'(z_0)| < 1$ , donde cada punto  $z \in U$  satisface  $f^{np}(z) \rightarrow z_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . La componente  $U$  es llamada **atractora**. Si  $z_0$  es un punto fijo super-atractor la componente  $U$  es llamada **super atractora**.
- (ii) Si  $z_0 \in \partial U$ ,  $z_0 \neq \infty$  con  $f^p(z_0) = z_0$  y  $|f'(z_0)| = 1$ , donde cada punto  $z \in U$  satisface  $f^{np}(z) \rightarrow z_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . La componente  $U$  es llamada **parabólica**.
- (iii) Si existe un homeomorfismo analítico  $\psi : U \rightarrow D$ , donde  $D$  es el disco unitario tal que  $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i \theta}$  para algún  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . En este caso, la componente  $U$  es llamada **disco de Siegel**.
- (iv) Si existe un homeomorfismo analítico  $\psi : U \rightarrow A$ , donde  $A$  es un anillo  $A = \{z : 1 < |z| < r\}$ , tal que  $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i \theta}$  para algún  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . En este caso, la componente  $U$  es llamada **anillo de Herman**.
- (v) Si para toda  $z \in U$ ,  $f^n(z) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . La componente  $U$  es llamada **dominio de Baker**.

**Observación 2.1.** Para funciones de clase  $\mathcal{E}$  los anillos de Herman no existen, véase [3] para su demostración. Así, la familias enteras trascendentes  $\lambda e^z$  y  $\lambda \operatorname{sen} z$  no tiene anillos de Herman.

## Funciones en la clase $\mathcal{S}$

Los valores singulares de una función juegan un papel muy importante en la dinámica de funciones enteras trascendentes. A continuación definimos los conceptos de valor crítico y de valor asintótico para una función  $f \in \mathcal{E}$ .

**Definición 2.2.** (i) Un punto  $z$  es un **punto crítico** de  $f$  cuando  $f'(z) = 0$ . Sustituyendo el punto crítico  $z$  en  $f$  se obtiene el **valor crítico** de la función  $f$ .  
 (ii) Si existe una curva  $\gamma : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  y  $f(\gamma(t)) \rightarrow \omega$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , el punto  $\omega$  es llamado un **valor asintótico** de  $f$ .

Denotaremos el conjunto de valores críticos y valores singulares de  $f \in \mathcal{E}$  por  $SV(f)$ . Eremenko y Lyubich en [7] definen el siguiente conjunto:

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{E} : SV(f) \text{ es finito}\}.$$

Los siguientes teoremas establecen la ausencia de componentes errantes y dominios de Baker para algunas funciones enteras trascendentes.

**Teorema 2.3.** [7] Si  $f \in \mathcal{E}$  y el conjunto de valores singulares  $SV(f)$  es finito, entonces no existen componentes errantes en el conjunto de Fatou.

**Teorema 2.4.** [7] Supongamos que  $f \in \mathcal{E}$  y el conjunto de valores singulares  $SV(f)$  es acotado. Si  $z \in F(f)$ , entonces la órbita  $\{f^n(z)\}_{n=0}^\infty$  no puede tender a infinito.

**Corolario 2.5.** Si  $f \in \mathcal{E}$  y su conjunto de valores singulares es acotado, entonces  $F(f)$  no contiene dominios de Baker.

## 3 Dinámica de la familia $\lambda \operatorname{sen} z$ para $0 < |\lambda| \leq 1$

En esta sección estudiamos los valores singulares de la familia  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ . También, enunciaremos algunos resultados demostrados por Domínguez y Sienna [6] y Zhang [14] para la familia  $f_\lambda$  para algunos valores del parámetro  $\lambda$ .

Algunas propiedades interesantes de la familia  $f_\lambda$  se enuncian a continuación.

### I. Valores singulares de $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ .

Los puntos críticos de  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$  son los puntos que cumplen  $f'_\lambda(z) = 0$ . Esto es,  $\lambda \operatorname{cos} z = 0 \Leftrightarrow z = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, los puntos críticos de  $f_\lambda$  son de la forma  $z = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Al evaluar los puntos críticos en  $f_\lambda$  obtenemos:

$$f_\lambda \left( (2k + 1) \frac{\pi}{2} \right) = \{\lambda, -\lambda\}.$$

Por lo tanto, la función  $f_\lambda$  tiene valores críticos  $\lambda$  y  $-\lambda$ .

La familia  $f_\lambda(z) = \lambda senz$  no tiene valores asintóticos. Así, el conjunto de valores singulares de  $f_\lambda$  es  $SV(f_\lambda) = \{\lambda, -\lambda\}$ .

## II. La familia $f_\lambda$ pertenece a la clase $\mathcal{S}$ .

Observemos que el conjunto de valores singulares  $SV(f_\lambda)$  es finito porque tiene sólo dos valores críticos  $\lambda$  y  $-\lambda$ . Así,  $f_\lambda \in \mathcal{S}$ .

## III. La familia $f_\lambda$ no tiene componentes errantes, anillos de Herman ni dominios de Baker.

Los anillos de Herman quedan fuera usando el principio del módulo máximo. Por el Teorema 2.3 y el Corolario 2.5 no existen componentes errantes ni dominios de Baker.

## IV. Componentes de Fatou que se pueden encontrar en la dinámica de la familia $f_\lambda$ .

Por I, II, y III se tienen componentes atractoras, parabólicas y discos de Siegel para  $f_\lambda$ .

Si estudiamos una familia de funciones con un parámetro  $\lambda$  y un punto crítico  $c$ , podemos seguir la órbita del punto crítico bajo iteración. A este conjunto se le conoce como plano de parámetros. El plano de parámetros proporciona información sobre la dinámica de una familia de funciones. Definimos el plano de parámetros de la familia  $\lambda senz$  de la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| f^n \left( \frac{\pi}{2} \right) \right| \text{ esta acotado} \right\}.$$

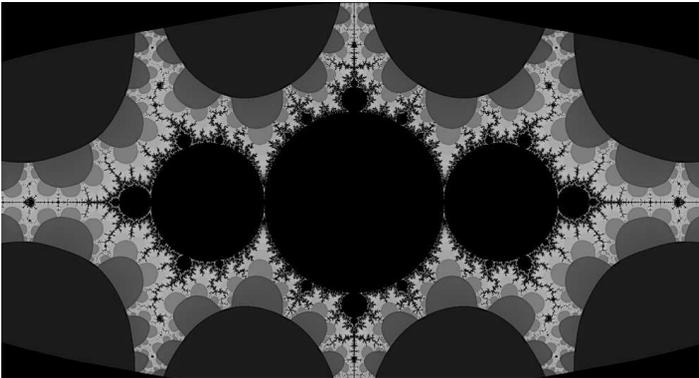


Figura 1: Plano de parámetros de  $\lambda senz$ .

Para generar el plano de parámetros de la familia  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$  se utilizaron los programas de Mathematica y Fractint, véase Figura 1.

Los siguientes resultados fueron demostrados por Domínguez y Sierra para parámetros dentro del disco unitario (cardioide principal en el plano de parámetros) y para algunos parámetros sobre el disco unitario, véase [6] para su demostración.

**Teorema 3.1.** *Sea  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ , donde  $0 < |\lambda| < 1$ . El conjunto de Fatou consiste de una componente  $U$  atractora, completamente invariante y simplemente conexa.*

**Teorema 3.2.** *Sea  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ ,  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ ,  $\theta = p/q$ , con  $(p, q) = 1$ . Si  $q$  es par, entonces existe un ciclo con  $q$  componentes de Fatou atraídas a 0. Si  $q$  es impar, entonces existen dos ciclos con  $q$  componentes de Fatou cada una. Estas son las únicas componentes periódicas de Fatou. Más aún, tales componentes son acotadas.*

Con respecto a los discos de Siegel G. Zhang demostró en [14] el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.** *Sea  $0 < \theta < 1$  un número irracional de tipo acotado. Entonces la frontera del disco de Siegel de la función entera  $f_\theta(z) = e^{2\pi i\theta} \operatorname{sen} z$  es un casi-círculo que pasa exactamente a través de dos puntos críticos  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ .*

## 4 Un estudio de la dinámica de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ para $1 < \lambda < 2.14$

En esta sección estudiaremos la dinámica de la familia  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$  para valores reales del parámetro  $\lambda$  que cumplen  $1 < \lambda < 2.14$ . Es decir, estudiaremos parámetros que se encuentran sobre la recta real y que no están en el disco unitario o en la cardioide principal del plano de parámetros  $\mathcal{M}$ , véase Figura 1. Para realizar el estudio, antes descrito, primero encontraremos aproximaciones de puntos fijos para los valores de  $\lambda$  antes mencionados, así como su naturaleza. Después, estudiaremos los planos dinámicos para los valores de  $\lambda$  entre 1 y 2.14, esto es, estudiaremos los conjuntos de Fatou y Julia de  $f_\lambda$ . También, estudiaremos los puntos fijos de  $f_\lambda$  cuando  $z = it$  y  $t$  en los reales.

Con el estudio antes descrito enunciaremos algunas conjeturas relacionadas con los conjuntos de Fatou y Julia para los parámetros  $1 < \lambda < 2.14$ . Cabe mencionar, que no se conoce ningún trabajo relacionado con la dinámica de la familia  $\lambda \operatorname{sen} z$  para los parámetros antes dados. Así, esta sección tiene un carácter de motivación e invitación, dirigida a los estudiantes interesados en la dinámica holomorfa, para demostrar con profundidad las conjeturas expuestas en esta sección.

Para iniciar el estudio, antes mencionado, enunciamos el siguiente teorema demostrado por Domínguez y Sierra en [6].

**Teorema 4.1.** *Si  $f_{\lambda_0}(z) = \lambda_0 \operatorname{sen} z$ , donde  $\lambda_0 = e^{2\pi i p/q}$ , entonces existe una componente  $D_q$  tangente al disco unitario en  $\lambda_0$ .*

La Figura 2 muestra el plano de parámetros  $\mathcal{M}$  y las componentes tangentes al disco unitario, componente  $D_0$ . En la Figura 2 se han marcado los puntos 1, 1.57 y 2.14 en la componente  $D_q$  que es tangente en  $\lambda = 1$ . Tomaremos los parámetros que se encuentran sobre el eje real de la componente  $D_q$ , esto es, parámetros que están entre 1 y 2.14 y estudiaremos sus planos dinámicos. En el plano de parámetros  $\mathcal{M}$  hay una componentes simétrica a la componente  $D_q$ , esto es porque la función  $\operatorname{sen} z$  es simétrica, así sólo basta estudiar la componente  $D_q$  para obtener resultados análogos para la componente  $-D_q$ .

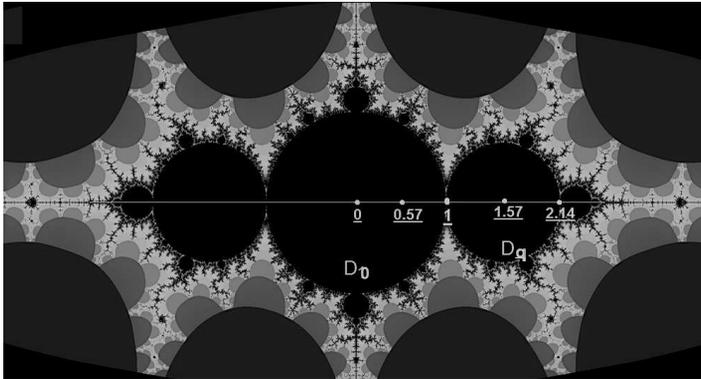


Figura 2: Componente  $D_q$  tangente en  $\lambda = 1$  en el plano de parámetros de  $\lambda \operatorname{sen} z$ .

Los puntos fijos de una función dan información del comportamiento dinámico de cualquier familia analítica. En particular, la familia  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$  tiene puntos fijos cuando  $\lambda \operatorname{sen} z = z$ , con  $\lambda \neq 0$ , se puede observar que una punto trivial que soluciona la ecuación anterior es  $z = 0$ . Otras soluciones de la ecuación no son fáciles de obtener analíticamente, por lo tanto se requieren métodos de aproximación. En esta sección estamos interesados en encontrar puntos fijos diferentes de cero y estudiar la naturaleza de esos puntos fijos, para deducir algunas propiedades de los planos dinámicos, es decir de los conjuntos de Fatou y Julia.

En lo que sigue asignaremos valores al parámetro  $\lambda$  donde  $1 < \lambda < 2.14$  para:

- (a) Utilizar el método de Newton y encontrar aproximaciones de los puntos fijos de  $\lambda \operatorname{sen} x$ , de variable real, es decir, encontrar soluciones aproximadas a la ecuación  $\lambda \operatorname{sen} x = x$ .
- (b) Estudiar la naturaleza de cada punto fijo encontrado, es decir, si el punto fijo es atractor, repulsor o indiferente.
- (c) Observar el comportamiento de las iteradas en una vecindad del punto fijo encontrado.
- (d) Graficar los conjuntos de Julia y Fatou para el parámetro  $\lambda$  dado.
- (e) Enunciar dos conjeturas importantes a partir de los datos obtenidos en (a), (b), (c) y (d), para cada valor de  $\lambda$  asignado.

**(1) Valor de  $\lambda = 1.1$ .**

$$x = 1 - \frac{1.1 \operatorname{sen}(1) - 1}{1.1 \operatorname{cos}(1) - 1} = 1 - 0.1833568693 \approx 0.8166431307.$$

$$x_1 = x - \frac{1.1 \operatorname{sen}(x) - x}{1.1 \operatorname{cos}(x) - 1} = 0.8166431307 - 0.0603836874 \approx 0.7562594433.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{1.1 \operatorname{sen}(x_1) - x_1}{1.1 \operatorname{cos}(x_1) - 1} = 0.7562594433 - 0.0071731672 \approx 0.7490862761.$$

...

$$x_4 = x_3 - \frac{1.1 \operatorname{sen}(x_3) - x_3}{1.1 \operatorname{cos}(x_3) - 1} = 0.7489866657 - 0.000000023150189$$

$$x_4 \approx 0.748986638049811.$$

El punto fijo de  $f_{1.1}(x) = 1.1 \operatorname{sen}(x)$  es la aproximación 0.7489866. El punto fijo obtenido es atractor porque satisface lo siguiente:

$$|f'_{1.1}(0.7489866)| = |1.1 \operatorname{cos}(0.7489866)| \approx 0.80495 < 1.$$

Análogamente, el punto  $-0.7489866$  es atractor por la simetría de la función  $\operatorname{sen} z$ . Por otro lado, observemos que el punto 0 es un punto fijo repulsor de la función  $f_{1.1}(x) = 1.1 \operatorname{sen}(x)$  porque satisface:

$$|f'_{1.1}(0)| = |1.1 \operatorname{cos}(0)| = 1.1 > 1.$$

En la Figura 3 se muestra el comportamiento de la iterada de  $f_{1.1}$ , que tiene un punto fijo repulsor en cero y dos puntos fijos atractores en 0.7489866 y  $-0.7489866$ . Para valores positivos de  $f_{1.1}$  las órbitas convergen al punto fijo atractor positivo y para los valores negativos las órbitas convergen al punto fijo atractor negativo.

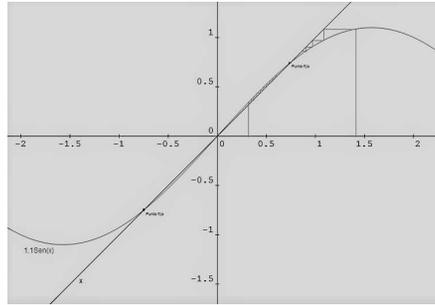


Figura 3: Iteradas de la función  $1.1\text{sen}x$

En la Figura 4 se muestra el plano dinámico de  $f_{1.1}$ , es decir, los conjuntos de Fatou y Julia de la función  $f_{1.1}$ .

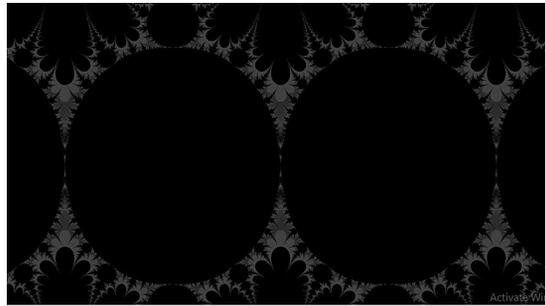


Figura 4: Los conjuntos de Fatou y Julia de la función  $f_{1.1}$

**Observación de (1).** Existen dos componentes en el conjunto de Fatou, que parecen ser simplemente conexas, separadas por el eje imaginario que contiene al punto fijo repulsor 0. Las componentes contienen a los puntos fijos encontrados por aproximación, y parece que dentro de cada componente los puntos convergen a los puntos fijos atractores.

**(2) Valor de  $\lambda = 1.3$ .**

La aproximación del punto fijo de la función  $f_{1.3}(x) = 1.3\text{sen}(x)$  se obtiene de la siguiente forma:

$$x = 1 - \frac{1.3\text{sen}(1) - 1}{1.3\cos(1) - 1} \approx 1.3155580.$$

$$x_1 \approx 1.22970.$$

$$x_2 \approx 1.221569.$$

...

$$x_5 \approx 1.22149621.$$

El punto fijo de  $f_{1.3}$  es la aproximación 1.221496. Evaluando en la derivada de la función el punto 1.221496 obtenemos:

$$|f'_{1.3}(1.221496)| = |1.3 \cos(1.221496)| \approx 0.44491 < 1.$$

Esto es, el punto 1.221496 es un punto fijo atractor de la función  $f_{1.3}$ . Análogamente, lo es el punto  $-1.221496$ . Observemos que el punto 0 es punto fijo repulsor porque satisface:

$$|f'_{1.3}(0)| = |1.3 \cos(0)| = 1.3 > 1.$$

La función  $f_{1.3}(x) = 1.3 \operatorname{sen} x$  tiene un punto fijo repulsor en cero y dos puntos fijos atractores en 1.221496 y  $-1.221496$ . Para valores positivos las órbitas convergen al punto fijo atractor positivo y para los valores negativos las órbitas convergen al punto fijo atractor negativo, véase la Figura 5.

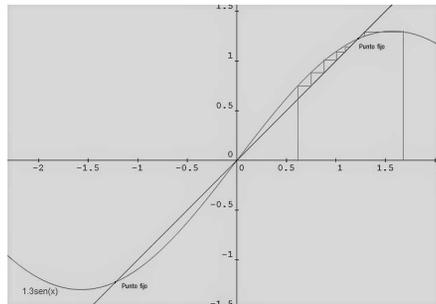


Figura 5: Iteradas de la función  $1.3 \operatorname{sen} x$

La Figura 6 muestra el plano dinámico de la función  $f_{1.3}$ , esto es, muestra los conjuntos de Julia y Fatou de  $f_{1.3}$ .

**Observación de (2).** Existen dos componentes en el conjunto de Fatou que parecen ser simplemente conexas, separadas por el eje imaginario que contiene al punto fijo repulsor 0. Las componentes contienen a los puntos fijos encontrados por aproximación, y parece que dentro de cada componente los puntos convergen a los puntos fijos atractores.

Continuando con el proceso anterior se pueden obtener aproximaciones de puntos fijos, su naturaleza y sus conjuntos de Fatou y Julia asociados a diferentes

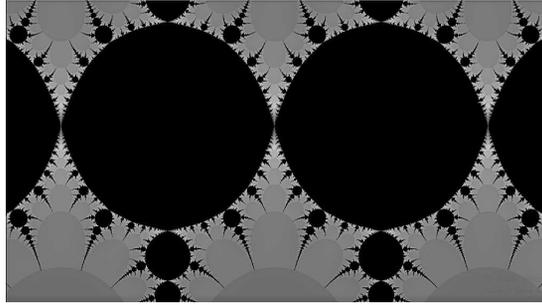


Figura 6: Conjuntos de Fatou y Julia de  $f_{1.3}$

valores del parámetro entre 1.3 y 2.14. A continuación mencionamos otros dos cálculos obtenidos por aproximación, para valores de  $\lambda = 1.5$  y  $\lambda = 1.7$ , antes de estudiar el parámetro  $\lambda = 2.14$ .

**(3) Valor de  $\lambda = 1.5$ .**

La función  $f_{1.5}(x) = 1.5\text{sen}x$  tiene punto fijo la aproximación 1.49578156822, que es un punto fijo atractor. La Figura 7 muestra el plano dinámico de la función  $f_{1.5}$ .

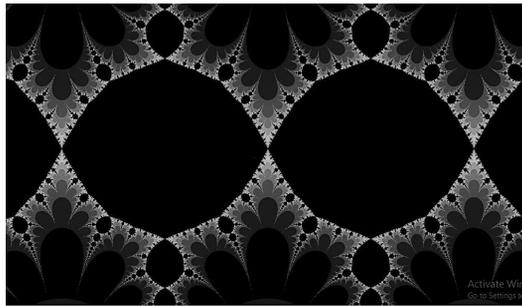


Figura 7: Los conjuntos de Fatou y Julia de la función  $f_{1.5}$

**(4) Valor de  $\lambda = 1.7$ .**

La función  $f_{1.7}(x) = 1.7\text{sen}x$  tiene punto fijo la aproximación  $-1.68828119787$  que es un punto fijo atractor. La Figura 8 muestra el plano dinámico de la función  $f_{1.7}$ .

**(5) Valor de  $\lambda = 2.14$ .**

Utilizando el método de Newton se obtiene que el número 1.9709 es una aproximación del punto fijo para  $f_{2.14}(x) = 2.14\text{sen}x$ . Evaluando el punto fijo en la derivada de la función  $2.14\text{sen}x$  obtenemos:

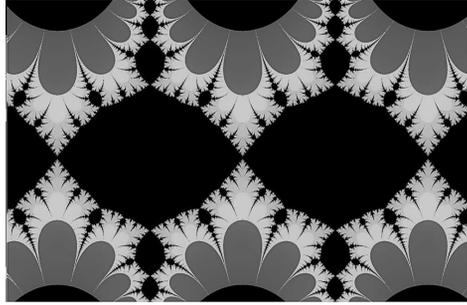


Figura 8: Los conjuntos de Fatou y Julia de la función  $f_{1.7}$

$$|f'_{2.14}(1.9709)| = |2.14 \cos(1.9709)| = 0.83355 < 1.$$

Es decir, el punto 1.9709 es un punto fijo atractor. Análogamente el punto  $-1.9709$  es también un punto fijo atractor. El punto 0 es punto fijo repulsor. La Figura 9 muestra el plano dinámico de la función  $f_{2.14}$ .

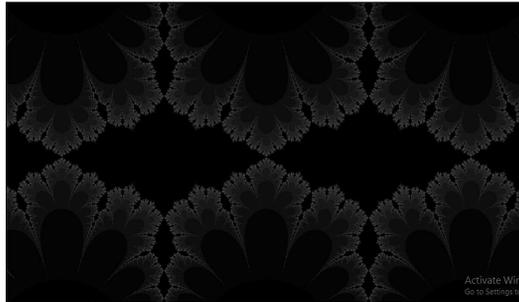


Figura 9: Los conjuntos de Fatou y Julia de la función  $f_{2.14}$

**Observación de (3), (4) y (5).** Existen dos componentes en el conjunto de Fatou que parecen ser simplemente conexas, separadas por el eje imaginario que contiene al punto fijo repulsor 0. Las componentes contienen a los puntos fijos encontrados por aproximación, y parece que dentro de las componentes todos los puntos convergen a los dos puntos fijos atractores.

La siguiente conjetura se enuncia a partir de la observaciones de los datos obtenidos en los incisos (1)-(5), para cada valor de  $\lambda$  dado. El experimento se realizó con mas valores de  $\lambda$ , pero por ser similares a los mostrados arriba no se escriben

en el documento. Es importante observar que la unicidad de los puntos fijos que se han encontrado, para los valores de  $\lambda$  dados, no está demostrada por lo tanto este trabajo sólo contiene aproximaciones que conducen a la siguiente conjetura.

**Conjetura 1.** *Si  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ , con  $1 < \lambda < 2.14$  y  $z \in \mathbb{R}$ , entonces el conjunto de Fatou contiene dos componentes atractoras que son simplemente conexas. Similar, para el caso  $-2.14 < \lambda < -1$ .*

Si es posible verificar que todas las condiciones del movimiento holomorfo ( $\lambda$ -Lemma, véase [12]) se satisfacen para la familia  $\lambda \operatorname{sen} z$  se puede enunciar la siguiente conjetura que involucra valores complejos.

**Conjetura 2.** *Si  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$  con  $1 < \lambda < 2.14$ , entonces en una vecindad de 1.5 con radio  $\epsilon = 0.4$  el conjunto de Fatou contiene dos componentes atractoras que son simplemente conexas. Similar, para el caso cuando  $-2.14 < \lambda < -1$ .*

## 5 El caso $f_\lambda(it) = \lambda \operatorname{sen}(it)$ con $\lambda, t \in \mathbb{R}$

En esta sección investigamos algunas propiedades de la familia  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ , donde  $z = it$  y  $t, \lambda \in \mathbb{R}$ . Sabemos que el comportamiento de los conjuntos de Fatou y Julia de la familia  $\lambda \operatorname{sen}(it)$ , para algún valor de  $\lambda$  dado, no es fácil. Así, antes de dar un paso tan arriesgado lo primero que haremos es responder la siguiente pregunta: ¿puntos en el eje imaginario bajo  $\lambda \operatorname{sen}(it)$  son enviados a puntos en el eje imaginario? Después, estudiaremos los puntos fijos de  $\lambda \operatorname{sen}(it)$  y su comportamiento para enunciar dos conjeturas al final de esta sección.

La siguiente proposición responde a la pregunta enunciada en la introducción de esta sección.

**Proposición 5.1.** *Si  $f_\lambda(it) = \lambda \operatorname{sen}(it)$  con  $\lambda, t \in \mathbb{R}$ , entonces puntos en el eje imaginario bajo  $f_\lambda(it)$  son enviados a puntos en el eje imaginario.*

*Demostración:* Sabemos que  $\operatorname{sen}(it) = \left(\frac{e^{-t} - e^t}{2i}\right)$ . Así,

$$\begin{aligned} f_\lambda(it) &= \lambda \operatorname{sen}(it) = \lambda \left(\frac{e^{-t} - e^t}{2i}\right) = \\ &= i \left(\lambda \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = i(\lambda \operatorname{senh}(t)). \end{aligned}$$

La función  $\lambda \operatorname{senh}(t)$  toma valores en los reales porque  $\lambda, t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $i(\lambda \operatorname{senh}(t))$  toma valores en el eje imaginario. Así, la prueba está completa.

Ahora, de la familia  $f_\lambda(it) = i(\lambda \operatorname{senh}(t))$ ,  $\lambda, t \in \mathbb{R}$ , tomaremos  $\lambda \operatorname{senh}(t)$  para estudiar sus puntos fijos y su comportamiento para diferentes valores de  $\lambda$ .

(i) Si tomamos el valor de  $\lambda = 1$  obtenemos la función  $f_1(t) = \operatorname{senh}(t)$ . La gráfica de la función  $f_1$  se puede apreciar en la Figura 10.

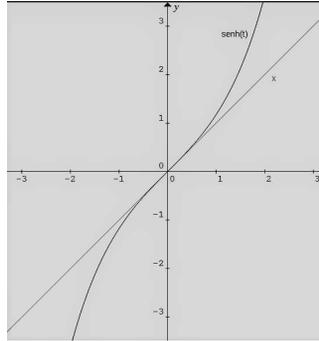


Figura 10: La función  $\operatorname{senh}(t)$

Los puntos fijos de  $f_1$  deben de cumplir lo siguiente:

$$\operatorname{senh}(t) = t \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = t \Leftrightarrow e^t - e^{-t} = 2t.$$

Como  $e^t > 0$ ,  $e^{-t} > 0$  y  $\operatorname{senh}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$  se tiene que 0 es el único punto fijo de la función  $f_1$ , véase Figura 10. El punto fijo 0 es indiferente porque satisface:

$$|f_1'(0)| = |\operatorname{cosh}(0)| = \left| \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \right| = 1.$$

Por otro lado, la función  $f_1(t) = \operatorname{senh}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , no tiene puntos críticos. En efecto, tomemos

$$(\operatorname{senh}(t))' = \operatorname{cosh}(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}).$$

Como  $e^t > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , la derivada de  $\operatorname{senh}(t)$  nunca es cero.

(ii) La Figura 11 muestra gráficas de algunas funciones  $f_\lambda = \lambda \operatorname{senh}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , para algunos valores de  $\lambda \in (0, 1)$ . Se observa en la Figura que las funciones siempre tienen tres puntos fijos 0 y otro dos, que denotamos por  $\rho_+(\lambda)$  y  $\rho_-(\lambda)$ . Tomando

iteradas de puntos en vecindades cercanas a los puntos fijos obtenidos se observa, que cero es un punto fijo atractor y que  $\rho_+(\lambda)$ ,  $\rho_-(\lambda)$  son puntos fijos repulsores.

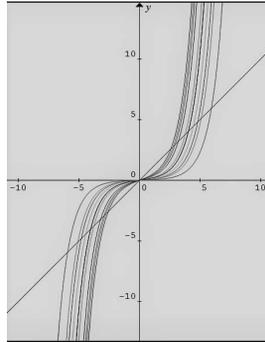


Figura 11: Funciones para algunos valores de  $\lambda \in (0, 1)$

**Observación de (ii).** La familia  $\lambda \operatorname{senh}(t)$ , con  $\lambda \in (0, 1)$ , tiene tres puntos fijos  $\rho_+(\lambda)$ ,  $\rho_-(\lambda)$  y 0. Así, la familia  $i(\lambda \operatorname{senh}(t))$ , con  $\lambda \in (0, 1)$ , también tiene tres puntos fijos  $i\rho_+(\lambda)$ ,  $i\rho_-(\lambda)$  y 0.

Las siguientes conjeturas se basan en las observaciones realizadas en los incisos (i) y (ii) de esta sección.

**Conjetura 3.** Con la información que se tiene en el inciso (i) existe un disco de Siegel en el conjunto de Fatou.

**Conjetura 4.** Sea  $f_\lambda(it) = \lambda \operatorname{sen}(it)$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  y  $t \in \mathbb{R}$ . La familia  $f_\lambda(it)$  tiene dos puntos fijos repulsores  $i\rho_\pm(\lambda)$  en el eje imaginario, donde  $\rho_+ > 0$  y  $\rho_- = -\rho_+$ . Además, la porción positiva del eje imaginario que conecta  $i\rho_+(\lambda)$  con  $\infty$  consiste de puntos que convergen a  $\infty$ . Similarmente, para  $i\rho_-(\lambda)$  en la porción negativa del eje imaginario.

## Agradecimientos

Agradecemos a los revisores por sus valiosos comentarios para mejorar el trabajo, a los proyectos CB2015-253202F CONACYT y 2017-VIEP, BUAP por el apoyo y en general al CONACYT por la beca otorgada a Lizzeth Trujillo Santamaría para realizar sus estudios de maestría.

## Bibliografía

- [1] Baker, Irving N. *Repulsive Fixpoints of Entire Functions*. Math. Zeitschr., (1968), págs. 252-256.
- [2] Baker, Irving N. *Completely invariant domains of entire functions*. Math. essays dedicated to A. J. MacIntyre, Ohio Univ. Press, Athens, Ohio. (1970).
- [3] Baker, Irving N. *The domains of normality of an entire function*. Ann. Academy Society, Fenn Ser, (1975), págs. 277-283.
- [4] Devaney, Robert L., Krych, Michael. *Dynamics of  $e^z$* . Ergod. Th. and Dynam. Sys. 4, (1984), págs. 35-52.
- [5] Devaney, Robert L., Goldberg, Lisa R. *Uniformization of attracting basins for exponential maps*. Duke Math J. 55, (1987), págs. 253-266.
- [6] Domínguez, Patricia y Sienra, Guillermo. *A study of the dynamics of  $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$* . International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 12, No. 12 (2012), págs. 2869-2883.
- [7] Eremenko, Alexander E., Lyubich, M. Yu. *The dynamics of analytic transformations*. Leningrad Math. J. 1, No. 3, (1990), págs. 563-632.
- [8] Fatou, Pierre., *Sur les équations fonctionnelles*. Bull. Sci. Math. France, 48, (1920), págs 208-314.
- [9] Fatou, Pierre. *Sur l'itération des fonctions transcendentes entières*. Bulletin de la Société Mathématique de France. Vol. 47, (1926), págs. 337-370.
- [10] Hua, Xin-Hou and Yang, Chung-Chung. *Dynamics of Transcendental Functions*. Asian Mathematics Series, Gordon and Breach Science Publishers, (1998).
- [11] Julia, Gaston. *Mémoire sur l'itération des applications fonctionnelles*. J. Math. Pures et Appl. 8, (1978), págs. 1171-1179 y 47-245.
- [12] McMullen, Curtis. *Complex Dynamics and Renormalization*. Princeton University Press, (1994).
- [13] McMullen, Curtis. *Holomorphic Functions and Moduli I*. MSRI Publications 10, Springer Verlag New York, (1998).

- [14] Zhang, Gaofei. *On the dynamics of  $e^{2\pi i\theta} \sin(z)$* . Illinois Journal of Mathematics, Vol 49, (2005), págs. 1171-1179.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570  
pdsoto@fcfm.buap.mx  
limats22@gmail.com

## Capítulo 8

# Grupos de Klein y su relación con la dinámica de funciones racionales

Alexander Bykov, Patricia Domínguez Soto,  
David Herrera Carrasco  
FCFM, BUAP

### Resumen

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de: (i) los grupos de Klein y (ii) de la dinámica de funciones racionales, para investigar algunas analogías entre (i) y (ii) siguiendo el diccionario de Sullivan [20]. También, se enuncian algunas preguntas relacionadas con el conjunto residual que se define en la sección 5.

## 1 Introducción

Las matemáticas del siglo XIX los grupos discretos tuvieron mucha atención en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y en la teoría de funciones modulares. El matemático Felix Klein creó una teoría general de grupos discretos de transformaciones de Möbius, a finales del siglo XIX, y obtuvo resultados fundamentales. Recordemos que un grupo de Klein es un grupo discreto de transformaciones de Möbius, donde las transformaciones de Möbius están definidas por el cociente de dos polinomios lineales, esto es:

$$\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con  $a, b, c, d$  números complejos que cumplen  $ad - bc \neq 0$ .

Por otra parte, el estudio de los sistemas dinámicos holomorfos generados por la iteración de funciones racionales tuvo su inicio a finales del siglo XIX con los trabajos de Pierre Fatou (1878-1929) [10] y de Gaston Julia (1893-1978) [14]. En esos años, los matemáticos Fatou y Julia que investigaban la dinámica de funciones racionales no comentaron ninguna relación con la teoría de los grupos de Klein.

En la década de los 80, el matemático Dennis P. Sullivan estudiaba el teorema de finitud de Ahlfors, que es un teorema en la teoría de los grupos de Klein, y observó que existían analogías entre la teoría de iteración de funciones racionales y

los grupos de Klein. En 1985, Sullivan mencionó en [20] algunas analogías entre los grupos de Klein y la iteración de funciones racionales; ésta es la primera versión de lo que hoy conocemos como el diccionario de Sullivan.

En las secciones 2, 3, 4 y 5 estudiaremos algunas propiedades de los grupos de Klein, de la dinámica de funciones racionales y algunas de sus analogías siguiendo el diccionario de Sullivan [20]. También, en la sección 5 enunciaremos algunas preguntas relacionadas con el conjunto residual. Cabe mencionar que las analogías que se estudian en este capítulo no son de tipo topológicas ni geométricas, pero la teoría de dinámica de funciones racionales tiene a la topología como una de sus herramientas principales.

## 2 El Grupo de las Transformaciones de Möbius

En esta sección enunciamos las definiciones de grupo, grupo cíclico, grupo abeliano, grupo normal y grupo cociente. También, definiremos homeomorfismo e isomorfismo entre grupos. Suponemos que el lector está familiarizado con las áreas de álgebra y variable compleja, sin embargo, enunciaremos algunas definiciones de las transformaciones elementales para definir la transformación de Möbius. Los temas relacionados con grupos se pueden consultar en los libros [4] y [12].

### 2.1 Grupos

Recordemos que un grupo  $(G, *)$  es una estructura algebraica, donde la operación binaria cumple con la propiedad asociativa, existencia de elemento neutro y elemento inverso. Un subgrupo  $H$ , de  $(G, *)$ , es diferente del vacío, preserva la operación binaria de  $G$ , es decir,  $a*b \in H$  para todo  $a, b \in H$  y  $x^{-1} \in H$  para todo  $x \in H$ .

Definimos el producto  $a^n$  como:  $a^n = \underbrace{a * a * a \dots * a}_{n \text{ veces}}$ .

**Observación:** (a) Las  $n$ -raíces de la unidad denotadas por  $U_n$  forman un subgrupo del grupo de los números complejos diferentes de cero  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  bajo la multiplicación usual en  $\mathbb{C}$ .

(b) El conjunto de matrices complejas de  $2 \times 2$  con determinante igual a 1 con operación el producto de matrices es un grupo.

**Teorema 2.1.** [11] Si  $G$  es un grupo y  $a \in G$ , entonces  $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$  es un subgrupo de  $G$ , y  $H$  es el subgrupo más pequeño que contiene al elemento  $a$ .

### 2.2 Grupos Cíclicos y Abelianos

**Definición 2.2.** Si  $G$  es un grupo y  $a \in G$  el subgrupo  $\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$  de  $G$  es llamado el subgrupo cíclico de  $G$  generado por  $a$ , y se denota por  $\langle a \rangle$ .

**Definición 2.3.** Si  $G$  es un grupo y  $a \in G$ , decimos que  $a$  es un generador de  $G$  si  $\langle a \rangle = G$ . Un grupo  $G$  es cíclico si existe  $a \in G$  generador de  $G$ .

**Definición 2.4.** Sea  $(G, *)$  un grupo. Decimos que  $G$  es un grupo abeliano si para todo  $a, b \in G$   $a * b = b * a$ .

El grupo de matrices de  $n \times n$  con coeficientes reales o complejos y con operación binaria la suma de matrices es un grupo abeliano.

### 2.3 Clases Laterales, Grupo Normal y Grupo Cociente

Si  $H$  un subgrupo de un grupo  $G$ , definimos como clase lateral derecha de  $H$  en  $G$  el conjunto de todos los elementos de la forma  $ha$ , con  $h \in H$  y  $a \in G$ . De manera análoga, se define la clase lateral izquierda como el conjunto de todos los elementos de la forma  $ah$ , con  $h \in H$  y  $a \in G$ .

**Definición 2.5.** Un subgrupo  $N$  de  $G$  se dice que es un subgrupo normal de  $G$  si, para toda  $g \in G$  y  $n \in N$  se tiene  $gn g^{-1} \in N$ .

**Lema 2.6.** *Un subgrupo  $N$  de  $G$  es un subgrupo normal de  $G$  si, y sólo si el producto de dos clases laterales derechas de  $N$  en  $G$  es de nuevo una clase lateral derecha de  $N$  en  $G$ .*

**Lema 2.7.** *Un subgrupo  $N$  de  $G$  es un subgrupo normal de  $G$  si, y sólo si el producto de dos clases laterales derechas de  $N$  en  $G$  es de nuevo una clase lateral derecha de  $N$  en  $G$ .*

**Definición 2.8.** La colección de clases laterales derechas de  $N$  en  $G$  es el grupo cociente o grupo factor de  $G$  por  $N$  y se denota por  $\frac{G}{N}$ .

**Teorema 2.9.** [12] *Si  $G$  es un grupo y  $N$  es un subgrupo normal de  $G$ , entonces  $\frac{G}{N}$  es también un grupo.*

### 2.4 Homomorfismos e Isomorfismos entre Grupos

Una función  $\phi : G \rightarrow G'$ , donde  $G$  y  $G'$  grupos, es un homomorfismo si cumple que  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$  para todo  $a, b \in G$ .

**Definición 2.10.** Sea  $\phi : G \rightarrow G'$  un homomorfismo de grupos. El subgrupo  $\phi^{-1}[\{e'\}] = \{x \in G : \phi(x) = e'\}$  es el núcleo de  $\phi$ .

**Definición 2.11.** Sean  $G$  y  $G'$  grupos. Un homomorfismo  $\phi : G \rightarrow G'$  es un isomorfismo si  $\phi$  es uno a uno.

**Definición 2.12.** Dos grupos  $G$  y  $G'$  son isomorfos si existe un isomorfismo  $\phi$  de  $G$  sobre  $G'$ , es decir, que la función  $\phi$ , además de ser uno a uno, debe ser sobreyectiva. Y lo denotamos por  $G \approx G'$ .

Los grupos  $(\mathbb{R}, +)$  y  $(\mathbb{R}, \cdot)$  son isomorfos bajo la función  $\phi(x^{a+b}) = \phi(x^a)\phi(x^b)$ .

## 2.5 Transformaciones Elementales

Las transformaciones elementales son: la traslación, la rotación, la homotecia (contracción y expansión), la inversión compleja y la reflexión. A partir estas transformaciones se definen las transformaciones de Möbius. A continuación enunciamos las definiciones de las transformaciones elementales.

(1) La traslación se define como  $T(z) = z + b$ , con  $b \in \mathbb{C}$  y  $b \neq 0$ .

(2) La rotación es una transformación que fija un punto en el plano complejo y a partir de ahí se gira todo el plano un cierto ángulo  $\theta$ .

La rotación se puede escribir como  $az$ , con  $a \in \mathbb{C}$ . Sabemos que al multiplicar dos números complejos, se suman sus argumentos y se multiplican las normas. Utilizando la forma polar de un número complejo, una rotación se puede escribir como:  $e^{i\theta}z$ .

(3) La homotecia esta definida por  $\mathcal{H}(z) = az$  con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Como  $a$  es real, al multiplicar por  $z$  el argumento no cambia y la norma de  $z$  se multiplica por  $a$ . La función  $\mathcal{H}$  es una expansión uniforme del plano si  $a > 1$  ó es una contracción si  $0 < a < 1$ . Se observa que  $az$  es una homotecia y una rotación cuando  $a \neq 0$  y  $a \in \mathbb{C}$ .

(4) La inversión compleja, denotada  $inv(z) = \frac{1}{z}$  es aquella donde el interior del círculo unitario es llevado fuera del círculo unitario bajo la función  $inv$  y el exterior del círculo es llevado dentro del círculo unitario.

La función  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definida como  $f(z) = \frac{1}{z}$  es una inversión respecto al círculo unitario con centro en el origen  $S^1$ .

(5) La reflexión con respecto al eje real, denotada por  $\mathcal{Re}(z)$ , es la función conjugado, es decir,  $\mathcal{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{Re}(z) = \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

## 2.6 El Grupo de las Transformaciones de Möbius

En este apartado definimos las transformaciones de Möbius y enunciamos algunos resultados importantes relacionados con las transformaciones.

Si  $a, b, c, d, z \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$  a la función de variable compleja definida por:

$$\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

se le llama una transformación de Möbius.

Al conjunto de las transformaciones de Möbius se le denota por  $\mathcal{M}$  y se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Los resultados mas inmediatos relacionados con transformaciones de Möbius son los siguientes:

- (a) Toda transformación de Möbius es composición de transformaciones elementales.
- (b) Toda transformación de Möbius es una función biyectiva.
- (c) Si  $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{bz + d}$  es una transformación de Möbius, entonces  $\mathcal{T}^{-1}(w) = \frac{-b + dw}{a - cw}$  es la función inversa de  $\mathcal{T}(z)$ .

Una función  $f$  definida del plano extendido al plano extendido  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , que manda círculos a círculos (o rectas consideradas como círculos) se denomina una transformación circular u homocíclica. No es difícil probar que:

- (d) Las transformaciones de Möbius tienen la propiedad homocíclica (o circular).

Sabemos que la composición de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. Se puede demostrar que el par  $(\mathcal{M}, \circ)$  es un grupo, donde  $\circ$  denota composición.

A partir de ahora al par  $(\mathcal{M}, \circ)$  lo denotaremos solamente como  $\mathcal{M}$  y se entenderá que es un grupo bajo la composición de funciones.

### 3 Grupos $SL(2, \mathbb{C})$ , $PSL(2, \mathbb{C})$ y de Klein

Los grupos de Klein recibieron ese nombre por Henry Poincaré a finales del siglo XIX en honor a Félix Klein, que había hecho grandes contribuciones a la geometría hiperbólica. Los temas expuestos en esta sección se pueden consultar en [4], [8], [13], [15], [18] y [21].

#### 3.1 Los Grupos $\mathcal{M}$ y $PSL(2, \mathbb{C})$

Tomemos el grupo de matrices complejas  $2 \times 2$  con determinante igual a 1 y operación el producto de matrices; denotemos este grupo como  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Definimos el grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$  como el grupo cociente  $PSL(2, \mathbb{C}) = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{K}$ , donde  $K$  es el núcleo de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Para toda  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ , definimos  $g_A \in \mathcal{M}$  como  $g_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ .

En lo que sigue asociaremos el grupo de las transformaciones de Möbius  $\mathcal{M}$  con el grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  por medio de un isomorfismo  $\psi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$  con regla de correspondencia:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}. \quad (2)$$

Dado que  $g_{AB} = \psi(AB) = \psi(A) \circ \psi(B) = g_{AGB}$ , tenemos un homomorfismo de grupos. Dicho homomorfismo es suprayectivo y el núcleo de  $\psi$ , que lo denotaremos por  $K'$ , consiste en las matrices  $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Entonces  $PSL(2, \mathbb{C}) = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{K'} \approx \mathcal{M}$ .

Observemos que cualquier matriz en  $K'$  conmuta con toda  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ , por lo tanto  $K' \subset K$ .

Por otra parte, si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K$ , la matriz debe conmutar, en particular con

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que implica que  $c = 0$  y  $a = d$ . Ahora, también debe conmutar con  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto,  $b = 0$ .

Como el  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^2 = 1$ ,  $a = \pm 1$ , concluimos que  $K' = K$ , por lo tanto,  $PSL(2, \mathbb{C}) \approx \mathcal{M}$ . Debido a este isomorfismo, se suele identificar al grupo de transformaciones de Möbius  $\mathcal{M}$  con el grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Las transformaciones de Möbius pueden verse como matrices, lo que hace más fácil su uso. La asignación de la matriz en la Ecuación (2) no es única porque para  $e$  número complejo diferente de cero, la transformación de Möbius  $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  también está dada por  $\mathcal{T}(z) = \frac{eaz + eb}{ecz + ed}$ , sin embargo si  $e \neq 1$ , entonces las dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} ea & eb \\ ec & ed \end{pmatrix} \quad (3)$$

son diferentes y representan la misma transformación de Möbius, por lo tanto, si  $\alpha = ad - bc$ , podemos dividir los coeficientes entre  $\sqrt{\alpha}$ , y obtener

$$g(z) = \frac{(a/\sqrt{\alpha})z + b/\sqrt{\alpha}}{(c/\sqrt{\alpha})z + d/\sqrt{\alpha}} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

con  $a'd' - b'c' = 1$ . Así, siempre podemos suponer que  $ad - bc = 1$ .

### 3.2 Los Subgrupos de $SL(2\mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$

Un subgrupo  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  es discreto si, y sólo si, para cualquier sucesión de matrices  $\{A_n\} \subset G$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  existe  $n_0 > 0$  tal que  $A_n = A$  para todo  $n \geq n_0$ . Todo grupo finito de  $\mathcal{M}$  es un ejemplo de subgrupo discreto.

**Proposición 3.1.** *Un subgrupo  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  es discreto si, y sólo si para toda  $k > 0$ , el conjunto  $\{A \in G : \|A\| \leq k\}$  es finito.*

La demostración se puede consultar en [4]. Como consecuencia se tienen los siguientes corolarios.

**Corolario 3.2.** *Si  $G < SL(2, \mathbb{C})$  es discreto, entonces  $G$  es a lo más numerable.*

**Corolario 3.3.** *Si  $G < SL(2, \mathbb{C})$  es discreto y no es finito, entonces para cualquier sucesión de matrices distintas  $\{A_n\} \subset G$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = \infty$ .*

En el caso de  $PSL(2, \mathbb{C})$  tenemos las siguientes definiciones.

**Definición 3.4.** Un grupo  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es discreto si, y sólo si  $\psi^{-1}(G) < SL(2, \mathbb{C})$  es discreto.

**Corolario 3.5.** *Un grupo  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es discreto si, y sólo si para toda  $k > 0$ , el conjunto  $B = \{g \in G : \|g\|^2 \leq k\}$  es finito.*

### 3.3 Grupo de Klein

Diremos que un subgrupo  $\Gamma$  de las transformaciones de Möbius  $\mathcal{M}$  es un grupo de Klein si es un subgrupo discreto del grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Un ejemplo de grupo de Klein es el grupo  $\Gamma$  formado por todas las transformaciones  $\gamma$  de la forma:

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}).$$

De la definición de un grupo de Klein se desprende que  $\Gamma$  es un conjunto numerable, es decir, sus elementos pueden ponerse en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales o un subconjunto finito del mismo, y no contiene ningún elemento elíptico con orden infinito.

**Definición 3.6.** Si  $\Gamma$  es un grupo de Klein, decimos que  $z$  es un punto ordinario de  $\Gamma$  si  $\Gamma$  es una familia normal (véase Definición 4.6) en alguna vecindad de  $z$ . El conjunto de puntos ordinarios se llama conjunto ordinario de  $\Gamma$  y se denota por  $\Omega(\Gamma)$ .

**Definición 3.7.** Un punto  $z$  es un punto límite de  $\Gamma$  si  $z$  no es un punto ordinario. Al conjunto de todos los puntos límite se le llama conjunto límite de  $\Gamma$  y se denota por  $\Lambda(\Gamma)$ .

**Teorema 3.8.** [15] Si  $x \in \Lambda(\Gamma)$ , entonces existe  $y \in \Lambda(\Gamma)$  y una sucesión  $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de elementos distintos de  $\Gamma$  tal que  $g_m(z) \rightarrow x$  uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{y\}$ .

*Demostración.* Tomemos  $x \in \Lambda(\Gamma)$ , existe  $z_0 \in \Omega(\Gamma)$  y una sucesión  $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de elementos distintos de  $\Gamma$  tal que  $g_m \rightarrow x$ . Normalicemos  $\Gamma$  de tal manera que  $z_0 = \infty$ . Ahora, elijamos una subsucesión  $\alpha_m = g^{-1}(\infty) \rightarrow y$ ; por lo anterior  $y \in \Lambda(\Gamma)$ . Escribimos a  $g_m$  como  $r \circ q \circ p$ , donde  $p$  es una reflexión en el círculo isométrico de  $g_m$ ,  $q$  y  $r$  son transformaciones fundamentales. El centro del círculo isométrico de  $g_m$  tiende a  $y$ ;  $g_m$  actúa como una inversión y lleva el exterior del círculo isométrico al interior del círculo isométrico y viceversa; el radio común entre  $g_m$  y  $g_m^{-1}$  tiende a 0; el centro del círculo isométrico de  $g_m^{-1}$  tiende a  $x$ .

**Teorema 3.9.** [15] Si  $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de elementos distintos de un grupo de Klein  $\Gamma$ , entonces existe una subsucesión  $\{g_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  y existen  $x, y$  puntos límite, tal que  $g_{m_k} \rightarrow x$  con  $k \in \mathbb{N}$ , converge uniformemente sobre conjuntos compactos de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{y\}$ .

*Demostración.* Normalicemos  $\Gamma$  para que  $\infty$  esté en el interior de  $\Gamma$ , tomemos una subsucesión  $\{g_{m_k}\}$  tal que  $g_m(\infty)$  converge a algún punto, llamémoslo  $x$ , de tal forma que  $g_m^{-1}(\infty)$  converge a  $y$  y aplicamos el Teorema 3.8.

**Teorema 3.10.** [15] Los conjuntos  $\Omega(\Gamma)$  y  $\Lambda(\Gamma)$  son complementarios, es decir, son ajenos y su unión es todo  $\hat{\mathbb{C}}$ , esto es,

$$\Omega(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(\Gamma).$$

*Demostración.* Si  $z$  es un punto límite, entonces cualquier vecindad  $U$  de  $z$  contiene infinitas traslaciones de algún punto, es decir, existen infinitos elementos distintos  $g \in \Gamma$  tal que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $\Omega(\Gamma) \cap \Lambda(\Gamma) = \emptyset$ . Ahora supongamos que  $x \notin \Omega(\Gamma)$ . Entonces, para toda vecindad  $V$  de  $x$  existen infinitas traslaciones de  $V$  que se intersecan con  $V$ . Por lo tanto podemos encontrar una sucesión de elementos distintos  $\{g_m\}$  de  $\Gamma$  y una sucesión de puntos  $\{z_m\}$  tal que  $z_m \rightarrow x$  y  $g_m(z_m) \rightarrow x$ . Por el Teorema 3.9 existe una subsucesión  $g_m(z) \rightarrow w$  que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos del complemento de  $y$ , donde  $w$  y  $y \in \Lambda(\Gamma)$ . Si  $x = y$ , entonces  $x \in \Lambda(\Gamma)$ . Si  $x \neq y$ , entonces los puntos  $\{z_m\}$  no son puntos de acumulación de  $y$ , luego  $g_m(z_m) \rightarrow w$ ; es decir,  $x = w \in \Lambda(\Gamma)$ .

Los siguientes dos corolarios son consecuencia del Teorema 3.10.

**Corolario 3.11.** Sea  $\Gamma$  un grupo de Klein. El conjunto ordinario  $\Omega(\Gamma)$  es un abierto  $\Gamma$ -invariante, es decir,  $\gamma(\Omega(\Gamma)) = \Omega(\Gamma)$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ . Por lo que  $\Lambda(\Gamma)$  es un conjunto cerrado  $\Gamma$ -invariante.

**Corolario 3.12.** *Sea  $\Gamma$  un grupo de Klein. Si el conjunto  $\tilde{\Gamma} = \gamma\Gamma\gamma^{-1}$  para todo  $\gamma \in \mathcal{M}$ , entonces  $\Omega(\tilde{\Gamma}) = \gamma(\Omega(\Gamma))$  y  $\Lambda(\tilde{\Gamma}) = \gamma(\Lambda(\Gamma))$ .*

**Teorema 3.13.** *Si  $\Gamma$  es un grupo de Klein no elemental,  $z \in \Lambda(\Gamma)$  y  $w \in \hat{\mathbb{C}}$ , entonces existe una sucesión  $\{\gamma_n\}$  de  $\Gamma$  tal que  $\gamma_n(w) \rightarrow z$  cuando  $n \rightarrow \infty$*

Véase la demostración del Teorema 3.13 en [18].

**Proposición 3.14.** [18] *Para un grupo de Klein  $\Gamma$  no elemental, su conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  es el conjunto cerrado  $\Gamma$  – no invariante, distinto del vacío más pequeño de  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Sólo mostraremos que para un grupo de Klein  $\Gamma$ , el conjunto  $\Lambda(\Gamma)$  es el más pequeño con las características antes enunciadas. Sea  $A \neq \emptyset$ , un subconjunto de  $\Gamma$ , cerrado, y  $\Gamma$ -invariante, tomemos  $z \in \Lambda(\Gamma)$ , para  $w \in A$ , sea  $\{\gamma_n\}$  una sucesión de  $\Gamma$  tal que  $\gamma_n(w) \rightarrow z$  por el Teorema 3.13. Como  $A$  es cerrado,  $\Gamma$ -invariante, entonces  $z \in A$ .

## 4 Dinámica de Funciones Racionales

En este capítulo definimos los conceptos de familia normal, puntos fijos, clasificación de puntos fijos, los conjuntos de Fatou y Julia de funciones racionales y algunas propiedades de estos conjuntos. También, se presentan ejemplos de familias normales. Los conceptos utilizados en este capítulo pueden consultarse en [3], [6], [7], [9], [18] y [19].

### 4.1 Familias Normales

Paul Montel (1876-1975) estudió familias normales entre los años de 1911 a 1916. Alrededor de 1918 y 1920, Fatou y Julia usaron la teoría de familias normales, de Montel, en su estudio de la iteración de funciones racionales. En esta sección se enuncian algunas definiciones y teoremas relacionados con esa teoría.

Tomemos  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ , una sucesión de funciones complejas definidas en un conjunto  $A \subset \mathbb{C}$ . Recordemos que una sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a un punto  $z \in A$  si la sucesión  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  es convergente. Si la sucesión  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge para todo  $z \in A$ , entonces  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  es convergente sobre  $A$  y denotamos el límite como  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  con  $z \in A$ , es decir,  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .

Decimos que  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge uniformemente a  $f$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que si  $n \geq N$  se cumple  $z \in A$   $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ , donde  $z \in A$ .

**Teorema 4.1.** [19] Una sucesión  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  de funciones complejas definidas sobre  $A \subset \mathbb{C}$  converge uniformemente si, y sólo si, para todo  $\epsilon$  existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que para todo  $m, n \leq N$  y  $z \in A$ ,  $|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$ . Además,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  es una función continua.

**Definición 4.2.** Una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definida en  $\mathbb{C}$  es uniformemente acotada, si existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n(z)| < N$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se dice que la sucesión  $\{f_n\}$  es uniformemente acotada en  $G \subset \mathbb{C}$ , si existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que  $|f_n(z)| < N$  para todo  $z \in G$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Observación.** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto y  $(\Omega, d)$  un espacio métrico completo, denotamos por  $C(G, \Omega)$  al conjunto de todas las funciones continuas de  $G$  en  $\Omega$ .

**Definición 4.3.** Una familia  $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$  es equicontinua en un punto  $z_0 \in G$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que si  $|z - z_0| < \delta$  implica que  $d(f(z), f(z_0)) < \epsilon$  para toda  $f \in \mathcal{F}$ .

**Definición 4.4.** Una familia  $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$  es equicontinua en un conjunto  $E \subset G$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $z_1, z_2 \in E$  con  $|z_1 - z_2| < \delta$  implica que  $d(f(z_1), f(z_2)) < \epsilon$  para toda  $f \in \mathcal{F}$ .

**Proposición 4.5.** [7] Si  $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$  es equicontinua en cada punto de  $G$ , entonces  $\mathcal{F}$  es equicontinua en cada subconjunto compacto de  $G$ .

**Definición 4.6.** Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas definidas en un dominio  $D \subset \mathbb{C}$ . La familia  $\mathcal{F}$  es una familia normal si toda sucesión  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$  contiene una subsucesión  $\{f_{n_i}\}_{i=0}^\infty$  que converge uniformemente a  $f$  en cualquier conjunto compacto  $D' \subset D$  con la métrica esférica  $d_{\chi^2}$ , donde  $d_{\chi^2}$  es:

$$d_{\chi^2} = \left( \frac{2}{1 + |z|^2} \right)^2 |dz|^2.$$

El siguiente teorema relaciona los conceptos de equicontinuidad y familias normales.

**Teorema 4.7.** (Arzelá-Ascoli) [7] Si  $A \subset \mathbb{C}$  es compacto,  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$  es una sucesión de funciones uniformemente acotada y equicontinua en  $A$ , entonces existe  $\{f_{n_k}\}_{n=0}^\infty$  una subsucesión de  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  que converge uniformemente en  $A$ .

A continuación se presentan un par de ejemplos de familias normales que se pueden encontrar en [9].

**Ejemplo 1.** Sea  $f(z) = az$  con  $|a| < 1$  y  $f_n(z) = f^{on}(z)$  la  $n$ -ésima iterada de  $f$ . Entonces  $\{f_n\}$  forma una familia normal de funciones en cualquier dominio de  $\mathbb{C}$ , pues  $f_n$  converge uniformemente a la función constante 0 para todo conjunto compacto.

**Ejemplo 2.** Si  $f(z) = az$  con  $|a| > 1$ , entonces la familia  $f_n(z) = f^{on}(z)$  para cualquier dominio que no contenga al cero es normal, porque la normalidad falla para dominios que contengan al cero. En efecto, para cualquier vecindad del cero, digamos  $U_0$ , existe  $z_0$  para la que  $|f^{on}(z_0)|$  es arbitrariamente grande para alguna  $n$ , esto es,  $|f^{on}(z_0)| \geq M$  para  $M \in \mathbb{N}$ .

**Definición 4.8.** La familia  $\{\mathcal{F}_n\}$  no es normal en  $z_0$  si la familia  $\{\mathcal{F}_n\}$  no es normal en toda vecindad de  $z_0$ .

Observemos el siguiente ejemplo: Sea  $f(z) = az$  donde  $z = |z|e^{i\theta}$  y  $|a| = 1$ , la familia  $\{\mathcal{F}\}$  de iteradas de  $f$  no es normal porque para toda vecindad de  $z$ , toda sucesión  $\{f_n\}$  de  $\mathcal{F}$  no es una familia normal, ya que no tiene subsucesiones convergentes  $f_{n_i}$  tal que  $z = |z|e^{i\theta}$  converge a  $f$ .

## 4.2 Funciones Racionales y sus Iteraciones

En este apartado definimos las funciones racionales y su iteración.

**Definición 4.9.** Una función racional  $\mathcal{R} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es de la siguiente forma.

$$\mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios no ambos cero. Si  $P(z)$  es igual a cero, entonces  $\mathcal{R}(z)$  es la función constante cero. Si  $Q(z)$  es cero, entonces  $\mathcal{R}(z)$  es la función constante  $\infty$ , además  $\deg(\mathcal{R}) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ , que es el máximo de los grados usuales para los polinomios  $P(z)$  y  $Q(z)$ . Al conjunto de funciones racionales lo denotaremos por  $\mathcal{R}$ .

**Definición 4.10.** Si  $f \in \mathcal{R}$ . Definimos la  $n$ -ésima iterada de  $f(z)$  como la composición de la función  $n$ -veces, esto es;

$$f^n(z) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}$$

El siguiente teorema fue demostrado por Beardon en [4] y esta relacionado con el grado de funciones racionales.

**Teorema 4.11.** [5] *La transformación  $\text{deg} : \mathcal{R} \rightarrow \{0, 1, \dots\}$  es continua. En particular, si la función racional  $\mathcal{R}^n$  converge uniformemente en la esfera compleja a la función  $\mathcal{R}$ , entonces  $\mathcal{R}$  es racional y para  $n$  suficientemente grande,  $\text{deg}(\mathcal{R}^n) = \text{deg}(\mathcal{R})$ .*

### 4.3 Los Conjuntos de Fatou y Julia de Funciones Racionales

En este apartado se definen los principales conjuntos en la dinámica de funciones racionales. Estos conjuntos dividen a la esfera en dos conjuntos llamados estable e inestable.

**Definición 4.12.** Tomemos  $D = \hat{\mathbb{C}}$  y  $f \in \mathcal{R}$ . El conjunto de Fatou de la función  $f$  se define y denota como:

$$F(f) = \{z \in D \mid \{f^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ es normal en alguna vecindad de } z\}.$$

El complemento del conjunto de Fatou, de la función  $f$ , se define como el conjunto de Julia y se denota como  $J(f)$ .

**Observación.** El conjunto de Fatou es un conjunto abierto y como consecuencia el conjunto de Julia es cerrado.

Los siguientes dos teoremas son relacionados con algunas propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia y se puede consultar su demostración en [5] y [18].

**Teorema 4.13.** *Sea  $f$  en  $\mathcal{R}$ . El conjunto de Julia  $J(f)$  no es vacío.*

*Demostración.* Si  $J(f)$  es vacío, entonces la familia  $f^n$  es normal en toda la esfera compleja así, por el Teorema 4.11 existe una subsucesión de  $f^n$  en donde cada aplicación tiene el mismo grado. Sin embargo,  $\text{deg}(f^n) = [\text{deg}(f)]^n$  lo cual implica que  $f$  tiene grado uno, contradiciendo nuestra suposición.

**Teorema 4.14.** *Si  $f \in \mathcal{R}$ , entonces los conjuntos de Fatou y Julia son completamente invariantes. Es decir,*

$$f(J(f)) = J(f) \text{ y } f(F(f)) = F(f).$$

*Demostración.* Si  $z_0 \in F(f)$ , entonces  $\{f^n\}$  es equicontinua en una vecindad  $U$  de  $z_0$ , por la continuidad de  $f$ , la familia  $\{f^n\}$  está cerca de todo punto de  $f^{-1}(z_0)$ . Ahora supongamos que  $z_0 \in J(f)$ , entonces  $\{f^n\}$  es equicontinua en una vecindad  $V$  de  $z_0$ , así también lo es en alguna vecindad  $V'$  de  $f(z_0)$  por ser  $f$  una función abierta. Por lo tanto  $f(z_0) \in F(f)$ .

## 5 Diccionario de Sullivan

En esta sección se muestran, en el Cuadro I, cuatro analogías del diccionario de Sullivan entre la iteración de funciones racionales y la acción de los grupos de Klein, véase [18] y [20].

<b>Teoría de la Dinámica de Función Racionales <math>f(z)</math> con grado <math>\geq 2</math></b>	<b>Teoría de Grupos de Klein <math>\Gamma</math> no elemental</b>
(1) El conjunto de Julia $J(f)$	El conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$
(2) El conjunto de Fatou $F(f)$	El conjunto ordinario $\Omega(\Gamma)$
(3) $J(f) \neq \emptyset$	$\Lambda(\Gamma) \neq \emptyset$
(4) $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes	$\Omega(\Gamma)$ y $\Lambda(\Gamma)$ son $\Gamma$ -invariantes

Cuadro 1: Diccionario de Sullivan

Las cuatro analogías se establecen a partir de las siguientes observaciones:

- (1) El conjunto de Julia  $J(f)$  de una función racional  $f$  es análogo al conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  de un grupo de Klein  $\Gamma$  por la Definición 3.7 y la Definición 4.12.
- (2) El conjunto de Fatou  $F(f)$  de una función racional  $f(z)$  es análogo al conjunto ordinario  $\Omega(\Gamma)$  de un grupo de Klein  $\Gamma$  por la Definición 3.6 y la Definición 4.12.
- (3) La propiedad  $J(\mathcal{R}) \neq \emptyset$  es análoga a  $\Lambda(\Gamma) \neq \emptyset$  por la la Proposición 3.14 y el Teorema 4.13 respectivamente.
- (4) En el Teorema 4.14 se demuestra que los conjuntos de Fatou y Julia,  $F(f)$  y  $J(f)$ , son completamente invariantes. Una consecuencia importante del Teorema 3.10 es que los conjuntos ordinario y límite,  $\Omega(\Gamma)$  y  $\Lambda(\Gamma)$ , de un grupo de Klein  $\Gamma$  son  $\Gamma$ -invariantes.

## 5.1 El Conjunto Residual en el Diccionario de Sullivan

Las siguientes analogías entre los grupos de Klein y la dinámica de funciones racionales conciernen al conjunto residual, que fue inicialmente definido en 1970 y 1973, [1], [2], por Abikoff para grupos de Klein. El conjunto residual de un grupo de Klein  $\Gamma$  se define y denota en relación al conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  como:

$$\Lambda_r(\Gamma) = \{z \in \Lambda(\Gamma) : \text{Para toda componente } G \text{ de } \{\Lambda(\Gamma)\}^c : z \notin \partial G\}.$$

Con la idea de Abikoff en 1988 McMullen [16] define, en dinámica de funciones racionales, a una componente enterrada, como el conjunto de puntos en el conjunto de Julia, de una función racional, que no está en la frontera de ninguna componente del conjunto de Fatou. Da el ejemplo  $f(z) = z^2 + \lambda/z^3$ , para  $\lambda$  pequeña, donde el conjunto de Julia tiene una componente enterrada.

El conjunto residual en el conjunto de Julia de una función racional se define y denota como:

$$J_r(f) = \{z \in J(f) : \text{Para toda componente } G \text{ de } (J(f))^c : z \notin \partial G\}.$$

En el diccionario de Sullivan las definiciones de  $\Lambda_r(\Gamma)$  y  $J_r(f)$  son análogas.

## 5.2 Preguntas Relacionadas con la Sección

Morosawa en [17] enuncia el siguiente resultado para funciones racionales.

**Resultado 1.** *Si  $f$  es una función racional con grado mayor que uno, el conjunto de Julia no es conexo y el conjunto de Fatou no tiene componentes completamente invariantes, entonces el conjunto residual de  $f$  no es vacío.*

**Pregunta 1.** ¿Existe un teorema en la teoría de grupos de Klein que sea análogo al Resultado 1?

Las funciones analíticas en el plano complejo con una singularidad esencial en el infinito se llaman funciones trascendentes enteras, por ejemplo,  $f(z) = \text{sen } z$  y  $g(z) = e^z$ .

**Pregunta 2.** ¿Es posible hacer una analogía, como en el diccionario de Sullivan, entre algún grupo con la dinámica de funciones trascendentes enteras?

La Teoría de Continuos es una rama dentro de la topología. Un continuo se define como un espacio métrico conexo, compacto y no vacío. Por la definición antes mencionada, es claro que hay conjuntos de Julia de funciones racionales y funciones trascendentes enteras que son continuos.

**Pregunta 3.** ¿Tiene sentido hablar de componentes enterradas o conjunto residual en la teoría de continuos?

**Pregunta 4.** ¿Es posible establecer un tipo diccionario entre la teoría de continuos y la teoría de dinámica holomorfa?

Las preguntas antes enunciadas son un seguimiento de la investigación que llevan a cabo los autores en los temas expuestos.

## Bibliografía

- [1] Abikoff, W., Some Remarks on Kleinian groups, *Ann. of Math. Studies* **66** (1971), 1-5.
- [2] Abikoff, W., The Residual limits sets of Kleinian groups, *Acta Math.* **2130** (1973), 127-144.
- [3] Ahlfors, L.V., *Complex analysis*, (1979) McGraw Hill.
- [4] Beardon, A.F., *The geometry of discrete groups*, (1983) Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, New York.
- [5] Beardon, A.F., *Iteration of rational functions*, (2000) Springer Verlag.
- [6] Bergweiler, W., *An introduction to complex dynamics*, (1995) Textos de Matemática Serie B, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.
- [7] Conway, J.B., *Functions of one complex variable*, (1978) Springer-Verlag.
- [8] Cruz, M., *Dinámica de grupos kleinianos*, (2005) Facultad de Matemáticas, Universidad de Guanajuato.
- [9] Devaney, R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, (1988) Addison Wesley.
- [10] Fatou, P., Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France.* 47 (1919), 161-271, 48 (1920), 33-94, 208-314.

- [11] Fraleigh, J.B., *A first course in abstract algebra*, (2003) Pearson Education, Inc.
- [12] Herstein, I.N., *Abstract algebra*, (1996) Prentice-Hall, Inc.
- [13] Hidalgo, R.A., *Breve introducción a los grupos Kleinianos y variedades hiperbólicas*, (2006) Departamento de Matemática. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.
- [14] Julia, G., Sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math.Pures Appl.* 4 (1918), 47-245.
- [15] Maskit, B., *Kleinian groups*, (1988) Springer Verlag.
- [16] McMullen, C., *Automorphisms of rational maps, Holomorphic functions and Moduli I*. MSRI Publications 10, Springer Verlag, New York, 1988.
- [17] Morosawa, S., On the Residual Julia sets of rational functions, *Ergod.Th. and Dynam. Sys.* **17** (1997), 205-210.
- [18] Morosawa, S., Nishimura, T., Taniguchi, M., and Ueda, T., *Holomorphic dynamics*, (2000) Cambridge University Press.
- [19] Noguchi, J., *Introduction to complex analysis*, (1993) Translations of the Mathematical Monographs, Vol 168, American Mathematical Society.
- [20] Sullivan, D., Quasiconformal homeomorphism and dynamics I: solution of Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann of Math*, Vol 122 No 2, (1985), 401-418.
- [21] Zill, D.G. and Shanahan, P.D., *A first course of complex analysis with applications*, (2003) Jones and Bartlett Publishers.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570  
abykov@fcfm.buap.mx  
pdsoto@fcfm.buap.mx  
dherrera@fcfm.buap.mx



---

# Topología

---



## Capítulo 9

### Espacios fibrantes isovariantes

Alexander Bykov, Fernando Macías Romero,  
Marcelino Taxis Taxis  
FCFM, BUAP

#### Resumen

Una  $G$ -función  $f : X \rightarrow Y$  se llama isovariante si conserva los grupos de isotropía (estabilizadores), es decir, si  $G_x = G_{f(x)}$  para cada  $x \in X$ . Para un grupo compacto dado  $G$  consideramos la categoría  $Iso\mathcal{M}$  de  $G$ -espacios metrizablees y  $G$ -funciones isovariantes. De manera natural, puede introducirse la noción de un extensor absoluto (de vecindades) isovariante ( $Iso\mathcal{M} - A(N)E$ ); esto se hizo en [2]. Usando esta noción definimos el concepto de un espacio fibrante isovariante y estudiamos sus propiedades. En particular, mostramos que cada  $G$ -espacio métrico compacto admite una extensión fibrante isovariante.

## 1 Introducción

La noción de un espacio fibrante equivariante o un espacio  $G$ -fibrante, donde  $G$  es un grupo compacto, representa una versión natural equivariante de un espacio fibrante introducido por F. Cathey en el trabajo [15] donde los espacios fibrantes han sido utilizados para construir la categoría de *strong shape* para espacios métricos compactos. En [13] se puede encontrar una construcción semejante de la categoría de *strong shape equivariante*. De interés particular para la teoría de los  $G$ -espacios es el siguiente hecho demostrado en [9]: para cualquier subgrupo cerrado  $H$  de un grupo compacto metrizable  $G$  el espacio cociente  $G/H$  es  $G$ -fibrante.

En el presente trabajo se introduce la noción de un espacio fibrante isovariante que es una versión natural del concepto de un espacio fibrante para la categoría  $Iso\mathcal{M}$  de los  $G$ -espacios metrizablees y las  $G$ -funciones isovariantes. Mostramos que los espacios fibrantes isovariantes (llamados también espacios  $Iso\mathcal{M}$ -fibrantes) son espacios  $G$ -fibrantes. Por otra parte, la clase de espacios fibrantes isovariantes contiene la clase de los espacios  $Iso\mathcal{M} - ANE$ . De hecho, la clase de espacios fibrantes isovariantes es mucho más amplia: por ejemplo, el límite inverso de cualquier sucesión inversa de  $Iso\mathcal{M} - ANE$ 's ligados por fibraciones isovariantes es un espacio

*Iso*v-fibrante. Sin embargo, los espacios *Iso*v-fibrantes preservan algunas propiedades agradables de homotopía de los espacios *Iso*v-*ANE*, como se muestra en la Sección 4 (ver Proposición 5.5 y Corolario 5.6).

La definición de un espacio *Iso*v-fibrante utiliza la noción de una función *Iso*v-*SSDR*, que es análoga a la noción de una función *SSDR* para el caso no equivariente (introducida por F. Cathey en [15]) y la noción de una función *G-SSDR* (véase [12]). Probamos que la clase de todas las funciones *Iso*v-*SSDR* coincide con la clase de todas las funciones *G-SSDR* (Teorema 5.2). Este hecho notable, en particular, nos permite construir fácilmente, para un *G*-espacio métrico compacto dado, una extensión fibrante isovariante (Teorema 6.3). Los teoremas mencionados son los principales resultados de este trabajo.

## 2 Preliminares

En todo el capítulo la letra *G* denotará un grupo compacto de Hausdorff. Los fundamentos de la teoría de *G*-espacios (también conocida como la teoría de los grupos topológicos de transformaciones) se puede encontrar en [14], [16] y [19]. Sin embargo, para la conveniencia del lector, recordamos algunas definiciones y hechos conocidos.

Un *G*-espacio es un espacio topológico *X* junto con una acción (izquierda) continua fija  $\cdot : G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto g \cdot x$ , de *G* en *X*. En la práctica se escribe *gx* en lugar de  $g \cdot x$ . Una función continua  $f : X \rightarrow Y$ , donde *X* y *Y* son *G*-espacios, se llama *G-función* o *función equivariante* si  $f(gx) = gf(x)$  para todos los  $(g, x) \in G \times X$ . Si una *G-función* *f* es un homeomorfismo, decimos que es un *G-homeomorfismo*.

Sea *X* un *G*-espacio. Un subconjunto  $A \subset X$  se llama *invariante* o un *G-subconjunto* si  $ga \in A$  para cada  $g \in G$  y  $a \in A$ . Para  $x \in X$ , el subgrupo  $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$  se denomina el grupo de *isotropía* en *x* y el *G*-subconjunto  $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$  se llama la *G-órbita* de *x*. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una *G-función*, entonces, para cada  $x \in X$ , tenemos  $G_x \subseteq G_{f(x)}$  y  $f(G(x)) = G(f(x))$ . Una *G-función* dada se llama *isovariante* si conserva los grupos de isotropía, es decir,  $G_x = G_{f(x)}$  para cada  $x \in X$ .

Dado un *G*-espacio *X*, el conjunto de sus *G-órbitas*, dotado con la topología cociente, es llamado el *espacio orbital* de *X* y es denotado por  $X/G$ . La proyección natural  $\pi_X : X \rightarrow X/G$  (definida por  $\pi_X(x) = G(x)$ ) se llama la *proyección G-orbital* de *X*; es una *G-función* si consideramos el espacio orbital  $X/G$  como un *G*-espacio con la acción trivial de *G*.

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una  $G$ -función, entonces existe una única función continua  $f/G : X/G \rightarrow Y/G$ , llamada la función *inducida por  $f$* , tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\
 X/G & \xrightarrow{f/G} & Y/G
 \end{array} \tag{1}$$

conmuta. Claramente,  $f/G$  es definida por  $(f/G)(G(x)) = G(f(x))$ . Si  $f/G$  es un homeomorfismo, decimos que la  $G$ -función es *epivariante*.

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una  $G$ -función entre  $G$ -espacios de Hausdorff. No es difícil ver que  $f$  es isovariante si y sólo si el diagrama (1) es pull-back (véase por ejemplo [10, Proposición 4.1] para la prueba). Este hecho tiene la siguiente consecuencia.

**Proposición 2.1.** *Cualquier  $G$ -función  $f : X \rightarrow Y$  puede representarse como la composición de una función epivariante  $q : X \rightarrow P$  y una función isovariante  $f' : P \rightarrow Y$ .*

*Demostración.* Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & & & \\
 \searrow & & & & \\
 & f & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & & P & \xrightarrow{f'} & Y \\
 \searrow & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi_Y \\
 \pi_X & & X/G & \xrightarrow{f/G} & Y/G
 \end{array} \tag{2}$$

donde el cuadrado interno es pull-back y  $q$  es una  $G$ -función única que existe según definición de pull-back. Nótese que la función  $\pi'$  puede considerarse como una proyección  $G$ -orbital (véase por ejemplo [18, Proposición 4.32]). Por lo tanto  $q$  es epivariante y  $f'$  es isovariante. □

Sea  $f : A \rightarrow Y$  una  $G$ -función, donde  $A$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de algún  $G$ -espacio  $X$ . Si existe una  $G$ -función  $F : X \rightarrow Y$  tal que  $F|_A = f$  y, además, la restricción  $F|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow Y$  es isovariante, se dirá que  $F$  es una *extensión isovariante* de  $f$ .

Sea  $s : A \hookrightarrow X$  un  $G$ -encaje cerrado. Para la cotriada  $X \xleftarrow{s} A \xrightarrow{f} Y$ , se puede considerar el diagrama push-out

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow s & & \downarrow \bar{s} \\
 X & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_f Y
 \end{array} \tag{3}$$

donde el  $G$ -espacio  $X \cup_f Y$  es conocido como el espacio de adjunción que resulta de pegar  $X$  a  $Y$  por medio de  $f$ . Nótese que  $\bar{s}$  es un  $G$ -encaje cerrado y la restricción  $X \setminus A \rightarrow (X \cup_f Y) \setminus \bar{s}(f(A))$  de  $\bar{f}$  es un  $G$ -homeomorfismo (véase por ejemplo [16, Capítulo II, Proposición 1.1, p. 96]). En particular, podemos decir que  $\bar{f}$  es una extensión isovariante de  $\bar{s} \circ f : A \rightarrow X \cup_f Y$ .

En este trabajo tratamos con las categorías:

- $G\mathcal{M}$  de  $G$ -espacios metrizables y  $G$ -funciones;
- $Iso\mathcal{V}\mathcal{M}$  de  $G$ -espacios metrizables y  $G$ -funciones isovariantes.

Claramente,  $Iso\mathcal{V}\mathcal{M}$  es una subcategoría de  $G\mathcal{M}$ . La mayoría de las definiciones bien conocidas para la categoría  $G\mathcal{M}$  (o, más generalmente, para la categoría  $G\text{-}TOP$  de todos los  $G$ -espacios y  $G$ -funciones) puede repetirse fácilmente para la categoría  $Iso\mathcal{V}\mathcal{M}$ .

En el presente trabajo, preferimos dar explícitamente algunas definiciones sólo para la categoría isovariante; las correspondientes definiciones para el caso general de  $G\text{-}TOP$  se pueden encontrar en [14], [16] y [20], aunque el lector puede reproducirlas fácilmente reemplazando el prefijo “ $Iso\mathcal{V}$ ” por “ $G$ ”.

Sean  $X$  e  $Y$   $G$ -espacios. Una homotopía  $F : X \times I \rightarrow Y$ , donde  $I = [0, 1]$ , se llama *Iso\mathcal{V}*-homotopía si es una  $G$ -función isovariante considerando  $X \times I$  con la acción  $g \cdot (x, t) = (gx, t)$ . Así tenemos  $G_{F(x,t)} = G_{(x,t)} = G_{(x,0)} = G_x$  para cada  $t \in I$ . Decimos que la *Iso\mathcal{V}*-homotopía  $F$  es *relativa* para un  $G$ -subconjunto  $A \subset X$  cuando  $F(a, t) = F(a, 0)$  para cada  $a \in A$  y  $t \in I$ .

Un  $G$ -espacio metrizable  $E$  se llama *extensor absoluto isovariante de vecindades* o, brevemente, un *Iso\mathcal{V}*-ANE si toda función isovariante  $f : A \rightarrow E$ , donde  $A$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de un  $G$ -espacio metrizable  $X$ , se puede extender a una función isovariante  $\bar{f} : U \rightarrow E$ ,  $\bar{f}|_A = f$ , para alguna vecindad invariante  $U$  de

$A$  en  $X$ . Si, en este contexto,  $f$  se puede extender hasta una función isovariante  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  (es decir, se puede siempre tomar  $U = X$ ) se dice que  $E$  es *extensor absoluto isovariante* o un *Isov-AE*. Obviamente cualquier  $G$ -subconjunto abierto de un *Isov-AE* es un *Isov-ANE*.

La existencia de *Isov-AE*'s fue demostrado por S. Ageev, ver [2, Teorema 3.2] o [3, Teorema 3.1]. La prueba se basa esencialmente en [4, Teorema 5.1]. Además, se demostró que cada  $G$ -espacio metrizable admite un  $G$ -encaje cerrado en algún *Isov-AE* (ver [3, Teorema 3.2]). Para beneficio del lector, presentamos la prueba de la existencia de *Isov-AE*'s en el apéndice, de la sección final de este trabajo.

### 3 Algunos hechos sobre *Isov-ANE*-espacios

En esta sección recordamos algunas propiedades básicas de extensores isovariantes que se probaron en [2]. Primero veremos que la condición de “ser isovariante” para  $f$  en la definición de *Isov-A(N)E* puede omitirse en virtud de la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.** *Sea  $Y$  un  $G$ -espacio.*

- (i) *Si  $Y$  es un *Isov-AE*, entonces cada  $G$ -función  $f : A \rightarrow Y$ , donde  $A$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de un  $G$ -espacio  $X$ , admite una extensión isovariante  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ .*
- (ii) *Si  $Y$  es un *Isov-ANE*, entonces cada  $G$ -función  $f : A \rightarrow Y$ , donde  $A$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de un  $G$ -espacio  $X$ , admite una extensión isovariante  $\tilde{f} : U \rightarrow Y$  en alguna vecindad invariante  $U$  de  $A$  en  $X$ .*

*Demostración.* Demostraremos (ii); la prueba (i) es similar. Supongamos que  $Y$  es un *Isov-ANE* y  $f : A \rightarrow Y$  es una  $G$ -función, donde  $A$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de un  $G$ -espacio  $X$ . Usando la Proposición 2.1 representamos  $f$  como una composición  $f' \circ q$  de una función epivariante  $q : A \rightarrow P$  y una función isovariante  $f' : P \rightarrow Y$ .

Consideramos ahora el siguiente diagrama conmutativo de  $G$ -funciones:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{q} & P & \xrightarrow{f'} & Y \\
 \downarrow s & & \downarrow \bar{s} & & \\
 X & \xrightarrow{\bar{q}} & X \cup_q P & & 
 \end{array} \tag{4}$$

donde  $s$  es encaje cerrado de  $A$  en  $X$  y el cuadrado es push-out de la cotriada  $X \xleftarrow{s} A \xrightarrow{q} P$  (ver *Preliminaries*). Recordemos que  $\bar{s}$  es un  $G$ -encaje cerrado y por lo tanto, ya que  $Y$  es un *Isov-ANE* y  $f'$  es isovariante, existe una  $G$ -extensión isovariante  $F' : V \rightarrow Y$  de  $f'$  para alguna vecindad invariante  $V$  de  $\bar{s}(P)$  en  $X \cup_f P$ , es decir, tenemos  $F' \circ \bar{s} = f'$ . Tomando  $U = \bar{q}^{-1}(V)$  obtenemos una  $G$ -extensión  $F : U \rightarrow Y$  dada por  $F(u) = F'(\bar{q}(u))$ . Esta extensión es isovariante porque  $\bar{q}$  es una extensión isovariante de  $\bar{s} \circ q$  (ver *Preliminaries*).  $\square$

**Corolario 3.2.** *Cada Isov-AE es un G-AE y cada Isov-ANE es un G-ANE.*

**Proposición 3.3.** *Sean  $Y$  un Isov-ANE y  $A$  un  $G$ -subconjunto cerrado de un  $G$ -espacio  $X$ .*

- (a) *Cada  $G$ -función  $X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$  admite una extensión isovariante  $X \times I \rightarrow Y$ .*
- (b) *Si una  $G$ -función  $f : A \rightarrow Y$  admite una  $G$ -extensión  $X \rightarrow Y$ , entonces  $f$  admite también una extensión isovariante  $X \rightarrow Y$ .*

*Demostración.* (a). Sea  $W = X \times \{0\} \cup A \times I$ . Supongamos que  $\Psi : W \rightarrow Y$  es una  $G$ -función. Por la Proposición 3.1(ii), ya que  $Y$  es un *Isov-ANE*, existe una extensión isovariante  $\Psi' : U \rightarrow Y$  de  $\Psi$  en alguna vecindad invariante  $U$  de  $W$  en  $X \times I$ . No es difícil construir una función invariante  $\varphi : X \rightarrow I$  que satisfice las condiciones siguientes:

- (i)  $\varphi(x) > 0$  para todo  $x \in X$ ;
- (ii)  $\{x\} \times [0, \varphi(x)] \subset U$  para todo  $x \in X$ ;
- (iii)  $\varphi(a) = 1$  para todo  $a \in A$ .

Ahora definimos una  $G$ -función  $\tilde{\Psi} : X \times I \rightarrow Y$  por

$$\tilde{\Psi}(x, t) = \Psi'(x, t\varphi(x)).$$

es fácil ver que  $\tilde{\Psi}$  es la extensión isovariante deseada de  $\Psi$ .

(b) Es una consecuencia de (a). Supongamos que  $F_0 : X \rightarrow Y$  una  $G$ -extensión de  $f : A \rightarrow Y$ . Sea  $\Psi : W \rightarrow Y$  una  $G$ -función definida por  $\Psi(x, 0) = F_0(x)$  y  $\Psi(a, t) = f(a)$  para  $x \in X$  y  $(a, t) \in A \times I$ . Si  $\tilde{\Psi} : X \times I \rightarrow Y$  es una extensión isovariante de  $\Psi$  (que existe por (a)), entonces  $F_1 : X \rightarrow Y$  dada por  $F_1(x) = \tilde{\Psi}(x)$  es una extensión isovariante de  $f$ .  $\square$

**Corolario 3.4.** *Sea  $Y$  un Isov-ANE.*

- (a) Para cada  $G$ -función  $f : X \rightarrow Y$  existe una  $G$ -función isovariante  $f' : X \rightarrow Y$  junto con una  $G$ -homotopía  $H : X \times I \rightarrow Y$  de  $f$  a  $f'$  tal que  $H|_{X \times (0,1]}$  es isovariante.
- (b) Si dos  $G$ -funciones isovariantes  $f, f' : X \rightarrow Y$  son  $G$ -homotópicas, entonces existe también una  $G$ -homotopía isovariante  $H : X \times I \rightarrow Y$  de  $f$  a  $f'$ .

La afirmación (a) de este corolario es sólo un caso especial de la Proposición 3.3(a) cuando  $A = \emptyset$ , mientras que la afirmación (b) sigue inmediatamente de la Proposición 3.3(b).

### 4 Isov-fibraciones

Una  $G$ -función isovariante  $p : E \rightarrow B$  se llama *Isov-fibración* si para cualquier diagrama conmutativo de  $G$ -funciones isovariantes

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & \xrightarrow{f} & E \\
 & & \downarrow \partial_0 & & \downarrow p \\
 x & & X & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow & & \downarrow \partial_0 & & \downarrow p \\
 (x, 0) & & X \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array}$$

existe una homotopía isovariante  $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$  como relleno del diagrama, es decir tal que  $\tilde{F} \circ \partial_0 = f$  y  $p \circ \tilde{F} = F$ .

Para un  $G$ -espacio dado  $B$ , por  $B^I$  denotamos el espacio de todas las trayectorias continuas  $\omega : I \rightarrow B$  (con la topología compacto-abierta). Claramente  $B^I$  es un  $G$ -espacio con la acción  $\cdot$  dada por  $(g \cdot \omega)(t) = g\omega(t)$ ,  $t \in I$ . Obsérvese que para esta acción el subgrupo de isotropía  $G_\omega$  en  $\omega \in B^I$  es  $\bigcap_{t \in I} G_{\omega(t)}$ . Siguiendo el enfoque presentado en [3, §7], consideramos el  $G$ -subconjunto de  $B^I$ :

$$B^I_{Isov} = \{\omega \in B^I \mid G_{\omega(t)} = G_{\omega(0)} \text{ for all } t \in I\}.$$

Así  $\omega \in B^I_{Isov}$  si y sólo si  $G_\omega = G_{\omega(t)}$  para cada  $t \in I$ . Nótese que las funciones  $\pi_B^0 : B^I_{Isov} \rightarrow B$  y  $\pi_B^1 : B^I_{Isov} \rightarrow B$ , definidos por  $\pi_B^0(\omega) = \omega(0)$  y  $\pi_B^1(\omega) = \omega(1)$  respectivamente, son  $G$ -funciones isovariantes. También usaremos el símbolo  $\pi_B$  para la  $G$ -función isovariante  $B^I_{Isov} \rightarrow (B \times B)_{Isov}$ ,  $\omega \mapsto (\omega(0), \omega(1))$ , donde

$$(B \times B)_{Isov} = \{(b_0, b_1) \in B \times B \mid G_{b_0} = G_{b_1}\}.$$

Ahora sea  $p : E \rightarrow B$  una  $G$ -función. El *cocilindro isovariante* de  $p$ , denotado por  $coCyl_{I_{sov}}(p)$ , se define como el pull-back de la tríada  $E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{\pi_B^0} B_{I_{sov}}^I$ , de modo que tenemos el diagrama de pull-back

$$\begin{array}{ccc} coCyl_{I_{sov}}(p) & \xrightarrow{\widehat{p}} & B_{I_{sov}}^I \\ \widehat{\pi_B^0} \downarrow & & \downarrow \pi_B^0 \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array} \quad (5)$$

Explícitamente,  $coCyl_{I_{sov}}(p) = \{(y, \omega) \in E \times B_{I_{sov}}^I \mid p(y) = \omega(0)\}$  con las proyecciones  $\widehat{\pi_B^0} : coCyl_{I_{sov}}(p) \rightarrow E$ ,  $(y, \omega) \mapsto y$  y  $\widehat{p} : coCyl_{I_{sov}}(p) \rightarrow B_{I_{sov}}^I$ ,  $(y, \omega) \mapsto \omega$ . Si sustituimos, en el diagrama (5),  $B_{I_{sov}}^I$  por el  $G$ -espacio  $B^I$  obtendremos claramente el *cocilindro* “usual”  $coCyl(p)$  de  $p$ .

Es fácil comprobar que:

- $B$  es un  $I_{sov}$ -ANE  $\Rightarrow B_{I_{sov}}^I$  y  $B^I$  son  $I_{sov}$ -ANE's.
- $B$  es un  $I_{sov}$ -ANE  $\Rightarrow (B \times B)_{I_{sov}}$  y  $B \times B$  son  $I_{sov}$ -ANE's.
- $p : E \rightarrow B$  es una  $G$ -función isovariante de  $I_{sov}$ -ANE's  $\Rightarrow coCyl_{I_{sov}}(p)$  y  $coCyl(p)$  son  $I_{sov}$ -ANE's.

**Lema 4.1.** *La  $G$ -función,  $\pi_B : B_{I_{sov}}^I \rightarrow (B \times B)_{I_{sov}}$  es una  $I_{sov}$ -fibración para cualquier  $G$ -espacio  $B$ .*

*Demostración.* Sean  $f : X \rightarrow B_{I_{sov}}^I$  y  $F : X \times I \rightarrow (B \times B)_{I_{sov}}$   $G$ -funciones isovariantes tales que  $\pi_B \circ f = F \circ \partial_0$ , es decir,  $(f(x)(0), f(x)(1)) = F(x, 0)$  para cada  $x \in X$ . Es fácil ver que la función

$$\varphi : X \times ((\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (\{1\} \times I)) \rightarrow B$$

dada por  $(\varphi(x, 0, t), \varphi(x, 1, t)) = F(x, t)$  y  $\varphi(x, t, 0) = f(x)(t)$  para  $x \in X$ ,  $t \in I$ , es una  $G$ -función bien definida. Dado que las funciones  $f$  y  $F$  son  $G$ -funciones isovariantes,  $\varphi$  es también isovariante. Sea

$$\varrho : I \times I \rightarrow (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (\{1\} \times I)$$

una retracción, definimos una  $G$ -función  $\widetilde{F} : X \times I \rightarrow B_{I_{sov}}^I$  por  $\widetilde{F}(x, t)(\tau) = \varphi(x, \varrho(\tau, t))$ . Note que  $G_{\widetilde{F}(x, t)(\tau)} = G_x$ , así que  $\widetilde{F}(x, t) \in B_{I_{sov}}^I$  y  $\widetilde{F}$  es isovariante. Además,

$$\pi_B(\widetilde{F}(x, t)) = (\varphi(x, \varrho(0, t)), \varphi(x, \varrho(1, t))) = (\varphi(x, 0, t), \varphi(x, 1, t)) = F(x, t)$$

y  $\widetilde{F}(x, 0)(\tau) = \varphi(x, \varrho(\tau, 0)) = \varphi(x, \tau, 0) = f(x)(\tau)$ . Esto demuestra que  $\pi_B$  es una *Isov*-fibración.  $\square$

Un *G*-encaje cerrado  $s : A \hookrightarrow X$  se llama *Isov-SDR-mapeo* si existe una *G*-homotopía isovariante  $D : X \times I \rightarrow X$  tal que  $D(x, 0) = x$ ,  $D(x, 1) \in s(A)$  y  $D(s(a), t) = s(a)$  para cada  $x \in X$  y  $a \in A$ . La función  $D$  puede llamarse una *deformación isovariante fuerte* de  $X$  sobre  $s(A)$ . Claramente,  $s$  tiene un inverso derecho  $r : X \rightarrow A$  definido como sigue:  $r(x) = a$  si  $s(a) = D(x, 1)$ ; por esta razón  $s(A)$  se llama un *retracto por deformación isovariante fuerte* de  $X$  (SDR son las letras iniciales de **Strong Deformation Retract**). Si, además, la homotopía  $D$  es tal que  $rD(x, t) = r(x)$  para cada  $x \in X$  y  $t \in I$ , se dirá que  $s : A \hookrightarrow X$  es un *fiber Isov-SDR-mapeo* con respecto a  $r$ . Por supuesto, de manera similar se puede definir un *fiber G-SDR-mapeo* omitiendo la condición de ser isovariante para  $D$ .

Se sigue fácilmente de Lema 4.1 que las proyecciones  $\pi_B^0, \pi_B^1 : B_{I_{\text{Isov}}}^I \rightarrow B$  son *Isov*-fibraciones. La *G*-función  $s_B : B \rightarrow B_{I_{\text{Isov}}}^I$ ,  $b \mapsto c_b$ , donde  $c_b : I \rightarrow B$ ,  $t \mapsto b$ , es la función constante, es una sección para ambas proyecciones. Además, existe una homotopía isovariante  $D : B_{I_{\text{Isov}}}^I \times I \rightarrow B_{I_{\text{Isov}}}^I$  (de  $id_{B_{I_{\text{Isov}}}^I}$  a  $s_B \circ \pi_B^0$ ) dada por  $D(\omega, t) = \omega_t$ , donde  $\omega_t : I \rightarrow B$  es tal que  $\omega_t(\tau) = \omega(\tau(1 - t))$ . En consecuencia,  $s_B : B \hookrightarrow B_{I_{\text{Isov}}}^I$  es un *fiber Isov-SDR-mapeo* con respecto a  $\pi_B^0 : B_{I_{\text{Isov}}}^I \rightarrow B$  ya que  $D$  satisface la definición correspondiente (dada arriba).

Puesto que el diagrama (5) es pull-back, algunas propiedades de  $\widehat{\pi_B^0}$  son análogas a las de  $\pi_B^0$ . En particular,  $\widehat{\pi_B^0}$  es una función isovariante; además, si  $p$  es isovariante,  $\widehat{\pi_B^0}$  es una *Isov*-fibración. La sección  $s_B$  de  $\pi_B^0$  induce la sección

$$s_p : E \hookrightarrow \text{coCyl}_{I_{\text{Isov}}}(p), \quad y \mapsto (y, c_{p(y)})$$

de  $\widehat{\pi_B^0}$  lo cual es un *fiber Isov-SDR-mapeo*. Explícitamente, la función

$$D_p : \text{coCyl}_{I_{\text{Isov}}}(p) \times I \rightarrow \text{coCyl}_{I_{\text{Isov}}}(p), \quad ((y, \omega), t) \mapsto (y, \omega_t),$$

es una *deformación isovariante fuerte* de  $\text{coCyl}_{I_{\text{Isov}}}(p)$  sobre  $s_p(E)$ .

**Proposición 4.2.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una *G*-función isovariante. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xhookrightarrow{s_p} & \text{coCyl}_{I_{\text{Isov}}}(p) \\ & \searrow p & \swarrow \tilde{p} \\ & & B \end{array}$$

donde la *G*-función  $\tilde{p}$ , definida por  $\tilde{p}(x, \omega) = \omega(1)$ , es una *Isov*-fibración.

*Demostración.* Hay que buscar un relleno  $\widetilde{F} : X \times I \rightarrow coCyl_{Isov}(p)$  para el diagrama conmutativo de  $G$ -funciones invariantes

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & coCyl_{Isov}(p) \\
 \partial^0 \downarrow & & \downarrow \widetilde{p} \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & B
 \end{array} \tag{6}$$

De los diagramas (5) y (6) obtenemos el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
 & X & \xrightarrow{\widehat{p} \circ f} & B^I_{Isov} & \\
 & \downarrow & & \downarrow \pi_B^0 & \searrow \pi_B^1 \\
 \partial^0 & X & \xrightarrow{\widehat{\pi}_B^0 \circ f} & E & \xrightarrow{p} & B \\
 & \nearrow f' & & & & \\
 & X \times I & \xrightarrow{F} & & & B
 \end{array} \tag{7}$$

donde la función  $f'$  se define por  $f'(x, t) = \widehat{\pi}_B^0 \circ f(x)$ . Ahora, por el Lema 4.1, podemos encontrar una función isovariante  $\widetilde{f} : X \times I \rightarrow B^I_{Isov}$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\widehat{p} \circ f} & B^I_{Isov} \\
 \partial_0 \downarrow & \nearrow \widetilde{f} & \downarrow \pi_B \\
 X \times I & \xrightarrow{(p \circ f', F)} & (B \times B)_{Isov}
 \end{array} \tag{8}$$

conmuta. Por la conmutatividad de este diagrama tenemos que  $\pi_B^0 \circ \widetilde{f} = p \circ f'$ , y por lo tanto las funciones  $\widetilde{f}$  y  $f'$  definen una  $G$ -función única  $\widetilde{F} : X \times I \rightarrow coCyl(p)$  tal que  $\widehat{p} \circ \widetilde{F} = \widetilde{f}$  y  $\widehat{\pi}_B^0 \circ \widetilde{F} = f'$  (ver el diagrama (5)). Es fácil comprobar que  $\widetilde{F}$  es el relleno requerido del diagrama (6).  $\square$

Cada  $G$ -fibración isovariante es obviamente una  $Iso$ v-fibración. Por otro lado, el siguiente ejemplo muestra que una  $Iso$ v-fibración no es necesariamente una  $G$ -fibración.

Sea  $H$  un subgrupo cerrado de algún grupo compacto  $G$  tal que  $H \neq G$  y sea  $B = (G/H \times [-1, 1]) / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia mínima en  $G/H \times [-1, 1]$  tal que  $(z, 0) \sim (z', 0)$  (de modo que  $B$  puede considerarse como  $Cone(G/H \sqcup G/H)$ , es decir, el cono sobre la unión disjunta  $G/H \sqcup G/H$ ). Claramente,  $B$  es un  $G$ -espacio con la acción natural de  $G$ :  $g' \cdot [gH, t] = [g'gH, t]$ , donde  $[gH, t]$  es la clase de equivalencia de  $(gH, t) \in G/H \times [-1, 1]$ .

Según el Lema 4.1,  $\pi_B : B^I_{Isov} \rightarrow (B \times B)_{Isov}$  es un  $Isov$ -fibración. Demostraremos que  $\pi_B$  no es una  $G$ -fibración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de  $G$ -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 G/H & \xrightarrow{f} & B^I_{Isov} \\
 \downarrow \partial_0 & & \downarrow \pi_B \\
 G/H \times I & \xrightarrow{F} & (B \times B)_{Isov}
 \end{array}$$

donde  $\partial_0(z) = (z, 0)$ ,  $f(z) = c_{[z,0]}$  (el camino constante en  $[z, 0]$ ) y  $F(z, t) = ([z, t], [z, -t])$  para  $z \in G/H$  y  $t \in [-1, 1]$ . Supongamos que existe una  $G$ -función  $\tilde{F} : G/H \times I \rightarrow B^I_{Isov}$  tal que  $\pi \circ \tilde{F} = F$  y  $\tilde{F} \circ \partial_0 = f$ . En particular, para el camino  $\omega = \tilde{F}(eH, 1)$  tenemos  $\pi_B(\omega) = F(eH, 1)$ , es decir  $\omega(0) = [eH, 1]$  y  $\omega(1) = [eH, -1]$ . Por lo tanto existe  $t \in I$  tal que  $\omega(t) = [z, 0]$ . Claramente,  $G_{[z,0]} = G$  y  $G_{[eH,1]} = H$ . Así  $G_{\omega(t)} \neq G_{\omega(0)}$ . Pero  $\omega \in B^I_{Isov}$ ; es una contradicción.

### 5 $Isov$ -SSDR-mapeos y espacios $Isov$ -fibrantes

En [15], F. Cathey utilizó la noción de un  $SSDR$ -mapeo y una noción relacionada con el espacio fibrante para construir la categoría de strong shape para los espacios compactos metrizables (“SSDR” representa Strong Shape Deformation Retract).

Un  $G$ -encaje cerrado  $s : A \hookrightarrow X$  se llama un  $Isov$ -SSDR-mapeo si por cada  $Isov$ -fibración  $p : E \rightarrow B$  de  $Isov$ -ANE's y cualquier diagrama conmutativo de  $G$ -funciones isovariantes

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow s & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{F} & B
 \end{array} \tag{9}$$

existe una  $G$ -función isovariante  $\tilde{F} : X \rightarrow E$  como relleno.

La siguiente proposición proporciona algunas caracterizaciones de *Isov-SSDR*-mapeos (ver [15, Teorema 1.2] y [13, Teorema 2.1] para caracterizaciones similares de *SSDR*-mapeos y *G-SSDR*-mapeos, respectivamente).

**Proposición 5.1.** *Sea  $s : A \hookrightarrow X$  un  $G$ -encaje cerrado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a)  *$s$  es un  $Isov-SSDR$ -mapeo.*
- (b) *Para cada  $G$ -función isovariante  $f : A \rightarrow Y \in Isov-ANE$  existe una  $G$ -extensión isovariante  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ ,  $\tilde{f} \circ s = f$ , y si  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : X \rightarrow Y$  son dos de tales extensiones, entonces  $\tilde{f}_0 \simeq_{Isov} \tilde{f}_1 \text{ rel.}s(A)$ .*
- (c) *Si  $X$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de un  $Isov-AE$ -espacio  $M$ , entonces para cada par de vecindades invariantes  $U$  y  $V$  de  $X$  y  $A$ , respectivamente, en  $M$  existe una  $G$ -homotopía isovariante  $D : X \times I \rightarrow U \text{ rel.}s(A)$  tal que  $D(x, 0) = x$ ,  $D(x, 1) \in V$ .*

*Demostración.* Claramente, podemos asumir que  $A \subset X$  y así tenemos  $s(a) = a$  para toda  $a \in A$ .

(a) $\Rightarrow$ (b). Sea  $f : A \rightarrow Y$  una función isovariante donde el  $G$ -subconjunto  $Y$  es un *Isov-ANE*. De acuerdo con [3, Teorema 3.2] podemos considerar  $Y$  como un  $G$ -subconjunto cerrado de algún *Isov-AE*-espacio  $M$  y sea  $j : Y \hookrightarrow M$  el  $G$ -encaje correspondiente. Puesto que  $M$  es un *Isov-AE*, existe una  $G$ -extensión isovariante  $\tilde{f} : X \rightarrow M$  de la función isovariante  $j \circ f$ . Entonces, usando la Proposición 4.2, podemos construir el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & Y & \hookrightarrow & coCyl_{Isov}(j) \\
 \downarrow s & & \downarrow j & \swarrow \tilde{j} & \\
 X & \xrightarrow{\tilde{f}} & M & & 
 \end{array} \tag{10}$$

donde  $i$  es un fiber *Isov-SDR*-mapeo y  $\tilde{j}$  es una *Isov*-fibración. Por la definición de *Isov-SSDR*-mapeo, para este diagrama, existe un relleno  $F : X \rightarrow coCyl_{Isov}(j)$ ; en particular, tenemos  $F \circ s = i \circ f$ . Si  $r : coCyl_{Isov}(j) \rightarrow Y$  es una retracción isovariante tal que  $r \circ i = id_Y$ , entonces  $\tilde{f} = r \circ F : X \rightarrow Y$  es la deseada  $G$ -extensión isovariante de  $f$ .

Si  $\widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1 : X \rightarrow Y$  son dos extensiones isovariantes  $f$ , entonces podemos considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varphi} & Y_{I_{sov}}^I \\
 \downarrow s & & \downarrow \pi_Y \\
 X & \xrightarrow{\Phi} & (Y \times Y)_{I_{sov}}
 \end{array}$$

donde  $\pi_Y(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$   $\varphi(a)(t) = \widetilde{f}_0(a) = \widetilde{f}_1(a)$  y  $\Phi(x) = (\widetilde{f}_0(x), \widetilde{f}_1(x))$  para  $a \in A$ ,  $x \in X$  y  $t \in I$ . Por el Lema 4.1  $\pi_Y$  es una *Isov*-fibración de *Isov-ANE*'s y, por lo tanto, el diagrama tiene un relleno  $\widetilde{\Phi} : X \rightarrow Y_{I_{sov}}^I$  de acuerdo con la definición de *Isov-SSDR*-mapeo. Ahora definimos una función  $F : X \times I \rightarrow Y$  mediante  $F(x, t) = \widetilde{\Phi}(x)(t)$ . Entonces  $F$  es una homotopía isovariante relativa a  $A = s(A)$  de  $\widetilde{f}_0$  a  $\widetilde{f}_1$ .

(b) $\Rightarrow$  (c). Supongamos que  $X$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de un *Isov-AE*-espacio  $M$ . Sean  $U$  y  $V$  vecindades abiertas invariantes de  $X$  y  $A$  en  $M$  respectivamente. Ya que  $V$  es un *Isov-ANE* existe, por (b), una  $G$ -función isovariante  $f : X \rightarrow V$  tal que  $f(a) = a$  para cada  $a \in A$ . Así tenemos las  $G$ -funciones isovariantes  $f_0, f_1 : X \rightarrow U$  dadas por  $f_0(x) = x$  y  $f_1(x) = f(x)$ . Como  $U$  es un *Isov-ANE* y  $f_0(a) = f_1(a) = a$  para cada  $a \in A$ , podemos encontrar, de nuevo por (b), una  $G$ -homotopía isovariante  $D : X \times I \rightarrow U$  relativa a  $A$  tal que  $D(x, 0) = f_0(x) = x$  y  $D(x, 1) = f_1(x) = f(x) \in V$ .

(c) $\Rightarrow$  (a). Consideremos el diagrama (9), donde  $p$  es una *Isov*-fibración de *Isov-ANE*'s, y supongamos que  $X$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de algún *Isov-AE*-espacio  $M$ . Puesto que  $E$  y  $B$  son *Isov-ANE*'s, existen  $G$ -extensiones isovariantes  $f' : V' \rightarrow E$  y  $F' : U \rightarrow B$  de  $f$  y  $F$  respectivamente para algunas vecindades abiertas invariantes de  $A$  y  $X$  en  $M$ . Tenemos  $p \circ f'|_A = F' \circ s|_A = F'|_A$  y por lo tanto, usando que  $B$  es un *Isov-ANE*, podemos encontrar una vecindad invariante  $V$  de  $A$  en  $M$  tal que  $V \subset U \cap V'$  y  $p \circ f'|_V \simeq_{I_{sov}} F'|_V \text{ rel. } A$ .

Ahora sea  $D : X \times I \rightarrow U$  una  $G$ -homotopía isovariante que existe para  $U$  y  $V$  según (c). En particular,  $D_1 \simeq_{I_{sov}} D_0 \text{ rel. } A$  para las funciones  $D_0, D_1 : X \rightarrow U$  tales que  $D_0(x) = D(x, 0) = x$  y  $D_1(x) = D(x, 1) \in V$ . Por consiguiente, tenemos

$$p \circ f' \circ D_1 \simeq_{I_{sov}} F' \circ D_1 \simeq_{I_{sov}} F' \circ D_0 \text{ rel. } A.$$

Pero  $F' \circ D_0 = F$  y por lo tanto obtenemos una  $G$ -homotopía isovariante  $H : X \times I \rightarrow B$  relativa a  $A$  para la cual  $H_0 = p \circ (f' \circ D_1)$  y  $H_1 = F$ . Como  $p$  es

una *Isov*-fibración, hay una  $G$ -homotopía isovariante  $\widetilde{H} : X \times I \rightarrow E$  relativa a  $A$  tal que  $p \circ \widetilde{H} = H$  y  $\widetilde{H}_0(x) = \widetilde{H}(x, 0) = f' \circ D_1(x)$ . Obviamente, la función  $\widetilde{F} = \widetilde{H}_1 : X \rightarrow E, x \mapsto \widetilde{H}(x, 1)$ , es un relleno del diagrama (9). Esto demuestra que  $s$  es un *Isov-SSDR*-mapeo.  $\square$

Claramente,  $\{Isov\text{-}SSDR\text{-}funciones\} \subsetneq \{G\text{-}SSDR\text{-}funciones\}$ . Sin embargo, tenemos la condición siguiente.

**Teorema 5.2.** *La clase de todos los Isov-SSDR- mapeos coincide con la clase de todos G-SSDR-mapeos.*

*Demostración.* La condición análoga a la condición (c) de la Proposición 5.1 para el caso general de  $G$ -espacios y  $G$ -funciones (en particular, cuando el espacio  $M$  en (c) es un  $G$ -*AE*) caracteriza los  $G$ -*SSDR*-mapeos (véase, por ejemplo, [12], donde esta condición se utiliza para definir la noción de un  $G$ -*SSDR*-mapeo). Este hecho implica inmediatamente que cada *Isov-SSDR*-mapeo es un  $G$ -*SSDR*-mapeo puesto que el espacio  $M$  en la Proposición 5.1(c) siendo *Isov-AE* es también un  $G$ -*AE*.

Para probar que  $\{Isov\text{-}SSDR\text{-}mapeos\} \supset \{G\text{-}SSDR\text{-}mapeos\}$  verificaremos la condición (b) de la Proposición 5.1 para un  $G$ -*SSDR*-mapeo  $s : A \hookrightarrow X$  dado. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $A \subset X$ .

Sea  $f : A \rightarrow Y$  una función isovariante donde  $Y$  es un *Isov-ANE*. Ya que  $Y$  es también un  $G$ -*ANE*, existe una  $G$ -extensión  $X \rightarrow Y$  de  $f$  (ver [12, Teorema 2.1(b)]). Por lo tanto existe también una extensión isovariante  $X \rightarrow Y$  de  $f$  en virtud de la Proposición 3.3(b).

Para ver que la segunda parte de la condición (b) de la Proposición 5.1 es valida para  $s$  utilizaremos el hecho de que el encaje  $i : X \times \{0, 1\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  es un  $G$ -*SSDR*-mapeo (ver [11, Proposición A.3]).

Sean  $\widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1 : X \rightarrow Y$  dos extensiones isovariantes de  $f$ . La función

$$F : X \times \{0, 1\} \cup A \times I \rightarrow Y$$

dada por  $F(x, 0) = \widetilde{f}_0(x), F(x, 1) = \widetilde{f}_1(x)$  y  $F(a, t) = f(a)$  para  $x \in X, a \in A$  y  $t \in I$ , admite una  $G$ -extensión  $X \times I \rightarrow Y$  puesto que  $i$  es un  $G$ -*SSDR*-mapeo y  $Y$  es  $G$ -*ANE* (ver [12, Teorema 2.1(b)]). Por lo tanto, según la Proposición 3.3(b),  $F$  admite también una extensión isovariante  $\widetilde{F} : X \times I \rightarrow Y$  que es, obviamente, la homotopía isovariante requerida de  $\widetilde{f}_0$  a  $\widetilde{f}_1$ .  $\square$

Un  $G$ -espacio  $Y$  se llama *Isov-fibrante* si para cada *Isov-SSDR*-mapeo  $s : A \hookrightarrow X$  y para cada *Isov*-mapeo  $f : A \rightarrow Y$  existe un *Isov*-mapeo  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  tal que  $\tilde{f} \circ s = f$ .

Claramente, cada *Isov-ANE* es un espacio *Isov-fibrante* (ver proposición 5.1(b)).

**Proposición 5.3.** *Sea  $Y$  un  $G$ -espacio.  $Y$  es un espacio *Isov-fibrante* si y sólo si para cada *G-SSDR*-mapeo  $s : A \hookrightarrow X$  y cada *G*-función  $f : A \hookrightarrow Y$  existe una extensión isovariante  $F : X \rightarrow Y$ .*

*Demostración.* El argumento es similar a la demostración de la Proposición 3.1. Claramente, tenemos que demostrar solamente la “necesidad”.

Supongamos que  $Y$  es un espacio *Isov-fibrante*. Sea  $f : A \rightarrow Y$  una *G*-función donde  $A$  es un *G*-subconjunto cerrado de un *G*-espacio  $X$  tal que el encaje  $s : A \hookrightarrow X$  es un *G-SSDR*-mapeo. Por la Proposición 2.1 podemos representar  $f$  como una composición  $f = f' \circ q$  de una *G*-función  $q : A \rightarrow P$  y una *G*-función isovariante  $f' : P \rightarrow Y$ . Luego consideramos el diagrama (4) donde el cuadrado es el push-out de la cotriada  $X \xleftarrow{s} A \xrightarrow{q} P$ . Observe que, en este diagrama, el encaje  $\bar{s} : P \hookrightarrow X \cup_q P$  es un *G-SSDR*-mapeo tanto como  $s$  (es una consecuencia fácil de la definición de un *G-SSDR*-mapeo). Puesto que  $\bar{s}$  es también un *Isov-SSDR*-mapeo y  $f'$  es un isovariante, existe una *G*-extensión isovariante  $F' : X \cup_q P \rightarrow Y$  de  $f'$ . La composición  $F = F' \circ \bar{q}$  es una extensión isovariante de  $f$  ya que  $\bar{q}$  es una extensión isovariante de  $\bar{s} \circ q$ .  $\square$

**Corolario 5.4.** *Cada espacio *Isov-fibrante* es un espacio *G-fibrante*.*

La siguiente proposición y su corolario pueden considerarse como unas pequeñas generalizaciones de la Proposición 3.3 y el Corolario 3.4, respectivamente.

**Proposición 5.5.** *Sean  $Y$  es un espacio *Isov-fibrante* y  $A$  un *G*-subconjunto cerrado de un *G*-espacio  $X$ .*

- (a) *Cada  $G$ -función  $X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$  admite una extensión isovariante  $X \times I \rightarrow Y$ .*
- (b) *Si una  $G$ -función  $f : A \rightarrow Y$  admite una  $G$ -extensión  $X \rightarrow Y$ , entonces  $f$  admite también una extensión isovariante  $X \rightarrow Y$ .*

*Demostración.* Como el encaje  $X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  es un *G-SSDR*-mapeo (véase, por ejemplo [11, p. 50]), la condición (a) viene de la Proposición 5.3.

Para probar (b) supongamos que  $F_0 : X \rightarrow Y$  es una *G*-extensión de  $f$ , es decir,  $F_0|_A = f$ . Definimos  $F : X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$  por  $F(x, 0) = F_0(x)$  y  $F(a, t) = f(a)$  para cada  $x \in X$ ,  $a \in A$  y  $t \in I$ . Según (a), la *G*-función  $F$  admite una extensión

isovariante  $\widetilde{F} : X \times I \rightarrow Y$ . Obviamente, la  $G$ -función  $F_1 : X \rightarrow Y$ , dada por  $F_1(x) = \widetilde{F}(x, 1)$ , es la extensión isovariante requerida de  $f$ .  $\square$

**Corolario 5.6.** *Sea  $Y$  un espacio Isov-fibrante.*

- (a) *Para cualquier  $G$ -función  $f : X \rightarrow Y$  existe una  $G$ -función isovariante  $f' : X \rightarrow Y$  junto con una  $G$ -homotopía  $H : X \times I \rightarrow Y$  de  $f$  a  $f'$  tal que la restricción  $H|_{X \times (0,1]}$  es isovariante.*
- (b) *Si las  $G$ -funciones isovariantes  $f, f' : X \rightarrow Y$  son  $G$ -homotópicas, entonces existe una  $G$ -homotopía isovariante  $H : X \times I \rightarrow Y$  de  $f$  a  $f'$ .*

## 6 Extensiones fibrantes isovariantes

Una  $G$ -función  $p : E \rightarrow B$  se llama *una  $G$ -fibración fuerte* (respectivamente, un mapeo  $G$ -suave) si para cualquier  $G$ -SSDR-mapeo (respectivamente, para cualquier  $G$ -encaje cerrado)  $s : A \hookrightarrow X$  y para cualquier diagrama conmutativo de  $G$ -funciones

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow s & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{F} & B
 \end{array} \tag{11}$$

existe una  $G$ -función  $\widetilde{F} : X \rightarrow E$  como un relleno (es decir, tal que  $p \circ \widetilde{F} = F$  y  $\widetilde{F} \circ s = f$ ). Pasando al caso “isovariante” obtenemos la siguiente definición: una  $G$ -función isovariante  $p : E \rightarrow B$  se llama *una Isov-fibración fuerte* (respectivamente, mapeo *Isov-suave*) si para cualquier *Isov*-SSDR-mapeo (respectivamente, para cualquier  $G$ -encaje cerrado)  $s : A \hookrightarrow X$  y para cualquier diagrama conmutativo (11) de  $G$ -funciones isovariantes, existe una  $G$ -función isovariante  $\widetilde{F} : X \rightarrow E$  como un relleno.

Si  $p : E \rightarrow B$  es un mapeo  $G$ -suave, entonces, en particular, existe una sección  $s : B \hookrightarrow E$ . Además, es fácil demostrar que cualquier sección  $s$  es un fiber  $G$ -SDR-mapeo con respecto  $p$ .

Sean  $X$  y  $Y$   $G$ -espacios. Siguiendo los trabajos [16, p. 50] y [3, §6], consideremos el  $G$ -espacio

$$I(X, Y) = \{(x, y) \in X \times Y \mid G_x \subseteq G_y\}$$

(con la acción diagonal) y las proyecciones naturales  $q_X : I(X, Y) \rightarrow X, (x, y) \mapsto x$  y  $q_Y : I(X, Y) \rightarrow Y, (x, y) \mapsto y$ . Observe que la proyección  $q_X$  es una función isovariante porque  $G_{(x,y)} = G_x \cap G_y = G_x$ .

**Proposición 6.1.**

- (a) Si  $Y$  es un  $G$ -AE, entonces  $q_X : I(X, Y) \rightarrow X$  es un mapeo *Isov-suave* para cualquier  $G$ -espacio  $X$ .
- (b) Si  $X$  es un *Isov-AE*, entonces  $q_Y : I(X, Y) \rightarrow Y$  es un mapeo  $G$ -suave para cualquier  $G$ -espacio  $Y$ .

La afirmación (a) de esta proposición es, de hecho, el Teorema 9.2 de [2], mientras (b) es el Teorema 6.1 de [3]. La prueba de la siguiente proposición es similar a la demostración de estas afirmaciones.

**Proposición 6.2.**

- (a) Si  $Y$  es un espacio  $G$ -fibrante, entonces  $q_X : I(X, Y) \rightarrow X$  es una *Isov-fibración fuerte* para cualquier  $G$ -espacio  $X$ .
- (b) Si  $X$  es un espacio *Isov-fibrante*, entonces  $q_Y : I(X, Y) \rightarrow Y$  es una  $G$ -fibración fuerte para cualquier  $G$ -espacio  $Y$ .

*Demostración.* (a) Sea  $s : A \hookrightarrow Z$  un *Isov-SSDR*-mapeo y supongamos que  $f : A \rightarrow I(X, Y)$  y  $F_X : Z \rightarrow X$  son funciones isovariantes tales que  $q_X \circ f = F_X \circ s$ . Para probar que  $q_X$  es una *Isov-fibración fuerte* debemos encontrar una función isovariante  $\tilde{F} : Z \rightarrow I(X, Y)$  para la cual  $\tilde{F} \circ s = f$  y  $q_X \circ \tilde{F} = F_X$ . Ya que  $Y$  es un espacio  $G$ -fibrante y  $s$  es un  $G$ -SSDR-mapeo existe una  $G$ -función  $F_Y : Z \rightarrow Y$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & I(X, Y) \\
 \downarrow s & & \downarrow q_X \\
 Z & \xrightarrow{F_X} & X \\
 & \searrow F_Y & \downarrow q_Y \\
 & & Y
 \end{array} \tag{12}$$

conmuta. Nótese que  $G_{F_X(z)} = G_z \subseteq G_{F_Y(z)}$  para cada  $z \in Z$ . Por lo tanto, la fórmula  $\widetilde{F}(z) = (F_X(z), F_Y(z))$  define una función isovariante  $\widetilde{F} : Z \rightarrow I(X, Y)$  la cual satisface las condiciones deseadas.

(b). Sea  $s : A \hookrightarrow Z$  un  $G$ -SSDR-mapeo. Claramente, podemos asumir que  $A \subset Z$ , es decir,  $s(a) = a$  para cada  $a \in A$ . Supongamos que  $f : A \rightarrow I(X, Y)$  y  $F_Y : Z \rightarrow Y$  son  $G$ -funciones tales que  $q_Y \circ f = F_Y \circ s$ . Para probar que  $q_Y$  es una  $G$ -fibración fuerte debemos encontrar una  $G$ -función  $\widetilde{F} : Z \rightarrow I(X, Y)$  para la cual  $\widetilde{F} \circ s = f$  y  $q_Y \circ \widetilde{F} = F_Y$ . Como  $X$  es un espacio *Iso*v-fibrante y  $s$  es un  $G$ -SSDR-mapeo existe, por la Proposición 5.3, una  $G$ -extensión isovariante  $F_X : Z \rightarrow X$  de  $q_X \circ f$ . Así podemos considerar el diagrama (12). Si  $z \in A$ , entonces tenemos

$$G_{F_Y(z)} = G_{q_Y(f(z))} \supseteq G_{f(z)} = G_{q_X(f(z))} = G_{F_X(z)}$$

(hemos usado que  $q_X$  es isovariante). Si  $z \in Z \setminus A$ , entonces  $G_{F_X(z)} = G_z \subseteq G_{F_Y(z)}$ . De ahí la fórmula  $\widetilde{F}(z) = (F_X(z), F_Y(z))$  define una  $G$ -función  $\widetilde{F} : Z \rightarrow I(X, Y)$ . Es fácil ver que  $\widetilde{F}$  satisface las condiciones deseadas. □

Según [13, Teorema 3.6] cada  $G$ -espacio compacto  $E$  admite una  $G$ -extensión fibrante, es decir, existe un  $G$ -encaje cerrado  $s : E \hookrightarrow \hat{E}$  tal que  $s$  es un  $G$ -SSDR-mapeo y  $\hat{E}$  es un espacio  $G$ -fibrante. Utilizaremos este resultado en la construcción de una extensión fibrante isovariante dada en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 6.3.** *Para cada  $G$ -espacio compacto  $E$  existe un  $G$ -encaje cerrado*

$$s : E \hookrightarrow \hat{E}$$

*tal que  $s$  es un *Iso*v-SSDR-mapeo y  $\hat{E}$  es un espacio *Iso*v-fibrante. En otras palabras, cualquier  $G$ -espacio compacto admite una extensión fibrante isovariante.*

*Demostración.* Por [13, Teorema 3.6]) existe  $G$ -extensión fibrante  $\tilde{s} : E \hookrightarrow \tilde{E}$ .

Sea  $\hat{E} = I(X, \tilde{E})$ , donde  $X$  es algún *Iso*v- $AE$ .

Notemos primero que  $\hat{E} \neq \emptyset$  ya que  $X$ , por ser un *Iso*v- $AE$ , admite una función isovariante  $\varphi : \tilde{E} \rightarrow X$  (de modo que  $(\varphi(y), y) \in I(X, \tilde{E})$  para cada  $y \in \tilde{E}$ ). La  $G$ -función  $\sigma : \tilde{E} \rightarrow \hat{E}$  dada por  $\sigma(y) = (\varphi(y), y)$  es una sección para la proyección  $q_{\tilde{E}} : \hat{E} \rightarrow \tilde{E}$ . Ya que  $q_{\tilde{E}}$  es un mapeo  $G$ -suave (por Proposition 6.1(b)),  $\sigma$  debe ser un fiber  $G$ -SDR-mapeo con respecto a  $q_{\tilde{E}}$ . Este es un hecho general simple mencionado al principio de la sección. (Sin embargo, en nuestro caso particular, uno puede probarlo directamente como sigue. Primero, nótese que las  $G$ -funciones  $q_X : \hat{E} \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto x$ , y  $\varrho : \hat{E} \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto \varphi(y)$ , coinciden en  $\sigma(Y)$ , es decir,

$q_X|_{\sigma(Y)} = \varrho|_{\sigma(Y)}$ . Segundo, usando que  $X$  es un *IsoV-AE*, tome una  $G$ -homotopía  $H : \hat{E} \times I \rightarrow X$  de  $q_X$  a  $\varrho$  que es constante en  $\sigma(Y)$  tal que la restricción  $H|_{\hat{E} \times [0,1]}$  es isovariante. Entonces la fórmula  $D((x, y), t) = (H((x, y), t), y)$  define una deseada  $G$ -deformación fuerte  $D : \hat{E} \times I \rightarrow \hat{E}$  de  $\hat{E}$  sobre  $\sigma(Y)$ .

Claramente, la composición  $s = \sigma \circ \tilde{s} : E \hookrightarrow \hat{E}$  es un  $G$ -SSDR-mapeo y por lo tanto también puede considerarse como un *IsoV-SSDR*-mapeo de acuerdo con el Teorema 5.2.

Para probar que el  $G$ -espacio  $\hat{E}$  es *IsoV*-fibrante, considere un *IsoV-SSDR*-mapeo  $i : A \hookrightarrow Z$  y una  $G$ -función isovariante  $f : A \rightarrow \hat{E}$ . Como  $X$  es un *IsoV-AE* la función  $q_X \circ f : A \rightarrow X$  tiene una extensión isovariante  $F : Z \rightarrow X$  de modo que  $q_X \circ f = F \circ i$ . Por Proposition 6.2(a)  $q_X : \hat{E} \rightarrow X$  es una *IsoV*-fibración fuerte y por lo tanto existe una función isovariante  $\tilde{F} : Z \rightarrow \hat{E}$  tal que  $q_X \circ \tilde{F} = F$  y  $\tilde{F} \circ i = f$ . Esto demuestra que  $\hat{E}$  es un espacio *IsoV*-fibrante.  $\square$

## 7 Apéndice: Existencia de espacios *IsoV-AE*

En esta sección presentamos una construcción del espacio  $J(\mathcal{H})$ . Se demostrará que  $J(\mathcal{H})$  es un *IsoV-AE*. Vamos a repetir el argumento dado en las demostraciones de [2, Teorema 3.2] y [4, Teorema 5.1] con ligeras modificaciones; algunos detalles, incluyendo la notación, se toman de [7] donde se utiliza una construcción similar para probar la existencia de  $G$ -espacios universales.

Sea  $X$  un  $G$ -espacio. Por un *subconjunto tubular* de  $X$  (alrededor de  $x \in X$ ) entendemos un par  $(U, \varphi)$  que consiste de un  $G$ -subconjunto abierto  $U$  de  $X$  y una  $G$ -función  $\varphi : U \rightarrow G/H$  (tal que  $x \in U$ ). El  $H$ -conjunto  $S = \varphi^{-1}(eH)$  se llama una *H-rebanada* y  $\varphi$  se dice que es una *función rebanadora*.

Si  $d$  es una métrica invariante en  $X$  (es decir,  $d(gx, gy) = d(x, y)$  para cada  $x, y \in X$  y  $g \in G$ ), entonces se puede hablar de la *anchura de subconjunto tubular*  $(U, \varphi)$  dada por  $w(U, \varphi) = \text{diam}(\varphi^{-1}(eH))$ . Nótese que  $w(U, \varphi) = \text{diam}(\varphi^{-1}(gH))$  para cualquier  $g \in G$ , en otras palabras,  $w(U, \varphi) = \text{diam}(\varphi^{-1}(\varphi(x)))$  para cada  $x \in U$ .

Recordemos que un subgrupo  $H$  de  $G$  se llama *grande* si el conjunto cociente  $G/H$  es un  $G$ -ANE. Sea  $\mathcal{E}$  el conjunto de todos los subgrupos grandes. Definimos la *anchura*  $w(U)$  de un  $G$ -subconjunto abierto no vacío  $U$  de  $X$  como sigue:

$$w(U) = \inf\{w(U, \varphi) \mid \varphi : U \rightarrow G/H \text{ es un } G\text{-mapeo y } H \in \mathcal{E}\}$$

Nótese que  $w(U) = 0$  implica que  $U$  es una  $G$ -órbita. En efecto, en este caso existe una secuencia  $\{\varphi_n\}$  de  $G$ -funciones  $\varphi_n : U \rightarrow G/H_n$ ,  $H_n \in \mathcal{E}$ , tal que  $w(U, \varphi_n) < 1/n$ . Suponga que  $x, y \in U$ . Entonces para cualquier  $n$  podemos encontrar  $g_n \in G$  tal que  $\varphi_n(y) = g_n\varphi_n(x)$ , es decir,  $\varphi_n(y) = \varphi_n(g_nx)$ . Esto significa que  $g_nx, y \in \varphi_n^{-1}\varphi_n(y)$  y, como  $w(U, \varphi_n) = \text{diam}(\varphi_n^{-1}\varphi_n(y))$ , tenemos  $d(g_nx, y) < 1/n$  para cualquier  $n$ . En particular,  $y$  pertenece al cierre de  $G(x)$  en  $X$ , pero todas las  $G$ -órbitas son cerradas, y así concluimos que  $y \in G(x)$ . Esto vale para cada  $y \in U$  y por lo tanto  $U = G(x)$ . Así, el hecho de que  $w(U) = 0$  para un  $G$ -subconjunto abierto  $U$  esto significa que  $U$  es una  $G$ -órbita aislada.

Recordemos el Teorema de la rebanada aproximativa que fue probado originalmente por a H. Abels (ver [1, Teorema 3.3]). Una de sus versiones más fuertes propuesta por S. Antonyan en [6, Teorema 5.1] se ve como sigue:

Sea  $X$   $G$ -espacio propio y  $x \in X$ . Entonces para cualquier vecindad  $V$  de  $x$ , existen un subgrupo grande  $K$  de  $G$  con  $G_x \subset K$  y  $K$ -rebanada  $S$  tal que  $x \in S \subset V$ .

En efecto, para la prueba de la Proposición 7.2 necesitaremos la siguiente consecuencia del Teorema de la rebanada aproximativa.

**Lema 7.1.** *Sea  $X$  un  $G$ -espacio métrico y  $x \in X$ . Entonces para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto tubular  $(U, \varphi)$  alrededor de  $x$  tal que  $w(U, \varphi) < \varepsilon$  y para la función rebanadora  $\varphi : U \rightarrow G/H$ , el subgrupo  $H$  es grande.*

Para demostrar el lema sólo basta tomar, como vecindad  $V$  de  $x$ , la bola abierta de radio  $\varepsilon/3$  alrededor de  $x$ , es decir  $V = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon/3\}$ . Por el Teorema hay un subgrupo grande  $H$  de  $G$  y una función rebanadora  $\varphi : U \rightarrow G/H$  tal que  $x \in \varphi^{-1}(eH) \subset V$ . Por lo tanto  $w(U, \varphi) = \text{diam}(\varphi^{-1}(eH)) \leq \text{diam}(V) \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ .

Además, necesitaremos el concepto de *cono sobre  $Y$*  para un espacio dado  $Y$ , denotado por  $\text{Cone}(Y)$ , y *equipado con la topología débil*. Recordar que el  $\text{Cone}(Y)$  es el conjunto cociente  $Y \times I / Y \times \{0\}$ . Denotamos por  $[y, t]$  la imagen de un punto  $(y, t) \in Y \times I$  bajo la proyección natural  $Y \times I \rightarrow \text{Cone}(Y)$ . Así,  $[y, t] = \{(y, t)\}$  para  $t \neq 0$  y  $[y, 0] = Y \times \{0\}$  para cada  $y \in Y$ . El punto  $\mathbf{v} = [y, 0]$  se llama el *vértice* del cono. La topología débil sobre el  $\text{Cone}(Y)$  es la topología más gruesa que hace las proyecciones  $\text{Cone}(Y) \rightarrow I$ ,  $[x, t] \rightarrow t$ , y  $\text{Cone}(Y) \setminus \{\mathbf{v}\} \rightarrow Y$ ,  $[y, t] \rightarrow y$ , continuas. Si  $Y$  es un  $G$ -espacio, entonces  $\text{Cone}(Y)$  puede considerarse como un  $G$ -espacio con la acción  $g[y, t] = [gy, t]$ . No es difícil ver que el  $\text{Cone}(Y)$  es metrizable si  $Y$  es metrizable. En la [5, Proposición 2.1] se puede encontrar una definición directa de métrica sobre el  $\text{Cone}(Y)$  (para una métrica determinada en  $Y$ ) junto con la prueba que induce la topología débil.

Para un subgrupo  $H$  de  $G$ , denotamos por  $[H]$  la clase conjugada de  $H$ , es decir,  $[H] = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ . Nótese que  $H \in \mathcal{E}$  implica  $[H] \subset \mathcal{E}$ . Sea  $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$  el conjunto

de representantes de todas las clases de conjugación de subgrupos grandes de  $G$ . La unión disjunta  $\mathbf{T} = \bigsqcup\{G/H \mid H \in \mathcal{H}\}$  es un  $G$ -ANE ya que cada  $G/H$  es  $G$ -ANE, y por lo tanto  $Cone(\mathbf{T})$  es un  $G$ -AE (ver [8, Proposition 2.5]) así como el producto contable

$$J(\mathcal{H}) = (Cone(\mathbf{T}))^\omega = Cone(\mathbf{T}) \times Cone(\mathbf{T}) \times Cone(\mathbf{T}) \times \dots$$

El propósito de esta sección es mostrar que  $J(\mathcal{H})$  es un  $I$ sov-AE. Pero primero probaremos la siguiente propiedad de  $J(\mathcal{H})$ .

**Proposición 7.2.** *Para cualquier  $G$ -espacio metrizable  $X$  existe una  $G$ -función isovariante  $f : X \rightarrow J(\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $X$  no contiene  $G$ -órbitas aisladas. De hecho, podemos considerar el  $G$ -espacio  $X \times I$  que a priori no contiene  $G$ -órbitas aisladas. Si construimos una función isovariante  $f : X \times I \rightarrow J(\mathcal{H})$ , entonces la restricción de  $f$  a  $X \times \{0\}$  da como, resultado, la función isovariante deseada  $X \rightarrow J(\mathcal{H})$ .

Ya que  $X/G$  es metrizable, existe una base  $\sigma$ -discreta  $\mathcal{W} = \{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de  $X/G$ . Para la proyección orbital  $p : X \rightarrow X/G$  la familia  $\mathcal{U} = p^{-1}\mathcal{W} = \{U_\lambda \mid U_\lambda = p^{-1}(W_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una cubierta  $\sigma$ -discreta de  $X$  por  $G$ -subconjuntos abiertos. En otras palabras,  $\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_k$ , donde  $\mathcal{U}_k = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_k}$  es una familia discreta en  $X$ , y  $\Lambda = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$ . Ahora fijamos alguna  $G$ -métrica invariante sobre  $X$  (esta métrica existe porque  $G$  es compacto). Ya que  $X$  no contiene  $G$ -órbitas aisladas, tenemos que  $w(U_\lambda) > 0$  para cada  $\lambda \in \Lambda$  (ver la discusión anterior cuando  $w(U) = 0$ ). Elijamos, para cada  $\lambda \in \Lambda$ , una función invariante  $t_\lambda : X \rightarrow I$  y una  $G$ -función  $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow G/H_{j(\lambda)}$  para algún  $H_{j(\lambda)} \in \mathcal{H}$  tal que  $t_\lambda^{-1}((0, 1]) = U_\lambda$  y  $w(U_\lambda) \leq w(U_\lambda, \varphi_\lambda) < 2w(U_\lambda)$ .

Ahora definimos, para cada  $k = 1, 2, \dots$ , una función  $f_k : X \rightarrow Cone(\mathbf{T})$  como sigue:

$$f_k(x) = [\varphi_\lambda(x), t_\lambda(x)] \in Cone(G/H_{j(\lambda)}) \subset Cone(\mathbf{T})$$

si  $x \in U_\lambda$  para algún  $\lambda \in \Lambda_k$ , y  $f_k(x) = \mathbf{v}$  si  $x \in X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k} U_\lambda$ , donde  $\mathbf{v}$  es el vértice del  $Cone(\mathbf{T})$ . Se ve fácilmente que  $f_k$  es una  $G$ -función continua.

La deseada  $G$ -función  $f : X \rightarrow J(\mathcal{H})$ , donde  $J(\mathcal{H}) = (Cone(\mathbf{T}))^\omega$ , es dado por  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ .

Para mostrar que  $G_{f(x)} = G_x$  para cualquier  $x \in X$ , primero nótese que  $G_{f(x)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{f_k(x)}$ . Fijamos  $x \in X$ . Entonces para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\lambda \in \Lambda$  tal que

$x \in U_\lambda$  y  $w(U_\lambda, \varphi_\lambda) < \varepsilon$ . Para ver esto, elija un conjunto tubular  $(U, \varphi)$  alrededor de  $x$ , tal que  $H \in \mathcal{E}$  para  $\varphi : U \rightarrow G/H$ , y  $w(U, \varphi) < \varepsilon/2$ . Este conjunto tubular existe por el Lema 7.1. Claramente, existe  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $x \in U_\lambda \subset U$  (porque  $\mathcal{W} = \{p(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$  es una base de  $X/G$ ). Sea  $\varphi' = \varphi|_{U_\lambda}$ . Entonces  $w(U_\lambda, \varphi') \leq w(U, \varphi) < \varepsilon/2$ . Así tenemos que  $w(U_\lambda, \varphi_\lambda) < 2w(U_\lambda) \leq 2w(U_\lambda, \varphi') < \varepsilon$ .

Ahora podemos encontrar  $\lambda_n \in \Lambda$  para cualquier  $n = 1, 2, \dots$ , tal que  $x \in U_{\lambda_n}$  y  $w(U_{\lambda_n}, \varphi_{\lambda_n}) < 1/n$ . Si  $\lambda_n \in \Lambda_k$  entonces

$$G_{\varphi_{\lambda_n}(x)} = G_{[\varphi_{\lambda_n}(x), t_{\lambda_n}(x)]} = G_{f_k(x)} \supset G_{f(x)} \supset G_x.$$

Por otra parte, si  $g \in G_{\varphi_{\lambda_n}(x)}$  para algún  $n$ , entonces  $\varphi_{\lambda_n}(gx) = g\varphi_{\lambda_n}(x) = \varphi_{\lambda_n}(x)$ , es decir  $x, gx \in \varphi_{\lambda_n}^{-1}(\varphi_{\lambda_n}(x))$ . Por lo tanto

$$d(gx, x) \leq \text{diam}(\varphi_{\lambda_n}^{-1}(\varphi_{\lambda_n}(x))) \leq w(U_{\lambda_n}, \varphi_{\lambda_n}) < 1/n.$$

Esto implica que  $G_{f(x)} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{\varphi_{\lambda_n}(x)} \subset G_x$  □

**Teorema 7.3.**  $J(\mathcal{H})$  es un *Isov-AE*.

*Demostración.* Para simplificar la notación denotamos  $J(\mathcal{H})$  por  $Y$ .

Como  $Y = (\text{Cone}(\mathbf{T}))^\omega$ , el  $G$ -espacio  $Y^\omega$  puede identificarse con  $Y$ . Por lo tanto, debemos demostrar que  $Y^\omega$  es un *Isov-AE*.

Sean  $X$  un  $G$ -espacio metrizable y  $f : A \rightarrow Y^\omega$  una  $G$ -función, donde  $A$  es un  $G$ -subconjunto cerrado de  $X$ . Es fácil elegir una sucesión  $\{U_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  de  $G$ -subconjuntos abiertos tal que  $U_0 = X$ , la clausura de  $U_{n+1}$  está contenido en el interior de  $U_n$  para cualquier  $n$ , y  $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = A$ . también podemos encontrar una sucesión de funciones invariantes  $t_n : X \rightarrow I$  tal que  $X \setminus U_n \subset t_n^{-1}(0)$  y  $U_{n+1} \subset t_n^{-1}(1)$ .

Por la Proposición 7.2 existe una  $G$ -función isovariante  $\Phi : X \rightarrow Y$ . La  $G$ -función  $f$  determina las  $G$ -funciones  $f_n : A \rightarrow Y$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , tal que para cualquier  $x \in X$  tenemos que  $f(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots)$ . Ya que  $Y$  es un  $G$ -AE, para cada  $G$ -función  $f_n$  existe una  $G$ -función  $F_n : X \rightarrow Y$  que satisface  $F_n|_A = f_n$  y, además, se puede encontrar una  $G$ -homotopía  $D_n : X \times I \rightarrow Y$  de  $\Phi$  a  $F_n$ . Ahora sea  $\tilde{f} : X \rightarrow Y^\omega$  una función definida como sigue:

$$\tilde{f}(x) = (F_0(x), F_1(x), \dots, F_{n-1}(x), D_n(x, t_n(x)), \Phi(x), \Phi(x), \dots)$$

si  $x \in U_n \setminus U_{n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y  $\tilde{f}(x) = f(x)$  si  $x \in A$ . No es difícil ver que  $\tilde{f}$  es una  $G$ -función continua. Si  $x \in X \setminus A$ , afirmamos que  $x \in U_n \setminus U_{n+1}$ , entonces

$$G_{\tilde{f}(x)} = G_{F_0(x)} \cap G_{F_1(x)} \cap \dots \cap G_{D_n(x, t_n(x))} \cap G_{\Phi(x)} \cap \dots = G_{\Phi(x)} = G_x$$

porque  $G_{F_i(x)} \supseteq G_x$  y  $G_{D_n(x, t_n(x))} \supseteq G_x$  y  $G_x = G_{\Phi(x)}$ . Por lo tanto  $\tilde{f}$  es una extensión isovariante de  $f$ . □

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haber dedicado su valioso tiempo para la revisión del trabajo, ya que con sus sugerencias y comentarios enriquecieron sustancialmente el contenido de este.

## Bibliografía

- [1] H. Abels, *A universal proper  $G$ -space*, Math. Z. **159** (1978) 143-158.
- [2] S. M. Ageev, *On Palais universal  $G$ -spaces and isovariant absolute extensors*, Mat. Sb. **203:6** (2012), 3-34; English transl. Sb. Math. **203:6** (2012), 769-797.
- [3] S. M. Ageev, *Isovariant extensors and characterization of equivariant homotopy equivalencies*, Izvestia RAN, Ser. Mat. **76:5** (2012) 3-28; English transl. Izvestia Math. **76:5** (2012) 857-880.
- [4] S. M. Ageev, D. Repovš, *On extending actions of groups*, Mat. Sb. **201:2** (2010) 3-28; English transl. Sb. Math. **201:2** (2012), 159-182.
- [5] S. A. Antonyan, *Universal proper  $G$ -spaces*, Topology Appl. **117** (2002) 23-43.
- [6] S. A. Antonyan, *Equivariant extension properties of coset spaces of locally compact groups and approximate slices*, Topology Appl. **159** (2012) 2235-2247.
- [7] N. Antonyan, S. A. Antonyan, *Universal metric proper  $G$ -spaces*, Topology Appl. **201** (2016), 388-402.
- [8] N. Antonyan, S. A. Antonyan, *Universal  $G$ -spaces for proper actions of locally compact groups*, Topology Appl. **159** (2012) 1159-1168.
- [9] A. Bykov, *The homogeneous space  $G/H$  as an equivariant fibrant space*, Topology Appl. **157** (2010), 2604-2612.
- [10] A. Bykov, R. Juárez Flores,  *$G$ -fibrations and twisted products*, Topology Appl. **196** (2015), 379-397.
- [11] A. Bykov, A. L. Kantún Montiel, *Strong  $G$ -fibrations and orbit projections*, Topology Appl. **163** (2014), 46-65.
- [12] A. Bykov, M. Taxis, *Equivariant fibrant spaces*, Glasnik Mat. **40** (2005), 323-331.

- [13] A. Bykov, M. Taxis, *Equivariant strong shape*, Topology Appl. **154** (2007), 2026-2039.
- [14] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972.
- [15] F. Cathey, *Strong shape theory*, in: Shape Theory and Geometric Topology, Lecture Notes Math., Springer, Berlin, 1981, pp. 216-239.
- [16] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.
- [17] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.
- [18] I. M. James, *General Topology and Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1984.
- [19] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological Transformation groups*, Krieger, Huntington, 1974.
- [20] R. S. Palais, *The classification of  $G$ -spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 36, 1960.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

abykov@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

marcelino.taxis@correo.buap.mx

## Capítulo 10

# Las gráficas finitas son continuos Whitney determinados

Lázaro Flores De Jesús, David Herrera Carrasco,  
Fernando Macías Romero  
FCFM, BUAP

### Resumen

Un continuo es un espacio métrico no degenerado, compacto y conexo. Dado un continuo  $X$ , un hiperespacio es una familia de subconjuntos de  $X$  con ciertas características particulares. Una herramienta importante para el estudio de los hiperespacios son las llamadas funciones de Whitney, las cuales fueron introducidas por Hassler Whitney [14]. En este capítulo analizamos la condición de ser continuo Whitney determinado para ver que las gráficas finitas tienen esa propiedad [11, Teorema 2.5].

## 1 Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico  $X$  no degenerado, compacto y conexo. Dado un continuo  $X$ , una **vecindad** de un punto  $x \in X$  es un subconjunto  $V$  de  $X$  tal que existe un abierto  $U$  de  $X$  con  $x \in U \subset V$ . Dado un continuo  $X$ , un **hiperespacio** de  $X$  es una familia de subconjuntos de  $X$  que cumplen ciertas características. Entre los hiperespacios más conocidos se encuentran los siguientes:

$$\begin{aligned}2^X &= \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado}\}, \\C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es compacto}\}, \\F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\};\end{aligned}$$

para trabajar en la estructura de los hiperespacios se utiliza la métrica de Hausdorff, [10, Teorema 2.2], la cual nos permite considerarlos nuevamente como continuos [9, Corolario 6.13].

En el año 2012, [11], Alejandro Illanes y Rocío Leonel introdujeron, utilizando las llamadas funciones de Whitney, los conceptos de equivalencia por niveles de Whitney (o Whitney equivalente) y continuos determinados por sus niveles de Whitney (o continuos Whitney determinados), que nos permite analizar la estructura de los hiperespacios de un continuo a través de sus niveles de Whitney.

Este nuevo concepto se presenta como una nueva herramienta para el estudio de la unicidad de hiperespacios, tema central de la investigación en topología de continuos en los últimos años ([4], [5], [6]).

Teniendo en cuenta esto, en este capítulo se presentan tales conceptos, así como resultados importantes para el desarrollo de una investigación futura.

En cada resultado que se presente se incluirá su demostración o se dará una referencia en la cual el lector puede encontrar la demostración.

## 2 Funciones y niveles de Whitney

Las funciones de Whitney, introducidas por Hassler Whitney en 1932, [14], han representado una herramienta importante dentro del estudio de los hiperespacios de un continuo. Hay que destacar que las funciones de Whitney se pueden definir para el hiperespacio de los subconjuntos cerrados de cualquier espacio topológico, sin embargo nos limitaremos a los hiperespacios de continuos.

**Definición 2.1.** Sean  $X$  un continuo y  $\mathcal{H}$  un hiperespacio de  $X$  (en este caso estamos considerando  $\mathcal{H} \subset 2^X$ ). Una **función de Whitney** para  $\mathcal{H}$  es una función continua  $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$  tal que:

1. para cada  $x \in X$ , se cumple que  $\mu(\{x\}) = 0$ ,
2. para cada  $A, B \in \mathcal{H}$  tales que  $A \subset B$  y  $A \neq B$ , se tiene que  $\mu(A) < \mu(B)$ .

El hecho de que podamos dar una definición de algo no nos garantiza que tal concepto exista, sin embargo en este caso podemos estar seguros de que no estamos trabajando en vano, ya que siempre se puede definir al menos una función de Whitney para los hiperespacios de un continuo.

**Teorema 2.2.** [9, Teorema 5.3] *Para cualquier continuo  $X$ , el hiperespacio  $2^X$  admite funciones de Whitney.*

Al poder definir una función de Whitney para  $2^X$ , tomando la restricción de esta función, podemos definir una función de Whitney para los demás hiperespacios de un continuo  $X$ .

Otro hecho que podemos resaltar es el siguiente: dado que  $2^X$  y  $C(X)$  resultan ser nuevamente continuos, cuando  $X$  es un continuo [9, Corolario 6.13], entonces son compactos así que la imagen de ellos bajo una función de Whitney resulta ser un conjunto acotado, más aún se tiene que, por la condición 2 de la definición 2.1, el máximo se alcanza en el elemento  $X$ , por lo cual se puede considerar una función de Whitney  $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \mu(X)]$ . Notemos que cuando nuestro continuo  $X$  tiene mas de un punto, es decir, es no degenerado, tenemos que  $\mu(X) > 0$ , lo cual nos permite

considerar la nueva función  $\frac{\mu}{\mu(X)} : 2^X \rightarrow [0, 1]$ , la cual es nuevamente una función de Whitney, que cuenta con dos propiedades adicionales, su imagen está contenida en el intervalo  $[0, 1]$  y  $\mu(X) = 1$ . Cuando se considera una función de Whitney de esta manera, se dice que estamos trabajando con una función normalizada.

**Definición 2.3.** Dado un continuo  $X$ , definimos:

- un **nivel de Whitney** como el conjunto de la forma  $\mu^{-1}(t)$ ; donde  $\mu$  es una función de Whitney para  $C(X)$  y  $t \in [0, \mu(X)]$ ,
- un **nivel de Whitney positivo** como el conjunto de la forma  $\mu^{-1}(t)$ ; donde  $\mu$  es una función de Whitney para  $C(X)$  y  $t \in (0, \mu(X))$ .

**Definición 2.4.** Sea  $X$  un continuo y sea

$$\mathfrak{WL}(X) = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es un nivel de Whitney positivo para } X\}.$$

Asimismo, decimos que  $X$  es **equivalente por sus niveles de Whitney** (o, para abreviar, **Whitney equivalente**) al continuo  $Y$  si se cumple lo siguiente: para todo  $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$  existe  $\mathcal{B} \in \mathfrak{WL}(Y)$  tal que  $\mathcal{A}$  es homeomorfo a  $\mathcal{B}$  y, para todo  $\mathcal{C} \in \mathfrak{WL}(Y)$  existe  $\mathcal{D} \in \mathfrak{WL}(X)$  tal que  $\mathcal{C}$  es homeomorfo a  $\mathcal{D}$ .

En el conjunto  $\mathfrak{WL}(X)$  se han incluido todos los niveles de Whitney positivos para todas las funciones de Whitney que admita el continuo  $X$ .

**Definición 2.5.** Un continuo  $X$  es **determinado por sus niveles de Whitney** (o, para abreviar, **Whitney determinado**) si, para cualquier continuo  $Y$ , se cumple la siguiente implicación: si  $X$  y  $Y$  son continuos Whitney equivalentes, entonces  $X$  y  $Y$  son homeomorfos.

Como unos primeros ejemplos de continuos Whitney determinados tenemos al arco  $J$  (un continuo homeomorfo a  $[0, 1]$ ) y una curva cerrada simple (un continuo homeomorfo a  $S^1$ ) del plano euclidiano.

En efecto, consideremos el arco  $J$  y sea  $Y$  un continuo Whitney equivalente a  $I$ , dado que la propiedad de ser un arco es una propiedad de Whitney, [10, Teorema 31.1], para cada  $t \in [0, \mu(X)]$ , el nivel de Whitney  $\mu(t)^{-1}$  es un arco. Ahora, dado que cada nivel de Whitney para el arco es un arco y  $Y$  es Whitney equivalente a  $I$ , tenemos que cada nivel de Whitney de  $Y$  es un arco, finalmente aplicando [10, Teorema 31.2], tenemos que  $Y$  es un arco. Por lo tanto, el arco  $I$  es un continuo Whitney determinado.

De una manera similar, por [10, Teorema 38.1] y [10, Teorema 38.2], obtenemos que la circunferencia unitaria  $S^1$  es un continuo Whitney determinado.

### 3 Gráficas finitas: resultados auxiliares

En esta sección presentaremos los resultados que nos permitirán llegar a nuestro objetivo. En este capítulo haremos el siguiente convenio, al hablar de una función siempre nos estaremos refiriendo a funciones continuas.

**Definición 3.1.** Para cada  $n \geq 1$ , un  $n$ -**odo simple** es un continuo  $N$  que tiene un punto  $v$  llamado el vértice de  $N$  y contiene  $n$  arcos  $J_1, \dots, J_n$  tales que  $N = J_1 \cup \dots \cup J_n$ ,  $v$  es un punto final de cada arco  $J_i$  y  $J_i \cap J_j = \{v\}$ , para  $i \neq j$ .

**Definición 3.2.** Una **gráfica finita** es un continuo  $X$ , diferente de una curva cerrada simple, que puede ser escrito como la unión de un número finito de arcos tales que la intersección de cualesquiera dos de ellos es uno o ambos de sus puntos extremos.

Dada una gráfica finita  $X$  y un punto  $p \in X$  el *orden* de  $p$  en  $X$ , el cual es denotado por  $ord_X(p)$ , es el número entero positivo  $n$  tal que  $p$  tiene una vecindad  $N$  en  $X$  tal que  $N$  es un  $n$ -*odo*. Los puntos de orden 1 de una gráfica finita  $X$  son llamados *puntos extremos* de  $X$  y denotados por  $E(X)$ , los puntos de orden 2 son llamados *puntos ordinarios* de  $X$  y denotados por  $O(X)$  y los puntos de orden 3 son llamados *puntos de ramificación* de  $X$  y denotados por  $R(X)$ . La unión  $E(X) \cup R(X)$  forma el conjunto de los vértices de  $X$ .

Dado un subconjunto  $A$  en  $X$ ,  $int_X(A)$ ,  $cl_X(A)$ , and  $Bd_X(A)$ , denotan el *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de  $A$  en  $X$ , respectivamente;  $|A|$  denota la cardinalidad de  $A$ .

**Definición 3.3.** Dado un continuo  $X$ , un arco libre en  $X$  es un arco  $J$ , con puntos extremos  $p$  y  $q$ , tal que  $J - \{p, q\}$  es un conjunto abierto en  $X$ . Un **arco libre maximal** en  $X$  es un arco libre que no está contenido propiamente en otro arco libre, es decir, es maximal con respecto a la inclusión de conjuntos.

**Definición 3.4.** Un **árbol** es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

Un *ciclo* en  $X$  es una curva cerrada simple  $J$  en  $X$  tal que  $J \cap R(X) = \{(0)_J, (1)_J\}$  y  $J - \{(0)_J, (1)_J\}$  es un subconjunto abierto en  $X$ . Sean

$$\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X : J \text{ es un ciclo en } X\},$$

$$\mathcal{A}_E(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X \text{ y } |J \cap R(X)| = 1\}, \text{ y}$$

$$\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal } X\} \cup \mathcal{A}_R(X).$$

Note que si  $J, K \in \mathcal{A}_S(X)$  y  $J \neq K$ , entonces  $int_X(J) \cap K = \emptyset$ . Sean  $x, y \in X$ . Decimos que  $x$  es *adyacente* a  $y$  in  $X$  o que  $x$  y  $y$  son *adyacentes* en  $X$  si existe

$J \in \mathcal{A}_S(X)$  el cual no es un ciclo, tal que  $x$  y  $y$  son los puntos extremos de  $J$ . Los elementos de  $\mathcal{A}_E(X)$  se llaman *arcos externos* y los elementos de  $\mathcal{A}_S(X) - (\mathcal{A}_E(X) \cup \mathcal{A}_R(X))$  se llaman *arcos internos*.

Observemos que cada elemento de  $\mathcal{A}_S(X)$ , también llamados aristas de  $X$ , es la cerradura en  $X$  de una componente del conjunto  $X - (E(X) \cup R(X))$ . Se puede notar que cada arista es un arco libre maximal o un ciclo, por tal motivo podemos asumir que la métrica en  $X$  es la métrica de la longitud de arco y que cada arista tienen diámetro igual a 1, con lo cual podemos identificar cada arista  $J$  de  $X$  con un conjunto de la forma  $[(0)_J, (1)_J]$ , donde  $(0)_J \neq (1)_J$  y  $[(0)_J, (1)_J]$  es isométrico al intervalo  $[0, 1]$  cuando  $J$  es un arco; y  $(0)_J = (1)_J$  y  $[(0)_J, (1)_J]$  es homeomorfo a el espacio obtenido de identificar los puntos finales del intervalo  $[0, 1]$  a un punto cuando  $J$  es un ciclo.

**Definición 3.5.** Una **subgráfica** de una gráfica  $X$  es un subcontinuo  $G$  de  $X$  tal que  $G$  es la unión de algunos elementos de  $\mathcal{A}_S(X)$  o  $G = \{v\}$  donde  $v$  es un vértice de  $X$ .

Dada una subgráfica  $G$  de  $X$ , sean  $J_1, \dots, J_n$  los elementos de  $\mathcal{A}_S(X)$  tales que  $J_i = [(0)_{J_i}, (1)_{J_i}]$  y  $|J_i \cap G| = 1$ , asumiremos que es  $J_i \cap G = \{(0)_{J_i}\}$ ; y sean  $L_1, \dots, L_m$  los elementos de  $\mathcal{A}_S(X)$  tales que, para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , cada  $L_j$  es un arco o una curva cerrada simple tal que  $L_j \cap G = \{(0)_{L_j}, (1)_{L_j}\}$ .

**Definición 3.6.** Dadas una gráfica  $X$  y una subgráfica  $G$  de  $X$ , definimos el conjunto  $\mathcal{M}_G$  como el conjunto de los subcontinuos  $A$  de  $X$  tales que  $A$  tiene la siguiente forma:

$$A = G \cup [(0)_{J_1}, c_1] \cup \dots \cup [(0)_{J_n}, c_n] \cup [(0)_{L_1}, a_1] \cup [b_1, (1)_{L_1}] \cup \dots \cup [(0)_{L_m}, a_m] \cup [b_m, (1)_{L_m}],$$

donde  $0 \leq c_i \leq 1$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $0 \leq a_j \leq b_j \leq 1$ , para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Dado  $J \in \mathcal{A}_S(X)$ , definimos  $\mathcal{N}_J = C(J)$ , si  $J$  es un arco, y

$$\mathcal{N}_J = \text{cl}_{C(X)}(\{A \in C(J) : A \subset J - \{(0)_J\}\}),$$

si  $J$  es una curva cerrada simple. Observemos que, en ambos casos,

$$\mathcal{N}_J = \{A \in C(J) : A - \{(0)_J, (1)_J\} \text{ es conexo}\}.$$

**Definición 3.7.** Dada una gráfica finita  $X$  y una función de Whitney  $\mu : C(X) \rightarrow [0, \mu(X)]$ , definimos  $t(\mu) = \text{mín} \{\mu(J) : J \in \mathcal{A}_S(X)\}$ .

**Definición 3.8.** Una  $n$ -celda es un espacio que es homeomorfo a  $[0, 1]^n$ . Un  $n$ -odo en un continuo  $X$  es un subcontinuo  $A$  de  $X$  tal que existe un subcontinuo  $B$  de  $A$  con la propiedad de que  $A - B$  tiene al menos  $n$  componentes.

Se sabe que  $C(X)$  contiene una  $n$ -celda si y solo si  $X$  contiene un  $n$ -odo ([8]).

**Lema 3.9.** Si  $X$  es una gráfica finita y  $Y$  es un continuo tal que  $Y$  es Whitney equivalente a  $X$ , entonces  $Y$  es una gráfica finita.

*Demostración.* Dado que  $X$  es localmente conexo, cada nivel positivo de Whitney para  $X$  es localmente conexo ([10, Teoremas 52.1]). Dado que  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, los niveles positivos de  $Y$  son localmente conexos. Entonces  $Y$  es localmente conexo ([10, Teoremas 52.2]). Si  $Y$  no es una gráfica finita, entonces  $Y$  es un acurva cerrada simple o existe un subespacio  $Q$  de  $C(Y)$  tal que  $Q$  es homeomorfo al cubo de Hilbert  $[0, 1]^\omega$  ([12, Teorema 1.111]). Dado que  $X$  no es una curva cerrada simple,  $Y$  no es una curva cerrada simple. Entonces, para cada  $n \geq 3$ ,  $Y$  contiene un  $n$ -odo. Para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel positivo de Whitney  $\mathcal{B}$  para  $Y$  tal que  $\mathcal{B}$  contiene una  $n$ -celda. Dado que  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, para cada  $n \geq 2$ , existe un nivel positivo de Whitney  $\mathcal{A}$  de  $X$  tal que  $\mathcal{A}$  contiene una  $n$ -celda. Esto implica que la dimensión de  $C(X)$  es infinita. Esto contradice [12, Teorema 1.109] y esto completa la prueba del lema.  $\square$

**Lema 3.10.** Si  $X$  es una gráfica finita y  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney, para cada  $0 < t < t(\mu)$ , si  $v, w$  son vértices de  $X$  y  $v \neq w$ , entonces  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mathcal{M}_{\{w\}} \cap \mu^{-1}(t) = \emptyset$

*Demostración.* Sean  $v, w$  vértices de  $X$  tales que  $v \neq w$ . Sea  $A \in \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mathcal{M}_{\{w\}} \cap \mu^{-1}(t)$ , entonces  $v, w \in A$ . Supongamos que  $A$  tiene la siguiente forma:

$$A = [v, c_1] \cup \cdots \cup [v, c_n] \cup [v, a_1] \cup [b_1, v] \cup \cdots \cup [v, a_m] \cup [b_m, v].$$

Notemos que  $v$  está contenido en arcos que lo intersectan solo en  $v$  y posiblemente en curvas cerradas simples. Como  $w \in A$  y  $w \neq v$ , entonces  $w$  no está contenido en los ciclos que intersectan a  $A$ , ya que  $w$  es un vértice. Entonces existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $w \in [v, a_i]$ ; como  $w \neq v$  y  $w$  es un vértice, tenemos que  $w = a_i$ . Así  $[v, a_i] = [v, w] \subset A$ .

Esto implica que existe  $J \in \mathcal{A}_S(X) - \mathcal{A}_R(X)$  de  $X$  tal que  $J \subset A$ . Entonces  $t(\mu) \leq \mu(J) \leq \mu(A) = t < t(\mu)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mathcal{M}_{\{w\}} \cap \mu^{-1}(t) = \emptyset$ . Esto completa la prueba del lema.  $\square$

**Lema 3.11.** Si  $X$  es una gráfica finita,  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney y  $0 < t < t(\mu)$ , entonces

$$\mu^{-1}(t) = \left( \bigcup \{ \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t) : v \in R(X) \} \right) \cup \left( \bigcup \{ \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) : J \in \mathcal{A}_S(X) \} \right).$$

*Demostración.* Por [1, 5.4, pág. 272], tenemos que

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(t) &= \left( \bigcup \{ \mathcal{M}_G \cap \mu^{-1}(t) : G \text{ es una subgráfica de } X \} \right) \\ &\quad \cup \left( \bigcup \{ \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) : J \in \mathcal{A}_S(X) \} \right). \end{aligned}$$

Notemos que si  $G$  es una subgráfica de  $X$ , entonces  $G = \{v\}$  con  $v \in R(X) \cup E(X)$  o existe  $J \in \mathcal{A}_S(X)$  tal que  $J \subset S$ .

Dada una subgráfica  $G$  de  $X$  tal que  $G$  contiene un elemento  $J$  de  $\mathcal{A}_S(X)$ , por la definición de  $t(\mu)$  tenemos que, para todo  $A \in \mathcal{M}_G \cap \mu^{-1}(t)$ , se cumple que  $t(\mu) \leq \mu(J) \leq \mu(G) \leq \mu(A) = t$ , lo cual es una contradicción, por lo tanto  $\mathcal{M}_G \cap \mu^{-1}(t) = \emptyset$ . Así  $G$  no puede contener ningún elemento de  $\mathcal{A}_S(X)$ , por lo cual  $G = \{v\}$  con  $v \in R(X) \cup E(X)$ .

Si  $G = \{v\}$ , con  $v \in R(X)$ , entonces  $\mathcal{M}_G \cap \mu^{-1}(t) = \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)$ , con lo cual

$$\{ \mathcal{M}_G \cap \mu^{-1}(t) : G \text{ es una subgráfica de } X \} \subset \{ \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t) : v \in R(X) \}.$$

Si  $G = \{v\}$ , con  $v \in E(X)$ , entonces  $\mathcal{M}_G \cap \mu^{-1}(t) = \mathcal{N}_L \cap \mu^{-1}(t)$ , donde  $L \in \mathcal{A}_S(X)$  es tal que  $v$  es uno de sus puntos extremos, por lo cual

$$\{ \mathcal{M}_G \cap \mu^{-1}(t) : G \text{ es una subgráfica de } X \} \subset \{ \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) : J \in \mathcal{A}_S(X) \}.$$

Por lo anterior,

$$\mu^{-1}(t) = \left( \bigcup \{ \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t) : v \in R(X) \} \right) \cup \left( \bigcup \{ \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) : J \in \mathcal{A}_S(X) \} \right).$$

Esto completa la prueba del lema. □

**Lema 3.12.** Si  $X$  es una gráfica finita y  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney, entonces para cada  $t \in (0, t(\mu))$  y para cada  $v \in R(X)$  se tiene que  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)$  es una  $(\text{ord}_X(v) - 1)$ -celda.

*Demostración.* Sea  $v \in R(X)$ ,  $t \in (0, t(\mu))$  y  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $J_1, \dots, J_n$  son todos los elementos de  $\mathcal{A}_S(X) - \mathcal{A}_R(X)$  tales que para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  se tiene que  $v \in J_i$ , podemos asumir que  $v = (0)_{J_i}$  y  $L_1, \dots, L_m$  son todos los elementos de  $\mathcal{A}_R(X)$  tales que para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  se tiene que  $v \in L_j$ . Entonces

$ord_X(v) = n + 2m$ . Por la definición de  $t(\mu)$ , los elementos de  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)$  son los subcontinuos  $A$  de  $X$  de la forma:

$$A = [(0)_{J_1}, c_1] \cup \cdots \cup [(0)_{J_n}, c_n] \cup [(0)_{L_1}, a_1] \cup [b_1, (1)_{L_1}] \cup \cdots \cup [(0)_{L_m}, a_m] \cup [b_m, (1)_{L_m}],$$

donde  $0 \leq c_i \leq 1$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $0 \leq a_j \leq b_j \leq 1$ , para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Entonces podemos definir  $\Delta = \{(x_1, \dots, x_{n+2m}) \in [0, 1]^{n+2m} : x_1 + \dots + x_{n+2m} = 1\}$  y  $\varphi : \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t) \rightarrow \Delta$  de la siguiente manera

$$\varphi([(0)_{J_1}, c_1] \cup \cdots \cup [(0)_{J_n}, c_n] \cup [(0)_{L_1}, a_1] \cup [b_1, (1)_{L_1}] \cup \cdots \cup [(0)_{L_m}, a_m] \cup [b_m, (1)_{L_m}]) = \frac{1}{c_1 + \dots + c_n + a_1 + \dots + a_m + (1 - b_1) + \dots + (1 - b_m)}(c_1, \dots, c_n, a_1, \dots, a_m, 1 - b_1, \dots, 1 - b_m).$$

Veamos que  $\varphi$  es una función continua.

Sean  $A \in \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)$  y  $\{A_r\}_{r=1}^{\infty}$  una sucesión de subcontinuos en  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)$  tal que  $\{A_r\}_{r=1}^{\infty}$  converge a  $A$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $r \geq N_\varepsilon$ , se cumple que  $H(A_r, A) < \varepsilon$ , lo cual es equivalente a que para cada  $r \geq N_\varepsilon$ ,  $A_r \subset N(\varepsilon, A)$  y  $A \subset N(\varepsilon, A_r)$ . Veremos que para cada punto extremo de  $A_r$ , el cual denotaremos por  $c_{i,r}$  ( $a_{j,r}$ ,  $b_{j,r}$ , respectivamente), distinto de  $v$ , la sucesión  $\{c_{i,r}\}_{r=1}^{\infty}$  converge a  $c_i$ .

Cada  $A_r$  tiene la siguiente forma

$$A_r = [(0)_{J_1}, c_{1,r}] \cup \cdots \cup [(0)_{J_n}, c_{n,r}] \cup [(0)_{L_1}, a_{1,r}] \cup [b_{1,r}, (1)_{L_1}] \cup \cdots \cup [(0)_{L_m}, a_{m,r}] \cup [b_{m,r}, (1)_{L_m}].$$

Para cada subarco  $[(0)_{J_1}, c_{i,r}]$  existe un homeomorfismo con el intervalo  $[0, c_{i,r}]$ , Así obtenemos una sucesión de intervalos  $\{[0, c_{i,r}]\}_{r=1}^{\infty}$  que converge al intervalo  $[0, c_i]$ . Consideremos la función  $f : C([0, 1]) \rightarrow [0, 1]$  dada por  $f([a, b]) = \max[a, b]$ , en este caso  $f([0, c_{i,r}]) = c_{i,r}$ , como la función  $f$  es continua, tenemos que  $f([0, c_{i,r}])$  converge a  $f([0, c_i])$ , es decir, la sucesión  $\{c_{i,r}\}_{r=1}^{\infty}$  converge a  $c_i$ .

De manera similar, las sucesiones  $\{a_{j,r}\}_{r=1}^{\infty}$  y  $\{b_{j,r}\}_{r=1}^{\infty}$  convergen a  $a_j$  y  $b_j$ , respectivamente. Con esto la función  $\varphi$  es una función continua.

Ahora veamos que  $\varphi$  es inyectiva, para esto supongamos que  $\varphi(A) = \varphi(B)$ , con  $A = [(0)_{J_1}, c_1] \cup \cdots \cup [(0)_{J_n}, c_n] \cup [(0)_{L_1}, a_1] \cup [b_1, (1)_{L_1}] \cup \cdots \cup [(0)_{L_m}, a_m] \cup [b_m, (1)_{L_m}]$  y  $B = [(0)_{J_1}, f_1] \cup \cdots \cup [(0)_{J_n}, f_n] \cup [(0)_{L_1}, d_1] \cup [e_1, (1)_{L_1}] \cup \cdots \cup [(0)_{L_m}, d_m] \cup [e_m, (1)_{L_m}]$ .

Entonces  $(c_1, \dots, c_n, a_1, \dots, a_m, 1 - b_1, \dots, 1 - b_m) = r(f_1, \dots, f_n, d_1, \dots, d_m, 1 - e_1, \dots, 1 - e_m)$ , donde

$$r = \frac{c_1 + \dots + c_n + a_1 + \dots + a_m + (1 - b_1) + \dots + (1 - b_m)}{f_1 + \dots + f_n + d_1 + \dots + d_m + (1 - e_1) + \dots + (1 - e_m)}.$$

Podemos suponer que  $r \leq 1$ . Esto implica que  $A \subset B$  y dado que  $\mu(A) = \mu(B)$ , concluimos que  $A = B$ . Por lo tanto  $\varphi$  es inyectiva. Ahora veamos que  $\varphi$  es suprayectiva. Sea  $(x_1, \dots, x_{n+2m}) \in [0, 1]^{n+2m}$  tal que  $x_1 + \dots + x_{n+2m} = 1$ . Sea  $y_0 = \max\{x_1, \dots, x_{n+2m}\}$  y sea  $r \geq 1$  tal que  $ry_0 = 1$ . Para cada  $s \in [0, r]$ , sea  $\psi(s) = [(0)_{J_1}, sx_1] \cup \dots \cup [(0)_{J_n}, sx_n] \cup [(0)_{L_1}, sx_{n+1}] \cup \dots \cup [(0)_{L_m}, sx_{n+m}] \cup [1 - sx_{n+m+1}, (1)_{L_1}] \cup \dots \cup [1 - sx_{n+2m}, (1)_{L_m}]$ . Dado que  $\mu(\psi(0)) = \mu(\{v\}) = 0$  y  $\mu(\psi(r)) \geq t(\mu)$  ( $\psi(r)$  contiene una arista de  $X$ ), existe  $s_0 \in [0, r]$  tal que  $\psi(s_0) \in \mu^{-1}(t) \cap \mathcal{M}_{\{v\}}$ . Entonces  $\varphi(\psi(s_0)) = (x_1, \dots, x_{n+2m})$ .

Por lo tanto,  $\varphi$  es suprayectiva.

Con lo anterior, hemos demostrado que  $\varphi$  es un homeomorfismo, donde  $\Delta$  es una  $(ord_X(v) - 1)$ -celda. Esto completa la prueba del lema.  $\square$

**Lema 3.13.** [11, Lema 2.2] *Si  $X$  es una gráfica finita y  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney, para cada  $0 < t < t(\mu)$  y para cada  $J \in \mathcal{A}_S(X)$  tenemos que  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  es un arco.*

Por el lema anterior, como  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  es un arco, podemos identificar dos puntos especiales en  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$ , los cuales son sus puntos extremos. A los puntos extremos de  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  los denotaremos por  $A_0$  y  $A_1$ , donde  $A_0$  corresponde al elemento de  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  que contiene a la preimagen de 0 bajo el homeomorfismo que identifica a  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  con el intervalo  $[0, r]$  y  $A_1$  corresponde al elemento de  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  que contiene a la preimagen de  $r$  y 1, donde  $r = \min A_1$  y  $r \neq 0$ . Además estos dos puntos son únicos.

**Lema 3.14.** *Sea  $X$  una gráfica finita y  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney. Para cada  $0 < t < t(\mu)$ , si  $J, L \in \mathcal{A}_S(X)$  y  $J \neq L$ , entonces  $\mathcal{N}_J \cap \mathcal{N}_L \cap \mu^{-1}(t) = \emptyset$ .*

*Demostración.* Supongamos lo contrario. Sea  $A \in \mathcal{N}_J \cap \mathcal{N}_L \cap \mu^{-1}(t)$ , entonces  $A \in C(J)$  y  $A \in C(L)$ , es decir,  $A$  es un subcontinuo propio no degenerado de  $J$  y de  $L$ , así  $A \in J \cap L$ , lo cual es una contradicción, ya que  $J \neq L$  y su única intersección puede ser un punto. Esto completa la prueba del lema.  $\square$

**Lema 3.15.** *Sea  $X$  una gráfica finita y  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney. Para cada  $0 < t < t(\mu)$ , si  $v \in R(X)$  y  $J \in \mathcal{A}_S(X)$ , entonces el conjunto  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  tiene a lo más dos elementos y está contenido en el conjunto de puntos extremos del arco  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$ ,*

*Demostración.* Sea  $v \in R(X)$  y  $J \in \mathcal{A}_S(X)$ , consideremos los siguientes tres casos.

**Caso I.**  $v \notin J$ .

Supongamos que existe  $A \in \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$ , entonces  $v \in A$ ,  $A \in \mathcal{M}_{\{v\}}$  y  $A \in \mathcal{N}_J$ , lo cual implica que  $v \in J$ , y esto es una contradicción. Por lo tanto,  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) = \emptyset$ .

**Caso II.**  $v \in J$  y  $J \in \mathcal{A}_S(X) - \mathcal{A}_R(X)$ .

Dado que  $v \in R(X)$ ,  $v$  no es un punto interno de  $J$ . Por lo tanto  $v$  es un punto extremo de  $J$ . Sea  $A$  el elemento de  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  que contiene a  $v$ . Dado que  $v$  es un punto extremo de  $J$ , tenemos que  $v \in \{(0)_J, (1)_J\}$  y que  $A = [v, a]$ . Veamos que  $A$  es único. Si existe  $A' \in \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  tal que  $v \in A'$ , entonces tendríamos que  $A' = [v, a']$ , lo cual implica que  $A \subset A'$  o  $A' \subset A$ . Como  $A, A' \in \mu^{-1}(t)$ , concluimos que  $A = A'$ . Por el homeomorfismo que existe entre  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  y  $[0, r]$  tenemos que la imagen de  $A$  está contenida en  $\{0, r\}$ , es decir,  $A \in \{A_0, A_1\}$ . Por lo tanto  $A$  es un punto extremo de  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$

**Caso III.**  $v \in J$  y  $J \in \mathcal{A}_R(X)$ .

En este caso nuevamente  $v$  es un punto extremo de  $J$ , más aún,  $v = (0)_J = (1)_J$ . Nuevamente, por el homeomorfismo que existe entre  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  y  $[0, r]$ , tenemos que existen solo dos elementos de  $\mathcal{N}_J$ ,  $A_0, A_1$  tales que  $v \in A_0$  y  $v \in A_1$ , los cuales son los puntos extremos de  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$ .

Esto completa la prueba del lema. □

**Lema 3.16.** *Sea  $X$  una gráfica finita y  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney. Para cada  $0 < t < t(\mu)$ , si  $J \in \mathcal{A}_S(X)$ , entonces  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  es un arco libre maximal de  $\mu^{-1}(t)$ .*

*Demostración.* Sea  $J \in \mathcal{A}_S(X)$ . Dado que  $J - \{(0)_J, (1)_J\}$  es un conjunto abierto en  $X$ , tenemos que el conjunto  $\{A \in \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) : A \subset J - \{(0)_J, (1)_J\}\}$  es abierto en  $\mu^{-1}(t)$ . Entonces  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  es un arco libre de  $\mu^{-1}(t)$ . Si  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  no es un arco libre maximal, entonces existe un arco  $\mathcal{L}$ , contenido en  $\mu^{-1}(t)$  tal que uno de los puntos finales  $E$  de  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  pertenece a  $int_{\mu^{-1}(t)}(\mathcal{L})$ . Por el lema 3.11 y el lema 3.14, existe un vértice  $v$  de  $X$  tal que  $E \in \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)$  y, por el lema 3.12,  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)$  es una  $(ord_X(v) - 1)$ -celda. Entonces existe una subcelda  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)$  tal que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ . Pero esto es imposible ya que  $\mathcal{L}$  es un arco. Con lo anterior hemos demostrado que  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  es un arco libre maximal. Esto completa la prueba del lema. □

Dada una gráfica finita  $X$ , una función de Whitney  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  y  $0 < t < t(\mu)$ , consideremos el nivel de Whitney  $\mu^{-1}(t)$ . Para cada  $J \in \mathcal{A}_S(X)$ , sean  $A_0$  y  $A_1$  los puntos extremos del arco  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  y sea  $\mathcal{K}_J = \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) - \{A_0, A_1\}$ . Definimos el conjunto  $G(X, \mu, t)$  como el continuo que se obtiene de  $\mu^{-1}(t)$

al identificar cada una de las componentes del conjunto  $\mathcal{C} = \mu^{-1}(t) - \bigcup \{\mathcal{K}_J : J \in \mathcal{A}_S(X)\}$  en un punto.

**Lema 3.17.** Sean  $X$  una gráfica finita,  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney y  $0 < t < t(\mu)$ . El continuo  $G(X, \mu, t)$  es homeomorfo a la gráfica finita  $X$ .

*Demostración.* Por el lema 3.10 y el lema 3.11, las componentes de  $\mathcal{C}$  son los elementos de la familia  $\{\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t) : v \text{ es un vértice de } X\}$ .

Dado  $J \in \mathcal{A}_S(X) - \mathcal{A}_R(X)$ ,  $J$  es un arco libre maximal con puntos finales  $v$  y  $w$ , así el arco  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  tiene exactamente un punto extremo  $A_v$  que contiene a  $v$  y también tiene exactamente un punto extremo  $A_w$  que contiene a  $w$ . Entonces existe un homeomorfismo  $\alpha_J : \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) \rightarrow J$  tal que  $\alpha_J(A_v) = v$  y  $\alpha_J(A_w) = w$ .

Dado  $J \in \mathcal{A}_R(X)$ ,  $J$  es un ciclo, entonces existe un único punto de ramificación  $v$  de  $X$  tal que  $(0)_J = v = (1)_J$  y los puntos extremos del arco  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  son los dos elementos  $A_v$  y  $B_v$  tales que  $v \in A_v \cap B_v$ . Sea  $\beta_J : \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) \rightarrow J$  una función tal que  $\beta_J(A_v) = v = \beta_J(B_v)$ , y  $\beta_J|_{\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) - \{A_v, B_v\}} : \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) - \{A_v, B_v\} \rightarrow J - \{v\}$  es un homeomorfismo.

Definimos la función  $\varphi : \mu^{-1}(t) \rightarrow X$  de la siguiente manera:

$$\varphi(A) = \begin{cases} v & \text{si } A \in \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t) \text{ p.a. } v \in R(X) \cup E(X) \\ \alpha_J(A) & \text{si } A \in \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) \text{ y } J \in \mathcal{A}_S(X) - \mathcal{A}_R(X) \\ \beta_J(A) & \text{si } A \in \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) \text{ y } J \in \mathcal{A}_R(X) \end{cases}$$

Notemos que  $\varphi$  está definida en subconjuntos cerrados de  $\mu^{-1}(t)$ , además si  $A \in \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mathcal{N}_{J_S} \cap \mathcal{N}_{J_R} \mu^{-1}(t)$ , entonces existe  $v \in R(X) \cup E(X)$  tal que  $v \in A$  y  $v$  es un punto extremo del arco  $J$ , así  $A = A_v$ , es decir,  $A$  es el punto extremo del arco  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$ , por lo tanto,  $\varphi(A) = \alpha_J(A) = \beta_J(A)$ , con lo cual concluimos que  $\varphi$  está bien definida y por lo tanto es continua, además es suprayectiva.

Observemos que  $\varphi$  comprime cada una de las componentes de  $\mathcal{C}$  a un punto.

También notemos que  $\varphi|_{\mu^{-1}(t) - \mathcal{C}}(A) = \alpha_J|_{\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) - \{A_v, A_w\}}(A)$  si  $A \in \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  y  $J \in \mathcal{A}_S(X) - \mathcal{A}_R(X)$  o  $\varphi|_{\mu^{-1}(t) - \mathcal{C}}(A) = \beta_J|_{\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) - \{A_v, B_v\}}(A)$  si  $A \in \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  y  $J \in \mathcal{A}_R(X)$  y por lo tanto  $\varphi$  es inyectiva en  $\mu^{-1}(t) - \mathcal{C}$ .

Ahora definimos la función  $i : \mu^{-1}(t) \rightarrow G(X, \mu, t)$  de la siguiente manera

$$i(A) = \begin{cases} \{v\} & \text{si } A \in \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t) \text{ p.a. } v \in R(X) \cup E(X) \\ A & \text{si } A \in \mu^{-1}(t) - \mathcal{C} \end{cases}$$

Notemos que  $i$  es una identificación, entonces por el Teorema de Transgresión ([2, Teorema 3.2, pág. 123]), tenemos que  $\varphi \circ i^{-1}$  es un función continua y abierta

( $\varphi \circ i^{-1}$  no significa la composición de  $\varphi$  con la función inversa de  $i$ , ya que esta puede no existir;  $\varphi \circ i^{-1}$  significa que  $\varphi$  es evaluada en la preimagen de cada elemento de  $G(X, \mu, t)$  bajo  $i$ ).

Veamos que  $\varphi \circ i^{-1}$  es biyectiva.

Sea  $A, B \in G(X, \mu, t)$  con  $A \neq B$ . Si  $A = \{a\}$  y  $B = \{b\}$ , entonces  $A$  y  $B$  provienen de dos componentes distintas de  $\mathcal{C}$ , es decir, existen  $v, w \in R(X) \cup E(X)$  con  $v \neq w$  tales que existen  $A' \in \mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)$  y  $B' \in \mathcal{M}_{\{w\}} \cap \mu^{-1}(t)$  tales que  $i(A') = A$  y  $i(B') = B$ . Esto implica que  $a = v$  y  $b = w$ .

Entonces  $\varphi(i^{-1}(A)) = \varphi(\mathcal{M}_{\{v\}} \cap \mu^{-1}(t)) = v \neq w = \varphi(i^{-1}(B)) = \varphi(\mathcal{M}_{\{w\}} \cap \mu^{-1}(t))$ .

Ahora si  $A, B \in \mu^{-1}(t) - \mathcal{C}$ , entonces  $\varphi(i^{-1}(A)) = \varphi(A) \neq \varphi(B) = \varphi(i^{-1}(B))$

Así  $\varphi \circ i^{-1}$  es inyectiva.

Ahora veamos que  $\varphi \circ i^{-1}$  es suprayectiva.

Sea  $x \in X$  entonces  $x \in R(X) \cup E(X) \cup O(X)$ . Si  $x \in R(X) \cup E(X)$  significa que  $x$  es un vértice de  $X$ , así existe  $A \in \mathcal{M}_{\{x\}} \cap \mu^{-1}(t)$  tal que  $x \in A$ . Como  $A \in \mathcal{M}_{\{x\}} \cap \mu^{-1}(t)$ , tenemos que  $i(A) = \{x\}$ , por lo tanto  $\varphi(i^{-1}(x)) = \varphi(\mathcal{M}_{\{x\}} \cap \mu^{-1}(t)) = x$ . Si  $x \in O(X)$  entonces existe  $B \in \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) - \{B_0, B_1\}$  tal que  $x \in B$ . Para este elemento  $B \in \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t) - \{B_0, B_1\}$  tenemos que  $i(B) = B$ . Entonces  $\varphi(i^{-1}(B)) = \varphi(B) = \alpha_J(B) = x$ , donde  $\alpha_J$  es el homeomorfismo entre  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  y  $J$  si  $J \in \mathcal{A}_S(X) - \mathcal{A}_R(X)$  o  $\varphi(i^{-1}(B)) = \varphi(B) = \beta_J(B) = x$ , donde  $\beta_J$  es el homeomorfismo entre  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  y  $J$  si  $J \in \mathcal{A}_R(X)$ . Por lo anterior,  $\varphi \circ i^{-1}$  es suprayectiva. Como  $\varphi \circ i^{-1}$  es continua, biyectiva y abierta, concluimos que  $\varphi \circ i^{-1}$  es un homeomorfismo, por lo cual  $G(X, \mu, t)$  es homeomorfo a  $X$ .

Esto concluye la prueba del lema.  $\square$

**Lema 3.18.** Sean  $X$  una gráfica finita,  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney y  $t \in (0, 1)$ . Si  $\mathcal{L}$  es un arco libre maximal de  $\mu^{-1}(t)$ , entonces existe  $J \in \mathcal{A}_S(X)$  tal que  $t < \mu(J)$  y  $\mathcal{L} = \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$ .

*Demostración.* Sean  $E_0$  y  $E_1$  los puntos extremos de  $\mathcal{L}$ . Sea  $A \in \mathcal{L} - \{E_0, E_1\}$ . Primero demostraremos que  $A \cap R(X) = \emptyset$ . Supongamos lo contrario, esto es que existe  $v \in A \cap R(X)$ . Observemos que  $A$  es una gráfica finita (no necesariamente una subgráfica de  $X$ , dado que definimos las subgráficas como la unión de elementos de  $\mathcal{A}_S(X)$ ),  $A$  es no degenerado y  $A \neq X$ . Dado que  $\mathcal{L} - \{E_0, E_1\}$  es abierto en  $\mu^{-1}(t)$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que, si  $B \in \mu^{-1}(t)$  y  $H(A, B) < \varepsilon$ , entonces  $B \in \mathcal{L} - \{E_0, E_1\}$ . Dado que  $A \neq X$ , existe una función inyectiva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) \in A$ ,  $\gamma(s) \notin A$  para cada  $s > 0$  y  $H(A, A \cup \text{Im } \gamma) < \varepsilon$ .

**Afirmación 1.** Existe una 3-celda  $\mathcal{R}$  en  $C(X)$  y existen  $A_0, A_1 \in \mathcal{R}$  tales que  $A_0 \subsetneq A \subsetneq A_1$  y  $H(A, B) < \varepsilon$  para cada  $B \in \mathcal{R}$ .

Para poder probar la Afirmación 1, consideraremos los siguientes cuatro casos.

**Caso 1.**  $A$  contiene una curva cerrada simple  $S$ .

Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  una función inyectiva tal que  $\text{Im } \alpha \cap R(X) = \emptyset$  y, si  $A_0 = A - \alpha((0, 1))$ , entonces  $A_0$  es un subcontinuo de  $X$  tal que  $H(A, A_0) < \varepsilon$ . Observe que  $A_0 \subsetneq A$ . Sea  $A_1 = A \cup \text{Im } \gamma$  y sea  $\sigma : [0, 1]^3 \rightarrow C(X)$  definida como sigue:  $\sigma(s_1, s_2, s_3) = A_0 \cup \alpha([0, \frac{s_1}{2}]) \cup \alpha([1 - \frac{s_2}{2}, 1]) \cup \gamma([0, s_3])$ . Claramente,  $\sigma$  es una función inyectiva,  $\sigma(0, 0, 0) = A_0$ ,  $\sigma(1, 1, 0) = A$  y  $\sigma(1, 1, 1) = A_1$ . Entonces  $\mathcal{R} = \text{Im } \sigma$  satisface las propiedades requeridas.

**Caso 2.**  $A$  es un árbol y  $A - \{v\}$  tiene al menos tres componentes.

Sean  $K_1, K_2$  y  $K_3$  subconjuntos no vacíos separados por pares tales que  $A - \{v\} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ . Podemos asumir que  $\gamma(0) \notin K_2 \cup K_3$ . Por [2, Teorema 3.2, pág. 112],  $K_2 \cup \{v\}$  y  $K_3 \cup \{v\}$  son subcontinuos no degenerados de  $X$ . Por [12, Teorema 1.8], existen funciones  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$  tales que  $\alpha(0) = \{v\} = \beta(0)$ ,  $\alpha(1) = K_2 \cup \{v\}$ ,  $\beta(1) = K_3 \cup \{v\}$  y, si  $0 \leq r < s \leq 1$ , entonces  $\alpha(r) \subsetneq \alpha(s)$  y  $\beta(r) \subsetneq \beta(s)$ . Sean  $A_0 = K_1 \cup \alpha(\frac{1}{2}) \cup \beta(\frac{1}{2})$  y  $A_1 = A \cup \text{Im } \gamma$ . Reparametrizando  $\alpha$  y  $\beta$ , si es necesario, podemos asumir que  $H(A, A_0) < \varepsilon$ . Sea  $\sigma : [0, 1]^3 \rightarrow C(X)$  definida como sigue:  $\sigma(s_1, s_2, s_3) = K_1 \cup \alpha(\frac{1+s_1}{2}) \cup \beta(\frac{1+s_2}{2}) \cup \gamma([0, s_3])$ . Claramente  $\sigma$  es una función inyectiva,  $\sigma(0, 0, 0) = A_0$ ,  $\sigma(1, 1, 0) = A$  y  $\sigma(1, 1, 1) = A_1$ . Entonces  $\mathcal{R} = \text{Im } \sigma$  satisface las propiedades requeridas.

**Caso 3.**  $A$  es un árbol y  $A - \{v\}$  tiene exactamente dos componentes.

Dado que  $A$  es un árbol,  $v$  es un punto ordinario o de ramificación de  $A$ . Entonces podemos asumir que  $\gamma(0) = v$ . Sean  $K_2$  y  $K_3$ . Por [2, Teorema 3.2, pág. 112],  $K_2 \cup \{v\}$  y  $K_3 \cup \{v\}$  son subcontinuos no degenerados de  $X$ . Por [12, Teorema 1.8], existen funciones  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$  tales que  $\alpha(0) = \{v\} = \beta(0)$ ,  $\alpha(1) = K_2 \cup \{v\}$ ,  $\beta(1) = K_3 \cup \{v\}$  y, si  $0 \leq r < s \leq 1$ , entonces  $\alpha(r) \subsetneq \alpha(s)$  y  $\beta(r) \subsetneq \beta(s)$ . Sean  $A_0 = \alpha(\frac{1}{2}) \cup \beta(\frac{1}{2})$  y  $A_1 = A \cup \text{Im } \gamma$ . Podemos asumir que  $H(A, A_0) < \varepsilon$ . Sea  $\sigma : [0, 1]^3 \rightarrow C(X)$  definida como sigue:  $\sigma(s_1, s_2, s_3) = \alpha(\frac{1+s_1}{2}) \cup \beta(\frac{1+s_2}{2}) \cup \gamma([0, s_3])$ . Claramente  $\sigma$  es una función inyectiva,  $\sigma(0, 0, 0) = A_0$ ,  $\sigma(1, 1, 0) = A$  y  $\sigma(1, 1, 1) = A_1$ . Entonces  $\mathcal{R} = \text{Im } \sigma$  satisface las propiedades requeridas.

**Caso 4.**  $A$  es un árbol y  $A - \{v\}$  es conexo.

Dado que  $A$  es un árbol, es decir, una gráfica finita que no contiene ciclos,  $v$  es un punto final de  $A$ . Entonces podemos asumir que  $\gamma(0) = v$  y existe una función inyectiva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = v$ ,  $\alpha(s) \notin A \cup \text{Im } \gamma$  para cada  $s > 0$  y  $H(A, A \cup \text{Im } \alpha \cup \text{Im } \gamma) < \varepsilon$ . Por [12, Teorema 1.8], existe una función  $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$  tal que  $\beta(0) = \{v\}$ ,  $\beta(1) = A$  y, si  $0 \leq r < s \leq 1$ , entonces  $\beta(r) \subsetneq \beta(s)$ . Sean  $A_0 = \beta(\frac{1}{2})$ . Podemos asumir que  $H(A, A_0) < \varepsilon$ . Sean  $A_1 = A \cup \text{Im } \alpha \cup \text{Im } \gamma$  y  $\sigma : [0, 1]^3 \rightarrow C(X)$  definida como sigue:  $\sigma(s_1, s_2, s_3) = \alpha([0, s_1]) \cup \beta(\frac{1+s_2}{2}) \cup \gamma([0, s_3])$ . Claramente  $\sigma$  es una función inyectiva,  $\sigma(0, 0, 0) = A_0$ ,  $\sigma(0, 1, 0) = A$  y  $\sigma(1, 1, 1) = A_1$ . Entonces  $\mathcal{R} = \text{Im } \sigma$  satisface las propiedades requeridas.

Esto completa la prueba de la Afirmación 1.

Estamos listos para obtener una contradicción. Dado que  $\mathcal{R} = (\mathcal{R} \cap \mu^{-1}([0, t])) \cup (\mathcal{R} \cap \mu^{-1}((t, 1])) \cup (\mathcal{R} \cap \mu^{-1}(t))$ , tenemos que  $\mathcal{R} \cap \mu^{-1}(t)$  separa a  $\mathcal{R}$  y, por la elección de  $\varepsilon$ ,  $\mathcal{R} \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{L}$ . Entonces  $\mathcal{R} \cap \mu^{-1}(t)$  es un conjunto 1-dimensional que separa a  $\mathcal{R}$ . Esto contradice [7, Corolario 2 del Teorema IV 4] y completa la prueba de que  $A \cap R(X) = \emptyset$ .

Entonces, para cada  $A \in \mathcal{L} - \{E_0, E_1\}$ , existe  $J_A \in \mathcal{A}_S(X)$  tal que  $A \subset J_A$ .

**Afirmación 2.** Si  $A, B \in \mathcal{L} - \{E_0, E_1\}$ , entonces  $J_A = J_B$ .

Para probar la Afirmación 2, sea  $\mathcal{K}$  el subarco de  $\mathcal{L}$  que une los puntos  $A$  y  $B$ . Sea  $D = \bigcup \{C : C \in \mathcal{K}\}$ . Por [12, Lema 1.49],  $D$  es un subcontinuo de  $X$  y, por la primera parte de la prueba de este lema, para cada  $C \in \mathcal{K}$ ,  $C \cap R(X) = \emptyset$ , entonces  $D \cap R(X) = \emptyset$ . Por tanto, existe  $L \in \mathcal{A}_S(X)$  tal que  $D \subset L$ . Por tanto  $J_A = L = J_B$ .

Por la Afirmación 2, existe  $J \in \mathcal{A}_S(X)$  tal que  $A \subset J$  para cada  $A \in \mathcal{L} - \{E_0, E_1\}$ . Entonces  $A \subset J$  para cada  $A \in \mathcal{L}$ . Por tanto,  $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$ . Dado que  $\mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$  es un arco libre de  $\mu^{-1}(t)$ , la propiedad de ser máximo de  $\mathcal{L}$  implica que  $\mathcal{L} = \mathcal{N}_J \cap \mu^{-1}(t)$ .

Esto completa la prueba del lema. □

**Teorema 3.19.** *Sea  $X$  una gráfica finita, entonces  $X$  está determinado por sus niveles de Whitney.*

*Demostración.* Sea  $Y$  un continuo tal que  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes. Por el lema 3.9,  $Y$  es una gráfica finita. Sea  $e$  el número de elementos de  $\mathcal{A}_S(X)$ . Dado un nivel de Whitney positivo  $\mu^{-1}(t)$  de  $X$ , sean  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{e(\mu^{-1}(t))}\}$  todos los diferentes arcos libres maximales de  $\mu^{-1}(t)$ . Por el lema 3.17, para cada  $i \in \{1, \dots, e(\mu^{-1}(t))\}$ , existe  $J_i \in \mathcal{A}_S(X)$  tal que  $\mathcal{L}_i = \mathcal{N}_{J_i} \cap \mu^{-1}(t)$ . Notemos que  $J_i \neq J_j$ , si  $i \neq j$ , por lo tanto,  $e(\mu^{-1}(t)) \leq e$ . Por el lema 3.16, existen un nivel de Whitney  $\mu^{-1}(t)$  de  $X$  para el cual  $e(\mu^{-1}(t)) = e$ . Entonces  $e$  es el número máximo de arcos libres maximales que un nivel de Whitney positivo de  $X$  puede tener. Dado que  $X$  y  $Y$  son Whitney equivalentes, lo mismo ocurre con  $Y$ . Así, el número de elementos de  $\mathcal{A}_S(Y)$  es igual al número de elementos de  $\mathcal{A}_S(X)$ , es decir,  $e$ .

Sea  $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$  una función de Whitney para  $C(X)$ ,  $t \in (0, t(\mu))$  y consideremos el nivel de Whitney  $\mu^{-1}(t)$ . Sea  $\omega^{-1}(s)$  un nivel de Whitney positivo de  $Y$  tal que  $\mu^{-1}(t)$  y  $\omega^{-1}(s)$  son homeomorfos, donde  $\omega : C(Y) \rightarrow [0, 1]$  es una función de Whitney para  $C(Y)$  y  $0 < s < 1$ . Por el lema 3.16 y el párrafo,  $\mu^{-1}(t)$  (y  $\omega^{-1}(s)$ ), tiene exactamente  $e$  arcos libres maximales. Sea  $\{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_e\}$  el conjunto de arcos libres maximales de  $\omega^{-1}(s)$ . Por el lema 3.18, para cada  $i \in \{1, \dots, e\}$ , existe  $K_i \in \mathcal{A}_S(Y)$  tal que  $\mathcal{K}_i = \mathcal{N}_{K_i} \cap \omega^{-1}(s)$  y  $s < \omega(K_i)$ . Entonces podemos aplicar el lema 3.17 a  $X$ ,  $\mu$  y  $t$  a  $Y$ ,  $\omega$  y  $s$ , así,  $G(X, \mu, t)$  es homeomorfo a  $X$  y  $G(Y, \omega, s)$  es homeomorfo a  $Y$ . Dado que  $\mu^{-1}(t)$  y  $\omega^{-1}(s)$  son homeomorfos, el espacio obtenido de  $\mu^{-1}(t)$  al identificar en un punto cada una de las componentes del espacio  $\mu^{-1}(t) -$

$\bigcup\{\mathcal{L} - \{E : E \text{ es un punto extremo de } \mathcal{L}\} : \mathcal{L} \text{ es un arco libre maximal de } \mu^{-1}(t)\}$  es homeomorfo al respectivo espacio definido por  $\omega^{-1}(t)$ . Entonces  $G(X, \mu, t)$  es homeomorfo a  $G(Y, \omega, s)$ . Por lo tanto,  $X$  y  $Y$  son homeomorfos.  $\square$

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haber dedicado su valioso tiempo para la revisión del trabajo, ya que con sus sugerencias y comentarios enriquecieron sustancialmente el contenido de este.

## Bibliografía

- [1] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph I*, Fund. Math. 62, 1968, 265-286.
- [2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.
- [3] J. T. Goodykoontz and S. B. Nadler, Jr., *Whitney Levels in Hyperspaces of Certain Peano Continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 274, 1982, 671-694.
- [4] L. A. Guerrero Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, Topology and its Applications ISSN: 0166-8641, 191 (2015) 16-27. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864115001704>
- [5] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique n-fold hyperspace suspension*, Topology and Its Applications ISSN: 0166-8641, 196 (2015) 652 — 667. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864115002047>
- [6] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, Topology and its Applications (ISSN: 0166-8641), 209 (2016) 1-13. <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2016.05.013>
- [7] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Novena impresión, 1974.
- [8] A. Illanes, *Cells and cubes in hyperspaces*, Fund. Math. 130, 1988, 57-65.

- [9] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN: 968-36-3594-6, 2004.
- [10] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc. New York, N. Y. 1999.
- [11] A. Illanes and R. Leonel, *Whitney equivalent continua*, Topology Proceedings, Volumen 39, 2012, págs. 293-315.
- [12] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets, A text with Research Questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49, Marcel Dekker, Inc. New York, N. Y., 1978.
- [13] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, Inc. New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [14] H. Whitney, *Regular families of curves, I*, Proc. Nat. Acad. Sci., 18, 1932, 275-278.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

216470050@alumnos.fcfm.buap.mx  
dherrera@fcfm.buap.mx  
fmacias@fcfm.buap.mx

## Capítulo 11

# Tipos de homotopía en los niveles de Whitney de gráficas finitas

José Gerardo Ahuatzí Reyes, David Herrera Carrasco,  
Fernando Macías Romero  
FCFM, BUAP

### Resumen

Un continuo es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Una gráfica finita es un continuo que se puede expresar como la unión de una cantidad finita de arcos tales que cada par de ellos se intersecta en un subconjunto de sus puntos extremos. Sea  $X$  un continuo. Denotaremos por  $C(X)$  al hiperespacio de subcontinuos de  $X$ . Una función de Whitney para  $C(X)$  es una función continua y estrictamente creciente que asigna a cada  $A \in C(X)$  un valor no negativo y a los conjuntos unitarios, el valor 0. Un nivel de Whitney de  $X$  es cualquier fibra de alguna función de Whitney para  $C(X)$ . En este capítulo se detalla la prueba de que, para cada retracts de vecindad absoluto  $X$  que además es un continuo, existen una gráfica finita  $G$  y un nivel de Whitney  $\mathcal{A}$  de  $G$  tales que  $X$  es homotópicamente equivalente a  $\mathcal{A}$ , originalmente presentada por H. Kato.

## 1 Introducción

Dado un espacio métrico acotado  $Y$ , consideraremos el siguiente conjunto

$$2^Y = \{A : A \text{ es subconjunto de } Y \text{ compacto y no vacío}\},$$

provisto con la métrica de Hausdorff (véase [4, definición 2.1 y observación 2.5]). Un **hiperespacio** de  $Y$  es cualquier subconjunto de  $2^Y$ . De particular interés resultan para este capítulo los hiperespacios  $2^Y$ ,  $C(Y)$  y  $F_1(Y)$ , en donde

$$C(Y) = \{A \in 2^Y : A \text{ es conexo}\} \text{ y}$$
$$F_1(Y) = \{\{p\} : p \in Y\}.$$

Un **continuo** es un espacio métrico distinto del vacío, compacto y conexo (en [7] se estudian ampliamente estos espacios). Una **gráfica finita** es un continuo que puede expresarse como la unión de una cantidad finita de arcos tales que cada par de ellos, o son ajenos, o se intersectan solo en uno o en dos de sus puntos extremos.

Sea  $X$  un continuo. Sea  $\mathcal{H}$  un hiperespacio de  $X$ . Una función continua  $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$  es una **función de Whitney** para  $\mathcal{H}$  si cumple las siguientes condiciones:

- (1) Para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{H}$  tales que  $A \subsetneq B$ , se satisface que  $\mu(A) < \mu(B)$ .
- (2)  $\mu(A) = 0$  si y solo si  $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$ .

Un **nivel de Whitney** de  $X$  es cualquier subespacio de  $C(X)$  de la forma  $\mu^{-1}(t)$  en donde  $\mu$  es una función de Whitney para  $C(X)$  y  $t \in [0, \mu(X)]$ ; si restringimos  $t \in (0, \mu(X))$ , entonces al conjunto  $\mu^{-1}(t)$  se le denomina un **nivel de Whitney positivo** de  $X$ .

Sea  $f : W \rightarrow Z$  una función continua entre espacios métricos. Si existe una función continua  $g : Z \rightarrow W$  tal que  $g \circ f$  y  $f \circ g$  son homotópicas a las funciones identidad de  $W$  y de  $Z$ , respectivamente, entonces se dice que  $f$  es una **equivalencia de homotopía**. Si existe una equivalencia de homotopía entre dos espacios métricos, entonces se dice que estos son **homotópicamente equivalentes**.

El estudio de los niveles de Whitney es una parte muy importante de la teoría de hiperespacios de continuos y un área de investigación en constante desarrollo desde los años 70. Entre los resultados que muestran la utilidad de estos espacios, se encuentra uno establecido por Hisao Kato en [5], a saber, que aquellos continuos que son retracts de vecindad absolutos, tienen equivalentes homotópicos entre los niveles de Whitney de las gráficas finitas. Esto proporciona una herramienta más para estudiar las propiedades topológicas que se preservan bajo homotopía de tales continuos. En este capítulo vamos a detallar la demostración que dio H. Kato a este resultado.

## 2 Complejos simpliciales

Dado cualquier conjunto  $A = \{q_1, \dots, q_r\}$  contenido en algún espacio euclidiano, denotamos por  $[A]$  al conjunto

$$[A] = \left\{ \sum_{i=1}^r t_i q_i : \text{cada } t_i \text{ es un número real no negativo y } \sum_{i=1}^r t_i = 1 \right\}.$$

Denotaremos, indistintamente,  $[A]$ ,  $\{\{q\} : q \in A\}$ ,  $\{\{q_1\}, \dots, \{q_r\}\}$  o  $[q_1, \dots, q_r]$ .

Sea  $N$  un número natural. Los elementos  $p_0, p_1, \dots, p_r$  de  $\mathbb{R}^N$  son **afinmente independientes** si  $p_1 - p_0, \dots, p_r - p_0$  son linealmente independientes.

Dado un número natural  $m$ , un  **$m$ -simplejo** de  $\mathbb{R}^N$  es cualquier subespacio de la forma  $[A]$ , donde  $A = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^N$  tal que  $p_0, p_1, \dots, p_m$  son afinmente independientes. Observe que cada  $m$ -simplejo es una

$m$ -celda. A  $m$  se le denomina la **dimensión** del simplejo  $[A]$ . Una **cara** de  $[A]$  es cualquier simplejo  $[B]$  tal que  $B \subset A$ , incluyendo al mismo  $[A]$ ; si  $B \subsetneq A$ , entonces se dice que  $[B]$  es una **cara propia** de  $[A]$  y se denota por  $[B] < [A]$ .

Un **complejo simplicial finito** (o, para abreviar en este capítulo, **complejo simplicial**) en  $\mathbb{R}^N$  es un conjunto finito, digamos  $\mathcal{K}$ , formado por simplejos de  $\mathbb{R}^N$  y que cumple las siguientes dos condiciones:

- (1) Si  $S \in \mathcal{K}$ , entonces cada cara de  $S$  también es un elemento de  $\mathcal{K}$ .
- (2) Si  $S, T \in \mathcal{K}$  y  $S \cap T \neq \emptyset$ , entonces  $S \cap T$  es una cara común de  $S$  y de  $T$ .

Un **vértice** del complejo simplicial  $\mathcal{K}$  es cualquier 0-simplejo de  $\mathcal{K}$  (es decir, cualquier conjunto unitario que sea elemento de  $\mathcal{K}$ ). El conjunto de los vértices de  $\mathcal{K}$  se denota por  $\text{Vert}(\mathcal{K})$ . El **politopo** de  $\mathcal{K}$ , se denota por  $|\mathcal{K}|$  y es el subespacio de  $\mathbb{R}^N$  dado por

$$|\mathcal{K}| = \bigcup \mathcal{K}.$$

La dimensión de  $\mathcal{K}$ , denotada por  $\dim \mathcal{K}$ , es la dimensión (topológica) de  $|\mathcal{K}|$ , es decir, es la mayor de las dimensiones de los simplejos de  $\mathcal{K}$ . Un **subcomplejo** de  $\mathcal{K}$  es cualquier complejo simplicial  $\mathcal{L}$  tal que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ . Dado un número natural  $m$ , el  **$m$ -esqueleto** de  $\mathcal{K}$ , el cual se denota por  $\mathcal{K}^{(m)}$ , es el subcomplejo de  $\mathcal{K}$  formado por los simplejos  $S \in \mathcal{K}$  tales que  $\dim S \leq m$ . Asimismo, denotaremos por  $\mathcal{K}^{[m]}$  a la colección de  $m$ -simplejos de  $\mathcal{K}$ .

Un espacio topológico es un **poliedro** si es homeomorfo al politopo de algún complejo simplicial finito. Dada una variedad topológica  $M$ , denotaremos por  $\partial M$  a su frontera como variedad.

**Ejemplo 2.1.** Dados  $N, k \in \mathbb{N}$  y puntos  $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^N$ , el conjunto  $\mathcal{K}$  dado por  $\{\emptyset, \{p_1\}, \dots, \{p_k\}\}$  es un complejo simplicial de dimensión 0; además, si  $|\mathcal{K}|$  es conexo, entonces  $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{p_1\}\}$ .

**Ejemplo 2.2.** Dados  $N, k \in \mathbb{N}$  y  $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^N$  afinmente independientes, la colección de simplejos  $\mathcal{K} = \{[A] : A \subset \{p_0, p_1, \dots, p_k\}\}$  es un complejo simplicial tal que  $|\mathcal{K}| = [p_0, p_1, \dots, p_k]$ ,  $\mathcal{K}^{[0]} = \{\{p_0\}, \{p_1\}, \dots, \{p_k\}\}$  y  $\mathcal{K}^{[1]} = \{[p_i, p_j] : i, j \in \{0, 1, \dots, k\}, i \neq j\}$ . Además,

$$\partial|\mathcal{K}| = \bigcup \{S : S \text{ es una cara propia de } [p_0, p_1, \dots, p_k]\}.$$

**Observación 2.3.** Sea  $\mathcal{K}$  un complejo simplicial.

- (1) Si  $\mathcal{C}$  es cualquier subconjunto de  $\mathcal{K}$ , entonces

$$\{S \in \mathcal{K} : S \text{ es una cara de algún elemento de } \mathcal{C}\}$$

es un complejo simplicial y, por tanto, un subcomplejo de  $\mathcal{K}$ .

- (2) Si  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  son subcomplejos de  $\mathcal{K}$ , entonces  $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$  es un subcomplejo de  $\mathcal{K}$ .
- (3) Si  $V_0, V_1, \dots, V_k \in \mathcal{K}^{[0]}$ ,  $S \in \mathcal{K}$  y  $\bigcup_{i=0}^k V_i \subset S$ , entonces  $[V_0, V_1, \dots, V_k]$  es una cara de  $S$ .
- (4) Si  $0 \leq i \leq j \leq \dim \mathcal{K}$ , entonces  $(\mathcal{K}^{(j)})^{(i)} = \mathcal{K}^{(i)}$ .

Para la siguiente demostración, dado una gráfica  $G$ , un arco  $J$  y puntos  $a, b \in J$  distintos, denotaremos por  $[a, b]_J$  al subarco de  $J$  que va de  $a$  a  $b$  y por  $(a, b)_J$  al conjunto  $[a, b]_J - \{a, b\}$ .

**Lema 2.4.** *Sea  $\mathcal{K}$  un complejo simplicial. Si  $\dim \mathcal{K} = 1$  y  $|\mathcal{K}|$  es conexo, entonces  $|\mathcal{K}| = \bigcup \mathcal{K}^{[1]}$  y, por ende,  $|\mathcal{K}|$  es una gráfica finita. Además, bajo las condiciones anteriores, si  $G$  es una gráfica contenida en  $|\mathcal{K}|$  y  $E(G) \subset |\mathcal{K}^{[0]}|$ , entonces existe un subcomplejo  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{K}$  tal que  $|\mathcal{L}| = G$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\dim \mathcal{K} = 1$  y que  $|\mathcal{K}|$  es conexo. Note que

$$|\mathcal{K}| = A \cup B = (A - B) \cup B$$

en donde  $A = \bigcup \mathcal{K}^{[0]}$  y  $B = \bigcup \mathcal{K}^{[1]}$ . Como  $A$  es un espacio finito,  $A - B$  es vacío o es un conjunto finito. En particular,  $A - B$  es cerrado en  $|\mathcal{K}|$ . Asimismo, como  $\dim \mathcal{K} = 1$ ,  $\mathcal{K}^{[1]} \neq \emptyset$  y, por ende,  $B \neq \emptyset$ . Como  $B$  también es cerrado en  $|\mathcal{K}|$  y  $|\mathcal{K}|$  es conexo, se tiene que  $A - B = \emptyset$ , es decir, que  $|\mathcal{K}| = B = \bigcup \mathcal{K}^{[1]}$ . Puesto que cada par de elementos de  $\mathcal{K}^{[1]}$  son arcos que se intersectan en a lo más uno de sus puntos extremos, la igualdad anterior implica que  $|\mathcal{K}|$  es una gráfica finita.

Manteniendo las hipótesis anteriores, supongamos ahora que  $G$  es una gráfica finita contenida en  $|\mathcal{K}|$  y que  $E(G) \subset \bigcup \mathcal{K}^{[0]}$ . Sea

$$\mathcal{C} = \{S \in \mathcal{K}^{[1]} : (G - E(G)) \cap (S - E(S)) \neq \emptyset\}.$$

Note que  $(G - E(G)) - E_{\mathcal{K}} \subset \bigcup \mathcal{C}$ , en donde  $E_{\mathcal{K}} = \bigcup \{E(S) : S \in \mathcal{K}^{[1]}\}$ . Como  $E(G) \cup E_{\mathcal{K}}$  es finito, lo anterior implica que  $G \subset \bigcup \mathcal{C}$ . Supongamos que existe  $p \in (\bigcup \mathcal{C}) - G$ . Sea  $J \in \mathcal{C}$  tal que  $p \in J$ . Luego, existe  $q \in (J - E(J)) \cap (G - E(G))$ . Sean  $a$  y  $b$  los puntos extremos de  $J$  de tal modo que  $[a, p]_J \cap [q, b]_J = \emptyset$ . Sea  $r \in [p, q]_J$  tal que  $[p, r]_J \cap G = \{r\}$ . Note que  $q \in [r, b]_J$  y, puesto que  $q \notin E(J)$ ,  $q \neq b$ . Esto implica que  $r \neq b$ . Además, como  $p \notin G$ ,  $r \neq p$ . Así,  $r \in (p, b)_J$ . Luego,  $[p, b]_J$  es una vecindad de  $r$  en  $J$ . Note que  $[p, b]_J \cap G$  es una vecindad de  $r$  en  $G$  contenida en  $[r, b]_J$ . Como  $r$  es punto extremo de  $[r, b]_J$ , se obtiene de lo anterior que  $r$  es punto extremo de  $G$ . Además, como  $r \in (p, b)_J \subset J - E(J)$  y  $\mathcal{K}$  es un complejo simplicial, cada  $L \in \mathcal{K}^{[1]} - \{J\}$  cumple que  $r \notin L$ . Así,  $r \in E(G) - \bigcup \mathcal{K}^{[0]}$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\bigcup \mathcal{C} = G$ . Esto muestra que  $G$  es el politopo de un subcomplejo de  $\mathcal{K}$ , a saber,  $\mathcal{L} = \{S \in \mathcal{K} : S \text{ es una cara de algún elemento de } \mathcal{C}\}$ .  $\square$

**Lema 2.5.** *Sea  $\mathcal{K}$  un complejo simplicial finito tal que  $\dim \mathcal{K} \geq 2$ . Si  $|\mathcal{K}|$  es conexo, entonces  $|\mathcal{K}^{(\dim \mathcal{K}-1)}|$  es conexo. En particular, cada complejo simplicial  $\mathcal{C}$  tal que  $|\mathcal{C}|$  es conexo y  $\dim \mathcal{C} \geq 1$  satisface que  $|\mathcal{C}^{(1)}|$  es una gráfica finita.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{K}$  un complejo simplicial finito cuya dimensión, que denotamos por  $n$ , cumple que  $n \geq 2$ . Supongamos que  $|\mathcal{K}|$  es conexo. Vamos a mostrar que  $|\mathcal{K}^{(n-1)}|$  es conexo. Sean  $U$  y  $V$  subconjuntos cerrados de  $|\mathcal{K}^{(n-1)}|$  tales que  $|\mathcal{K}^{(n-1)}| = U \cup V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

Sea  $S \in \mathcal{K}$  un  $n$ -simplejo. Note que  $\partial S = \bigcup \mathcal{K}'$ , para algún  $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}^{(n-1)}$  (la colección de caras propias de  $S$ , por ejemplo). Así,  $\partial S \subset U \cup V$ . Como  $\partial S$  es conexo (porque es homeomorfo a  $S^{n-1}$  con  $n \geq 2$ ), se tiene que  $\partial S \subset U$  o  $\partial S \subset V$ . Asimismo, para cada  $T \in \mathcal{K}^{(n-1)}$ , se cumple que  $T \subset U \cup V$  y, por consiguiente,  $T \subset U$  o  $T \subset V$ .

Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_U &= \{A \in \mathcal{K}^{[n]} : \partial A \subset U\}, & \mathcal{M}_U &= \{A \in \mathcal{K}^{(n-1)} : A \subset U\}, \\ \mathcal{L}_V &= \{A \in \mathcal{K}^{[n]} : \partial A \subset V\}, & \mathcal{M}_V &= \{A \in \mathcal{K}^{(n-1)} : A \subset V\}. \end{aligned}$$

Luego,  $\mathcal{K}^{[n]} = \mathcal{L}_U \cup \mathcal{L}_V$  y  $\mathcal{K}^{(n-1)} = \mathcal{M}_U \cup \mathcal{M}_V$ . Note además que  $U = \bigcup \mathcal{M}_U$  y que  $V = \bigcup \mathcal{M}_V$ .

Supongamos que  $S \in \mathcal{L}_U \cup \mathcal{M}_U$  y  $T \in \mathcal{L}_V \cup \mathcal{M}_V$  son distintos del vacío. Si  $S = T$  y  $S \in \mathcal{K}^{(n-1)}$ , entonces  $S \subset U \cap V = \emptyset$ , lo cual no es posible. Si  $S = T$  y  $S \in \mathcal{K}^{[n]}$ , entonces  $\partial S \subset U \cap V = \emptyset$ , lo cual tampoco es posible porque  $\partial S \approx S^{n-1}$ , con  $n \geq 2$ . Así,  $S \neq T$ . Si  $T$  es una cara de  $S$ , entonces es una cara propia y, por ende,  $T \subset \partial S \subset U$ , lo cual no es posible, porque  $T \subset V$ . Así,  $T$  no es una cara de  $S$ . Análogamente,  $S$  no es una cara de  $T$ . De este modo,  $S \cap T$  es una cara propia de  $S$  y también de  $T$  y, por consiguiente,  $S \cap T \subset (\partial S) \cap (\partial T) \subset U \cap V = \emptyset$ . Por tanto,  $S \cap T = \emptyset$ .

Por el párrafo previo, los conjuntos  $U' = \bigcup (\mathcal{L}_U \cup \mathcal{M}_U)$  y  $V' = \bigcup (\mathcal{L}_V \cup \mathcal{M}_V)$  son cerrados de  $|\mathcal{K}|$  ajenos. Además,  $U' \cup V' = \bigcup \mathcal{K} = |\mathcal{K}|$ . Así, por la conexidad de  $|\mathcal{K}|$ , se tiene que  $U' = \emptyset$  o  $V' = \emptyset$ . Como  $U \subset U'$  y  $V \subset V'$ , lo anterior implica que  $U = \emptyset$  o  $V = \emptyset$ . Por tanto,  $|\mathcal{K}^{(n-1)}|$  es conexo.

Aplicando recursivamente lo obtenido en los párrafos previos y la observación 2.3 (4), se demuestra que, dado cualquier complejo simplicial  $\mathcal{C}$  de dimensión  $m \geq 1$  tal que  $|\mathcal{C}|$  es conexo, cualquier número natural  $j \leq m$  satisface que  $|\mathcal{C}^{(j)}|$  es conexo. Así, por el lema 2.4,  $|\mathcal{C}^{(1)}|$  es una gráfica finita.  $\square$

**Corolario 2.6.** *Sea  $\mathcal{K}$  un complejo simplicial tal que  $\dim \mathcal{K} \geq 1$ . Asuma que  $|\mathcal{K}|$  es conexo. Entonces  $|\mathcal{K}^{[0]}| \subset |\mathcal{K}^{[1]}|$ .*

*Demostración.* Note que  $|\mathcal{K}^{(1)}| = |\mathcal{K}^{[1]}| \cup (|\mathcal{K}^{[0]}| - |\mathcal{K}^{[1]}|)$ . Además,  $|\mathcal{K}^{[1]}|$  y  $|\mathcal{K}^{[0]}| - |\mathcal{K}^{[1]}|$  son cerrados de  $|\mathcal{K}^{(1)}|$  (el primero porque es la unión de una cantidad finita de simplejos, el segundo porque es un espacio finito) que además son ajenos entre sí. Además, como  $\dim \mathcal{K} \geq 1$ ,  $|\mathcal{K}^{[1]}| \neq \emptyset$ . Puesto que el lema 2.5 garantiza que  $|\mathcal{K}^{(1)}|$  es conexo, esto implica que  $|\mathcal{K}^{[0]}| - |\mathcal{K}^{[1]}| = \emptyset$ , es decir,  $|\mathcal{K}^{[0]}| \subset |\mathcal{K}^{[1]}|$ .  $\square$

Dado un  $m$ -simplejo  $S$ , el **baricentro** de  $S$  es el punto de  $S$  dado por  $b^S = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m p_i$ , en donde  $p_0, p_1, \dots, p_m$  son puntos afinmente independientes tales que  $S = [p_0, p_1, \dots, p_m]$ .

Sea  $\mathcal{K}$  un complejo simplicial. La **división baricéntrica** de  $\mathcal{K}$ , es el complejo simplicial

$$\text{Sd } \mathcal{K} = \{[b^{S_1}, \dots, b^{S_k}] : \text{cada } S_i \in \mathcal{K} \text{ y } S_1 < S_2 < \dots < S_k\}.$$

Esta representación para los elementos de  $\text{Sd}(\mathcal{K})$  es única.

### 3 Pegado de retracts y de equivalencias de homotopía

Para demostrar el resultado principal de este capítulo, vamos a auxiliarnos del “pegado” de algunos objetos matemáticos, a saber, de “retracts absolutos”, de “retracts absolutos por vecindades” y de equivalencias de homotopía. En general, los resultados que permiten este “pegado” se enuncian para 2 objetos; por esta razón, extenderemos este número a una cantidad finita arbitraria.

Sea  $Y$  un espacio métrico. Un subespacio  $A$  de  $Y$  es un **retracto** de  $Y$  si existe una función continua  $r : Y \rightarrow A$  tal que  $r(y) = y$  para cada  $y \in A$ . Un subespacio  $B$  de  $Y$  es un **retracto de vecindad** de  $Y$  si  $B$  es un retracto de algún abierto de  $Y$ .

Un **retracto absoluto** (respectivamente, un **retracto de vecindad absoluto**) es cualquier espacio métrico  $X$  tal que, para cada espacio métrico  $Y$  y cada encaje  $h$  de  $X$  en  $Y$  tales que  $h(X)$  es cerrado en  $Y$ , se cumple que  $h(X)$  es un retracto de  $Y$ . Abreviamos retracto absoluto (respectivamente, retracto de vecindad absoluto) por **RA** (respectivamente, **RVA**).

Para los resultados de esta sección, dado un natural  $n$ , denotaremos  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . (Para el siguiente resultado, es conveniente considerar las equivalencias dadas por [3, teoremas 3.1 y 3.2, págs. 83 y 84] para la clase de los espacios métricos).

**Teorema 3.1** ([3, proposiciones 10.1 y 10.2, págs. 49 y 50]). *Sean  $X_1$  y  $X_2$  subespacios cerrados del espacio métrico  $X$  tales que  $X = X_1 \cup X_2$ . Si  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_1 \cap X_2$  son RVAs (respectivamente, RAs), entonces  $X$  es un RVA (respectivamente, RA).*

**Teorema 3.2.** *Sea  $\{X_i : i \in I_n\}$  una colección de subespacios cerrados del espacio métrico  $X$  tales que  $X = \bigcup_{i \in I_n} X_i$ . Si  $\bigcap_{i \in E} X_i$  es un RVA (respectivamente, RA) para cualquier  $E \subset I_n$ , entonces  $X$  es un RVA (respectivamente, RA).*

*Demostración.* Demostraremos únicamente la parte para RVAs, la parte para RAs es idéntica (reemplazando cada aparición de “RVA” por “RA”). Haremos la prueba por inducción sobre  $n$ . El caso  $n = 1$  es trivial. Sea  $n \geq 2$ . Supongamos que el teorema es válido para cualquier colección de RVAs con a lo más  $n - 1$  elementos. Sea  $\{X_i : i \in I_n\}$  como en el enunciado del teorema. Dado  $i \in I_{n-1}$ , como  $X_i$  es cerrado en  $X$  y está contenido en el subespacio  $W = \bigcup_{i \in I_{n-1}} X_i$  de  $X$ , también es cerrado en  $W$ . Además, cualquier intersección de elementos de  $\{X_i : i \in I_{n-1}\}$  es un RVA. Así, la hipótesis de inducción asegura que  $W$  es un RVA. Vamos a mostrar que  $W \cap X_n$  es un RVA. Por la elección de  $\{X_i : i \in I_n\}$ , cualquier  $E \subset I_{n-1}$  cumple que el conjunto  $\bigcap_{i \in E} (X_i \cap X_n) = \bigcap_{i \in E \cup \{n\}} X_i$  es un RVA. Además, cada  $X_j \cap X_n$  con  $j \in I_{n-1}$  es cerrado en  $X$  y, por ende, en  $W \cap X_n$ . Por tanto, aplicando de nuevo la hipótesis inductiva, tenemos que el conjunto  $\bigcup_{i \in I_{n-1}} (X_i \cap X_n) = W \cap X_n$  es un RVA. Como  $W$  y  $X_n$  son cerrados en  $X$  y su unión es este último espacio, el teorema 3.1 garantiza que  $X$  es un RVA.  $\square$

**Lema 3.3.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y tanto  $X$  como  $Y$  son contráctiles (en particular, si son RAs), entonces  $f$  es una equivalencia de homotopía.*

*Demostración.* Sean  $x_0 \in X$  y  $g : Y \rightarrow X$  la función constante  $g(y) = x_0$ . Note que  $g \circ f(x) = x_0$  para cada  $x \in X$  y  $f \circ g(x) = f(x_0)$  para cada  $y \in Y$ . Además, puesto que  $X$  y  $Y$  son contráctiles (si  $X$  y  $Y$  son RAs, entonces son contráctiles por [3, Teorema 7.1, pág. 96]), las funciones constantes  $g \circ f$  y  $f \circ g$  son homotópicas a  $Id_X$  y a  $Id_Y$ . Esto muestra que  $f$  es una equivalencia de homotopía.  $\square$

**Teorema 3.4.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua entre espacios métricos. Sean  $X_1$  y  $X_2$  cerrados de  $X$  tales que  $X = X_1 \cup X_2$ . Sean  $Y_1$  y  $Y_2$  cerrados de  $Y$  tales que  $Y = Y_1 \cup Y_2$ . Sean  $X_0 = X_1 \cap X_2$  y  $Y_0 = Y_1 \cap Y_2$ . Suponga que, para cada  $n \in \{0, 1, 2\}$ ,  $X_n$  y  $Y_n$  son RVAs,  $f(X_n) \subset Y_n$  y que  $f|_{X_n} : X_n \rightarrow Y_n$  es una equivalencia de homotopía. Entonces,  $f$  es una equivalencia de homotopía.*

*Demostración.* Como  $X_0$  es cerrado en  $X_1$  y en  $X_2$  y, asimismo,  $Y_0$  es cerrado en  $Y_1$  y  $Y_2$ , basta aplicar [1, teorema 4.2.12] y luego [2, 7.4.3] para obtener este resultado.  $\square$

**Corolario 3.5.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos. Sean  $\{X_i : i \in I_n\}$  y  $\{Y_i : i \in I_n\}$  colecciones finitas de cerrados de  $X$  y de  $Y$ , respectivamente, tales que  $X = \bigcup_{i \in I_n} X_i$  y  $Y = \bigcup_{i \in I_n} Y_i$ . Suponga que  $\bigcap_{i \in E} X_i$  y  $\bigcap_{i \in E} Y_i$  son RVAs para cualquier  $E \subset I_n$ .*

Suponga además que  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua tal que  $f(X_i) \subset Y_i$  para cada  $i \in I_n$  y que  $f|_{\bigcap_{i \in E} X_i} : \bigcap_{i \in E} X_i \rightarrow \bigcap_{i \in E} Y_i$  es una equivalencia de homotopía para cualquier  $E \subset I_n$ . Entonces  $f$  es una equivalencia de homotopía.

*Demostración.* Haremos la prueba por inducción sobre  $n$ . El caso  $n = 1$  es trivial. Sea  $k \geq 1$ . Supongamos que el teorema es válido en cualquier caso en el que  $n \leq k$ . Mostraremos que también es válido en cualquier caso en que  $n = k + 1$ . Para ello, sean  $X, Y, \{X_i : i \in I_n\}, \{Y_i : i \in I_n\}$  y  $f$  como en las hipótesis del teorema, con  $n = k + 1$ . Sean  $W = \bigcup_{i \in I_k} X_i$  y  $Z = \bigcup_{i \in I_k} Y_i$ . Note que  $f(W) = \bigcup_{i \in I_k} f(X_i) \subset \bigcup_{i \in I_k} Y_i = Z$  y  $f(X_{k+1}) \subset Y_{k+1}$ . En particular, podemos considerar la restricción  $g = f|_W : W \rightarrow Z$ . Es claro que, dado cualquier  $i \in I_k$ ,  $X_i$  es cerrado en  $W$  y  $g(X_i) \subset Y_i$ . Asimismo, para cada  $E \subset I_k$ , tanto  $\bigcap_{i \in E} X_i$  como  $\bigcap_{i \in E} Y_i$  son RVAs y  $g|_{\bigcap_{i \in E} X_i} = f|_{\bigcap_{i \in E} X_i} : \bigcap_{i \in E} X_i \rightarrow \bigcap_{i \in E} Y_i$  es una equivalencia de homotopía. De este modo, por la hipótesis de inducción,  $g$  es una equivalencia de homotopía. Además, el corolario 3.2 garantiza que  $W$  y  $Z$  son RVAs. Vamos a mostrar que  $h = f|_{W \cap X_{k+1}} : W \cap X_{k+1} \rightarrow Z \cap Y_{k+1}$  es una equivalencia de homotopía. Observe primero que  $W \cap X_{k+1} = \bigcup_{i \in I_k} (X_i \cap X_{k+1})$  y que, para cualquier  $i \in I_k$ ,  $X_i \cap X_{k+1}$  es cerrado en  $W \cap X_{k+1}$  y  $h(X_i \cap X_{k+1}) = f(X_i) \cap f(X_{k+1}) \subset Y_i \cap Y_{k+1}$ . Además, puesto que, dado cualquier  $E \subset I_k$ , tanto el conjunto  $\bigcap_{i \in E} (X_i \cap X_{k+1}) = \bigcap_{i \in E \cup \{k+1\}} X_i$  como el conjunto  $\bigcap_{i \in E} (Y_i \cap Y_{k+1}) = \bigcap_{i \in E \cup \{k+1\}} Y_i$  son RVAs y la función  $h|_{\bigcap_{i \in E \cup \{k+1\}} X_i} = f|_{\bigcap_{i \in E \cup \{k+1\}} X_i} : \bigcap_{i \in E \cup \{k+1\}} X_i \rightarrow \bigcap_{i \in E \cup \{k+1\}} Y_i$  es una equivalencia de homotopía (por las hipótesis iniciales), la hipótesis de inducción garantiza que  $h$  es una equivalencia de homotopía. También, por el corolario 3.2,  $W \cap X_{k+1}$  y  $Z \cap Y_{k+1}$  son RVAs. En resumen, tanto  $f|_W : W \rightarrow Z$  como  $f|_{W \cap X_{k+1}} : W \cap X_{k+1} \rightarrow Z \cap Y_{k+1}$  son equivalencias de homotopía y los conjuntos  $W, W \cap X_{k+1}, Z$ , y  $Z \cap Y_{k+1}$  son RVAs. Además, por las hipótesis iniciales,  $f|_{X_{k+1}} : X_{k+1} \rightarrow Y_{k+1}$  es una equivalencia de homotopía y tanto  $X_{k+1}$  como  $Y_{k+1}$  son RVAs. También, es claro que  $W$  y  $X_{k+1}$  son cerrados en  $W \cup X_{k+1}$  y que  $Z$  y  $Y_{k+1}$  son cerrados en  $Z \cup Y_{k+1}$ . Así, podemos aplicar el teorema 3.4, obteniendo con ello que  $f$  es una equivalencia de homotopía. Esto termina la inducción y la prueba del corolario.  $\square$

Recuerde que, para un conjunto  $Z$  y una colección  $\mathcal{P}$  de subconjuntos de  $Z$ , la estrella de un subconjunto  $A$  de  $Z$  es el conjunto  $\text{St}(A, \mathcal{P}) = \bigcup \{C \in \mathcal{P} : A \cap C \neq \emptyset\}$ .

**Lema 3.6.** Sean  $\mathcal{K}$  un complejo simplicial y  $V_0, V_1, \dots, V_k$  vértices distintos de  $\mathcal{K}$ , con  $k \geq 1$ . Sea  $S = [V_0, V_1, \dots, V_k]$ . Entonces,  $S \in \mathcal{K}$  si y solo si  $\bigcap_{i=0}^k \text{St}(V_i, \text{Sd } \mathcal{K}) \neq \emptyset$ . En tal caso,  $\bigcap_{i=0}^k \text{St}(V_i, \text{Sd } \mathcal{K})$  es un RA.

*Demostración.* Supongamos que  $S \in \mathcal{K}$ . Observe que cualquier  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$  cumple que  $[V_i, \{b^S\}]$  es un simplejo de  $\text{Sd } \mathcal{K}$  que contiene tanto a  $\{b_S\}$  como a  $V_i$ .

Así,  $b^S \in \bigcap_{i=0}^k \text{St}(V_i, \text{Sd } \mathcal{K})$ .

Supongamos que existe  $b \in \bigcap_{i=0}^k \text{St}(V_i, \text{Sd } \mathcal{K})$ . Vamos a mostrar que  $S \in \mathcal{K}$  y que  $\bigcap_{i=0}^k \text{St}(V_i, \text{Sd } \mathcal{K})$  es un RA. Para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ , sea  $B_i \in \text{Sd}(\mathcal{K})$  tal que  $V_i \cup \{b\} \in B_i$ . Como  $\bigcap_{i=0}^k B_i \in \text{Sd } \mathcal{K}$ , existen  $R_0 < R_1 < \dots < R_l \in \mathcal{K}$  tales que  $\bigcap_{i=0}^k B_i = [b^{R_0}, b^{R_1}, \dots, b^{R_l}]$ .

Fijemos  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ . Hagamos también  $B_j = [b^{S_0}, b^{S_1}, \dots, b^{S_r}]$ , con  $V_j = S_0 < S_1 < \dots < S_r \in \mathcal{K}$ . Observe que, puesto que  $\bigcap_{i=0}^k B_i$  es una cara de  $B_j$ , tenemos que  $\bigcap_{i=0}^k B_i = [b^{S_{n(0)}}, \dots, b^{S_{n(l)}}]$ , para algunos  $0 \leq n(0) < n(1) < \dots < n(l) \leq r$ . Observe que (puesto que, para cualesquiera vértices  $V$  y  $V'$  de  $\mathcal{K}$ , es falso que  $V < V'$ )  $V_j \in B_i$  si y sólo si  $i = j$  y, por ende,  $V_j \notin \bigcap_{i=0}^k B_i$ . En particular,  $V_j \neq S_{n_0}$  y, por consiguiente,  $V_j < S_{n(0)} = R_0$ . Como esto sucede para cada  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ , tenemos que  $S \subset R_0$ , es decir,  $S$  es una cara de  $R_0$  (como una consecuencia directa de esto,  $S \in \mathcal{K}$ ). Como  $V_j$  es una cara de  $S$ , tenemos que  $[V_j, b^S, b^{R_0}, \dots, b^{R_l}] \in \text{Sd } \mathcal{K}$ . Además, es claro que  $\bigcap_{i=0}^k B_i \subset [V_j, b^S, b^{R_0}, \dots, b^{R_l}]$ . Por lo tanto,  $\bigcap_{i=0}^k B_i \subset \bigcap_{j=0}^k [V_j, b^S, b^{R_0}, \dots, b^{R_l}]$ . Esto muestra que  $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup \{B \in \mathcal{C} : b^S \in B\}$ , en donde  $\mathcal{C} = \{\bigcap_{i=0}^k B_i : \text{cada } B_i \text{ es un elemento de } \text{Sd } \mathcal{K} \text{ que contiene a } V_i\}$ . Puesto que cada  $B_0 \in \{B \in \mathcal{C} : b^S \in B\}$  es un simplejo que contiene a  $b^S$ , las intersecciones de subconjuntos de esta familia son también simplejos no vacíos y, por ende, RAs. Aplicando el Teorema 3.2, obtenemos que  $\bigcup \mathcal{C}$  es un RA. Es inmediato, por otro lado, que  $\bigcup \mathcal{C} = \bigcap_{i=0}^k \text{St}(V_i, \text{Sd } \mathcal{K})$  y, por tanto, este último conjunto es un RA.  $\square$

## 4 Resultado principal

**Teorema 4.1** ([4, Teorema 16.10]). *Sean  $X$  un continuo y  $\mathcal{H}$  un subconjunto cerrado de  $2^X$ . Si  $\mu$  es una función de Whitney para  $\mathcal{H}$ , entonces existe una función de Whitney  $\mu'$  para  $2^X$  tal que  $\mu'|_{\mathcal{H}} = \mu$ . En particular, cualquier función de Whitney definida en un cerrado de  $C(X)$  se puede extender a  $C(X)$ .*

Sean  $X$  un continuo,  $\mu$  una función de Whitney para  $C(X)$  y  $t \in (0, \mu(X))$ . Para cualquier  $A \in 2^X$  denotaremos

$$C^A(X, t) = \{B \in \mu^{-1}(t) : A \subset B\}.$$

**Teorema 4.2** (de Lynch, [4, Teorema 66.4]). *Sean  $X$  un continuo,  $\mu$  una función de Whitney para  $C(X)$  y  $A \in C(X)$ . Entonces, para cualquier  $t \in [\mu(A), \mu(X)]$ , el conjunto  $C^A(X, t)$  es un retracto absoluto.*

**Teorema 4.3.** *Sea  $\mathcal{K}$  un complejo simplicial finito tal que  $|\mathcal{K}|$  es conexo y no degenerado. Asuma además que  $|\mathcal{K}| \notin \mathcal{K}$ . Entonces, existen una función de Whitney  $\mu$  para  $C(|\mathcal{K}^{(1)}|)$  y  $t \in (0, \mu(|\mathcal{K}^{(1)}|))$  tales que  $\mu^{-1}(t)$  y  $|\mathcal{K}|$  son homotópicamente equivalentes.*

*Demostración.* Para construir la función de Whitney  $\mu$ , consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{|\mathcal{L}| : \mathcal{L} \text{ es un subcomplejo de } \mathcal{K}^{(1)} \text{ y } |\mathcal{L}| \text{ es conexo}\}, \\ \mathcal{A}_1 &= \{|\mathcal{L}| \in \mathcal{S} : |\mathcal{L}| \text{ está contenido en algún simplejo de } \mathcal{K}\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{|\mathcal{L}| \in \mathcal{S} : |\mathcal{L}| \text{ no está contenido en ningún simplejo de } \mathcal{K}\}.\end{aligned}$$

Note que  $\mathcal{S} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ . Supongamos que  $|\mathcal{K}^{(1)}| \in \mathcal{A}_1$ . Luego,  $|\mathcal{K}^{(1)}| \subset S$ , para algún  $S \in \mathcal{K}$ . Como  $|\mathcal{K}^{(0)}| \subset |\mathcal{K}^{(1)}|$  (corolario 2.6), lo anterior implica que  $|\mathcal{K}^{(0)}| \subset S$  (observación 2.3 (3)) y, por ende, que  $|\mathcal{K}| \subset [|\mathcal{K}^{(0)}|] \subset S \subset |\mathcal{K}|$ , es decir,  $|\mathcal{K}| = S$ . Esto contradice la hipótesis de que  $|\mathcal{K}| \notin \mathcal{K}$ . Así,  $|\mathcal{K}^{(1)}| \in \mathcal{A}_2$ ; en particular,  $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$ .

Sean  $G = |\mathcal{K}^{(1)}|$  y  $\mathcal{A} = F_1(G) \cup \mathcal{S}$ . Sea  $\mu_1 : C(|\mathcal{K}|) \rightarrow [0, \infty)$  una función de Whitney. Es claro que  $\mathcal{S} \subset C(|\mathcal{K}|)$ . Sean

$$\begin{aligned}r_1 &= \max\{\mu_1(|\mathcal{L}|) : |\mathcal{L}| \in \mathcal{A}_1\}, \\ r_2 &= \min\{\mu_1(|\mathcal{L}|) : |\mathcal{L}| \in \mathcal{A}_2\}.\end{aligned}$$

Note que, si  $\mathcal{K}^{[1]} = \emptyset$ , entonces  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{(0)}$  y, como  $|\mathcal{K}|$  es conexo, se cumple, por el ejemplo 2.1, que  $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{p\}\}$ ; esto último implica que  $|\mathcal{K}|$  es degenerado, lo cual no es posible. Así,  $\mathcal{K}^{[1]} \neq \emptyset$ . En consecuencia, dado cualquier  $S \in \mathcal{K}^{[1]}$ , tenemos que  $\mu_1(S) > 0$  y, como  $S \in \mathcal{A}_1$ , el valor  $r_1$  es positivo.

Por otro lado, si  $\mathcal{L}$  es un subcomplejo de  $\mathcal{K}^{(1)}$  tal que  $|\mathcal{L}| \in \mathcal{S}$  y  $\mu(|\mathcal{L}|) = 0$ , entonces  $|\mathcal{L}|$  posee un único elemento y, por ende,  $\mathcal{L} = \{V\}$ , para algún  $V \in \mathcal{K}^{[0]}$ , y  $|\mathcal{L}| = V \in \mathcal{A}_1$ . Esto implica que cada  $|\mathcal{L}| \in \mathcal{A}_2$  cumple  $\mu(|\mathcal{L}|) > 0$ . Por tanto,  $r_2 > 0$ .

Considérese la función  $\mu' : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$  dada por

$$\mu'(A) = \begin{cases} \frac{1}{2r_1}\mu_1(A) & \text{si } A \in F_1(G) \cup \mathcal{A}_1, \\ \frac{2}{r_2}\mu_1(A) & \text{si } A \in \mathcal{A}_2. \end{cases}$$

Es claro que  $\mu'(F) = 0$  para cualquier  $F \in F_1(G) \cup \mathcal{A}_1$  que solo posee un elemento. Además, como  $r_2 > 0$ , cualquier  $F' \in \mathcal{A}_2$  cumple que  $\mu'(F') > 0$ . Sean  $A, B \in \mathcal{A}$  tales que  $A \subsetneq B$ . Si  $A, B \in F_1(G) \cup \mathcal{A}_1$ , entonces  $\mu'(A) = \frac{1}{2r_1}\mu_1(A)$  y  $\mu'(B) = \frac{1}{2r_1}\mu_1(B)$  y, como  $\mu_1(A) < \mu_1(B)$ , tenemos que  $\mu'(A) < \mu'(B)$ . De igual forma, si  $A, B \in \mathcal{A}_2$ , entonces  $\mu'(A) < \mu'(B)$ . Si  $A \in F_1(G) \cup \mathcal{A}_1$  y  $B \in \mathcal{A}_2$ , entonces

$$\begin{aligned}\mu'(A) &= \frac{1}{2r_1}\mu_1(A) \leq \frac{1}{2r_1}r_1 = \frac{1}{2} \\ \mu'(B) &= \frac{2}{r_2}\mu_1(B) \geq \frac{2}{r_2}r_2 = 2\end{aligned}$$

y, por ende,  $\mu'(A) < \mu'(B)$ . Por otro lado, si  $A \in \mathcal{A}_2$  y  $B \in F_1(G) \cup \mathcal{A}_1$ , entonces, como  $A \subsetneq B$ ,  $B \notin F_1(G)$  y así,  $B \in \mathcal{A}_1$ . Sea  $S \in \mathcal{K}$  tal que  $B \subset S$ . Luego,  $A \subset S$ , lo cual no es posible. Por lo tanto, en cualquier caso,  $\mu'(A) < \mu'(B)$ . Así,  $\mu'$  es una función de Whitney para  $\mathcal{A}$ .

Como  $\mathcal{A}$  es un subconjunto cerrado de  $C(X)$ , por el teorema 4.1, existe una función de Whitney  $\mu$  para  $C(G)$  tal que  $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu'$ . Vamos a demostrar que  $\mu^{-1}(1)$  es homotópicamente equivalente a  $|\mathcal{K}|$ . Primero, vamos a mostrar algunas propiedades que relacionan a  $\mu^{-1}(1)$ , a los conjuntos  $C^V(G, 1)$  y a los simplejos de  $\mathcal{K}$ .

**Afirmación 1.**  $\mu^{-1}(1) = \bigcup \{C^V(G, 1) : V \in \mathcal{K}^{(0)}\}$ .

Como cada  $C^V(G, 1) \subset \mu^{-1}(1)$ , la contención hacia la izquierda es inmediata. Sea  $A \in \mu^{-1}(1)$ . Note que  $G = \bigcup \mathcal{K}^{[1]}$  y que cada par de elementos de  $\mathcal{K}^{[1]}$  distintos o son ajenos o bien se intersectan en uno de sus puntos extremos. Sea  $B_1 \in \mathcal{K}^{[1]}$  tal que  $B_1 \cap A \neq \emptyset$ . Como  $B_1 \in \mathcal{A}_1$ , tenemos que  $\mu(B_1) < 1$ , así que  $A \not\subset B_1$ . Luego,  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , en donde

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{K}^{[1]} : A \cap B \not\subset B_1\}.$$

Note que  $A \subset (\bigcup \mathcal{C}) \cup B_1$ ,  $A \cap (\bigcup \mathcal{C}) \neq \emptyset$  y  $A \cap B_1 \neq \emptyset$ . Por la conexidad de  $A$ , obtenemos que  $A \cap B_1 \cap (\bigcup \mathcal{C}) \neq \emptyset$ . Sea  $B_2 \in \mathcal{C}$  tal que  $A \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ . Luego,  $B_2 \neq B_1$  y  $B_1 \cap B_2 = V$ , en donde  $V$  es una cara común propia de  $B_1$  y de  $B_2$ . Como  $V \in \mathcal{K}^{(0)}$ ,  $V$  es un vértice. Esto implica que  $A \cap B_1 \cap B_2 = V$ . Así,  $A \in C^V(G, 1)$ . Esto muestra la afirmación 1.

Sean  $\{V_0, V_1, \dots, V_k\} \subset \mathcal{K}^{[0]}$  y  $S^* = [V_0, V_1, \dots, V_k]$ . Observe que el conjunto  $\mathcal{K}_{S^*} = \{[A] : A \subset \{V_0, V_1, \dots, V_k\}\}$  es un complejo simplicial tal que  $|\mathcal{K}_{S^*}| = S^*$  (ejemplo 2.2). Sea  $\mathcal{L}^* = \mathcal{K}_{S^*}^{(1)}$ .

**Afirmación 2.**  $S^* \in \mathcal{K}$  si y solo si  $\bigcap_{i=0}^k C^{V_i}(G, 1) \neq \emptyset$ .

Supongamos que  $S^* \in \mathcal{K}$ . Luego, por el lema 2.5, se tiene que  $|\mathcal{L}^*|$  es un subconjunto conexo de  $S^*$ . Así,  $|\mathcal{L}^*| \in \mathcal{A}_1$ . Se sigue de la construcción de  $\mu$  que  $\mu(|\mathcal{L}^*|) < 1$ . Así, existe  $T_0 \in C(G)$  tal que  $|\mathcal{L}^*| \subset T_0$  y  $\mu(T_0) = 1$ . Como  $\bigcup_{i=0}^k V_i \subset |\mathcal{L}^*| \subset T_0$ , se tiene que  $T_0 \in \bigcap_{i=0}^k C^{V_i}(G, 1)$ . Recíprocamente, supongamos que existe  $T \in \bigcap_{i=0}^k C^{V_i}(G, 1)$ . Como  $T$  es una gráfica finita (y, por ende, un continuo arco conexo) y  $\bigcup_{i=0}^k V_i \subset T$ , para cada par de elementos distintos  $i$  y  $j$  de  $\{0, 1, \dots, k\}$ , existe un arco  $J_{ij}$  contenido en  $T$  y tal que  $E(J_{ij}) = V_i \cup V_j$ . Por el lema 2.4, existe un subcomplejo  $\mathcal{L}_{ij}$  de  $\mathcal{K}^{(1)}$  tal que  $J_{ij} = |\mathcal{L}_{ij}|$ . Luego,  $\mathcal{L} = \bigcup_{i \neq j} \mathcal{L}_{ij}$  es un subcomplejo de  $\mathcal{K}$  tal que  $\bigcup_{i=0}^k V_i \subset |\mathcal{L}| \subset T$ . Como  $\mu(|\mathcal{L}|) \leq \mu(T) = 1$  y  $\mu(|\mathcal{L}|) \neq 1$  (porque  $|\mathcal{L}| \in \mathcal{S}$ ), tenemos que  $|\mathcal{L}| \in \mathcal{A}_1$ . Así, existe  $S \in \mathcal{K}$  tal que  $|\mathcal{L}| \subset S$ . Luego,  $\bigcup_{i=0}^k V_i \subset S$ , lo que implica, puesto que  $S$  es un simplejo, que  $S^* \subset S$ . Note además

que cada  $V_i$  es un vértice de  $S$ . Así,  $S^*$  es una cara de  $S$  y, por tanto, un elemento de  $\mathcal{K}$ .

**Afirmación 3.** Si  $S^* \in \mathcal{K}$ , entonces  $\bigcap_{i=0}^k C^{V_i}(G, 1)$  es un RA. Supongamos que  $S^* \in \mathcal{K}$ . Sea

$$\mathcal{L} = \{|\mathcal{L}| \text{ es un subcomplejo de } \mathcal{K}^{(1)}, |\mathcal{L}| \in \mathcal{A}_1 \text{ y } \bigcup_{i=0}^k V_i \subset |\mathcal{L}|\}.$$

La prueba de la afirmación 2 muestra que, dado cualquier  $T \in \bigcap_{i=0}^k C^{V_i}(G, 1)$ , existe  $\mathcal{L}' \in \mathcal{L}$  tal que  $|\mathcal{L}'| \subset T$  y, por ende, que  $T \in \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}} C^{|\mathcal{L}'|}(G, 1)$ . Recíprocamente, si  $T \in C^{|\mathcal{L}'|}(G, 1)$ , para algún  $\mathcal{L}' \in \mathcal{L}$ , entonces  $\bigcup_{i=0}^k V_i \subset |\mathcal{L}'| \subset T$  y así  $T \in C^{V_i}(G, 1)$ , para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ . Por lo tanto, se tiene la igualdad

$$\bigcap_{i=0}^k C^{V_i}(G, 1) = \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}} C^{|\mathcal{L}'|}(G, 1).$$

Como  $\mathcal{L}^* \in \mathcal{L}$  (véase la demostración de la afirmación 2), es inmediato que  $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}} A(\mathcal{L}) = \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}} C^{|\mathcal{L}'|}(G, 1)$ , en donde, para un  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}$  dado,

$$A(\mathcal{L}) = C^{|\mathcal{L}^*|}(G, 1) \cup C^{|\mathcal{L}'|}(G, 1).$$

De este modo, tenemos la igualdad

$$\bigcap_{i=0}^k C^{V_i}(G, 1) = \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{L}} A(\mathcal{L}).$$

Por consiguiente y como consecuencia al teorema 3.2, para terminar la demostración de la afirmación 3 basta mostrar que cada  $A(\mathcal{L})$  es un RA y que la intersección de cualquier subfamilia de la colección de todos estos conjuntos es también un RA.

Sea  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}$ . Sea  $S \in \mathcal{K}$  tal que  $|\mathcal{L}| \subset S$ . Luego,  $\bigcup_{i=0}^k V_i \subset \mathcal{L} \subset S$ . Así,  $S^* \subset S$  y, en particular,  $|\mathcal{L}| \cup |\mathcal{L}^*| \subset S$ . Note también que  $|\mathcal{L}| \cup |\mathcal{L}^*|$  es un continuo, puesto que  $V_0 \subset |\mathcal{L}| \cup |\mathcal{L}^*|$ . Es claro también que  $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^*$  es un subcomplejo de  $\mathcal{K}^{(1)}$  y que  $|\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| \cup |\mathcal{L}^*|$ . Así,  $|\mathcal{L}| \cup |\mathcal{L}^*| \in \mathcal{A}_1$  y, por ende,  $\mu(|\mathcal{L}| \cup |\mathcal{L}^*|) < 1$ . En consecuencia, existe  $T \in C(G)$  tal que  $|\mathcal{L}| \cup |\mathcal{L}^*| \subset T$  y  $\mu(T) = 1$ , es decir,  $C^{|\mathcal{L}^*| \cup |\mathcal{L}'|}(G, 1) \neq \emptyset$ . Además, puesto que  $C^{|\mathcal{L}^*|}(G, 1) \cap C^{|\mathcal{L}'|}(G, 1) = C^{|\mathcal{L}^*| \cup |\mathcal{L}'|}(G, 1)$  y cada uno de estos tres hiperespacios es un RA (teorema 4.2), tenemos, por el teorema 3.1, que  $A(\mathcal{L})$  es un RA.

Sea  $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ . Note que

$$\bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{P}} A(\mathcal{L}) = C^{|\mathcal{L}^*|}(G, 1) \cup \bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{P}} C^{|\mathcal{L}'|}(G, 1).$$

Si  $\bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} C^{|\mathcal{L}|}(G, 1) = \emptyset$ , entonces es claro que  $\bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} A(\mathcal{L})$  es un RA. Supongamos que  $\bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} C^{|\mathcal{L}|}(G, 1) \neq \emptyset$ . Observe que

$$\bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} C^{|\mathcal{L}|}(G, 1) = C^{\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}|}(G, 1)$$

y así  $\mu(\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}|) \leq 1$ . Como  $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}| = |\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} \mathcal{L}|$  y  $V_0 \in \bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} \mathcal{L}$ , se cumple que  $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}|$  es conexo y es el politopo del subcomplejo  $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} \mathcal{L}$  de  $\mathcal{K}^{(1)}$ . De este modo,  $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}|$  es un elemento de la familia  $\mathcal{S}$  y, considerando el valor que le asigna  $\mu$ , también es un elemento de  $\mathcal{A}_1$ . Sea  $S \in \mathcal{K}$  tal que  $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}| \subset S$ . Como  $\bigcup_{i=1}^n V_i \subset \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}|$ , tenemos que  $S^* \subset S$ . Por tanto,  $|\mathcal{L}^*| \cup \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}| \subset S$ . Como  $V_0$  es también elemento de  $\mathcal{L}^*$ , esta última unión es conexa y, como esta es también el politopo del subcomplejo  $\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D} \cup \{\mathcal{L}^*\}} |\mathcal{L}|$  y está contenida en  $S$ , tal unión es elemento de  $\mathcal{A}_1$ . En particular,  $\mu(|\mathcal{L}^*| \cup \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}|) < 1$ . Esto muestra que el conjunto  $C^{|\mathcal{L}^*| \cup \bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} |\mathcal{L}|}(G, 1)$ , el cual es igual a  $C^{|\mathcal{L}^*|}(G, 1) \cap \bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} C^{|\mathcal{L}|}(G, 1)$ , es no vacío. Como los tres hiperespacios anteriores son RAs, el teorema 3.2 garantiza que  $C^{|\mathcal{L}^*|}(G, 1) \cup \bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} C^{|\mathcal{L}|}(G, 1)$ , es decir  $\bigcap_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}} A(\mathcal{L})$ , es un RA. Esto concluye la prueba de la afirmación 3.

En lo que resta de esta demostración, vamos a construir una equivalencia de homotopía  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow \mu^{-1}(1)$ . Dado  $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}^{[0]}$ , sean

$$I_{\mathcal{P}} = \bigcap_{V \in \mathcal{P}} \text{St}(V, \text{Sd}(\mathcal{K})),$$

$$J_{\mathcal{P}} = \bigcap_{V \in \mathcal{P}} C^V(G, 1).$$

Como  $|\mathcal{K}^{[1]}|$  no es un elemento de  $\mathcal{A}_1$  y está contenido en  $[\mathcal{K}^{[0]}]$ , se tiene que  $[\mathcal{K}^{[0]}] \notin \mathcal{K}$  y, por tanto, el lema 3.6 asegura que  $I_{[\mathcal{K}^{[0]}]} = \emptyset$ . Así, podemos considerar

$$m_{\mathcal{P}} = \min\{m : \text{cada } \mathcal{P}' \subset \mathcal{K}^{[0]} \text{ tal que } \mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \text{ y } |\mathcal{P}' - \mathcal{P}| = m \text{ cumple } I_{\mathcal{P}'} = \emptyset\},$$

para cualquier  $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}^{[0]}$ . Sea  $\mathcal{C}_m = \{\mathcal{P} \subset \mathcal{K}^{[0]} : m_{\mathcal{P}} = m\}$ . Es claro que, dado cualquier  $V \in \mathcal{K}^{[0]}$  se cumple que  $m_{\{V\}} > 0$  y, en particular,  $\mathcal{C}_{m_{\{V\}}} \neq \emptyset$ . Sea  $N_1 = \min\{m \in \mathbb{N} : \mathcal{C}_m \neq \emptyset\}$ . Sea  $N_2 = \max\{m \in \mathbb{N} : \mathcal{C}_m \neq \emptyset\}$  (tal máximo existe puesto que  $\mathcal{K}^{[0]}$  es finito). Observe que  $\mathcal{C}_0 = \{\mathcal{P} \subset \mathcal{K}^{[0]} : I_{\mathcal{P}} = \emptyset\}$ , en particular,  $\mathcal{K}^{[0]} \in \mathcal{C}_0$ .

Supongamos que  $\mathcal{P}_1 \subsetneq \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{K}^{[0]}$  y  $m_{\mathcal{P}_2} \geq 1$ . Sea  $\mathcal{P}' \subset \mathcal{K}^{[0]}$  tal que  $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}'$ ,  $|\mathcal{P}' - \mathcal{P}_2| = m_{\mathcal{P}_2} - 1$  y  $I_{\mathcal{P}'} \neq \emptyset$ . Note que  $|\mathcal{P}' - \mathcal{P}_1| = |\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}' - \mathcal{P}_2| = |\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1| + m_{\mathcal{P}_2} - 1 \geq m_{\mathcal{P}_2}$ . Luego, existe  $\mathcal{P}'' \subset \mathcal{P}'$  tal que  $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}''$  y  $|\mathcal{P}'' - \mathcal{P}_1| = m_{\mathcal{P}_2}$ . Como  $I_{\mathcal{P}'} \neq \emptyset$ , se tiene que  $I_{\mathcal{P}''} \neq \emptyset$ . Por tanto,  $m_{\mathcal{P}_2} < m_{\mathcal{P}_1}$ .

Para cada  $n \in \{N_1, \dots, N_2\}$ , sea  $\mathcal{D}_n = \bigcup_{k=1}^n C_k$ . Procederemos con la construcción de  $f$ , definiendo recursivamente las funciones  $f_n : \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_n} I_{\mathcal{P}} \rightarrow \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_n} J_{\mathcal{P}}$ , con  $n \in \{N_1, \dots, N_2\}$ .

Dado  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_{N_1}$ , se tiene que  $[\mathcal{P}] \in \mathcal{K}$ . Como  $\bigcup_{V, V' \in \mathcal{P}} [V, V']$  está contenido en  $[\mathcal{P}]$  y es elemento de  $\mathcal{L}$ , también es elemento  $\mathcal{A}_1$  y, por consiguiente,  $\mu(\bigcup_{V, V' \in \mathcal{P}} [V, V']) < 1$ . Luego, existe  $C_{\mathcal{P}} \in C(G, 1)$  tal que  $\bigcup_{V, V' \in \mathcal{P}} [V, V'] \subset C_{\mathcal{P}}$ . Note que  $C_{\mathcal{P}} \in J_{\mathcal{P}}$ . Sea  $f_1 : \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_1} I_{\mathcal{P}} \rightarrow \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_1} J_{\mathcal{P}}$  tal que, para cada  $\mathcal{P} \in \mathcal{D}_1 = \mathcal{C}_1$  y cada  $x \in I_{\mathcal{P}}$ , se tiene  $f_1(x) = C_{\mathcal{P}}$ .

La función  $f_1$  está bien definida porque, si  $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$ , entonces  $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$  y (por el párrafo anterior)  $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}' \in \mathcal{C}_0$ , lo cual implica que  $I_{\mathcal{P}} \cap I_{\mathcal{P}'} = I_{\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'} = \emptyset$ .

Supongamos que, para algún natural  $n$  dado con  $1 \leq n < N_2$  y para cada  $k \leq n$ , hemos definido  $f_k : \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_k} I_{\mathcal{P}} \rightarrow \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_k} J_{\mathcal{P}}$  de tal forma que  $f_n$  extiende a  $f_k$  y  $f_k(I_{\mathcal{P}}) \subset J_{\mathcal{P}}$  para cada  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_k$ . Definimos  $f_{n+1} : \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_{n+1}} I_{\mathcal{P}} \rightarrow \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_{n+1}} J_{\mathcal{P}}$  de la siguiente manera.

Sea  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_{n+1}$ . Observe primero que  $m_{\mathcal{P}} = n + 1$  y que, por ende,  $I_{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ . Aplicando la primera parte del lema 3.6 y la afirmación 2, obtenemos que  $[\mathcal{P}] \in \mathcal{K}$  y que  $J_{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ . Luego, por la afirmación 3 y la segunda parte del lema 3.2,  $J_{\mathcal{P}}$  y  $I_{\mathcal{P}}$  son RAs. Sea  $L_{\mathcal{P}} = I_{\mathcal{P}} \cap (\bigcup_{\mathcal{P}' \in \mathcal{D}_n} I_{\mathcal{P}'})$ . Note que, dado cualquier  $\mathcal{P}' \in \mathcal{D}_n$ ,  $f_n(I_{\mathcal{P}} \cap I_{\mathcal{P}'}) = f_n(I_{\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'})$  y como  $k_0 < n + 1$ , en donde  $k_0 = m_{\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'}$ , tenemos que  $f_n(I_{\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'}) = f_{k_0}(I_{\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'}) \subset J_{\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'} = J_{\mathcal{P}} \cap J_{\mathcal{P}'}$ . Por tanto,  $f_n(L_{\mathcal{P}}) \subset J_{\mathcal{P}}$ . Así, podemos considerar la función continua  $f_n|_{L_{\mathcal{P}}} : L_{\mathcal{P}} \rightarrow J_{\mathcal{P}}$ . Como  $L_{\mathcal{P}}$  es un cerrado de  $I_{\mathcal{P}}$  y  $J_{\mathcal{P}}$  es un RA, podemos extender  $f_n|_{L_{\mathcal{P}}}$  a una función continua  $f_{\mathcal{P}} : I_{\mathcal{P}} \rightarrow J_{\mathcal{P}}$  ([3, Teorema 3.2, pág. 84]).

Note que, dados  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{C}_{n+1}$  distintos, se cumple que  $\mathcal{P}_1 \not\subset \mathcal{P}_2$  y  $\mathcal{P}_2 \not\subset \mathcal{P}_1$  y, por ende,  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subsetneq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  y  $k_1 < n + 1$ , en donde  $k_1 = m_{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2}$ . Luego,  $f_{\mathcal{P}_1}(I_{\mathcal{P}_1} \cap I_{\mathcal{P}_2}) = f_{k_1}(I_{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2}) = f_{\mathcal{P}_2}(I_{\mathcal{P}_1} \cap I_{\mathcal{P}_2})$ . Esto muestra que existe una función continua  $f_{n+1} : \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_{n+1}} I_{\mathcal{P}} \rightarrow \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_{n+1}} J_{\mathcal{P}}$  que extiende a cada  $f_{\mathcal{P}}$  con  $\mathcal{P} \in \mathcal{D}_{n+1}$ . En particular,  $f_{n+1}$  extiende a  $f_n$  y  $f_{n+1}(I_{\mathcal{P}}) \subset J_{\mathcal{P}}$ . Por tanto,  $f_{n+1}$  extiende a  $f_k$  y  $f_k(I_{\mathcal{P}}) \subset J_{\mathcal{P}}$  para cada  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_k$  y cada número natural  $k$  con  $1 \leq k \leq n + 1$ .

Note que cualquier  $V \in \mathcal{K}^{[0]}$  satisface que  $I_{\{V\}} = \text{St}(V, \text{Sd}(\mathcal{K}))$  y, por ende,  $\text{St}(V, \text{Sd}(\mathcal{K})) \subset \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_m} I_{\mathcal{P}}$ , en donde  $m = m_{\{V\}}$ . Esto implica que  $|\mathcal{K}| = \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}_{N_2}} I_{\mathcal{P}}$ . Además, dado cualquier  $A \in C(G)$ , si  $V \notin A$  para cada  $V \in \mathcal{K}^{[0]}$ , entonces existen  $V_1, V_2 \in \mathcal{K}$  tales que  $A \subset [V_1, V_2] - (V_1 \cup V_2)$  y, como  $[V_1, V_2] \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A) < \mu([V_1, V_2]) < 1$ . En consecuencia,  $\mu^{-1}(G) \subset \bigcup_{V \in \mathcal{K}^{[0]}} C^V(G, 1)$ . De este modo, podemos considerar la función  $f = f_{N_2} : |\mathcal{K}| \rightarrow \mu^{-1}(1)$ .

Como  $I_{\{V\}} \in \mathcal{C}_{m_{\{V\}}}$  y  $f$  extiende a cada  $f_{m_{\{V\}}}$ , tenemos que  $f(\text{St}(V, \text{Sd}(\mathcal{K}))) = f_{m_{\{V\}}}(I_{\{V\}}) \subset J_{\{V\}} = C^V(G, 1)$ .

Como  $I_{\mathcal{P}}$  y  $J_{\mathcal{P}}$  son retractos absolutos, el lema 3.3 garantiza que  $f|_{I_{\mathcal{P}}}$  es una equivalencia de homotopía, para cualquier  $\mathcal{P} \in \mathcal{D}_{N_2}$ . Por tanto, aplicando el corola-

rio 3.5, obtenemos que  $f$  es una equivalencia de homotopía. Esto muestra que  $|\mathcal{K}|$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $\mu^{-1}(1)$ .  $\square$

**Teorema 4.4** ([9], Corolario 5.3). *Cada RVA compacto es homotópicamente equivalente a algún poliedro.*

(Valga la aclaración que el resultado anterior se expresa en [9] con el término “poliedro compacto” en el contexto de complejos simpliciales no necesariamente finitos, el cual resulta equivalente a la definición de poliedro dada aquí en el contexto más reducido de complejos simpliciales finitos).

**Teorema 4.5.** *Sea  $X$  un RVA compacto y conexo, Entonces, existen una gráfica finita  $G$ , una función de Whitney  $\mu$  para  $C(G)$  y  $t \in (0, \mu(G))$  tales que  $\mu^{-1}(t)$  y  $X$  son homotópicamente equivalentes.*

*Demostración.* Por el teorema 4.4, existe un complejo simplicial finito  $\mathcal{K}$  tal que  $|\mathcal{K}|$  es homotópicamente equivalente a  $X$ . Como  $X$  es un continuo localmente conexo, es arco conexo. En particular,  $X$  es conexo por trayectorias y, en consecuencia,  $|\mathcal{K}|$  también lo es ([8, Corolario 1.17]). Sea  $G = |\mathcal{K}^{(1)}|$ . Note que, por el lema 2.5,  $G$  es una gráfica finita. Aplicando el teorema 4.3 a  $\mathcal{K}$ , obtenemos una función de Whitney  $\mu$  para  $C(G)$  y  $t \in (0, \mu(G))$  tales que  $\mu^{-1}(t)$  y  $|\mathcal{K}|$  son homotópicamente equivalentes; así,  $\mu^{-1}(t)$  y  $X$  son homotópicamente equivalentes.  $\square$

## Agradecimientos

Agradecemos al amable árbitro, cuyos valiosos comentarios y sugerencias permitieron mejorar este capítulo.

## Bibliografía

- [1] M. Aguilar, S. Gitler y C. Prieto. *Topología Algebraica. Un enfoque homotópico.* McGraw Hill/Interamericana Editores S.A. de C.V., 1998.
- [2] R. Brown. *Topology and groupoids: a geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid.* www.groupoids.org.uk, 2017.
- [3] S. T. Hu. *Theory of retracts.* Wayne State University Press, 1965.
- [4] A. Illanes y S. B. Nadler Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances,* volume 126 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1999.

- [5] H. Kato. Whitney continua of graphs admit all homotopy types of compact connected ANRs. *Fundamenta Mathematicae*, 129(3):161–166, 1988.
- [6] J. van Mill. *Infinite dimensional topology: prerequisites and introduction*. North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [7] S. B. Nadler Jr. *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.
- [8] J. J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*, volume 119 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 1998.
- [9] J. E. West. Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution to a conjecture of Borsuk. *Ann. of Math.*, 106(1):1–18, 1977.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

215571041@alumnos.fcfm.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

# Índice de autores

Álvarez Mena, Jorge, 41

Ahuatzi Reyes, José Gerardo, 209

Angoa Amador, Juan, 23

Angulo Perkins, Emilio, 23

Bautista Ramos, César, 5

Bykov, Alexander, 149, 169

Contreras Carreto, Agustín, 23

Domínguez Soto, Patricia, 131, 149

Flores De Jesús, Lázaro, 193

Gómez Pérez, Sandy, 41

Gómez Salgado, Paulino Antonio, 5

Guillén Galván, Carlos, 5

Herrera Carrasco, David, 149, 193, 209

López Andrade, Carlos Alberto, 5

Macías Romero, Fernando, 169, 193, 209

Martínez Cruz, Reinaldo, 57

Monter Cortés, Juan Carlos, 57

Muñoz Aguirre, Evodio, 41

Ortiz Ramírez, Ambrosio, 87

Pérez Vázquez, José Erasmo, 57

Palomino Jiménez, Carlos, 111

Soriano Grande, Daniel, 111

Tajonar Sanabria, Francisco Solano, 111

Texis Taxis, Marcelino, 169

Trejo García, José Carlos, 87

Trujillo Santamaría, Lizzeth, 131

Vallejo-Jiménez, Benjamín, 87

Matemáticas y sus aplicaciones 8  
su composición, diseño y cuidado, estuvo a cargo de  
María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero  
se terminó de imprimir el 7 de noviembre de 2017, en los talleres de  
El Errante editor, S. A. de C. V., sito en privada Emiliano Zapata 5947,  
Col. San Baltazar Campeche, Puebla, Pue., México.

El tiraje consta de 500 ejemplares.