



Los capítulos del presente libro son co-creados por los autores al poner atención e intención en su participación en el Primer Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones (1CIMA). El 1CIMA emana de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha designado la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, he aquí los resultados que promueve la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.

BUAP **FCFM** **CSMA**

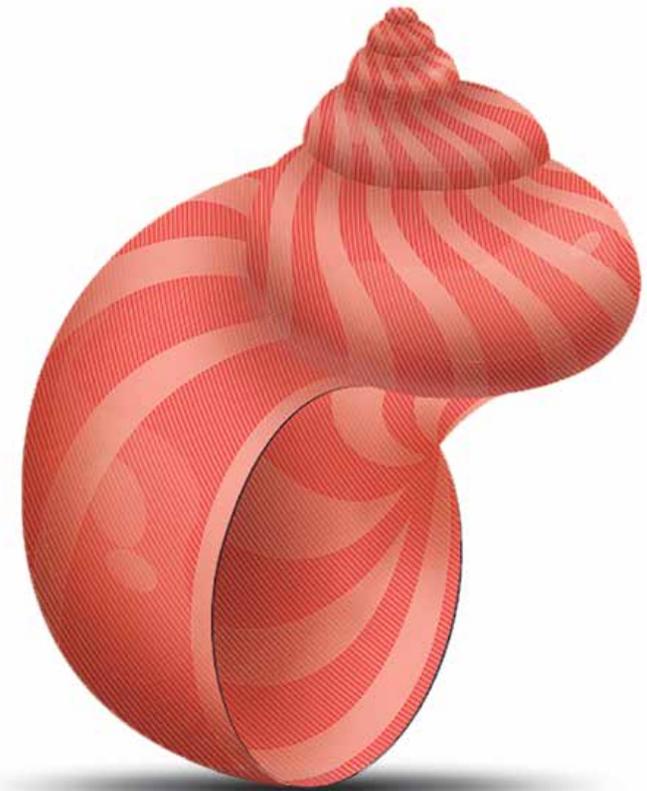
ISBN: 978-607-487-934-6



9 786074 879346



Matemáticas y sus Aplicaciones 5



Matemáticas y sus Aplicaciones 5

Fernando Macías Romero
Editor

Matemáticas y sus aplicaciones 5

*Dedicado al Profesor David Herrera Carrasco
por su 60 aniversario*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
Editor

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

José Alfonso Esparza Ortiz

Rector

René Valdiviezo Sandoval

Secretario General

Ygnacio Martínez Laguna

Vicerrector de Investigación y Estudios de Posgrado

Flavio Marcelino Guzmán Sánchez

E. D. Vicerrectoría de Extensión y Difusión de la Cultura

Ana María Dolores Huerta Jaramillo

Directora de Fomento Editorial

José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

Director de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Primera edición, 2015

ISBN: 978-607-487-934-6

© Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Dirección de Fomento Editorial

2 Norte 1404, C.P. 72000

Puebla, Pue.

Teléfono y fax: 01 222 246 8559

Impreso y hecho en México

Printed and made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 5

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos trabajos presentados en el Primer Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones 2014, FCFM, BUAP.

Editor

Fernando Macías Romero

Comité científico internacional

José Gerardo Ahuatzi Reyes (BUAP), Mauricio Esteban Chacón Tirado (BUAP), Agustín Contreras Carreto (BUAP), Alejandro García Diego (UNAM), Luis Alberto Guerrero Méndez (BUAP), Carlos Guillén Galván (BUAP), Judy Kennedy (LU USA), Fernando Macías Romero (BUAP), Miguel Ángel Piñar González (UG, ESP), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Guillermo Sienra Loera (UNAM), María Angélica Vega Urquieta (USC, CHL), Francisco Venegas Martínez (IPN).

Contenido

Presentación	1
Profesor David Herrera Carrasco	
<i>Breve semblanza. El editor</i>	7
<i>Pensamiento de su hija Zazil. Zazil Carolina Herrera Soto</i>	13
<i>Festejo al Dei en su 60 aniversario. Manuel Ibarra Contreras</i>	15
<i>Elegía del amor perdido. José Juan Angoa Amador</i>	17
<i>Homenaje al Dei. J. Carlos G. Bonanni Torreblanca</i>	19
Análisis	
Capítulo 1. Fórmula baricéntrica de Lagrange y el algoritmo de Remez en el sistema Chebfun	23
<i>Juana Elisa Escalante Vega, Jesús Adolfo Mejía de Dios, Francisco Sergio Salem Silva</i>	
Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y modelación matemática	
Capítulo 2. Modelo de Heston con ecuaciones diferenciales parciales y calibración de funciones de pérdida cuadráticas: una aplicación a opciones sobre futuros del IPC	45
<i>María Teresa Verónica Martínez Palacios, Héctor Alonso Olivares Aguayo, Ambrosio Ortiz Ramírez</i>	
Capítulo 3. Implementation of three-dimensional cellular automata on irregular geometries: medical simulations on surfaces and volumes	75
<i>Gerardo M. Ortigoza</i>	
Filosofía, Divulgación e Historia de las Matemáticas	

Capítulo 4. Algunas reflexiones sobre la historia de la matemática	103
<i>Juan Angoa, Agustín Contreras, Manuel Ibarra</i>	
Geometría	
Capítulo 5. Algunas pinceladas sobre el triángulo de van Schooten	119
<i>Aarón Aparicio Hernández</i>	
Topología	
Capítulo 6. Dimensión finita en el n-ésimo hiperespacio de continuos localmente conexos	137
<i>José Gerardo Ahuatzi Reyes, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
Capítulo 7. El espacio de selecciones de un abanico suave	165
<i>Mauricio Esteban Chacón Tirado</i>	
Capítulo 8. Indescomponibilidad	187
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez</i>	
Índice de autores	215

Presentación

Tenemos la fortuna de hacer un recorrido hacia un proceso creativo sin precedentes. Ha llegado el momento de compartir esta sabiduría, de invitar a todo el mundo a embarcarse en el navío que nos conduce hacia la Fuente de todo lo creado. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado Primer Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones (1CIMA), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 1CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este producto no es ni siquiera setemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 1CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a José Gerardo Ahuatzi Reyes por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

Fernando Macías Romero
Editor

Profesor David Herrera Carrasco



Programa

Martes 21 de abril de 2015

 **Unicidad de Hiperespacios**  10:00 - 10:50
(del área de Topología).

 Dr. Alejandro Illanes
Instituto de Matemáticas de la UNAM

Resumen:

La unicidad de los hiperespacios es un tema que nació y se ha desarrollado con gran fuerza en México. En particular el grupo de Teoría de Continuos de Puebla ha hecho aportaciones importantes a su estudio, destacando el trabajo realizado por David Herrera. En esta plática haremos un recorrido por la manera en que se ha desarrollado esta área, mencionando, entre otras, las aportaciones de nuestro homenajeado.

 **Continuos Homogéneos**  10:55 - 11:15
(del área de Topología).

 Dra. Isabel Puga
Facultad de Ciencias de la UNAM

Se presentará una breve reseña del recién resuelto problema sobre los continuos planos homogéneos y algunas variantes del tema de homogeneidad.

 **Intervenciones**  11:20 - 14:00
en alusión al Dr. David Herrera.

 Dr. Fernando Velázquez  Dr. Juan Angoa
 Dr. Fernando Macías  Los que gusten

Dirige:

Agustín Contreras.

Comité Organizador:

Juan Angoa
Agustín Contreras
Patricia Domínguez
Manuel Ibarra
María de J. López
Fernando Macías Romero
Armando Martínez

Alumnos Colaboradores:

Lucero Gpe. Contreras
José Luis León
Vianey Córdova

 Auditorio Joaquín Ancona Albertos 111A/102 FCFM BUAP

Breve semblanza

David Herrera Carrasco, nacido en Tapanatepec, Oaxaca el 21 de abril de 1955, es un prestigioso matemático, profesor, investigador, síquico, psicoanalista natural, viajero, social y deportista. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia justo en una situación precaria, inicialmente estudió y practicó fútbol en el Colegio Salesiano San Juan Bosco en donde le desarrollaron estas habilidades a cambio de alimento, es decir, entre más conocía de la Biblia y jugaba bien, más lo consentían en la barriga, la sed él se la satisfizo siendo acólito. Estudió la licenciatura en matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). Comenzó a trabajar como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón, de la UAP, del 1975-1981. Desde 1981 a la fecha es Profesor de Tiempo Completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Estudió la maestría y el doctorado en matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. A lo largo de los viajes de estudio ha desarrollado las tres categorías: Sabiduría, Conducta ética, Concentración. En el camino del Nirvana ha pedido salud=*prost=L'chayim=salute=cin cin=a santé=nasdrovia=na zdrowie=cheers=yamas=kampai=saude=wen lie*. Muchas universidades lo han acogido en las que con tanto entusiasmo investiga las matemáticas y disfruta de la amistad. Ha concluido la dirección de una tesis de doctorado, 5 de maestría y 18 de licenciatura, todas en matemáticas excepto una, que fue en la licenciatura en electrónica. Tesis en proceso tiene varias. Sus aportaciones matemáticas son gigantes; es más que reconocido investigador de las «dendritas de David». Además, es comentarista de la publicación *Mathematical Reviews* que reseña artículos de matemáticas.

Libros

1. David Herrera Carrasco (otros autores: Juan Angoa Amador, Jaime Arroyo García, Agustín Contreras Carreto, Manuel Ibarra Contreras, Raúl Lineras Gracia, Fernando Macías Romero, Armando Martínez García, Celestino Soriano Soriano, Fernando Velázquez Castillo), «Cálculo Diferencial en una Variable», Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Primera Edición, ISBN 968-863-817-X. Tiraje de 1000 ejemplares. 261 páginas. Publicado en marzo de 2005.
2. David Herrera Carrasco (otros autores: J. Juan Angoa Amador, Jaime Arro-

yo García, Agustín Contreras Carreto, Raúl Linares Gracia, Héctor Sánchez Morgado, Celestino Soriano Soriano, Fernando Velázquez Castillo), «Álgebra I», Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Primera Edición, ISBN 978-968-9282-412. Tiraje de 1000 ejemplares. 200 páginas. Publicado en junio de 2007.

Capítulos de libros

1. Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, «La Topología de los Hiperespacios» (Capítulo 26), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 291–300, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-338-2. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 283 ejemplares. 334 páginas. Publicado el 30 de septiembre de 2011.
2. Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, «Dendritas Locales» (Capítulo 27), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 301–312, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-338-2. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 283 ejemplares. 334 páginas. Publicado el 30 de septiembre de 2011.
3. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, «¿Tienen las Dendritas Locales Producto Simétrico Único?» (Capítulo 28), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 313–325, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-338-2. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 283 ejemplares. 334 páginas. Publicado el 30 de septiembre de 2011.
4. Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, «Encajes» (Capítulo 19), Matemáticas y sus Aplicaciones 2, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 271–285, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-600-0. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 240 ejemplares. 312 páginas. Publicado el 1 de octubre de 2013.

5. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, «Continuos casi enrejados y localmente conexos con n -ésimo producto simétrico único» (Capítulo 20), Matemáticas y sus Aplicaciones 2, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 287–299, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-600-0. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 240 ejemplares. 312 páginas. Publicado el 1 de octubre de 2013.
6. Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero, «El n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo» (Capítulo 10), Matemáticas y sus Aplicaciones 3, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 175–195, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-659-8. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 300 ejemplares. 238 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2013.
7. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, «El n -ésimo hiperespacio suspensión de gráficas finitas» (Capítulo 11), Matemáticas y sus Aplicaciones 3, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 197–214, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-659-8. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 300 ejemplares. 238 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2013.
8. Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, «Gráficas finitas con hiperespacio único $C_n(X)$ » (Capítulo 7), Matemáticas y sus Aplicaciones 4, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 159–181, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-791-5. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 248 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2014.
9. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez, «Dendritas C -determinadas» (Capítulo 8), Matemáticas y sus Aplicaciones 4, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 183–207, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-791-5. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 248 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2014.
10. José Gerardo Ahuatzi Reyes, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, «Dimensión finita en el n -ésimo hiperespacio de continuos localmente conexos» (Capítulo 6), Matemáticas y sus Aplicaciones 6, Textos Científicos,

Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 137–165, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-934-6. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. Primera Edición. 224 páginas. Publicado el 19 de octubre de 2015.

11. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, «Indescomponibilidad» (Capítulo 8), Matemáticas y sus Aplicaciones 6, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 187–214, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-934-6. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 224 páginas. Publicado el 19 de octubre de 2015.

Artículos

1. David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, «Hacia la clasificación de los continuos homogéneos aplanables», Miscelánea Matemática, volumen 43 (2006), 75–86. ISSN-1665-5478.
2. David Herrera-Carrasco, «Dendrites with unique hyperspace», Houston J. Math. 33 (3) (2007), 795–805.
3. David Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero, «Dendrites with unique n -fold hyperspace», Topology Proceedings, volumen 32 (2008), 321–337. ISSN 0146-4124. Editorial: Auburn University, Alabama, USA Nipissing University, Ontario Canada.
4. Gerardo Acosta, David Herrera-Carrasco, «Dendrites without unique hyperspace», Houston J. Math., volumen 35 (2009), no. 2, 451–467.
5. David Herrera-Carrasco, Alejandro Illanes, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías-Romero, «Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$ », Topology and its Applications, volumen 156 (2009), 549–557. ISSN: 0166-8641. Editorial: Elsevier Science, Amsterdam, Netherlands.
6. David Herrera-Carrasco, María de J. López and Fernando Macías-Romero, «Dendrites with unique symmetric products», Topology Proceedings, volumen 34 (2009), 175–190. ISSN: 0146-4124. Editorial: Auburn University, Alabama, USA Nipissing University, Ontario Canada.
7. Gerardo Acosta, David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero, «Local dendrites with unique hyperspace $C(X)$ », Topology and its Applications, volumen 157 (2010), 2069–2085. ISSN: 0166-8641

8. David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero, «Local dendrites with unique n -fold hyperspace, *Topology and its Applications*, volumen 158 (2011), 244–251. ISSN: 0166-8641. Editorial: Elsevier Science, Amsterdam, Netherlands
9. David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero, Francisco Vázquez-Juárez, «Peano continua with unique symmetric products», *Journal of Mathematics Research*, volumen 4, No. 4 (2012), 1–9. ISSN: 1916-9795, E-ISSN: 1916-9809. Editorial: Canadian Center of Science and Education.
10. David Herrera-Carrasco, Alejandro Illanes, Fernando Macías-Romero, Francisco Vázquez-Juárez, «Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$ », *Topology Proceedings*, volumen 44 (2014), 75–95. ISSN: 0146-4124. Editorial: Auburn University, Alabama, USA Nipissing University, Ontario Canada.
11. Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, «Meshed continua have unique second and third symmetric products», *Topology and Its Applications*, volumen 191 (2015), 16–27. Editorial: Elsevier Science, Amsterdam, Netherlands.
12. David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, «Framed continua have unique n -fold hyperspace suspension». Por publicarse en *Topology and Its Applications*.
13. David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, «Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product», Enviado a *Topology and Its Application* (3 de junio de 2015).
14. David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, «Almost meshed locally connected continua without unique n -fold hyperspace suspension», Enviado a *Topology and Its Application* (2 julio de 2015).
15. Vianey Córdova-Salazar, David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero, «Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product», manuscrito.

El Editor.

Pensamiento de su hija Bazil

Contaré la historia de un niño
que hoy suelo decirle daddy de cariño,
un niño que creció con zapatos de cartón por suela
y envejeció con zapatos de cuero de fina silueta:

«La mano de Dios» lo puso en una vecindad sucia, triste y olvidada
al lado de 3 hermanas y un hermano,
una madre que envejecía sus manos en cada ropa en la que ella trabajaba,
un padre que enviciado al alcohol se enterró en el infierno.

Todos los días se luchaba por un pedazo de pan,
pero nunca faltó un «ojalá que te vaya bonito» de su mamá.
Por donde fuese mendingaba por una moneda «como el perro negro»,
siempre pensando que «cuando los años pasen», nada de ello sería igual,
pues, con el camino hecho de libros, quitaría de su paso este «mundo raro».

Los días eran tan cambiantes como los lugares para trabajar,
como las personas tan déspotas o humanas que conocía.
«15 de septiembre», navidad, año nuevo y semana santa, su reloj no los veía
pues solo significaban una moneda por otra cortada en sus manos sin descansar.

A veces se sentía como «el rey» con tan pocas monedas,
como aquel pollo que hizo esa navidad a su familia sollozar.

A pesar de vivir entre una distancia muy corta de su vecindad
a cantinas, casinos y el inframundo de las drogas,
su comida más deseada era aquella de una carrera terminar,
pues aunque nadie creyera en él y las matemáticas,
él sabía que con una dendrita daría «la media vuelta» al mundo;
que con ellas un plato de sopa tendría «pa' todo el año»
sin sudar por un trabajo duro.

Pero, como todo humano e «hijo del pueblo»,
su camino se bifurcó por un suspiro,
pues fue vencido por el verdugo del alcohol;
para su fortuna, llegó a su ventana, a aquel árbol,
su «paloma querida» que, con un beso, su mundo cambió.
Ese «corazón, corazón» no permitió que se alejara de su camino
y, aunque se viera vencido, el «amor sin medida» desató esa saga de su vida.

Al paso de los años, el amor le dejó en su puerta 2 niñas y un niño,
en donde la ropa, educación, viajes y amor jamás faltó;
nunca olvidarán esos viajes a las playas viendo el atardecer,
nunca olvidarán sus regaños al llegar tarde a casa,
nunca olvidarán esos partidos de futbol que el nunca dejaba de ver,
nunca olvidarán esas curaciones muy suyas que paraban cualquier queja,
nunca olvidarán sus aplausos y comidas por cada pieza que formaban de sus
rompecabezas y, mucho menos, una de ellas olvidará que no durmió cuidándola
por ese accidente que casi su vida hizo trizas.

Ahora lo vemos aquí, siendo uno solo él y la matemática,
viajando como Julio Verne por todo el mundo;
y yo le diré en este momento: «si nos dejan», nos vamos a querer toda la vida;
que estoy orgullosa porque no importa cuánto sufrió, cuan adolorido trabajó,
pues nunca se rindió; y también le diré: «gracias» por ser mi papá y
permitirme ser tu hija, por enseñarme que la vida es cuesta arriba,
pero la vista allí es hermosa.

*Felicidades papá!!!
Te ama tu hija Zazil*

Festejo al Dei en su 60 aniversario

Aún cuando mi amistad con el Profesor David me ha impedido indagar más sobre sus orígenes, puedo platicar que he sido testigo, en más de una ocasión, de sus visitas a algunos de los muchos territorios de lo que damos en llamar “quehaceres del hombre”. Cronista, libador, deportista y sicoanalista nato, lo vi hacer de la palabra no solo medio de expresión sino puente entre estos oficios para deambular por los lugares más inhóspitos de la mente humana. Es en reuniones como esta, tomando como pretexto la celebración personal, que aprovechamos para hurgar en la memoria, tratando de descifrar al ser humano en toda su complejidad. Es una aspiración siempre fallida pero el disfrute al hacerlo justifica la acción. El Dei ha tenido el privilegio de disponer de su vida y de su tiempo, para forjar y definir su vocación. Con disciplina mal disimulada e infatigable dedicación ha surcado los sinuosos y complejos caminos de la Topología de Continuos, extraviándose en, los ahora vanidades, oficios antes referidos, oficios que, dotado de una sensibilidad excepcional, recorre sin ninguna duda, pasando de cronista de la vida cotidiana a cronista deportivo, de enfermero de primeros auxilios a siquiatra lobotomista, incursionando en los más diversos medios para dejar en sus “pacientes”, el sello indeleble de su experiencia. No me extrañaría, y ojalá así sea, si alguno de los aquí presentes se animara a presentar su testimonio. Imposible no recordar al verlo, a esa rara avis que es inseparable del Dei, su Mr. Hyde (o Mr. Hei para los cuates), como surgido de una remota era en donde ciertos hombres, o entes, podían escudriñarlo todo. Nunca he podido elucidar si los multicitados oficios son ejercidos magistralmente por el Dei o su Mr. Hei y la verdad, tampoco me ha importado pues siempre he quedado pasmado al verlo “trabajar” en todo su esplendor. Aunque, haciendo este acto de raciocinio y pudiendo no haber dicho lo anterior, concluyo que Mr. Hyde, una vez liberado, o librado, del Dei, parece alcanzar esa aspiración prometeica y naturalmente inalcanzable de la plena omnisciencia. Para desgracia de algunos y gracia de otros, entre ellos sus alumnos aunque juren y perjuren que se mueren por conocer al mítico personaje, creo que hemos sido testigos de la transmutación definitiva de Mr. Hyde en el Dr. Dei. En este breve espacio no pretendí desentrañar la inabarcable biografía de nuestro cumpleaños, solo me limité a describir uno de los aspectos del hombre de mundo, amigo excepcional y de quien quiero dejar testimonio de mi celebración por sus bien cumplidos 15 campeonatos mundiales de futbol. Recibe mis felicitaciones hondas y sentidas y mi abrazo siempre sincero, entrañable amigo Dei.

Manuel.

Elegía del amor perdido

Para el fauno báquico del Dei.

En el juego del amor y desamor
¿Quién se va primero?

Nutrida sonoridad de sombras
engalana tu festiva ausencia
congelada sangre supera el ansia,
en espera de la explicación y el perdón,
pero no estás y la única razón es el espacio vacío,
la sombra ganada y la sinrazón del desamor.

Deambula pálido bolero en esos tus lugares,
sangre marchita marca tus besos,
perdidos de tanto repetirse,
y el no estar truena como unicornio espantado

¿Por qué me quedo?

si no estás

¿A que me voy?

si no te alcanzo

¿Para que el camino?

si al final no estás

¿Por qué la razón me hizo amarte?

para sin razón perderte,

amor perdido

de toda perdición.

Amor ganado sin explicación,

cura los quebrantos

de las ausencias

y las sombras

de los ecos

y los fríos

de los silencios

y las preguntas.

Acido danzón en sordina,

canción de José Alfredo en palpitar de abandono

arrópame en este tiritar de soledad

ejércitos de palomas y riendas flojas
calienten todas las noches de serenata
y sin ti.

Ya que otra vez
a buscar encontrar y abandonar,
ciclo fatídico del vivo,
del corazón y la sangre
de los sudores y las hambres
de los abandonos pa' estar parejos.

Tu cuate el Juan

Homenaje al Dey

Entre un cosmos sin palabras
por universos no euclidianos,
deambula un ser que conozco,
descifrando extraños planos.

Pareciera que enloquece
garabateando servilletas,
cuando describe un remolino
o cuenta en madera unas vetas.

Nadie supo cuando niño
ya vislumbraba sus dotes,
observando bien los brincos
de dos fieros guajolotes.

Luego se fue cultivando
su curiosidad, su pasión,
cuando demostró que en su trabajo
hay además diversión.

Porque sabe gozar la vida
y hacer que otros la gocen,
sus alumnos, su familia,
y también sus “amigotes”...

Siendo un gran deportista
nunca presume por esto,
la amistad es lo que importa
y “el fútbol es un pretexto”.

A pesar del burdo intento
no hay palabras que describan
a este ser tan completo,
tan “directo, trisecto y exacto”.

Tan sencillo es que su origen
no lo niega, lo enaltece;
el mismo se nombra “El indio”
y el mote lo enorgullece.

Pareciera ser su vida

solo símbolos complejos,
cuando es vital su familia
y algún “¡viejo, pero viejo!”.

Ante un hijo y hermano ejemplar,
un profesor dadivoso, un amigo sin igual,
esposo y padre amoroso,
solo pido conservar
el honor de su amistad,
y pidiendo un favor al mundo
lo debieran proclamar:
“Patrimonio de la humanidad”...

Con afecto de: J. Carlos G. Bonanni Torreblanca.

Análisis

Capítulo 1

Fórmula baricéntrica de Lagrange y el algoritmo de Remez en el sistema Chebfun

Juana Elisa Escalante Vega¹, Jesús Adolfo Mejía de Dios²,
Francisco Sergio Salem Silva²

Facultad de Estadística e Informática, Universidad Veracruzana¹
Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana²

Resumen

Evgeny Yakovlevich Remez realizó tres publicaciones en 1934, donde exponía un método iterativo para aproximar funciones a través de polinomios. Su trabajo fue tan brillante que en la actualidad se han hecho implementaciones en el ámbito computacional, haciendo un híbrido entre la fórmula baricéntrica y el algoritmo de Remez. Un ejemplo es la librería Chebfun para MATLAB, la cual está hecha a través de programación orientada a objetos cuya implementación ofrece estimaciones muy precisas con errores considerablemente pequeños. En este trabajo como primera instancia, construimos el algoritmo de Remez y la fórmula baricéntrica para obtener el híbrido anteriormente mencionado. También se harán pruebas utilizando el sistema Chebfun donde se usa este algoritmo y así mostrar la eficiencia de éste en casos donde se necesite tener una buena aproximación.

1 Introducción

El algoritmo de Remez es un método iterativo utilizado para calcular aproximaciones polinomiales. Las mejores implementaciones de este algoritmo provienen de una época donde la exactitud de una aproximación polinomial no era tan necesaria como lo es actualmente [1].

Hoy en día se han actualizado y mejorado las ideas de Remez en el contexto del sistema *Chebfun* [1], el cual da como resultado aproximaciones numéricas a través de funciones (hablando computacionalmente) en lugar de valores numéricos [2, 3]. Una de las principales características de esta implementación es que requiere el uso de la fórmula baricéntrica de interpolación de Lagrange para aproximaciones de funciones mediante funciones polinómicas.

Por otro lado, la interpolación de Lagrange es atractiva y útil en la teoría,

puesto que se usa para demostrar y deducir otros métodos numéricos, como por ejemplo la integración numérica. Sin embargo se puede hacer un par de cambios para reescribir esta fórmula, de tal manera que se vuelva más eficiente para cálculos computacionales, además puede hacerse numéricamente más estable [4, 5]; dicha variación de la fórmula de Lagrange da lugar a la fórmula baricéntrica.

En la actualidad, lo que se usa es un híbrido entre el algoritmo de Remez y la fórmula baricéntrica de Lagrange; esto con la finalidad de dar el valor explícito del error de aproximación y una representación para el polinomio de interpolación.

Chebfun es una librería para MATLAB desarrollada por investigadores de la Universidad de Oxford, Inglaterra. Dicho sistema está basado en un análisis de los puntos Chebyshev, que corresponden a los ceros de dichos polinomios, además tienen muchas aplicaciones en la teoría de aproximación [9], y realiza aproximaciones numéricas de funciones de una variable con precisión igual al número de la máquina. La idea fundamental es que los polinomios de interpolación en puntos de Chebyshev son herramientas poderosas y flexibles para representar funciones, calcular sus raíces e integrales. El objetivo del sistema Chebfun es tener la facilidad que da el cálculo simbólico a la velocidad que da el cálculo numérico [2].

2 Fundamentos

La interpolación de Lagrange, que se usa para aproximar funciones en los cursos de análisis numérico es útil, pedagógicamente hablando. El polinomio interpolante de Lagrange se puede expresar de manera sencilla como una combinación lineal de las llamadas funciones cardinales [15]. Sin embargo, cuando se hace en puntos igualmente espaciados, es bien sabido que no tiene buen comportamiento [14], una prueba de esto es el ejemplo dado por Runge [14] que a continuación se expone.

Ejemplo 2.1. (*Fenómeno de Runge*) Supongamos que se pide interpolar en n puntos igualmente espaciados en el intervalo $[-1, 1]$ la *función de Runge*, definida por:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Solución. Se usará la interpolación de Lagrange para encontrar el polinomio que aproxima a la función de Runge, después se procede a graficar. Para fines didácticos se hará para $n = 5$, $n = 10$ y $n = 15$ puntos igualmente espaciados.

Del gráfico de la Figura 1, se observa que para $n = 5$, el máximo error en los extremos es del orden de 0.4 y para $n = 15$ el orden del error es de 7.0. Por lo que se conjetura, que entre más puntos se usen para interpolar, mayor es el error de los polinomios al ajustar la función en los extremos debido a que a mayor grado del polinomio, el polinomio tiende a oscilar. Para más detalles véase el Cuadro 1.

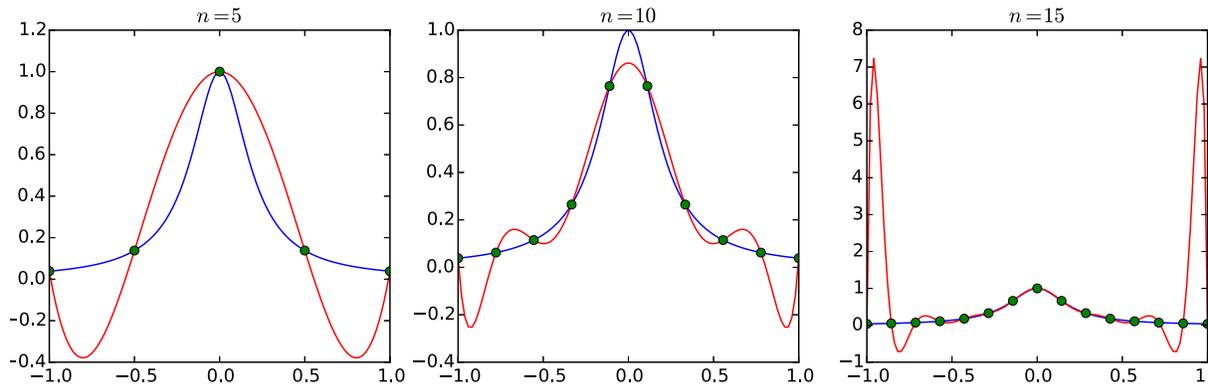


Figura 1: Función de Runge y su respectiva aproximación polinomial para $n = 5$, $n = 10$ y $n = 15$ puntos igualmente espaciados.

	x	$f(x)$	$p(x)$	$ f(x) - p(x) $
$n = 5$	-0.95	0.0424403183024	-0.159544927056	0.201985245358
	-0.9	0.0470588235294	-0.289124668435	0.336183491964
	-0.85	0.0524590163934	-0.359478614058	0.411937630452
	0.85	0.0524590163934	-0.359478614058	0.411937630452
	0.9	0.0470588235294	-0.289124668435	0.336183491964
	0.95	0.0424403183024	-0.159544927056	0.201985245358
$n = 15$	-0.95	0.0424403183024	6.94236791837	6.89992760007
	-0.9	0.0470588235294	2.71294004018	2.66588121665
	-0.85	0.0524590163934	-0.192255260877	0.244714277271
	0.85	0.0524590163934	-0.192255260877	0.244714277271
	0.9	0.0470588235294	2.71294004018	2.66588121665
	0.95	0.0424403183024	6.94236791837	6.89992760007

Cuadro 1: Se muestran algunos valores de la función de Runge, además del valor de su aproximación polinomial (para $n = 5$ y $n = 15$ puntos igualmente espaciados) y finalmente la diferencia entre estos dos.

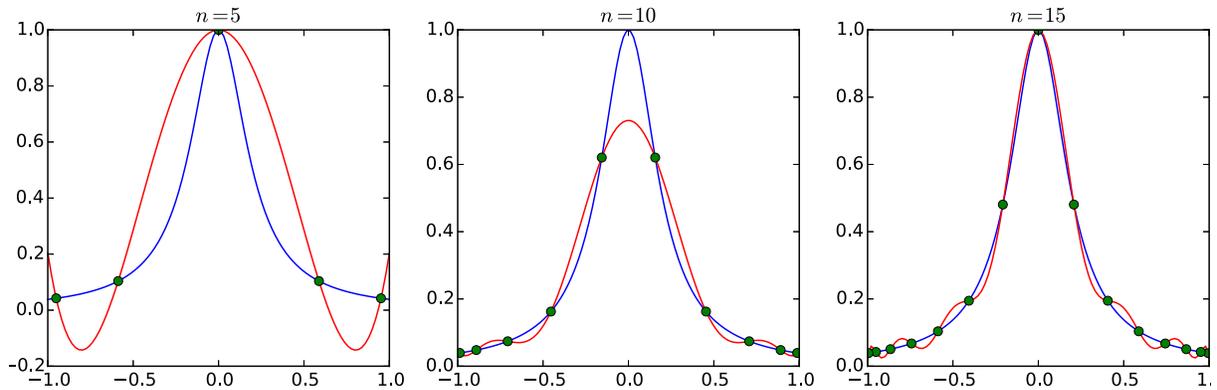


Figura 2: Aproximación de la función de Runge para $n = 5$, $n = 10$ y $n = 15$ puntos de Chebyshev.

El fenómeno de Runge es conocido por no ajustar de manera eficiente a la función, ya que el error en los extremos se incrementa cuando se interpola en una cantidad, considerablemente grande de puntos igualmente espaciados.

Se evitarán las oscilaciones que se observan en el tercer gráfico de la Figura 1, si se utilizan conjuntos de puntos que se acumulen más en los extremos del intervalo. Un conjunto de puntos que cumple con la propiedad mencionada se define de la siguiente manera:

Definición 2.2. Dado un número entero positivo n , se definen los puntos de Chebyshev sobre el intervalo $[-1, 1]$ mediante la expresión:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\right) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si se aproxima la función de Runge usando la interpolación de Lagrange para calcular aproximaciones polinomiales con 5, 10 y 15 puntos de Chebyshev, se obtiene el gráfico de la Figura 2.

Los puntos de Chebyshev coinciden con las raíces de los *polinomios de interpolación de Chebyshev de primer tipo*, y por lo tanto números algebraicos [9]. Los puntos de Chebyshev ayudan a reducir el efecto del fenómeno de Runge, la razón de esto tiene que ver con la Teoría de Potencial (véase [16]). Además coinciden con las proyecciones de puntos igualmente espaciados sobre la circunferencia de radio uno, véase la Figura 3.

El sistema Chebfun cuenta con el comando `chebpts` que genera automáticamente los puntos de Chebyshev. Por ejemplo, para generar 5 puntos se escribe:

```
>> xk = chebpts(5)
```

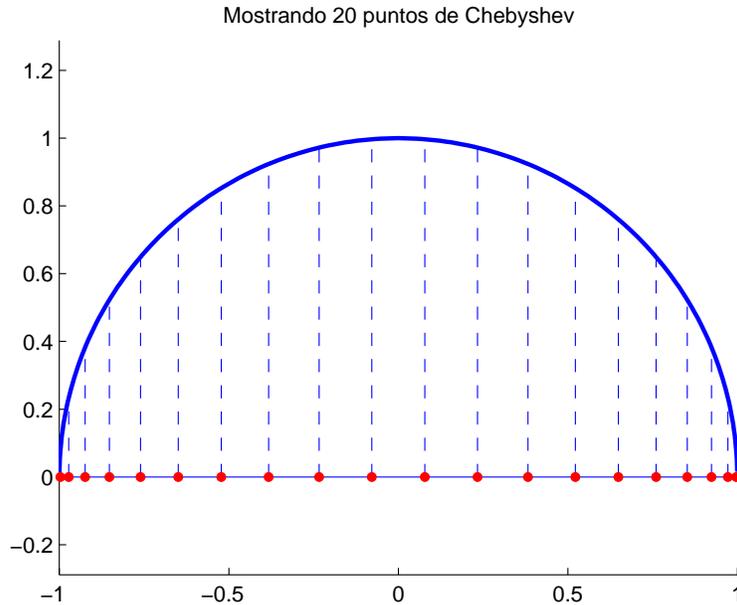


Figura 3: Veinte puntos de Chebyshev en el intervalo $[-1, 1]$.

Se obtiene:

```
xk =
-1.0000
-0.7071
  0
  0.7071
  1.0000
```

La Figura 3 se construye utilizando 20 puntos de Chebyshev, a través del comando `chebpts(20)`.

Una de las principales observaciones que se puede hacer es que estos puntos no están igualmente espaciados y se presentan de manera simétrica con respecto al cero en el intervalo $[-1, 1]$ (Ver Figura 3).

La Definición 2.2 se puede generalizar a cualquier intervalo $[a, b]$, con $a < b$.

Definición 2.3. Dado un intervalo cerrado $I = [a, b]$, se definen los n puntos de Chebyshev en I como

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) \cos\left(\frac{2k - 1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Para generar los puntos de Chebyshev en un nuevo dominio `dd` usando la librería Chebfun, se debe usar la sentencia `chebpts(n, dd)` donde:

`n` : representa el número de puntos y

`dd` : el intervalo dominio.

Por ejemplo, si $n = 10$ y $dd = [-5, 5]$ se obtiene al usar Chebfun:

```
>> dd = domain(-5,5);
>> c = chebpts(10, dd);
>> c
c =
-5.0000
-4.6985
-3.8302
-2.5000
-0.8682
 0.8682
 2.5000
 3.8302
 4.6985
 5.0000
```

Los objetos con los que trabaja el sistema Chebfun son polinomios de interpolación que son obtenidos de la siguiente manera:

Dada una función f analítica en $[-1, 1]$ el sistema lleva a cabo cálculos que se adaptan para determinar el grado necesario del polinomio de aproximación (en puntos de Chebyshev) que represente a la función con una exactitud de al menos 15 dígitos, el polinomio obtenido es el objeto con el que trabaja el sistema Chebfun [3].

Ejemplo 2.4. Se requiere construir el polinomio de interpolación de la función $f(x) = x \cos x$, usando la biblioteca Chebfun obtenemos.

Programa:

```
>> f = chebfun('x*cos(x)')
f =
  chebfun column (1 smooth piece)
      interval      length  endpoint values
[   -1,      1]      16   -0.54    0.54
vertical scale = 0.56
```

De los resultados se deduce que se necesita un polinomio de grado 16 para obtener la exactitud requerida.

2.1 Teoremas importantes

Iniciaremos nuestra discusión del algoritmo de Remez enunciando tres teoremas que son necesarios para la construcción del algoritmo de Remez. El primer teorema es muy importante en la teoría de aproximación ya que garantiza la existencia de un polinomio que mejor ajusta una función en ciertas condiciones, puede leerse más al respecto en [8].

Teorema 2.5. *Dada una función continua f en el intervalo $I = [a, b]$, es posible encontrar una función p^* en el espacio \mathcal{P}_n de polinomios de grado a lo más n tales que*

$$\|f - p^*\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty \text{ para todo } p \in \mathcal{P}_n.$$

La aproximación p^ es única.*

El segundo fue demostrado por Borel en 1905, quien estableció que la condición de alternancia es una condición necesaria y suficiente y que el polinomio que cumple con esta caracterización es único [6].

Teorema 2.6. *(Propiedad equioscilante) Un polinomio $p \in \mathcal{P}_n$ es la mejor aproximación de f continua en un intervalo I (es decir, $p = p^*$) si y solo si existe un conjunto de $n + 2$ puntos distintos $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ en I tales que*

$$f(x_i) - p(x_i) = \lambda \sigma_i \|f - p^*\|_\infty, \quad i = 0, \dots, n + 1,$$

donde $\sigma := (-1)^i$ y $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ fijo.

El siguiente teorema establece una desigualdad entre los errores alternantes de un polinomio de prueba y el error de la mejor aproximación. Este resultado fue probado por de la Vallée Poussin en 1910 [7].

Teorema 2.7. *Sea $p \in \mathcal{P}_n$ y $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ un conjunto de $n + 2$ puntos distintos en I tales que el signo de $f(x_i) - p(x_i) = \lambda \sigma_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n + 1$, con σ_i y λ definidos como en el Teorema [2.6]. Entonces para cada $q \in \mathcal{P}_n$*

$$\min_i |f(x_i) - p(x_i)| \leq \max_i |f(x_i) - q(x_i)|$$

y en particular

$$\min_i |f(x_i) - p(x_i)| \leq \|f - p^*\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty.$$

El Teorema 2.7 permite asegurar que un polinomio $p \in \mathcal{P}_n$ cuyos $n + 2$ errores de oscilación se pueden definir de la siguiente manera

$$\|f - p\|_\infty \leq C \|f - p^*\|_\infty \quad \text{con} \quad C = \frac{\|f - p\|_\infty}{\min_i |f(x_i) - p(x_i)|} \geq 1. \quad (2)$$

3 El algoritmo clásico de Remez

En este apartado se introducirá el algoritmo de Remez para calcular la mejor aproximación polinomial a una función continua sobre un intervalo cerrado.

3.1 Construcción

Primero se define qué es una *referencia* ya que será útil más adelante.

Definición 3.1. Se dice que el conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_n : x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n\}$ es una referencia A_k si cada $x_i \neq x_j$ para todo $0 \leq i < j \leq n$ y algún $k \in \mathbb{N}$.

A continuación se describe el algoritmo:

- Se construye una sucesión de referencias de prueba $\{A_k\}$ y polinomios de prueba $\{p_k\}$ tales que aproximan a una función continua f , dichos polinomios satisfacen la condición de alternancia, de manera que la constante de acotación C en (2) tiende a 1 cuando k tiende a ∞ .
- En el k -ésimo paso el algoritmo se inicia con una referencia de prueba A_k y calcula un polinomio p_k tal que

$$f(x_i) - p_k(x_i) = \sigma_i(f(x_i) - p_k(x_i)), \quad x_i \in A_k. \quad (3)$$

De manera que A_{k+1} es calculada de los extremos de la función diferencia $f - p_k$. Por lo que se puede garantizar que

$$|f(x_i) - p_{k+1}(x_i)| \geq |f(x_i) - p_k(x_i)|.$$

Sea $\{\phi_j : j = 0, 1, \dots, n\}$ una base de \mathcal{P}_n , por lo tanto cualquier polinomio se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de esta base, es decir,

$$p(x) = \sum_{j=0}^n c_j \phi_j(x). \quad (4)$$

Una función f continua y un conjunto $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ de $n + 2$ puntos distintos determinan un polinomio y un error h de manera que satisface (3). De la condición (3) se obtiene un sistema de $n + 2$ ecuaciones con $n + 2$ incógnitas, donde $n + 1$ parámetros describen un polinomio que aproxima a f más una incógnita h . Este sistema en forma matricial se denota:

$$\Phi c = b, \quad (5)$$

donde

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \\ \phi_0(x_{n+1}) & \phi_1(x_{n+1}) & \cdots & \phi_n(x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} f(x_0) + \sigma_0 h \\ f(x_1) + \sigma_1 h \\ \vdots \\ f(x_n) + \sigma_n h \\ f(x_{n+1}) + \sigma_{n+1} h \end{pmatrix}.$$

Ésta es la fórmula clásica del algoritmo de Remez [10, 11, 12]. En los siguientes apartados se explicará más acerca del algoritmo.

Es preciso suponer que para alguna referencia de prueba A_k existe un polinomio tal que $f(x_i) - p_k(x_i) = \sigma_i h_k$ pero $|h_k| < \|f - p^*\|_\infty$. Lo que queremos es una nueva referencia $A_{k+1} = \{y_i\}_{i=0}^{n+1}$ donde el error cometido en la aproximación del polinomio $p_{k+1} \in \mathcal{P}_n$ es equioscilante con error $|h_{k+1}| > |h_k|$ (Véase el Teorema 2.6). La clave para encontrar una nueva referencia de prueba se encuentra en el Teorema 2.6.

- Para obtener la nueva referencia de prueba A_{k+1} a partir de A_k y de los puntos extremos x_r de $f - p_k$ de tal manera que $|(f - p_k)(x_r)| > |h_k|$. Entonces, para cada subconjunto de A_{k+1} de puntos consecutivos con el mismo signo mantiene solo uno por los cuales $|f - p_k|$ alcanza el valor más grande. Del conjunto resultante, A_{k+1} se obtiene seleccionando $n + 2$ puntos consecutivos que incluye el extremo global de $f - p_k$.

3.2 Resumen etapas del algoritmo

En esta parte se dará una descripción del algoritmo en cuestión para analizarlo y dar un par de ejemplos con el motivo de garantizar el entendimiento de éste. Los pasos a seguir para la construcción del polinomio de aproximación:

1. Resolver el sistema (5).
2. Usar las c_j para formar un polinomio p_k .

3. Hallar el conjunto M de puntos del error máximo local $\|p_k - f\|_\infty$.
4. Si los errores $m \in M$ son de igual magnitud y de signo alternante, entonces p_k es la aproximación polinomial buscada. De otra manera, cambiar A_k por M y repetir el proceso desde 1.

El resultado obtenido es llamado la *mejor aproximación polinomial* o la *aproximación minimax*.

4 Fórmula Baricéntrica de Lagrange

La fórmula baricéntrica de Lagrange es una variante de *forma de Lagrange*, donde los interpolantes están escritos como una combinación lineal de *Lagrange*, también conocidos como *polinomios fundamentales* [13]:

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^n f_j(x_i) \ell_j(x_i), \quad (6)$$

donde x_0, \dots, x_n son puntos de interpolación, los cuales pueden ser números reales o complejos, y ℓ_j el j -ésimo polinomio de Lagrange, el cual es el único polinomio en \mathcal{P}_n que satisface:

$$\ell_j(x_k) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \quad (7)$$

Se definen los polinomios fundamentales de Lagrange $\ell_j(x)$ de la siguiente manera:

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}. \quad (8)$$

Programa:

```
d = domain(-1,1); s = linspace(-1,1,10);
y = [1 1 1 1 1 1 -0.5 -1 1 1];
p =interp1(s,y,d); plot(p), hold on, plot(s,p(s), '.r'); grid;
```

La fórmula baricéntrica de Lagrange es tan eficiente como el método de Newton en cuanto a costo computacional se refiere y numéricamente más estable que la fórmula de interpolación de Lagrange. Se obtiene reescribiendo la fórmula de Lagrange (6) en la forma siguiente:

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j} p(x_j)}{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j}},$$

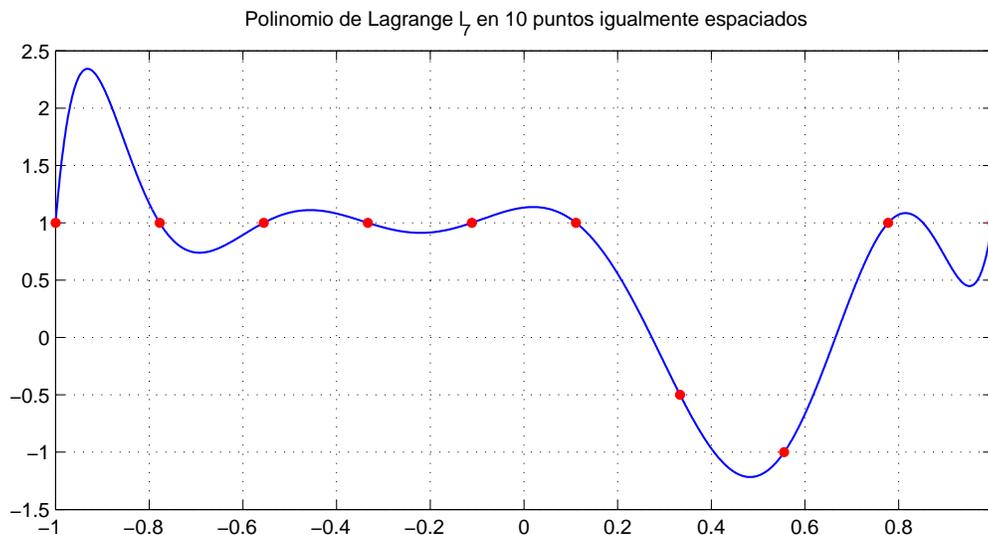


Figura 4: Gráfico del polinomio interpolante de Lagrange de grado a lo más 9 sobre el intervalo $[-1, 1]$.

donde

$$w_j = \prod_{k \neq j} \frac{1}{x_j - x_k} \quad (9)$$

son los pesos baricéntricos. Ésta fórmula es eficiente cuando se desea evaluar polinomios con grado muy grande [13].

4.1 Aplicación en el Algoritmo de Remez

Elegir una base $\{\phi_j\}$ para \mathcal{P}_n es de vital importancia para la solución numérica de (5). Una buena elección es la base de Lagrange (sus elementos son los que tiene la forma de la ecuación (8)): Dado un conjunto $\{x_i\}_{i=0}^n$ de $n + 1$ puntos llamados puntos de interpolación, nuestra representación de $p(x)$, $x \in I$ es matemáticamente equivalente a (6) tomando $f_j(x_i) = p(x_i)$.

Se propone como base los polinomios fundamentales de Lagrange, pero se verá más adelante que la elección de la base depende de los datos.

A continuación se da la fórmula explícita para el error h del sistema de ecuaciones matricial (5).

Por (4.3) se deduce que Φ en (5) es la matriz identidad $(n + 1) \times (n + 1)$ excepto por una j -ésima fila, cuyas entradas son los valores de polinomios fundamentales de Lagrange en un punto particular x_j . Descartando esta fila, consideramos el siguiente sistema

$$p(x_i) = f(x_i) + \sigma_i h, \quad i = 0, \dots, n + 1, \quad i \neq j$$

o bien

$$p(x_i) + \sigma_i h = f(x_i). \quad (10)$$

Al usar la interpolación de Lagrange en el conjunto de $n + 1$ puntos restantes para calcular $p(x_j)$, se obtiene

$$- \sum_{i=0, i \neq j}^{n+1} p(x_i) \ell(x_j)_i^j + \sigma_i h = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n+1, \quad i \neq j \quad (11)$$

donde ℓ_i^j se define como el i -ésimo elemento de la base de Lagrange que usa una referencia A como los nodos Lagrangianos, excepto para x_j ,

$$\ell(x)_i^j := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^{n+1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

con $x_i, x_k \in A$.

Se observa que

$$\ell(x_j)_i^j = -\frac{w_i}{w_j} \quad (12)$$

Sustituyendo (4.7) en (10), se obtiene

$$\sum_{i=0, i \neq j}^{n+1} p(x_i) w_i + \sigma_i w_j h = f(x_i) w_j.$$

Se observa que de la expresión $\sum_{j=0}^n p(x_j) w_j = 0$, se obtiene la fórmula analítica para el error h ,

$$h = \frac{\sum_{j=0}^{n+1} w_j f(x_j)}{\sum_{j=0}^{n+1} w_j \sigma_j}$$

Así en (10) y (11) ya conocemos el valor de h . Los pesos baricéntricos son (9) con $x_j, x_k \in A$.

4.2 Implementación del algoritmo en Chebfun

A continuación se muestra el código fuente (ligeramente simplificado) de la implementación del algoritmo en Chebfun. Los argumentos de entrada son una función Chebfun \mathbf{f} y el grado \mathbf{n} del polinomio que va a ser calculado y los argumentos de salida son \mathbf{p} la mejor aproximación polinomial de \mathbf{f} y el error \mathbf{err} (código extraído de [1]).

```

function [p,err] = remez(f,n);           % compute deg n BA to chebfun f
iter = 1; delta = 1; deltamin = delta;
[a,b] = domain(f);
xk = chebpts(n+2); xo = xk;           % initial reference
sigma = (-1).^[0:n+1];               % alternating signs
normf = norm(f);
while (delta/normf > 1e-14) & iter <= 20
    fk = feval(f,xk);                 % function values
    w = bary_weights(xk);             % compute barycentric weights
    h = (w*fk)/(w*sigma);             % levelled reference error
    if h==0, h = 1e-19; end           % perturb error if necessary
    pk = fk - h*sigma;               % polynomial vals in the
    p=chebfun(@(x)bary(x,pk,xk,w),n+1); % reference chebfun of trial
    e = f - p;                       % polynomial chebfun of the
    [xk,err] = exchange(xk,e,h,2);    % error replace reference
    if err/normf > 1e5                % if overshoot, recompute with
        [xk,err] = exchange(xo,e,h,1); % one-point exchange
    end
    xo = xk;
    delta = err - abs(h);
    if delta < deltamin,              % stopping value
        deltamin = delta;            % store poly with minimal norm
        pmin = p; errmin = err;
    end
    iter = iter + 1;
end
p = pmin; err = errmin;

```

Este algoritmo ya viene implementado en el sistema Chebfun. A continuación se dan algunos ejemplos de su uso.

5 Experimentos numéricos

En esta sección se realizarán experimentos numéricos del Algoritmo de Remez en el sistema Chebfun.

Ejemplo 5.1. Este ejemplo fue realizado por Remez para $f(x) = |x|$ para $n = 5, 7, 9, 11$ [10], en este apunte se considerará $n = 7$ y $n = 11$.

Se muestra el programa MATLAB que permite obtener el gráfico en la Figura 5 (evidentemente con Chebfun instalado). Se puede observar que la aproximación p^* mantiene un error relativamente pequeño.

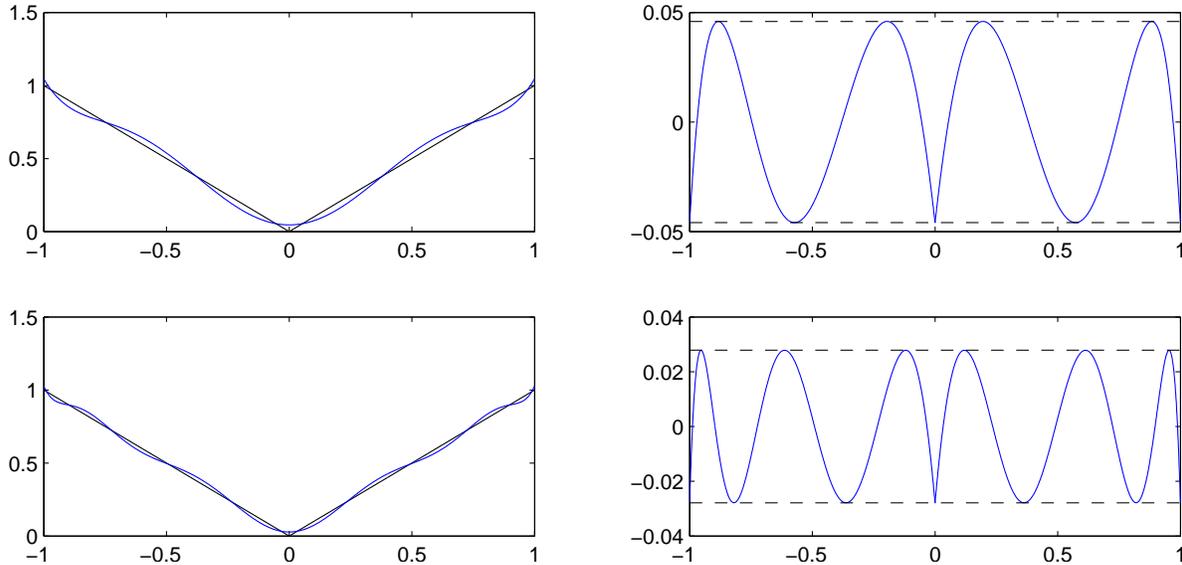


Figura 5: En la primera columna se muestra la gráfica de $f(x) = |x|$ y la mejor aproximación p^* para $n = 7$ y $n = 11$. En la segunda columna se da la curva del error.

```
x = chebfun('x'); f = abs(x);
for n=7:4:11
    subplot(2,2,1), plot(f,'k')
    [p, err] = remez(f, n); hold on, plot(p, 'b')
    subplot(2,2,2), plot(f-p), hold on
    plot([-1 1], err*[1 1], '--k'), plot([-1 1], -err*[1 1], '--k')
end
```

Ejemplo 5.2. Se considera la función $f(x) = 2^x$ y se encuentra la aproximación minimax para $n = 5$ y $n = 10$.

El resultado se puede apreciar en la Figura 6. Se observa que el error se reduce considerablemente si se utiliza el algoritmo con una mayor cantidad de puntos.

```
x = chebfun('x'); f = 2.^x;
for n=5:5:10
    subplot(2,2,1), plot(f,'k')
    [p, err] = remez(f, n); hold on, plot(p, 'b')
    subplot(2,2,2), plot(f-p), hold on
    plot([-1 1], err*[1 1], '--k'), plot([-1 1], -err*[1 1], '--k')
end
```

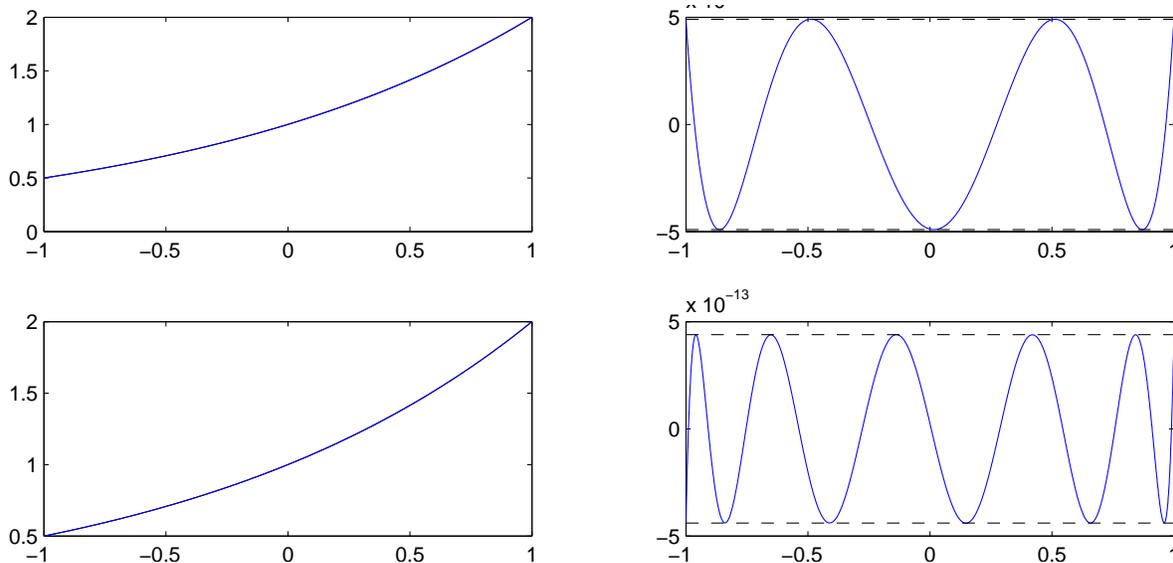


Figura 6: En la primera columna se muestra la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la mejor aproximación p^* para $n = 5$ y $n = 10$. En la segunda columna se da la curva del error.

Ejemplo 5.3. Hallar la aproximación minimax de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, en este caso se considerará $n = 10$ y $n = 20$.

En el gráfico de la Figura 7 se observa que p^* se ajusta a $f(x)$ con errores relativamente pequeños.

Ejemplo 5.4. Encontrar la mejor aproximación polinomial a la función $f(x) = \ln(2.0002 + 2x)$ en $n = 5$ y $n = 10$ puntos.

En la Figura 8 se observa que el algoritmo mantiene un error mayor que 1.0 en ambos casos.

Ejemplo 5.5. Aproximar la función $f(x) = |x^3| - |x^5|$ en $n = 5$ y $n = 10$ puntos.

En el gráfico de la Figura 9 se observa que el algoritmo tiene un margen de error considerablemente pequeño en 10 puntos.

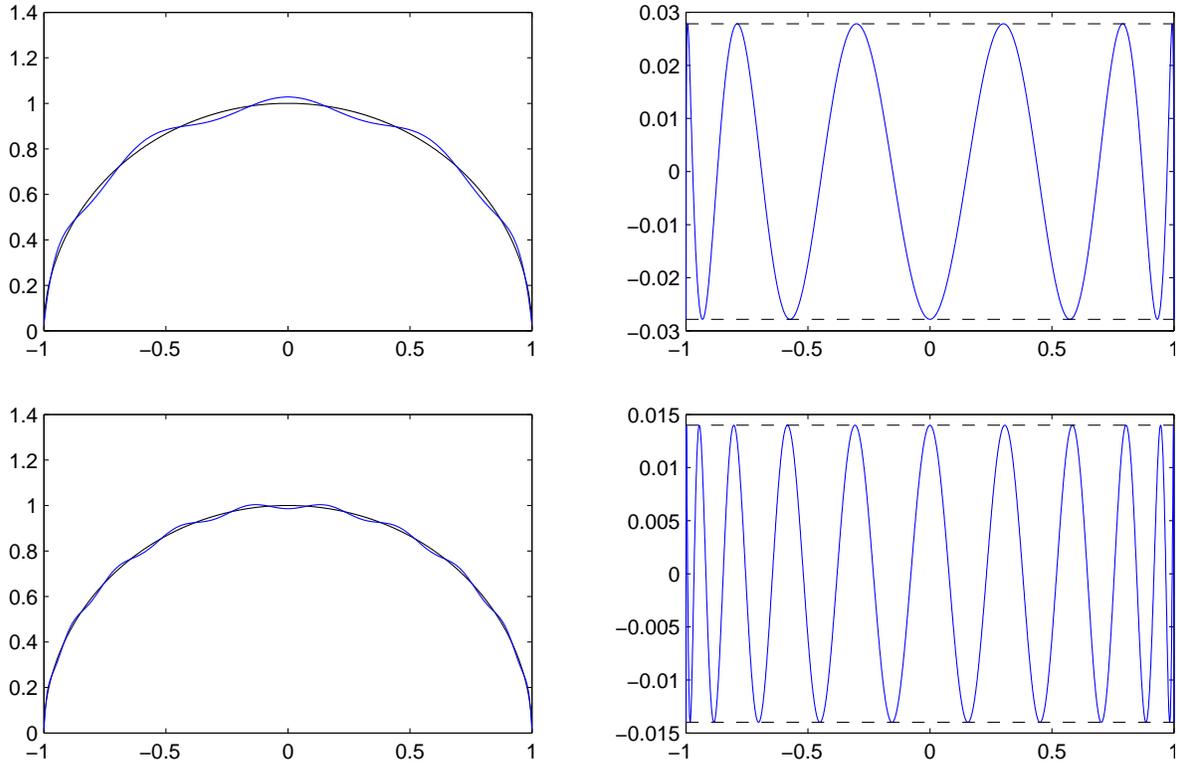


Figura 7: En la primera columna se muestra la gráfica de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y la aproximación minimax p^* para $n = 10$ y $n = 20$. En la segunda columna se puede apreciar la curva del error.

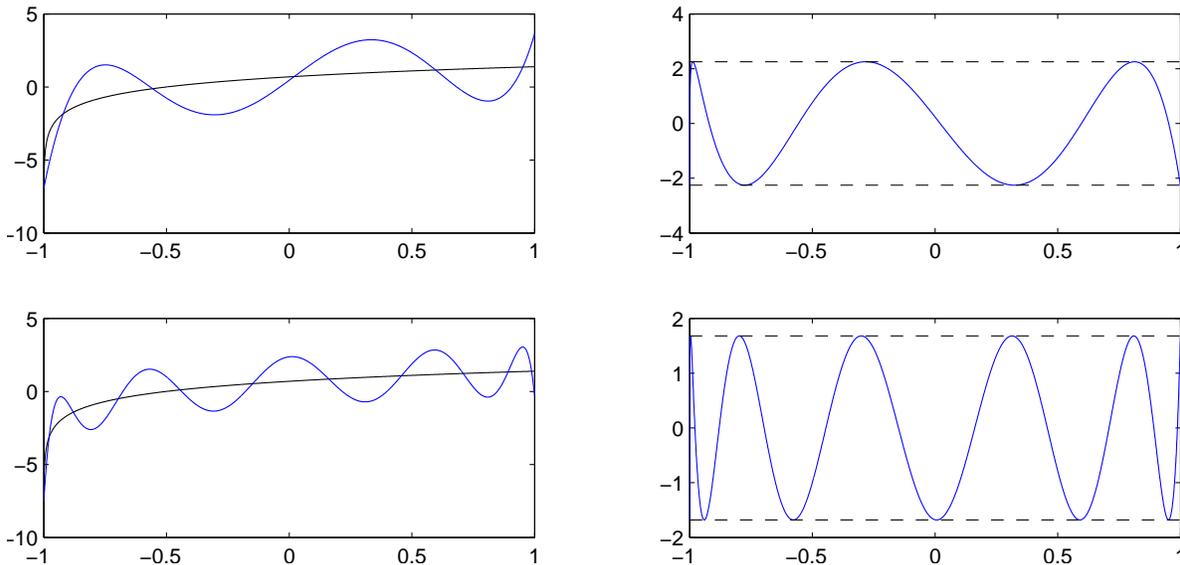


Figura 8: En la primera columna se muestra la gráfica de $f(x) = \ln(2.0002 + 2x)$ y la aproximación minimax p^* para $n = 5$ y $n = 10$. En la segunda columna se puede apreciar la curva del error.

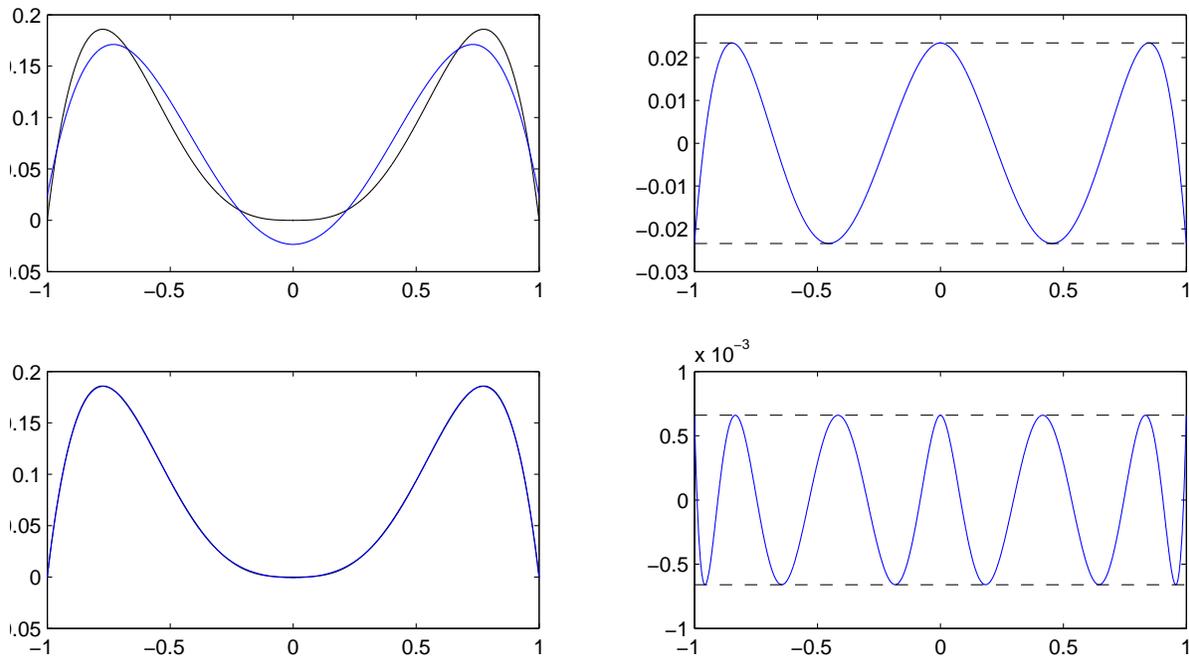


Figura 9: En la primera columna se muestra la gráfica de $f(x) = |x^3| - |x^5|$ y la aproximación minimax p^* para $n = 5, 10$. En la segunda columna se puede apreciar la curva del error.

6 Conclusiones

Si en algún problema de la vida real se desea aproximar a una función a través de un polinomio, se recomienda usar el algoritmo de Remez, ya que su “potencia numérica” permite calcular la mejor aproximación, claro está, si se complementa con los puntos de Chebyshev y la fórmula baricéntrica. Si además se utiliza MATLAB para implementar este método, la aproximación tendrá un margen de error considerablemente pequeño.

En conclusión, Algoritmo de Remez en conjunto con puntos de Chebyshev y la Fórmula Baricéntrica, se obtiene como resultado:

- La mejor aproximación.
- Una representación polinomial de la función para evaluar los puntos de manera más eficiente.
- Corrige lo que sucede en el fenómeno de Runge.
- Errores pequeños en problemas mal condicionados.

- Se puede implementar en cualquier lenguaje computacional que permita realizar programación orientada a objetos. Se sugiere usar MATLAB en conjunto con Chebfun.

Bibliografía

- [1] Ricardo Pachón, Lloyd N. Trefethen, *Barycentric-Remez algorithms for best polynomial approximation in the chebfun system*. Springer Science + Business Media B.V. (2009).
- [2] Battles, Z., Trefethen, L. N., *An Extension of MATLAB to Continuous Functions and Operators*. SIAM Journal on Scientific Computing (2004).
- [3] Trefethen, L. N., *Computing Numerically with Functions Instead of Numbers*. Mathematics in Computer Science (2007).
- [4] Jean-Paul Berrut, Lloyd N. Trefethen, *Barycentric Lagrange Interpolation*. SIAM REVIEW (2004).
- [5] N. J. Higham, *The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation*. IMA J. Numer. Anal. 24 (2004).
- [6] Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*. Gauthier-Villars, Paris (1905).
- [7] de la Vallée Poussin, *Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle*. Acad. R. Belg., Bull. Cl. Sci. 12 (1910).
- [8] Cheney, *Introduction to Approximation Theory*. McGraw-Hill, New York (1966).
- [9] Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York (1965).
- [10] Remes, E., *Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tchebychef*. C. R. Acad. Sci. (1934).
- [11] Remes, E., *Sur un procédé convergent d'approximations successives pour déterminer les polynomes d'approximation*. C. R. Acad. Sci. (1934).
- [12] Remes, E., *Sur la détermination des polynomes d'approximation de degré donnée*. Commun. Soc. Math. Kharkov (1934).

- [13] Lloyd N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*. SIAM (2013).
- [14] Charles F. Van Loan, *Introduction to Scientific Computing*. Prince Hall (1999).
- [15] Jaan Kiusalaas, *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge University Press (2010).
- [16] Lloyd N. Trefethen, *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM, Philadelphia (2000).

Facultad de Estadística e Informática, Universidad Veracruzana
Av. Xalapa Esq. Av. Manuel Avila Camacho S/N
Xalapa, Ver. C.P. 91020
Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana
Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán S/N, Zona Universitaria,
Xalapa, Ver. C.P. 91090
elisaescalante@hotmail.com
jesusmejded@gmail.com
fsergios@gmail.com

Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y modelación matemática

Capítulo 2

Modelo de Heston con ecuaciones diferenciales parciales y calibración de funciones de pérdida cuadráticas: una aplicación a opciones sobre futuros del IPC

María Teresa Verónica Martínez Palacios¹, Héctor Alonso Olivares Aguayo², Ambrosio Ortiz Ramírez²

Escuela Superior de Apan, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo¹, Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional²

Resumen

En este trabajo se obtiene la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio de una opción europea en el modelo de volatilidad estocástica de Heston. Se examina la sensibilidad de la densidad neutral al riesgo de la función característica con un conjunto de parámetros como escenario base. Asimismo, se propone una metodología para calibrar los parámetros del modelo de Heston mediante funciones cuadráticas de pérdida, las cuales minimizan la magnitud del error entre precios de mercado y los precios obtenidos con el modelo teórico. Se plantean tres clases de funciones de pérdida: dos asociadas a precios y otra a volatilidades implícitas. Para la calibración se aplica un algoritmo que minimiza el error, dado un conjunto de parámetros iniciales asociados a la transformada de Lewis. La metodología propuesta se aplica a un conjunto de precios de opciones sobre el IPC, y para cada función de pérdida se determinan las volatilidades implícitas y precios teóricos. Los resultados indican que la raíz de la función de pérdida relativa del error cuadrático medio genera volatilidades implícitas para opciones de compra y de venta que son consistentes con las observadas en el mercado.

1 Introducción

El desarrollo de las finanzas cuantitativas modernas ha sido un factor clave en la innovación de productos financieros. Entre dichas las innovaciones, los derivados destacan y han conducido a cambios importantes en el comportamiento de los mercados y en los agentes que en ellos participan. Es bien conocido que aunque las opciones se han negociado desde hace mucho tiempo, un marco teórico consistente

para su valuación está en [3] y [23] (conocido como el Modelo de Black-Scholes-Merton, en adelante BSM), en ambos trabajos se propone de un modelo bajo un conjunto de supuestos con importantes restricciones que resultó en una fórmula cerrada para la valuación de una opción sobre un subyacente sin pago de dividendos. En particular, el supuesto de volatilidad constante y rendimientos normales limita el modelo de manera drástica, y por esta razón se utiliza frecuentemente como marco de referencia en la literatura.

Si el supuesto de volatilidad constante en el modelo de BSM se verificara con datos de mercado, la volatilidad que correspondería a un subyacente debería ser la misma, lo cual se contrapone con la evidencia empírica encontrada, por ejemplo en [17] sobre volatilidades implícitas con diferentes precios de ejercicio para una misma fecha de vencimiento, *volatility smile* o *volatility smirk*. Por esta razón surge el problema relevante de determinar el precio de una opción de manera consistente con la volatilidad implícita. Un enfoque que se utiliza para abordar este problema es el de volatilidad estocástica. Existen en la literatura varios modelos de volatilidad estocástica, aunque sin duda el más popular es el modelo de Heston.

El supuesto básico de los modelos de volatilidad estocástica es que la volatilidad (o, en algunos casos la varianza) del activo subyacente es guiada por un proceso estocástico. Usualmente se consideran dos movimientos brownianos, uno que conduce la dinámica del subyacente y otro la varianza del mismo. Así, los modelos de volatilidad estocástica tienen al menos dos factores. Por supuesto se supone que los dos procesos están correlacionados y, por lo menos en los mercados de capitales, la correlación generalmente suele ser negativa, es decir, un aumento o una disminución en el precio de los activos tienden a ser acompañados de una disminución o un aumento de la volatilidad. La utilidad de los modelos de volatilidad estocástica radica en que explican de manera consistente el porqué opciones con distintos precios de ejercicio para una fecha de vencimiento dada tienen diferentes volatilidades implícitas. En [1] se hace un análisis empírico del desempeño de varios modelos de valuación de opciones con volatilidad y tasa de interés estocástica con saltos, en sus conclusiones los autores destacan que el supuesto de volatilidad estocástica es el más importante; otros supuestos como saltos y tasa de interés estocástica muestran resultados no tan relevantes, además de complicar la calibración por el número de parámetros en el modelo.

Los artículos seminales [15], [16], [25] y [13] propiciaron, sin duda, el desarrollo de los modelos de volatilidad estocástica. Bajo este enfoque se han propuesto diferentes modelos para el proceso de volatilidad, en particular los procesos con reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck, como en [27] en el cual se consideran dos movimientos brownianos correlacionados y se obtiene la función característica del logaritmo del precio con una expresión compuesta por un sistema de ecuaciones

Cuadro 1: Resumen de modelos de volatilidad estocástica de dos factores. Fuente: elaboración propia.

Modelo	Autor
$dv_t = \kappa v dt + \sigma dW_t$	Johnson/Shano (1987)
$d \ln v_t = \kappa(\theta - \ln v) dt + \sigma dW_t$	Wiggins (1987)
$dv_t^2 = \kappa v^2 dt + \sigma v^2 dW_t$	Hull/White (1987)
$dv_t^2 = (a + \beta v_t^2) dt + \sigma \sqrt{v_t^2} dW_t$	Hull/White (1988)
$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \delta) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t} + dZ_t$ $dv_t^2 = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}$	Bates (1996)
$dv_t = \kappa(\theta - v) dt + \sigma dW_t$	Stein/Stein (1991) Schöbel/Zhu (1999)
$dv_t^2 = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t$	Heston (1993)
$dv_t^2 = \kappa(\theta - v_t^2) dt + \sigma v_t^{3/2} dW_t$	Lewis (2000)
$dv_t^2 = \kappa(\theta - \sqrt{v_t} - \lambda v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t$	Zhu (2010)

diferenciales estocásticas. Asimismo, en [30] se propone un modelo de volatilidad estocástica de doble raíz en el contexto de Longstaff [21]. A manera de resumen, en el Cuadro 1, se muestra un listado de modelos de volatilidad estocástica de dos factores.

Es claro que el Cuadro 1 no es exhaustivo, lo realmente interesante es cómo elegir uno u otro modelo que sea consistente con precios de mercado. En resumen, la mayoría de estos modelos de valuación de opciones se definen usualmente mediante dos procesos: uno para el precio del activo subyacente y otro para la dinámica de la volatilidad, y el punto importante es determinar cuál de ellos se ajusta mejor a un conjunto de datos. Este tema conduce a un problema importante de la ingeniería financiera, la calibración de un modelo. Calibrar un modelo significa encontrar valores numéricos de sus parámetros de tal manera que los precios calculados con el modelo teórico estén cercanos a sus respectivos precios de mercado en un momento dado. Por lo tanto el término calibrar corresponde a la estimación de los parámetros de un modelo. No obstante, en finanzas el término “estimar” se refiere usualmente a una estimación estadística ya sea por máxima verosimilitud o cualquier otro procedimiento estadístico basado en datos históricos. Por consiguiente la estimación estadística es de naturaleza retrospectiva, mientras que la calibración es prospectiva, ya que los precios de los derivados en un periodo de tiempo específico, reflejan las expectativas de los agentes sobre la dinámica futura de los activos subyacentes.

La presente investigación propone una metodología para la calibración de parámetros del modelo de Heston y la construcción de volatilidades implícitas mediante funciones de pérdida cuadráticas. La metodología consiste en minimizar una medida del error entre los precios observados y los precios teóricos¹. Para la calibración se aplica el algoritmo de Nelder-Mead para minimizar el error dado un conjunto de parámetros iniciales asociado a la transformada de Lewis [19]. La metodología se aplica a la valuación de opciones europeas sobre futuros del índice de precios y cotizaciones que se negocian en MexDer (Mercado Mexicano de Derivados).

Esta investigación está organizada de la siguiente manera: en la próxima sección se plantea el marco teórico de los modelos de volatilidad estocástica; en la sección 3 se discuten, brevemente, las características teóricas del modelo de Heston, se obtiene la ecuación diferencial parcial (EDP) que caracteriza el precio de la opción como solución a la EDP en el modelo de Heston y, se examina la sensibilidad de la densidad neutral al riesgo de la función característica con un conjunto de parámetros como escenario base; en el transcurso de la sección 4 se introduce la transformada fundamental de Lewis y la fórmula para calcular el precio de una opción bajo una clase general de modelos de volatilidad estocástica; en la sección 5 se desarrolla la metodología de calibración de parámetros del modelo de Heston con funciones cuadráticas de pérdida; en la sección 6 se presentan y analizan los resultados obtenidos después de aplicar la metodología a un conjunto de precios de opciones sobre futuros del IPC que se cotizan y negocian en el MexDer, asimismo se examina la eficiencia de los parámetros calibrados al calcular las volatilidades implícitas de opciones de compra y de venta de todos los precios de ejercicio reportados en el boletín de opciones considerando sólo opciones con primas positivas; por último, se concluye en la sección 7.

2 El marco teórico de volatilidad estocástica

En general, los modelos de volatilidad estocástica con sus respectivas extensiones han resultado ser más apropiados, con cierta reserva, para la valuación de opciones en tiempo continuo que otras alternativas con volatilidad constante, véase, al respecto [10]. Usualmente, estos modelos son planteados en tiempo continuo aunque también se encuentran en la literatura versiones en tiempo discreto como son los modelos GARCH y sus extensiones [12] y [26]. Un modelo general de volatilidad estocástica es comúnmente planteado como un sistema de dos ecuaciones diferenciales

¹Un trabajo con el enfoque probabilista y con opciones sobre acciones es [24].

estocásticas:

$$\begin{aligned}\frac{dX_t}{X_t} &= \mu_t dt + \sqrt{v_t} dW_t \\ dv_t &= \zeta(v_t) dt + \eta(v_t) dW_t^v\end{aligned}$$

Para generar el efecto de apalancamiento se supone que el rendimiento de activo y el proceso que conduce la volatilidad están correlacionados de tal forma que:

$$\mathbb{E}(dW_t dW_t^v) = \rho dt.$$

De esta manera, el precio del derivado depende del tiempo, del precio del activo subyacente y, por supuesto, de la volatilidad: $P_t = P(t, X_t, v_t)$.

Bajo el supuesto de volatilidad estocástica se alteran dos de los supuestos del modelo de BSM. El primero es que ya no hay un sólo movimiento browniano genera incertidumbre (riesgo de mercado) y el segundo, relacionado con el anterior, es que los mercados son incompletos. Los modelos de volatilidad estocástica consideran, en general, dos movimientos brownianos o factores de riesgo y un solo activo, por lo que los mercados son incompletos (no hay un mercado en donde se compra o venda volatilidad). Esto significa que existe un número infinito de precios que invalidan el supuesto de no arbitraje. Al introducir otro instrumento con fines de cobertura como un derivado, entonces el mercado es completo y, en consecuencia, los derivados se valúan relacionando unos con otros y con el activo subyacente. Esta es una de las razones de que los modelos de volatilidad estocástica se puedan calibrar dado un conjunto de precios de mercado de las opciones, es decir, dado un conjunto de parámetros iniciales y mediante la implementación de un algoritmo numérico se pueden estimar los parámetros del modelo minimizando la distancia entre los precios de mercado y los obtenidos con el modelo teórico.

3 Modelo de volatilidad estocástica de Heston

Una característica relevante del modelo de Heston [13] es que se obtienen funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo como soluciones de una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Enseguida, por medio de estas probabilidades neutrales al riesgo se determina una fórmula similar a la de BSM para valuar una opción europea de compra sobre una acción con volatilidad estocástica; el precio de la opción de venta se calcula mediante la paridad *put-call*.

Otra particularidad del modelo de Heston es que proporciona una fórmula cerrada (en términos de integrales de variables complejas) para el precio de una opción con el supuesto de correlación entre el precio del activo subyacente y su volatilidad.

Aunque la fórmula es cerrada, su cálculo es usualmente complicado por incluir variables complejas. Así, el precio de la opción se obtiene al calcular la probabilidad de que una opción de compra expire dentro del dinero, aunque dicha probabilidad no se puede calcular directamente, ésta sí se puede calcular a través de la inversión de la función característica del logaritmo del precio del subyacente.

A continuación se plantea la dinámica estocástica que conduce la volatilidad. Suponga que el precio de un activo subyacente S_t , es conducido por:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}$$

donde μ es la tasa promedio del rendimiento del subyacente y $W_{1,t}$ es un proceso de Wiener. La volatilidad $\sqrt{v_t}$ es conducida por el proceso:

$$d\sqrt{v_t} = -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_{2,t}$$

donde $W_{2,t}$ es un proceso de Wiener correlacionado con $W_{1,t}$, es decir:

$$\text{Cov}(dW_{1,t}, dW_{2,t}) = \rho dt.$$

Una aplicación del lema de Itô permite obtener el proceso para la varianza v_t , que se expresa como un proceso del tipo Cox, Ingersoll y Ross [7], es decir:

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{2,t} \tag{1}$$

donde $\kappa = 2\beta, \theta = \delta^2/2\beta$ y $\sigma = 2\delta$. Si κ, θ y σ satisfacen las condiciones $2\kappa\theta > \sigma^2$ y $v_0 > 0$, se puede demostrar que la varianza es siempre positiva y su proceso dado en (1) está bien definido bajo estas condiciones, esa propiedad se conoce como condición de proceso de raíz cuadrada de Feller. Los parámetros κ, θ y σ , se interpretan como la tasa de reversión a la varianza de largo plazo, la varianza de largo plazo y la volatilidad de la varianza (también denominada como la volatilidad de la volatilidad), respectivamente.

3.1 La ecuación diferencial parcial del modelo de Heston

Para deducir la ecuación diferencial parcial (EDP) del modelo de Heston se considera un portafolio formado por posiciones en un subyacente, una opción sobre el subyacente y otra para cubrir la volatilidad estocástica y posteriormente se administra el riesgo de mercado. Esto permitirá caracterizar el precio de la opción como solución de una EDP, véase [28]. Es importante recordar que en el modelo de BSM con volatilidad constante, era suficiente el subyacente y la cuenta bancaria para la cobertura, pero ahora se tiene una fuente más de riesgo, estos dos instrumentos

no serán suficientes para eliminar el riesgo por volatilidad, ahora para cubrir la posición en el derivado se utilizará la cuenta bancaria, el subyacente y un derivado adicional.

Con base en el modelo de Heston definido antes se tienen dos partes estocásticas: el precio del subyacente y dos procesos de Wiener, y solamente un activo negociado, la opción sobre el subyacente (ya que la volatilidad no es un activo que negocie²), entonces de acuerdo con [4] el modelo es libre de arbitraje pero incompleto. Para que sea completo hay que agregar otro activo negociado asociado a la volatilidad y de esta manera cubrir el portafolio.

Sea Π_t un portafolio compuesto por: una opción $V = V(t, S, v)$, Δ_1 unidades de un subyacente S y Δ_2 unidades de otra opción $U = U(t, S, v)$ para cubrir la volatilidad:

$$\Pi = V + \Delta_1 S + \Delta_2 U \quad (2)$$

donde por simplicidad ya no se escribirá el subíndice temporal. Si el portafolio es autofinanciable, el cambio en el valor del portafolio debido a cambios en sus componentes es:

$$d\Pi = dV + \Delta_1 dS + \Delta_2 dU, \quad (3)$$

Al aplicar el Lema de Itô a V y U los cambios marginales en los valores de las opciones son:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma \rho S v \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial v} dv \quad (4)$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma \rho S v \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right) dt + \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial v} dv \quad (5)$$

Al sustituir las ecuaciones anteriores en (3) resulta en:

$$d\Pi = \alpha dS + \beta dv + \gamma dt \quad (6)$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial V}{\partial S} + \Delta_1 + \Delta_2 \frac{\partial U}{\partial S}, \\ \beta &= \frac{\partial V}{\partial v} + \Delta_2 \frac{\partial U}{\partial v}, \\ \gamma &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma \rho S v \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \\ &\quad + \Delta_2 \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma \rho S v \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right), \end{aligned}$$

²Sin embargo, existen instrumentos que consideran a la volatilidad como una clase de activo, veáse [9].

Para cubrir el portafolio contra cambios en el subyacente y volatilidad, los dos términos de la ecuación (6) dados por dS y dv deben ser cero, por lo que al hacer $\alpha = \beta = 0$ implica que las ponderaciones adecuadas son:

$$\Delta_2 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial U}{\partial v}}, \quad \Delta_1 = -\Delta_2 \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S}, \quad (7)$$

Si no hay arbitraje entonces la tasa de rendimiento del portafolio es igual a la tasa de interés libre de riesgo, por lo que:

$$d\Pi = \gamma dt = r\Pi dt = r(V + \Delta_1 S + \Delta_2 U) dt. \quad (8)$$

La ecuación anterior implica que: $\gamma = r\Pi$ y por lo tanto:

$$r(V + \Delta_1 S + \Delta_2 U) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma \rho S v \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) \quad (9)$$

$$\Delta_2 \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma \rho S v \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right),$$

reescribiendo la expresión anterior se sigue que:

$$A + \Delta_2 B = r(V + \Delta_1 S + \Delta_2 U).$$

Al sustituir Δ_1 y Δ_2 resulta en:

$$A - \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial U}{\partial v}} B = r \left(V + \left(- \left(- \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial U}{\partial v}} \right) \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S} \right) S - \frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial U}{\partial v}} U \right),$$

Al simplificar y reordenar los términos:

$$\frac{A - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{B - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}}. \quad (10)$$

El lado izquierdo de (10) es una función que depende sólo V y el lado derecho es una función que también depende sólo de U . Además U y V son las funciones de pago de dos derivados arbitrarios (opciones), lo que significa que el cociente anterior será análogo a cualquier derivado. Esto implica que ambos lados se pueden escribir como una función $f(S, v, t)$. Según Heston, esta función es de la forma: $f(S, v, t) = -k(\theta - v) + \lambda(S, v, t)$ donde $\lambda(S, v, t)$ es la prima al riesgo por volatilidad. Por lo anterior, la ecuación (10) se reescribe como:

$$\frac{A - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} = -k(\theta - v) + \lambda(S, v, t).$$

Al sustituir A y simplificar términos obtenemos la EDP de Heston expresada en términos del subyacente S :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma\rho vS\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \\ -rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + [k(\theta - v) - \lambda(S, v, t)]\frac{\partial V}{\partial v} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Las siguientes condiciones de frontera de la EDP en (11) se cumplen para una opción europea de compra con vencimiento en T y precio de ejercicio K . Al vencimiento, la opción de compra es igual al valor intrínseco:

$$V(S, v, T) = \max(S - K, 0)$$

Cuando el precio de la acción es igual a cero, la opción expira sin valor. Conforme el precio del subyacente aumente, la delta se aproxima a la unidad, y cuando aumenta la volatilidad, la opción de compra es igual al subyacente. Esto implica las siguientes condiciones de frontera:

$$V(0, v, t) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial S}(\infty, v, t) = 1, \quad V(S, \infty, t) = S. \quad (12)$$

Si $x = \ln S$ y al reescribir la EDP en términos de x, t y v en lugar de S, t y v , nos conduce a una expresión más sencilla:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}v\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \rho\sigma v\frac{\partial^2 V}{\partial v\partial x} + \\ \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - rV + [k(\theta - v) - \lambda v]\frac{\partial V}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

donde la prima de riesgo es una función lineal de la volatilidad, de manera que $\lambda(S, v, t) = \lambda v$.

3.2 Precio de la opción en el modelo de Heston

El precio de la opción de compra es el valor presente de la esperanza del valor intrínseco:

$$\begin{aligned} C_T(K) &= e^{-r\tau}\mathbb{E}[(S_T - K, 0)] \\ &= e^{-r\tau}\mathbb{E}[S_T 1_{S_T > K}] - e^{r\tau}K\mathbb{E}[1_{S_T > K}] \\ &= e^{xt}P_1(x, v, \tau) - e^{-r\tau}KP_2(x, v, \tau) \end{aligned} \quad (14)$$

En esta expresión $P_j(x, v, \tau)$ representa las probabilidades de que la opción de compra termine *In-The-Money* (ITM) condicional al valor $x_t = \ln S_t$ del subyacente y sobre la volatilidad v_t al tiempo t , donde τ es el plazo al vencimiento, por lo tanto:

$$P_j(x, v, \tau) = \Pr(\ln S_T > \ln K), \quad j = 1, 2.$$

Cuando las funciones características $f_1(\phi; x, v)$ y $f_2(\phi; x, v)$ correspondientes a las probabilidades ITM son conocidas, cada probabilidad se puede recuperar de su función característica a través del Teorema de inversión[11]³(véase [29] para una revisión de los métodos de inversión):

$$P_j = \Pr(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x, v)}{i\phi} \right] d\phi \quad (15)$$

Al vencimiento cuando $t = T$, de modo que $\tau = 0$, las probabilidades están sujetas a la condición terminal $P_j(x, v, 0) = \mathbf{1}_{x > \ln K}$, lo cual significa que al vencimiento, cuando $S_T > K$ la probabilidad de que la opción de compra este ITM es la unidad. En resumen, en [13] se muestra que el precio de la opción de compra está dado por:

$$C_T(K) = e^{x_t} P_1(x, v, \tau) - e^{-r\tau} K P_2(x, v, \tau) \quad (16)$$

con P_1 y P_2 dadas por (15), y las funciones características son de la forma:

$$f_j(\phi; x, v) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v + i\phi x) \quad (17)$$

con:

$$\begin{aligned} C_j &= r\phi i\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2 \ln \left[\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right] \right\}, \\ D_j &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right], \\ g_j &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi i - d_j}, \\ d_j &= \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}. \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores $\tau = T - t$ es el plazo al vencimiento, $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, $u_1 = 1/2$, $u_2 = -1/2$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$ y $b_2 = \kappa + \lambda$. El parámetro

³Una propiedad básica de la función característica es la relación uno a uno con la función de distribución. Cada variable aleatoria posee una función característica única y de hecho la función característica caracteriza la distribución de manera única. El Teorema de inversión es el teorema fundamental de la teoría de la función característica porque vincula la función característica con la función de distribución por medio de una transformada inversa de Fourier.

Cuadro 2: Escenario base.

$v(0)$	θ	κ	σ	ρ	u
0.1	0.01	2.0	0.3	0	(-0.2,0.2)

λ representa la prima al riesgo por volatilidad como función del precio del activo, el tiempo y la volatilidad.

Es importante señalar que para obtener el precio de la opción se requiere calcular las integrales para P_1 y P_2 en (15) mediante un algoritmo de integración numérica. Una vez obtenido el precio de la opción de compra, el precio de la opción de venta se obtiene mediante la paridad *put-call*:

$$P_T(K) = C_T(K) + Ke^{-rT} - S_t. \quad (18)$$

En este contexto, con respecto de la función característica $f_j(\phi; x, v)$ se pueden encontrar en la literatura lo que se denominan discontinuidades complejas que surgen al evaluar la función característica en varios modelos de volatilidad estocástica, en particular, en el modelo de Heston. En estos modelos, el precio de la opción europea se calcula mediante una fórmula semi-analítica por medio de la inversión de Fourier [6] , [19]. Por otro lado en [22] se plantea una forma alternativa de la función característica dada por:

$$f(u, \tau) = \exp [A(u, \tau) + B_\sigma(u, \tau)v + iux]; \quad (19)$$

donde :

$$A(u, \tau) = \frac{\kappa\theta}{v^2} \left[(\kappa - \rho v u i - D)\tau - 2 \ln \left(\frac{G \exp(-D\tau)}{G - 1} - 1 \right) \right],$$

$$B_\sigma(u, \tau) = \frac{\kappa - \rho v u i - D}{\omega^2} \left[\frac{1 - \exp(-D\tau)}{1 - G \exp(-D\tau)} \right],$$

$$G = \frac{\kappa - \rho v u i - D}{\kappa - \rho v u i + D},$$

$$D = \sqrt{(\kappa - \rho v u i)^2 + u(i + u)v^2}.$$

En lo que sigue se examina la propiedad del modelo para producir diversas formas de la densidad neutral al riesgo de la función característica. Para ello se considera un conjunto de parámetros como escenario base, en seguida se cambian los parámetros y se examina el efecto en la forma de la densidad. El escenario base del modelo de Heston está dado por el conjunto de parámetros dados en el Cuadro 2.

La Gráfica 1 resume los resultados obtenidos al cambiar los parámetros de varianza inicial v_0 , la varianza de largo plazo θ y la velocidad promedio de reversión de la varianza κ . En primer lugar, se observa que cambiar el nivel de v_0 y de θ tiene el mismo efecto sobre la densidad neutral al riesgo. Valores menores de tales parámetros dan lugar a una distribución leptocúrtica, mientras que para valores mayores conducen a una distribución mesocúrtica. Para los demás parámetros los resultados podrían no ser tan obvios. Un aumento en valor de κ produce una distribución leptocúrtica y una distribución mesocúrtica cuando disminuye, parece que no tiene efecto en el sesgo de la densidad. De hecho, la varianza tiende muy rápido hacia a su valor medio para valores muy grandes de κ .

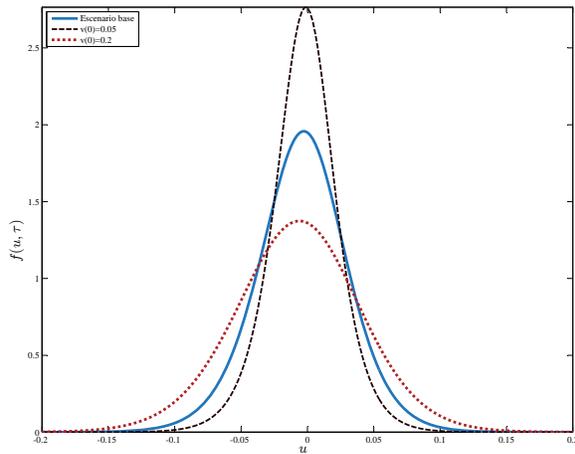
La Gráfica 2 resume los resultados obtenidos al cambiar los parámetros de correlación ρ y de volatilidad de la varianza v . Se observa que un cambio en ρ tiene un efecto en la asimetría de la densidad. Para el escenario base con $\rho = 0$, la distribución es simétrica alrededor del 0. Valores negativos de ρ producen una densidad con sesgo negativo y valores positivos de ρ producen una densidad con sesgo positivo. Por último, la volatilidad de varianza v ofrece otra manera de controlar el nivel general de la volatilidad ya que controla la curtosis de la densidad.

El análisis de las gráficas anteriores indica que la calibración del modelo de Heston es inestable, ya que hay varios parámetros que producen efectos similares u opuestos sobre la forma de la densidad. Para tratar de resolver este problema se tendría que reducir el número de parámetros de la calibración o imponer restricciones con el propósito de alcanzar un conjunto de parámetros que cumplan un criterio de optimalidad.

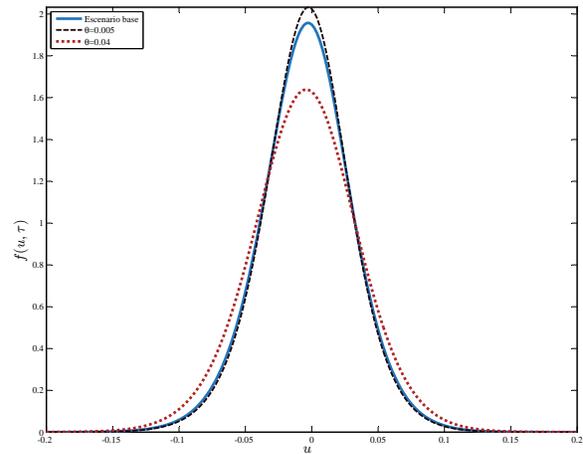
4 Cálculo de la prima por medio de la transformación de Lewis

La determinación del precio de una opción con el modelo de Heston implica el cálculo de integrales con un integrando complejo en (15). Se requieren los siguientes parámetros: precio spot del activo $S = S_t$ el precio de ejercicio K , el tiempo al vencimiento $\tau = T - t$ y la tasa de interés libre de riesgo, la cual se supone constante a todos los plazos, r además de valores iniciales de los parámetros que conducen el proceso de tendencia, como son: la varianza de largo plazo θ la varianza actual v_t el premio al riesgo por volatilidad λ el parámetro de reversión a la media κ la volatilidad de la varianza σ y la correlación entre los procesos que conducen el precio del activo y su volatilidad ρ .

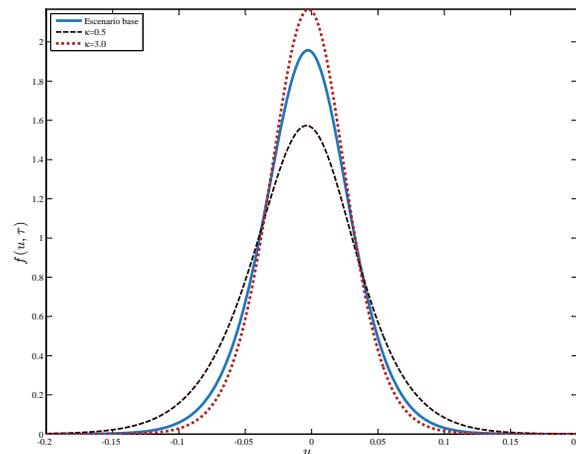
En [19] el precio de la opción $c(S, V, \tau)$ para el modelo de Heston se expresa en términos de la transformada fundamental $\hat{H}(k, V, \tau)$, donde $k = k_r - ik_i$ es un



(a) Densidad con distintos valores de $v(0)$.

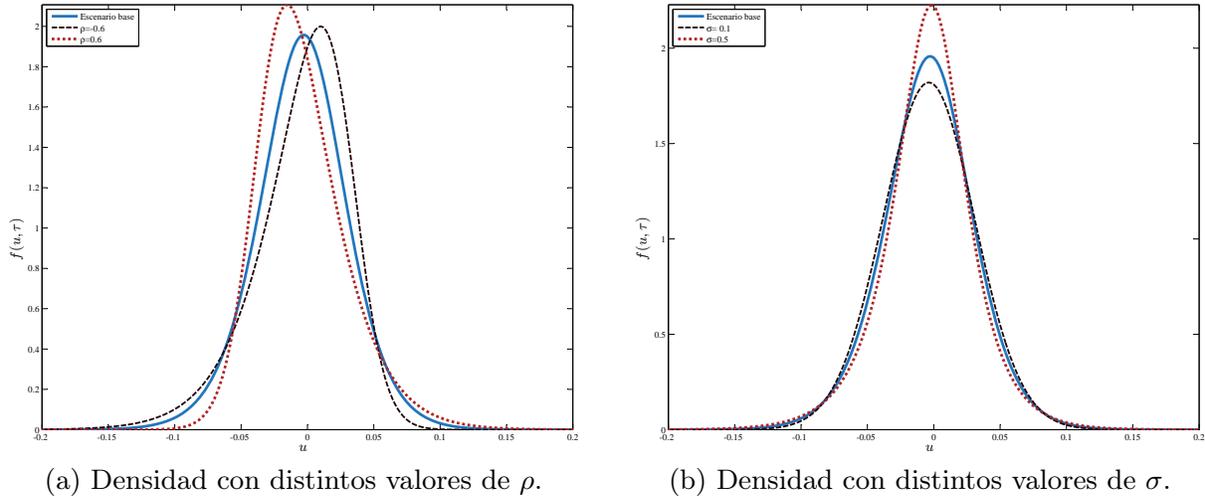


(b) Densidad con distintos valores de θ .



(c) Densidad con distintos valores de κ .

Gráfica 1: Densidad neutral al riesgo del modelo de Heston con escenario base: $v(0) = 0.1, \theta = 0.01, \kappa = 2.0, \sigma = 0.3, \rho = 0$. Fuente: elaboración propia.



Gráfica 2: Densidad neutral al riesgo del modelo de Heston con escenario base: $v(0) = 0.1, \theta = 0.01, \kappa = 2.0, \sigma = 0.3, \rho = 0$. Fuente: elaboración propia.

número complejo, V la volatilidad y $\tau = T - t$, el plazo al vencimiento. Con esta transformación se simplifica el cálculo del precio de la opción pues sólo se evalúa una integral. La fórmula general para el precio de una opción de compra bajo una clase general de modelos de volatilidad estocástica está dada por:

$$c(S, V, \tau) = S e^{-\delta\tau} - K e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{ik_i - \infty}^{ik_i + \infty} e^{-ikX} \frac{\hat{H}(k, V, \tau)}{k^2 - ik} dk \quad (20)$$

donde $X = \ln S/K + (r - \delta)\tau$, $k_i = 1/2$ y δ es la tasa de dividendos. Para el modelo de Heston la transformada fundamental es de la forma:

$$\hat{H}(k, V, \tau) = \exp [f_1(t) + f_2(t)V_t] \quad (21)$$

donde:

$$f_1(t) = \tilde{\omega} \left[tg - \ln \left(\frac{1 - h \exp(td)}{1 - h} \right) \right], \quad f_2(t) = g \left(\frac{1 - \exp(td)}{1 - h \exp(td)} \right),$$

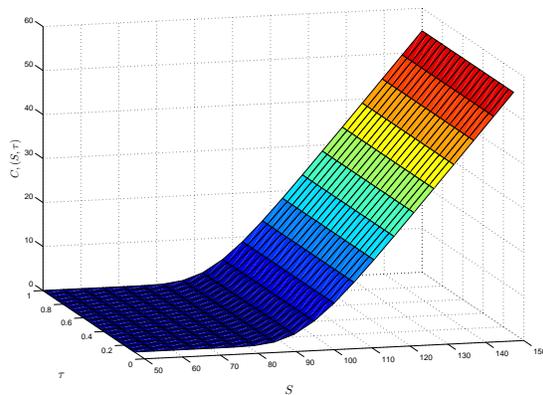
$$d = (\hat{\theta}^2 + 4\tilde{c})^{1/2}, \quad g = \frac{1}{2}g(\hat{\theta} + d), \quad h = \frac{\hat{\theta} + d}{\hat{\theta} - d},$$

$$\hat{\theta} = \frac{2}{\sigma^2} \left[(1 - \gamma - ik)\rho\sigma + \sqrt{k^2 - \gamma(1 - \gamma)\sigma^2} \right] \quad \text{para } \gamma < 1,$$

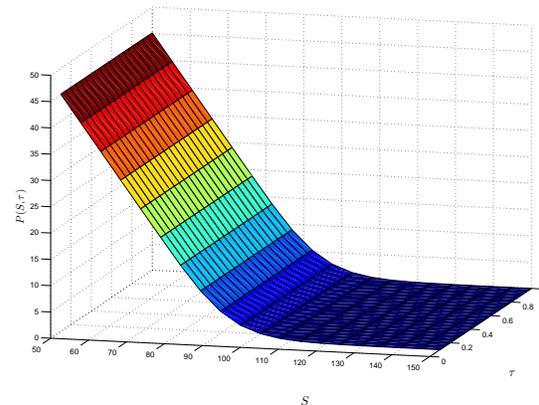
y además: $t = \sigma^2\tau/2$, $\tilde{\omega} = 2k\theta/\sigma^2$, $\tilde{c} = 2c(k)/\sigma^2$ y $c(k) = k^2 - ik/2$. En este caso γ es un parámetro de aversión al riesgo, y se restringe a $\gamma \leq 1$. Esta es otra

Cuadro 3: Parámetros empleados para calcular precios de opciones del modelo de Heston con la transformada de Lewis.

v	κ	θ	λ	σ	ρ	K	r	δ	k_i	γ
0.01	2	0.01	0	0.1	-0.5	100	0.05	0	0.5	1



(a) Superficie de precios de opciones de compra con el modelo de Heston.



(b) Superficie de precios de opciones de venta con el modelo de Heston.

Gráfica 3: Superficies de precios de opciones de compra y de venta del modelo de Heston con la transformada de Lewis.

manera de representar la prima al riesgo por volatilidad, la cual supone neutralidad al riesgo y proporciona una expresión de la prima al riesgo ajustada por volatilidad λ y proporcional a la varianza: $\lambda(t, S_t, v_t) = \lambda v$.

En la Gráfica 3 se muestra una superficie de precios de opciones de compra y una de precios de opciones de venta, los precios de las opciones se calculan con la transformada fundamental de Lewis y parámetros dados en el cuadro 3 :

El plazo al vencimiento es desde $T - t = \tau = 0.1, \dots, 1$ y el precio del subyacente varía dentro del rango $S_t = 50, \dots, 150$.

5 Calibración de parámetros del modelo de Heston con funciones de pérdida cuadráticas

Una manera de estimar los parámetros de un modelo de volatilidad estocástica es a través de series históricas de rendimientos de los activos; sin embargo, no todos los parámetros serían útiles para efectos de valuación de derivados, ya que los parámetros estimados estarían bajo una medida de probabilidad verdadera, mientras que

los negociadores de derivados ajustan tales parámetros para la determinación de precios de derivados. Específicamente, para los modelos de volatilidad estocástica el coeficiente de la varianza es una variante del valor verdadero lo cual es resultado del supuesto de que la prima de riesgo de volatilidad es independiente del precio del subyacente y del tiempo, además de ser proporcional a la volatilidad⁴. Para recuperar tal prima de riesgo, es necesario consultar precios de algunos derivados que se negocien en el mercado.

Es por lo anterior que en la industria financiera y en la investigación cada vez hay más preferencia por utilizar únicamente precios de derivados, y calibrar un modelo en base a un conjunto de opciones liquidas, es decir, con un nivel de negociación aceptable. Un procedimiento estándar es el siguiente: una mesa de derivados planea vender una opción exótica y a la vez cubrir su exposición, además se supone que se emplea un modelo de volatilidad estocástica. La primera etapa consiste en obtener un conjunto de precios de mercado de opciones europeas liquidas, para después calibrar el modelo. Los parámetros calibrados son los neutrales al riesgo y, por lo tanto, se pueden utilizar sin modificaciones para valorar y cubrir la opción exótica. En cierto sentido, es una generalización de la metodología para obtener las volatilidades implícitas bajo el modelo de BSM, el propósito de la calibración es valorar la opción exótica de tal manera que sea consistente con los precios de mercado de las europeas. Si el modelo calibrado genera precios consistentes con el mercado, entonces los parámetros estimados deberían ser estacionarios a través del tiempo, y su variabilidad se debe sólo a errores de medición. En la práctica, por supuesto, esto no sucede así, y se deben recalibrar los parámetros diariamente o con mayor frecuencia si es necesario.

La metodología propuesta consiste en minimizar una medida de distancia entre los precios de mercado y los precios teóricos dados por el modelo. Es decir, se determinan parámetros tales que el error entre los precios de mercado y los precios del modelo teórico sea el mínimo posible, tal error es medido por una función de pérdida. Suponga que se cuenta con un conjunto de precios de mercado de opciones M denotados por P_i ($i = 1, 2, \dots, M$) y que los precios del modelo dependen de un conjunto de parámetros: $\Phi \equiv \{\rho, \kappa, \theta, \sigma, v(0), k_i, \gamma\}$ que en este caso son los de la transformada fundamental de Lewis. De acuerdo con [1] se pueden construir tres funciones de pérdida:

- i.* Función de pérdida del error cuadrático medio: $F_{\$}$;
- ii.* Función de pérdida relativa del error cuadrático medio: $F_{\%}$;
- iii.* Función de pérdida del error cuadrático medio de volatilidad implícita: $F_{\sigma i}$.

⁴Veáse [13] p. 329.

La función de pérdida del error cuadrático medio es el promedio de los cuadrados de los errores estimados:

$$F_{\S}(\Phi) = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \varepsilon_i(\Phi)^2 \right]^2, \quad (22)$$

donde $\varepsilon_i(\Phi) = P_i - P_i(\Phi)$, son los errores de estimación para $i = 1, 2, \dots, N$. La función de pérdida relativa del error cuadrático medio está definida por:

$$F_{\%}(\Phi) = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\varepsilon_i(\Phi)}{P_i} \right)^2 \right]^2. \quad (23)$$

La función de pérdida del error cuadrático medio de volatilidad implícita se define por:

$$F_{\sigma_i}(\Phi) = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\sigma_i - \sigma_i(\Phi))^2 \right]^2. \quad (24)$$

en la expresión anterior σ_i es la volatilidad implícita de Black, Scholes y Merton que se obtiene al invertir la fórmula de BSM e igualarla a precios de mercado, y es la volatilidad implícita de BSM obtenida al invertir la fórmula de BSM e igualarla a precios obtenidos con el modelo teórico.

Con el propósito de encontrar los parámetros que minimicen las funciones en (22) y (23) se plantean cómo:

$$L_{\S} = \text{Min}_{\Phi} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \varepsilon_i(\Phi)^2} \quad (25)$$

y

$$L_{\%} = \text{Min}_{\Phi} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\varepsilon_i(\Phi)}{P_i} \right)^2} \quad (26)$$

A diferencia de la función de pérdida de L_{\S} que minimiza el promedio de la raíz cuadrada de la diferencia entre precios de mercado y precios del modelo teórico, la raíz función de pérdida $L_{\%}$ en (25), minimiza el porcentaje o diferencia relativa entre tales precios⁵.

Las funciones de pérdida L_{\S} y $L_{\%}$ arrojan parámetros que minimizan la distancia entre precios de mercado y precios del modelo teórico. De la misma manera también es posible determinar parámetros que minimizan la distancia entre volatilidades implícitas obtenidas a partir de precios de mercado y las volatilidades

⁵En [1], [14] se calibran parámetros con este enfoque.

implícitas obtenidas a partir de precios del modelo teórico mediante la raíz de la función de pérdida de volatilidad implícita del error cuadrático medio definida por:

$$L_{\sigma_i} = \text{Min}_{\Phi} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\sigma_i - \sigma_i(\Phi))^2}. \quad (27)$$

Los parámetros estimados obtenidos de la función de pérdida en (27) pueden utilizarse para modelar algunas propiedades de la distribución de los rendimientos del subyacente, ya que la forma de la curva de volatilidad implícita representa la distribución de rendimientos del activo subyacente en estudio. Una mueca de volatilidad (*volatility smirk*) implica un sesgo o asimetría en la distribución, mientras que una sonrisa de volatilidad (*volatility smile*) implica curtosis.

Las funciones de pérdida anteriores asignan una ponderación diferente a las opciones. La raíz de la función de pérdida del error cuadrático medio $L_{\$}$ asigna más peso a opciones dentro-del-dinero, lo cual se debe a que las primas de esas opciones son más caras. Cualquier error en la estimación dado por una diferencia entre los precios de mercado y los precios ajustados es causado por estas opciones, la función de pérdida del error cuadrático medio $L_{\$}$ tenderá a producir parámetros que conducen a errores pequeños de valuación para opciones dentro del dinero. Por su parte, la raíz de la función de pérdida relativa del error cuadrático medio $L_{\%}$ asigna más peso a opciones muy fuera del dinero, debido a que estas opciones tienen poco valor. Por último, la raíz de la función de pérdida del error cuadrático medio de volatilidad implícita L_{σ_i} asigna una ponderación homogénea a todas las opciones.

6 Aplicación y análisis de resultados

En esta sección se aplica la metodología descrita en la sección anterior a datos del Boletín del Resumen del mercado de opciones del día 26/08/2013 publicado por MexDer. Este resumen contiene información relevante de todas las opciones negociadas que tienen contratos abiertos, es decir, que tienen operación y cierta liquidez. Este trabajo considera opciones sobre futuros del índice de precios y cotizaciones (IPC) de la bolsa mexicana de valores (BMV), con un plazo al vencimiento de 25 días. Asimismo se obtuvieron del proveedor de precios (“vendedor”) la curva TIE28-IRS para la tasa libre de riesgo, las volatilidades implícitas y la “delta” de todas las opciones negociadas en ese día expresadas a dos decimales. El siguiente cuadro muestra datos relevantes para la calibración de los parámetros: El Cuadro 5 muestra un resumen de los valores de las funciones de pérdida y los valores estimados de los parámetros del modelo de Heston para cada función de pérdida; en la calibración⁶

⁶Para la calibración se utilizó el algoritmo de Nelder-Mead descrito en [18].

Cuadro 4: Datos relevantes.

Fecha actual	Fecha de vencimiento	Plazo al vencimiento	Tasa libre de riesgo	Precio Spot I.P.yC.
26/08/2013	20/09/2013	0.0685	4.351633	40419.93

Cuadro 5: Resumen de las funciones de pérdida con los correspondientes valores de los parámetros estimados del modelo de Heston con la transformada de Lewis. Fuente: elaboración propia.

	$L_{\$}$	$L_{\%}$	L_{σ_i}
Valor de la función de pérdida	30.9648	0.0171	0.0158
Rho (ρ)	-0.3552	-0.6117	-0.4106
Kappa (κ)	1.8090	1.1932	3.1948
Theta (θ)	0.9081	0.9534	0.3501
Volatilidad de la Varianza (σ)	2.6939	1.4541	2.3233
Varianza actual (V_0)	0.0009	0.0116	0.0189
Parte Imaginaria de k (k_i)	0.5062	0.6059	0.4758
Gamma (γ)	0.0279	0.0921	-0.0404

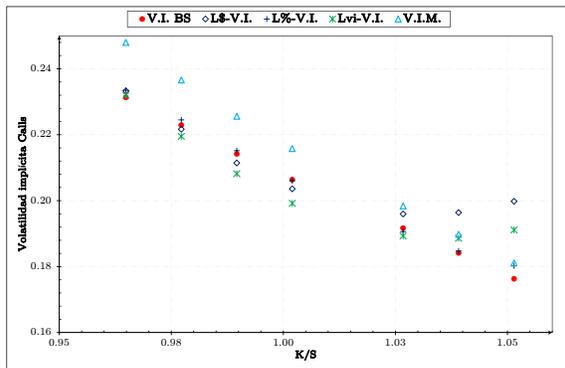
se utilizó la transformada fundamental de Lewis.

La interpretación de los valores de las funciones de pérdida es la siguiente. El valor de la raíz de la función de pérdida del error cuadrático medio $L_{\$}$ es de 30.9648, lo que corresponde a un error de aproximadamente 31 pesos en promedio entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por su parte el valor de la raíz de la función de pérdida relativa del error cuadrático medio $L_{\%}$ es de 0.0171 lo que corresponde a un error de aproximadamente 1.7 % en promedio entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por último, el valor de la raíz de la función de pérdida de volatilidad implícita del error cuadrático medio L_{σ_i} es de 0.0158, que corresponde a una diferencia de 1.6 % entre las volatilidades implícitas obtenidas de los precios de mercado y las volatilidades implícitas obtenidas del modelo de Heston.

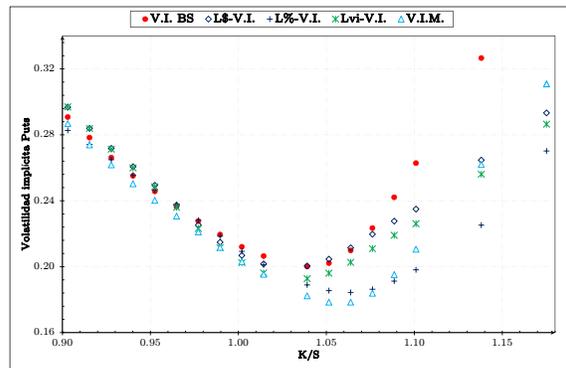
En el Cuadro 6 se muestran los precios de cierre de opciones de compra y venta de opciones sobre futuros del IPC obtenidos del boletín, la volatilidad implícita calculada con el método de bisección, y los correspondientes precios estimados y volatilidades implícitas de cada función de pérdida, además de las volatilidades implícitas que reporta el boletín.

Cuadro 6: Precios estimados con el modelo de Heston con las funciones de pérdida y volatilidades implícitas. Fuente: elaboración propia.

Tipo de opción	K	K/S	Precio de Cierre	Vol. Imp. B.S.	L_g -V.I.		$L_{\%}$ -V.I.		L_{σ_i} -V.I.		Vol. Imp. Mdo.
					Precios	σ_{vi}	Precios	σ_{vi}	Precios	σ_{vi}	
Put	36500	0.90	112	0.291	121.38	0.297	99.81	0.283	121.77	0.297	0.287
Put	37000	0.92	141	0.278	151.47	0.284	133.60	0.274	151.38	0.284	0.274
Put	37500	0.93	179	0.266	191.38	0.272	176.29	0.265	190.26	0.271	0.262
Put	38000	0.94	231	0.255	245.27	0.261	232.03	0.256	243.31	0.260	0.250
Put	38500	0.95	303	0.246	314.16	0.249	305.59	0.247	311.41	0.249	0.240
Put	39000	0.96	397	0.237	399.96	0.237	400.61	0.238	395.40	0.236	0.231
Put	39500	0.98	519	0.228	510.15	0.225	520.83	0.228	501.96	0.223	0.221
Put	40000	0.99	676	0.219	657.13	0.215	672.30	0.219	643.87	0.212	0.212
Put	40500	1.00	875	0.212	853.11	0.207	863.52	0.209	834.54	0.202	0.203
Put	41000	1.01	1125	0.206	1105.46	0.202	1102.78	0.201	1082.55	0.196	0.195
Put	42000	1.04	1777	0.200	1778.30	0.200	1739.40	0.189	1752.20	0.193	0.182
Put	42500	1.05	2178	0.202	2184.97	0.205	2131.20	0.185	2160.47	0.196	0.179
Put	43000	1.06	2619	0.210	2623.00	0.211	2561.54	0.184	2601.75	0.203	0.179
Put	43500	1.08	3088	0.223	3080.15	0.220	3019.81	0.186	3062.73	0.211	0.184
Put	44000	1.09	3574	0.242	3547.90	0.228	3495.59	0.191	3533.75	0.219	0.195
Put	44500	1.10	4067	0.263	4022.78	0.235	3980.75	0.198	4010.88	0.226	0.211
Put	46000	1.14	5558	0.327	5484.84	0.265	5459.34	0.225	5477.94	0.256	0.262
Put	47500	1.18	7051	0.386	6964.38	0.293	6953.88	0.270	6960.83	0.286	0.311
Call	39000	0.96	1914	0.231	1920.70	0.233	1921.36	0.233	1916.14	0.232	0.248
Call	39500	0.98	1537	0.223	1532.36	0.222	1543.04	0.225	1524.17	0.220	0.237
Call	40000	0.99	1192	0.214	1180.82	0.211	1195.98	0.215	1167.55	0.208	0.226
Call	40500	1.00	890	0.206	878.26	0.204	888.67	0.206	859.70	0.199	0.216
Call	41500	1.03	427	0.192	443.46	0.196	422.95	0.191	417.90	0.189	0.198
Call	42000	1.04	267	0.184	307.86	0.196	268.96	0.185	281.76	0.189	0.190
Call	42500	1.05	152	0.176	216.00	0.200	162.23	0.180	191.51	0.191	0.181



(a) Volatilidades implícitas de opciones de compra.



(b) Volatilidades implícitas de opciones de venta.

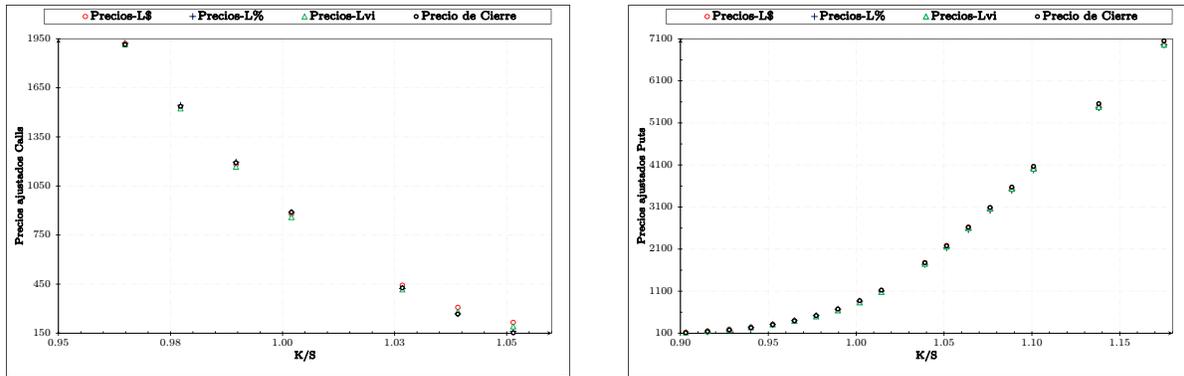
Gráfica 4: Volatilidades implícitas de opciones de compra y de venta obtenidas de las funciones de pérdida. Fuente: elaboración propia.

En la Gráfica 4 se muestran los resultados obtenidos en el cuadro anterior. Observe que los valores estimados de la función $L_{\%}$ para opciones de compra en el dinero y dentro del dinero producen volatilidades implícitas muy cercanas a las del mercado. Para opciones de venta y fuera del dinero las tres funciones de pérdida producen volatilidades implícitas que están razonablemente cerca de las del mercado. Para opciones en el dinero el ajuste más cercano es para la función L_{σ_i} , y para opciones muy dentro del dinero el ajuste más próximo es de la función $L_{\%}$.

En las Gráfica 5 se muestran los precios de mercado en comparación con los obtenidos con cada función de pérdida, no se observa una diferencia significativa entre los valores estimados para opciones de compra y de venta, ya que son muy cercanos a los publicados por el boletín de MexDer, lo cual se debe a que para opciones de compra se cuenta con siete precios, de los cuales tres son de opciones que están dentro del dinero y los cuatro precios restantes son de opciones fuera del dinero. Para opciones de venta se tienen dieciocho precios de mercado de los cuales diez están dentro del dinero.

6.1 Análisis de la eficiencia de la calibración

Para examinar la eficiencia de los parámetros de la calibración se determinan los precios de todas las opciones de compra y de venta que forman parte del boletín de opciones y sus volatilidades implícitas, del MexDer, con los parámetros estimados de cada función de pérdida con el mismo plazo al vencimiento, pero con los siguientes ajustes; en el caso de la función $L_{\%}$ sólo se consideran opciones de compra y de venta cuyo precio de liquidación sea positivo, debido a que para opciones de compra a



(a) Precios estimados de opciones de compra y precios de mercado. (b) Precios estimados de opciones de venta y precios de mercado.

Gráfica 5: Comparación entre precios estimados de opciones de compra y de venta con precios de mercado. Fuente: elaboración propia.

partir de la prima es cero. Para las funciones $L_{\%}$ y L_{σ_i} se hace la valuación sólo para opciones de compra y de venta cuyo precio de liquidación sea mayor a \$100, lo anterior con el objetivo de reducir las diferencias en precios al excluir opciones con primas con poco valor; los resultados se muestran en el Cuadro 7.

Observe que el valor de la función $L_{\$}$ es de 43.7718, lo que corresponde a un error de aproximadamente 44 pesos en promedio entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por su parte el valor de la raíz de la función de pérdida relativa del error cuadrático medio $L_{\%}$ es de 0.0277, lo que corresponde a un error de aproximadamente 2.8 % en promedio entre los precios de mercado y los precios producidos por el modelo de Heston. Por último, el valor de la raíz de la función de pérdida de volatilidad implícita del error cuadrático medio L_{σ_i} es de 0.0249 que corresponde a una diferencia de 2.5 % entre las volatilidades implícitas obtenidas de los precios de mercado y las volatilidades implícitas obtenidas del modelo de Heston.

En el Cuadro 8 y Cuadro 9 se muestran, respectivamente, los precios de cierre de opciones de compra y venta de opciones sobre futuros del IPC obtenidos del boletín del MexDer para todos los precios de ejercicio reportados, la volatilidad implícita calculada con el método de bisección, y los correspondientes precios estimados y volatilidades implícitas de cada función de pérdida, además de las volatilidades implícitas que reporta dicho boletín.

En la Gráfica 6 se muestran los resultados obtenidos en el cuadro anterior. Observe que los valores estimados por la funciones $L_{\$}$ y L_{σ_i} para opciones de compra dentro del dinero producen volatilidades implícitas que están razonablemente cerca

Cuadro 7: Resumen de las funciones de pérdida con los correspondientes valores ajustados de los parámetros estimados del modelo de Heston con la transformada de Lewis. Fuente: elaboración propia.

	$L_{\$}$	$L_{\%}$	$L_{\sigma i}$
Valor de la función de pérdida	43.7718	0.0277	0.0249
Rho (ρ)	-0.3552	-0.6117	-0.4106
Kappa (κ)	1.8090	1.1932	3.1948
Theta (θ)	0.9081	0.9534	0.3501
Volatilidad de la Varianza (σ)	2.6939	1.4541	2.3233
Varianza actual (V_0)	0.0009	0.0116	0.0189
Parte Imaginaria de k (k_i)	0.5062	0.6059	0.4758
Gamma (γ)	0.0279	0.0921	-0.0404

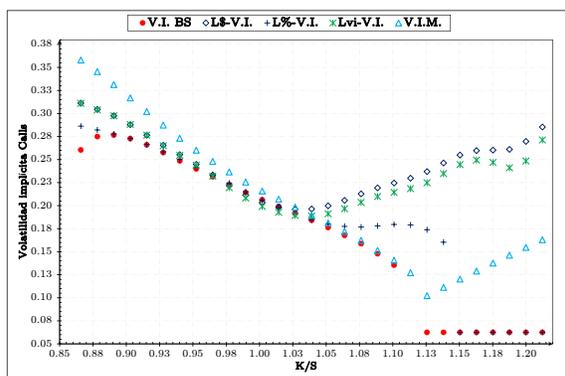
de las volatilidades implícitas del mercado, pero para opciones muy fuera del dinero ninguna función muestra resultados satisfactorios. Para opciones de venta y fuera del dinero las tres funciones de pérdida producen volatilidades implícitas que están razonablemente cerca de las del mercado, para opciones en el dinero el ajuste más cercano es para la función $L_{\sigma i}$, mientras que para opciones de venta y dentro del dinero se observan valores en los que las tres funciones producen volatilidades implícitas muy cercanas a las del mercado, aunque en términos porcentuales el menor error es para la función $L_{\sigma i}$.

Cuadro 8: Precios estimados de opciones de compra con el modelo de Heston con funciones de pérdida para cada precio de ejercicio (K) y sus volatilidades implícitas, y las volatilidades implícitas de mercado. Fuente: elaboración propia.

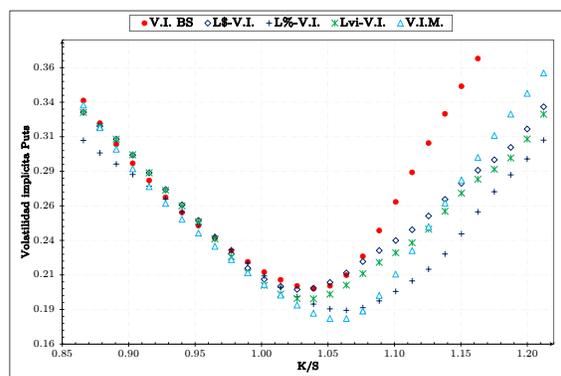
Tipo de opción	K	K/S	Precio de Cierre	Vol. Imp. B.S.	$L_{\$}$ -V.I.		$L_{\%}$ -V.I.		L_{σ_i} -V.I.		Vol. Imp. Mdo.
					Precios	σ_{vi}	Precios	σ_{vi}	Precios	σ_{vi}	
Call	35000	0.87	5537	0.260	5566.1	0.311	5549.3	0.286	5565.9	0.311	0.358
Call	35500	0.88	5059	0.275	5084.1	0.304	5064.4	0.282	5083.7	0.304	0.345
Call	36000	0.89	4584	0.277	4607.8	0.298	4585.2	0.278	4607.8	0.298	0.331
Call	36500	0.90	4113	0.273	4134.8	0.288	4113.2	0.273	4135.2	0.288	0.317
Call	37000	0.92	3648	0.266	3666.3	0.276	3648.5	0.266	3666.2	0.276	0.302
Call	37500	0.93	3191	0.258	3207.7	0.265	3192.6	0.258	3206.6	0.265	0.287
Call	38000	0.94	2746	0.249	2763.1	0.255	2749.8	0.250	2761.1	0.255	0.273
Call	38500	0.95	2319	0.240	2333.4	0.245	2324.9	0.242	2330.7	0.244	0.260
Call	39000	0.96	1914	0.231	1920.7	0.233	1921.4	0.233	1916.1	0.232	0.248
Call	39500	0.98	1537	0.223	1532.4	0.222	1543.0	0.225	1524.2	0.220	0.237
Call	40000	0.99	1192	0.214	1180.8	0.211	1196.0	0.215	1167.6	0.208	0.226
Call	40500	1.00	890	0.206	878.3	0.204	888.7	0.206	859.7	0.199	0.216
Call	41000	1.01	635	0.199	632.1	0.198	629.4	0.198	609.2	0.193	0.207
Call	41500	1.03	427	0.192	443.5	0.196	423.0	0.191	417.9	0.189	0.198
Call	42000	1.04	267	0.184	307.9	0.196	269.0	0.185	281.8	0.189	0.190
Call	42500	1.05	152	0.176	216.0	0.200	162.2	0.180	191.5	0.191	0.181
Call	43000	1.06	76	0.168	155.5	0.206	94.0	0.177	134.3	0.197	0.172
Call	43500	1.08	32	0.159	114.1	0.213	53.8	0.177	96.7	0.204	0.162
Call	44000	1.09	10	0.148	83.3	0.219	31.0	0.178	69.2	0.210	0.151
Call	44500	1.10	2	0.135	59.7	0.225	17.7	0.180	47.8	0.214	0.141
Call	45000	1.11	0	0.031	42.9	0.230	9.0	0.179	32.6	0.218	0.127
Call	45500	1.13	0	0.063	32.4	0.237	3.5	0.174	23.7	0.225	0.102
Call	46000	1.14	0	0.063	26.2	0.246	0.7	0.160	19.3	0.235	0.111
Call	46500	1.15	0	0.063	21.1	0.255	0.0	0.063	15.9	0.245	0.120
Call	47000	1.16	0	0.063	15.5	0.260	0.0	0.063	11.5	0.249	0.129
Call	47500	1.18	0	0.063	10.1	0.260	0.0	0.063	6.6	0.247	0.138
Call	48000	1.19	0	0.063	6.6	0.261	0.0	0.063	3.2	0.241	0.146
Call	48500	1.20	0	0.063	5.5	0.270	0.0	0.063	2.5	0.248	0.155
Call	49000	1.21	0	0.063	5.9	0.285	0.0	0.063	3.7	0.271	0.163

Cuadro 9: Precios estimados de opciones de venta con el modelo de Heston con funciones de pérdida para cada precio de ejercicio (K) y sus volatilidades implícitas, y las volatilidades implícitas de mercado. Fuente: elaboración propia.

Tipo de opción	K	K/S	Precio de Cierre	Vol. Imp. B.S.	$L_{\$}$ -V.I.		$L_{\%}$ -V.I.		L_{σ_i} -V.I.		Vol. Imp. Mdo.
					Precios	σ_{vi}	Precios	σ_{vi}	Precios	σ_{vi}	
Put	35000	0.87	65	0.336	57.1	0.328	40.3	0.307	57.0	0.328	0.333
Put	35500	0.88	76	0.320	73.7	0.318	53.9	0.298	73.3	0.317	0.317
Put	36000	0.89	91	0.305	95.9	0.308	73.3	0.290	95.9	0.308	0.301
Put	36500	0.90	112	0.291	121.4	0.297	99.8	0.283	121.8	0.297	0.287
Put	37000	0.92	141	0.278	151.5	0.284	133.6	0.274	151.4	0.284	0.274
Put	37500	0.93	179	0.266	191.4	0.272	176.3	0.265	190.3	0.271	0.262
Put	38000	0.94	231	0.255	245.3	0.261	232.0	0.256	243.3	0.260	0.250
Put	38500	0.95	303	0.246	314.2	0.249	305.6	0.247	311.4	0.249	0.240
Put	39000	0.96	397	0.237	400.0	0.237	400.6	0.238	395.4	0.236	0.231
Put	39500	0.98	519	0.228	510.2	0.225	520.8	0.228	502.0	0.223	0.221
Put	40000	0.99	676	0.219	657.1	0.215	672.3	0.219	643.9	0.212	0.212
Put	40500	1.00	875	0.212	853.1	0.207	863.5	0.209	834.5	0.202	0.203
Put	41000	1.01	1125	0.206	1105.5	0.202	1102.8	0.201	1082.6	0.196	0.195
Put	41500	1.03	1425	0.202	1415.4	0.200	1394.9	0.194	1389.8	0.193	0.188
Put	42000	1.04	1777	0.200	1778.3	0.200	1739.4	0.189	1752.2	0.193	0.182
Put	42500	1.05	2178	0.202	2185.0	0.205	2131.2	0.185	2160.5	0.196	0.179
Put	43000	1.06	2619	0.210	2623.0	0.211	2561.5	0.184	2601.8	0.203	0.179
Put	43500	1.08	3088	0.223	3080.1	0.220	3019.8	0.186	3062.7	0.211	0.184
Put	44000	1.09	3574	0.242	3547.9	0.228	3495.6	0.191	3533.7	0.219	0.195
Put	44500	1.10	4067	0.263	4022.8	0.235	3980.7	0.198	4010.9	0.226	0.211
Put	45000	1.11	4563	0.284	4504.5	0.243	4470.6	0.206	4494.2	0.233	0.228
Put	45500	1.13	5060	0.305	4992.6	0.253	4963.6	0.214	4983.8	0.243	0.245
Put	46000	1.14	5558	0.327	5484.8	0.265	5459.3	0.225	5477.9	0.256	0.262
Put	46500	1.15	6055	0.346	5978.3	0.276	5957.1	0.240	5973.1	0.269	0.279
Put	47000	1.16	6553	0.367	6471.2	0.286	6455.7	0.256	6467.2	0.279	0.295
Put	47500	1.18	7051	0.386	6964.4	0.293	6953.9	0.270	6960.8	0.286	0.311
Put	48000	1.19	7549	0.405	7459.4	0.302	7451.4	0.282	7456.0	0.295	0.326
Put	48500	1.20	8046	0.423	7956.8	0.316	7948.9	0.294	7953.8	0.308	0.341
Put	49000	1.21	8544	0.441	8455.8	0.332	8447.1	0.308	8453.5	0.326	0.356



(a) Volatilidades implícitas estimadas para opciones de compra y de mercado.



(b) Volatilidades implícitas estimadas para opciones de venta y de mercado.

Gráfica 6: Comparación entre volatilidades implícitas estimadas para opciones de venta y de compra con volatilidades implícitas de mercado. Fuente: elaboración propia.

7 Conclusiones

En este trabajo se discutieron las características teóricas del modelo de volatilidad estocástica de Heston y se obtuvo la EDP que caracteriza el precio de una opción europea como solución a la EDP de tal modelo. La obtención de la EDP se realizó mediante un portafolio compuesto por un subyacente y dos opciones: una para cubrir el subyacente y otra para cubrir la volatilidad. Es importante mencionar que el modelo de Heston captura implícitamente dos hechos estilizados de la distribución de los rendimientos del activo subyacente a saber: sesgo y exceso de curtosis. Otras propiedades como la de reversión a la media de la volatilidad del proceso CIR, el efecto de apalancamiento y una fórmula cerrada del precio de la opción hacen que sea un modelo ampliamente utilizado en la práctica. Un resultado relevante es que las sonrisas de volatilidad generadas por este modelo son consistentes con las sonrisas de volatilidad implícita que se observan en los mercados de derivados.

A partir del modelo de Heston y la función de densidad neutral al riesgo y con un escenario base se analizó dicha densidad. Se concluye que los parámetros de varianza inicial, varianza de largo plazo, velocidad promedio de reversión de la varianza y volatilidad de la varianza permitieron modelar la curtosis de la densidad. En lo que respecta el parámetro de correlación, éste modela el sesgo de la densidad. La correlación positiva proviene de una alta volatilidad al aumentar el precio del subyacente, lo cual se refleja en la cola derecha de la densidad. Por su parte una correlación negativa está asociada con una baja volatilidad. Estas características

influyen en los precios de opciones según sea la relación entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio.

El objetivo principal de este trabajo fue calibrar los parámetros del modelo de Heston por medio de funciones de pérdida asociados a un conjunto de precios de opciones de compra y de venta sobre futuros del índice de precios y cotizaciones que se reportan en el resumen de opciones negociadas en MexDer. Se determinaron precios de opciones de compra y de venta, así como las volatilidades implícitas para cada función de pérdida mediante el método de bisección. Los resultados muestran que los valores estimados de la función $L_{\%}$ para opciones de compra en el dinero y dentro del dinero producen volatilidades implícitas muy cercanas a las del mercado. Para opciones de venta y fuera del dinero las tres funciones de pérdida producen volatilidades implícitas que son consistentes con las observadas en el mercado, para opciones en el dinero el ajuste más cercano es para la función L_{σ_i} , y para opciones muy dentro del dinero el mejor ajuste en términos porcentuales es de la función $L_{\%}$.

También se examinó la eficiencia de los parámetros calibrados. Para ello se determinaron las volatilidades implícitas de opciones de compra y de venta de todos los precios de ejercicio reportados en el boletín de opciones del MexDer, considerando únicamente opciones con primas positivas, lo anterior con el objetivo de reducir el sesgo de la calibración al excluir primas con poco o nulo valor. El análisis de los resultados indica que los valores estimados por la funciones L_{\S} y L_{σ_i} para opciones de compra y dentro del dinero producen volatilidades implícitas que están razonablemente cerca de las volatilidades implícitas del mercado; sin embargo, para opciones muy fuera del dinero ninguna función muestra resultados satisfactorios. En lo que respecta a opciones de venta y dentro del dinero se observan valores de *moneyness* en los que las tres funciones producen volatilidades implícitas muy cercanas a las del mercado. Para opciones en el dinero, el ajuste más próximo es para la función L_{σ_i} . Por último, en términos porcentuales, el mejor ajuste de volatilidades implícitas para opciones de compra y de venta se obtiene con la función L_{σ_i} .

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación clave SIP-20121265 de la Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional.

Bibliografía

- [1] Bakshi, G., C. Cao, y Z. Chen, *Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models*, Journal of Finance. **52**(5) (1997), 2003–2049.
- [2] Bates, D. S. *Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes in Deutschemark Options*, Review of Financial Studies. **9**(1) (1997), 69–107.
- [3] Black, F. y M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy. **81**(3) (1973), 637–654.
- [4] Björk, T. *Arbitrage theory in continuous time*. Third ed., Oxford University Press, 2009.
- [5] Breeden, D. T. *An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities*, Journal of Financial Economics. **7**(3) (1979), 265–296.
- [6] Carr, P. y Madan, D. P. *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform*, Journal of Computational Finance, **2**(4) (1999), 61–73.
- [7] Cox, J. C., Ingersoll, J. E. y Ross S. A. *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, **53**(2) (1985), 385–407.
- [8] Dragulescu, A. A. y Yakovenko, V. M. *Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility*, Quantitative Finance, **2**(6) (2002), 443–453.
- [9] Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., y Zou, J. *A Guide to Volatility and Variance Swaps*, The Journal of Derivatives, **6**(4) (1999), 9–32.
- [10] Gatheral, J. *The volatility surface: a practitioner's guide*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, (2006).
- [11] Gil-Peláez, J. *Note on the inversion theorem*, Biometrika, **38**(3–4) (1951), 481–482.
- [12] Harvey, A., Ruiz, E. y Shephard, N. *Multivariate stochastic variance models*, Review of Economic Studies, **61**(2) (1994), 247–264.
- [13] Heston, S. L. *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options*, Review of Financial Studies, **6**(2) (1993), 327–343.

- [14] Heston, S., y Nandi S. *A Closed-Form GARCH Option Pricing Model*, Review of Financial Studies, **13**(3) (2000), 585–626.
- [15] Hull, J. y White, A. *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, Journal of Finance, **42**(2) (1987), 281–300.
- [16] Hull, J. y White, A. *An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility*, Advances in Futures and Options Research, **3** (1988), 27–61.
- [17] Jackwerth, J. C. y Rubinstein, M. *Recovering Probability Distributions from Option Prices*, The Journal of Finance, **51**(5) (1996).1611–1631.
- [18] Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H. y Wright, P. E. *Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions*, SIAM Journal of Optimization, **9**(1) (1999), 112–147.
- [19] Lewis, A. L. *Option Valuation Under Stochastic Volatility: With Mathematica Code*. Newport Beach, Calif., Finance Press, 2000.
- [20] Lewis, A. L. *A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Levy processes*, Preprint, (2001), URL <http://www.optioncity.net>, Working Paper.
- [21] Longstaff, F. *A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates*, Journal of Financial Economics, **23**(2) (1989), 195–224.
- [22] Lord, R. y Kahl, C. *Why the Rotation Count Algorithm Works*, Tinbergen Institute, Discussion Paper No. 2006-065/2, (2006).
- [23] Merton, R. C. *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics, **4**(1) (1973), 141–183.
- [24] Ortiz-Ramírez, A., Venegas-Martínez, F., Durán Bustamante, M., (2014). Valuación de opciones europeas sobre AMX-L, WALMEX-V y GMEXICO-B: calibración de parámetros de volatilidad estocástica con funciones cuadráticas de pérdida, El Trimestre Económico, **LXXXI** (4), no. 324, octubre-diciembre de 2014, 943–988.
- [25] Stein, E. M., y Stein, J. C. *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*, Review of Financial Studies, **4**(4) (1991), 727–752.
- [26] Shephard, N. *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford University Press, New York, (2005).

- [27] Schöbel, R. y Zhu J.W. *Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: an extension*, European Finance Review, **3**(1) (1999), 23–46.
- [28] Venegas Martínez, Francisco (2008), Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. 2a. ed., Cengage, México.
- [29] Waller, L. A., Turnbull, B. W. y Hardin, J. M. (1995). *Obtaining Distribution Functions by Numerical Inversion of Characteristic Functions with Applications*, The American Statistician, **49**(4), 346–350.
- [30] Zhu, J. *Applications of Fourier Transform to Smile Modeling: Theory and Implementation*, Springer Finance Series, 2nd. Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2010).

Escuela Superior de Apan, Universidad Autónoma Del Estado de Hidalgo
Carretera Apan-Calpulalpan Km. 8, Col. Chimalpa Tlalayote s/n,
Apan, Hidalgo, México, C.P. 43900
mpmtv@yahoo.com.mx

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Delegación Miguel Hidalgo,
México D.F., C.P. 11340,
hectorlivares@hotmail.com
amortiz@ipn.mx

Capítulo 3

Implementation of three-dimensional cellular automata on irregular geometries: medical simulations on surfaces and volumes

Gerardo M. Ortigoza

Facultad de Ingeniería, Universidad Veracruzana

Abstract

In this work we propose the use of cellular automata in three-dimensional irregular geometries. We take advantage of the flexibilities of the mesh structure and visualization techniques provided by finite volume and discontinuous finite element methods. Here we combine the flexibility of unstructured meshes to model complex geometries (bounded domains obtained from a cloud of points) with the easy implementation of cellular automata. In comparison with classical quadrangular, cellular automata implementations on triangular and tetrahedral meshes reduced the storage and number of evaluations required by cell. Moore and Neumann neighborhoods are defined and compare for tetrahedral and quadrangular grids. We present numerical simulations of the propagation of vitiligo's patterns using an implementation of cellular automata on three-dimensional triangulated surfaces as well as avascular tumor breast cancer growth simulation by a cellular automata in three-dimensional unstructured tetrahedral meshes. Using unstructured grids (triangular/tetrahedral) no anisotropy effects induced by grid and neighborhood are presented: outward spreading fronts generated by a point source spread in spherical shape. Moreover the use of unstructured triangular/tetrahedral grids for cellular automata can simplifies the coupling of cellular automata with other numerical techniques such as finite element or finite volume.

1 Introduction

From the days of Von Neumann and Ulam who for the first time proposed the concept of cellular automata (CA) until the recent book of Wolfram *A New Kind of Science* [43], the simple structure of the cellular automata has attracted researchers of very diverse disciplines. In the last fifty years, the cellular automata have been subject to rigorous physical and mathematical analysis and new fascinating applications in different branches of natural and social sciences have arisen. The popularity

of the cellular automata is due to its simplicity as well as to the enormous potential they hold to model complex systems in spite of being very simple mathematical models. A CA can be seen as a spatially extended decentralized system formed of several individual components (cells). The communication between cells is limited to local interactions; each cell has a specific state which changes with time depending of the states of its local neighbors. The CA have applications that include diverse aspects of science such as: fluid mechanics, environment: pollution, wild fire propagation; biological systems: evolution of the species, growth of populations, behavior of colonies of microorganisms, immune systems, artificial life [10]; socio-economic models, economic urbanism, traffic; models of chemical reactions, pigmentation patterns of the skin, fractals, cryptology, among others. The work is organized as follows: in section 2 we present some computational aspects of the implementation of cellular automata on three-dimensional triangulated surfaces as well as on unstructured tetrahedral meshes; section 3 shows comparisons of structured versus unstructured three-dimensional cellular automata implementations and also shows some simulations obtained with the proposed three-dimensional cellular automata, and finally we include some conclusions from this work.

2 Three-dimensional Irregular Geometries

Traditionally three-dimensional cellular automata have been implemented on rectangular grids; this is due to the fact that in rectangular grids each cell can be considered as an entry of a matrix, and the neighborhood (Moore, Neumann) of an entry is easily identified. This neighborhood's identification easily allows us to update the matrix by evaluating the transition function. Some of the applications of 3d cellular automata include oil spill modeling [36], water flux in unsaturated soils [13], prediction of solidification grain structures [14] and arrhythmia simulation [45]. Into all these cases the three-dimensional domains were regularly divided in cubic cells.

The vast majority of real applications require us to deal with complex geometries which are not necessarily rectangular and this poses a clear disadvantage when using rectangular grids. Moreover patterns produced by standard cellular automata used for various qualitative modeling purposes show various geometric features that reflect the anisotropy of the underlying grid and neighborhood rather than the properties of the physical model itself [40]. Two dimensional cellular automata simulations have also been implemented on structured triangular and hexagonal grids [27]. However their use has been limited due the disadvantages in the identification of the elements of the neighborhood of each cell, as well as in the processes that have been used for the visualization, which requires a mapping that transforms the tri-

angular or hexagonal grids into quadrangular one. Moreover with this methodology the implementation of boundary conditions is not an easy task.

In [28] an implementation of CA on two dimensional irregular geometries by using unstructured triangular meshes was presented. Some of the main advantages of this approach over classical two dimensional cellular automata implementations are: the ability to handle multiply connected planar domains with polygonal boundaries, reduction of the bias induced by the grid geometry and neighborhood, easy boundary conditions implementations, direct identification of the neighbors of each cell and visualizations. In this work we present an extension to the two dimensional implementation reported in [28]. Thus, we show how to implement three dimensional cellular automata on unstructured triangulated surfaces and unstructured tetrahedral meshes using some techniques from the finite volume method. We combine the flexibility of unstructured meshes to model complex geometries with the easy implementation of cellular automata. Moreover our approach makes the coupling of cellular automata and finite element methods in the same grid a straightforward task by using nested hierarchical triangular or tetrahedral meshes [9], [35].

2.1 Three-dimensional Triangulated Surfaces

In several applications of cellular automata, it is required to make numerical simulations on computational domains with complex geometries. One of the most common shapes used to model surfaces are triangles. Unstructured triangular grids have shown their capabilities to approximate complex two dimensional regions as well as three-dimensional surfaces, for this reason they are the most popular shapes used by the finite element community.

There exist several possibilities to define triangulated surfaces, this can be done with the aid of GTS; the open source triangulated surface library [17], the Princeton Shape Benchmark [32] and by means of CAD software. Even though there are many CAD packages it is worth mentioning that IVCON [20] is a tool that allows for the conversion of 3D graphics file formats. Remesh [34] and Meshlab [24] two other mesh repair open source packages. Perhaps one of the most common methods to define the brep (boundary representation) of a computational domain for medical applications is by using 3d body scanning [42]. Here a body scan produces a point cloud, from which a triangulated surface can be built [25]. In this and in the following section we used a point cloud to define the breps of the corresponding computational domain. In order to implement the CA on triangulated surfaces, we define in a similar way as in [28] with what we called the Neumann-triangular and Extended Neumann-triangular neighborhoods for unstructured triangulated surfaces. Figure 1 shows Neumann-triangular (a cell with its three neighbors) and

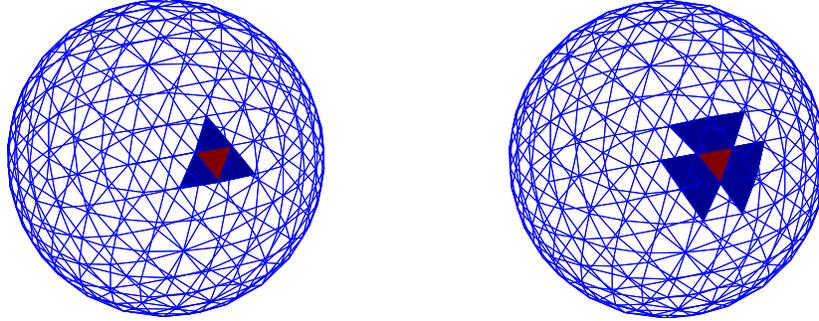


Figure 1: Left Neumann, right extended Neumann neighborhoods on the surface of a triangulated sphere.

extended Neumann-triangular (a cell with its neighbors and the neighbors of their neighbors, nine in total) neighborhoods on the surface of a triangulated sphere. In this approach each triangle is a cell; the CA requires a list of the neighbors of each cell. A finite volume mesh structure can be used, where besides the principal neighbors (Neumann) a list of the neighbors of the neighbors (extended Neumann) is required. The visualization can be achieved by using similar techniques as those used in finite volume methods. It is worth mentioning that for 3d triangulated surfaces the principal neighbors can be obtained by a simple modification of the 2d code `TRIANGULATION_TRIANGLE_NEIGHBORS`[7] freely distributed under the GNU LGPL license, here a table of edges is built and the neighbors are obtained by a loop over the elements identifying common edges. Once that a table of the principal neighbors is obtained, a loop over its elements can provide the secondary neighbors (neighbors of the neighbors). Following, as an example we present the mesh structure of the triangulated surface of a cube without the cover.

```

8
10
1 0 1
1 1 1
0 1 1
0 0 1
1 0 0
1 1 0
0 1 0
0 0 0
6 3 2 -1 2 0 3
3 6 7 0 1 6 9

```

```

1  6  2  -1  4  1  0
1  5  6   0  7  6  3
8  7  5   0 10  6  8
7  6  5   0  2  4  5
1  4  5  -1  0  8  4
4  8  5   0 10  5  7
4  3  7  -1  0  2 10
4  7  8   0  9  5  8
    
```

Here we also include the extended Neumann neighborhood

```

6  9  0  0  4  0
0  3  4  5  0 10
7  6  2  0  0  0
0  8  2  5  1  0
9  8  2  4 10  7
1  9  7  3 10  8
0  0 10  5  6  3
9  5 10  6  0  4
0  0  1  6  5  8
0  2  6  8  5  7
    
```

The first two lines give the numbers of nodes and elements respectively, next a list of coordinates of the nodes is given, finally a list of 7 columns is added. The first three columns give the connectivity of the elements (three ordered nodes that define a triangle), the fourth column is a marker to identify different boundaries or interior elements of the computational domain and the last three columns give a list of the

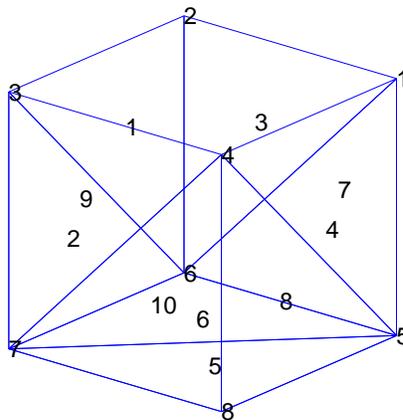


Figure 2: An example of a triangulated surface.

principal neighbors (a boundary element can have only one or two neighbors). We note that we can easily identify the triangles that have an edge on the boundary and by using the boundary marker the implementation of different boundary conditions becomes an straightforward task.

There have been some approaches that combine CA and unstructured triangulated surfaces. Gobron and Chiba [15] used a CA to simulate texturing in computer graphics, but in their approach each triangle of the triangulated surface was projected onto a square cell in order to implement the CA. Later Gobron et al. [16] simulated surface effects with a CA introducing a new structure called Dynamic Space Boxes to determine the neighborhood of any cell. The drawbacks of this approach are that a harmonization of the defined network is required, which makes the pre-computation time very long. Moreover, even if a cell knows its neighbor number, the current data structure does not provide the relative positions between neighbors.

There exist interesting phenomena such as surface corrosion damage evolution, crack propagation, electromagnetic surface current propagation or pattern formation that can be modeled and simulated by cellular automata on surfaces. However, previous to the recent work of Zawidzki, literature does not report works that directly implement CA on 3d surfaces. Perhaps one of the reasons is that the natural generalization of CA from rectangular grids to quadrangulated surfaces does not fit quite well: obtaining a quadrangulation of a surface is not always a successful and easy task ([5],[11],[6]). In his work, Zawidzki shows two dimensional simulations of cellular automata on triangular meshes. His meshes are not properly unstructured because they are obtained by distorting structured equilateral triangular meshes. His approach is quite different from ours, for his numerical simulations on a 3d surface no mesh structure is included, which makes mandatory the reordering and reorienting the triangular faces. Moreover the boundary elements are not identified and the holes are not excluded from the computational domain causing a significant increase in the execution time of the code [44].

There have been some studies that have implemented CA on two dimensional irregular grids: [29] [12]. Even though they are two dimensional and therefore more related to our 2d work [28] let us mention some differences from our work. In [12] the computational domains are limited to rectangles which restricts the geometries of the computational domains of the applications. By using Voronoi diagrams the number of neighbors of each cell is variable which increases the complexity of the cellular automata implementation. In [29] again the computational domains are restricted to rectangles. They only change the connectivity of the nodes by using graph theory making the computational implementation a harder task. In our approach the update of the states of the cells (triangles of the grid) is obtained by

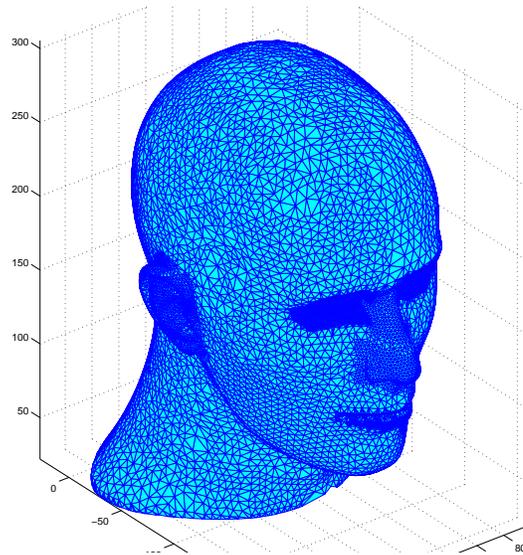


Figure 3: A triangulated surface for a human head.

making a loop over the elements; from the data structure the neighborhood of each cell is easily identified in a similar way as a finite volume method is implemented on simple or extended stencils.

Figure 3 shows a triangulated surface for a human head, the mesh has 12772 nodes and 25372 triangles.

2.2 Unstructured Tetrahedral Grids

In order to discuss some aspects of the implementation of CA in unstructured tetrahedral meshes let us start with some comments about tetrahedral grid generators. There exist several tetrahedral grid generators, either commercial or open source. Table 1 shows some information about four open source tetrahedral grid generators: Tetgen [18], Distmesh [30], Qmg [38] and Netgen [37]. In our work we use Tetgen to generate an unstructured tetrahedral mesh; this grid generator uses as input several format files.

In a similar way as in the previous subsection we defined the Neumann-tetra (4 neighbors) and extended Neumann-tetra (12 neighbors) neighborhoods for a tetrahedral mesh. Figure 4 shows these neighborhoods. In this case each tetrahedron is a cell. Thus, for the numerical implementation a list of neighbors of each cell is required, as well as the nodes and the connectivity of the elements. A mesh's structure such as the one used in the finite volume method can be adopted to implement the CA. Here for each cell the principal neighbors (Neumann neighborhood) and

Program	Method	Language
Tetgen	Delaunay	C
Distmesh	Iterative continuous smoothing	Matlab
Qmg	Quadtree	Matlab-C++
Netgen	Advancing front	user interface

Table 1: Information of some Tetrahedral Grid Generators.

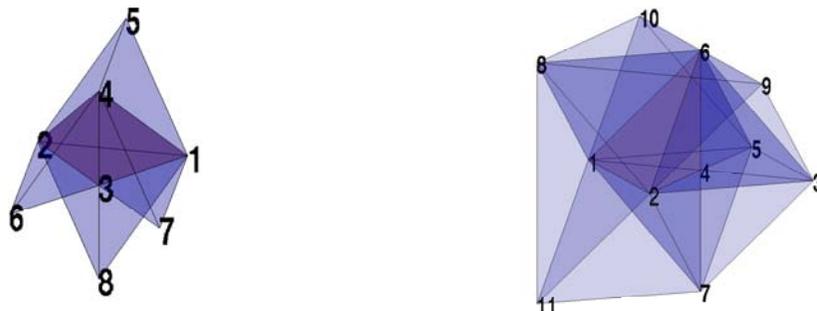


Figure 4: Left Neumann, right extended Neumann neighborhoods for a tetrahedral mesh.

the secondary neighbors (extended Neumann neighborhood) are required. The grid generator Tetgen provides the principal neighbors, the secondary neighbors can be obtained by a loop over the table of the principal neighbors. The visualization can be done by using the same technique employed by the finite volume method.

Next we show an example of the mesh structure for the case of Neumann-tetra neighborhood for a cube.

```

9
12
-1  -1  -1
-1   1  -1
 1  -1   1
 1   1   1
-1  -1  -1
-1   1  -1
 1  -1   1
 1   1   1
0   0   0

```

4	9	3	1	-1	3	0	2	5
4	9	2	1	-1	7	0	1	9
7	9	3	1	-1	1	0	4	5
7	9	5	1	-1	8	0	3	11
7	4	9	3	-1	1	3	0	6
7	4	8	9	-1	10	12	5	0
6	9	2	1	-1	2	0	8	9
6	9	5	1	-1	4	0	7	11
6	4	9	2	-1	2	7	0	10
6	4	8	9	-1	6	12	9	0
6	7	9	5	-1	4	8	0	12
6	7	8	9	-1	6	10	11	0

The first two lines give the numbers of nodes and elements respectively, next a list of the coordinates of the nodes is given, finally a list of 9 columns is added. The first four columns give the connectivity of the elements (four ordered nodes that define a tetrahedron), the fifth column is a marker to identify different boundary conditions on the boundary of the computational domain and the last four columns give a list of the principal neighbors (a boundary element could have one, two or three neighbors). Again we note that we can easily identify boundary elements and by using the boundary marker the implementation of boundary conditions is a straightforward task. Figure 5 shows the tetrahedral mesh of the cube represented by this example. Detailed examples of the structure of the meshes have been included to show that working with input geometry files (just as those generated by several grid generators) preserves the easy implementation that characterizes the cellular automata computations.

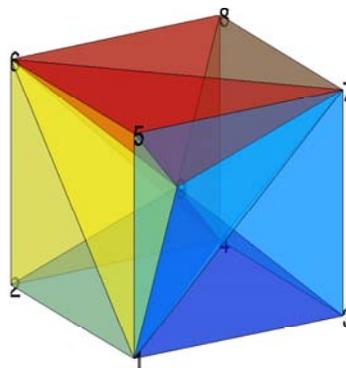


Figure 5: A tetrahedral mesh for a cube.

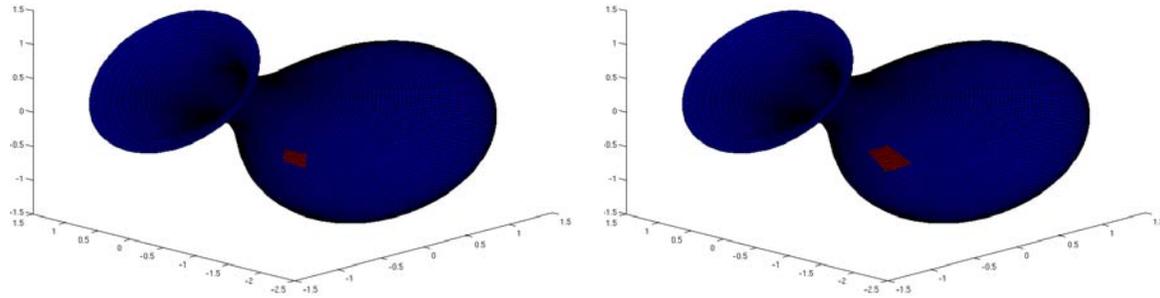


Figure 6: Binary state cellular automata on a quadrangulated surface with Neumann and Moore neighborhoods.

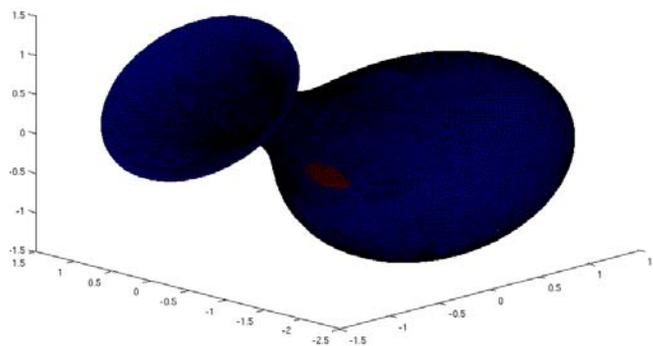


Figure 7: Binary state cellular automata on a triangulated surface with Neumann neighborhood.

3 Cellular Automata on Three-dimensional Irregular Geometries

3.1 Comparisons of structured and unstructured grids

In this subsection we show comparisons of cellular automata on structured and unstructured grids either on three-dimensional surfaces and volumes. Simple binary state set (active/inactive) cellular automata such as the one used in [28] are implemented. All cells except one are initially set as inactive, a cell becomes active if one of its neighbors is active and it remains active for the rest of the simulation. A surface of revolution was used to generate a structured quadrangular grid, Neumann and Moore neighborhoods were considered. Figure 6 shows the patterns developed by the structured grids: Rhomboidal and rectangular for Neumann and Moore neighborhoods respectively. Figure 7 shows a significant reduction of anisotropy by using an unstructured triangular grid. Here, a kind of a circular pattern is developed on the surface [40].

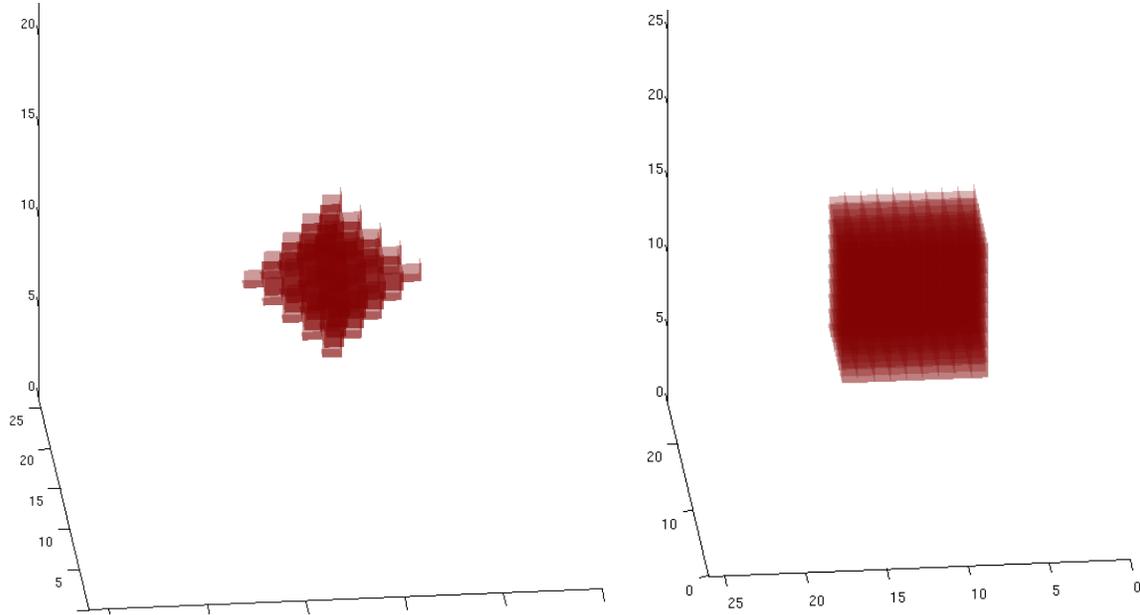


Figure 8: Binary state cellular automata on a rectangular grid with Neumann and Moore neighborhoods.

Figure 8 shows the anisotropy induced by the Neumann and Moore neighborhoods in rectangular cuboid grids, the patterns developed are a kind of cubic cross and a cube respectively [40]. Figure 9 shows the anisotropy reduction by using unstructured tetrahedral grids with Neumann and extended Neumann neighborhoods respectively. Spherical patterns are developed.

Some implementations Details

Neumann and Moore neighborhoods are the most common used neighborhoods in cellular automata computations. In [28] we defined a Neumann type neighborhood around a cell C_0 as the set of cells that share an edge with the considered cell. For surfaces (two dimensional objects embedded in a three dimensional space) we used this definition but for **three dimensional solids** we define a **Neumann neighborhood** around a cell C_0 as the set of cells that share a *face* with the considered cell. On the other hand Moore neighborhoods for surfaces was defined as the set of cells that share a node with the considered cell. In this work, for **three dimensional solids Moore neighborhood** is defined as the set of cells that share an **edge** with the considered cell.

Notice that for case of three dimensional solids we are not using the natural

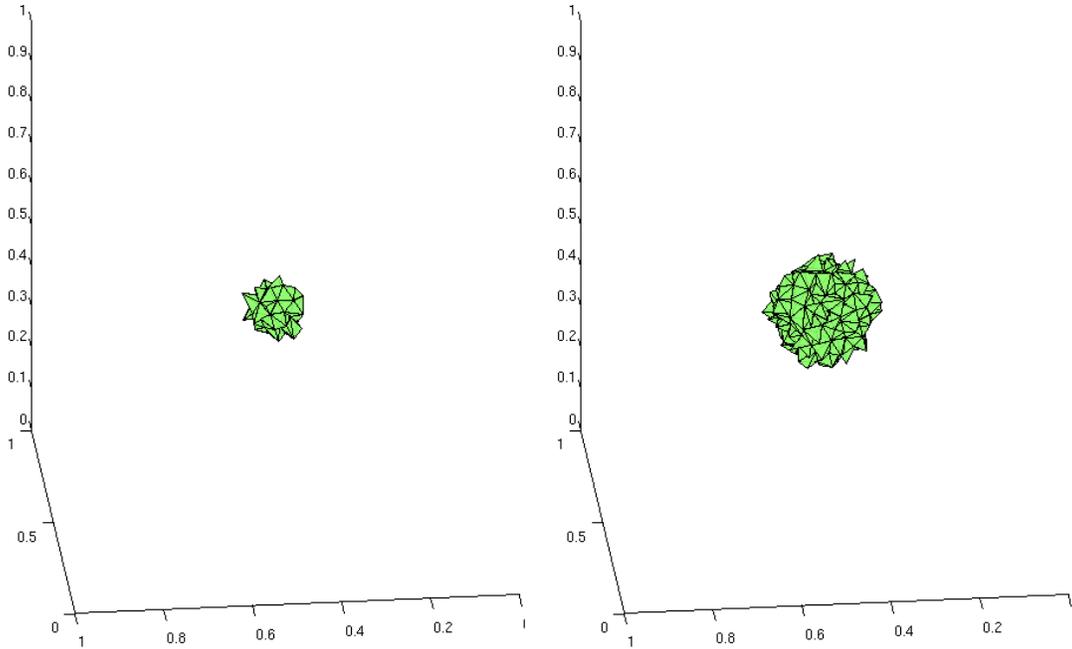


Figure 9: Binary state cellular automata on a unstructured grid with Neumann and extended Neumann neighborhoods.

extensions of the classical 2d definitions of range r neighborhoods:

$$N^N(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| + |y - y_0| \leq r\} \quad \text{Neumann neighborhood}$$

$$N^M(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| \leq r \wedge |y - y_0| \leq r\} \quad \text{Moore neighborhood.}$$

These classical definitions rely on the use of the euclidean metric while our definitions rely on nodes, edges and faces. This is an advantage on the computational calculation of the neighborhoods by using the mesh connectivity. Range \mathbf{r} of a neighborhood is defined as the number of cells apart from the central cell. Range zero means that the future value of the cell \mathbf{a}^{t+1} would depend only on its actual value \mathbf{a}^t , range one says that future value would depend on the values of the cells in the neighborhood one cell apart from the considered cell (*inner* including the value of the center cell and *outer* including only the values of the neighbors).

Table 2 shows the number neighbors required for Neumann and Moore neighborhoods for surfaces and solids. The minimum number of neighboring cells required is obtained by unstructured grids (triangular for surfaces and tetrahedral for solids) with Neumann type neighborhoods. Note that in table 2, the columns for Moore neighborhoods for the unstructured case are marked with *. This is because the number of cells that share a node (triangulated surfaces) or a edge (three dimensional solids) with the considered cell may not be fixed (which makes neighborhood's

		Neumann	Moore
Surfaces	Unstructured Triangular	3, 9, 21	*
	Quadrangular	4, 12, 24	8, 24, 48
Solids	Unstructured Tetrahedra	4, 16, 52	*
	Quadrangular	6, 24, 62	18, 84, 262

Table 2: Number of neighbors required for range 1, 2 and 3.

size variable among the grid). A reasonable choice in the unstructured case is to use Neumann neighborhoods. A small neighborhood's size may reduce computational time but we need to store the neighborhoods of each cell. This increases memory requirements as $3 * N_{cells}$ and $4 * N_{cells}$ respectively for triangular and tetrahedral range 1 Neumann neighborhoods (here N_{cells} is the number of elements of the grid). A remarkable reduction in storage can be obtained by using unstructured grids because the grid is only defined for the computational domain. In the quadrangular case the grid is defined for a box that contains the computational domain. Cells in the box that do not belong to the computational domain need to be marked to skip their calculation but they are still stored in memory. Of course, another strategy for quadrangular grids could be to keep in memory only the cells that belong to the computational domain but in this case we need to store its six neighbors that would require to increase the storage by $6 * N_{cells}$. In cellular automata computations two arrays of size N_{cells} are needed to store the old and the new degrees of freedom, at each time step a loop over the elements of the arrays update their values. Let us make some comments about the number of operations required to make one time step update for the binary spread example.

Loop for a binary spread on tetrahedral grid range one Neumann neighborhoods

```

for i=1:Ncells
    if a[t][i]>0 a[t+1]=1
    else a[t+1][i]=...
        ((a[t][Ni[1]]+a[t][Ni[2]]+a[t][Ni[3]]+a[t][Ni[4]])>0)
    end
end

```

Here $Ni[j]$ means the j -th neighbors of the i -th cell. In the tetrahedral case, five operations per cell are required (we only count logical and arithmetic operations). Thus, for one time step update the tetrahedral grid requires $5 * N_{cells}$ operations while the quadrangular case requires $7 * N_{cells}$ and $19 * N_{cells}$ operations for Neu-

mann and Moore range 1 neighborhoods respectively. For the case of surfaces, by using the results in [28] we observe that the unstructured triangular with Neumann range one requires $4 * N_{cells}$ operations while the quadrangular case requires $5 * N_{cells}$ and $9 * N_{cells}$ operations respectively for Neumann and Moore one range neighborhoods. Notice that when we increase the range of a neighborhood more evaluations are needed for each cell which is translated into an increase of the computation time to make one time step update of the cellular automata. This increases the execution time of a simulation.

3.2 Medical Simulations on Surfaces and Volumes

In this section we present two applications in medicine of simulations of the use of cellular automata on three-dimensional irregular geometries: pattern propagation of vitiligo and avascular breast cancer tumor growth. Our goal is to show how our approach of applying finite volume techniques to cellular automata can expand the possibilities of cellular automata in three-dimensional irregular geometries. We are confident that this approach will open the door for new and more realistic applications of cellular automata on irregular complex geometries by using the finite element techniques. Moreover, the use of CA on unstructured grids can be useful for the coupling of CA and finite element calculations required in the simulation of solidification grain structures [14], heart ventricle modeling [9] and tumor-immune system interactions ([23],[31]). In these simulations two different grids are used, one for the finite element method and another for the CA. Our approach can make the coupling a straightforward task by using nested hierarchical tetrahedral meshes.

An application of Cellular Automata on Triangulated Three-dimensional Surfaces: Pattern Formation of Vitiligo Patches

Vitiligo is an acquired skin disorder characterized by white and depigmented patches enlarging and becoming more numerous with time. It is due to a disappearance of functioning melanocytes and loss of melanin in the epidermis. The condition can be cosmetically disfiguring and the lesional skin is thus more sensitive to sunburns. It affects 0.1-2 % of the world's population, irrespective of gender and race.

Vitiligo generally appears in one of three patterns:

- Focal pattern: depigmentation limited to one or only a few areas.
- Segmental pattern: depigmented patches that develop on one side of the body.
- Generalized pattern: the most common pattern. Depigmentation occurs symmetrically on both sides of the body.

Until now, there is no way to predict if generalized vitiligo will spread. In some cases, the depigmented patches do not spread. The disorder is usually progressive, however, and over time the white patches will spread to other areas of the body. For some patients, vitiligo spreads slowly, over many years; for others, spreading occurs rapidly. Some patients have reported additional depigmentation following periods of physical or emotional stress. To simulate the propagation of vitiligo patterns we directly implement a cellular automata on a triangulated surface of a human head. Figure 3 shows the computational domains which consisted of triangles. We assume fixed boundary conditions, extended Neumann neighborhoods, two states at each cell: infected and healthy. An initial lesion is localized on the left side of the forehead; a cell on the right cheek was used as an attractor, which makes the initial lesion to cross the midline of the face and spread down to the eyeball and cheek on the right side of the face. The cellular automata evolves according to the following rules:

- An infected cell remains infected in the next iteration.
- An infected cell infects one of its principal neighbors, the one that is closest to the attractor, then all the elements of the extended neighborhood of this infected cell are infected.

Figures 10 to 12 shows an initial condition with some simulations obtained by several iterations. The numerical simulation shows the spreading of the infected cells; here we can appreciate how the initial lesion crosses the midline of the face and spreads down to the eyeball and cheek on the right side of the face, which is close in appearance to vitiligo lesions [19]. To our knowledge, this is the first CA implementation on triangulated surfaces is used to simulate the propagation of vitiligo lesions. Numerical simulations are valuable tools to understand mechanisms by which pigment cells migrate and proliferate to form skin patterns leading to more effective clinical treatments ([41],[8]). A model with simple assumptions such as the closest cell to an attractor was used to show a numerical implementation of a CA on a triangulated surface to simulate segmental vitiligo spreading. In this first approach the speed of propagation of the infection is related to the size of the elements, in refined areas of the mesh (for example the eyes and the nose), the infection propagates slower than in coarser areas. More sophisticated models can be implemented, for example using spreading probabilities at each cell. Thus, numerical simulations can provide a better understanding of important mechanisms such as: the stabilization of segmental vitiligo, time evolution of skin repigmentation and therapeutic response in vitiligo treatments [1] among others.

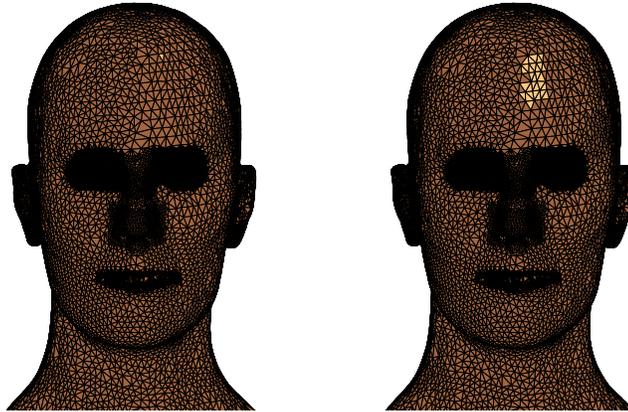


Figure 10: Initial condition and simulation after several iterations of a cellular automata simulation of Vitiligo.

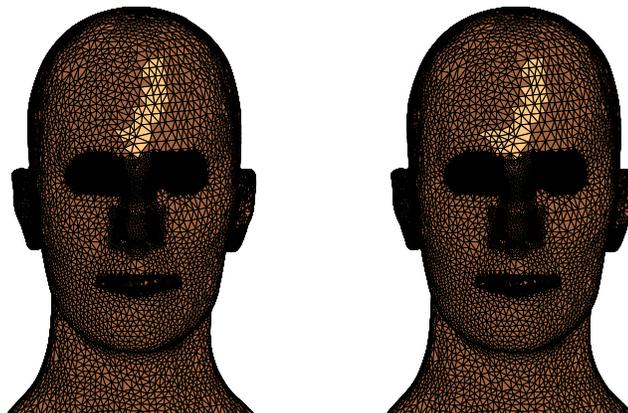


Figure 11: Simulations after several iterations of a cellular automata simulation of Vitiligo.

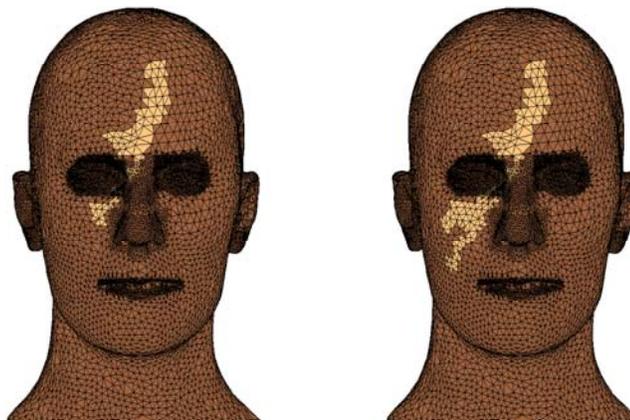


Figure 12: Simulations after several iterations of a cellular automata simulation of Vitiligo.

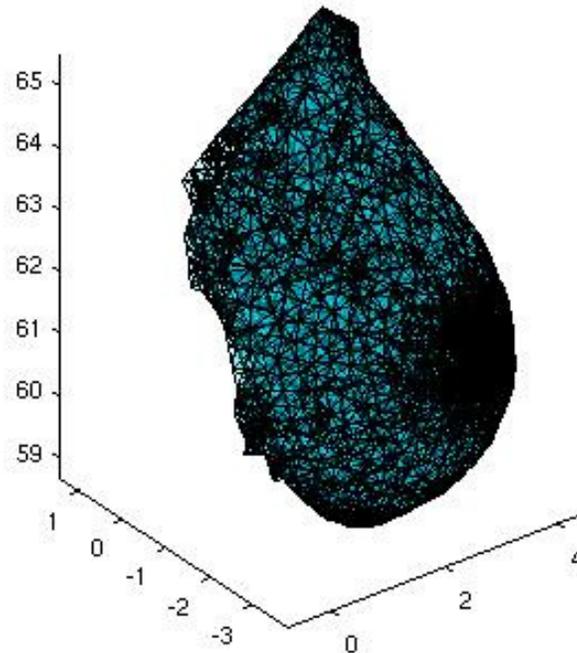


Figure 13: A triangulated surface for a woman's breast.

An application of Cellular Automata on three-dimensional Tetrahedral Meshes: Breast Cancer Tumor Growth

Breast cancer refers to cancers originating from breast tissue, most commonly from the inner lining of milk ducts or the lobules that supply the ducts with milk. Breast cancer is a serious threat to the health of women globally and an unrecognized priority in middle-income countries. Worldwide, breast cancer comprises 10.4% of all cancer incidence among women, making it the second most common type of non-skin cancer (after lung cancer) and the fifth most common cause of cancer death. In Mexico breast cancer is a serious threat to the health of women and an unrecognized priority [21].

For the numerical implementation of CA in tetrahedral meshes we assume as our computational domain the woman's breast showed at figure 13. The input poly representation has 482 nodes and 914 faces, Tetgen generates a tetrahedral mesh with 5738 nodes and 22450 tetrahedra.

To simulate avascular tumor growth by cellular automata we implemented a modification of a three-dimensional version of the model of Qi et al. [33] in a unstructured tetrahedral mesh; the assumed probabilities are taken from this work. Moreover following the critical review of Moreira [26] no dissolution of cells is assumed (dead tumor cells tend to accumulate, forming a necrotic core). Our modified model assumes the following rules:

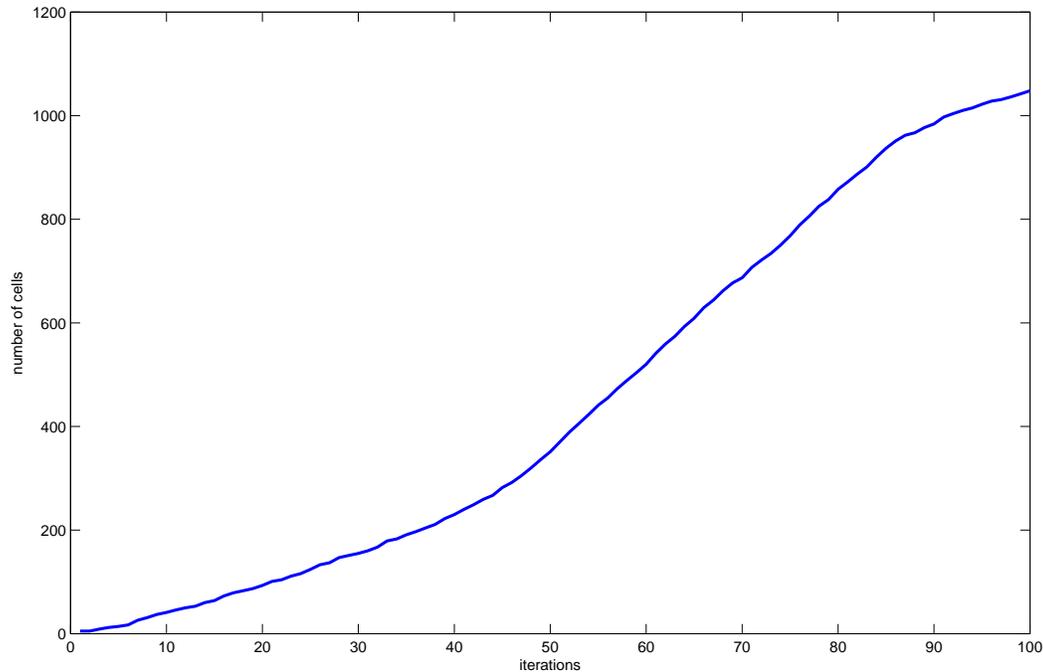


Figure 14: Number of abnormal cells as a function of the number of iterations.

- Four states, normal cells (N), cancer cell (C), dead cells (D) and complex cells (E).
- Neumann neighborhoods and fixed boundary conditions.
- A cancer cell proliferates to an available neighboring normal cell N with probability $0.2 * (1 - \frac{N_c}{\phi})$, N_c denotes the number of abnormal cells and ϕ is a constant. To preserve the compact shape of the tumor, the cancer cell proliferates to the available neighboring normal cell that has the minimum number of neighboring normal cells.
- If there is not available neighboring normal cell, the cancer cell evolves into a complex cell with probability 0.2.
- A complex cell evolves into a dead cell with probability 0.2.
- Dead cells prevail.

Here the initial condition consists of 5 cancer cells (a cell with its neighbors), the cancer tissue was localized at the upper external quadrant of the right breast. Figure 14 shows the number of cells as a function of the number of iterations. Here we can observed a type of Gompertz curve. Figure 15 shows a simulation

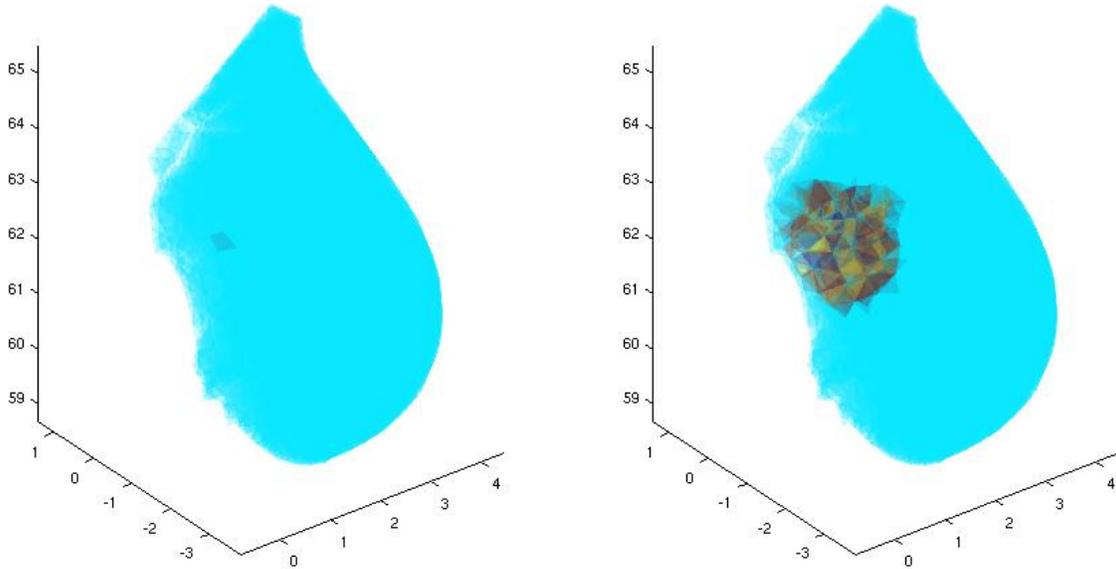


Figure 15: Initial condition and final solution after 10 iterations of a cellular automata simulation of breast Cancer growth.

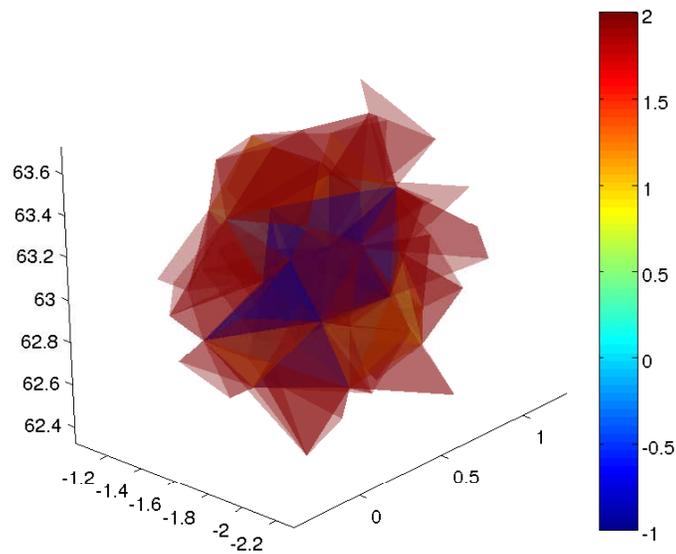


Figure 16: Zoom of spherical tumor growth.

obtained after 10 iterations; figure 16 shows a zoom of the tumor's growth, allowing us to observe the development of a core of dead cells. Our numerical results are in the range of 3 doublings (a typical doubling size takes 100 days) which gives approximately a ten months period of the tumor growth [39]. The size of the grid can be adapted depending on the doubling time (cancer's rate of spread) of the type of tissue inside the cell.

Discussion

Let us make some remarks about the proposed approach of implementing a cellular automata on triangulated surfaces and unstructured tetrahedral grids. Some of the immediate benefits include the fact that the cellular automata technique have been extended to computational domains that include simple surfaces or solids, probably with holes and not only the traditional quadrangular domains. There is no bias induced by the grid and neighborhood type, information spreading from a source point spreads as spherical fronts. Oftentimes in several applications the region (three dimensional domain) of study is defined by a cloud of points obtained by a 3d body scanning, which makes our approach very suitable to these type of domains. To our knowledge, this is the first time a CA has been implemented on unstructured tetrahedral grids. A simple avascular cancer growth model was used to present a numerical implementation of a CA on an unstructured tetrahedral grid. One of the main advantages of the use of unstructured tetrahedral grids is the reduction of the bias induced by the regular grids and neighborhoods. More sophisticated models involving different space and time scales can be implemented leading to a better understanding of tumor growth and early detection ([2], [4], [3]). As future work, we plan to investigate and compare different cellular automata cancer growth models implemented on tetrahedral grids. In both phenomena, vitiligo and tumor growth, the time step of each iteration can be adjusted according to the side of the mesh and the maximum rate of spread that each phenomena requires.

4 Conclusions

We have proposed the use of unstructured triangulated surfaces and unstructured tetrahedral grids to expand the range of applications of CA to model and simulate irregular three-dimensional geometries. We show implementations of CA to simulate the spreading of vitiligo and avascular tumor growth on irregular three-dimensional geometries. The examples show how the mesh data structure and the visualization techniques of the finite element method can be adapted to the CA implementation to three-dimensional geometries either on surfaces or solids. Even though the finite element method is a powerful numerical method, we observe that due to its easy implementation, CA methods are more popular among the community of researchers who need to do numerical simulations. Our approach is right in the middle, since it combines the flexibility of unstructured meshes to model complex geometries with the easy implementation of cellular automata. Moreover the coupling of cellular automata and finite element can be made in a straightforward manner by using nested hierarchical tetrahedral meshes. Some of the main

advantages of our approach over classical cellular automata implementations are: the ability to handle computational domains either surfaces or solids defined by a cloud of points obtained from a 3d body scanning, reduction of the bias induced by the grid and neighborhood, direct identification of the neighbors of each cell and visualizations. We are confident that this approach will open the door of new and more realistic applications of cellular automata to model and simulate real life problems in three-dimensional irregular geometries. Computer models and simulations are valuable tools in forming preliminary hypotheses about recently discovered biological paradigms that may take years for researchers to fully investigate.

Bibliography

- [1] Fadzil M.A., Norashikin S., Suraiya H. H. and Nugroho H., *Independent component analysis for assessing therapeutic response in vitiligo skin disorder*, Journal of Medical Engineering & Technology, Vol. **33:2**, Pages 101-109, 2009.
- [2] Alarcón T, Byrne H.M., Maini P.K., *Towards whole-organ modelling of tumour growth*, Prog Biophys Mol Biol.; 85(2-3):451-72, 2004.
- [3] Alarcón T., Byrne H.M. , Maini P.K., *A Multiple Scale Model for Tumor Growth*, SIAM Multiscale Model. Simul. 3, pp. 440-475, 2005.
- [4] Anderson A.; Katarzyna R. editors, *Single-Cell-Based Models in Biology and Medicine*, Birkhäuser, 2007.
- [5] Bénéiere R., Subsol G. and Puech W., *Decomposition of a 3d triangular mesh into quadrangulated patches*, 22es Journées de l'Association Francophone d'Informatique Graphique, Arles, 2009.
- [6] D. Bommès, T. Vossemer and L. Kobbelt, *Quadrangular Parameterization for Reverse Engineering*, Mathematical Methods for Curves and Surfaces Lecture Notes in Computer Science, Vol. 5862, 55-69, 2010.
- [7] Burkardt J., *Matlab Source Codes* triangulation_triangle_neighbors available at http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/triangulation_triangle_neighbors/triangulation_triangle_neighbors.html.
- [8] Chuong C.M., Dhouailly D., Gilmore S., Forest L., Shelley W.B., Stenn K.S., Maini P., Michon F., Parimoo S., Cadau S., Demongeot J., Zheng Y., Paus R., Happle R., *What is the biological basis of pattern formation of skin lesions?*, Exp Dermatol. , vol. 15, no. 7, pp. 547-564, 2006.

- [9] Cimrman R., Kroc J., Rohan E., Rosenberg J. and Tonar Z., *On coupling Cellular Automata Based activation and finite element muscle model applied to heart ventricle modelling*, Proceedings of 5th International Conference on Simulations in Biomedicine - Advances in Computational Bioengineering (Eds. Arnez Z.M., Brebbia C.A., Solina F. and Stankovski V.) WIT Press, Southampton, Ljubljana, Slovenia, pp. 25-34., 2003.
- [10] Deutsch A. and Dormann S., *Cellular Automaton Modeling Of Biological Pattern Formation: Characterization, Applications, And Analysis*, Birkhäuser Boston (2005).
- [11] Dong S., Bremer P.T., Garland M., Pascucci V. and Hart J.C., *Spectral Surface Quadrangulation*, ACM Transactions on Graphics, Proceedings of ACM SIGGRAPH, Vol 25, Issue 3, pp. 1057-1066, 2006.
- [12] Flache A. and Hegselmann R., *Do Irregular Grids Make a Difference? Relaxing the Spatial Regularity Assumption in Cellular Models of Social Dynamics*, Journal of Artificial Societies and Social Simulation, vol 4, 2001.
- [13] Folino G., Mendicino G., Senatore A., Spezzano G. and Straface S., *A model based on cellular automata for the parallel simulation of 3D unsaturated flow*, Parallel Computing, vol 32, number 5-6, pp. 357-376, 2006.
- [14] Gandin Ch. A., Desbiolles J.L., Rappaz M. and Thevoz Ph., *A three-dimensional cellular automaton-finite element model for the prediction of solidification grain structures*, Metallurgical and materials transactions, vol 30, number 12, (1999), pp. 3153-3165, 1999.
- [15] Gobron S. and Chiba N., *3d Surface Cellular Automata and their Applications*, The Journal of Visualization and Computer Animation, vol 10, pp. 143-158, 1999.
- [16] Gobron S., Finck D., Even P. and Kerautret B., *Merging Cellular Automata for Simulating Surface Effects*, International Conference on Cellular Automata for Research and Industry, vol. 4173,(2006), Springer Berlin, 2006.
- [17] GTS, *GNU Triangulated Surface Library*, software available at <http://gts.sourceforge.net/>.
- [18] Hang Si, *TetGen A Quality Tetrahedral Mesh Generator and a 3D Delaunay Triangulator*, Research Group: Numerical Mathematics and Scientific Computing, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, software available at <http://wias-berlin.de/software/tetgen/>.

-
- [19] Hann S.K., Chang J.H., Lee H.S., and Kim S.M., *The classification of Segmental Vitiligo on the Face*, Yonsei Medical Journal, vol. 41, no.2, pp. 209-212, 2000.
- [20] *IVCON, 3D Graphics File Conversion*, software available at http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp_src/ivcon/ivcon.html, 2010.
- [21] Knaul F.M., Nigenda G., Lozano R., Arreola-Ornelas H., Langer A. and Frenk J., *Cáncer de mama en Mexico una prioridad apremiante*, Salud Publica Mexico, vol 51,no. 2, 2009.
- [22] Kansal A.R.,Torquato S., Harsh G.R. , Chiocca E.A., and Deisboeck T.S., *Simulated brain tumor growth dynamics using a three-dimensional cellular automaton*,J Theor Biol.,vol 203, no. 4 , pp. 367-82. 2000.
- [23] Mallet D.G., and de Pillis L.G., *A cellular automata model of tumor-immune system interactions*, Journal of Theoretical Biology, vol. 239, no. 3, pp. 334-350, 2006.
- [24] *Meshlab*, software available at <http://meshlab.sourceforge.net/>.
- [25] Mezentsev A., Munjiza A. and Latham J.P., *Unstructured Computational Meshes for Subdivision Geometry of Scanned Geological Objects*, Proceedings of the 14th International Meshing Roundtable, Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [26] Moreira J. and Deutsch A., *Cellular Automaton Models Of Tumor Development: A Critical Review*, Advances in Complex Systems, vol 5, num 2, pp. 247-267, 2002.
- [27] Naumov L. and McKee J., *Generalized Coordinates for Cellular Automata Grids*, Lecture Notes in Computer Science, vol. **2658**, Springer Berlin/Heidelberg, 2003.
- [28] Ortigoza G., *Unstructured Triangular Cellular Automata for Modeling Geographic Spread*, accepted to appear at Journal of Mathematical and Computer Modelling by Elseiver, February 2015.
- [29] O’Sullivan D., *Exploring Spatial Process Dynamics Using Irregular Cellular Automaton Models*, Geographical Analysis, 2001.
- [30] P. O. Persson and Strang G., *A Simple Mesh Generator in MATLAB*, SIAM Review, vol. **46**, num 2, pp. 329-345, 2004.

- [31] Pillis L.G., Mallet D.G. and Radunskaya A. E., *Spatial tumor-immune modeling*, Computational and Mathematical Methods in Medicine, vol. **7**, no.2-3, pp. 159-176, 2006.
- [32] *Princeton Shape Benchmark*, available at <http://shape.cs.princeton.edu/benchmark/>.
- [33] Qi A. S. , Zheng X., Du C.Y. , An B.S., *A cellular automaton model of cancerous growth*, J Theor Biol.; vol. 161(1) pp. 1-12, 1993.
- [34] *Remesh*, software available at <http://remesh.sourceforge.net/>.
- [35] Shterenlikht A. and Howard I. C., *Cellular Automata Finite Element (CAFE) modelling of transitional ductile - brittle fracture in steel*,15th European Conference of Fracture, Sweden, 2004.
- [36] Shyue S., Sung H. and Chiu Y., *Oil spill modelling using 3d cellular automata for coastal waters*, Proceedings of the seventeenth international Offshore and polar engineering conference, 2007.
- [37] Schoberl J., *NETGEN An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules*, Computing and Visualization in Science, pp. 41-52, Springer Berlin/Heidelberg, 1997.
- [38] Vavasis S.A., *QMG mesh generation and related software*, available at <http://www.cs.cornell.edu/home/vavasis/qmg-home.html>.
- [39] Retsky M., *Cancer Growth: Implications to Medicine and Malpractice*, internet available at <http://www.lectlaw.com/filesh/tabtumo.htm>.
- [40] Schönfish B., *Anisotropy in cellular automata*, Biosystems. **41**(1), pp:29-41, 1997.
- [41] Smolle J., Hoffmann-Wellenhof R., Kofler R., Cerroni L., Hass J. and Kerl H., *Computer Simulations of Histologic Patterns in Melanoma Using a Cellular Automaton Provide Correlations with Prognosis*, J. Invest Dermatol.; vol **105**, num. 6 pp.797-801. 1995.
- [42] Treleaven P. and Wells J., *3D Body Scanning and Healthcare Applications*, IEEE Computer Society, vol. **40**, num 7,pp. 28-34, 2004.
- [43] Wolfram S., *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002.

- [44] Zawidzki M., *Application of Semitotalistic 2d Cellular Automata On A Triangulated 3d Surface*, Int. J. of Design Nature and Ecodynamics. Vol. **6**, No. 1, pp. 34-51, 2011.
- [45] Zhu H., Sun Y., Rajagopal G., Mondry A. and Dhar P, *Facilitating arrhythmia simulation: the method of quantitative cellular automata modeling and parallel running*, Biomed Eng Online, **3**: **29**, 2004.

Facultad de Ingeniería, Universidad Veracruzana
Boulevard Adolfo Ruiz Cortines S/N, Costa Verde,
Boca del Río, Ver. C.P. 94294
gortigoza@uv.mx

Filosofía, Divulgación e Historia de las Matemáticas

Capítulo 4

Algunas reflexiones sobre la historia de la matemática

Juan Angoa, Agustín Contreras, Manuel Ibarra,
FCFM-BUAP

Resumen

A la usanza platónica, estas reflexiones se realizaron en el onírico marco de una serie de conversaciones de tres, en la libertad que permite la práctica intelectual de oír al otro, resumiendo las convergencias, respetando las disonancias, hasta llegar a este fruto.

Los científicos, al reflexionar acerca del pasado de la ciencia, por lo general lo hacen desde la perspectiva misma del científico, es decir, decidir qué tanto me ayuda a mi quehacer científico conocer el pasado. Esta estrategia ha resultado muy útil a los científicos: para no repetir errores, para encontrar estrategias olvidadas pero con profundas cargas creativas, para motivar la búsqueda y refrescar las ideas.

Sin embargo, la ciencia como parte de la cultura, está impregnada de la universalidad de todo quehacer humano que se realiza con el objetivo de crear y recrear al hombre, y buscar en el pasado de la ciencia solo técnicas que ayuden al trabajo actual, pierde la perspectiva de reencontrarse con proyectos humanos profundos, que nos permitirían mejorar el conocimiento de nosotros mismos como seres humanos.

Valga este trabajo, al menos para crear la costumbre y la certidumbre de que los profesores de la FCFM pueden y deben reflexionar acerca de los rasgos humanísticos del quehacer matemático.

*Es de vital importancia hacerse del pasado.
El pasado es un territorio que hay que ganarse desde
el conflictivo y azaroso presente
bajo la sombra de un futuro
que aún es proyecto y deseo.*

J. Angoa [2]

1 Apropiarse del pasado, actividad vital

En este trabajo partimos de una necesidad de vida, de existencia, es decir, de una necesidad inherente a los seres humanos, la de hacernos del pasado. Podríamos decir que una de las esencias de los seres humanos es la necesidad de tener una historia, un pasado. El marco temporal en donde se realiza esta búsqueda del pasado es el presente. Con esta abstracción vaga, se quiere decir que el sujeto que busca pasado tiene a cuestas una educación alcanzada en un tiempo muy ajeno a ese pasado que quiere recuperar. Pero además, inmersos en la necesidad del pasado, se encuentran el deseo y proyecto de un futuro. Queremos, a veces, hallar respuestas de cómo hacer algo, o cómo justificar ciertas actitudes del presente, en el pasado.

Así que, ya sea para entendernos, justificarnos o proyectar, tomamos el pasado, mudo e inerte, que toma nuestra voz y dinámica, para hablar y presentar todo un esquema de nuestra vida. Con la máscara del pasado habla el historiador, en el peor de los casos agazapado y anónimo. En resumen toda historia es construcción y recuperación del pasado, actividad que se realiza como una imperiosa necesidad humana.

Una visión que limita la indagación del pasado científico, es la que supone que para construir la ciencia solo se necesitan mentes privilegiadas enfrentadas a problemas teórico-prácticos. Desde esta perspectiva la historia de la ciencia es una colección de biografías de personalidades relevantes, que en la soledad de sus estudios o laboratorios construyen los conceptos y modelos que resuelven los problemas. Según esta visión, en la ciencia sólo hay generales y no soldados de infantería. Esta visión impide que el estudio de la historia de la ciencia contribuya a un mayor reconocimiento del cómo han surgido las ideas científicas, al conocimiento de las verdaderas fuentes del desarrollo científico, en particular aquel que se ha logrado como producto de la reflexión colectiva.

Iniciamos la discusión de esta problemática con ciertos presupuestos fundamentales:

1. La ciencia es parte de la cultura humana, es decir, es la colección de preguntas, respuestas y sistemas conceptuales que reflexionan acerca del hombre.
2. La ciencia es parte del quehacer de hombres inscritos en una sociedad, en la cual se educan y de la que heredan sus fobias y deseos.
3. Se mira al pasado como una reconstrucción de hechos, pero también es la construcción desde el presente de un universo llamado pasado, que se convierte en una metáfora de nuestro tiempo. Si sólo fueran imparciales conclusiones de hechos sucedidos, no tendría algún interés para los vivos.

El hombre es síntesis de una sociedad, de un colectivo humano que se destila en cada individuo que lo forma. Y la cultura es la región del pensamiento humano que trata, en una sociedad temporal-concreta, de construir su visión de lo humano, lo universal, venciendo las particularidades de su tiempo.

2 La cultura del historiador, herramienta y ancla

En estas reflexiones previas nos topamos con dualidades fundamentales que debemos no evitar, sino más bien en ellas encontrar la riqueza del fenómeno a analizar y, en su expresión dialéctica, hallar el modelo conceptual adecuado, ya que la única presencia de una de ellas limita el análisis. Veamos como ejemplos: individuo y sociedad, universalidad y particularidad, creación y descubrimiento, objetividad y subjetividad, razón e incertidumbre, etc.

Un proyecto histórico de los griegos y su ciencia, debe incluir un análisis de su sociedad y tomar también a individuos sintéticos que en el marco de sus vidas nos nutran del conocimiento de su sociedad.¹ Si bien es cierto que Euclides nos dice algo de la cultura griega, no entenderemos a Euclides si no lo situamos en su polis griega concreta. Es más, la sociedad griega se expresa en cada polis, cada polis es una particularidad de ella, que está construida con objetivos universales (armonía entre razón y mito, la armonía de las formas, la armonía del estado y gobernados), aquí encontramos el profundo juego de particularidad y universalidad.²

Otro ejemplo importante. Al hurgar en el pasado alguna manifestación de la ciencia siempre usamos como hilo conductor la creación de una razón, es decir, la búsqueda de los universales. Sin embargo, sin el universo del azar no emerge, como preciosa gema, la razón. Las limitaciones de los modelos previos del fenómeno enriquecen el modelo final y lo sitúan en su real potencia. Muchas motivaciones al modelo racional son intuiciones, pasiones, mitos y fobias. Negar esto, es quedarse con un pasado en blanco y negro. Si bien, el resultado final en un proceso científico es un modelo robusto y racional, el historiador, en la medida de lo posible, debe recuperar los fracasos y los intentos ya que esto colorea y enriquece el conocimiento de la historia del conocimiento. Intuición y razón, azar y certeza, son contradicciones fundamentales para resaltar que el camino del concepto es trazado por la pasión y la subjetividad. Como ganancia colateral, diremos que esta estrategia produce simpatía por el árido quehacer matemático.³

¹ Un brillante texto acerca de la cultura griega es [4], en él se desarrolla con exactitud una visión global de la cultura griega.

² En [3] se desarrolla de manera minuciosa la vida social de los pueblos de Sumer, enmarcando la presentación de su matemática.

³ En [5], tenemos un buen ejemplo de, aunque de manera ficticia, una narración de una

La historia cobra sentido en relación a los valores dominantes en el presente. En las sociedades modernas capitalistas el progreso se relaciona con el bienestar económico individual. En la narración de la vida de un personaje puede ponerse énfasis en una idea de progreso lineal, lo que sugiere una visión acumulativa de la historia, donde parece haber una meta que debe ser alcanzada. Es esta meta desde donde se juzgan los hechos como relevantes o como indiferentes. En la época actual el éxito de un científico en México suele medirse, desde el punto de vista de la oficialidad, por su nivel en el Sistema Nacional de Investigadores (SNI) y no necesariamente por el impacto real de su trabajo científico. Hay que hacer notar que, desde esta perspectiva, algunos pocos logran progresar en su vida científica gracias a la explotación de muchos que no progresan. Los hechos que recorren la vida de un personaje pueden leerse como piezas de una cadena si el historiador, por sus intereses personales, ayuda a que las piezas se encadenen. De este modo todo lo que no encaja en la trama que se narra es dejado de lado. Dejar de pensar en términos de progreso lineal es abrirles las puertas a esas otras pequeñas historias que quedaron fuera; es hablar de la parte humana del personaje, sus conflictos, sus luchas, sus errores y sus miedos y desesperanzas. Es hablar de aquellos en cuyos hombros se paró para progresar.

“Es la historia -dice Paco Ignacio Taibo II en *La Lejanía del Tesoro*- una novela de la verdad, hecha con materiales de bordes vagos y deshilachados, despenado de ilusiones, gran tela repleta de remiendos, impreciso trazado de carretera”. Sería deseable que el historiador, aunque no fuera un competente narrador, tuviera la intención de mostrar los varios aspectos de la cultura involucrados en la actividad que se describe, para que el lector pudiera sopesarlos y crear una imagen más vívida de lo narrado. “No siempre -continúa Taibo- la realidad ofrece a sus contumaces clientes esa mezcla de anécdotas brillantes que hacen del instante una lección y que se encadenan siguiendo los pasillos de maravillosas historias que conducen invariablemente a los encuentros”. [8]

En el libro *Matemáticas, una historia de amor y odio*, Reuben Hersh y Vera John-Steiner (ver [6]) se centran, en uno de sus capítulos, en cuatro aspectos de la cultura: emocional y cognitivo, estético, social, y el de las tensiones internas. Se preguntan, por ejemplo: ¿Cuáles son los hábitos mentales, patrones de comportamiento y motivaciones que les permiten a los jóvenes matemáticos convertirse en miembros de su comunidad matemática? ¿Cuáles son los patrones, demostraciones y descubrimientos que los matemáticos llaman hermosos? ¿Cuáles son los valores compartidos, las historias, las tradiciones y las instituciones que apoyan a las matemáticas? ¿Quiénes son los que están dentro y quiénes los que están fuera? ¿Cómo

búsqueda matemática plagada de apetencias y pasiones; los chispazos de información histórica aderezan de manera amplia y creativa esta historia.

identifica esta disciplina los conflictos y cómo se enfrenta a ellos? ¿Cómo se premia a un descubridor? ¿Cómo se comparten los premios? ¿Cómo coexisten la competencia y la colaboración? La experiencia vital de cada matemático está influida por todos estos aspectos.

Los premios y los galardones, la política académica y del Estado, el progreso económico, tienen un impacto inevitable en el quehacer cotidiano. Hersh y John-Steiner proporcionan algunos ejemplos de tensiones surgidas entre los matemáticos. Uno de ellos es el de Grigori Perelman y su sensacional demostración de la Conjetura de Poincaré (que dice que, bajo una determinada condición simple, cualquier variedad tridimensional es continuamente deformable a una esfera). Por esta demostración le ofrecieron la Medalla Fields y un millón de dólares. Perelman rechazó ambos premios. Si uno no toma en cuenta todas las presiones sociales, políticas, académicas y, a la postre, emocionales que acompañaron a todo su trabajo, podríamos hacer pensar, al narrar este acontecimiento, que Perelman es, sí un genio, pero al fin y al cabo, un ruso loco y huraño. Otra controversia que describen Hersh y John-Steiner es la surgida en el Departamenteo de Matemáticas de la Universidad de California en Berkeley en torno al rechazo (por el simple hecho de ser mujer) y más tarde la concesión de un puesto de profesora titular a la matemática estadounidense Jenny Harrison. Historias como éstas, hay que conocerlas en todo su contexto, pues nos ayudarán a hacer frente a todas esas tensiones similares que seguirán dándose dentro de la comunidad matemática y científica.

Antes de continuar escribamos algunas conclusiones:

1. Hacer historia de la ciencia es hacer la historia del hombre ampliando la razón.
2. La creación de la razón involucra a un hombre histórico-concreto con apetencias y prejuicios.
3. La historia de cualquier actividad humana es la historia de individuos con universales generados en una sociedad concreta.
4. En toda reflexión debemos incluir todas las partes del fenómeno aunque éstas aparezcan como contradicciones, y más bien debemos subordinarnos a la dialéctica de estas contradicciones, para modelar más profundamente al fenómeno.

Como ya anotamos, la formación cultural del historiador es fuerza en el quehacer histórico, ya que sin ella no es posible la creación del pasado, pero es debilidad, ya que ella permite ver sólo lo que con ella podemos ver. ¿Cómo resolver esta paradoja?

Creemos que debemos asumir esta circunstancia, de la manera más conciente, explicitando nuestra formación y nuestros más caros deseos involucrados en los

planteamientos históricos y así dejar al tiempo mostrar que nuestros productos históricos realmente tenían un gramo de universalidad. Por ejemplo, si el historiador tiene una formación como profesor y lo que busca es mostrar la importancia de la historia de la matemática en la enseñanza, entonces seguramente buscará en el desarrollo de algunos conceptos específicos aclarar las dificultades por las que ha pasado la humanidad para llegar a ellas. O bien, si el historiador busca el lugar que ocupa la matemática en los universales culturales del hombre, pues su discurso tendrá otra estructura, centrada en las crisis culturales que conlleva todo desarrollo de los conceptos.⁴

Tal vez con estas propuestas la historia se convertiría en novela, pero tal vez la novela sea el mejor territorio para escribir la historia.⁵

3 El paisaje histórico

Una primera mirada al pasado se realiza cuando leemos una obra histórica, el impacto que nos causa puede llevarnos a leer más obras del mismo tema o dar el gran salto y acudir a las fuentes históricas.

El producto del contacto con una fuente histórica puede llevarnos a producir una obra de este tipo, que a su vez iniciará la secuencia nuevamente en otro lector. Pero es importante notar que estas fuentes, que son parte del universo de la historia, a veces se nos hacen presentes a través de un duro esfuerzo del historiador, es decir, tienen la naturaleza dual de ser también obras, que con el paso del tiempo, se convierten a su vez en fuentes históricas.

Así es como las fuentes y obras históricas, son los personajes que forman el pasado actual, sobre las cuales el historiador iniciará su labor en busca de un pasado potencial. Aclaremos un hecho sumamente importante: algunos historiadores reducen su trabajo, el cual es importante, a crear este paisaje histórico, pero resta construir el pasado, es decir, ese discurso que nos lo presenta orgánicamente, con sus contradicciones y confusiones. Ese ente en donde el constructor del pasado asume una responsabilidad ideológica, al desarrollar una estructura conceptual en donde las obras y fuentes históricas toman su lugar según su lógica concepción. Estos discursos, que en esencia son para los vivos, nos permiten tocar a los muertos, en reconstrucciones potentes llenas de sonoridad para nosotros.

⁴ Stillwell es un buen ejemplo de lo anterior. En [7] argumenta de manera precisa el por qué de su presentación y elección de pasajes específicos de la historia de la matemática que desarrolla.

⁵ Tal vez un ejemplo de este hecho sea el excelente libro *La medida de todas las cosas* [1]. En este libro tenemos una recreación minuciosa de los últimos momentos del antiguo régimen francés y los primeros del régimen revolucionario, enmarcando de manera pasional la medición del meridiano terrestre.

4 La historia en general y la historia de la matemática en particular

La historia, como una disciplina fundamental de las humanidades, es una historia de la sociedad, de la cultura en general. Esta historia es realizada por los profesionales de la historia, concientes de recuperar el pasado de la sociedad y la cultura, siempre en un marco muy general de estas manifestaciones humanas. Sin embargo, la matemática, al ser una manifestación de la cultura humana, tiene una presencia universal, pero al mismo tiempo es una especialización en sus objetivos y métodos. Así que el solo saber historia general de la sociedad y la cultura humana, no permitirá una apropiación adecuada del pasado matemático; es preciso tener una metodología histórica general, pero sobre todo entender el lugar que ocupa la matemática en la cultura humana.

Aclaremos: no todo matemático siente la necesidad de construirse un pasado, el perfil del matemático-historiador es muy específico, creemos que debe tener una cultura histórica clásica, pero también entender las manifestaciones de la matemática en el pasado como parte, por un lado, de la cultura humana, y por otro, como parte de un desarrollo de la misma matemática.

Este trabajo tiene como una de sus intenciones convencer a los matemáticos de ampliar sus campos de trabajo, allegándose a los confines del trabajo histórico, que es un espacio en donde podremos construir respuestas que nos llevarán a una mejor comprensión de la matemática, o al menos, a encontrar en esta apertura, un enriquecimiento como matemático.

5 El cuerpo matemático

La búsqueda de las expresiones matemáticas en el pasado, basándose en las fuentes y obras históricas, tiene un presupuesto importante: nuestra cultura general y nuestra cultura matemática en particular permiten apropiarnos del pasado matemático. ¿Cómo es que existe éste diálogo entre culturas matemáticas? Pensamos que este diálogo es posible gracias a los puntos de contacto, que pese al paso del tiempo, se mantienen entre dos culturas matemáticas de distinto tiempo. ¿Pero cómo son esos puntos de contacto?

Creemos que la matemática, a lo largo del tiempo conserva métodos y objetivos universales que, encubiertos con notaciones y modas del tiempo, no se nos revelan de inmediato, pero existen, de tal manera que permiten deleitarnos con producciones matemáticas antiguas, desde el horizonte matemático actual.

Aclaremos: esas notaciones y modas del tiempo son el vestido de la matemática, no su cuerpo, pero a final de cuentas son una forma de existir, así que debemos

buscar ambas expresiones, es decir, lo universal en lo particular y lo particular en lo universal.

Será la vastedad del momento histórico, nuestro gusto particular o capacidad, los que nos permitirán observar ambas expresiones o solo una de ellas, pero es primordial no perder la perspectiva didáctica de lo universal y lo particular, ya que a fin de cuentas entender esta contradicción nos permitirá entender este diálogo matemático. En [7] es donde se readapta la notación para lograr mayor fluidez de los conceptos, con intención de hallar unidad y aprendizaje en ciertos temas y lograr superar la desmedida especialización que de origen no existía.

La belleza, casi artística, de las expresiones matemáticas pasadas reside en las formas particulares de expresarse, así como los deseos y esperanzas que motivaron la búsqueda de esa matemática en un contexto histórico específico.

Como ejemplo que lo específico del cuerpo matemático puede encauzar por otros caminos este diálogo de matemáticas, esperando que esto permita ampliar las ideas, planteemos lo siguiente: El arte de la matemática, o La matemática como arte. La diferencia entre estos dos títulos es una diferencia entre potencia y acto, entre actividad y producto, uno invisible ya que es la manifestación de la interioridad del ejecutante y otro visible ya que se expresa en el objeto producto.

Existen analogías entre la práctica matemática y el quehacer artístico. Podemos mencionar la gran creatividad que se debe desarrollar en ambas actividades, al entender creatividad como la práctica y actitud humana que permiten realizar nuevas obras. Es importante resaltar que la búsqueda de nuevas obras, o bien nuevas realidades, no son a capricho del ejecutante, sino regidas por un incremento del mundo humano, a final de cuentas, regidas por una búsqueda y creación de nuevas realidades humanas; pues también en este rubro, la matemática aporta nuevas realidades que amplían el mundo humano. Tal parecería que la matemática tiene mucho de arte, solo resta buscar una posible expresión de la belleza en las obras de este quehacer.

Esta parte es más polémica, ya que encontrar belleza en una demostración o un sistema de definiciones y axiomas es muy discutible, y podría decirse que es resultado de una gran especialización pues requiere familiaridad con al menos una teoría matemática, lo cual necesita tiempo, dedicación y esfuerzo, más que la formación en la apreciación de la belleza. Veamos algunas expresiones de belleza en otras prácticas artísticas.

En la literatura, el instrumento principal es el lenguaje, fundamentalmente el escrito, y es en la literatura en donde encontramos la presencia de un cotidiano protagonista, que para alcanzar una expresión artística debe recorrer un gran trecho, así no todas las obras literarias pueden ser apreciadas solo sabiendo leer; Lezama Lima, Cortázar o Borges son algunos ejemplos. En la pintura, el espacio y el color

son connotaciones cotidianas, su armonía y combinación artística no son logros fáciles, sólo ver no basta, así la apreciación de la obra pictórica es aun más difícil y complicada; ver la obra de Picasso o Toledo nos convence de esto. Ahora si vamos al teatro, cine, danza o escultura, en todas ellas encontramos el mismo problema: el consumo de la obra artística precisa una educación. Esta educación amplía nuestros sentidos, el oído, la vista, el tacto, o amplía conocimientos básicos, como la lectura, o movimientos básicos de nuestro cuerpo, ya que sólo éstos no son suficientes para realizar el acto de consumir arte. Así que en otras prácticas artísticas se produce el mismo problema que en la matemática: apreciar, consumir o gozar el objeto producto, exige un adiestramiento profundo.

Ahora bien, esto aclara que el acceso a la belleza no es fácil, sino más bien duro quehacer. Afirmamos que el acceso a la belleza es un acto de ampliarse como ser humano a través de los otros, es decir de sus productos. Pero el placer estético, es decir el estado producido por este acceso a la belleza, ¿es también parte de la degustación matemática? Afirmamos que parte de la gran seducción matemática es que nos amplía como seres humanos, al crear un estado de inmersión en la universalidad humana y, por tanto, ya que no conocemos otra, del cosmos. Es importante aclarar que así como el uso del lenguaje no deviene en literatura, el pragmatismo publicitario no crea arte plástico, así no todo quehacer matemático nos acerca a la apetecida universalidad, así que para que la matemática sea creada en un acto artístico, y sea a su vez consumida como obra de arte debemos tener una intención y una voluntad. Aclaremos esto: es importante que el matemático se inscriba en un proyecto humanístico para que su práctica se convierta en quehacer artístico y su obra pueda ser arte; y no siempre el matemático acepta este plan. Es importante, que para tener esta perspectiva, el matemático debe siempre pensar en el otro, es decir en la comunicación de su pensamiento; cuando el matemático pierde esta perspectiva su obra tal vez sea una obra matemática pero ya no será arte, y habrá perdido la posibilidad de agrandar el mundo humano, al menos de manera consciente. Es en la transmisión de nuestros productos en donde el matemático tendrá la opción de decirlo para el otro o para nadie. Pero es también en la problemática y en la esperanza de creación en donde el matemático podrá fundar este diálogo entre forma y contenido y, a final de cuentas, en la síntesis entre potencia y acto. El hallazgo de manifestaciones matemáticas con la capacidad de ésta síntesis es encontrar síntesis de la cultura humana y de gran aprendizaje para los matemáticos actuales.

Creemos que esta discusión aclara limitaciones y posibilidades de hallar la historia de la matemática. En principio es necesario construir un diálogo entre dos matemáticas, la del historiador y la del periodo de la matemática que estudia, y este diálogo se logra al buscar las expresiones artísticas o al menos las expresiones

universales en tal matemática. Hemos puntualizado que esto es posible y que siempre debe buscarse ya que en la naturaleza de la matemática existe tal posibilidad.

6 La historia de la ciencia

Los científicos trabajan con conceptos (número, función, estructura atómica, especie, etc.) y es a través de ellos que aprenden a comprender los fenómenos complejos, a darse cuenta de sus relaciones mutuas y a presentarlos en forma comunicable. Pero, insistimos, cuando el científico presenta estos esquemas conceptuales (reportes o textos) se pierden tanto el origen como el proceso de creación de los conceptos.

Hay momentos de la ciencia permeados por la magia y la subjetividad. Es un duro problema allanar esta cáscara ideológica para encontrar la ciencia. Muchos conocimientos que se aceptan como ciencia en una época, en otra pueden ser completamente ajenos a ella. Por ejemplo, la Astrología, como estudio de los cuerpos celestes, tuvo su origen en la predicción del futuro. Detrás de esta intención se acumularon conocimientos astronómicos que llevaron al nacimiento de la Astronomía, reconocida ésta, hasta la actualidad, como ciencia, a diferencia de aquélla, que aún se practica, pero al margen de la ciencia. Así que en la ciencia ese ropaje transitorio puede ser muy grueso y además los conocimientos científicos de una época pueden ser expulsados del cuerpo científico de otra época.

Estos son solo algunos de los obstáculos a los que se enfrentará un historiador de la ciencia al intentar entenderla no solamente como producto del desarrollo humano o cómo se genera el pensamiento científico, sino también cómo se relaciona éste con otras clases de pensamiento (la literatura, el arte) que al final van conformando lo que es la cultura humana.

En la matemática de una época pasada, a pesar del ropaje, hay una parte de ella que se queda en la matemática presente, a través de un proceso de *contextualización*, que nos permite recuperar su parte universal en el contexto o estructura formal de otra época. Este proceso es más inmediato que en otras ciencias, ya que de principio la matemática tiene como prioridad *la universalidad*.

7 El discurso de la historia de la matemática

El pasado toma cuerpo en un discurso que en sus imágenes y palabras usa un lenguaje actual. Ya vimos que esta inevitable práctica violenta el pasado, pero también permite entablar el diálogo con las presencias universales de la matemática. La conciencia de estas presencias universales no siempre existe, las más de las veces estamos ante intuiciones o casuales hallazgos. Pero no siempre la riqueza de

un discurso histórico es la explicitación de la parte del cuerpo matemático al que pertenece cierto pasado matemático, sino más bien, la riqueza está en las expresiones humanas que requirieron los matemáticos para crear tal matemática. Esta expresión discursiva es fundamental para acercarnos, no a la estructura formal de la matemática, sino más bien al perfil universal del matemático y regodearnos con las expresiones particulares de los matemáticos y la forma que influyeron para crear tal matemática. Este aspecto es particularmente atractivo a los no matemáticos, y puede formar parte de la divulgación, entendida en este caso, como las prácticas que producen simpatía por la matemática.

La retrospectiva histórica, que expresa las formas particulares en que se da la matemática antigua y, en la medida de lo posible, que esclarece las partes universales que incorpora al cuerpo matemático, también puede ser una fuente de estrategias para la enseñanza. Si la intención es transmitir que el aprendizaje no solo es la acumulación de conocimientos sino un conjunto de actitudes críticas ante ellos, la historia de la matemática nos puede ser de mucha utilidad. Al analizar en qué condiciones históricas y cómo surge un determinado concepto permite a los maestros entender por qué ese concepto es difícil para el alumno (por ejemplo los conceptos de función o de límite) y puede ayudar a plantear un enfoque y desarrollo adecuados. También, si presentamos viejos problemas en su redacción original, los estudiantes pueden comparar sus estrategias de solución con las originales y puede ayudar a comprender la economía y efectividad de los procesos de solución actuales. Si un estudiante observa la evolución histórica de un concepto, esto puede ayudarle a darse cuenta que la matemática no es estática ni definitiva y que la construcción histórica de los conceptos no solo es producto de mentes privilegiadas. Esta parte del discurso histórico, se centra en la odisea del concepto, y ejemplifica la búsqueda de los caminos esenciales, fundamental sustento de la educación.

Es muy importante tener en cuenta los riesgos que se corren al presentar la historia de la matemática en el salón de clases de un curso que no es de historia. Uno de los más frecuentes es que dejemos al estudiante la impresión de que saber muchos datos curiosos que no son esenciales, son importantes. Otro de ellos es el de atribuir a un matemático un conocimiento conciente que nunca tuvo. Por ejemplo, hay una gran diferencia entre reconocer a Arquímedes como precursor del cálculo, y cuya influencia en los fundadores de él es innegable, a considerarlo como un practicante de esta rama de la matemática. Es fundamental que una vez que se introduzca en una clase una teoría matemática y un matemático aparejado a esa teoría, se analice la situación política y el contexto social en que vivió. De esta manera es posible descubrir que momentos históricos y teorías matemáticas están relacionadas.

8 Sumario

Toda historia es construcción y recuperación del pasado, actividad que se realiza como una imperiosa necesidad humana de tener un pasado. El hombre es síntesis de una sociedad, de un colectivo humano, y la cultura es la región del pensamiento humano que trata, en una sociedad temporal-concreta, de construir su visión de lo humano, lo universal, venciendo las particularidades de su tiempo.

Las fuentes históricas y las obras históricas son los personajes que forman el pasado actual, sobre las cuales el historiador iniciará su labor en busca de un pasado potencial. La matemática por su parte, a lo largo del tiempo, conserva métodos y objetivos universales que permiten deleitarnos con producciones matemáticas antiguas, desde el horizonte matemático actual. La retrospectiva histórica, que expresa las formas particulares en que se da la matemática antigua, que esclarece las partes universales que incorpora al cuerpo matemático, también puede ser una fuente de estrategias para la enseñanza. Como quiera que sea, hacer historia de la matemática es crear cultura, es decir, aproximaciones a la comprensión de lo humano.

Agradecimientos

Si a alguien debemos agradecer es, en primer lugar, a los autores ajenos a este trabajo, que citamos en la bibliografía, y al árbitro por sus comentarios y sugerencias. También a todas aquellas personas que han motivado, influido y aupado estas reflexiones.

Bibliografía

- [1] Ken Alder, *La medida de todas las cosas*, ed. Aguilar, Altea, Taurus, Alfaguara, España, 2003.
- [2] Juan Angoa, *Hacia una historia reciente de la matemática en Puebla* en Norma Angelica Rodríguez Guzmán, Carmen Sosa Garza (Coordinadoras), *Apuntes para la Historia de las Matemáticas en México*, Universidad Autónoma de Queretaro, Editorial Universitaria, Colección Academia, Serie Nodos, 2013, pp 151-167.
- [3] Roger Caratini, *Los matemáticos de Babilonia*, Ediciones Bellaterra S.L., Barcelona, 2004.
- [4] Werner Jaeger, *Paideia, los ideales de la cultura griega*, FCE, México, 1962.

- [5] Denis Guedj, *El teorema del loro*, Anagrama, 2000, Barcelona.
- [6] Reuben Hersh, Vera John-Steiner, *Matemáticas. Una historia de amor y odio*, colección Drakontos, ed. Crítica, Barcelona, 2012.
- [7] John Stillwell, *Mathematics and Its History*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [8] Paco Ignacio Taibo II, *La Lejanía del Tesoro*, Planeta-Joaquín Mortiz, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
jangoa@fcfm.buap.mx
acontri@fcfm.buap.mx
mibarra@fcfm.buap.mx

Geometría

Capítulo 5

Algunas pinceladas sobre el triángulo de van Schooten

Aarón Aparicio Hernández

Universidad Autónoma de la Ciudad de México;
Facultad de Ciencias, UNAM.

Resumen

En el presente artículo presentamos algunas demostraciones sobre el triángulo de van Schooten, utilizando algunos conceptos básicos de geometría euclidea y apoyados en otros resultados tales como el teorema de Ptolomeo y el teorema de Pompeiu.

A Rosalba y Aarón Alberto.



Frans van Schooten fue hijo de Frans van Schooten Padre y Jannetgen Haermansdr Van Hogenvorst. Nació el 15 de mayo 1615 en Leiden, Holanda. Fue instruido por su padre; de hecho, había estudiado matemáticas, francés y latín antes de que se matriculara en la Universidad de Leiden el 15 de mayo de 1631. Tuvo una buena formación matemática al haber estudiado a Michael Stifel en una edición de Christoff Rudolff Coss y leyó las dos ediciones, holandesa y francesa, de las obras de Simon Stevin. También leyó a Ludolph van Ceulen en *Arithmetische en geometrische Fondamenten*, Albert Girard en *invention nouvelle en l'algèbre*, así como una edición de Stevin en *Arithmétique* y a Bonaventura Cavalieri en un trabajo de los *indivisibles*. Frans van Schooten también estaba familiarizado con los textos clásicos griegos al haber leído las traducciones de Federico Commandino de las obras de Arquímedes, Apolonio y Pappus. En la Universidad de Leiden estudió matemáticas con el profesor Jacob Gool. Fue a través de Gool que van Schooten fue introducido por primera vez a Descartes en 1632. Mientras era estudiante, su medio hermano Pieter van Schooten nació en Leiden el 22 de febrero 1634. Pieter también

se convirtió en un matemático y arquitecto, y más tarde enseñó en la Escuela de Ingeniería en Leiden y murió en 1679; van Schooten obtuvo su Magister Artium Liberalium en la Universidad de Leiden en 1635.

Después de graduarse, comenzó a enseñar en la Escuela de Ingeniería. Dos años más tarde, cuando Descartes estaba de visita en Leiden, se reunió de nuevo con van Schooten. En esta etapa *Discours de la méthode*, con su apéndice de *La Géométrie*, no habían sido publicados y Descartes pidió a van Schooten ayuda para hacer las ilustraciones. También hizo un retrato de Descartes, uno de los pocos que existen. Era un artista con talento y no debería ser una sorpresa, pues tenía el talento artístico de su tío Joris van Schooten. Fuertemente influenciada por Descartes, van Schooten escribió *Recueil de calcul pour l'intelligence de la Geometrie de Monsieur Descartes*, una obra corta en álgebra simbólica, alrededor de 1639. Este contacto con Descartes resultó importante para van Schooten, pues a través de él conocerá a Marin Mersenne en un período prolongado de viajes. Alrededor de 1641 se dispuso, viajando primero a París, donde conoce a Mersenne y aprende acerca de los avances matemáticos realizados por Viète y Fermat, y continúa sus estudios en las obras de Descartes. Los resultados de Fermat figuran en los tratados que fueron circulando en forma de manuscrito y van Schooten aprovechó la oportunidad para hacer copias de ellos. También obtuvo manuscritos de los trabajos de Viète y después los publica en Leiden como *Viète Opera mathematica* en 1646. Dado que había hecho copias de los manuscritos de Fermat, es razonable en ese momento para preguntarse por qué no publicó éstos a su regreso. La respuesta es que quería publicarlos pero los editores no estaban interesados. Los editores de esa época, como ahora, querían saber que el material que iban a publicar era de alta calidad y Descartes había hecho saber que él consideraba las contribuciones de Fermat de poco valor. Le comentaron que no era falta de criterio por parte de Descartes, sino que se debía a que Descartes estaba tratando de empujar la tesis de que sólo mediante el uso de su «método» podría hacer descubrimientos tales como la geometría cartesiana, lo que restó importancia a los trabajos de Fermat.

Continuando con sus viajes, van Schooten abandonó París y se fue a Londres, donde permaneció hasta 1643 para discutir las matemáticas con los matemáticos de ahí, finalmente visitó Irlanda antes de regresar a Leiden. Continuó por correspondencia con los matemáticos que él había conocido en sus viajes después de su regreso. Por desgracia, esta correspondencia se ha perdido. En 1643 van Schooten se convirtió en ayudante de su padre y cuando su padre murió, dos años más tarde, ocupó su lugar. En esta etapa van Schooten no estaba casado, pero vive con una ama de llaves Wijnants Margaritgen de Meppen. La casa estaba en Herensteeg, una calle con vistas a la Pieterskerk (iglesia de San Pedro), que contenía la tumba de van Ceulen con una lápida en la que se grabaron 35 decimales de π . En 1649 van

Schooten y su ama de llaves tenían una voluntad en común y se casaron formalmente el 19 de julio 1652. No hay constancia de que tuvieron hijos. Van Schooten fue una de las principales personas para promover la difusión de la geometría cartesiana y esto es una contribución más importante que los resultados de sus propias investigaciones. Se imprimió la primera versión latina de *La géométrie* de Descartes en 1649. Se afirma que Descartes fue a Estocolmo en 1649 y se opuso a este proyecto de van Schooten. Sin embargo Dirk Struik escribe en [3]:

Descartes vivió en la República Holandesa (1629-1649) en el período de su mayor productividad. Viviendo una vida de soltero retirado, realizó sus ideas conocidas a través de libros muy avanzados y en correspondencia con sus compañeros. Su único libro de matemáticas, la «Géométrie» de 1637, era incompleta y en muchas partes poco clara. El triunfo de las ideas cartesianas en las matemáticas, la creación de una escuela de pensamiento cartesiano, tanto en Holanda y en cierta medida también en el extranjero, es en gran medida debido a la Leiden del profesor Frans van Schooten.

Van Schooten estableció una escuela de investigación vigorosa en Leiden, que incluía a sus alumnos privados Christiaan Huygens, Henrik van Heuraet y Johannes Hudde, esta escuela es una de las principales razones para el rápido desarrollo de la geometría cartesiana a mediados del siglo XVII. El 29 de mayo de 1660 en Leiden se apagó una luz llamada Frans van Schooten.

1 El triángulo de van Schooten.

La longitud del segmento que pasa por los puntos A y B se denotará con \overline{AB} , el segmento \overline{AB} es paralelo al segmento \overline{CD} con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, el triángulo que pasa por los puntos A, B, C con $\triangle ABC$; el cuadrilátero que pasa por los puntos A, B, C, D con $\square ABCD$, al ángulo formado por los puntos A, B, C con $\angle ABC$, y al área del $\triangle ABC$ con $\blacktriangle(ABC)$. Los triángulos ABC y DEF son congruentes con $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, los triángulos ABC y DEF son semejantes con $\triangle ABC \approx \triangle DEF$.

Teorema 1.1 (van Schooten).

Si el triángulo ABC es equilátero y cada vértice es unido a un punto P en el arco \widehat{BC} (ver figura 1), entonces $\overline{AP} = \overline{CP} + \overline{PB}$.

Primera demostración con congruencia.

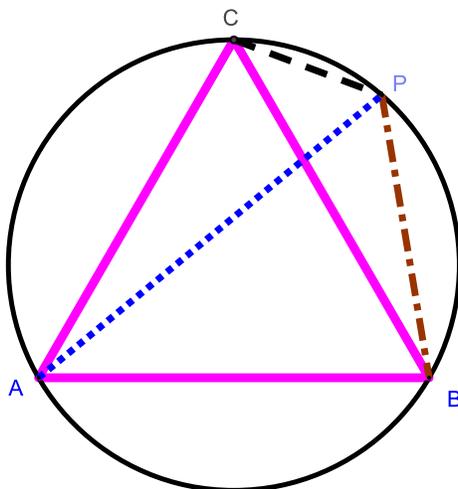


Figura 1: Triángulo de van Schooten

Demostración:

Prolongamos \overline{PB} hasta D con $\angle PAD = 60^\circ$ (ver figura 2), así el triángulo ADP es equilátero y por lo tanto $\overline{AD} = a = \overline{AP}$; además $\angle ADP = \angle APC = 60^\circ$ y $\angle PCA = \angle DBA$, luego $\angle CAP = \angle BAD$. Por consiguiente $\triangle ADB \cong \triangle APC$, así $\overline{CP} = \overline{BD} = x = c$, por lo tanto $a = b + c$.

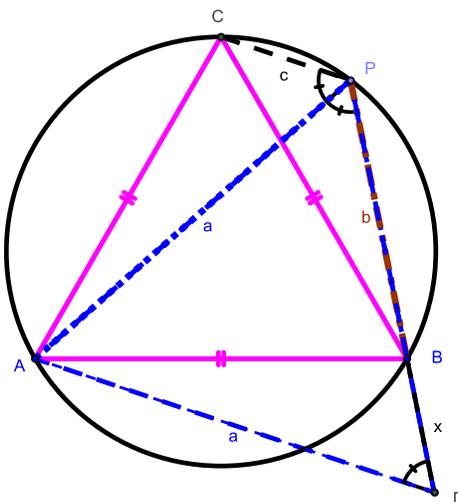


Figura 2

■

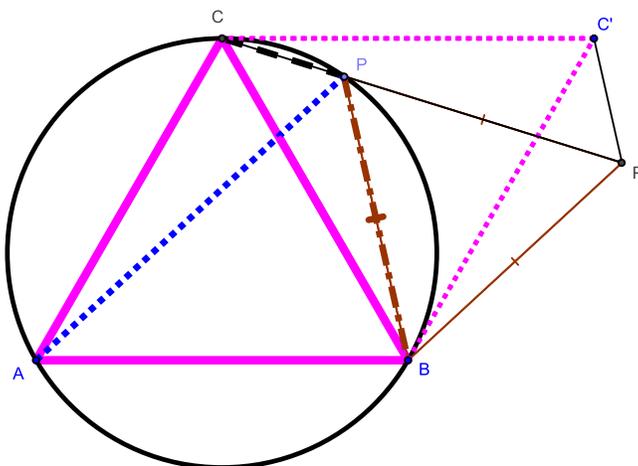


Figura 3

Segunda demostración usando el punto de Fermat.

Demostración:

Rotamos el triángulo ABC y los segmentos \overline{BC} y \overline{BP} un ángulo de 60° a favor de las manecillas del reloj alrededor de B (ver figura 3). sean C' y P' las imágenes de C y P en la rotación; así $\overline{BP} = \overline{BP'}$ y $\angle PBP' = 60^\circ$. Por lo tanto $\triangle BPP'$ es equilátero; pero $\angle CPB = 120^\circ$ y así los puntos C, P, P' son colineales. Por consiguiente, $\overline{AP} = \overline{CP'} = \overline{CP} + \overline{PP'} = \overline{CP} + \overline{PB}$, luego $\overline{AP} = \overline{CP} + \overline{PB}$. El punto P en el $\triangle BCC'$ de la figura 3 se le llama punto de Fermat. ■

Definición 1.1.

El Punto de Fermat es aquel cuya suma de las distancias a los vértices de un triángulo dado, cuyos ángulos interiores son menores a 120° , es la mínima posible.

Tercera demostración usando ley de los cosenos.

Demostración:

Sean $\overline{CP} = c$, $\overline{PB} = b$ y $\overline{AP} = a$ (ver figura 4(a)). Como el triángulo ABC es equilátero, entonces $\angle ACB = \angle CBA = \angle BAC = 60^\circ$; por lo tanto, $\angle CPA = \angle APB = 60^\circ$ pues abarcan el mismo arco; además $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Ahora apliquemos

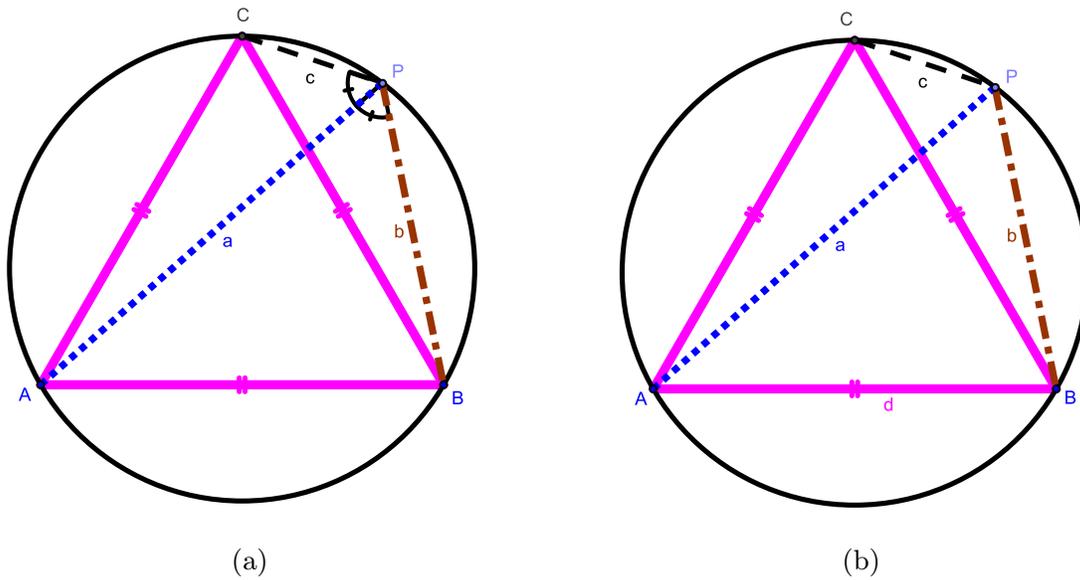


Figura 4

la ley de los cosenos al triángulo CPA ,

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ \\ &= a^2 + c^2 - 2ac \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= a^2 + c^2 - ac.\end{aligned}$$

Análogamente para el triángulo APB , $\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 - ab$ y como $\overline{AB} = \overline{AC}$, entonces $a^2 + b^2 - ab = a^2 + c^2 - ac$, luego $b^2 - c^2 = ab - ac$; así $(b+c)(b-c) = a(b-c)$ implica $a = b + c$ cuando $b \neq c$.

El caso $b = c$ implica que \overline{AP} es un diámetro, así los triángulos CPA y APB son rectángulos, por lo tanto $a = 2b = 2c$. ■

Cuarta demostración usando el teorema de Ptolomeo.

Demostración:

Sean $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CB} = d$ (ver figura 4(b)), como el cuadrilátero $ABPC$ es cíclico, entonces $ad = bd + cd = (b+c)d$, por lo tanto $a = b + c$. ■

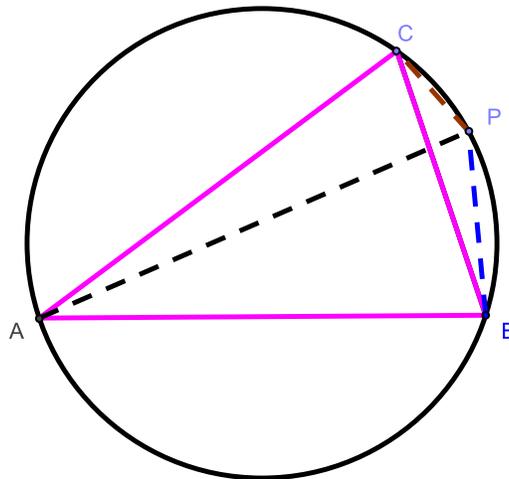


Figura 5

Teorema 1.2.

Si el $\triangle ABC$ es isósceles, con $\overline{AB} = \overline{AC}$, y P pertenece al arco \widehat{BC} del circuncírculo (ver figura 5), entonces $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP} + \overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Demostración:

Aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $ABPC$ tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{AP} \overline{BC} &= \overline{CP} \overline{AB} + \overline{PB} \overline{AC} \\ &= \overline{CP} \overline{AC} + \overline{PB} \overline{AC} \\ &= \overline{AC}(\overline{CP} + \overline{PB}), \end{aligned}$$

pues $\overline{AB} = \overline{AC}$. Por lo tanto $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP} + \overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. ■

Quinta demostración aplicando el teorema anterior.

Demostración:

Como $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP} + \overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ y $\overline{AC} = \overline{BC}$, entonces $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP} + \overline{PB}} = 1$. Por lo tanto $\overline{AP} = \overline{CP} + \overline{PB}$. ■

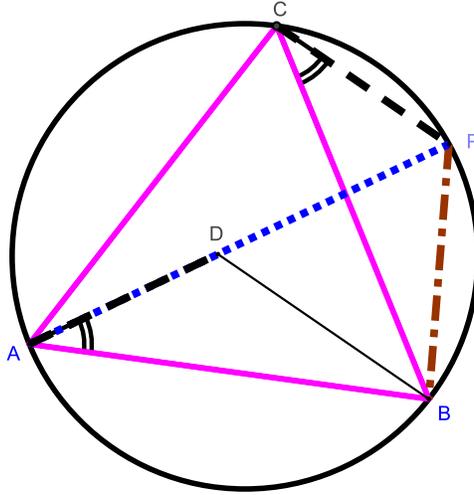


Figura 6

Sexta demostración con congruencia.

Demostración:

Sea D un punto en \overline{AP} tal que $\overline{AD} = \overline{CP}$ (ver figura 6). Demostremos que $\overline{PD} = \overline{PB}$. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{CP}$ y $\angle PAB = \angle BCP$. Por lo tanto $\triangle ABD \cong \triangle CBP$ y por consiguiente $\overline{BP} = \overline{BD}$ y $\angle ABD = \angle CBP$. Así, $\angle ABC = \angle DBP = 60^\circ$ y con ello $\overline{PD} = \overline{PB}$, pues $\triangle PBD$ es equilátero. ■

Corolario 1.1.

Si el triángulo ABC es equilátero y cada vértice es unido a un punto P en el circuncírculo (ver figura 7), entonces $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ es constante.

Demostración:

Sean $\overline{PA} = x$, $\overline{PB} = y$, $\overline{PC} = z$ y apliquemos la ley de los cosenos al $\triangle BCP$ (ver figura 7), por lo tanto

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= y^2 + z^2 - 2yz \cos(120^\circ) \\ &= y^2 + z^2 - 2yz \left(\frac{-1}{2}\right) \\ &= y^2 + z^2 + yz \end{aligned}$$

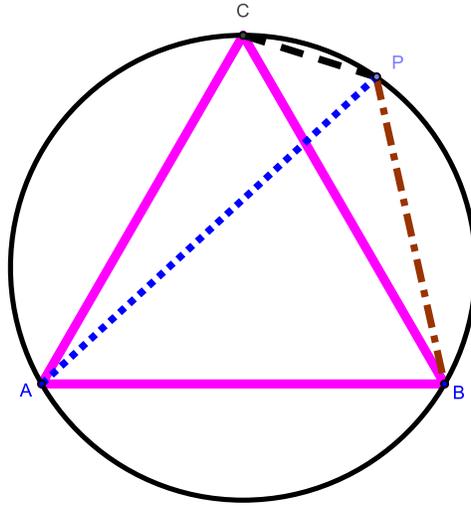


Figura 7

luego $2\overline{BC}^2 = 2(y^2 + z^2 + yz)$. Por otra parte, por el teorema 1.1 $x = y + z$, y por consiguiente

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= (y + z)^2 + y^2 + z^2 \\ &= y^2 + 2yz + z^2 + y^2 + z^2 \\ &= 2(y^2 + z^2 + yz) \\ &= 2\overline{BC}^2 \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ es constante. ■

Corolario 1.2.

Si el triángulo ABC es equilátero y $\overline{AP} \cap \overline{BC} = D$ (ver figura 8(a)), entonces

$$\frac{1}{\overline{PD}} = \frac{1}{\overline{PB}} + \frac{1}{\overline{PC}}$$

Demostración:

En la figura 8(b) $\angle PAC = \angle PBC$ y $\angle CPD = \angle DPB$ pues abarcan el mismo arco; luego, $\angle ACP = \angle BDP$, por consiguiente $\triangle APC \approx \triangle BPD$. Por lo tanto,

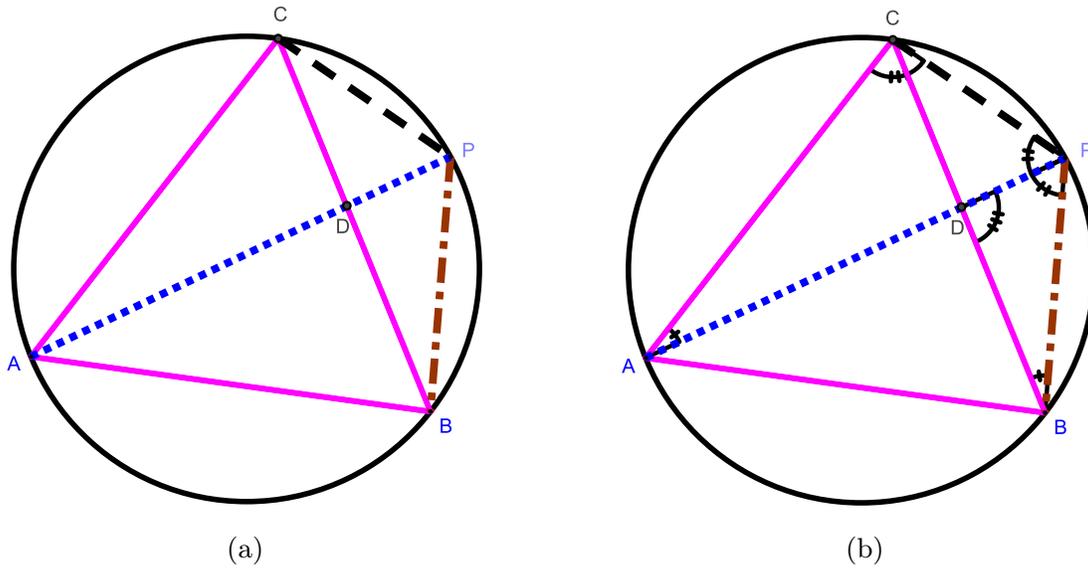


Figura 8

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PD}}; \text{ luego } \overline{AP} \overline{PD} = \overline{CP} \overline{PB}.$$

Además $\overline{AP} = \overline{CP} + \overline{PB}$ por el teorema de van Schooten,

$$\begin{aligned} \overline{CP} \overline{PB} &= \overline{AP} \overline{PD} \\ &= (\overline{CP} + \overline{PB}) \overline{PD} \\ &= \overline{CP} \overline{PD} + \overline{PB} \overline{PD}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\overline{CP} \overline{PB}}{\overline{CP} \overline{PB} \overline{PD}} = \frac{\overline{CP} \overline{PD} + \overline{PB} \overline{PD}}{\overline{CP} \overline{PB} \overline{PD}}$$

y, finalmente,

$$\frac{1}{\overline{PD}} = \frac{1}{\overline{PB}} + \frac{1}{\overline{PC}}$$

■

2 El triángulo de Pompeiu.

En la sección anterior analizamos el caso en que el punto P pertenece al circuncírculo del triángulo ABC , en esta sección analizamos el caso general, esto es, cuando P es cualquier punto del plano. El siguiente teorema se le debe al matemático de Rumania Dimitrie Pompeiu (1873-1954).

Teorema 2.1. [Pompeiu]

Si el triángulo ABC es equilátero y cada vértice es unido a un punto P en el plano (ver figura 9(a)), entonces existe un triángulo cuyos lados son \overline{AP} , \overline{BP} y \overline{CP} .

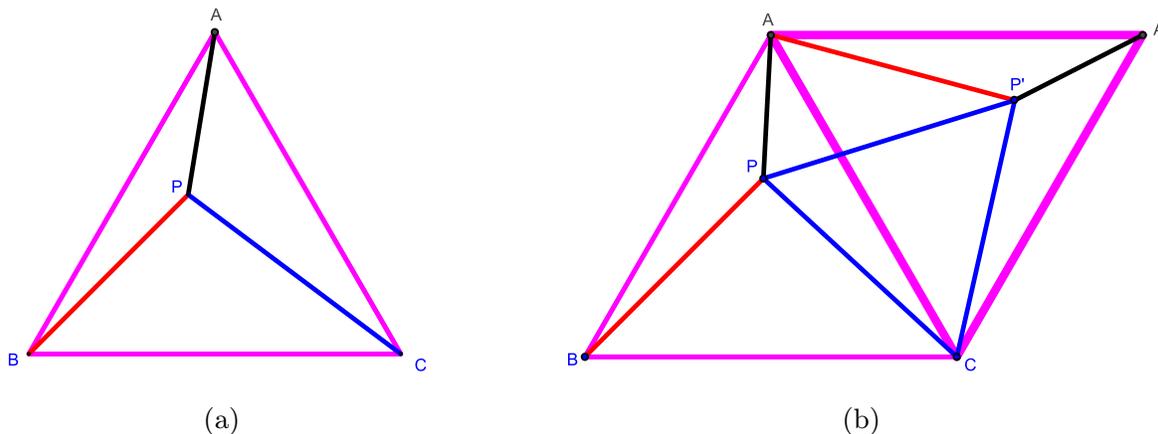


Figura 9

Demostración:

Trazamos un punto P' tal que el $\triangle CPP'$ es equilátero (ver figura 9(b)). Ahora los triángulos BPC y $AP'C$ son congruentes, pues:

$$\overline{BC} = \overline{AC}, \overline{PC} = \overline{P'C}, \angle BCP = 60^\circ - \angle ACP = \angle ACP'$$

Por lo tanto $\overline{BP} = \overline{AP'}$ y por consiguiente el $\triangle APP'$ es el triángulo de Pompeiu. ■

Observación 2.1.

El triángulo $AP'C$ se obtiene a través de una rotación de 60° del triángulo BPC alrededor del punto C . Por otra parte el matemático de Rumania Sabin Tabirca, analizó los ángulos y el área del triángulo de Pompeiu, obteniendo el siguiente teorema.

Teorema 2.2. [Tabirca]

Si el triángulo ABC es equilátero, O es el circuncentro y P es un punto en el interior del $\triangle ABC$, (ver figura 10(a)), entonces:

- (i) Los ángulos del triángulo de Pompeiu son $\angle APC - 60^\circ$, $\angle BPC - 60^\circ$, $\angle APB - 60^\circ$.

(ii) El área del triángulo de Pompeiu es $\frac{1}{3}(\triangle ABC) - \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{OP}^2$.

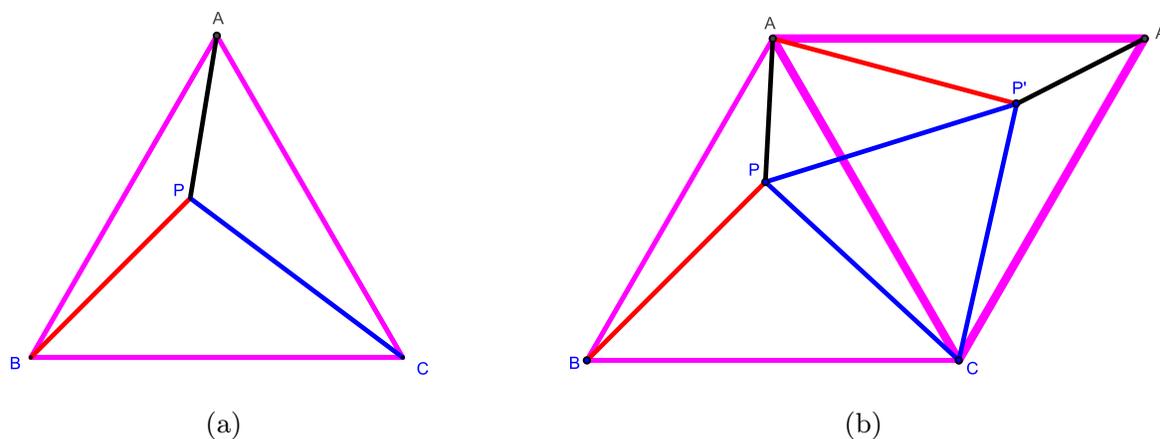


Figura 10

Demostración:

(i) Consideremos el triángulo de Pompeiu $T_P = \triangle APP'$:

$$\angle APP' = \angle APC - \angle P'PC = \angle APC - 60^\circ$$

$$\angle AP'P = \angle AP'C - \angle PP'C = \angle AP'C - 60^\circ = \angle BPC - 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle P'AP &= 180^\circ - (\angle APP' + \angle AP'P) \\ &= 180^\circ - (\angle APC - 60^\circ + \angle BPC - 60^\circ) \\ &= 300^\circ - (\angle APC + \angle BPC) \\ &= 300^\circ - (360^\circ - \angle APB) \\ &= \angle APB - 60^\circ \end{aligned}$$

(ii) Ahora calculemos el área del triángulo de Pompeiu T_P .

Por lo tanto $\triangle(T_P) = \frac{1}{2}$ base (altura). Como se observa en la figura 11(a):

$$\text{sen } \angle APP' = \frac{h}{\overline{AP}}$$

por lo tanto

$$h = \overline{AP} \text{ sen } \angle APP'$$

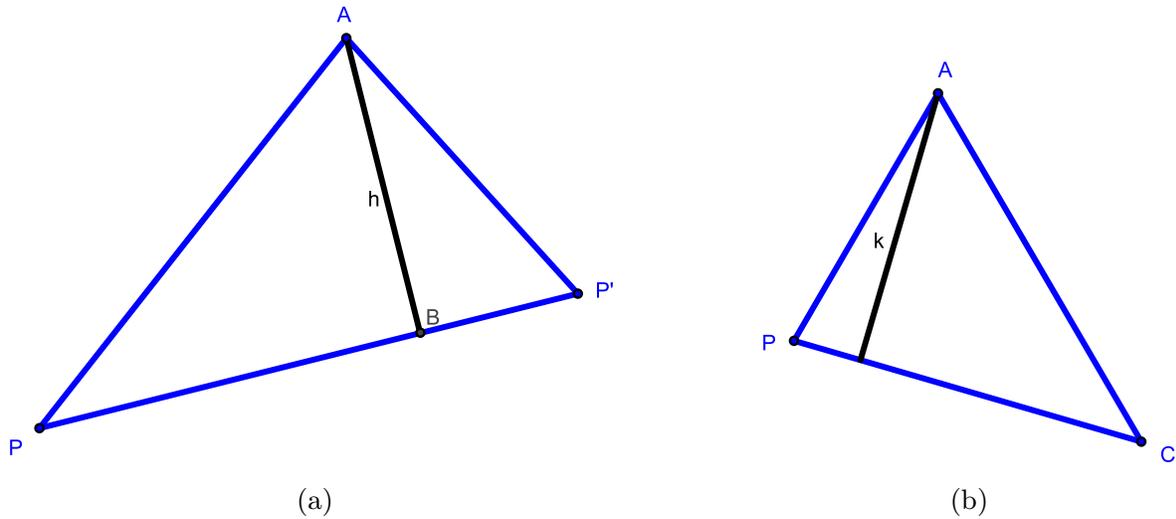


Figura 11

y por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 \blacktriangle(T_p) &= \frac{1}{2} \overline{PP'} \overline{AP} \operatorname{sen} \angle APP' \\
 &= \frac{1}{2} \overline{AP} \overline{CP} \operatorname{sen} \angle APP' \quad (\text{ya que } \overline{PP'} = \overline{CP}) \\
 &= \frac{1}{2} \overline{CP} \overline{AP} \operatorname{sen}(\angle APC - 60^\circ) \quad (\text{pues } \angle APP' = \angle APC - 60^\circ) \\
 &= \frac{1}{2} \overline{CP} \overline{AP} (\operatorname{sen} \alpha \cos 60^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ \cos \alpha) \quad (\text{porque } \alpha = \angle APC) \\
 &= \frac{1}{2} \overline{CP} \overline{AP} \left(\operatorname{sen} \alpha \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \overline{CP} \overline{AP} \operatorname{sen} \alpha \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{CP} \overline{AP} \cos \alpha \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \overline{CP} \overline{AP} \operatorname{sen} \angle APC \right) - \frac{\sqrt{3}}{8} (2 \overline{CP} \overline{AP} \cos \angle APC)
 \end{aligned}$$

Por otra parte en el triángulo APC , como se observa en la figura 11(b):

$$\operatorname{sen} \angle APC = \frac{k}{\overline{AP}},$$

por lo tanto,

$$k = \overline{AP} \operatorname{sen} \angle APC$$

y por consiguiente

$$\blacktriangle(APC) = \frac{1}{2} \overline{CP} \overline{AP} \operatorname{sen} \angle APC.$$

Además, por la ley de los cosenos $\overline{AC}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \overline{CP} \overline{AP} \cos \angle APC$, luego

$$2 \overline{CP} \overline{AP} \cos \angle APC = \overline{CP}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{AC}^2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \blacktriangle(T_p) &= \frac{1}{2} \blacktriangle(APC) - \frac{\sqrt{3}}{8} (\overline{CP}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{AC}^2) \\ &= \frac{1}{2} \blacktriangle(APC) - \frac{\sqrt{3}}{8} (\overline{CP}^2 + \overline{AP}^2 - a^2), \end{aligned}$$

pues $a = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$. Análogamente

$$\begin{aligned} \blacktriangle(T_p) &= \frac{1}{2} \blacktriangle(BPC) - \frac{\sqrt{3}}{8} (\overline{CP}^2 + \overline{BP}^2 - a^2) \\ \blacktriangle(T_p) &= \frac{1}{2} \blacktriangle(APB) - \frac{\sqrt{3}}{8} (\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 - a^2) \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} 3 \blacktriangle(T_p) &= \frac{1}{2} [\blacktriangle(APC) + \blacktriangle(BPC) + \blacktriangle(APB)] \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{8} [2(\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2) - 3a^2] \\ &= \frac{1}{2} \blacktriangle(ABC) - \frac{\sqrt{3}}{8} [2(\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2) - 3a^2] \end{aligned}$$

Por otra parte, si G es el centroide del triángulo ABC y P es cualquier punto, entonces la fórmula de Leibniz establece que:

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 &= 3 \overline{GP}^2 + \frac{1}{3} (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2) \\ &= 3 \overline{OP}^2 + \frac{1}{3} (a^2 + a^2 + a^2) \\ &= 3 \overline{OP}^2 + a^2, \end{aligned}$$

pues $\triangle ABC$ es equilátero y $G = O$ es el circuncentro. Luego

$$\begin{aligned}
 3 \blacktriangle(T_p) &= \frac{1}{2} \blacktriangle(ABC) - \frac{\sqrt{3}}{8} [2(3 \overline{OP}^2 + a^2) - 3a^2] \\
 &= \frac{1}{2} \blacktriangle(ABC) - \frac{\sqrt{3}}{8} [6 \overline{OP}^2 - a^2] \\
 &= \frac{1}{2} \blacktriangle(ABC) - \frac{3\sqrt{3}}{4} \overline{OP}^2 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \\
 &= \frac{1}{2} \blacktriangle(ABC) - \frac{3\sqrt{3}}{4} \overline{OP}^2 + \frac{1}{2} \blacktriangle(ABC) \quad (\text{pues } \triangle ABC \text{ es equilateralo)} \\
 &= \blacktriangle(ABC) - \frac{3\sqrt{3}}{4} \overline{OP}^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\blacktriangle(T_p) = \frac{1}{3} \blacktriangle(ABC) - \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{OP}^2$. ■

Teorema 2.3.

Si el $\triangle ABC$ es isósceles y P, Q y R son tres puntos en los lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ y \overline{AB} respectivamente, con $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$, $\overline{RP} \parallel \overline{AC}$ y D es la reflexión de P con respecto a \overline{QR} (ver figura 12(a)), entonces D pertenece al circuncírculo del triángulo ABC .

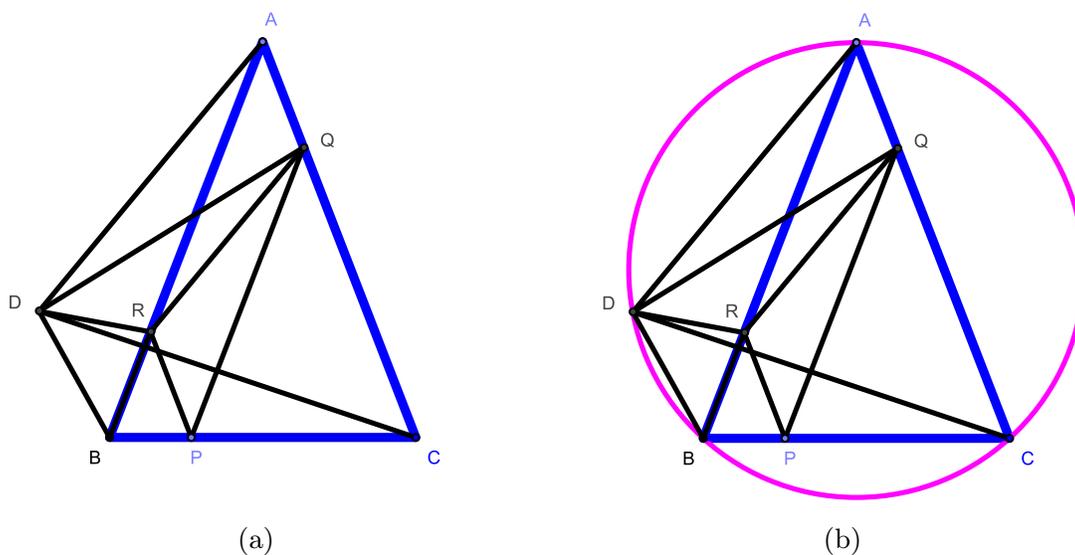


Figura 12

Demostración:

Sean ABC un triángulo isósceles, con $\overline{AB} = \overline{AC}$, P, Q y R en los lados del $\triangle ABC$, con D el reflejado de P con respecto a \overline{QR} , entonces $\angle BAC = \angle QPR = \angle RDQ$, pues $\square AQPR$ es un paralelogramo y $\triangle RDQ \cong \triangle RPQ$. Por lo tanto $\square AQRD$ es cíclico, así que $\angle AQD = \angle ARD$ y $\angle DQC = \angle DRB$. Además, $\overline{DQ} = \overline{PQ} = \overline{CQ}$ y $\overline{DR} = \overline{RP} = \overline{RB}$; por consiguiente, los triángulos $\triangle DQC$ y $\triangle DRB$ son isósceles, luego $\triangle DQC \approx \triangle DRB$; así $\angle BDR = \angle CDQ$. Por otra parte $\angle BDC = \angle BDQ - \angle CDQ = \angle BDQ - \angle BDR = \angle RDQ = \angle BAC$. Por lo tanto $\square ACBD$ es cíclico. ■

Agradecimientos

Agradezco a los árbitros sus valiosos comentarios y sugerencias para el enriquecimiento del artículo.

Bibliografía

- [1] R. Barrington and A. Liu, *Hungarian Problem Book IV*, The Mathematical Association of America (2011).
- [2] A. S. Posamentier, *Advanced Euclidean geometry*, Key College Publishing (2002).
- [3] D. J. Struik, *Review: J E Hofmann, Frans van Schooten der Jüngere*, The American Mathematical Monthly 70 (9) (1963), 1030-1031.

Universidad Autónoma de la Ciudad de México, UACM
 Fray Servando Teresa de Mier 92 y 99, Colonia Centro,
 México, D. F. C.P. 06080.
 Facultad de Ciencias, UNAM
 Circuito Exterior S/N, Cd. Universitaria,
 México, D. F. C.P. 04510.
 amersen@yahoo.com.mx

Topología

Capítulo 6

Dimensión finita en el n -ésimo hiperespacio de continuos localmente conexos

José Gerardo Ahuatzí Reyes, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM-BUAP

Resumen

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X y un número natural n , el n -ésimo hiperespacio de X , denotado por $C_n(X)$, es el conjunto formado por los subconjuntos cerrados de X dotado de la métrica de Hausdorff. En este capítulo se detallan las demostraciones de dos resultados que caracterizan la finitud de la dimensión del n -ésimo hiperespacio de un continuo localmente conexo, globalmente. El primero caracteriza las gráficas finitas como los únicos continuos localmente conexos cuyo n -ésimo hiperespacio posee dimensión finita (global). El segundo caracteriza a los puntos del n -ésimo hiperespacio de un continuo localmente conexo en los que dicho hiperespacio tiene dimensión finita como aquellos que, como subespacios del continuo subyacente, poseen una vecindad que es una gráfica finita.

1 Introducción

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X , se denota por 2^X al espacio $\{A \subset X : A \text{ es un cerrado de } X\}$ dotado de la topología de Vietoris o, equivalentemente, dotado con la métrica de Hausdorff. Un hiperespacio de X es cualquier subespacio de 2^X . Para cualquier número natural n , el **n -ésimo hiperespacio** de X es el subespacio de 2^X

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\};$$

en el caso $n = 1$ se acostumbra omitir el subíndice, es decir, $C(X)$ es el **hiperespacio de subcontinuos** de X .

En el estudio de los hiperespacios de continuos surge de manera natural la cuestión de cuándo un punto dado de un hiperespacio dado tiene dimensión finita. Un resultado clásico de Curtis y Schori [2, 3] establece que el hiperespacio de subcontinuos de un continuo localmente conexo X que no contiene arcos libres es

homeomorfo al cubo de Hilbert, es decir, al producto topológico de una cantidad numerable de copias del intervalo $I = [0, 1]$, denotado por I^ω . Así, en este caso, $C(X)$ no posee puntos con dimensión finita. Por otro lado, el hiperespacio de subcontinuos de I así como el hiperespacio de subcontinuos de la circunferencia unitaria, S^1 , son homeomorfos al disco unitario del plano, D^1 . Un ejemplo un poco más interesante, en este sentido, es el hiperespacio de subcontinuos del continuo $F_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$, en donde α_n es el segmento de recta del plano que une el origen con el punto con coordenadas cartesianas $(1/n, 1/n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dicho hiperespacio se puede expresar como la unión de una copia de I^ω con una cantidad numerable de copias de D^1 que se intersectan entre sí únicamente en un punto, el mismo para cada par de ellas, que se intersectan con la copia de I^ω únicamente en una arista y que convergen al punto de intersección (véase en [10, II] estos y algunos otros modelos geométricos de hiperespacios). Este hiperespacio posee puntos en los cuales su dimensión es finita, los que no pertenecen a la copia de I^ω , y puntos en los que su dimensión es infinita (véase en la Definición 5.1 el concepto de dimensión).

Cambiando a aspectos más generales, uno de los resultados del estudio clásico de J. L. Kelley [11] es que el hiperespacio de subcontinuos de un continuo localmente conexo tiene dimensión finita si y solo si tal continuo es una gráfica finita ([11, Teorema 5.4]). Dicho estudio provee incluso de una fórmula para calcular la dimensión de dicho hiperespacio en un punto arbitrario ([11, Teorema 5.5]). V. Martínez de la Vega [4] extendió dicha fórmula a los n -ésimos hiperespacios de gráficas finitas (véase el Teorema 7.4). Estudios posteriores han logrado generalizar estos resultados a los n -ésimos hiperespacios de continuos localmente conexos. En este trabajo se presentan algunos de estos avances. En particular, se detallan las demostraciones de dos caracterizaciones de la finitud de la dimensión de los n -ésimos hiperespacios. El primero de estos resultados caracteriza a las gráficas finitas como los únicos continuos localmente conexos cuyo n -ésimo hiperespacio tiene dimensión finita. El segundo caracteriza a los puntos del n -ésimo hiperespacio de un continuo localmente conexo en los que dicho hiperespacio tiene dimensión finita como aquellos que, como subespacios del continuo subyacente, poseen una vecindad que es una gráfica finita. El segundo de estos resultados, es decir, el Teorema 8.2, se expone originalmente en [7].

2 Resultados básicos

En este apartado vamos a presentar algunos resultados básicos de topología general relacionados, principalmente, con los conceptos de conexidad, arco conexidad y conexidad local.

Lema 2.1. *Sea X un espacio topológico. Si Y y A son subconjuntos de X , entonces se cumplen los siguientes dos enunciados.*

$$(i) \text{Fr}_Y(A \cap Y) \subset \text{Fr}_X(A).$$

$$(ii) \text{ Si } \text{cl}_X(A) \subset \text{int}_X(Y), \text{ entonces } \text{Fr}_Y(A) = \text{Fr}_X(A).$$

Demostración. Para probar (i) basta notar que

$$\begin{aligned} \text{Fr}_Y(A \cap Y) &= \text{cl}_Y(A) \cap \text{cl}_Y(Y - A) \subset \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(Y - A) \\ &\subset \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) = \text{Fr}_X(A). \end{aligned}$$

Mostremos (ii). Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \text{Fr}_X(A) &= \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) \\ &= \text{cl}_X(A) \cap (\text{cl}_X(X - Y) \cup \text{cl}_X(Y - A)) \\ &= (\text{cl}_X(A) \cap (X - \text{int}_X(Y))) \cup (\text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(Y - A)) \\ &= \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(Y - A) = Y \cap \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(Y - A) \\ &= \text{cl}_Y(A) \cap \text{cl}_Y(Y - A) = \text{Fr}_Y(A). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del lema. □

Lema 2.2. *Sea X un espacio topológico. Si A es un subconjunto cerrado de X , $x \notin A$ y α es un arco en X que va de x a un punto en A , entonces existe un subarco β de α tal que $A \cap \beta$ consta solamente de un punto p y los puntos extremos de β son p y x .*

Demostración. Sea $h : [0, 1] \rightarrow \alpha$ un homeomorfismo con $h(0) = x$. Sea $a = h(1) \in A$. Nótese que el conjunto $\alpha \cap A$ es cerrado en α y no vacío. Luego, el conjunto $B = h^{-1}(\alpha \cap A)$ es cerrado en $[0, 1]$ y no vacío. Así, se puede hacer $t_0 = \text{mín} B$. Como $h(0) = x \notin A$, se tiene que $t_0 > 0$. De esta manera, $\beta = h([0, t_0])$ es un subarco de α con $x = h(0) \in \beta$. Además, para cualquier $0 \leq t < t_0$ se tiene $t \notin B$; es decir, $h(t) \notin \alpha \cap A$, y, por ende, $h(t) \notin A$. Por lo tanto, $\beta \cap A = \{h(t_0)\}$ y los puntos extremos de β son $h(t_0) = p$ y $h(0) = x$, como queríamos. □

Lema 2.3. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Si α es un arco en X tal que x es uno de sus puntos extremos y U es una vecindad de x , entonces existe un subarco γ de α tal que $\gamma \subset U$ y x es punto extremo de γ .*

Demostración. Sea $A = X - \text{int}_X(U)$. Obsérvese que se cumplen las hipótesis del Lema 2.2, así que podemos hacer h y t_0 como en la prueba de tal lema. Como

$0 < t_0$, podemos tomar $s_0 \in (0, t_0)$. Luego, $\gamma = h([0, s_0])$ es un subarco de α tal que $x = h(0)$ es punto extremo de γ . Además, como $h(t_0) \notin \gamma \subset h([0, t_0])$ y $h([0, t_0]) \cap A = \{h(t_0)\}$, tenemos que $\gamma \cap A = \emptyset$ y, por tanto, que $\gamma \subset \text{int}_X(U) \subset U$. \square

Lema 2.4. *Sea X un espacio topológico arco conexo. Si A y B son subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X , entonces existe un arco α en X tal que $A \cap \alpha = \{p\}$ y $B \cap \alpha = \{q\}$, donde p y q son los puntos extremos de α .*

Demostración. Sean $a \in A$ y $b \in B$. Como X es arco conexo, existe un arco γ que va de a a b . Obsérvese que $b \notin A$. Aplicando el Lema 2.2 obtenemos un subarco β de γ tal que $\beta \cap A$ consta de un solo punto p y los puntos extremos de β son p y b . Asimismo, $p \notin B$. De nuevo aplicando el Lema 2.2 obtenemos un subarco α de β tal que $\alpha \cap B$ consta de un solo punto q y los puntos extremos de α son q y p . Como $p \in \alpha \cap A \subset \beta \cap A = \{p\}$, se tiene que $\alpha \cap A = \{p\}$. Esto concluye la prueba del lema. \square

Teorema 2.5 ([1], Teorema 2.A.13). *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Si existe un subconjunto conexo B de X tal que $B \subset A \subset \text{cl}_X(B)$, entonces A es conexo.*

Teorema 2.6 ([6], Teorema 6.1.9). *Sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos conexos de X . Si existe $B \in \mathcal{A}$ tal que, para cada $A \in \mathcal{A}$, se cumple que $A \cap \text{cl}_X(B) \neq \emptyset$ o $\text{cl}_X(A) \cap B \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es conexo.*

Teorema 2.7 ([1], Teorema 2.E.2). *Un espacio topológico X es localmente conexo si, y solo si, las componentes de cualquier subconjunto abierto de X son abiertos en X .*

Lema 2.8. *Sea X un continuo localmente conexo. Si T es un subcontinuo de X y U es cualquier subconjunto abierto de X tal que $T \subset U$, entonces existe un subcontinuo Z de X tal que $T \subset \text{int}_X(Z) \subset Z \subset U$. En particular, si T_1 y T_2 son subcontinuos de X ajenos, entonces existen subcontinuos Z_1 y Z_2 de X , tales que $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, $T_1 \subset \text{int}_X(Z_1)$ y $T_2 \subset \text{int}_X(Z_2)$.*

Demostración. Demostremos la primera parte. Con este fin, sean T un subcontinuo de X y U un subconjunto abierto de X , tales que $T \subset U$. Como X es un continuo localmente conexo, para cada $x \in T$ existe un subconjunto abierto y conexo C_x de X tal que $x \in C_x \subset \text{cl}_X(C_x) \subset U$. Obsérvese que, por el Teorema 2.5, $\text{cl}_X(C_x)$ es conexo. Como T es compacto y $T \subset \bigcup \{C_x : x \in T\}$, existe un subconjunto finito J de T , tal que $T \subset \bigcup \{C_x : x \in J\}$. Sea $Z = \bigcup \{\text{cl}_X(C_x) : x \in J\}$. Luego, Z es cerrado en X y $Z \subset U$. Como $T \subset Z$, para cada $x \in J$, $\text{cl}_X(C_x) \cap T \neq \emptyset$,

y T es conexo, aplicando el Teorema 2.6 obtenemos que Z es conexo. Además, $T \subset \bigcup \{C_x : x \in J\} \subset \text{int}_X(Z)$. Esto prueba la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte, sean T_1 y T_2 subcontinuos de X ajenos. Como T_1 y T_2 son subconjuntos cerrados de X y X es un espacio normal (por ser un espacio métrico), existen subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de X ajenos, tales que $T_1 \subset U_1$ y $T_2 \subset U_2$. Por el párrafo anterior, existen subcontinuos Z_1 y Z_2 , tales que $T_1 \subset \text{int}_X(Z_1)$ y $T_2 \subset \text{int}_X(Z_2)$. Obsérvese que $Z_1 \cap Z_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Con esto terminamos esta demostración. \square

Teorema 2.9 ([14], Teorema 5.6). *Sean X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X . Si K es una componente de E , entonces $\text{cl}_X(K) \cap \text{Fr}_X(E) \neq \emptyset$.*

Teorema 2.10 ([14], Teorema 8.26). *Si X es un continuo localmente conexo y A es un subconjunto abierto y conexo de X , entonces A es arco conexo.*

Lema 2.11. *Sea X un continuo localmente conexo. Si A es un subconjunto finito de X tal que $X - A$ es conexo, entonces, para cada abierto U de X con $A \subset U$, existe un subconjunto cerrado V de X tal que $A \subset \text{int}_X(V) \subset V \subset U$ y $X - V$ es conexo.*

Demostración. Sea d una métrica para X . Vamos a definir la colección de conjuntos U_0, U_1, U_2, \dots de la siguiente manera. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\{d(x, y) : x, y \in A \text{ y } x \neq y\}$. Hagamos $U_0 = U \cap (\bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon))$ y supongamos que, para alguna $n \in \mathbb{N}$, hemos definido el conjunto U_{n-1} de tal forma que U_{n-1} es abierto en X y contiene a A . Luego, dada cualquier $x \in A$, existe un subconjunto abierto y conexo W_x de X tal que $x \in W_x \subset \text{cl}_X(W_x) \subset B_d(x, \frac{1}{n}) \cap U_{n-1}$. Sea $U_n = \bigcup_{x \in A} W_x$. Luego, $\text{cl}_X(U_n) = \bigcup_{x \in A} \text{cl}_X(W_x) \subset U_{n-1}$ y $U_n \subset \bigcup_{x \in A} B_d(x, \frac{1}{n})$.

De esta forma, cada U_n es un subconjunto abierto de X con $A \subset U_{n+1} \subset \text{cl}_X(U_{n+1}) \subset U_n$ y $A \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Afirmamos que en esta última relación se da la igualdad. Supongamos, por el contrario, que existe $y \in (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n) - A$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{2} \min\{d(y, x) : x \in A\}$. Como $y \in U_{n_0}$ y $U_{n_0} \subset \bigcup_{x \in A} B_d(x, \frac{1}{n_0})$, existe $x_0 \in A$, tal que $y \in B_d(x_0, \frac{1}{n_0})$ y $d(y, x_0) < \frac{1}{n_0}$. Esto contradice la elección de n_0 . Por tanto, $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea \mathcal{C}_n el conjunto de componentes $X - \text{cl}_X(U_n)$. Por el Teorema 2.7, los elementos de cada \mathcal{C}_n son abiertos.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $X - U_n \subset X - \text{cl}_X(U_{n+1}) = \bigcup \mathcal{C}_{n+1}$. Como $X - U_n$ es compacto y los elementos de \mathcal{C}_{n+1} son ajenos, el conjunto $\mathcal{D}_n = \{C \in \mathcal{C}_{n+1} : C \cap (X - U_n) \neq \emptyset\}$ es finito. Además,

$$\bigcup (\mathcal{C}_{n+1} - \mathcal{D}_n) = \bigcup \{C \in \mathcal{C}_{n+1} : C \subset U_n\} \subset U_n.$$

Sea $V_n = \text{cl}_X(U_{n+1}) \cup (\bigcup(\mathcal{C}_{n+1} - \mathcal{D}_n))$. Luego, $U_{n+1} \subset V_n \subset U_n$ y $X - V_n \subset X - V_{n+1}$. Obsérvese que los conjuntos $\text{cl}_X(U_{n+1})$, $\bigcup(\mathcal{C}_{n+1} - \mathcal{D}_n)$ y $\bigcup \mathcal{D}_n$ son conjuntos ajenos cuya unión es X . Por consiguiente, $X - V_n = \bigcup \mathcal{D}_n$. Además, como $X - V_n \subset X - U_{n+1}$, cada elemento de \mathcal{D}_{n+1} es una componente de $X - V_n$. Por tanto, \mathcal{D}_{n+1} es el conjunto de componentes de $X - V_n$.

Dado cualquier $y \in X - A$, definimos el conjunto F^y como sigue. Como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = A$, existe $n_y \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin U_{n_y}$. Luego, $y \notin V_{n_y}$. Sea $E_{n_y}^y \in \mathcal{D}_{n_y+1}$ tal que $y \in E_{n_y}^y$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_{n_y+n}^y$ el único elemento de \mathcal{D}_{n_y+n+1} que cumple $E_{n_y+n-1}^y \subset E_{n_y+n}^y$. Hagamos $F^y = \bigcup\{E_{n_y+n}^y : n \in \mathbb{N}\}$. Obsérvese que F^y es un subconjunto abierto de X que está contenido en $X - \bigcup_{s \geq n_y} V_s = X - V_{n_y}$ y, por ende, $F^y \subset X - A$.

Sean $y, z \in X - A$. Supongamos que, para algunos $j, k \in \mathbb{N}$, $E_j^y \cap E_k^z \neq \emptyset$. Como $E_j^y \subset E_m^y$ y $E_k^z \subset E_m^z$, donde $m = \max\{j, k\}$, se tiene que $E_m^y \cap E_m^z \neq \emptyset$. Esto último implica que $E_m^y = E_m^z$. Luego, para cada $s \geq m$, $E_s^y = E_s^z$. Por tanto, $F^y = F^z$.

De esta forma, para cada $y, z \in X - A$, $F^y \cap F^z = \emptyset$ o $F^y = F^z$. Como $X - A = \bigcup\{F^y : y \in X - A\}$, cada F^y es abierto en $X - A$ y $X - A$ es conexo, se tiene que $F^y = F^z$, para cualesquiera $y, z \in X - A$. Fijemos $y \in X - A$. Así, $X - A = F^y$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Dado $D \in \mathcal{D}_{n+1}$, tomemos $p \in D$. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p \in E_k^y$. Sea $m_D = \max\{n+1, k\}$. Luego, $p \in E_k^y \subset E_{m_D}^y$. Como D es conexo, $D \subset X - V_n \subset X - V_{m_D}$, $E_{m_D}^y$ es una componente de $X - V_{m_D}$ y $p \in D \cap E_{m_D}^y$, se cumple que $D \subset E_{m_D}^y$.

Como \mathcal{D}_{n+1} es finito, podemos hacer $M_n = \max\{m_D : D \in \mathcal{D}_{n+1}\}$. Obsérvese que $M_n \geq n+1$. De este modo, se satisface que $D \subset E_{M_n}^y$, para cualquier $D \in \mathcal{D}_{n+1}$. Por tanto, $X - V_n \subset E_{M_n}^y \subset X - V_{M_n}$; es decir, $V_{M_n} \subset X - E_{M_n}^y \subset V_n$. Hagamos $V = X - E_{M_n}^y$. Como $E_{M_n}^y$ es elemento de \mathcal{D}_{M_n+1} se tiene que $E_{M_n}^y$ es abierto en X y conexo. Luego, V es cerrado en X , $X - V$ es conexo y $A \subset V_{M_n} \subset \text{int}_X(V) \subset V \subset V_n \subset U_n \subset U$. Esto concluye la demostración de este lema. \square

La siguiente definición muestra una forma de localizar la conexidad, alternativa a la conexidad local. Estas dos propiedades resultan ser equivalentes globalmente.

Definición 2.12. El espacio topológico X es **conexo en pequeño** en el punto $p \in X$ si X tiene una base local de vecindades en p compuesta únicamente de subconjuntos conexos de X .

Teorema 2.13 ([13], Lema 1.8). *Sea X un espacio topológico. X es localmente conexo si, y solo si, X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

3 Orden

En este breve apartado se mencionan unos pocos resultados que se relacionan con el concepto de orden de un punto de un espacio topológico dado. Resalta, por su amplio uso y sencillez, la caracterización dada en el Teorema 4.4.

Definición 3.1. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Sea β un número cardinal. A es de **orden** menor o igual que β , denotado por

$$\text{ord}(A, X) \leq \beta,$$

si, para cada subconjunto abierto U de X tal que $A \subset U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que

$$A \subset V \subset U \text{ y } |\text{Fr}_X(V)| \leq \beta.$$

A es de orden β en X , denotado por

$$\text{ord}(A, X) = \beta,$$

si $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ y, para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, se tiene que $\text{ord}(A, X) \not\leq \alpha$. Asimismo, para cualquier $p \in X$, denotamos $\text{ord}(p, X) = \text{ord}(\{p\}, X)$.

El primer uso que se hace del concepto de orden es el distinguir entre distintos tipos de puntos en un continuo.

Definición 3.2. Dado un continuo X , un punto $p \in X$ es un **punto extremo** de X si $\text{ord}(p, X) = 1$. Del mismo modo, p es un **punto ordinario** de X si $\text{ord}(p, X) = 2$ y p es un **punto de ramificación** de X si $\text{ord}(p, X) \geq 3$. Además, denotaremos

$$\begin{aligned} E(X) &= \{p \in X : p \text{ es un punto extremo de } X\}, \\ O(X) &= \{p \in X : p \text{ es un punto ordinario de } X\}, \\ R(X) &= \{p \in X : p \text{ es un punto de ramificación de } X\}. \end{aligned}$$

A continuación se revisa el orden de los puntos de \mathbb{R} y de los continuos no degenerados más simples: el arco y la curva cerrada simple.

Ejemplo 3.3. 1. Si X es un continuo no degenerado, entonces, para cada $p \in X$, se cumple que $\text{ord}(p, X) > 0$.

2. En \mathbb{R} cada punto p cumple que $\text{ord}(p, \mathbb{R}) = 2$.

3. En un arco α , los únicos puntos de orden 1 son los puntos que bajo un homeomorfismo del intervalo $[0, 1]$ en α corresponden a 0 y a 1, (esto garantiza que el concepto de punto extremo dado aquí es compatible con el sentido habitual que se le da para los arcos). Todos los demás puntos de α tienen orden 2 en α .
4. En una curva cerrada simple, S , todos los puntos $p \in S$ cumplen que $\text{ord}(p, S) = 2$.

El resultado que sigue garantiza que el orden se comporta bien con los subespacios.

Teorema 3.4. *Sea X un continuo. Si A es un subespacio de X y $p \in A$, entonces $\text{ord}(p, A) \leq \text{ord}(p, X)$. Más aún, si A es una vecindad de p en X , entonces $\text{ord}(p, A) = \text{ord}(p, X)$.*

4 Gráficas finitas

Ahora se presentan los continuos clave en las dos caracterizaciones principales de este capítulo, es decir, las gráficas finitas, así como algunos resultados relacionados.

Definición 4.1. Un continuo X es una **gráfica finita** si es la unión de una familia finita de arcos tales que cada par de ellos o son ajenos o se intersectan en uno o dos de sus puntos extremos.

Lema 4.2 ([14], Proposición 9.2). *Si X y Y son gráficas finitas, tales que $X \cap Y$ es un conjunto finito y no vacío, entonces $X \cup Y$ es una gráfica finita.*

Lema 4.3. *Sea X un continuo arco conexo. Si \mathcal{G} es una colección finita de gráficas finitas contenidas en X tal que cada par de ellas son ajenas, entonces existe una gráfica finita G contenida en X tal que $\bigcup \mathcal{G} \subset G$.*

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_k\}$, con $G_i \neq G_j$ siempre que $i \neq j$. Como G_1 y $\bigcup\{G_i : 2 \leq i \leq k\}$ son subconjuntos cerrados de X ajenos, podemos aplicar el Lema 2.4 para obtener un arco α_1 tal que $\alpha_1 \cap G_1 = \{a_1\}$ y $\alpha_1 \cap (\bigcup\{G_i : 2 \leq i \leq k\}) = \{b_1\}$, donde a_1 y b_1 son los puntos extremos de α_1 . Podemos suponer que $b_1 \in G_2$ (renombrando si es necesario). Aplicando dos veces el Lema 4.2, obtenemos que el conjunto $D_1 = G_1 \cup \alpha_1 \cup G_2$ es una gráfica finita. Obsérvese, además, que D_1 es ajeno a $\bigcup\{G_i : 2 < i\}$. Supongamos que hemos definido los arcos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, con $1 \leq n < k - 1$, de tal forma que el conjunto $D_n = \bigcup\{G_i : i \leq n + 1\} \cup \bigcup\{\alpha_i : i \leq n\}$ es una gráfica finita ajena a $\bigcup\{G_i : n + 1 < i\}$. Obsérvese que estos dos últimos conjuntos son cerrados en X y ajenos. Aplicando de nuevo el Lema 2.4, obtenemos un arco α_{n+1} tal que $\alpha_{n+1} \cap D_n = \{a_{n+1}\}$ y $\alpha_{n+1} \cap \bigcup\{G_i : n + 1 < i\} = \{b_{n+1}\}$.

Podemos suponer que $b_{n+1} \in G_{n+2}$ (renombrando si es necesario). De nuevo por el Lema 4.2, obtenemos que el conjunto $D_{n+1} = D_n \cup \alpha_{n+1} \cup G_{n+2}$ es una gráfica finita. Además, si $n + 1 < k - 1$, entonces D_{n+1} es ajeno a $\bigcup\{G_i : n + 2 < i\}$.

De este modo, D_{k-1} es una gráfica finita que contiene a $\bigcup\{G_i : i \leq k\}$. Esto concluye la demostración del lema. \square

Teorema 4.4 ([14], Teorema 9.10). *Si X es un continuo, entonces X es una gráfica finita si, y solo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*

- (i) $\text{ord}(p, X)$ es finito, para cada $p \in X$.
- (ii) $\text{ord}(p, X) \leq 2$ para todos, salvo una cantidad finita, de $p \in X$.

Teorema 4.5 ([14], Corolario 9.10.1). *Todo subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.*

Teorema 4.6 ([14], Teorema 9.24). *Sea X un continuo no degenerado. X es una gráfica finita si, y solo si, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier subconjunto A de X con exactamente n elementos se cumple que $X - A$ es desconexo.*

5 Dimensión

Esta breve sección se enfoca en presentar la definición de dimensión que vamos a considerar (llamada, de manera técnica, dimensión inductiva pequeña), así como algunos resultados acerca de este concepto.

Definición 5.1. Dado cualquier número entero mayor o igual que -1 , se define recursivamente que un espacio topológico X tiene **dimensión** menor o igual que n , denotándose por $\text{dim}(X) \leq n$, de la siguiente forma:

- (i) Para cualquier espacio topológico X , $\text{dim}(X) \leq -1$ si, y solo si, $X = \emptyset$.
- (ii) Dado $n \geq 0$, supongamos que hemos definido cuándo un espacio topológico tiene dimensión menor o igual que $n - 1$. Entonces, para cualquier espacio topológico X y cualquier $p \in X$, $\text{dim}_p(X) \leq n$ si X tiene una base local de vecindades de p cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a $n - 1$. Además, si, para cada $p \in X$, se satisface que $\text{dim}_p(X) \leq n$, entonces $\text{dim}(X) \leq n$.

Definimos también lo siguiente:

1. Para cualquier espacio topológico X y cualesquiera $p \in X$ y $n \geq 0$, $\text{dim}_p(X) = n$ si $\text{dim}_p(X) \leq n$ y es falso que $\text{dim}_p(X) \leq n - 1$.

2. Para cualquier espacio topológico X y cualquier $n \geq 0$, la dimensión de X es n , denotada por $\dim(X) = n$, si $\dim(X) \leq n$ y es falso que $\dim(X) \leq n - 1$.
3. Para cualquier espacio topológico X , la dimensión de X es ∞ , denotada por $\dim(X) = \infty$, si $\dim(X) \leq n$ es falso para cada $n \in \mathbb{N}$.

De ahora en adelante se asume como cierta la relación $n \leq \infty$ entre cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y el símbolo ∞ , lo cual resulta conveniente al formular algunos resultados.

El siguiente teorema enuncia cómo se comporta la dimensión con respecto a subespacios, y que, al menos en espacios topológicos regulares, la dimensión en un punto es una propiedad local.

Teorema 5.2. *Sean X un espacio topológico, A un subespacio de X y $p \in A$. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (1) $\dim(A) \leq \dim(X)$.
- (2) $\dim_p(A) \leq \dim_p(X)$.
- (3) Si X es regular y $p \in \text{int}_X(A)$, entonces $\dim_p(X) = \dim_p(A)$.

Demostración. Demostremos primero (1). Si $\dim(X) = \infty$, entonces la afirmación es inmediata. De esta manera, podemos suponer que $\dim(X)$ es finita. Haremos la prueba por inducción sobre una cota superior de la dimensión de X . En caso de que $\dim(X) \leq -1$, el resultado es inmediato, por vacuidad. Tomemos $n \geq 0$ y supongamos que el resultado es válido siempre que $\dim(X) \leq n - 1$. Sean X un espacio topológico con $\dim(X) \leq n$, A un subconjunto de X y $p \in A$. Sea U una vecindad de p en A . Luego, existe una vecindad V de p en X tal que $U = A \cap V$. Como $\dim_p(X)$ es finita, existe una vecindad W de p en X contenida en V con $\dim(\text{Fr}_X(W)) \leq \dim_p(X) - 1$. Aplicando el Lema 2.1, tenemos que $\text{Fr}_A(W \cap A) \subset \text{Fr}_X(W) \cap A \subset \text{Fr}_X(W)$. Por la hipótesis de inducción, se deduce que $\dim(\text{Fr}_A(W \cap A)) \leq \dim(\text{Fr}_X(W)) \leq \dim_p(X) - 1$. Como $W \cap A$ es una vecindad de p en A contenida en U , concluimos que $\dim_p(A) \leq \dim_p(X)$. Como esto sucede para cada $p \in A$, obtenemos que $\dim(A) \leq \dim(X)$.

La prueba de (2) es similar a la de (1), salvo que no necesita inducción y hace uso de (1). Haremos esta parte de la demostración omitiendo detalles idénticos a la demostración de (1). Sean X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $p \in A$. Si $\dim_p(X)$ es infinita, entonces la afirmación es inmediata. Supongamos que $\dim_p(X)$ es finita. Dada cualquier vecindad U de p en A , existen vecindades V y W de p en X , tales que $U = V \cap A$, $W \subset V$ y $\dim(\text{Fr}_X(W)) \leq \dim_p(X) - 1$. Como $\text{Fr}_A(W \cap A) \subset \text{Fr}_X(W)$, aplicando (2), tenemos que $\dim_A(\text{Fr}_A(W \cap A)) \leq$

$\dim(\text{Fr}_X(W)) \leq \dim_p(X) - 1$. Como $W \cap A$ es una vecindad de p en X contenida en U , deducimos de esto último que $\dim_p(A) \leq \dim_p(A)$.

Por último, probaremos (3). Por (2), basta mostrar que $\dim_p(X) \leq \dim_p(A)$. Si $\dim_p(A) = \infty$, entonces el resultado es inmediato. Supongamos que $\dim_p(A)$ es finita. Sea U una vecindad abierta de p en X contenida en A . Luego, U es una vecindad abierta de p en A . Sea V una vecindad de p en A con $V \subset U$ y $\dim(\text{Fr}_A(V)) \leq \dim_p(A) - 1$. Obsérvese que V es vecindad de p en X . Como X es regular, podemos suponer que $\text{cl}_X(V) \subset \text{int}_X(A)$. Aplicando el Lema 2.1 (ii) tenemos que $\text{Fr}_X(A) = \text{Fr}_A(V)$. Así, $\dim_p(\text{Fr}_X(V)) \leq \dim_p(A) - 1$. Por tanto, $\dim_p(X) \leq \dim_p(A)$. Esto concluye la prueba del teorema. \square

Puesto que la definición de dimensión aquí expuesta es algo intrincada, cabe preguntarse si este concepto se comporta de la manera que se esperaría, por ejemplo, en espacios tan familiares como \mathbb{R}^n . Al menos en este caso la respuesta es afirmativa. Sin embargo la prueba de esto no es en ningún modo trivial y se menciona aquí solamente como un ejemplo, siendo usado más adelante.

Ejemplo 5.3. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, si $x \in \mathbb{R}(n)$, entonces $\dim_x(\mathbb{R}^n) = n$. Asimismo, si M es una m -celda y $x \in M$, entonces $\dim_x(M) = n$.

El resultado que ahora se enuncia, relaciona la propiedad de un subespacio de hacer disconexa a una n -variedad al serle removido, con la dimensión de dicho subespacio. Es necesario para la prueba del Teorema 8.1.

Teorema 5.4 ([8], véase el Corolario 2 al Teorema IV 4). *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es una n -celda y A es un subespacio de X tal que $X - A$ es disconexo, entonces $\dim(A) \geq n - 1$.*

6 Algunos resultados sobre hiperespacios

Ahora se revisan algunos resultados básicos de hiperespacios de continuos que serán de ayuda en la exposición de las demostraciones de los

Definición 6.1. Sea X un espacio métrico con métrica acotada d . Para cualesquiera $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$, la ε -nube alrededor de A , denotada por $N_d(A, \varepsilon)$, como el conjunto

$$N_d(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para alguna } a \in A\}.$$

Asimismo, definimos la función $H_d : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$(A, B) \xrightarrow{H_d} \inf \{r > 0 : A \subset N_d(B, r) \text{ y } B \subset N_d(A, r)\}.$$

Teorema 6.2 ([10], Teorema 2.2). *Para cualquier espacio métrico X con métrica acotada d , la función H_d es una métrica para 2^X .*

Definición 6.3. Sean X un continuo y U_1, \dots, U_k una colección finita de subconjuntos de X . El **vietórico de U_1, \dots, U_k en 2^X** , denotado por $\langle U_1, \dots, U_k \rangle$, es el conjunto

$$\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}\}$$

Además, dada $n \in \mathbb{N}$, el **vietórico de U_1, \dots, U_k en $C_n(X)$** , el cual se denota por $\langle U_1, \dots, U_k \rangle_n$, es el conjunto

$$\langle U_1, \dots, U_k \rangle_n = \langle U_1, \dots, U_k \rangle \cap C_n(X).$$

Teorema 6.4 ([13], 0.14). *Sea X un espacio métrico acotado. Entonces, la familia $\{\langle U_1, \dots, U_k \rangle : k \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \dots, U_k \text{ son subconjuntos abiertos de } X\}$, forma una base de abiertos para la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X .*

Definición 6.5. Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X . El **límite inferior de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$** y el **límite superior de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$** , denotados respectivamente por $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$, son los conjuntos

$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{para cada vecindad } U \text{ de } x \text{ existe } N \in \mathbb{N}, \\ \text{tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq N\} \text{ y}$$

$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{para cada vecindad } U \text{ de } x \text{ existe un subconjunto} \\ \text{infinito } T \text{ de } \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_n \neq \emptyset, \\ \text{para cada } n \in T\}.$$

Si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$, entonces el **límite de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$** es A y se denota por $\lim A_n = A$.

Lema 6.6. *Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de X , entonces se cumple que*

$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{existe una sucesión } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } X \text{ que converge} \\ \text{a } x \text{ tal que } x_n \in A_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\} \text{ y}$$

$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{existe } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ con } x_n \in A_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \text{ tal} \\ \text{que alguna subsucesión de } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge a } x\}.$$

Demostración. Sea d una métrica para X . En primer lugar, demostremos la primera igualdad del teorema. Obsérvese que la contención hacia la izquierda es inmediata. Para probar la contención hacia la derecha, tomemos $x \in \liminf A_n$. Hagamos $M_1 = N_1 = 1$. Supongamos que hemos definido M_n , para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in \liminf A_n$ y $\frac{1}{n+1} > 0$, existe $N_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq N_{n+1}$, se cumple que $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A_k \neq \emptyset$. Sea $M_{n+1} = \max\{N_k + 1, N_{k+1}\}$. De esta forma la sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente. En particular, $M_n \geq n$.

Dado cualquier $k \in \mathbb{N}$, sea $m(k) = \max\{n : k \geq M_n\}$. Como $k \geq M_{m(k)} \geq N_{m(k)}$, existe $x_k \in B(x, \frac{1}{m(k)}) \cap A_k \neq \emptyset$. Probaremos que $\lim x_k = x$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, tales que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Luego, para cada $n \geq M_{n_0}$, se cumple que $m(n) \geq n_0$ y $d(x, x_n) < \frac{1}{m(n)} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Por tanto, $\lim x_k = x$. Esto prueba la contención hacia la derecha de la primera igualdad.

Demostremos la segunda igualdad. De nuevo, la contención hacia la izquierda es inmediata. Para probar la otra contención, fijemos $x \in \limsup A_n$. Definimos la sucesión $\{M(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ como sigue. Sea $M(0) = 0$. Supongamos que hemos definido el número natural $M(k-1)$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $x \in \limsup A_n$, se cumple que $B(x, \frac{1}{k}) \cap A_j \neq \emptyset$, para una cantidad infinita de $j \in \mathbb{N}$. Luego, existe $M(k) \in \mathbb{N}$ tal que $M(k) > M(k-1)$ y $B(x, \frac{1}{k}) \cap A_{M(k)} \neq \emptyset$. De este modo, la sucesión $\{M(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente.

Definimos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como sigue. Si $n = M(k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces elegimos $x_n \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A_n$. En otro caso, elegimos $x_n \in A_n$. Como $\{M(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, se cumple que $\{x_{M(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $n \leq M(n)$. Probaremos que $\lim x_{M(n)} = x$. Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, tales que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Luego, para $k \geq N$ se cumple que $x_{M(k)} \in B(x, \frac{1}{k}) \subset B(x, \frac{1}{N})$ y $d(x, x_k) < \varepsilon$. tanto, $\lim x_{M(n)} = x$. Esto muestra la contención hacia la derecha de la segunda igualdad y concluye la demostración de este lema. \square

Lema 6.7. *Sea X un continuo. Supongamos que existen una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en 2^X y $p \in X$, tales que $\lim A_n = \{p\}$. Si $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $p_n \in A_n$, entonces $\lim p_n = p$. Más aún, si $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en 2^X , tal que $B_n \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim B_n = \{p\}$.*

Demostración. Sea d una métrica para X . Para empezar, probaremos la primera parte del enunciado del lema. Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $p_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim A_n = \{p\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n > N$, se cumple que $H_d(A_n, \{p\}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Fijemos $n > N$. Luego, $A_n \subset N_d(\{p\}, \varepsilon)$. Como $p_n \in A_n$, existe $q \in \{p\}$, tal que $d(p_n, q) < \varepsilon$; es decir, $d(p_n, p) < \varepsilon$. Como la elección de $n > N$ y ε fue arbitraria, concluimos que $\lim p_n = p$.

Ahora demostremos la segunda parte del lema. Sea $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X tal que $B_n \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $x_n \in B_n \subset A_n$, entonces, por la primera parte de la demostración, se cumple que $\lim x_n = p$. Esto implica, por el Lema 6.6, que $p \in \liminf A_n$. Supongamos que $y \in \limsup A_n$. Aplicando el Lema 6.6, obtenemos una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_n \in A_n$ y alguna subsucesión de esta serie converge a y . Por la primera parte de la demostración, se satisface que $\lim y_n = p$. Como escogimos arbitrariamente a $y \in \limsup A_n$, lo anterior implica que $\limsup A_n \subset \{p\}$. Por lo tanto, $\{p\} \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \{p\}$ o, equivalentemente, $\lim A_n = \{p\}$. Esto concluye esta demostración. \square

Lema 6.8 (véase [13], Lema 1.48). *Sea X un espacio métrico. Si $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un elemento de 2^X , es decir, es un cerrado de X .*

Teorema 6.9. *Dado cualquier espacio topológico X y cualquier número natural n , la función $\psi : (2^X)^n \rightarrow 2^X$, dada por*

$$(M_1, \dots, M_n) \xrightarrow{\psi} \bigcup \{M_i : i \in \{1, \dots, n\}\},$$

es continua.

Demostración. Por el Teorema 6.4, basta probar que la imagen inversa de cualquier vietórico de subconjuntos abiertos de X bajo ψ es el producto de vietóricos de subconjuntos abiertos de X . Sea $\mathcal{C} = \{U_1, \dots, U_k\}$ una familia finita de abiertos en X . Afirmamos lo siguiente:

$$\psi^{-1}(\langle \mathcal{C} \rangle) = \bigcup \left\{ \prod_{i=1}^n \langle \mathcal{A}_i \rangle : (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) \in \mathcal{G} \right\},$$

donde \mathcal{G} es la familia de las n -adas $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$, tales que cada $\mathcal{A}_i \neq \emptyset$ y $\bigcup \{\mathcal{A}_i : i \in \{1, \dots, n\}\} = \mathcal{C}$. Para probar esta afirmación, sea $(B_1, \dots, B_n) \in \psi^{-1}(\langle \mathcal{C} \rangle)$. Luego, $\bigcup \{B_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \subset \bigcup \mathcal{C}$ y $\bigcup \{B_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \cap U \neq \emptyset$, para cada $U \in \mathcal{C}$. Dado $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $\mathcal{A}_i = \{U \in \mathcal{C} : U \cap B_i \neq \emptyset\}$. Obsérvese que $B_i \subset \bigcup \mathcal{A}_i$, y $B_i \cap U \neq \emptyset$, para cada $U \in \mathcal{A}_i$. Así, $B_i \in \langle \mathcal{A}_i \rangle$. Por otro lado, cada elemento de \mathcal{C} intersecta a $\bigcup \{B_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$, así que $\mathcal{C} = \bigcup \{\mathcal{A}_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$. De esta forma, $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n) \in \mathcal{G}$. Esto prueba la contención hacia la derecha. Para mostrar la contención restante, sean $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n) \in \mathcal{G}$ y $(B_1, \dots, B_n) \in \prod_{i=1}^n \langle \mathcal{A}_i \rangle$. Luego, $\bigcup \{B_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \subset \bigcup \{\bigcup \mathcal{A}_i : i \in \{1, \dots, n\}\} = \bigcup \mathcal{C}$. Además, dada $U \in \mathcal{C}$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $U \in \mathcal{A}_j$. Como $B_j \in \langle \mathcal{A}_j \rangle$, tenemos que $U \cap \bigcup \{B_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \supset U \cap B_j \neq \emptyset$. Así, $\bigcup \{B_i : i \in \{1, \dots, n\}\} \in \langle \mathcal{C} \rangle$; es decir, $(B_1, \dots, B_n) \in \psi^{-1}(\langle \mathcal{C} \rangle)$. Esto prueba la segunda contención y concluye la demostración de este teorema. \square

La función que se acaba de presentar en el resultado anterior proporciona un homeomorfismo para ciertos subconjuntos de 2^X . Para expresar dichos conjuntos, lo cual se hace en el Teorema 6.12, requerimos la siguiente definición.

Definición 6.10. Sean X un espacio topológico y U y V subconjuntos de X . Decimos que U y V son **mutuamente separados** en X si $U \cap \text{cl}_X(V) = \emptyset$ y $\text{cl}_X(U) \cap V = \emptyset$.

Observación 6.11. Dado un espacio topológico, si U_1, \dots, U_n es una colección finita de conjuntos mutuamente separados por pares en X y $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, entonces A tiene a lo menos una componente contenida en U_i , para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Para continuar con el siguiente resultado, nótese que, dado un continuo X , la unión de n subconjuntos de X tiene a lo más n componentes. Así, la función del Teorema 6.9 puede ser restringida a $\psi : C(Y_1) \times C(Y_2) \times \dots \times C(Y_n) \rightarrow C_n(X)$, donde $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in C(X)$. Es posible decir un poco más.

Teorema 6.12. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\{A_1, \dots, A_n\}$ una familia de conjuntos mutuamente separados por pares en X . Entonces, la función $\psi : \prod_{i=1}^n C(A_i) \rightarrow \langle A_1, \dots, A_n \rangle_n$ dada por $(M_1, \dots, M_n) \mapsto \bigcup_{i=1}^n M_i$, es un homeomorfismo.

Demostración. Por el Teorema 6.9, ψ es continua. Para demostrar que ψ es inyectiva, tomemos $M_1, N_1 \in C(A_1)$, $M_2, N_2 \in C(A_2)$, \dots , $M_n, N_n \in C(A_n)$ con $\bigcup_{i=1}^n M_i = \bigcup_{i=1}^n N_i$. Dado $i \in \{1, \dots, n\}$, como $A_i \cap M_j \subset A_i \cap A_j = \emptyset$ y $A_i \cap N_j \subset A_i \cap A_j = \emptyset$ para $j \neq i$ y $M_i, N_i \subset A_i$, tenemos $M_i = N_i$. Por tanto, ψ es inyectiva.

Mostremos que ψ es sobreyectiva. Sea $H \in \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle_n$. Se tiene que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $H \cap A_i \neq \emptyset$; $H \subset \bigcup_{i=1}^n A_n$ y H tiene a lo más n componentes. Luego, como $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una familia finita de conjuntos mutuamente separados dos a dos en X , se sigue que $H_1 = H \cap A_1, H_2 = H \cap A_2, \dots, H_n = H \cap A_n$ son las n componentes distintas de H . Obsérvese que, como H es cerrado en X , cada H_i es cerrado en X y, por consiguiente, en A_i . Así, para cada i , $H_i \in C(A_i)$, y $\psi(H_1, H_2, \dots, H_n) = H$. Por tanto, ψ es sobreyectiva.

Por último, probemos que ψ^{-1} es continua. Obsérvese que, del párrafo anterior, se desprende que $\psi^{-1}(H) = (H \cap A_1, \dots, H \cap A_n)$, para cada $H \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle_n$. Así, basta mostrar que, dada cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, la función

$$\theta : \langle A_1, \dots, A_n \rangle_n \rightarrow C(A_i) \text{ dada por } H \xrightarrow{\theta} H \cap A_i,$$

es continua. Para esto, sea U_1, \dots, U_k una colección finita de subconjuntos abiertos de A_i . Sea $\mathfrak{V} = \langle A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n, U_1, \dots, U_k \rangle_n$. Afirmamos lo siguiente

$$\theta^{-1}(\langle U_1, \dots, U_k \rangle_1) = \mathfrak{V}.$$

Para probar esta igualdad, supongamos que $H \in \theta^{-1}(\langle U_1, \dots, U_k \rangle_1)$. Luego, $H \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle_n$ y $H \cap A_i \cap U_j = \theta(H) \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$. Además, $H \cap A_i \subset \bigcup \{U_j : j \in \{1, \dots, k\}\}$ y $H \subset \bigcup \{A_j : j \in \{1, \dots, n\}\}$. Así, $H \subset \bigcup \{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n, U_1, \dots, U_k\}$ y $H \in \mathfrak{B}$. Recíprocamente, supongamos que $H \in \mathfrak{B}$. Se tiene que $H \cap A_i \cap U_j = H \cap U_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$. Como los A_j son ajenos, tenemos que $H \cap A_i \subset A_i \cap \bigcup \{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n, U_1, \dots, U_k\} = \bigcup \{U_1, \dots, U_k\}$. En consecuencia, $H \cap A_i \in \langle U_1, \dots, U_k \rangle_1$. De esta manera, $H \in \theta^{-1}(\langle U_1, \dots, U_k \rangle_1)$. Esto prueba la igualdad.

Por otro lado, dada $j \in \{1, \dots, n\}$, como los A_r están separados mutuamente en X por pares, se tiene que $A_j \subset X - \bigcup \{\text{cl}_X(A_r) : r \in \{1, \dots, n\} - \{j\}\}$. Además,

$$\begin{aligned} & (X - \bigcup \{\text{cl}_X(A_r) : r \in \{1, \dots, n\} - \{j\}\}) \cap \bigcup \{A_s : s \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \bigcup \left\{ (X - \bigcup \{\text{cl}_X(A_r) : r \in \{1, \dots, n\} - \{j\}\}) \cap A_s : s \in \{1, \dots, n\} \right\} \\ &= (X - \bigcup \{\text{cl}_X(A_r) : r \in \{1, \dots, n\} - \{j\}\}) \cap A_j = A_j. \end{aligned}$$

En esta forma, A_j es un subconjunto abierto de $\bigcup \{A_s : s \in \{1, \dots, n\}\}$. Como U_r es abierto en A_i , se sigue que U_r también es abierto en $\bigcup \{A_s : s \in \{1, \dots, n\}\}$, para cada $r \in \{1, \dots, k\}$. Luego, \mathfrak{B} es abierto en $C(\bigcup \{A_r : r \in \{1, \dots, n\}\})$. Por tanto, \mathfrak{B} es abierto en $\langle A_1, \dots, A_n \rangle_n$ (pues $\mathfrak{B} \subset \langle A_1, \dots, A_n \rangle_n \subset C(\bigcup \{A_s : s \in \{1, \dots, n\}\})$). Así, se concluye que θ es continua y que ψ es un homeomorfismo. \square

7 Dimensión en el hiperespacio $C_n(X)$ de gráficas finitas

El primer resultado de esta sección expresa una condición que garantiza la existencia de m -celdas en el espacio de subcontinuos de un continuo. Además de determinar una cota inferior para la dimensión del hiperespacio de subcontinuos de cualquier gráfica finita (como un ejemplo particular), este resultado es útil para mostrar que $C(X)$ tiene dimensión infinita en X cuando X no es una gráfica (véase Teorema 7.5).

Definición 7.1. Sea X un continuo. Un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ es un **arco ordenado** en 2^X si para cualesquiera $s, t \in [0, 1]$ con $s \leq t$ se cumple que $h(s) \subset h(t)$. Decimos que α va de A a B o, equivalentemente, que es un arco ordenado de A a B , si $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

Teorema 7.2 ([13], Lema 1.8). *Sea X un continuo. Si A y B son elementos distintos de 2^X , entonces existe un arco ordenado en 2^X que va de A a B si, y solo si, $A \subset B$ y cada componente de B intersecta A .*

Teorema 7.3. Sean X un continuo y m un número natural con $m \geq 2$. Si existen subcontinuos M y N de X con $M \subset N$, tales que $M - N$ es la unión de m conjuntos no vacíos y mutuamente separados por pares en X , entonces existe una m -celda $\mathfrak{M} \subset C(M)$, tal que $M, N \in \mathfrak{M}$ y, para cada $K \in \mathfrak{M}$, $N \subset K \subset M$.

Demostración. Sean B_1, \dots, B_m subconjuntos no vacíos de X , mutuamente separados por pares, tales que $M - N = \bigcup_{i=1}^m B_i$. Sea K una componente cualquiera de $M - N$. Por el Teorema 2.9, se cumple que $\text{cl}_M(K) \cap \text{Fr}_M(M - N) \neq \emptyset$. Como $\text{Fr}_M(M - N) \subset \text{cl}_M(N) = N$, esto implica que $\text{cl}_M(K) \cap N \neq \emptyset$. Aplicando el Teorema 2.6 obtenemos que $K \cup N$ es conexo.

Fijemos $k \in \{1, \dots, m\}$. Mostraremos que $B_k = \bigcup\{C : C \text{ es una componente de } M - N \text{ y } C \cap B_k \neq \emptyset\}$. La contención hacia la derecha es inmediata. Para probar la otra contención, sea C una componente de $M - N$ tal que $C \cap B_k \neq \emptyset$. Obsérvese que $\{B_i : 1 \leq i \leq m\}$ es una colección finita de cerrados en $M - N$ ajenos por pares. Luego, $C \subset B_k$. De este modo, se satisface la igualdad requerida. Además, por el párrafo anterior y el Teorema 2.6, el conjunto $N \cup B_k = N \cup \bigcup\{N \cup C : C \text{ es una componente de } M - N \text{ y } C \cap B_k \neq \emptyset\}$ es conexo. Más aún, $\text{cl}_M(B_k) \subset M - \bigcup\{B_i : i \neq k\} = M - ((M - N) - B_k) = M - (M - (N \cup B_k)) = N \cup B_k$. Así, $N \cup B_k = N \cup \text{cl}_M(B_k)$ y $N \cup B_k$ es cerrado en M y compacto. Por tanto, $N \cup B_k$ es un continuo.

Por el Teorema 7.2, existe un arco ordenado $\alpha_k : [0, 1] \rightarrow 2^X$ tal que $\alpha_k(0) = N$ y $\alpha_k(1) = N \cup B_k$. Obsérvese que para cualquier $t_0 \in (0, 1]$, si $h : [0, 1] \rightarrow [0, t_0]$ es la función tal que $f(t) = \frac{t}{t_0}$, para cada $t \in [0, t_0]$, entonces h es un homeomorfismo estrictamente creciente y $\alpha_k \circ h$ es un arco ordenado en 2^X que va de N a $\alpha_k(t_0)$. Aplicando el Teorema 7.2, obtenemos que cada componente de $\alpha_k(t_0)$ debe intersectar a N . Como $N \subset \alpha_k(t_0)$, N es conexo y las componentes de cualquier conjunto son ajenas por pares, deducimos que $\alpha_k(t_0)$ solo posee una componente; es decir, $\alpha_k(t_0)$ es conexo. Así, $\alpha_k([0, 1]) \subset C(X)$.

Por otro lado, dados $t_1, \dots, t_m \in [0, 1]$, como $N \subset \alpha_i(t_i)$ siempre que $1 \leq i \leq m$, por el Teorema 2.6 se cumple que el conjunto $\alpha_1(t) \cup \dots \cup \alpha_m(t)$ es conexo. Por tanto, este último conjunto es un continuo.

De esta forma, podemos considerar la función $\Gamma : [0, 1]^m \rightarrow C(X)$ dada por

$$(t_1, \dots, t_m) \xrightarrow{\Gamma} \alpha_1(t_1) \cup \dots \cup \alpha_m(t_m).$$

Se sigue del Teorema 6.9 y del hecho que cada α_i es continua, que Γ es continua.

Probemos que Γ es inyectiva. Para ello, sean (t_1, \dots, t_m) y (s_1, \dots, s_m) puntos de $[0, 1]^m$, tales que $\Gamma(t_1, \dots, t_m) = \Gamma(s_1, \dots, s_m)$. Fijemos $k \in \{1, \dots, m\}$. Obsérvese que para $j \neq k$ se cumple que $N \cap B_k = B_j \cap N = B_j \cap B_k = \emptyset$ y $\alpha_j(t_j) \cap (N \cup B_k) \subset (N \cup B_j) \cap (N \cup B_k) = N$. Esto implica que $\alpha_j(t_j) \cap (N \cup B_k) = N$. Por tanto, y

porque $\alpha_k(t_k) \subset N \cup B_k$ y $N \subset \alpha_k(t_k)$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Gamma(t_1, \dots, t_m) \cap (N \cup B_k) &= (\alpha_k(t_k) \cap (N \cup B_k)) \cup N = \alpha_k(t_k) \cup N \\ &= \alpha_k(t_k).\end{aligned}$$

Similarmente, $\Gamma(s_1, \dots, s_m) \cap (N \cup B_k) = \alpha_k(s_k)$. Por tanto, $\alpha_k(t_k) = \alpha_k(s_k)$. Como α_k es inyectiva, lo anterior conlleva a que $t_k = s_k$. Puesto que esto sucede para cualquier $k \in \{1, \dots, m\}$, concluimos que $(t_1, \dots, t_m) = (s_1, \dots, s_m)$. Esto prueba que Γ es inyectiva.

Como $[0, 1]^m$ es compacto y $C(X)$ es Hausdorff, de lo anterior deducimos que Γ es un encaje. Así, $\Gamma([0, 1]^m)$ es una m -celda.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Gamma((1, 1, \dots, 1)) &= \bigcup_{i=1}^m \alpha_k(1) = \bigcup_{i=1}^m (N \cup B_k) = N \cup \left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right) \\ &= N \cup (M - N) = M.\end{aligned}$$

Similarmente, $N = \Gamma((0, 0, \dots, 0))$. Más aún, dado $(t_1, \dots, t_m) \in [0, 1]^m$, para cualquier $k \in \{1, \dots, m\}$, se cumple que $N \subset \alpha_k(0) \subset \alpha_k(t_k) \subset \alpha_k(1) \subset N \cup B_k$. En consecuencia, $N \subset \Gamma(t_1, \dots, t_m) \subset \bigcup_{i=1}^m (N \cup B_k) = M$. Por tanto, $M, N \in \Gamma([0, 1]^m)$ y, para cualquier $A \in \Gamma([0, 1]^m)$, es cierto que $N \subset A \subset M$. Con esto terminamos la demostración. \square

El siguiente resultado proporciona, en el caso de las gráficas finitas, la dimensión exacta que poseen los hiperespacios $C_n(X)$ en cualquiera de sus puntos. Se incluye aquí por para tener una mayor completitud de los resultados existentes (véase los comentarios posteriores a las demostraciones de los Teoremas 7.5 y 8.2).

Teorema 7.4 ([4], Teorema 2.4). *Si D es una gráfica finita, entonces, para cualquier $A \in C_n(D)$, se cumple*

$$\dim_A(C_n(D)) = 2n + \sum_{x \in R(D) \cap A} (\text{ord}(x, D) - 2).$$

Teorema 7.5. *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:*

- (a) X es una gráfica finita.
- (b) $\dim_X(C(X))$ es finita.
- (c) $\dim(C(X))$ es finita.
- (d) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(C_n(X))$ es finita.

(e) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\dim(C_n(X))$ es finita.

Demostración. Sea d una métrica para X .

(b) \Rightarrow (a) Supongamos que X no es una gráfica finita. Demostraremos que $\dim_X(C(X)) = \infty$ mostrando que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dim_X(C(X)) \geq n$. Fijemos $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Por el Teorema 4.6, existe un conjunto A con exactamente n elementos tal que $X - A$ es conexo. Como A es finito, podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\{d(x, y) : x, y \in A \text{ y } x \neq y\}$.

Como X es un continuo localmente conexo, para cada $x \in A$ existe un subconjunto abierto y conexo U_x de X tal que $x \in U_x \subset \text{cl}_X(U_x) \subset B_d(x, \varepsilon)$. Sea $C_x = \text{cl}_X(U_x)$. Luego, cada C_x es un subcontinuo de X que posee a x y, para cualesquiera $y, z \in A$ con $y \neq z$, se cumple que $C_y \cap C_z \subset B_d(y, \varepsilon) \cap B_d(z, \varepsilon) = \emptyset$.

Sea $U = \bigcup_{x \in A} U_x$. Obsérvese que U es un subconjunto abierto de X que contiene a A . Como $X - A$ es conexo, por el Lema 2.11, existe un subconjunto cerrado V tal que $A \subset \text{int}_X(V) \subset V \subset U$ y $X - V$ es conexo. Sea $D = \text{cl}_X(X - V)$. Obsérvese que D es un subcontinuo de X y, como $D = X - \text{int}_X(V)$, se cumple que $X - U \subset D \subset X - A$.

Como U_x es abierto en X se tiene que $X - U_x$ es cerrado en X y $\text{Fr}_X(U_x) = \text{cl}_X(U_x) \cap (X - U_x) \subset (X - \bigcup_{y \neq x} U_y) \cap (X - U_x) = X - U \subset D$. Además, $\text{Fr}_X(U_x) \subset C_x$. Como U_x es un subconjunto propio de X y X es conexo, se tiene que $\text{Fr}_X(U_x) \neq \emptyset$. Así, $C_x \cap D \neq \emptyset$ y $C_x \cup D$ es conexo. Obsérvese que este último conjunto es un subcontinuo de X y que $x \in C_x - D$.

Como $U \subset \bigcup_{x \in A} C_x$ y $X - U \subset D$, se tiene que $X = D \cup (\bigcup_{x \in A} C_x)$. Luego, $X - D = \bigcup_{x \in A} (C_x - D)$. Así, $X - D$ es la unión de n conjuntos no vacíos mutuamente separados por pares en X (pues los conjuntos C_x son cerrados en X y ajenos por pares). Aplicando el Teorema 7.3, obtenemos una n -celda M contenida en $C(X)$ tal que $X \in M$. Esto implica que $\dim_X(C(X)) \geq n$. Como $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, concluimos que $\dim_X(C(X)) = \infty$.

(c) \Rightarrow (b) Es inmediato.

(d) \Rightarrow (c) Como $C(X) \subset C_n(X)$, el Teorema 5.2 (1) garantiza la desigualdad $\dim(C(X)) \leq \dim(C_n(X))$. Como $C_n(X)$ tiene dimensión finita, esta última relación implica que $C(X)$ tiene dimensión finita.

(e) \Rightarrow (d) Es inmediato.

(a) \Rightarrow (e) Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, el Teorema 7.4 asegura que, para cada $A \in C_n(X)$,

$$\begin{aligned} \dim_A(C_n(X)) &= 2n + \sum_{p \in A \cap R(X)} (\text{ord}(p, X) - 2) \\ &\leq 2 + \sum_{p \in R(X)} (\text{ord}(p, X) - 2). \end{aligned}$$

Así, $\dim(C_n(X)) \leq 2n + \sum_{p \in R(X)} (\text{ord}(p, X) - 2)$. Como $R(X)$ es finito (por el Teorema 4.4), la relación anterior implica que $\dim(C_n(X))$ es finita.

Esto concluye la demostración del teorema. \square

Note que el uso del Teorema 7.4 en la demostración anterior ha sido únicamente en su consecuencia de que el n -ésimo hiperespacio de una gráfica finita tiene dimensión finita. Dicha propiedad puede obtenerse de resultados previos, como [12, Teorema 6.8.3], el cual se puede obtener como una implicación de [5, 1.1 ó 5.4].

8 Gráficas finitas como vecindades de subespacios

En esta sección se presentan dos condiciones equivalentes a que el n -ésimo hiperespacio de un continuo localmente conexo tenga dimensión finita en un punto dado (Teorema 8.2). Ambas condiciones están relacionadas con la existencia de gráficas finita como vecindades: la primera como vecindades de dicho punto como subespacio del continuo subyacente y la segunda como vecindades de todos los puntos del subespacio dado.

La mayor parte del esfuerzo para la demostración del Teorema 8.2 recae en la prueba del siguiente resultado, presentado originalmente, tanto el enunciado como la demostración, por Illanes [9, Lema 2.2, Afirmación 1].

Teorema 8.1. *Sea X un continuo localmente conexo. Si $A \in C(X)$ y $\dim_A(C(X))$ es finita, entonces existe una gráfica finita D contenida en X , tal que $A \subset \text{int}_X(D)$.*

Demostración. Sea d una métrica para X . Si $A = X$, entonces $\dim_X(C(X))$ es finita y, por el Teorema 7.5, X es una gráfica finita. De esta manera, podemos suponer que $A \neq X$. Sea $m = \dim_A(C(X))$. Haremos la prueba por pasos.

(I) *A es localmente conexo.*

Supongamos que A no es localmente conexo. Aplicando el Teorema 2.13, obtenemos un elemento $p \in A$ tal que A no es conexo en pequeño en p . Sean U una vecindad de p que no contiene vecindades conexas de p , V un subconjunto abierto de A tal que $p \in V \subset \text{cl}_A(V) \subset U$ y D la componente de $\text{cl}_A(V)$ tal que $p \in D$. Luego, $p \notin \text{int}_A(D)$, pues de lo contrario, D es una vecindad conexa de p en A contenida en U . Así, $p \in A - \text{int}_A(D) = \text{cl}_A(A - D)$.

Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $A - D$ tal que $\lim p_n = p$. Como V es vecindad de p en A , podemos suponer que $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está en V . Por otro lado, si existe una subsucesión de $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en alguna componente E de $\text{cl}_A(V)$, como E es cerrado en $\text{cl}_A(V)$, tenemos que $p \in E$. Así, $E = D$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee elementos en D , lo cual no es posible. Por consiguiente, cada componente de $\text{cl}_A(V)$ tiene a lo

más una cantidad finita de elementos de $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por tanto, podemos suponer que existe una sucesión $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de componentes de $\text{cl}_A(V)$ diferentes de D y distintas dos a dos, tales que $p_n \in D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está en $C(\text{cl}_A(V))$, y este último es compacto, podemos suponer que $\lim D_n = D_0$ para algún $D_0 \in C(\text{cl}_A(V))$. Como $p \in D_0 \cap D$, D es una componente de $\text{cl}_A(V)$ y D_0 es un subconjunto conexo de $\text{cl}_A(V)$, tenemos que $D_0 \subset D$. Obsérvese que, por el Teorema 2.9, existe $t_n \in \text{Fr}_A(V) \cap D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\text{Fr}_A(V)$ es compacto, podemos suponer que $\lim t_n = t$ para algún $t \in \text{Fr}_A(V)$. Obsérvese que $t \in \lim D_n = D_0$. Así, $p, t \in D_0$ y, como $p \in V$ y $t \in \text{Fr}_A(V)$, se satisface que $p \neq t$. Luego, D_0 es un continuo no degenerado. Como $D_0 \cap V$ es un subconjunto abierto y no vacío de D_0 , se tiene que $D_0 \cap V$ es infinito.

Tomemos $q_1, \dots, q_{m+1} \in D_0 \cap V$ distintos por pares. Sea W un subconjunto abierto de X tal que $V = W \cap A$. Como X es localmente conexo, existen Q_1, \dots, Q_{m+1} subcontinuos de X ajenos por pares tales que $q_i \in \text{int}_X(Q_i)$ y $Q_i \subset W$, para cada $i \in \{1, \dots, m+1\}$. Sea $B = A \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_{m+1}$. Obsérvese que B es cerrado en X , por ser unión finita de cerrados en X . Asimismo, como $q_i \in A \cap Q_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m+1\}$, por el Teorema 2.6, B es conexo. Así, $B \in C(X)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} B - A &= (A \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_{m+1}) - A \\ &= (Q_1 - A) \cup (Q_2 - A) \cup \dots \cup (Q_{m+1} - A). \end{aligned}$$

Supongamos que $Q_i \subset V$ para algún $i \in \{1, \dots, m+1\}$. Como Q_i es conexo, D es una componente de $\text{cl}_A(V)$ y $q_i \in Q_i \cap D$, esto implica que $Q_i \subset D$. Luego, $Q_i \cap D_n = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $q_i \notin \lim D_n = D_0$. Esto es una contradicción. Así, $Q_i \not\subset V$.

Como $Q_i \cap A \subset W \cap A = V$, se cumple que $Q_i - A \neq \emptyset$. Además, los conjuntos $Q_i - A$ están mutuamente separados dos a dos en X , porque $Q_i - A \subset Q_i$ y los conjuntos Q_i son ajenos por pares y cerrados en X . Por el Teorema 7.3, existe una $(m+1)$ -celda $\mathfrak{M} \in C(X)$ tal que $A \in \mathfrak{M}$. Aplicando el Teorema 5.2 y el Ejemplo 5.3, se tiene que $\dim_A(C(X)) \geq \dim_A(\mathfrak{M}) = m+1$. Esto contradice el hecho que $m = \dim_A(C(X))$. Por lo tanto, A es localmente conexo.

(II) A es un gráfica finita y $\text{fr}_X(A)$ posee a lo más m elementos.

Por el Teorema 5.2, se satisface que $\dim_A(C(A)) \leq \dim_A(C(X))$. De este modo, $\dim_A(C(A))$ es finita y, por el Teorema 7.5, A es una gráfica finita.

Supongamos que existen p_1, \dots, p_{m+1} puntos distintos en $\text{Fr}_X(A)$. Como X es localmente conexo, existen P_1, \dots, P_{m+1} subcontinuos de X ajenos dos a dos, tales que $p_i \in \text{int}_X(P_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, m+1\}$. Sea $B_1 = A \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{m+1}$. Como $p_i \in \text{Fr}_X(A)$, tenemos que $\text{int}_X(P_i) \cap (X - A) \neq \emptyset$ y $P_i - A \neq \emptyset$ para cualquier

$i \in \{1, \dots, m+1\}$. Obsérvese que, al igual que en la prueba de (I), se cumple que $B_1 \in C(X)$, los conjuntos $P_i - A$ están mutuamente separados por pares en X y $B_1 - A = (P_1 - A) \cup (P_2 - A) \cup \dots \cup (P_{m+1} - A)$. Así, en la misma forma que en la prueba de (I), se contradice el hecho que $\dim_A(C(X)) = m$. Por tanto, podemos hacer $\text{Fr}_X(A) = \{x_1, \dots, x_r\}$, donde $r \leq m$ y $x_i \neq x_j$ siempre que $i \neq j$. Hagamos también $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{d(x_i, x_j) : i < j\}$.

(III) Existe una gráfica finita D tal que $A \subset \text{int}_X(D)$.

Demostremos que, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, existe un arco η en X que tiene a x_i como punto extremo y que solo intersecta a A en este punto. En efecto, como X es localmente conexo, existe una vecindad abierta y conexa U de x_i en X , tal que $U \subset (X - (\{x_1, \dots, x_r\} - \{x_i\}))$. Por el Teorema 2.10, el subespacio U es arco conexo. Como $x_i \in \text{Fr}(A)$, podemos tomar $y \in U - A$. Por el Lema 2.4, existe un arco η en U tal que $\eta \cap A = \{t\}$, para algún $t \in A$, y los puntos extremos de η son y y t . Obsérvese que $t \in \text{Fr}_X(A) \cap U = \{x_i\}$. De esta forma, $\eta \cap A = \{x_i\}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, sea \mathcal{K}_i la colección de todos los conjuntos no vacíos Λ , tales que, para cualquier $\alpha \in \Lambda$, se cumple que α es un arco en X que tiene a x_i como punto extremo, α intersecta a A solo en este punto y, si β es un elemento de Λ distinto de α , entonces β intersecta a α justamente en x_i . Por el párrafo anterior, $\mathcal{K}_i \neq \emptyset$.

Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, tomemos $\Gamma_i \in \mathcal{K}_i$. Supongamos que $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r$ tiene más de m elementos. Como de cada conjunto de más de m elementos es posible extraer un subconjunto de $m+1$ elementos, podemos suponer que $|\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r| = m+1$. Por el Lema 2.3 podemos asumir que los arcos de cada Γ_i están contenidos en $B_d(x_i, \varepsilon)$.

Sean $\alpha, \beta \in \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r$, con $\alpha \neq \beta$. Si $\alpha \in \Gamma_i$ y $\beta \in \Gamma_j$, con $i \neq j$, entonces $\alpha \cap \beta \subset B_d(x_i, \varepsilon) \cap B_d(x_j, \varepsilon) = \emptyset$. Si $\alpha, \beta \in \Gamma_i$, entonces $(\alpha - A) \cap \text{cl}_X(\beta - A) = (\alpha - \{x_i\}) \cap \text{cl}_X(\beta - \{x_i\}) = (\alpha - \{x_i\}) \cap \beta = \emptyset$. De manera similar obtenemos que $\text{cl}_X(\alpha - A) \cap (\beta - A) = \emptyset$. Por tanto, en cualquier caso, $\alpha - A$ y $\beta - A$ están mutuamente separados.

En este modo, $\{\alpha - A : i \in \{1, \dots, r\}, \alpha \in \Gamma_i\}$ es una colección de $m+1$ conjuntos mutuamente separados por pares. Por otro lado, obsérvese que el conjunto $B = A \cup (\cup\{\alpha - A : i \in \{1, \dots, r\}, \alpha \in \Gamma_i\})$ es un subcontinuo de X y $B - A = \cup\{\alpha - A : i \in \{1, \dots, r\}, \alpha \in \Gamma_i\}$. De forma similar a la prueba de (I), podemos obtener que $\dim_A(C(X)) \geq m+1$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $|\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r| \leq m$.

Obsérvese que la conclusión del párrafo anterior implica que los elementos de cada \mathcal{K}_i son finitos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $k_i = \max\{|\Gamma| : \Gamma \in \mathcal{K}_i\}$ y Λ_i un elemento de \mathcal{K}_i con k_i elementos. En la misma forma que hicimos en los párrafos anteriores, podemos suponer que $\cup \Lambda_i$ es ajeno a $\cup \Lambda_j$ si $i \neq j$.

Fijemos $i \in \{1, \dots, r\}$. Sea $\Lambda_i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_i}\}$. Obsérvese que $\bigcup \Lambda_i = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_{k_i}$ es un k_i -odo simple con vértice x_i .

(III.1) x_i no es punto de acumulación de $R(X)$.

Supongamos que x_i es un punto de acumulación de $R(X)$, es decir, que existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $R(X) - \{x_i\}$ tal que $\lim z_n = x_i$ y sus términos son diferentes por pares. Como X es un continuo localmente conexo, podemos tomar un subconjunto abierto y conexo U_n de X tal que $x_i \in U_n \subset \text{cl}_X(U_n) \subset B(x_i, \frac{1}{n}) - (\text{Fr}_X(A) - \{x_i\})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim z_n = x_i$, podemos suponer que $z_n \in U_n$ siempre que $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese, además, que $\lim \text{cl}_X(U_n) = \{x_i\}$.

Por otro lado, como $A - \text{Fr}_X(A)$ es abierto tanto en X como en A , por el Teorema 3.4, se cumple que $\text{ord}(w, X) = \text{ord}(w, A - \text{Fr}_X(A)) = \text{ord}(w, A)$, para cualquier $w \in A - \text{Fr}_X(A)$. Esto implica que $R(X) \cap A \subset R(A) \cup \text{Fr}_X(A)$. Como A es una gráfica finita, por el Teorema 4.4, $R(A)$ es finito. Por tanto, $R(X) \cap A$ es finito. De esta manera, podemos suponer que cada z_n no es elemento de A .

Obsérvese que, por el Teorema 2.10, U_n es arco conexo. Sea β_n un arco en U_n que va de z_n a x_i . Sean $b \in \beta_n \cap A$ y $\gamma = [z_n, b]_{\beta_n}$. Luego, se cumple que $\gamma \cap A \neq \emptyset$ y $\gamma - A \neq \emptyset$. Aplicando la conexidad de γ , se tiene que $\text{Fr}_X(A) \cap \gamma \neq \emptyset$. Por otro lado, $\text{Fr}_X(A) \cap \gamma \subset \text{Fr}_X(A) \cap U_n = \{x_i\}$; es decir, $x_i \in \gamma$. Esto implica que, $\beta_n = \gamma$ y $\beta_n \cap A = \{x_i\}$. Luego, por la elección de k_i y de los arcos $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_i}$, existe $j \in \{1, \dots, k_i\}$, tal que $\beta_n \cap (\alpha_j - \{x_i\}) \neq \emptyset$. Como esto sucede para cada $n \in \mathbb{N}$, algún α_j intersecta a una cantidad infinita de los arcos β_n . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\beta_n \cap (\alpha_1 - \{x_i\}) \neq \emptyset$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a construir el arco γ_n de la siguiente manera. Supongamos primero que $z_n \in \alpha_1$. Como X es localmente conexo y $U_n - \{x_i\}$ es una vecindad de z_n , existe un subconjunto abierto y conexo S de X tal que $z_n \in S \subset U_n - \{x_i\}$. Por el Teorema 2.10, se cumple que S es arco conexo. Como S es abierto en X y $S \cap \alpha_1$ es abierto en α_1 , se tiene, por el Teorema 3.4, que $\text{ord}(z_n, S) = \text{ord}(z_n, X) \geq 3$ y $\text{ord}(z_n, S \cap \alpha_1) = \text{ord}(z_n, \alpha_1) \leq 2$. Esto implica que $S \neq S \cap \alpha_1$; es decir, $S \not\subset \alpha_1$. Sea $p_n \in S - \alpha_1$. Como $\alpha_1 \cap S$ es un subconjunto cerrado de S que contiene al menos a z_n , por el Lema 2.4, existen $t_n \in S$ y un arco γ_n contenido en S , tales que $\gamma_n \cap \alpha_1 = \{t_n\}$ y $E(\gamma_n) = \{p_n, t_n\}$. Supongamos ahora que $z_n \notin \alpha_1$. Por el Lema 2.4 existe un arco γ_n contenido en U_n tal que $E(\gamma_n) = \{z_n, t_n\}$ y $\gamma_n \cap (A \cup \alpha_1) = \{t_n\}$, para algún $t_n \in U_n$. Si $t_n \in \text{Fr}_X(A)$, entonces $t_n \in U_n \cap \{x_1, \dots, x_r\} = \{x_i\}$; es decir, $t_n = x_i$ y $\gamma_n \cap A = \{x_i\}$. Como $\beta_n \cap \alpha_1 \neq \emptyset$ y z_n es un punto extremo de β_n , por el Lema 2.2, existe un subarco γ_n de β_n tal que $\gamma_n \cap \alpha_1$ consta de un solo punto t_n y $E(\gamma_n) = \{z_n, t_n\}$. Obsérvese que $t_n \neq x_i$ pues de lo contrario $\gamma_n = [z_n, x_i]_{\beta_n} = \beta_n$ y, por consiguiente, $\beta_n \cap \alpha_1 = \{x_i\}$, lo cual no es posible. En ambos casos, tenemos que $x_i \notin \gamma_n$ y $\gamma_n \cap \alpha_1 = \{t_n\}$.

Obsérvese que, por el Lema 6.7, se cumple que $\lim t_n = x_i$ y $\lim \gamma_n = \{x_i\}$. Si

existe una subsucesión de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que todos sus elementos poseen un punto p en común, entonces $p \in \lim \gamma_n$ y $p = x_i$. Así, $x_i \in \gamma_j$ para una cantidad infinita de $j \in \mathbb{N}$. Esto es una contradicción. Por tanto, podemos suponer que los arcos $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ son ajenos por pares.

Por otro lado, como $\alpha_1 \not\subset A$, se satisface que $A \cup \alpha_1 \neq A$ y $\eta > 0$, donde $\eta = H_d(A, A \cup \alpha_1)$.

Probaremos que $\dim_A(C(X)) \geq m + 1$. Para tal fin, sea \mathfrak{U} una vecindad de A en $C(X)$ tal que $\mathfrak{U} \subset B_{H_d}(A, \frac{1}{2}\eta)$. Sea $\delta > 0$ tal que $B_{H_d}(A, 2\delta) \subset \mathfrak{U}$. Por el Lema 2.3, existe $t \in \alpha_1$ tal que el arco $\alpha_0 = [x_i, t]_{\alpha_1}$ está contenido en $B_d(x_i, \delta)$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in B_d(x_i, \delta) - [t, q_1]_{\alpha_1}$ y $\gamma_n \in B_{H_d}(\{x_i\}, \delta)$ siempre que $n \geq N$, en donde q_1 es el punto extremo de α_1 distinto de x_i . Como cada punto t_n es elemento de α_1 , se tiene que todos los t_n , para $n \geq N$, son elementos de α_0 . Aplicando el Teorema 2.6, obtenemos que el conjunto $B_0 = A \cup \alpha_0 \cup (\bigcup\{\gamma_n : n > N\})$ es conexo. Obsérvese que el conjunto $\{A, \alpha_0\} \cup \{\gamma_n : n > N\} \cup \{\{x_i\}\}$ es un subconjunto cerrado de 2^X . Aplicando el Lema 6.8, obtenemos que B_0 es un subconjunto cerrado de X . Así, $B_0 \in C(X)$.

Obsérvese que tanto B_0 como $A \cup \alpha_0$ están contenidos en $N_d(A, \delta)$ y son elementos de $B_{H_d}(A, 2\delta) \subset \mathfrak{U}$. Del mismo modo, $A \cup \alpha_0$ y $B_0 \cup \alpha_1$ son subcontinuos de X y, como $B_0 \cup \alpha_1 \supset A \cup \alpha_1$, se satisface que $H_d(A, B_0 \cup \alpha_1) \geq H_d(A, A \cup \alpha_1) = \eta$ y $B_0 \cup \alpha_1 \notin \text{cl}_{C(X)}(B_{H_d}(A, \frac{1}{2}\eta)) \supset \text{cl}_{C(X)}(\mathfrak{U})$.

Obsérvese que el conjunto $\{\gamma_n : n \geq N + m\} \cup \{\{x_i\}\}$ es cerrado en 2^X . Por el Lema 6.8, se cumple que $C = \{x_i\} \cup \{\gamma_n : n \geq N + m\}$ es cerrado en X . Como x_i no es elemento de algún γ_n y los arcos γ_n son ajenos entre sí, se cumple que C es ajeno a γ_n , para cada $N < n < N + m$. Análogamente, como $(\alpha_1 - \alpha_0) \cup \{t\}$ no posee a x_i y es ajeno a γ_n , para cualquier $n \geq N$, se deduce que $(\alpha_1 - \alpha_0) \cup \{t\}$ es ajeno a C . Además, $(\alpha_1 - \alpha_0) \cup \{t\}$ es el arco $[t, q_1]_{\alpha_1}$. Así, $\{C, (\alpha_1 - \alpha_0) \cup \{t\}\} \cup \{\gamma_n : N < n < N + m\}$ es una familia de $m + 1$ subconjuntos cerrados de X no vacíos y ajenos por pares.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} & (B_0 \cup \alpha_1) - (A \cup \alpha_0) \\ &= (A \cup C \cup (\bigcup\{\gamma_n : N < n < N + m\}) \cup \alpha_1) - (A \cup \alpha_0) \\ &= (C \cup (\bigcup\{\gamma_n : N < n < N + m\}) \cup \alpha_1) - (A \cup \alpha_0). \end{aligned}$$

Como C , $\bigcup\{\gamma_n : N < n < N + m\}$ y α_1 no están contenidos en $A \cup \alpha_0$, se desprende de lo anterior que $(B_0 \cup \alpha_1) - (A \cup \alpha_0)$ es la unión de $m + 1$ conjuntos separados por pares en X . De esta manera, podemos aplicar el Teorema 7.3 para obtener una $(m + 1)$ -celda \mathfrak{M} contenida en $C(X)$ tal que $B_0 \cup \alpha_1, A \cup \alpha_0 \in \mathfrak{M}$. Como $A \cup \alpha_0 \in \mathfrak{M} \cap \text{int}_{C(X)}(\mathfrak{U}) \neq \emptyset$ y $B_0 \cup \alpha_1 \in \mathfrak{M} \cap (C(X) - \text{cl}_{C(X)}(\mathfrak{U})) \neq \emptyset$, se tiene que $\mathfrak{M} - \text{Fr}_{C(X)}(\mathfrak{U})$ es desconexo. Aplicando el Teorema 5.4 obtenemos que

$\dim(\mathfrak{M} \cap \text{Fr}_{C(X)}(\mathfrak{U})) \geq m$. Luego, por el Teorema 5.2, $\dim(\text{Fr}_{C(X)}(\mathfrak{U})) \geq m$. Como \mathfrak{U} es una vecindad abierta de A arbitraria (salvo por la cota superior en su diámetro), se sigue que $\dim_A(C(X)) \geq m + 1$. Esto es una contradicción y prueba que x_i no es un punto de acumulación de $R(X)$.

(III.2) $A \cup (\bigcup \Lambda_i)$ es una vecindad de x_i en X .

Sea T_i una vecindad abierta de x_i en X tal que $T_i \cap R(X) \subset \{x_i\}$. Por el Lema 2.3, podemos suponer que $\alpha_j \subset T_i$ para cada $j \in \{1, \dots, k_i\}$. Dado $j \in \{1, \dots, k_i\}$, sea q_j el punto extremo de α_j distinto de x_i . Como X es localmente conexo, podemos tomar una vecindad abierta y conexa W_i de x_i en X , tal que $W_i \subset T_i \cap B_d(x_i, \varepsilon) - \{q_1, \dots, q_{k_i}\}$. Por el Teorema 2.10, W_i es arco conexo.

Afirmamos que $W_i \subset A \cup \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{k_i}$. Supongamos, por el contrario, que existe $z \in W_i - (A \cup \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{k_i})$. Por el Lema 2.4, existe un arco γ contenido en X tal que $E(\gamma) = \{z, t_0\}$, para algún $t_0 \in W_i$, y $\gamma \cap (A \cup \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{k_i}) = \{t_0\}$. Si $t_0 \in A$, entonces $A \cap \gamma = \{t_0\}$, $t_0 \in \text{Fr}_X(A) \cap B_d(x_i, \varepsilon) = \{x_i\}$, $t_0 = x_i$ y $\alpha_j \cap \gamma = \{t_0\}$, para cada $j \in \{1, \dots, k_i\}$. Esto contradice la elección de k_i y de los arcos $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_i}$. Si, por el contrario, $t_0 \notin A$, entonces existe $j \in \{1, \dots, k_i\}$ tal que $t_0 \in \alpha_j - A$. De esta forma, $\alpha_j \cap \gamma = \{t_0\}$, con $t_0 \in W_i - A \subset X - \{q_j, t_0\} = X - E(\alpha_j)$. Esto implica que $\alpha_j \cup \gamma$ es un triodo simple con vértice t_0 y que $t_0 \in R(X) \cap T_i - \{x_i\}$. Esto contradice la elección de T_i . Como ambos casos conducen a una contradicción, concluimos que $W_i \subset A \cup \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{k_i} = A \cup (\bigcup \Lambda_i)$. Por tanto, $A \cup (\bigcup \Lambda_i)$ es una vecindad de x_i en X .

(III.3) Existe una gráfica finita D tal que $A \subset \text{int}_X(D)$.

Como A es una gráfica finita y cada $\bigcup \Lambda_i$ es un k_i -odo simple que intersecta a A únicamente en x_i y es ajeno a cualquier otro $\bigcup \Lambda_j$ distinto, aplicando repetidas veces el Lema 4.2 obtenemos que el conjunto $D = A \cup (\bigcup \{\bigcup \Lambda_i : i \in \{1, \dots, r\}\})$ es una gráfica finita. Además, se tiene que $A = \text{int}_X(A) \cup \text{Fr}_X(A) = \text{int}_X(A) \cup \{x_1, \dots, x_r\} \subset \text{int}_X(A) \cup (\bigcup \{\text{int}_X(A \cup (\bigcup \Lambda_i)) : i \in \{1, \dots, r\}\}) \subset D$. Así, $A \subset \text{int}_X(D)$, como queríamos. Esto concluye la prueba de este teorema. \square

Teorema 8.2. Sean X un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y $F \in C_n(X)$. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) $\dim_F(C_n(X))$ es finita.

(b) Existe una gráfica finita D contenida en X tal que $F \subset \text{int}_X(D)$.

(c) Cada punto de F posee una vecindad en X que es una gráfica finita.

Demostración. (a) \Rightarrow (b). Sea k el número de componentes de F . Obsérvese que $k \leq n$. Supongamos que $k = 1$; es decir, $F \in C(X)$. Como $C(X) \subset C_n(X)$, por

el Teorema 5.2, se tiene que $\dim_F(C(X)) \leq \dim_F(C_n(X))$. Así, $\dim_F(C(X))$ es finita. Luego, por el Teorema 8.1, existe una gráfica finita D contenida en X tal que $F \subset \text{int}_X(D)$.

Ahora supongamos que $k \geq 2$. Sean F_1, \dots, F_k las k componentes de F . Obsérvese que F_1, \dots, F_k son subcontinuos de X ajenos por pares. Por el Lema 2.8, existen subcontinuos Z_1, \dots, Z_k de X ajenos entre sí, tales que $F_i \subset \text{int}_X(Z_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Fijemos $i \in \{1, \dots, k\}$. Como $F_i \in \langle \text{int}_X(Z_i) \rangle_1 \subset C(Z_i)$, se cumple que $C(Z_i)$ es una vecindad de F_i en $C(X)$. Así, aplicando el Teorema 5.2, $\dim_{F_i}(C(X)) = \dim_{F_i}(C(Z_i))$.

Note que la función $f : C(Z_i) \rightarrow \prod_{j=1}^k C(Z_j)$, dada por

$$A \xrightarrow{f} (F_1, \dots, F_{i-1}, A, F_{i+1}, \dots, F_k),$$

es un encaje que cumple $f(F_i) = (F_1, \dots, F_k)$. Así, aplicando el inciso (1) del Teorema 5.2, obtenemos que

$$\dim_{F_i}(C(Z_i)) = \dim_{f(F_i)} f(C(Z_i)) \leq \dim_{(F_1, \dots, F_k)} \left(\prod_{j=1}^k C(Z_j) \right).$$

Por otro lado, por el Teorema 6.12, existe un homeomorfismo $\varphi : \prod_{j=1}^k C(Z_j) \rightarrow \langle Z_1, \dots, Z_k \rangle_k$ con $(F_1, \dots, F_k) \xrightarrow{\varphi} \bigcup_{j=1}^k F_j = F$. Luego,

$$\dim_{(F_1, \dots, F_k)} \left(\prod_{j=1}^k C(Z_j) \right) = \dim_F(\langle Z_1, \dots, Z_k \rangle_k).$$

Como $\langle Z_1, \dots, Z_k \rangle_k \subset C_n(X)$, aplicando el Teorema 5.2, se tiene que

$$\dim_F(\langle Z_1, \dots, Z_k \rangle_k) \leq \dim_F(C_n(X)).$$

Se sigue de las relaciones anteriores que $\dim_{F_i}(C(X)) \leq \dim_F(C_n(X))$ y, por tanto, que la dimensión de $C(X)$ en F_i es finita. Luego, por el Teorema 8.1, existe una gráfica finita E_i contenida en X , tal que $F_i \subset \text{int}_X(E_i)$. Como F_i es conexo y $F_i \subset \text{int}_X(E_i) \cap \text{int}_X(Z_i)$, existe una componente C_i de $\text{int}_X(E_i) \cap \text{int}_X(Z_i)$ tal que $F_i \subset C_i$. Como $\text{int}_X(E_i) \cap \text{int}_X(Z_i)$ es abierto en X y X es localmente conexo, C_i es abierto en X . Sea $D_i = \text{cl}_X(C_i)$. Luego, D_i es conexo y cerrado en X y, como $E_i \cap Z_i$ es un cerrado de X que contiene a C_i , se satisface que $D_i \subset E_i \cap Z_i$. Por tanto, D_i es un subcontinuo de E_i y también de Z_i . De esto modo, aplicando el Teorema 4.5, obtenemos que D_i es una gráfica finita. Además, se cumple que $F_i \subset C_i \subset D_i$ y $F_i \subset \text{int}_X(D_i) \subset D_i \subset Z_i$.

Como D_1, \dots, D_k es una colección de gráficas finitas contenidas en X y ajenas por pares, por el Lema 4.3, existe una gráfica finita D contenida en X tal que $\bigcup_{j=1}^k D_j \subset D$. Así, $F = \bigcup_{j=1}^k F_j \subset \bigcup_{j=1}^k \text{int}_X(D_j) \subset D$. Por tanto, $F \subset \text{int}_X(D)$.

(b) \Rightarrow (a). Como $F \in \langle \text{int}_X(D) \rangle_n \subset C_n(D)$, se cumple que $C_n(D)$ es una vecindad de F en $C_n(X)$. Así, por el Teorema 5.2, $\dim_F(C_n(X)) = \dim_F(C_n(D))$. Aplicando el Teorema 7.5, obtenemos que $\dim(C_n(D))$ es finita. De esta manera, tanto $\dim_F(C_n(D))$ como $\dim_F(C_n(X))$ son finitas.

(b) \Rightarrow (c). Esta implicación es inmediata, porque cada punto de F tiene a D como vecindad.

(c) \Rightarrow (b). Para cada $x \in F$ sea D_x una gráfica finita contenida en X tal que $x \in \text{int}_X(D_x)$. Como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo E_x de X tal que $x \in E_x \subset \text{cl}_X(E_x) \subset \text{int}_X(D_x)$. Como F es compacto, existen $r \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_r \in F$, tales que $F \subset \bigcup_{j=1}^r E_{x_j}$. Sea $E = \bigcup_{j=1}^r \text{cl}_X(E_{x_j})$. Obsérvese que E posee k componentes, para alguna $k \leq r$. Sean C_1, \dots, C_k tales componentes y fijemos $i \in \{1, \dots, k\}$. Obsérvese también que C_i es un continuo y que $C_i \subset E \subset \bigcup_{j=1}^r \text{int}_X(D_{x_j})$. Luego, dado $x \in C_i$, existe $y(x) \in \{x_1, \dots, x_r\}$ tal que $x \in \text{int}_X(D_{y(x)})$. Por el Teorema 3.4, se satisface que $\text{ord}(x, C_i) \leq \text{ord}(x, X) = \text{ord}(x, D_{y(x)})$. Así, $\text{ord}(x, C_i) \leq \text{ord}(x, D_{y(x)})$, para cada $x \in C_i$. Además, por el Teorema 4.4, cada $D_{y(x)}$ tiene orden finito en x y tiene orden menor o igual en todos salvo una cantidad finita de sus puntos. Como $\{y(x) : x \in X\} = \{x_1, \dots, x_r\}$ es un conjunto finito se desprende de lo anterior que C_i tiene orden finito en cada uno de sus puntos y orden menor o igual que dos en todos salvo una cantidad finita de sus puntos. Aplicando de nuevo el Teorema 4.4, tenemos que C_i es una gráfica finita. De esta manera, C_1, \dots, C_k es una colección de gráficas finitas ajenas por pares. Aplicando el Lema 4.3, obtenemos una gráfica finita D contenida en X tal que $E = \bigcup_{j=1}^k C_j \subset D$. Así, $F \subset \bigcup_{j=1}^r E_{x_j} \subset E \subset D$ y, por tanto, $F \subset \text{int}_X(D)$. \square

Note que el Teorema 8.2 permite aplicar el Teorema 7.4 a todos los puntos en los que el n -ésimo hiperespacio de un continuo localmente conexo tiene dimensión finita, ofreciendo una manera de calcular dicha dimensión.

Bibliografía

- [1] C. O. Christenson and L. Voxman. *Aspects of Topology*. BCS, Associates, 1998.
- [2] D. W. Curtis and R. M. Schori. 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the hilbert cube. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80:927–931, 1974.
- [3] D. W. Curtis and R. M. Schori. Hyperspaces of peano continua are hilbert cubes. *Fund. Math.*, 101(1):19–38, 1978.

- [4] V. Martínez de-la Vega. Dimension of the n -fold hyperspaces of graphs. *Houston J. Math.*, 32(3):783–799, 2006.
- [5] R. Duda. On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, i. *Fund. Math.*, 62:265–286, 1968.
- [6] R. Engelking. *General topology*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, 1989.
- [7] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, and V. Martínez de-la Vega. Uniqueness of hyperspaces of peano continua. *Rocky Mountain J. Math.*, 43(5):1583–1624, 2013.
- [8] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension Theory*, volume 4 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1941.
- [9] A. Illanes. Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$, II. *Topology Proc.*, 156(3):549–557, 2009.
- [10] A. Illanes and S. B. Nadler Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, volume 126 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1999.
- [11] J. L. Kelley. Hyperspaces of a continuum. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 52:22–36, 1942.
- [12] S. Macias. *Topics on Continua*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. CRC Press, 2005.
- [13] Jr. S. B. Nadler. *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, volume 49 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. New York-Basel: Marcel Dekker Inc., 1978.
- [14] Jr. S. B. Nadler. *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
hyltry@hotmail.com
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 7

El espacio de selecciones de un abanico suave

Mauricio Esteban Chacón Tirado
FCFM-BUAP

Resumen

Dado un continuo X , una selección es una función continua $s : C(X) \rightarrow X$ tal que $s(A) \in A$ para todo $A \in C(X)$. En este capítulo demostramos que el espacio de selecciones de un abanico suave es un retracto absoluto métrico, separable y completo.

1 Introducción

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X , podemos considerar su hiperespacio de subcontinuos $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un continuo}\}$; a $C(X)$ lo dotaremos de la métrica de Hausdorff. También se puede considerar el espacio $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$. Observemos que $F_1(X)$ es homeomorfo a X , mediante la función que asocia a cada $x \in X$ el singular $\{x\}$.

Como $F_1(X) \subset C(X)$, un problema lógico es preguntarse cuándo $F_1(X)$ es retracto de $C(X)$; en este trabajo estudiaremos un tipo particular de retracciones de $C(X)$ a $F_1(X)$, llamadas selecciones. Una selección es una función continua $s : C(X) \rightarrow X$ tal que $s(A) \in A$ para todo $A \in C(X)$; observemos que $s(\{x\}) = x$ para todo $x \in X$. Como X es naturalmente homeomorfo a $F_1(X)$, una selección puede ser considerada como un tipo especial de retracción de $C(X)$ a $F_1(X)$. Diremos que un continuo X es seleccionable si existe selección $s : C(X) \rightarrow X$.

En el teorema [1, 10.10] se demuestra que si un continuo X es seleccionable, entonces tal continuo debe ser un dendroide. Un dendroide es un continuo hereditariamente unicoherente y hereditariamente arcoconexo. Una dendrita es un dendroide localmente arcoconexo. Es fácil ver que toda dendrita es seleccionable.

En 2006, R. Cauty probó que el espacio de selecciones de una dendrita es homeomorfo al espacio l_2 de sucesiones reales que son cuadrado sumables.

Nosotros en este trabajo nos enfocamos a un tipo especial de dendroides, los llamados abanicos suaves y probamos que el espacio de selecciones de un abanico suave es un retracto absoluto métrico, separable y completo.

2 Preliminares

Un *continuo* X es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Dado un continuo X , definimos su *hiperespacio de subcontinuos*

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un continuo}\}.$$

Al espacio $C(X)$ lo dotaremos de la *métrica de Hausdorff* H , definida para cada pareja $A, B \in C(X)$ por

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\},$$

donde $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}$ denota la nube de radio ε centrada en A . El espacio $C(X)$ con tal métrica es compacto y conexo, tales hechos se demuestran en [2].

Un teorema básico sobre el comportamiento de sucesiones convergentes en $C(X)$ es el siguiente.

Teorema 2.1. Sean $\{A_n\}_n$ una sucesión en $C(X)$ y $A \in C(X)$ tal que $A_n \rightarrow A$, entonces un punto $x \in X$ está en A si y sólo si para cada n existe $a_n \in A_n$ tal que $a_n \rightarrow x$.

Un continuo X se dice *unicoherente* si siempre que $X = Y \cup Z$, con Y, Z subcontinuos de X , se tiene que $Y \cap Z$ es conexo. Diremos que X es *hereditariamente unicoherente* si todo subcontinuo Y de X es unicoherente.

Observemos que la circunferencia unitaria de \mathbb{R}^2 es un continuo que no es unicoherente, pues lo podemos poner como la unión de los arcos $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } x \geq 0\}$ y $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } x \leq 0\}$, y la intersección de tales arcos, es el conjunto $\{(0, 1), (0, -1)\}$, que es desconexo.

Un *dendroide* es un continuo arcoconexo hereditariamente unicoherente y hereditariamente arcoconexo. Dados 2 puntos x, y en un dendroide X , existe un único arco en X con puntos extremos x y y , pues si hubiera 2 de tales arcos, entonces podemos encontrar un subespacio Y de X homeomorfo a una circunferencia, sin embargo X es hereditariamente unicoherente y Y no es unicoherente. Denotaremos por xy al único arco del dendroide con puntos extremos x y y .

Un punto x de un dendroide X se dice *punto de ramificación* si $X \setminus \{x\}$ tiene más de 2 componentes.

Un *abanico* es un dendroide con un único punto de ramificación, al cual llamaremos el vértice del abanico. Así, la imagen que debemos tener de un abanico es de un continuo con un punto especial, el vértice, del cual salen arcos que sólo se intersectan en el vértice.

Definición 2.1. Una *selección* es una función continua $s : C(X) \rightarrow X$, tal que para todo $A \in C(X)$ se tiene que $s(A) \in A$. Diremos que un continuo X es *seleccionable* si existe selección $s : C(X) \rightarrow X$.

Definición 2.2. Para un continuo X , sea

$$\Sigma(X) = \{s : C(X) \rightarrow X : s \text{ es selección}\}.$$

A $\Sigma(X)$ lo llamaremos el *espacio de selecciones* del continuo X , y lo dotaremos con la métrica de la convergencia uniforme, que llamaremos ρ , la cual se define para cada pareja $r, s \in \Sigma(X)$ como

$$\rho(r, s) = \sup\{d(r(A), s(A)) : A \in C(X)\}.$$

Teorema 2.2. Si X es un continuo seleccionable, entonces X es un dendroide.

El teorema anterior se encuentra demostrado en [1].

Las dendritas son dendroides localmente conexos. R. Cauty demuestra en [3] que el espacio de selecciones de una dendrita es homeomorfo al espacio vectorial topológico l_2 , definido por

$$l_2 = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\},$$

dotado de la norma $\|(a_n)_n\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$.

l_2 es un espacio topológico de dimensión infinita, no compacto, contraíble, arcoconexo y localmente arcoconexo ([5]). En este trabajo nosotros veremos que el espacio de selecciones de un abanico suave tiene estas mismas propiedades.

Definición 2.3. Un abanico X con vértice v se dice *suave* para toda sucesión convergente $x_n \rightarrow x$ en X , se cumple que la sucesión de arcos $\{px_n\}_n$ es convergente y converge al arco px en $C(X)$.

Se sabe que todo abanico suave se puede encajar en el cono sobre el conjunto de Cantor ([4]), esto nos permitirá hacer cálculos explícitos con las selecciones de abanicos suaves.

3 Resultados principales

En la totalidad de este capítulo, X será un abanico suave encajado en el cono de Cantor que tiene vértice en el origen y Cantor en la circunferencia unitaria de \mathbb{R}^2 . Es decir, X consta del origen de \mathbb{R}^2 y de arcos que salen del origen.

Primero veremos que $\Sigma(X)$ no es compacto, para este fin empezaremos con la siguiente proposición:

Proposición 3.1. *Sea*

$$\Sigma_0([0, 1]) = \{s : C([0, 1]) \rightarrow [0, 1] : s \text{ es selección y } s([0, x]) = 0, \\ \text{para todo } x \in [0, 1]\},$$

entonces $\Sigma_0([0, 1])$ es un subconjunto cerrado de $\Sigma([0, 1])$ que no es compacto.

Demostración. Veamos que $\Sigma_0(X)$ no es secuencialmente compacto.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $s_n \in \Sigma_0(X)$ como:

$$s_n([a, b]) = \begin{cases} a & \text{si } a < \frac{1}{2}, \\ a + \left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n (b-a) \left(a - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq a < 1 \\ 1 & \text{si } a=1. \end{cases}$$

Para todo $x \in [0, 1]$, $s_n([0, x]) = 0$.

Veamos que s_n está bien definida; es decir, que para cada $n \in \mathbb{N}$, s_n es continua, selección y un elemento de $\Sigma_0(X)$.

Claramente se tiene que $a \leq s_n([a, b])$; observemos que $s_n([a, b]) \leq b$ para $a < \frac{1}{2}$ y $a = 1$; si $\frac{1}{2} \leq a < 1$, entonces $\left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n \left(a - \frac{1}{2}\right) < \left(a - \frac{1}{2}\right) < 1$, así pues,

$$a + \left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n \left(a - \frac{1}{2}\right) (b-a) < a + (b-a) = b,$$

de manera que $a \leq s_n([a, b]) \leq b$ para todo $[a, b] \in C([0, 1])$.

Ahora veamos la continuidad de s_n . Es inmediato que s_n es continua en $\{[a, b] : a < \frac{1}{2}\}$; cuando $a = \frac{1}{2}$, entonces $\left(a - \frac{1}{2}\right) = 0$, por tanto $s_n([a, b]) = a$. Cuando $\frac{1}{2} \leq a < 1$, $a + \left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n (b-a) \left(a - \frac{1}{2}\right)$ es continuo, y se pega bien en el caso de cuando $a < \frac{1}{2}$, por tanto s_n es continuo en $\{[a, b] : a \leq b, a < 1\}$. Cuando $a \rightarrow 1$, entonces $b \rightarrow 1$, y como $a \leq s_n([a, b]) \leq b$, entonces

$$\lim_{a \rightarrow 1} s_n([a, b]) = 1 = s_n([1, 1]).$$

Por tanto, s_n es continua y es selección para toda n . Así pues, para toda $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in \Sigma_0(X)$.

Ahora veamos cuál es el límite puntual de las s_n :

- Si $a \leq \frac{1}{2}$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $s_n([a, b]) = a$, por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n([a, b]) = a$.
- Si $\frac{1}{2} \leq a \leq b < 1$, entonces $\left(\frac{b-a}{1-a}\right) < 1$, por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n = 0$; así, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n([a, b]) = a$.

- Si $\frac{1}{2} \leq a \leq b = 1$, entonces $\left(\frac{b-a}{1-a}\right) = 1$, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{1-a}\right)^n \left(a - \frac{1}{2}\right) (b-a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) (b-a);$$

así, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n([a, 1]) = a + (1-a)(a - \frac{1}{2})$.

Con lo cual hemos visto que s_n converge puntualmente a la siguiente función s :

$$s([a, b]) = \begin{cases} a & \text{si } a < \frac{1}{2}, \\ a & \text{si } \frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ y } b < 1 \\ a + (1-a)(a - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ y } b = 1 \\ 1 & \text{si } a=1. \end{cases}$$

Observemos que s no es continua, pues $\lim_{m \rightarrow \infty} s([\frac{3}{4}, 1 - \frac{1}{m}]) = \frac{3}{4}$, y $s([\frac{3}{4}, 1]) = \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \neq \frac{3}{4}$. De esta manera, hemos probado que $\Sigma_0(X)$ no es secuencialmente compacto, y por tanto no es compacto.

Veamos ahora que $\Sigma_0(X)$ es cerrado en $\Sigma(X)$. Sea $\{s_n\}$ una sucesión en $\Sigma_0([0, 1])$ que converge a una función $g \in \Sigma([0, 1])$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0, 1]$ se tiene que $g_n([0, x]) = 0$, por tanto $g([0, x]) = 0$. De manera que $g \in \Sigma_0([0, 1])$, con lo cual $\Sigma_0(X)$ es un subconjunto cerrado de $\Sigma([0, 1])$. \square

Recordemos que X es un abanico suave, encajado en el cono del conjunto de Cantor que tiene como vértice al origen de \mathbb{R}^2 y Cantor en la circunferencia unitaria. Al vértice lo denotaremos por v .

Vamos a introducir unos conceptos que nos serán útiles al momento de referirnos a ciertos subcontinuos del abanico X .

Definición 3.1. Diremos que $L \in C(X)$ es una *pata* del abanico X si L es un arco con un extremo en el vértice v , y es maximal con respecto a esta propiedad.

Observemos que para cada $x \in X \setminus \{v\}$ existe una única pata L que contiene a x .

Definición 3.2. Dado un abanico suave Y y una pata L de Y , un *racimo* de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de L en Y es el conjunto

$$R(\varepsilon, L, Y) = \{x : \text{existe pata } K \text{ de } Y \text{ tal que } x \in K \text{ y } K \subset N(\varepsilon, L)\}.$$

Definición 3.3. Dado un abanico suave Y y una pata L de Y , un *semirracimo* de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de L en Y es el conjunto

$$SR(\varepsilon, L, Y) = R(\varepsilon, L, Y) \setminus \{v\}.$$

Dado un abanico suave Y , los semirracimos siempre son conjuntos abiertos de Y , como veremos a continuación.

Proposición 3.2. *Sea L una pata de un abanico suave Y y $\varepsilon > 0$, entonces el semirracimo $SR(\varepsilon, L, Y)$ es un conjunto abierto de Y .*

Demostración. Sea $A = Y \setminus (SR(\varepsilon, L, Y))$, el complemento del semirracimo. Tomemos una sucesión $\{a_n\}_n$ de A y $a \in X$ tal que $a_n \rightarrow a \in Y$. Veamos que $a \in A$.

Si $a = v$, ya terminamos.

Supongamos que $a \neq v$. Tomando una subsucesión de $\{a_n\}_n$, podemos suponer que $a_n \neq v$ para toda n . Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea P_n la pata de Y que contiene a a_n . Como las patas son arcos con un extremo en el vértice, entonces para cada n existe $y_n \in X$ tal que $P_n = vy_n$. Tomando una subsucesión de $\{y_n\}_n$, podemos suponer que existe $y \in Y$ tal que $y_n \rightarrow y$. Al ser Y un abanico suave, entonces $P_n = vy_n \rightarrow vy$ en $C(X)$. Por el teorema 2.1, $a \in vy$.

Como $a_n \notin R(\delta, L, Y)$, entonces $P_n \not\subset N(\varepsilon, L)$; tomemos $x_n \in P_n$ con $x_n \notin N(\varepsilon, L)$, y tomando una subsucesión podemos suponer que existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Por el teorema 2.1, $x \in vy$, y como $N(\varepsilon, L)$ es abierto, entonces $x \notin N(\varepsilon, L)$, por tanto, $vy \notin N(\varepsilon, L)$. Ahora, vy está contenido en una pata de Y , que llamaremos K , como $vy \subset K$ y $vy \not\subset N(\varepsilon, L)$, entonces $a \in K$ y $K \not\subset N(\varepsilon, L)$, entonces $a \notin R(\varepsilon, L, Y)$.

Así pues, A es un subconjunto cerrado de Y y por tanto $SR(\varepsilon, L, Y)$, su complemento, es abierto. \square

Proposición 3.3. *Definamos*

$$\Sigma_0(X) = \{s : s \text{ es selección y } s(A) = v \text{ para todo } A \text{ que contenga a } v\},$$

entonces $\Sigma_0(X)$ es un subconjunto cerrado y no compacto de $\Sigma(X)$.

Demostración. Veamos que $\Sigma_0(X)$ es un subconjunto cerrado de $\Sigma(X)$. Tomemos una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ en $\Sigma_0(X)$ que converga a una función $s \in \Sigma(X)$. Sea $A \in C(X)$ tal que $v \in A$, entonces $s_n(A) = v$ para toda n , como $s(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(A) = v$, entonces $s \in \Sigma_0(X)$. Así pues, $\Sigma_0(X)$ es cerrado.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la pata más larga de X es $[0, 1] \times \{0\}$ (si no, dividimos X por la longitud de la pata más larga y luego rotamos X). Definamos una función

$$\alpha : \Sigma_0(X) \rightarrow \Sigma_0([0, 1])$$

mediante

$$\alpha(s)([a, b]) = \pi(s([a, b] \times \{0\})),$$

para todo subcontinuo $[a, b] \in C([0, 1])$, donde $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección a la primera coordenada.

Veamos que α es una función continua y sobre.

Sea $x \in [0, 1]$, observemos que para todo $s \in \Sigma_0(X)$,

$$\alpha(s)([0, x]) = \pi(s([0, x] \times \{0\})) = \pi(v) = 0,$$

pues $v \in [0, x] \times \{0\}$, entonces α está bien definida y claramente α es una función continua.

Veamos que α es sobre; dado $s \in \Sigma_0([0, 1])$, definimos $\phi : C(X) \rightarrow X$ por

$$\phi(A) = \begin{cases} v & \text{si } v \in A \\ (s([a, b]), \theta) & \text{si } A = ([a, b], \theta), \text{ visto como coordenadas polares;} \end{cases}$$

observemos que $\phi \in \Sigma_0(X)$, además

$$\begin{aligned} \alpha(\phi)([a, b]) &= \pi(\phi([a, b] \times \{0\})) \\ &= \pi(s([a, b], 0)) \\ &= s([a, b]), \end{aligned}$$

por tanto $\alpha(\phi) = s$, así pues, α es sobre.

Como $\Sigma_0([0, 1])$ no es compacto, entonces $\Sigma_0(X)$ no puede ser compacto. \square

Corolario 3.4. $\Sigma(X)$ no es compacto.

Demostración. $\Sigma_0(X)$ es un subconjunto cerrado y no compacto de $\Sigma(X)$. \square

Teorema 3.5. $\Sigma(X)$ es contraíble.

Demostración. Sea g la selección definida para cada $A \in C(X)$ por

$$g(A) = \text{punto de } A \text{ más cercano al vértice.}$$

Definamos una función $K : \Sigma(X) \times [0, 1] \rightarrow \Sigma(X)$ por

$$K(s, t)(A) = t(s(A)) + (1 - t)g(A), \quad A \in C(X).$$

Veamos que $K(s, t)$ es una selección de X para cada $s \in \Sigma(X)$ y $t \in [0, 1]$: Sea $A \in C(X)$, si $v \in A$, entonces $g(A) = v$ y $K(s, t)(A)$ es un punto del arco $vs(A) \subset A$; si $v \notin A$, entonces A se queda contenida en una pata de X , así, tanto $g(A)$ como $s(A)$ se quedan en la misma pata, y también el arco $g(A)s(A)$, con lo cual

$$K(s, t)(A) \in g(A)s(A) \subset A,$$

por tanto K está bien definida y K es continua, pues es suma de funciones continuas.

Como $K(S, 0) = g$ y que $K(S, 1) = S$ para toda $S \in \Sigma(X)$, entonces K es una contracción de $\Sigma(X)$ a g . \square

Corolario 3.6. $\Sigma(X)$ es arcoconexo.

Demostración. Al ser $\Sigma(X)$ contraíble, es arcoconexo. \square

Observación 3.7. Se puede probar la arcoconexidad de $\Sigma(X)$ de otra manera, quizás más intuitiva, es decir: Dada una pareja de selecciones $f, g \in \Sigma(X)$, para cada tiempo $t \in [0, 1]$, definimos $f_t \in \Sigma(X)$, donde para cada $A \in \Sigma(X)$, $f_t(A)$ es el punto del arco $f(A)g(A)$ que está en proporción t entre $f(A)$ y $g(A)$, más específicamente, pongamos $f(A) = (r_1, \theta_1)$, $g(A) = (r_2, \theta_2)$, vistos en coordenadas polares y definamos f_t en coordenadas polares como:

$$f_t(A) = \begin{cases} (tr_1 + (1-t)r_2, \theta_1) & \text{si } \theta_1 = \theta_2, \\ (tr_1 - (1-t)r_2, \theta_1) & \text{si } tr_1 \geq (1-t)r_2 \\ ((1-t)r_2 - tr_1, \theta_2) & \text{si } tr_1 \leq (1-t)r_2. \end{cases}$$

Se puede probar que tal f_t es continua, f_t es selección pues $f_t(A)$ elige un punto del arco $f(A)g(A) \subset A$, y $\{f_t : t \in [0, 1]\}$ es un arco en $\Sigma(X)$.

Como la topología de $\Sigma(X)$ es la topología de la convergencia uniforme, podemos controlar el coeficiente de continuidad uniforme de 2 funciones que estén muy cercanas.

Proposición 3.8. Sea $s \in \Sigma(X)$ y $\{s_n\}_n$ una sucesión de $\Sigma(X)$ que converja uniformemente a s . Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $B, C \in C(X)$ con $H(B, C) < \delta$ y $n > N$, se cumple que $d(s(B), s(C)) < \varepsilon$ y $d(s_n(B), s_n(C)) < \varepsilon$.

Demostración. Como $s : C(X) \rightarrow X$ y $C(X)$ es compacto, entonces s es uniformemente continua, sea $\delta > 0$ tal que si $B, C \in C(X)$ cumplen que $H(B, C) < \delta$, entonces $d(s(B), s(C)) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Como $s_n \rightarrow s$ uniformemente, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $A \in C(X)$ y $n > N$ se tiene que $d(s(A), s_n(A)) < \frac{\varepsilon}{4}$. De esta manera, si $H(B, C) < \delta$ y $n > N$,

$$\begin{aligned} d(s_n(B), s_n(C)) &\leq d(s_n(B), s(B)) + d(s(B), s(C)) + d(s(C), s_n(C)) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

\square

Ahora probaremos que $\Sigma(X)$ es localmente arcoconexo, para eso necesitamos un modo de controlar selecciones cercanas, el siguiente lema nos ayudará.

Lema 3.4. Sean $s \in \Sigma(X)$ y $A \in C(X)$ tales que $v \in A$ y $s(A) \neq v$. Sea $\{s_n\}_n$ una sucesión en $\Sigma(X)$ tal que $s_n \rightarrow s$ uniformemente, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $s_n(A)$ y $s(A)$ están en la misma pata.

Demostración. Supongamos que el lema no es cierto, es decir, que tenemos una subsucesión $\{s_{n_m}\}_m$ de $\{s_n\}_n$ tal que para toda $m \in \mathbb{N}$, $s_{n_m}(A)$ y $s(A)$ están en patas distintas. Como $\{s_{n_m}\}$ es subsucesión de $\{s_n\}_n$, entonces que $g_{n_m} \rightarrow s$ uniformemente. Para mantener limpia la notación, sustituiremos $\{s_{n_m}\}_m$ por $\{s_n\}_n$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $d(v, s(A)) > \varepsilon$, tomando una subsucesión de $\{s_n\}$, también podemos suponer que $d(v, s_n(A)) > \varepsilon$ para toda n . Por la proposición 3.8, podemos encontrar $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $B, C \in C(X)$ y $H(B, C) < \delta$, entonces $d(s(B), s(C)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y si $n > N$, entonces $d(s_n(B), s_n(C)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea L la pata de A que contiene a $s(A)$. Sea $M > N$ tal que el racimo $R(\delta, L, A)$ contenga $s_M(A)$, tal M existe, pues el racimo $R(\delta, L, A)$ es una vecindad de $s(A) \neq v$. Observemos que como $s_M(A) \in R(\delta, L, A)$ entonces la pata K de A que contiene a $s_M(A)$ se queda contenida en $R(\delta, L, A)$, como K es la pata que contiene a $s_M(A)$, $K \neq L$.

Sea $E = (A \setminus SR(\delta, L, A)) \cup (L \cap A)$; E es cerrado, pues $SR(\delta, L, A)$ es abierto. Además, E es conexo, ya que cada para cada punto $p \in E$, el arco vp se queda contenido en E .

Para cada $t \in [0, 1]$, sea $B(t, v)$ la bola cerrada en \mathbb{R}^2 de radio t con centro en el origen, definamos

$$A_t = E \cup (B(t, v) \cap R(\delta, L, A) \cap A).$$

Observemos que A_t es subcontinuo de A para todo t , pues E y $B(t, v) \cap R(\delta, L, A) \cap A$ son subcontinuos de A que además contienen a v .

Ahora veremos que $H(A, A_t) < \delta$ para todo t . Claramente $A_t \subset N(\delta, A)$. Sea $a \in A \setminus A_t$, entonces $a \in R(\delta, L, A)$, de aquí que $a \in N(\delta, L) \subset N(\delta, A_t)$, por tanto $A \subset N(\delta, A_t)$; entonces $H(A, A_t) < \delta$ para todo t .

Observemos que $A_0 = E = (A \setminus SR(\delta, L, A)) \cup L$, que no contiene a la pata K (recordemos que $g_M(A) \in K$). $A_1 = E \cup R(\delta, L, A)$, pues $R(\delta, L, A) \subset X \subset B(1, v)$, así, $A_1 = (A \setminus SR(\delta, L, A)) \cup R(\delta, L, A) = A$.

Así pues, hemos conectado a $A_1 = A$ con $A_0 = (A \setminus R(\delta, L, A)) \cup L$ mediante una trayectoria en $C(X)$ que no se aleja más que δ de A_1 .

Como K fue borrado de A_0 al quitar el racimo $R(\delta, L, A)$, entonces $s_M(A_0) \notin K$, pero $s_M(A_1) \in K$, con lo cual la imagen bajo s_M de la trayectoria $\{A_t : t \in [0, 1]\}$ debe ser una trayectoria en X que se queda a distancia menor que ε de $s_M(A)$ y que cambia de patas, por tanto debe pasar por el vértice, lo cual es una contradicción, pues $d(v, s_M(A)) > \varepsilon$. \square

Cuando A, B son subcontinuos de X que contienen al vértice, podemos conectarlos en $C(X)$ por una trayectoria que no se aleja mucho de A , como veremos en el siguiente lema.

Lema 3.5. Sean A, B subcontinuos de X , y ε tal que $H(A, B) < \varepsilon$, $v \in A$ y $v \in B$, entonces existe una trayectoria $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = A, \alpha(1) = A \cup B$, y para toda $t \in [0, 1]$, $H(A, \alpha(t)) < \varepsilon$.

Demostración. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ definida por

$$\alpha(t) = A \cup (B(t, v) \cap B).$$

α es una trayectoria en $C(X)$ que une $\alpha(0) = A$ con $\alpha(1) = A \cup B$.

Veremos que $H(A, \alpha(t)) < \varepsilon$ para toda t . Como $H(A, B) < \varepsilon$, entonces $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$, con lo cual $A \cup B \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $t \in [0, 1]$, al ser $\alpha(t)$ subconjunto de $A \cup B$, entonces

$$\alpha(t) \subset A \cup B \subset A \cup N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, A); \quad (1)$$

como $A \subset \alpha(t)$, entonces

$$A \subset \alpha(t) \subset N(\varepsilon, \alpha(t)). \quad (2)$$

De 1 y 2, $H(A, \alpha(t)) < \varepsilon$ para toda t , que es lo que queríamos. \square

El lema anterior nos permite controlar selecciones de continuos cercanos, el caso que más nos interesa es el siguiente.

Lema 3.6. Sean $A \in C(X)$ tal que $v \in A$ y sea $s \in \Sigma(X)$ tal que $s(A) \neq v$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $v \in A_n$ para toda n , entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > M$, $s(A_n)$ y $s(A)$ están en una misma pata de X .

Demostración. Supongamos que el teorema no es cierto, es decir, que tenemos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $C(X)$ con $v \in A_n$ para toda n , que converge a A , y que para toda n , $s(A_n)$ está en una pata de X distinta a la pata que contiene a $s(A)$. Sea ε con $d(v, s(A)) > \varepsilon$, y tomando una subsucesión de $\{A_n\}_n$, podemos suponer que $d(v, s_n(A)) > \varepsilon$ para toda n . Sea $\delta > 0$ tal que si $H(B, C) < \delta$, entonces $d, (s(B), s(C)) < \varepsilon$.

Sea M tal que $H(A, A_M) < \delta$, por el lema 3.5, podemos encontrar una trayectoria que una A con $A \cup A_M$ que no se aleje más que δ de A , por tanto la imagen bajo s de tal trayectoria es una trayectoria en X que no se aleja más que ε de $s(A)$, entonces tal trayectoria se queda contenida en una pata de X , así, $s(A \cup A_M)$ es un punto de la pata que contiene a $s(A)$. Análogamente, intercambiando A y A_M , obtenemos que $s(A \cup A_M)$ un punto de la pata que contiene a $s(A_M)$, lo cual es una contradicción, pues tales patas son distintas. \square

Proposición 3.9. *Sea $s \in \Sigma(X)$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $g \in \Sigma(X)$ y $\rho(s, g) < \delta$, entonces para toda $A \in C(X)$ se tiene que $s(A)$ y $g(A)$ están en la misma pata o $d(v, s(A)) < \varepsilon$ y $d(v, g(A)) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $g_n \in \Sigma(X)$, $A_n \in C(X)$ tales que $s(A_n)$ y $g_n(A_n)$ están en distintas patas, $\rho(s, g_n) < \frac{1}{n}$ y $d(v, s(A_n)) \geq 2\varepsilon$ o $d(v, g_n(A_n)) \geq 2\varepsilon$.

Observemos que como $s(A_n)$ y $g_n(A_n)$ están en distintas patas, entonces el arco $s(A_n)g_n(A_n)$ contiene al vértice v , como $s(A_n)g_n(A_n) \subset A_n$ entonces $v \in A_n$ para toda n .

Tomando una subsucesión podemos suponer que existe $A \in C(X)$ tal que $A_n \rightarrow A$; como $v \in A_n$ para toda n , entonces $v \in A$. Observemos que $d(v, s(A)) > \varepsilon$. Por la proposición 3.8, existe $\eta > 0$ y $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $H(B, C) < \eta$, entonces $d(s(B), s(C)) < \varepsilon$ y $d(g_n(B), g_n(C)) < \varepsilon$ para $n > M_0$.

Como $A_n \rightarrow A$, sea $M_1 > M_0$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\eta}{4}$ para $n > M_1$. Sea $n > M_1$, como $v \in A_n$, entonces A y $A \cup A_n$ pueden ser unidos por una trayectoria en $C(X)$ con diámetro menor que $\frac{\eta}{2}$; análogamente podemos encontrar una trayectoria que una A_n con $A \cup A_n$ de diámetro menor que $\frac{\eta}{2}$; de esta manera, uniendo tales trayectorias podemos encontrar una trayectoria que una A con A_n con diámetro menor que η . La imagen bajo s de tal trayectoria será una trayectoria en X a distancia ε de $s(A)$, y por tanto no puede pasar por el vértice; así, tal imagen se deberá quedar en una pata. Con esto, si $n > M_1$, $g_n(A_n)$, $g_n(A \cup A_n)$ y $g_n(A)$ están en una misma pata, que es distinta a la pata que contiene a $s(A)$.

Sin embargo, por el lema 3.4, $g_n(A)$ y $s(A)$ deben estar en la misma pata para n suficientemente grande.

Así, hemos obtenido que para n suficientemente grande, $g_n(A)$ y $s(A)$ deben estar en la misma pata y además en patas distintas, una contradicción. \square

Teorema 3.10. $\Sigma(X)$ es localmente conexo.

Demostración. Sean $s \in \Sigma(X)$ y $\varepsilon > 0$. Por la proposición 3.9, existe $\delta < \varepsilon$ tal que si $g \in \Sigma(X)$ y $\rho(s, g) < \delta$, entonces para toda $A \in C(X)$ se tiene que $d(v, s(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(v, g(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$ o $s(A)$ y $g(A)$ están en la misma pata. Sean f_t un elemento de la trayectoria definida en la Observación 3.7 y $A \in C(X)$. Si $s(A)$ y $g(A)$ están en la misma pata, entonces $d(s(A), f_t(A)) < \delta$; si $d(v, s(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(v, g(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $d(s(A), f_t(A)) \leq d(s(A), v) + d(v, f_t(A)) \leq d(s(A), v) + d(v, g(A)) < \varepsilon$. De esta manera tenemos que $\rho(s, f_t) \leq \varepsilon$ para todo elemento f_t de la trayectoria que una a s y g .

Hemos obtenido pues, que todo punto s y $\varepsilon > 0$, existe vecindad arcoconexa V de s tal que $V \subset B(\varepsilon, s)$, donde $B(\varepsilon, s) = \{g : \rho(g, s) < \varepsilon\}$, o equivalentemente,

que para todo abierto U que contenga a s , existe V vecindad arcoconexa de s tal que $V \subset U$.

Sea $W = \{g : \text{existe trayectoria que une } g \text{ y } s \text{ en } B(\varepsilon, s)\}$. Claramente s es un elemento de W , W es arcoconexo y $W \subset B(\varepsilon, s)$. Veremos que W es un conjunto abierto, sea $g \in W$, entonces existe vecindad arcoconexa V de g tal que $V \subset B(\varepsilon, s)$; sea $v \in V$, entonces existe una trayectoria que une a v y g en $B(\varepsilon, s)$ y otra que une a g con s en $B(\varepsilon, s)$, uniendo tales trayectorias, obtenemos una trayectoria que une a v con s , y que se queda en $B(\varepsilon, s)$, por tanto $V \subset W$, con lo cual W es un conjunto abierto de $\Sigma(X)$.

Así pues, $\Sigma(X)$ es localmente arcoconexo. \square

Ahora veremos que $\Sigma(X)$ es un retracto absoluto, para lo cual usaremos una construcción tipo Dugundji, como la vista en [6].

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\Delta_n = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) : 0 \leq t_i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$.

Definición 3.7. Un espacio Y tiene una *estructura convexa* si existe una función E , con dominio $\mathcal{M} = \cup_{n=1}^{\infty} Y^n \times \Delta_n$ y con contradominio Y , que tiene las siguientes propiedades:

1. $E((y, y, \dots, y), (t_1, t_2, \dots, t_n)) = y$,
2. $E((y_1, y_2, \dots, y_n), (t_1, t_2, \dots, t_n)) = E((y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)}), (t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}))$ para toda permutación $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$,
3. $E((y_1, y_2, \dots, y_n), (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, t_n)) = E((y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n), (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n))$,
4. E es continua en las t_i 's.

Una estructura convexa nos será de utilidad para demostrar que $\Sigma(X)$ es un retracto absoluto, primero veamos que $\Sigma(X)$ tiene una estructura convexa.

Proposición 3.11. $\Sigma(X)$ tiene una estructura convexa E .

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \dots, s_n \in \Sigma(X)$, $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Delta_n$. Nuestro fin es definir una selección $E((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n))$, para eso, definiremos cómo se evalúa en cada $A \in C(X)$.

Sea

$$\mathcal{P} = \{P : P \text{ es pata de } X\}.$$

Tomemos A un subcontinuo de X . Para cada $P \in \mathcal{P}$, sea

$$S_P = \sum \{t_i \|s_i(A)\| : i \text{ cumple que } s_i(A) \in P\}.$$

Recordemos que una suma vacía se define como 0.

Sean $P_{Max} \in \mathcal{P}$ tal que $S_{P_{Max}} \geq S_P$ para todo $P \in \mathcal{P}$ y sea $P_{max} \in \mathcal{P} \setminus \{P_{Max}\}$ tal que $S_{P_{max}} \geq S_P$ para todo $P \in \mathcal{P} \setminus \{P_{Max}\}$. Sea x el único elemento de la pata P_{Max} tal que $\|x\| = S_{P_{Max}} - S_{P_{max}}$, y definamos

$$E((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n))(A) = x;$$

cuando no existe un único P_{Max} , entonces hay selecciones $s_i(A)$ y $s_j(A)$ en patas distintas de X , con lo cual $v \in A$, y también tenemos que $S_{P_{max}} = S_{P_{Max}}$, por tanto x tiene norma 0, es decir, $x = v$; así pues, E está bien definida en este caso, pues no importa cómo elijamos P_{Max} y P_{max} , siempre tenemos que $x = v \in A$.

Ahora veamos que en realidad x siempre es un punto de A : Sea j tal que $s_j(A)$ es la selección de A con mayor norma que está en la pata P_{Max} . Observemos que

$$\begin{aligned} S_{P_{Max}} &= \sum \{t_i \|s_i(A)\| : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\ &\leq \sum \{t_i \|s_j(A)\| : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\ &\leq \|s_j(A)\| \sum \{t_i : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\ &\leq \|s_j(A)\|, \end{aligned}$$

Supongamos que existe selección $s_k(A)$ que está es una pata distinta a $s_j(A)$, de aquí tenemos que $v \in A$, observemos que $0 \leq S_{P_{Max}} - S_{P_{max}} \leq \|s_j(A)\|$, por tanto $x \in vs_j(A)$; como v y $s_j(A)$ son elementos de A , entonces el arco $vs_j(A) \subset A$, así, $x \in A$.

Ahora supongamos que todas las selecciones $s_i(A)$ se quedan en la pata P_{Max} , sea k tal que $s_k(A)$ es la selección de A con menor norma, entonces

$$\begin{aligned} S_{P_{Max}} &= \sum \{t_i \|s_i(A)\| : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\ &\geq \sum \{t_i \|s_k(A)\| : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\ &\geq \|s_k(A)\| \sum \{t_i : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P_{Max}\} \\ &\geq \|s_k(A)\|, \end{aligned}$$

pues $\{i : i \text{ es tal que } s_i(A) \in P\} = \{1, \dots, n\}$. Entonces x es un elemento del arco $s_k(A)s_j(A) \subset A$, por tanto $E((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n))(A) \in A$.

Veamos ahora que para cada n , $s_1, \dots, s_n \in \Sigma(X)$, $(t_1, \dots, t_n) \in \Delta_n$, la función $E((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n)) : C(X) \rightarrow X$ es continua, por simplicidad, llamemos F a tal función. Sean

$$C_P(X) = \{A \in C(X) : \text{existe } L \text{ pata de } X \text{ tal que } A \subset L\},$$

$$C_0(X) = \{A \in C(X) : v \in A\}.$$

Observemos que $C_P(X)$ y $C_0(X)$ son subconjuntos cerrados de $C(X)$ que cubren a $C(X)$.

Primero veremos que F es continua en $C_P(X)$, sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_P(X)$ que converja a un subcontinuo $A \in C_P(X)$; entonces las definiciones de $F(A)$ y $F(A_m)$ son simplemente las combinaciones convexas normales en \mathbb{R}^2 de las selecciones $s_1(A), \dots, s_n(A)$ y $s_1(A_m), \dots, s_n(A_m)$, respectivamente, pues todos esos puntos viven en una misma pata. Como para toda $i = 1, \dots, n$, $\lim_{m \rightarrow \infty} s_i(A_m) = s_i(A)$ en \mathbb{R}^2 , entonces las combinaciones convexas $F(A_m)$ convergen a la combinación convexa $F(A)$, por tanto F es continua en $C_P(X)$.

Ahora veremos que F es continua en $C_0(X)$. Sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_0(X)$ que converja a un subcontinuo $A \in C_0(X)$. Sea $J = \{i : s_i(A) \neq v\}$. Sea $\varepsilon > 0$, por el lema 3.6, podemos tomar $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \in J$, $s_j(A_m)$ está en la misma pata que $s_j(A)$ si $m > M$, y además podemos pedir que $d(s_i(A_m), s_i(A)) < \varepsilon$ para toda $i = 1, \dots, n$, $m > M$. Así, las definiciones auxiliares $S_{P_{Max}}$ y $S_{P_{max}}$ se mueven poco cuando pasamos de A a A_m si $m > M$, con lo cual $F(A_m)$ y $F(A)$ están muy cercanos. Así $E((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n))$ realmente es una selección de X .

Ahora veremos que E cumple con las 4 propiedades de la definición 3.7. Sean $n \in \mathbb{N}$, $s, s_1, s_2, \dots, s_n \in \Sigma(X)$, $(t_1, \dots, t_n) \in \Delta_n$ y $A \in C(X)$.

1. Si $s(A) = v$, entonces para cada $P \in \mathcal{P}$ se tiene que $S_P = 0$, por tanto $x = v$, es decir $E((s, \dots, s), (t_1, \dots, t_n))(A) = v = s(A)$. Si $s(A) \neq v$, entonces $P_{Max} = \|s(A)\|$ y $P_{max} = 0$, entonces $E((s, \dots, s), (t_1, \dots, t_n))(A) = s(A)$. Así, hemos probado que $E((s, \dots, s), (t_1, \dots, t_n)) = s$.
2. Sea $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ una permutación. Como la definición de S_P no depende del orden que tomemos el conjunto $\{s_i(A) : i = 1, 2, \dots, n\}$, entonces $E((s_1, s_2, \dots, s_n), (t_1, t_2, \dots, t_n))(A) = E((s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, \dots, s_{\sigma(n)}), (t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}))(A)$.
3. Queremos calcular $x = E((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_n))(A)$, y compararlo con $y = E((s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n))(A)$. Como $t_j = 0$, la definición de S_P que usamos para definir

$$x = E((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_n))(A)$$

no cambia si no tomamos en cuenta a $s_j(A)$, pues $t_j \|s_j(A)\| = 0$, así, la definición auxiliar S_P es igual cuando queremos definir

$$y = E((s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n))(A),$$

por tanto $x = y$, como queríamos.

4. Continuidad en t_i 's.

Sea $G : \Delta_n \times C(X)$ definida por $G(T, A) = E((s_1, \dots, s_n), T)(A)$. Veremos que G es una función continua.

Primero veamos que G es continua en $\Delta_n \times C_P(X)$. Cuando $A \in C_P(X)$, la definición de $E((s_1, \dots, s_n), T)(A)$ es simplemente la combinación convexa normal en \mathbb{R}^2 con respecto a T de $(s_1(A), \dots, s_n(A))$, entonces la función G es continua en $\Delta_n \times C_P(X)$.

Ahora veamos que G es continua en $\Delta_n \times C_0(X)$. Sea $A \in C_0(X)$, $T = (t_1, \dots, t_n) \in \Delta_n$ y $\varepsilon > 0$. Sean $\{S_P^A : P \text{ es pata de } X\}$, $S_{P_{Max}}^A$ y $S_{P_{max}}^A$ las construcciones auxiliares con las cuales definimos $E((s_1, \dots, s_n), T)(A)$. Tomemos $J = \{i : s_i(A) \neq v\}$.

Supongamos que $S_{P_{Max}}^A > S_{P_{max}}^A$ y sea $\eta < \frac{\min\{S_{P_{Max}}^A - S_{P_{max}}^A, \varepsilon\}}{2n}$, que también cumpla $\|s_j(A)\| > \eta$ para todo $j \in J$.

Sea $\delta > 0$ tal que si $B \in C_0(X)$ y $H(A, B) < \delta$, entonces para todo $j \in J$, $s_j(A)$ y $s_j(B)$ están en la misma pata y $d(s_i(A), s_i(B)) < \eta$ para $i = 1, \dots, n$, con esto, si $s_i(A) \neq v$, entonces $s_i(B) \neq v$. Tomemos $R = (r_1, \dots, r_n) \in \Delta_n$ y sean $\{S_P^B : P \text{ es pata de } X\}$, $S_{P_{Max}}^B$, $S_{P_{max}}^B$ las construcciones auxiliares con las cuales definimos $E((s_1, \dots, s_n), R)(B)$. Sea P pata de X , recordemos que $S_P^A = \sum\{t_i \|s_i(A)\| : s_i(A) \in P\}$ y $S_P^B = \sum\{r_i \|s_i(B)\| : s_i(B) \in P\}$. Tomemos j tal que $s_j(B) \in P$, si $j \in J$, entonces $s_j(A) \neq v$, y además $s_j(A)$ y $s_j(B)$ están en la misma pata; si $j \notin J$, entonces $s_j(A) = v$, con lo cual también $s_j(A) \in P$. Así, para cada pata P de X , $\{i : s_i(B) \in P\} \subset \{i : s_i(A) \in P\}$, y además si $s_i(A) \in P$ y $s_i(B) \notin P$, entonces $s_i(A) = v$. Así, si T y R están muy cercanos, entonces $t_i \|s_i(A)\|$ y $r_i \|s_i(B)\|$ distan no más de η para toda i , entonces S_P^A y S_P^B distan no más de $n * \eta$ para toda pata P de X , con lo cual $S_{P_{Max}}^A$ está $\frac{\varepsilon}{2}$ cercano de $S_{P_{Max}}^B$ y más aún, P_{Max}^A es el mismo que P_{Max}^B . También $S_{P_{max}}^A$ está $\frac{\varepsilon}{2}$ cercano de $S_{P_{max}}^B$, entonces $E((s_1, \dots, s_n), T)(A)$ y $E((s_1, \dots, s_n), R)(B)$ están en la misma pata (P_{Max}^A) a distancia no más que ε , si R, T están muy cercanos y $H(A, B) < \delta$.

Ahora supongamos que $S_{P_{Max}}^A = S_{P_{max}}^A$, con lo cual $E((s_1, \dots, s_n), T)(A) = v$. Usando los mismos argumentos que en el caso anterior, podemos obtener que S_P^A y S_P^B están $\frac{\varepsilon}{2}$ cercanos si $H(A, B) < \delta$ y R, T están muy cercanos, entonces $S_{P_{Max}}^B$ está ε cercano de $S_{P_{max}}^A$, por tanto $E((s_1, \dots, s_n), R)(B)$ se queda ε cercano del vértice.

Así, G es continua, y por tanto $E((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n)) : C(X) \rightarrow X$ es continua en los t_i 's.

□

Además, la estructura E tiene la siguiente propiedad.

Proposición 3.12. Sean $s \in \Sigma(X)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\eta > 0$ tal que para toda $n, s_1, \dots, s_n \in \Sigma(X)$, $T = (t_1, \dots, t_n) \in \Delta_n$, si $\rho(s, s_i) < \eta$, entonces

$$\rho(E((s, \dots, s), T), E((s_1, \dots, s_n), T)) < \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existen $n_m, s_1^m, \dots, s_{n_m}^m \in \Sigma(X)$ y $T^m = (t_1^m, \dots, t_{n_m}^m)$ tal que $\rho(s, s_i^m) < \frac{1}{n}$ y

$$\rho(E((s, \dots, s), T), E((s_1^m, \dots, s_{n_m}^m), T)) \geq \varepsilon;$$

esto quiere decir que existe $A_n \in C(X)$ tal que

$$d(E((s, \dots, s), T)(A_n), E((s_1^m, \dots, s_{n_m}^m), T)(A_n)) \geq \varepsilon, \quad (3)$$

Sea m tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$, si todos los elementos $s_1^m(A_m), \dots, s_{n_m}^m(A_m)$ se quedan contenidos en una pata, entonces $E((s_1^m, \dots, s_{n_m}^m), T^m)(A_m)$ es simplemente la combinación convexa en \mathbb{R}^2 asociada a T^m de $(s_1^m(A_m), \dots, s_{n_m}^m(A_m))$, es decir, $\sum_{i=1}^{n_m} t_i^m s_i^m(A_m)$; así

$$\varepsilon \leq d(E((s_1^m, \dots, s_{n_m}^m), T^m)(A_m), s(A_m)) < \frac{1}{m},$$

lo cual no tiene sentido, entonces existen j_m y k_m tales que $s_{j_m}^m(A_m)$ y $s_{k_m}^m(A_m)$ están en patas distintas, con esto $v \in A_m$. Observemos que $s_{k_m}^m \rightarrow s$ y que $s_{j_m}^m \rightarrow s$.

Tomando una subsucesión, podemos suponer que $\{A_m\}$ converge a un continuo $A \in C(X)$. Como $s_{k_m} \rightarrow s$ uniformemente y $A_m \rightarrow A$, entonces $s_{k_m}(A_m) \rightarrow s(A)$.

Supongamos que $s(A) \neq v$. Sea $\eta < d(v, s(A))$, y podemos suponer que $\eta < d(v, s_{k_m}^m(A_m))$ para toda m . Por la proposición 3.9, existe M tal que si $m > M$, entonces $s(A_m)$ y $s(A)$ están en la misma pata. Sea δ y $N > M$ tal que si $H(B, C) < \delta$, entonces $d(s(B), s(C)) < \eta$, y si $m > N$, entonces $d(s_{k_m}^m(B), s_{k_m}^m(C)) < \eta$. Sea $P > N$ tal que si $m > P$, entonces $H(A, A_m) < \delta$. Tomemos $m > P$, como en la demostración de la proposición 3.9, podemos conectar A con A_m con una trayectoria α de diámetro menor que δ , la imagen bajo s_{k_m} de tal trayectoria es una trayectoria de diámetro menor que η , como en tal trayectoria está $s_{k_m}(A_m)$, y tal punto está a distancia mayor que η de v , entonces tal trayectoria se queda sólo en una pata, por tanto $s_{k_m}(A)$ está en la misma pata que $s_{k_m}(A_m)$. Por la proposición 3.4, $s(A)$

está en la misma pata que $s_{k_m}^m(A)$ para m suficientemente grande, que es la misma pata en la que está $s_{k_m}^m(A_m)$. Análogamente con j_m , $s(A)$ está en la misma pata que en la que está $s_{j_m}^m(A_m)$, una contradicción, pues $s_{k_m}^m(A_m)$ y $s_{j_m}^m(A_m)$ están en patas distintas.

Entonces podemos suponer que $s(A) = v$. Existe M tal que si $m > M$, entonces $d(v, s(A_m)) < \frac{\varepsilon}{4}$, sea $m > M$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}$, entonces para $i = 1, \dots, n_m$ $\rho(s, s_i^m) < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}$, por tanto $d(s(A_m), s_i^m(A_m)) < \frac{\varepsilon}{4}$; así,

$$d(v, s_i^m(A_m)) \leq d(v, s(A_m)) + d(s(A_m), s_i^m(A_m)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

para $i = 1, \dots, n_m$, entonces

$$d(v, E((s_1^m, \dots, s_{n_m}^m), T^m)(A_m)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

como $d(v, s(A_m)) < \frac{\varepsilon}{4}$, tenemos que

$$d(s(A_m), E((s_1^m, \dots, s_{n_m}^m), T^m)(A_m)) < \varepsilon,$$

una contradicción a (3).

Así, hemos obtenido una contradicción en todos los casos, y hemos acabado la demostración de la proposición. \square

Ahora estamos listos para demostrar que $\Sigma(X)$ es un retracto absoluto, o lo que es lo mismo, un extensor absoluto métrico.

Teorema 3.13. El espacio de selecciones del abanico suave X , $\Sigma(X)$ es un retracto absoluto.

Demostración. Por [2, Theorem 9.1] esto es equivalente a probar que $\Sigma(X)$ es un extensor absoluto para espacios métricos. De manera que si (Z, d) es un espacio métrico, A un subconjunto cerrado de Z y $g : A \rightarrow \Sigma(X)$ es una función continua, sólo necesitamos probar que existe $G : Z \rightarrow A$ un afunción continua que extiende a g , (i. e. $G|_A = g$).

Dado $p \in Z - A$ definimos $B_p = \{z \in Z : d(p, z) < \frac{1}{2}d(p, A)\}$

Como $Z - A$ es métrico por [8, 5.1.3], es paracompacto y por tanto existe $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}'\}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\{B_p : p \in Z - A\}$, esto es que:

(a) U_α es abierto para toda $\alpha \in \mathcal{J}$,

(b) para toda $p \in Z - A$ existe $\alpha \in \mathcal{J}$ y $q \in Z$ tal que $p \in U_\alpha \subset B_q$ y

- (c) para toda $p \in Z - A$ existe un número finito $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{J}$ tal que $B_p \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$ y $B_p \cap U_\alpha = \emptyset$ para toda $\alpha \in \mathcal{J} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Por [8, 5.1.9] existe $\Phi = \{\phi_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$ una partición de la unidad subordinada a \mathcal{U} . Esto es que cada $\phi_\alpha : Z \setminus A \rightarrow [0, 1]$ es una función continua que cumple con las siguientes propiedades:

- (i) $\phi_\alpha^{-1}((0, 1]) \subset U_\alpha$ y
(ii) para toda $x \in Z \setminus A$ existe un número finito $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{J}$ tal que $\phi_{\alpha_i}(x) > 0$ y $\sum_{i=1}^n \phi_{\alpha_i}(x) = 1$.

Para cada $\alpha \in \mathcal{J}$, elegimos un punto $p_\alpha \in U_\alpha$ y un punto $a_\alpha \in A$ tales que $d(p_\alpha, a_\alpha) < 2d(p_\alpha, A)$.

Dado $p \in Z \setminus A$, vamos a definir $G(p)$ de la siguiente manera, sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ los elementos de \mathcal{J} tales que $\phi_{\alpha_i}(x) > 0$, y por (ii), tenemos que $\sum_{i=1}^n \phi_{\alpha_i}(x) = 1$, para cada α_i hemos elegido $a_{\alpha_i} \in A$. Definamos

$$G(p) = E((g(a_{\alpha_1}), \dots, g(a_{\alpha_n})), (\phi_{\alpha_1}(p), \dots, \phi_{\alpha_n}(p)))$$

donde E es la estructura convexa definida en la proposición 3.11. Por la propiedad 2 de la definición 3.7, no importa el orden en que eligamos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, por tanto $G(p)$ está bien definida.

Ahora estamos listos para definir $G : Z \rightarrow \Sigma(X)$ de la siguiente manera:

$$G(p) = \begin{cases} g(p) & \text{si } p \in A \\ E(g(a_{\alpha_1}), \dots, g(a_{\alpha_n}), \phi_{\alpha_1}(p), \dots, \phi_{\alpha_n}(p)) & \text{si } p \in Z \setminus A \end{cases},$$

notemos que G es una función bien definida y extiende a g , veamos ahora que G es continua.

Afirmación 1. G es continua en $Z \setminus A$.

Tomemos un punto $p \in Z \setminus A$. Sea U una vecindad de p en Z tal que:

- (A) $U \cap A = \emptyset$,
(B) Existe un número finito $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de elementos de \mathcal{J} tal que $U \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Dada $q \in U$ por (i) y (ii) el conjunto $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(q) > 0\}$ es finito y está contenido en $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, además $\sum_{i=1}^n \phi_{\alpha_i}(q) = 1$.

Definamos una función $H : U \rightarrow \Sigma(X)$ por

$$H(q) = E((g(a_{\alpha_1}), \dots, g(a_{\alpha_n})), (\phi_{\alpha_1}(q), \dots, \phi_{\alpha_n}(q))),$$

esta función es continua, pues los elementos $g(a_{\alpha_i})$ están fijos, E es continua en la segunda coordenada y cada $\phi_{a_{\alpha_i}}$ es continua en U .

Ahora observemos que H y G son iguales en U . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(q) > 0\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ con $m \leq n$, de manera que

$$\begin{aligned} H(q) &= E((g(a_{\alpha_1}), \dots, g(a_{\alpha_n})), (\phi_{\alpha_1}(q), \dots, \phi_{\alpha_m}(q), 0, \dots, 0)) \\ &= E((g(a_{\alpha_1}), \dots, g(a_{\alpha_m})), (\phi_{\alpha_1}(q), \dots, \phi_{\alpha_m}(q))) \\ &= G(q), \end{aligned}$$

por la propiedad 3 de la definición 3.7. Por tanto G es continua en $Z \setminus A$ y la afirmación 1 queda demostrada.

Afirmación 2. G es continua en $Fr_Z(A)$.

Sean $a \in Fr_Z(A)$, y $\varepsilon > 0$, mostraremos que existe δ tal que si $p \in Z \setminus A$ y $d(p, a) < \delta$, entonces $\rho(G(p), G(a)) < \varepsilon$.

Observación 1. Por el Lema 3.12, dado $\varepsilon > 0$ y $g(a) \in \Sigma(X)$ existe $\eta > 0$ tal que para toda n , $\{s_i\}_{i=1}^n$ selecciones en $\Sigma(X)$, (t_1, \dots, t_n) con $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ si $\rho(g(a), s_i) < \eta$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\rho(E((s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n)), E((g(a), \dots, g(a)), (t_1, \dots, t_n))) < \varepsilon.$$

Observación 2. Por la continuidad de g en a , dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $d(x, a) < 9\delta$, entonces $\rho(g(x), g(a)) < \eta$.

Estamos listos para probar la continuidad de G en a ; sea $p \in Z - A$ tal que

$$d(p, a) < \delta \tag{4}$$

recordemos que para toda $\alpha \in \mathcal{J}$ elegimos $p_\alpha \in U_\alpha$ y $a_\alpha \in A$ tal que

$$d(p_\alpha, a_\alpha) < 2d(p_\alpha, A) \tag{5}$$

Sea $\alpha \in \mathcal{J}$ tal que $\phi_\alpha(p) > 0$, entonces existe $q \in Z \setminus A$ tal que $p \in U_\alpha \subset B_q = \{x \in Z : d(q, x) < \frac{1}{2}d(q, A)\}$, entonces

$$d(p, q) < \frac{1}{2}d(q, A) \tag{6}$$

Como

$$d(q, A) \leq d(q, a) \leq d(q, p) + d(p, a) \tag{7}$$

Por (6) y (7) tenemos que

$$d(p, q) < \frac{1}{2}d(q, A) \leq \frac{1}{2}d(p, q) + \frac{1}{2}d(p, a) \quad (8)$$

De manera que por (4) y (8) deducimos que

$$d(p, q) < d(p, a) < \delta; \quad (9)$$

de (7) y (9) deducimos que

$$d(q, A) < 2\delta \quad (10)$$

Ahora notemos que para $y, z \in B_q = \{x \in Z : d(q, x) < \frac{1}{2}d(q, A)\}$ por (10)

$$d(y, z) \leq d(y, q) + d(q, z) < \frac{1}{2}d(q, A) + \frac{1}{2}d(q, A) < 2\delta \quad (11)$$

También notemos que $d(y, A) \leq d(y, q) + d(q, A)$ y por (8) y (9) tenemos que $d(q, A) \leq d(p, q) + d(p, a) < 2\delta$ y por (11) $d(y, q) < \delta$, tenemos que

$$d(y, A) \leq d(y, q) + d(q, A) < 3\delta \quad (12)$$

Notemos entonces que $d(a, a_\alpha) \leq d(a, p) + d(p, p_\alpha) + d(p_\alpha, a_\alpha)$ y por (4) $d(p, a) < \delta$, por (11) $d(p, p_\alpha) < 2\delta$ y por (5) $d(p_\alpha, a_\alpha) < 2d(p_\alpha, A)$, y por (12) $2d(p_\alpha, A) < 6\delta$ de manera que

$$d(a, a_\alpha) \leq 3\delta + 2d(p_\alpha, A) < 9\delta \quad (13)$$

Sea $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(p) > 0\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Tenemos que $\sum_{i=1}^n \phi_{\alpha_i}(p) = 1$. Como $d(p, a) < \delta$, entonces $d(a, a_{\alpha_i}) < 9\delta$ para toda i y por la Observación 2, $\rho(g(a_{\alpha_i}), g(a)) < \eta$. Como

$$G(p) = E((g(a_{\alpha_1}), \dots, g(a_{\alpha_n})), (\phi_{a_{\alpha_1}}(p), \dots, \phi_{a_{\alpha_n}}(p)))$$

y

$$g(a) = E((g(a), \dots, g(a)), (\phi_{a_{\alpha_1}}(q), \dots, \phi_{a_{\alpha_n}}(q)))$$

entonces por la observación 1 tenemos que

$$\rho(G(p), g(a)) < \varepsilon.$$

Por tanto, hemos demostrado que G es continua en la frontera de A . Como G extiende a g y g es continua en el interior de A , entonces G es continua en el interior de A .

Así pues, la función $G : Z \rightarrow \Sigma(X)$ es una función continua que extiende a la función $g : A \rightarrow \Sigma(X)$; con esto se demuestra que $\Sigma(X)$ es un extensor absoluto métrico, y por tanto un retracts absoluto. \square

Ahora veremos que $\Sigma(X)$ es un espacio separable y completo. Recordaremos unos resultados clásicos sobre espacios de funciones.

Teorema 3.14. Todo espacio métrico compacto es separable.

El teorema anterior está en [8, 4.1.18].

Teorema 3.15. Sea Y un espacio métrico compacto y Z un espacio métrico separable, entonces el espacio de funciones $\{f : Y \rightarrow Z : f \text{ es continua}\}$, dotado con la métrica de la convergencia uniforme, es separable.

El teorema anterior se encuentra en [8, 4.2.18].

Teorema 3.16. Sea Y un espacio métrico, entonces Y es separable si y sólo si Y es segundo numerable.

El teorema anterior se encuentra en [8, 4.1.16].

Corolario 3.17. $\Sigma(X)$ es separable.

Demostración. $\Sigma(X)$ es un subespacio de $\mathcal{F} = \{f : C(X) \rightarrow X : f \text{ es continua}\}$, ahora, $C(X)$ es un espacio métrico compacto y X es un espacio métrico separable, entonces \mathcal{F} es separable y por tanto segundo numerable. Claramente todo subespacio de un espacio segundo numerable es segundo numerable, entonces $\Sigma(X)$ es segundo numerable; como $\Sigma(X)$ es métrico, entonces $\Sigma(X)$ es separable. \square

Teorema 3.18. Sea Y un espacio topológico compacto y Z un espacio métrico completo, entonces $\{f : Y \rightarrow Z : f \text{ es continua}\}$, dotado con la métrica de la convergencia uniforme, es un espacio métrico completo.

El teorema anterior se encuentra en [8, 4.3.13].

Teorema 3.19. $\Sigma(X)$ es completo.

Demostración. Veamos que $\Sigma(X)$ es un espacio cerrado de $\mathcal{F} = \{f : C(X) \rightarrow X : f \text{ es continua}\}$. Sea $\{s_i\}_{i=1}^n$ una sucesión en $\Sigma(X)$ convergente a una función s en \mathcal{F} . Sea $A \in C(X)$, queremos ver que $s(A) \in A$; como $\{s_i\}_i$ converge uniformemente a s , entonces $\{s_i(A)\}_i$ converge en X a $s(A)$, entonces $s(A) \in A$, pues $s_i(A) \in A$ para todo i , y A es cerrado.

Ahora, sea $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\Sigma(X)$, como \mathcal{F} es completo, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f_i \rightarrow f$ uniformemente. Como $\Sigma(X)$ es un subespacio cerrado de \mathcal{F} , entonces $f \in \Sigma(X)$, por tanto $\Sigma(X)$ es completo. \square

Así pues, en este capítulo hemos demostrado que el espacio de selecciones de un abanico suave, dotado con la métrica de la convergencia uniforme, es un espacio métrico completo separable, no compacto, contraíble, localmente arcoconexo, y además un retracto absoluto. Todas estas características las comparte con el espacio l_2 .

Puede ser posible que el espacio $\Sigma(X)$ sea homeomorfo a l_2 , para eso se necesitan herramientas técnicas sofisticadas, como la caracterización dada por Toruńczyk en [9].

Bibliografía

- [1] A. Illanes: *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (28), Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [2] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr: *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Pure and Applied Mathematics 216, Marcel Dekker, Inc, New York, 2004.
- [3] R. Cauty: *L'espace des selections d'une dendrite*, Preprint.
- [4] C. Eberhart: *A note on smooth fans*, Colloq. Math. 20(1969) 89-90.
- [5] J. van Mill: *Infinite dimensional topology: prerequisites and introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [6] M. Lynch: *Whytney levels in $C_p(X)$ are ARs*, Proc. Amer. Math. Soc. 98(1986), 748-750.
- [7] J. Dugundji: *Topology*, Wn. C. Brown Publishers, 1989.
- [8] R. Engelking: *General Topology - Revised and completed ed.*, Berlin: Heldermann, 1989.
- [9] H. Toruńczyk: *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math., 111 (1981), 247-262.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
maeschacon@fcfm.buap.mx

Capítulo 8

Indescomponibilidad

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán
Montero Rodríguez.
FCFM de la BUAP

Resumen

Un continuo es un espacio topológico no vacío, compacto y conexo. El continuo X es **descomponible** si existen dos subcontinuos propios U y V de X tales que $X = U \cup V$. En caso contrario, el continuo X es **indescomponible**. En este capítulo hacemos las demostraciones de cuatro propiedades que caracterizan los continuos indescomponibles.

1 Introducción

El material que contiene este capítulo pertenece a la rama de la Topología conocida como Teoría de los Continuos e Hiperespacios de los Continuos. Esta teoría trata del estudio de las propiedades topológicas de espacios topológicos que son compactos, conexos y no vacíos. De hecho, a estos espacios les llamamos **continuos**. Un **continuo de Hausdorff** es un continuo que es espacio de Hausdorff y un **continuo métrico** es un continuo que es espacio métrico.

Las propiedades que vamos a analizar son las siguientes

- (I) Sea X un continuo de Hausdorff. Entonces X es indescomponible si y solo si cada uno de los subcontinuos propios de X es un continuo de condensación, (vea el Teorema 6.4).
- (II) Las siguientes condiciones son equivalentes.
 - (a) Un continuo métrico X es indescomponible.
 - (b) Para cada $a \in X$, existe un punto $x \in X$ tal que X es irreducible entre a y x .
 - (c) Existe $a \in X$ tal que $P(a, X)$ es un conjunto frontera en X , esto es, $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)}$.

- (d) Existen tres puntos de X tales que X es irreducible entre cualesquiera dos de ellos.

(Vea el Teorema 6.14).

- (III) Si X es un continuo métrico, entonces X es indescomponible si y solo si X es irreducible entre algún punto $p \in X$ y cada punto $q \in D$, donde D es un subconjunto denso de X (vea el Teorema 6.15).
- (IV) Sea X un continuo métrico. Se tiene que X es indescomponible si y solo si X contiene dos componentes disjuntas (vea el Teorema 6.16).

2 Preliminares

Los conceptos que utilizamos pero que no se definen en este trabajo se consideran como en [7] y [10].

A lo largo de este capítulo; los símbolos \mathbb{N} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} denotan el conjunto de los **números naturales**, de los **números racionales** y de los **números reales**, respectivamente. Dada $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n denota el **espacio Euclidiano n -dimensional** con la métrica Euclidiana. Cuando $n > 1$, utilizamos $\|x - y\|$ para denotar la distancia entre los puntos x y y en \mathbb{R}^n . La distancia entre los puntos x y y en \mathbb{R} la denotamos por $|x - y|$. La letra I denota al intervalo unitario $[0, 1]$ con la topología usual. La **bola unitaria cerrada n -dimensional** es el conjunto $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. La **esfera unitaria n -dimensional** en \mathbb{R}^{n+1} es el conjunto $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Una n -esfera es un espacio homeomorfo a S^n y una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a S^1 . Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $\text{cl}(A)$ denota la **cerradura** de A en X . Si $A \subset Y \subset X$, entonces $\text{cl}_Y(A)$ denota la cerradura de A en el subespacio Y de X . Es fácil ver que $\text{cl}_Y(A) = \text{cl}(A) \cap Y$. La **frontera** de A en X se denota por $\text{Fr}(A)$. Si $A \subset Y \subset X$, escribimos $\text{Fr}_Y(A)$ para referirnos a la frontera de A en el subespacio Y . El **interior** de A en X se denota por $\text{int}(A)$ y además, $\text{int}_Y(A)$ denota el interior de A en el subespacio Y . Si $p \in X$, una **vecindad** de p es un subconjunto V de X tal que $p \in \text{int}(V)$. Sea X un espacio métrico con métrica d . Si $a \in X$ y $\epsilon > 0$, la ϵ -**bola abierta** de a es $B(a, \epsilon) = \{x \in X : d(a, x) < \epsilon\}$. Cuando sea necesario distinguir que la bola está contenida en X , lo denotamos por $B_X(a, \epsilon)$.

3 Continuos indescomponibles

Existe una infinidad de continuos, por ejemplo: un arco, una n -celda, el continuo $\text{sen}(1/x)$ (vea [10, pág. 3-4]). Existen dos tipos diferentes de continuos, los descom-

ponibles y los indescomponibles.

Definición 3.1. Sea X un continuo. El continuo X es **descomponible** si existen U, V subcontinuos propios de X tales que $X = U \cup V$. Un continuo que no es descomponible es **indescomponible**.

Un ejemplo de un continuo descomponible es el intervalo cerrado $[0,1]$: se puede observar que existen muchas maneras diferentes en que podemos descomponer a este continuo, por ejemplo, la siguiente. Sean

$$U = [0, \frac{3}{4}] \text{ y } V = [\frac{1}{4}, 1].$$

Es claro que U y V son subcontinuos propios de $[0,1]$ y que, además, $[0,1] = U \cup V$. Así, podemos concluir que $[0,1]$ es un continuo descomponible.

El concepto de descomponibilidad pareciera no causar problemas para comprenderlo; sin embargo, es muy difícil de ver o imaginar continuos indescomponibles existen realmente. Quizás a una persona que no esté familiarizada con la teoría de los continuos le parecería que todos los continuos son descomponibles, con excepción de los continuos de un punto (los espacios X de un punto son continuos indescomponibles ya que no existen dos subcontinuos propios de X tales que su unión sea X). Entonces, uno puede preguntarse acerca de la existencia de continuos indescomponibles.

En la práctica, cuando se trabaja con continuos, la mayoría de estos resultan ser descomponibles [10, pág. 3-4]. Por ejemplo, un arco, una n -celda, una n -esfera, etc. Otros continuos descomponibles son las gráficas finitas (vea [5]), los árboles (vea [6]) y la dendrita de Gehman (vea [3]).

Ahora veamos un concepto que nos ayuda a construir continuos indescomponibles.

Definición 3.2. Una familia $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es una **cadena simple** en X si para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, se tiene que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$. Una cadena simple $C = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ conecta los puntos a y b en X si $a \in A_1$ y $b \in A_n$. A los elementos A_i de la cadena simple se les llama **eslabones**.

Si $C = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es una cadena simple que conecta a los puntos a y b en un espacio topológico X y si $d \in A_i$, donde $i \notin \{1, n\}$, decimos que C conecta a a y b pasando por d .

A continuación, presentamos la construcción (usando intersecciones anidadas) de un continuo indescomponible X en el espacio \mathbb{R}^2 . Pero antes necesitamos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Sea Λ un conjunto bien ordenado de índices y sea λ_0 como el primer elemento de Λ . Supongamos que $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}}$ es una familia de continuos de Hausdorff no vacíos tales que $X_{\lambda_0} \supset X_{\lambda_1} \supset \dots \supset X_{\lambda_k} \supset X_{\lambda_{k+1}} \supset \dots$. Entonces*

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

es un continuo.

Demostración. Si $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \emptyset$, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda - \lambda_0} (X_{\lambda_0} - X_\lambda) = X_{\lambda_0}$. Como X_{λ_0} es compacto y cada $X_{\lambda_0} - X_\lambda$ es un abierto de X_{λ_0} , existe una colección finita $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\bigcup_{j=1}^n (X_{\lambda_0} - X_{\lambda_j}) = X_{\lambda_0}$. En consecuencia, $\bigcap_{j=1}^n X_{\lambda_j} = \emptyset$, de donde $X_{\lambda_n} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción muestra que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.

Ahora, como cada X_λ es cerrado en X_{λ_0} , $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es un conjunto cerrado del compacto X_{λ_0} y, por tanto, compacto. Supongamos que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ no es conexa. Luego, existen conjuntos K_1 y K_2 no vacíos, ajenos y cerrados en $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ tales que

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = K_1 \cup K_2.$$

Como K_1 y K_2 son cerrados en $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, también son compactos y, como X_{λ_0} es de Hausdorff, existen O_1 y O_2 abiertos de X_{λ_0} ajenos tales que $K_1 \subset O_1$ y $K_2 \subset O_2$ (vea [2, Propiedad 1.5(b), pág. 225]). Como $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \subset O_1 \cup O_2$, se tiene que $X_{\lambda_0} - (O_1 \cup O_2) \subset X_{\lambda_0} - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, de donde

$$(X_{\lambda_0} - O_1) \cap (X_{\lambda_0} - O_2) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X_{\lambda_0} - X_\lambda).$$

Note que $(X_{\lambda_0} - O_1) \cap (X_{\lambda_0} - O_2)$ es compacto, de donde existe $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \subset \Lambda$ tal que $(X_{\lambda_0} - O_1) \cap (X_{\lambda_0} - O_2) \subset \bigcup_{j=1}^m (X_{\lambda_0} - X_{\lambda_j})$. Por tanto,

$$X_{\lambda_m} = \bigcap_{j=1}^m X_{\lambda_j} \subset O_1 \cup O_2.$$

Por otra parte, $\emptyset \neq K_t = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cap K_t \subset X_{\lambda_m} \cap O_t$, para cada $t \in \{1, 2\}$, y, además, $(X_{\lambda_m} \cap O_1) \cap (X_{\lambda_m} \cap O_2) = \emptyset$. Así X_{λ_m} no es conexo, lo cual es una contradicción. Esta contradicción muestra que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es conexa. Por tanto, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es un continuo. \square

4 Un continuo indescomponible

Sean a, b, c tres puntos distintos en \mathbb{R}^2 . Existen cadenas simples $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots$ en \mathbb{R}^2 , donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, los eslabones son 2-celdas (discos) de diámetro menor que 2^{-n} y que satisfacen las siguientes dos propiedades.

- (1) Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la cadena \mathcal{C}_{3i+1} conecta al punto a con el punto c pasando por el punto b , la cadena \mathcal{C}_{3i+2} conecta al punto b con el punto c pasando por el punto a , y la cadena \mathcal{C}_{3i+3} conecta al punto a con el punto b pasando por el punto c .
- (2) Para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\cup \mathcal{C}_{3i+1} \supset \cup \mathcal{C}_{3i+2} \supset \cup \mathcal{C}_{3i+3} \supset \cup \mathcal{C}_{3(i+1)+1}$. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\cup \mathcal{C}_n \supset \cup \mathcal{C}_{n+1}$.

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, la unión de los eslabones de \mathcal{C}_n , $\cup \mathcal{C}_n$, es un continuo. Sea X la intersección anidada de las uniones de estas cadenas, es decir,

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_n).$$

Por el Teorema 3.3, se tiene que X es un continuo. Observemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_n) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_{3n+1}). \quad (1)$$

Ahora, si $x \notin X$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \cup \mathcal{C}_{3j+2}$ o $x \notin \cup \mathcal{C}_{3j+3}$. Como $\cup \mathcal{C}_{3j+2} \supset \cup \mathcal{C}_{3(j+1)+1}$ y $\cup \mathcal{C}_{3j+3} \supset \cup \mathcal{C}_{3(j+1)+1}$, entonces

$$x \notin \cup \mathcal{C}_{3(j+1)+1} \supset \bigcap_{i=0}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_{3i+1}),$$

es decir, $x \notin \bigcap_{i=0}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_{3i+1})$, esto prueba, por la contrarrecíproca, que

$$\text{si } x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_{3i+1}), \text{ entonces } x \in X. \quad (2)$$

Así, por (1) y (2), tenemos que

$$X = \bigcap_{i=0}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_{3i+1}).$$

Veamos que no existe un subcontinuo propio Y de X tal que $\{a, c\} \subset Y$. Para esto, supongamos que existe tal Y . Sea $p \in X - Y$ y

$$d(p, Y) = \epsilon > 0. \quad (3)$$

Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $\frac{1}{2^k} < \epsilon$. Sea $\ell > N$ y supongamos que el eslabón C de la cadena $\mathcal{C}_{3\ell+1}$ que contiene a p interseca a Y . Sea $t \in C \cap Y$, por construcción se tiene que $\text{diám}(C) < \frac{1}{2^\ell} < \epsilon$. Entonces

$$d(p, Y) \leq d(p, t) \leq \text{diám}(C) < \epsilon,$$

y con esto último $d(p, Y) < \epsilon$ lo cual contradice a la ecuación (3). Por lo tanto, para $k \geq N$ los eslabones de la cadena \mathcal{C}_{3k+1} que contienen a p no intersecan a Y .

Ahora, $Y \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+1})$, en particular, para $\ell > N$, $Y \subset \bigcup \mathcal{C}_{3\ell+1}$. Supongamos que

$$\bigcup \mathcal{C}_{3\ell+1} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \cup \dots \cup C_s$$

donde, los C_i son los eslabones de $\mathcal{C}_{3\ell+1}$, $a \in C_1$ y $c \in C_s$ y supongamos que $p \in C_m$. Como $\ell > N$, el eslabón de la cadena $\mathcal{C}_{3\ell+1}$ que contiene a p no interseca a Y . Así,

$$C_m \cap Y = \emptyset.$$

Luego,

$$Y = (Y \cap (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{m-1})) \cup (Y \cap (C_{m+1} \cup C_{m+2} \dots \cup C_s)),$$

es decir, que Y se escribe como la unión de dos conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos, ya que por lo menos $a \in Y \cap (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{m-1})$ y $b \in Y \cap (C_{m+1} \cup C_{m+2} \dots \cup C_s)$ pero esta unión no puede ser ya que Y es un subcontinuo propio de X . Por lo tanto no puede existir tal subcontinuo propio Y de X tal que $a, c \in Y$.

De manera análoga se demuestra que

- (1) $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+2})$ y que no existe un subcontinuo propio Y de X tal que $b, c \in Y$.
- (2) $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup \mathcal{C}_{3n+3})$ y que no existe un subcontinuo propio Y de X tal que $a, b \in Y$.

Se sigue de esto que no existen subcontinuos propios de X que contengan a dos de los tres puntos a, b, c . Con esta última afirmación y de acuerdo a (d) del Teorema 6.14, tenemos que X es un continuo indescomponible.

La Figura 1 da un bosquejo de la manera en que se va construyendo el continuo indescomponible.

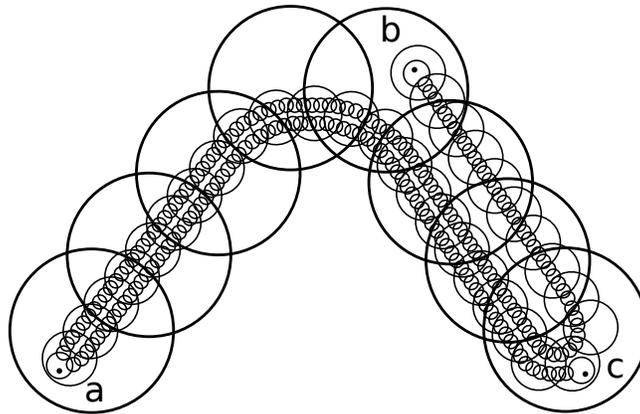


Figura 1: Continuo indescomponible

5 Composante y casicomponente

Ahora, definimos dos conceptos que son de gran importancia dentro de nuestro trabajo, el concepto de composante y el concepto de casicomponente.

Definición 5.1. Sean X un continuo y $a \in X$. Se define la **composante** de a en X como

$$P(a, X) = \{x \in X : a \text{ y } x \text{ pueden ser unidos por un subcontinuo propio de } X\}.$$

De la Definición 5.1 se sigue que para cada $a \in X$,

$$P(a, X) = \bigcup \{K : a \in K \text{ y } K \text{ es un subcontinuo propio de } X\}.$$

Para comprender este concepto, presentamos el siguiente ejemplo. Sea el continuo $X = [0, 1]$. Luego, por definición de composante, $P(0, X) = \bigcup \{K : 0 \in K \text{ y } K \text{ subcontinuo propio de } X\} = \bigcup \{[0, x] : x \in (0, 1)\} = [0, 1]$. Análogamente, la composante del punto 1 es el intervalo $(0, 1]$, y la composante de cualquier punto en X diferente de 0 y 1 es todo el intervalo $[0, 1]$. Notemos que la composante $P(q, X)$ de un punto q en X es la unión de subcontinuos propios de X que contienen a q por lo que resulta que $P(q, X)$ es conexa, pues es la unión de conexos que tienen al menos un punto en común.

Definición 5.2. Sea X un espacio topológico. Dado $x \in X$, la **casicomponente** de X que contiene al punto x es

$$Q(x) = \bigcap \{A \subset X : x \in A \text{ y } A \text{ es abierto y cerrado en } X\}.$$

Definición 5.3. Sea X un espacio topológico. Dado $x \in X$, la **componente** de X que contiene al punto x es

$$C(x) = \bigcup \{K \subset X : x \in K \text{ y } K \text{ es conexo en } X\}.$$

Teorema 5.4. Sean X un espacio compacto y de Hausdorff y $x \in X$. Entonces la componente de x coincide con la casicomponente de x , es decir, $C(x) = Q(x)$.

Demostración. Sea $x \in X$. Veamos que $C(x) = Q(x)$.

Primero mostremos que $C(x) \subset Q(x)$. Sea A un subconjunto abierto y cerrado en X que contiene a x , supongamos que $C(x) \not\subset A$. Luego, $C(x) = A \cup (C(x) - A)$, como $C(x) - A$ también es abierto y cerrado en X , los conjuntos A y $C(x) - A$ forman una separación de $C(x)$, esto contradice la conexidad de $C(x)$. Por tanto, $C(x) \subset A$. Así, $C(x) \subset Q(x)$.

Ahora veamos que $Q(x) \subset C(x)$. Porque $C(x)$ es el conexo mas grande que contiene a x , basta probar que $Q(x)$ es conexo para obtener la contención deseada.

Supongamos que $Q(x)$ no es conexo. Luego, existen A y B subconjuntos no vacíos, cerrados en $Q(x)$ y ajenos tales que $Q(x) = A \cup B$. Como $Q(x)$ es cerrado en X , se tiene que A y B son cerrados en X . Como X es compacto, por [8, Teorema 1.12], se tiene que A y B son compactos. Dado que X es un espacio de Hausdorff, existen U y V subconjuntos abiertos en X y ajenos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$ (vea [2, Propiedad 1.5(b), pág. 225]).

Sea $M = X - (U \cup V)$. Luego M es cerrado en X . Sea $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ la familia de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de X que contienen a x . Así, $Q(x) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$. Notemos que

$$\begin{aligned} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (M \cap F_\lambda) &= M \cap \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right) \\ &= M \cap (A \cup B) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Tomando complementos, $X = X - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (M \cap F_\lambda)$. Como X es compacto, existe $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \subset \Lambda$ tal que $X = X - \bigcap_{j=1}^m (M \cap F_{\lambda_j})$. Nuevamente tomando complementos,

$$\emptyset = \bigcap_{j=1}^m (M \cap F_{\lambda_j}) = M \cap \left(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j} \right).$$

Por tanto, $\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j} \subset U \cup V$.

Afirmación: $(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}) \cap U$ es tanto abierto como cerrado en X .

Para ver que esta afirmación es verdadera, notemos que $\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}$ es tanto abierto como cerrado en X y, en consecuencia, $(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}) \cap U$ es abierto en X . Ahora, $(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}) \cap \bar{U}$ es cerrado en X . Como $(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}) \subset U \cup V$ y $\bar{U} \cap V = \emptyset$, se tiene

$$\left(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j} \right) \cap U = \left(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j} \right) \cap \bar{U}.$$

Por tanto, la afirmación es verdadera.

Como A es no vacío y $A \subset (\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}) \cap U$, existe un punto w en $Q(x)$ tal que también pertenece a $(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}) \cap U$. Por otra parte, como B es no vacío, existe un punto z en $Q(x)$ tal que $z \in X - [(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}) \cap U]$. Por lo anterior, tanto $(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}) \cap U$ como $X - [(\bigcap_{j=1}^m F_{\lambda_j}) \cap U]$ son subconjuntos abiertos, diferentes del vacío y ajenos de X , uno de los cuales contiene a w y el otro a z , contradiciendo el hecho de que $Q(x)$ era una casicomponente de X . Así, $Q(x)$ es conexo. Por tanto, $Q(x) \subset C(x)$. \square

Lema 5.5. [2, pág. 223] *Si un espacio topológico es compacto y de Hausdorff, entonces es regular.*

Para demostrar el siguiente resultado utilizamos el Teorema 5.4 y el Lema 5.5

Lema 5.6. *Si K es un subcontinuo propio de un continuo de Hausdorff X , entonces existe un subcontinuo propio L de X tal que $K \subset L \subset X$ y $K \neq L$.*

Demostración. Como X es un espacio compacto y de Hausdorff, se sigue del Lema 5.5, que X es un espacio regular. De donde, si $x \in X - K$ entonces existe un abierto V de X tal que $x \in V$ y $\bar{V} \cap K = \emptyset$. Por tanto, $K \subset X - \bar{V}$. Si $\overline{X - \bar{V}} = X$, por [8, Lema 1.18], $\text{int}(\bar{V}) = \emptyset$, de donde $V = \text{int}(V) = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $\overline{X - \bar{V}} \neq X$. Sea L la componente de $\overline{X - \bar{V}}$ que contiene a K . Como L es una componente, L es conexo y cerrado en el conjunto cerrado $\overline{X - \bar{V}}$, de donde L es también cerrado en el conjunto compacto X . Así, L es un subcontinuo propio de X . Falta probar que $L \neq K$.

Por una parte, $K \cap (\overline{X - (\overline{X - \bar{V}})}) = \emptyset$, porque

$$\begin{aligned} K \cap \left(\overline{X - (\overline{X - \bar{V}})} \right) &\subset K \cap \left(\overline{X - (X - \bar{V})} \right) \\ &= K \cap (X - (X - \bar{V})) \\ &= K \cap \bar{V} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Por otro lado, $L \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) \neq \emptyset$. Supongamos que $L \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) = \emptyset$. Como X es un espacio compacto y de Hausdorff, $\overline{X - \overline{V}}$ es compacto y de Hausdorff. Por el Teorema 5.4, se tiene que L es una casicomponente y, así, es la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de $\overline{X - \overline{V}}$ que contienen a un punto dado y de K . De esta forma, $L = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, donde cada G_λ es un subconjunto tanto abierto como cerrado de $\overline{X - \overline{V}}$. Notemos que

$$\begin{aligned} L \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) &= \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \right) \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Tomando complementos,

$$X = \left(X - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \right) \cup \left(X - (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) \right).$$

Como X es compacto, existe $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \subset \Lambda$ tal que $X = (X - \bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j}) \cup (X - (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}))$. Nuevamente, tomando complementos se tiene que

$$\emptyset = \left(\bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j} \right) \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}). \quad (4)$$

Luego,

$$\begin{aligned} X &= (\overline{X - \overline{V}}) \cup (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) \\ &= \left(\bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j} \right) \cup \left[\left((\overline{X - \overline{V}}) - \bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j} \right) \cup (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) \right] \end{aligned}$$

Así, $(\bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j}) \cap [(\overline{X - \overline{V}}) - \bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j}] = \emptyset$ y, por la Ecuación (4), tenemos que $(\bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j}) \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) = \emptyset$. De lo anterior,

$$\left(\bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j} \right) \cap \left[\left((\overline{X - \overline{V}}) - \bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j} \right) \cup (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) \right] = \emptyset.$$

Ahora, $\bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j}$, por ser cerrado en $(\overline{X - \overline{V}})$, es cerrado en X . También, $[(\overline{X - \overline{V}}) - \bigcap_{j=1}^m G_{\lambda_j}] \cup (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})})$ es un cerrado en X . De este modo, X es disconexo. Esta contradicción demuestra que $L \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) \neq \emptyset$.

En conclusión,

$$(1) K \cap \overline{(X - (\overline{X - \overline{V}}))} = \emptyset.$$

$$(2) L \cap \overline{(X - (\overline{X - \overline{V}}))} \neq \emptyset.$$

Por tanto, $L \neq K$. □

Teorema 5.7. *Si $P(a, X)$ es la composante de a en un continuo Hausdorff X , entonces el conjunto $P(a, X)$ es denso en X .*

Demostración. Sean $q \in X$ y $P(q, X)$ la composante de q en X . Mostremos que el conjunto $P(q, X)$ es denso en X .

Supongamos que $\overline{P(q, X)} \neq X$. Como $P(q, X)$ es conexa tenemos que $\overline{P(q, X)}$ es un subcontinuo propio de X , entonces por el Lema 5.6 existe un subcontinuo propio H de X tal que $\overline{P(q, X)} \neq H$ y $\overline{P(q, X)} \subset H$. Pero esto implica que

$$P(q, X) \neq H \text{ y } P(q, X) \subset H.$$

Así, resulta que H es un subcontinuo propio de X y que además contiene a q . Por definición de composante, $P(q, X)$, tenemos que $H \subset \overline{P(q, X)}$. De este modo, $H = \overline{P(q, X)}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\overline{P(q, X)} = X$, es decir, $P(q, X)$ es denso en X . □

Como consecuencia del Teorema 5.7, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.8. *En un continuo de Hausdorff X , una composante no es un subcontinuo propio de X .*

Demostración. Sea X un continuo de Hausdorff y $P(a, X)$ la composante de a en X . Por el Teorema 5.7, tenemos que $\overline{P(a, X)} = X$. Supongamos que $P(a, X)$ es un subcontinuo propio de X . Entonces $P(a, X)$ es cerrado en X . Así,

$$X = \overline{P(a, X)} = P(a, X).$$

Por tanto, $P(a, X) = X$, lo cual es una contradicción. □

El siguiente resultado muestra que los continuos que son descomponibles son la composante de alguno de sus puntos, situación que no se da en los continuos indescomponibles.

Teorema 5.9. *Si X es un continuo descomponible, entonces X es la composante de alguno de sus puntos.*

Demostración. Sean U y V subcontinuos propios de X tal que $X = U \cup V$. Tenemos que

$$U \cap V \neq \emptyset.$$

De lo contrario, si la intersección fuera el conjunto vacío, tendríamos que U y V forman una separación de X lo que nos diría que X es desconexo lo cual es absurdo ya que X es un continuo. Ahora, sea $x \in U \cap V$ y $P(x, X)$ la composante de x en X . Así, $x \in U$, $x \in V$ y además que U y V son subcontinuos propios de X , por definición de $P(x, X)$, resulta que

$$U \subset P(x, X) \text{ y } V \subset P(x, X).$$

Luego

$$X = U \cup V \subset P(x, X).$$

Por tanto, $X = P(x, X)$. Esto último nos dice que X es la composante de x . \square

Ahora mostremos cómo se comportan las composantes en un continuo indescomponible, también situación que no sucede en los continuos descomponibles.

Teorema 5.10. *Sean X un continuo indescomponible, $p \in X$ y $P(p, X)$ la composante de p en X , entonces $P(p, X)$ es igual a la composante de cada uno de sus elementos.*

Demostración. Sean $p \in X$ y $P(p, X)$ la composante de p en X . Tomemos $x \in P(p, X)$, con $x \neq p$, y mostremos que $P(p, X)$ también es la composante de x en X .

Como $x \in P(p, X)$ existe un subcontinuo propio A de X tal que $x, p \in A$. Ahora, sea $P(x, X)$ la composante de x en X y sea $y \in P(x, X)$, entonces existe un subcontinuo propio B de X tal que $x, y \in B$. Así, $x \in A \cap B$. Además, $p \in A \cup B$ y $A \cup B$ es un subcontinuo propio de X ya que X es indescomponible. Por definición de composante, $A \cup B \subset P(p, X)$. Por tanto, $y \in P(p, X)$, es decir,

$$P(x, X) \subset P(p, X).$$

Por otra parte, sea $l \in P(p, X)$ entonces existe un subcontinuo propio H de X tal que $p, l \in H$. De manera similar, $A \cup H$ es un subcontinuo propio de X tal que $x, l \in A \cup H$. Esto implica que $l \in P(x, X)$. Así,

$$P(p, X) \subset P(x, X).$$

Por tanto, $P(p, X) = P(x, X)$. \square

El Teorema 5.10 muestra que dado un continuo indescomponible X y una composante K en X , K es la composante de todos y cada uno de sus elementos, cosa que no sucede con los continuos descomponibles; por ejemplo en el continuo $X = [0, 1]$ se tiene que $P(1, X) = (0, 1]$. Observe que cualquier punto $a \in P(1, X)$, con $a \neq 1$, la composante $P(a, X) = [0, 1]$, de donde $P(1, X) \neq P(a, X)$. Por tanto, $P(1, X)$ no es composante de todos sus puntos. Puede darse el caso en el que sí sucede, como pasa con el continuo $X = S^1$ ya que para cualquier $p \in X$, se tiene que $P(p, X) = X$.

6 Irreducibilidad

Definición 6.1. Sean X un continuo y $p, q \in X$. Decimos que X es **irreducible** entre p y q si ninguno de los subcontinuos propios de X contiene a los puntos p y q al mismo tiempo.

Este concepto aparentemente distinto del concepto de indescomponibilidad no solo está relacionado matemáticamente con él sino que comparten un origen común.

Podemos mencionar un par de ejemplos de continuos que son irreducibles entre algún par de sus puntos. Por ejemplo el intervalo $[0, 1]$ es irreducible entre los puntos 0 y 1, ya que no existe un subcontinuo propio de $[0, 1]$ que contiene a ambos. El continuo $\text{sen}(1/x)$ es irreducible entre el punto con coordenadas $(1, 0)$ y cualquier punto de la forma $(0, y)$ con $|y| \leq 1$.

De alguna manera los conceptos de irreducible y de composante están relacionados. A saber, si p y q son puntos de un continuo X de tal manera que p no pertenece a la composante de q , (o viceversa), entonces el continuo resulta ser irreducible entre estos dos puntos, ya que si X no es irreducible entre p y q , existe un subcontinuo propio A de X tal que $p, q \in A$. Luego, $q \in A \subset P(p, X)$, de donde $q \in P(p, X)$, lo cual es una contradicción.

Igualmente, si un continuo X es irreducible entre dos de sus puntos, digamos a y b , entonces cada uno de estos puntos no pertenece a la composante del otro, ya que si $a \in P(b, X)$, existe un subcontinuo propio B de X tal que $a, b \in B$, de aquí X no es irreducible entre a, b , lo cual es una contradicción.

Lema 6.2. Sean X un continuo indescomponible y K cualquier subcontinuo propio de X . Entonces $X - K$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $X - K$ es disconexo. Entonces por [8, Lema 1.8], existen dos subconjuntos no vacíos M y N de $X - K$ tales que $(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset$ y que $X - K = M \cup N$. Por [8, Lema 1.9], $K \cup M$ y $K \cup N$ son conexos y cerrados.

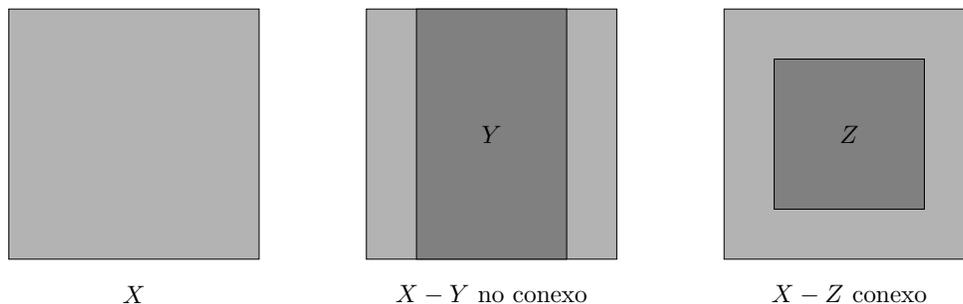


Figura 2: Complemento no conexo y otro conexo

Por [8, Teorema 1.12], son continuos tales que

$$\begin{aligned} (K \cup M) \cup (K \cup N) &= K \cup (M \cup N) \\ &= K \cup (X - K) \\ &= X. \end{aligned}$$

Note que si $K \cup M = \emptyset$, entonces $K = \emptyset$ y $M = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Ahora, supongamos que $K \cup M = X$. Luego, $M = (K \cup M) - K = X - K = M \cup N$, de donde, $M = M \cup N$. Por lo que $N \subset M$ lo cual es una contradicción. Por esto último se tiene que $K \cup M$ es un subcontinuo propio de X . De manera análoga se prueba que $K \cup N$ es un subcontinuo propio de X . Por tanto, X es la unión de dos subcontinuos propios de X , es decir, X es descomponible. Esto es una contradicción. Por tanto, $X - K$ es conexo. \square

Observación 6.3. Es importante mencionar que en los continuos indescomponibles, cualquiera que sea un subcontinuo, su complemento siempre será conexo. Sin embargo, esto no siempre sucede con los continuos descomponibles tal y como se muestra a continuación.

Sean $X = I \times I$, donde $I = [0, 1]$, $Y = [1/3, 2/3] \times [0, 1]$ y $Z = [1/3, 2/3] \times [1/3, 2/3]$ como lo muestra la Figura 2. Notemos que $X - Y$ no es conexo y que $X - Z$ si es conexo.

El siguiente teorema probado por Janiszewski muestra una equivalencia para continuos indescomponibles.

Teorema 6.4. *Sea X un continuo de Hausdorff. Entonces X es indescomponible si y solo si cada uno de los subcontinuos propios de X es un continuo de condensación.*

Demostración. Supongamos que X es indescomponible y que K es un subcontinuo propio de X que no es continuo de condensación de X , esto es, $\overline{X - K} \neq X$. Observamos que $X = K \cup (X - K) = K \cup (\overline{X - K})$. Como K es un subcontinuo

propio del continuo indescomponible X se tiene, por el Lema 6.2, que $X - K$ es conexo. Por [8, Teorema 1.11], $\overline{X - K}$ también es conexo. Observemos que $X - K \neq \emptyset$, porque K es propio. Como $\emptyset \neq X - K \subset \overline{X - K}$, se tiene que $\overline{X - K} \neq \emptyset$. Ahora, $\overline{X - K}$ es cerrado en X , por [8, Teorema 1.12], se tiene que $\overline{X - K}$ es compacto. Así, K y $\overline{X - K}$ son dos subcontinuos propios de X tales que $X = K \cup (\overline{X - K})$, lo cual es una contradicción. Por tanto, todos los subcontinuos propios de X son de condensación.

Ahora veamos el recíproco. Supongamos que todo subcontinuo propio de X es de condensación y supongamos también que X es descomponible. Entonces $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X . Así, $X - A \subset B$, es decir, $\overline{X - A} \subset \overline{B} = B \neq X$. Por tanto, $\overline{X - A} \neq X$. Por [8, Lema 1.16], se tiene que A no es de condensación lo cual es una contradicción. \square

Observación 6.5. De acuerdo al [8, Lema 1.17] los continuos de condensación tienen interior vacío. Así, en el Teorema 6.4 puede sustituirse el término de continuo de condensación por subcontinuos propios con interior vacío, es decir, para que un continuo de Hausdorff X sea indescomponible es necesario y suficiente que cada uno de los subcontinuos propios de X tenga interior vacío.

El siguiente resultado muestra la similitud entre los continuos indescomponibles y los continuos que no son localmente conexos en ninguno de sus puntos.

Teorema 6.6. *Sea X un continuo de Hausdorff indescomponible y no degenerado. Entonces, X no es localmente conexo en ninguno de sus puntos.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $p \in X$ tal que X es localmente conexo en p . Como X es no degenerado, existe $b \in X - \{p\}$. Como X es de Hausdorff, existen dos abiertos ajenos U y V de X que contienen a p y a b , respectivamente. Como X es localmente conexo en p , existe un conjunto abierto K de X , conexo tal que $p \in K \subset U$. Como \overline{K} es cerrado en X , por el [8, Teorema 1.12], se tiene que \overline{K} es compacto. Así, \overline{K} es subcontinuo de X tal que $\overline{K} \cap V = \emptyset$, porque $U \subset X - V$ y, por ende, $\overline{K} \subset \overline{U} \subset X - V$. De esto modo, \overline{K} es un subcontinuo propio de X .

Como $K \subset \overline{K}$, $X - \overline{K} \subset X - K$. Luego, $K \cap (X - \overline{K}) \subset K \cap (X - K) = \emptyset$, de donde, $K \cap (X - \overline{K}) = \emptyset$. Así, $K \cap (\overline{X - \overline{K}}) = \emptyset$. Luego,

$$\overline{X - \overline{K}} \neq X.$$

Por [8, Lema 1.16], \overline{K} es un subcontinuo propio de X que no es de condensación lo cual contradice al Teorema 6.4. Por tanto, X no es localmente conexo en ninguno de sus puntos. \square

Por definición, se tiene que un continuo indescomponible no puede escribirse como la unión de dos subcontinuos propios. Sorprendentemente, “dos” puede ser sustituido por “numerable”, siempre que el continuo sea de Hausdorff. Demostraremos este hecho utilizando el Teorema 6.4, el Lema 5.5 y los siguientes resultados.

Lema 6.7. [2, pág. 141] *Si X es un espacio regular, x es un punto de X y U es un abierto en X que contiene a x , entonces existe un abierto V en X que contiene a x tal que $\overline{V} \subset U$.*

Teorema 6.8. [Teorema de la Categoría de Baire] *Si X es un continuo de Hausdorff, entonces X no es la unión de una cantidad numerable de subconjuntos cerrados y densos en ninguna parte en X .*

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de subconjuntos cerrados y densos en ninguna parte en X . Vamos a probar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq X$.

Como cada A_n es cerrado y denso en ninguna parte en X , por el [8, Lema 1.1] se tiene que $X - A_n$ es un abierto denso de X , para cada $n \in \mathbb{N}$. Vamos a mostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - A_n)$ es denso en X .

Sea U un abierto no vacío de X . Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $U \cap (X - A_n) \neq \emptyset$. De esta manera, $U \cap (X - A_1)$ es un subconjunto abierto y no vacío de X . Sea $x \in U \cap (X - A_1)$. Por los Lemas 5.5 y 6.7, existe un subconjunto abierto B_1 en X tal que $x \in B_1 \subset \overline{B_1} \subset U \cap (X - A_1)$. De la misma forma, existe un subconjunto abierto y no vacío B_2 en X tal que $B_2 \subset \overline{B_2} \subset B_1 \cap (X - A_2)$. Inductivamente, obtenemos una sucesión, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, de conjuntos abiertos tales que $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap (X - A_{n+1})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\bigcap_{n=1}^k \overline{B_n} = \overline{B_k} \neq \emptyset$, la colección $\{\overline{B_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, como X es compacto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \emptyset$. Por otra parte, se tiene que $\overline{B_1} \subset U \cap (X - A_1)$ y $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap (X - A_{n+1})$, lo cual implica que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset U \cap \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - A_n) \right].$$

En consecuencia, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - A_n)$ es denso. Por tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq X$. □

Ahora mencionaremos el resultado importante que gracias al Teorema 6.4 y al Lema 6.8 se facilita su demostración.

Lema 6.9. *Ningún continuo de Hausdorff e indescomponible es la unión de una cantidad numerable de subcontinuos propios.*

Demostración. Sea X un continuo de Hausdorff e indescomponible. Si $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia numerable de subcontinuos propios de X entonces por el Teorema 6.4

cada K_n es un continuo de condensación de X y por el Lema [8, Lema 1.15], cada K_n es denso en ninguna parte en X . Como K_n es compacto, cada K_n es cerrado en X . Por Teorema 6.8, $X \neq \bigcup_{n+1}^{\infty} K_n$. \square

Mencionemos otro resultado muy interesante que relaciona el concepto de composante con continuos indescomponibles.

Teorema 6.10. *Si a, b son dos puntos de un continuo indescomponible X , entonces $P(a, X) \cap P(b, X) = \emptyset$ o $P(a, X) = P(b, X)$.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto, es decir, que existen a y b puntos de X tales que sus composantes, $P(a, X)$ y $P(b, X)$, de a y b , respectivamente, $P(a, X) \cap P(b, X) \neq \emptyset$ y $P(a, X) \neq P(b, X)$.

Supongamos que $P(a, X) \not\subset P(b, X)$ y $P(a, X) \cap P(b, X) \neq \emptyset$. Sean $c \in P(a, X) - P(b, X)$ y $d \in P(a, X) \cap P(b, X)$. Por definición de composante, existe un subcontinuo propio C_1 de X tal que $a, c \in C_1$. De manera similar, existen subcontinuos propios C_2, C_3 de X tales que $a, d \in C_2$ y $b, d \in C_3$.

- (1) Como C_1, C_2, C_3 son compactos, se tiene que $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es un compacto.
- (2) Como $a \in C_1 \cap C_2$, se tiene que $C_1 \cup C_2$ es conexo y también como $d \in (C_1 \cup C_2) \cap C_3$, $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es conexo.

Luego, $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es un subcontinuo de X y $b, c \in C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Por otro lado, como $c \notin P(b, X)$, no existe un subcontinuo propio de X que contenga a b y c . Así, $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = X$. De esto último consideramos los dos casos posibles:

- (i) $C_3 \subset C_1 \cup C_2$. Así, $X = C_1 \cup C_2$.
- (ii) $C_3 \not\subset C_1 \cup C_2$. Luego como $C_1 \cup C_2$ es subcontinuo propio, $X = (C_1 \cup C_2) \cup C_3$.

De los dos casos se tiene que X es descomponible. Pero esto es una contradicción. \square

Teorema 6.11. *Si $a \in X$, donde X es un continuo métrico indescomponible, entonces el conjunto $P(a, X)$ es de la primera categoría y es un conjunto frontera de X .*

Demostración. Sean $a \in X$ y $P(a, X)$ la composante de a en X . Primero mostremos que el conjunto $P(a, X)$ es de la primera categoría, esto es, que $P(a, X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, donde para toda $n \in \mathbb{N}$, X_n es cerrado y denso en ninguna parte en X .

Dado que X es métrico, $X - \{a\}$ es un abierto y tiene una base numerable $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ [2, pág. 233]. Ya que X es no degenerado, $X - \{a\} \neq \emptyset$.

Dado $b \in X - \{a\}$, existe O_m elemento de la base tal que $b \in O_m \subset \overline{O_m} \subset X - \{a\}$. Sea

$$\mu = \{m \in \mathbb{N} : O_m \subset \overline{O_m} \subset X - \{a\}\}$$

Para $n \in \mu$, sea $K_n(a)$ la componente de $X - \overline{O_n}$ que contiene a a . Luego, por [8, Teorema 1.11], $K_n(a)$ es conexo, y como X es compacto, por [8, Teorema 1.12], $\overline{K_n(a)}$ es compacto. Más aún, este es un subcontinuo propio (métrico) de X puesto que, como $K_n(a) \subset X - \overline{O_n}$,

$$\overline{K_n(a)} \subset \overline{X - \overline{O_n}} \subset \overline{X - O_n} = X - O_n \neq X.$$

Por tanto, $\overline{K_n(a)} \subset P(a, X)$, para cada $n \in \mu$. Así,

$$\bigcup_{n \in \mu} \overline{K_n(a)} \subset P(a, X). \quad (5)$$

Por otra parte, si $x \in P(a, X)$ existe un subcontinuo propio C_1 de X tal que $a, x \in C_1$. Sea $p \in X - C_1$. Notemos que $X - C_1$ es un subconjunto abierto de $X - \{a\}$ y que, por otra parte, $p \neq a$ implica que $p \in X - \{a\}$. Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in O_n$ y que $\overline{O_n} \subset X - C_1$. Como, $\{a\} \subset C_1$ entonces $X - C_1 \subset X - \{a\}$. Así, $n \in \mu$.

Como $\overline{O_n} \subset X - C_1$, se tiene que $C_1 \subset X - \overline{O_n}$. Luego, por definición de $K_n(a)$, se tiene que

$$C_1 \subset K_n(a) \subset \overline{K_n(a)}.$$

Por tanto, $x \in P(a, X)$ implica $x \in K_n(a)$ para cada $n \in \mu$. En consecuencia,

$$P(a, X) \subset \bigcup_{n \in \mu} \overline{K_n(a)}. \quad (6)$$

Por el Teorema 6.4, para cada $n \in \mu$, $\overline{K_n(a)}$ es cerrado y denso en ninguna parte en X . Así, por las Ecuaciones (5) y (6), $P(a, X)$ es de la primera categoría, esto es,

$$P(a, X) = \bigcup_{n \in \mu} \overline{K_n(a)}. \quad (7)$$

Ahora mostremos que $P(a, X)$ es un conjunto frontera en X . De la Ecuación (7) se tiene que $X - P(a, X) = \bigcap_{n \in \mu} (X - \overline{K_n(a)})$. Además, cada $X - \overline{K_n(a)}$ es abierto. Como $K_n(a)$ es denso en ninguna parte en X , se tiene que $X - \overline{K_n(a)}$ es denso en X . Como en la demostración del Teorema 6.8, tenemos que $\bigcap_{n \in \mu} (X - \overline{K_n(a)})$ es denso en X . Por otra parte, como $X - P(a, X) = \bigcap_{n \in \mu} (X - \overline{K_n(a)})$, se tiene que

$$\overline{X - P(a, X)} = \overline{\bigcap_{n \in \mu} (X - \overline{K_n(a)})} = X.$$

Luego, $\overline{X - P(a, X)} = X$. Así, $P(a, X) \subset X = \overline{X - P(a, X)}$, es decir, $P(a, X) \subset X - P(a, X)$. Por tanto, $P(a, X)$ es un conjunto frontera en X . \square

Teorema 6.12. *Si X es un continuo métrico indescomponible, entonces la cantidad de componentes en X es no numerable.*

Demostración. Por el Teorema 6.11, dada $a \in X$, se tiene que $P(a, X)$ es la unión numerable de conjuntos cerrados y densos en ninguna parte en X , es decir, $P(a, X) = \bigcup_{n \in \Lambda} A_n$, con A_n cerrado y denso en ninguna parte en X y Λ un conjunto numerable.

Si existe solo una cantidad numerable de componentes en X , entonces X es la unión numerable de conjuntos cerrados y densos en ninguna parte en X , es decir,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(a_i, X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n \in \Lambda_i} (A_n) \right)$$

Lo cual contradice el Teorema 6.8. Por tanto, X tiene una cantidad no numerable de componentes. \square

La prueba anterior junto con la del Teorema 6.10 muestran que un continuo métrico indescomponible tiene una cantidad no numerable de componentes que además son disjuntas. Con estas componentes podemos encontrar tres puntos en X tales que X es irreducible entre cualesquiera dos de ellos.

Teorema 6.13. *Si X es un continuo métrico indescomponible, entonces existen tres puntos en X tales que X es irreducible entre cualesquiera dos de ellos.*

Demostración. Por el Teorema 6.12, X tiene una cantidad no numerable de componentes. Por tanto, podemos elegir $a, b, c \in X$ tales que $P(a, X)$, $P(b, X)$ y $P(c, X)$ son distintas dos a dos. Por el Teorema 6.10, $P(a, X) \cap P(b, X) = \emptyset$. Luego $a \notin P(b, X)$, de donde no existe un subcontinuo propio U de X tal que $a, b \in U$. Así, X es irreducible entre a y b . De manera análoga se prueba que X es irreducible entre a y c y también que X es irreducible entre b y c . \square

Utilizando los Teoremas 6.11 y 6.13, Janiszewski y Kuratowski probaron el siguiente resultado, el cual contiene condiciones necesarias y suficientes para que un continuo sea indescomponible.

Teorema 6.14. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) *Un continuo métrico X es indescomponible.*
- (b) *Para cada $a \in X$, existe un punto $x \in X$ tal que X es irreducible entre a y x .*

(c) *Existe $a \in X$ tal que $P(a, X)$ es un conjunto frontera en X , esto es, $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)}$.*

(d) *Existen tres puntos de X tales que X es irreducible entre cualesquiera dos de ellos.*

Demostración. La prueba de que la condición (a) implica la condición (b) es análoga a la demostración del Teorema 6.13. Por el Teorema 6.11, la condición (a) implica la condición (c). Por el Teorema 6.13, se satisface la condición (a) implica la condición (d).

Mostremos que la condición (b) implica la condición (a). Supongamos que X es descomponible, entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Sea $a \in A \cap B$, de donde $a \in A$ y $a \in B$. Entonces, por definición de composante, $A \subset P(a, X)$ y $B \subset P(a, X)$, de donde $X = A \cup B \subset P(a, X)$. Por tanto, X no es irreducible entre a y ningún otro punto de X . Lo cual es una contradicción.

Mostremos que la condición (c) implica la condición (a). Supongamos que X es descomponible, entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Sea $a \in X$ tal que $P(a, X)$ es un conjunto frontera en X , esto es, $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)}$. Como $a \in X$ y $X = A \cup B$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \in A$. Así, $A \subset P(a, X)$, de donde

$$X - P(a, X) \subset X - A \subset B.$$

Como B es cerrado, obtenemos que $\overline{X - P(a, X)} \subset B$. De donde

$$P(a, X) \subset B.$$

De esta manera, resulta que $A \subset B$, de donde $X = A \cup B = B$. Pero esto contradice el hecho de que B es subcontinuo propio de X . Por tanto, X es indescomponible.

Mostremos que la condición (d) implica la condición (a). Sea $A = \{x, y, z\} \subset X$ de tal manera que X es irreducible entre cualesquiera dos puntos de A y supongamos que X es descomponible. Entonces, existen B y C subcontinuos propios de X tales que

$$X = B \cup C.$$

Ahora, como

$$A \subset X,$$

se tiene que

$$A = \{x, y, z\} \subset B \cup C;$$

observamos que alguno de los dos subcontinuos propios B ó C , contiene dos elementos de A . Así, X no es irreducible entre estos dos puntos, pero esto es una contradicción. Por tanto, X es indescomponible. \square

Ahora, mencionamos un par de caracterizaciones de continuos indescomponibles, una que relaciona el concepto de irreducible con los conjuntos densos y otra usando el término de composante.

Teorema 6.15. *Si X es un continuo métrico, entonces X es indescomponible si y solo si X es irreducible entre algún punto $p \in X$ y cada punto $q \in D$, donde D es un subconjunto denso de X .*

Demostración. Sean X un continuo indescomponible, $p \in X$ y $P(p, X)$ la composante de p en X . Entonces por el Teorema 6.11, $P(p, X)$ es un conjunto frontera. Por tanto, $X = \overline{X - P(p, X)}$. Sea $q \in X - P(p, X)$. Notemos que X es irreducible entre p y q .

Recíprocamente, sea D un subconjunto denso de X tal que X es irreducible entre algún punto $p \in X$ y cada puntos $q \in D$. Por tanto, $D \subset X - P(p, X)$. De donde, $X = \overline{D} \subset \overline{X - P(p, X)}$. En particular, se tiene que $P(p, X) \subset \overline{X - P(p, X)}$. Así, $P(p, X)$ es un conjunto frontera. Por el Teorema 6.14 (c) implica (a), se tiene que X es indescomponible. \square

Teorema 6.16. *Sea X un continuo métrico. Se tiene que X es indescomponible si y solo si X contiene dos composantes disjuntas.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo indescomponible, entonces por los Teoremas 6.10 y 6.12, X tiene una cantidad no numerable de composantes disjuntas y en consecuencia tiene dos.

Recíprocamente, supongamos que $P(a, X)$ y $P(b, X)$ son dos composantes disjuntas en X con $a, b \in X$ y supongamos que X es descomponible. Existen C_1 y C_2 subcontinuos propios de X tal que $X = C_1 \cup C_2$. Observemos que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, pues, de lo contrario X , es disconexo; esto último es absurdo porque X es un continuo.

- (1) Como $a \in X$ y $X = C_1 \cup C_2$ se tiene que $a \in C_1$ o $a \in C_2$. En cualquier caso, por definición de $P(a, X)$, se tiene que $C_1 \subset P(a, X)$ o $C_2 \subset P(a, X)$. Ahora ya que $C_1 \cap C_2 \subset C_1$ y $C_1 \cap C_2 \subset C_2$, resulta que $C_1 \cap C_2 \subset P(a, X)$.
- (2) De una manera similar se tiene $C_1 \cap C_2 \subset P(b, X)$.

Luego, $C_1 \cap C_2 \subset P(a, X) \cap P(b, X)$. Así $P(a, X) \cap P(b, X) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, ya que $P(a, X)$ y $P(b, X)$ son disjuntas. Por lo tanto, X es indescomponible. \square

En consecuencia, de los Teoremas 5.7 y 6.11, se tiene el siguiente resultado

Corolario 6.17. *Si X es un continuo métrico indescomponible, entonces para cada $a \in X$, $\overline{P(a, X)} = X$ y $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)} = X$.*

Demostración. El Teorema 5.7 establece que el conjunto $P(a, X)$ es denso en X , es decir, $\overline{P(a, X)} = X$ y el Teorema 6.11 establece que $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)} = X$. \square

De esta manera, un continuo indescomponible X , en un espacio métrico es “muy irreducible” en el sentido de que dado cualquier punto $a \in X$, existe un $x \in X$, arbitrariamente cercano a a , tal que X es irreducible entre a y x . Lo anterior es debido a que dado $a \in X$, el conjunto de todos los punto $x \in X$ tales que X es irreducible entre a y x es denso en X . Por otra parte, dado un punto $a \in X$, X no es irreducible entre a y ninguno de los puntos de un subconjunto denso de X .

Más aún, un continuo indescomponible X es “muy conexo” en el sentido de que cualquier subcontinuo propio K de X puede ser removido sin desconectar a X (vea Lema 6.2). Knaster y Kuratowski probaron un resultado similar el cual muestra que cualquier punto podía ser removido de un continuo indescomponible (por supuesto no degenerado) sin desconectarlo. R.L. Moore estableció un resultado aún más fuerte para continuos de Hausdorff, a saber:

Teorema 6.18. *Sean X un continuo de Hausdorff indescomponible y K cualquier subcontinuo propio de X . Si L es cualquier subconjunto de K entonces $X - L$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X - L$ no es conexo. Entonces, por [8, Lema 1.8], existen dos subconjuntos abiertos no vacíos, U y V , de $X - L$ tales que

$$(1) \quad X - L = U \cup V.$$

$$(2) \quad (\overline{U} \cap V) \cup (U \cap \overline{V}) = \emptyset.$$

Por el Lema 6.2, $X - K$ es conexo. Note que $L \subset K$ implica $X - K \subset X - L = U \cup V$. Por el [8, Lema 1.10], $X - K \subset U$ o $X - K \subset V$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $X - K \subset U$. Como $U \cap V = \emptyset$, $U \subset X - V$, de donde $X - K \subset U \subset X - V$. Así, $V \subset K$.

Como K es subcontinuo propio de X , por el Teorema 6.4, K es continuo de condensación y por [8, Lema 1.16] se tiene que $\overline{X - K} = X$. Entonces,

$$X = \overline{X - K} \subset \overline{A}.$$

En consecuencia, $K \subset \overline{A}$. Así, $B \subset K \subset \overline{A}$, de donde $B \subset \overline{A}$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $X - L$ es conexo. \square

7 Continuo de Knaster

En esta sección, como resultado final, probaremos que el Arcoiris de Knaster (construido con semicircunferencias) es realmente un continuo indescomponible.

Sea $I = [0, 1]$. Geométricamente, el conjunto de Cantor puede construirse quitando los tercios medios de I . En el primer paso quitamos el intervalo $(1/3, 2/3)$, dejando los intervalos cerrados $J_{1,1} = [0, 1/3]$ y $J_{1,2} = [2/3, 1]$. Sea $F_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2}$. En el segundo paso quitamos los intervalos $(1/9, 2/9)$ y $(7/9, 8/9)$, dejando los intervalos cerrados $J_{2,1} = [0, 1/9]$, $J_{2,2} = [2/9, 3/9]$ y los intervalos $J_{2,3} = [6/9, 7/9]$, $J_{2,4} = [8/9, 1]$. Sea $F_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}$. Así, en el n -ésimo paso, $F_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$, donde $J_{n,1}, \dots, J_{n,2^n}$ son intervalos cerrados, cada uno de longitud 3^{-n} . En el paso $(n+1)$ -ésimo se quita, de cada $J_{n,k}$, un intervalo abierto de longitud $3^{-(n+1)}$. Entonces tomamos $F_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} J_{n+1,k}$, y, el conjunto de Cantor, se define como

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Sea D_0 la familia de semicircunferencias con ordenadas no negativas, centradas en el punto $(1/2, 0)$ y teniendo como puntos extremos a los puntos del conjunto de Cantor, F . Para cada $n \geq 1$, sea $G_n = \{x \in F : (\frac{2}{3^n}) \leq x \leq (\frac{3}{3^n})\}$. Para cada $n \geq 1$, sea D_n el conjunto de semicunferencias con ordenadas no positivas, centradas en el punto $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$ y teniendo como puntos extremos los puntos de G_n . Definimos el siguiente conjunto,

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n.$$

El conjunto B es conocido como el continuo de Knaster. La Figura 3 muestra un bosquejo de la manera en que se va construyendo el continuo de Knaster, en el plano cartesiano. El continuo de Knaster también es conocido como el Arcoiris de Knaster.

Vamos a demostrar que el Arcoiris de Knaster es un continuo indescomponible. Para esto, sea

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n, \tag{8}$$

donde $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión infinita de semicircunferencias utilizadas en la construcción de B , tales que:

- (1) Los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ pertenecen a S_1 ;
- (2) Para $n \geq 1$, $S_n \cap S_{n+1}$ es el punto de F que es común a ambos.

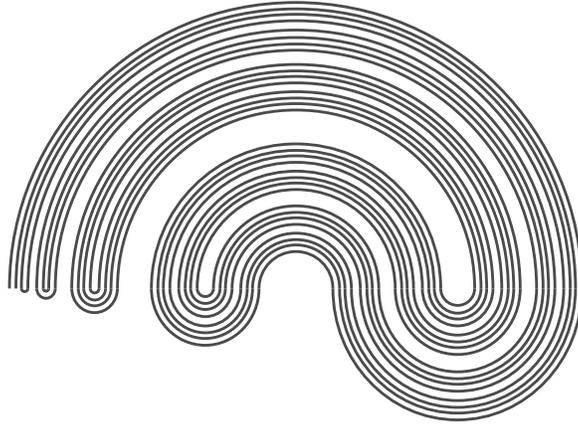


Figura 3: Arcoiris de Knaster

Denotemos por K a los puntos del conjunto de Cantor, F , que son puntos extremos de los intervalos $J_{n,k}$. Notemos que para $n = 1$, $F_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2} = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Luego, F_1 tiene $2^1 = 2$ intervalos y por tanto tiene $2 * (2^1) = 4$ puntos extremos los cuales son $A_1 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$. Entonces, $A_1 \subset K$. Como $\{0, 1\} \subset S_1$, $\{1, 2/3\} \subset S_2$ y $\{2/3, 1/3\} \subset S_3$, se tiene que

$$A_1 \subset S_1 \cup S_2 \cup S_3 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S.$$

Luego, $A_1 \subset S$.

Para $n = 2$, se satisface que $F_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}$. Luego, F_2 tiene $(2^2) = 4$ intervalos y por tanto $2(2^2) = 8$ puntos extremos los cuales son $A_2 = \{0, 1/9, 2/9, 1/3, 2/3, 7/9, 8/9, 1\}$. Entonces $A_2 \subset K$. Como $\{0, 1\} \subset S_1$, $\{1, 2/3\} \subset S_2$, $\{2/3, 1/3\} \subset S_3$, $\{1/3, 2/9\} \subset S_4$, $\{2/9, 7/9\} \subset S_5$, $\{7/9, 8/9\} \subset S_6$, y $\{8/9, 1/9\} \subset S_7$, se tiene que

$$A_2 \subset S_1 \cup \dots \cup S_7 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S.$$

Luego, $A_2 \subset S$.

Siguiendo este procedimiento se observa que cada vez que se tiene un subconjunto A_n de K , $A_n \subset S$. Por tanto, $K \subset S$; esto es, para cada punto extremo en F , existe un semicírculo S_m teniéndole como punto extremo. La demostración del hecho de que F es perfecto muestra también que K es denso en F . Por tanto, $K \subset S$ y $\overline{K} = F$, de donde $\overline{S} = B$. Claramente S es conexo, por lo que B es conexo a su vez. \overline{S} es compacto por el Teorema de Heine-Borel, de esta manera hemos demostrado que B es un continuo.

A continuación veremos que $\overline{F - K} = F$. Dados $x \in K$ y $\epsilon > 0$, debemos encontrar un punto $y \in F - K$ tal que $|x - y| < \epsilon$. Como $x \in K$, se tiene que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$, donde $b_n \in \{0, 2\}$ y existe un N tal que para toda $n \geq N$, $b_n = 0$ o $b_n = 2$. Tomemos $N_1 \geq N$ tal que $\frac{1}{3^{N_1-1}} < \epsilon$. Cualquier elemento $y \in F - K$ tiene una expansión ternaria de la forma $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. Para la $y \in F - K$ buscada, sea

$$a_n = \begin{cases} b_n, & \text{si } n < N_1; \\ 0, & \text{si } n \text{ es par y mayor o igual que } N_1; \\ 2, & \text{si } n \text{ es impar y mayor o igual que } N_1. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \right| \leq \sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n} \\ &< \sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{N_1-1}} < \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\overline{F - K} = K$, entonces $\overline{B - S} = B$. Por tanto, $B - S$ es denso en B . Por el Teorema 6.15, basta mostrar que B es irreducible entre $(0,0)$ y cualquier punto de $B - S$. Para esto, primero probaremos el siguiente:

Lema 7.1. *Si L es un subcontinuo propio de B , donde B es el continuo de Knaster, tal que $L \cap S \neq \emptyset$, entonces existe un n tal que $L \subset \bigcup_{k=1}^n S_k$.*

Demostración. Sea $q \in L \cap S$. Como S es denso en B , existe un punto $p \in S$ tal que está en el subconjunto abierto y no vacío $B - L$. De hecho, p puede ser tomado de tal manera que si A denota el arco en S entre $(0,0)$ y p entonces $q \in A$. Esto puede ser hecho simplemente uniendo con un arco de $(0,0)$ a q al continuo L .

Vamos a probar que $L \subset A$. Supongamos que $L \not\subset A$ y sea $r \in L - A$. Tomemos un número natural n_0 de tal manera que la distancia de p a L sea mayor que 3^{-n_0} (y, en consecuencia, la distancia de r a A también será mayor que 3^{-n_0}) y tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n_0-1}} S_k$. Consideremos la banda P formada por todos los círculos de radio $\frac{4}{3^{n_0+2}}$ centrados en los puntos de A . La frontera de P está compuesta por dos líneas paralelas a A y dos semicircunferencias centradas en $(0,0)$ y p , respectivamente. Las primeras tres de estas líneas son ajenas a B , ya que sus puntos de intersección con el eje x están en los intervalos que fueron quitados en la construcción de F (ya que $A \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n_0-1}} S_k$). La cuarta es ajena a L , debido a que la distancia de p a L es mayor que $\frac{1}{3^{n_0}} > \frac{4}{3^{n_0+2}}$. Por tanto, la frontera de P es ajena a L . Como L es un continuo, se tiene que $L \subset P$ o $L \cap P = \emptyset$, contradiciendo los hechos: $r \in L - P$ y $q \in L \cap P$. En consecuencia, $L \subset A \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n_0-1}} S_k$. \square

Teorema 7.2. *Si B es el continuo de Knaster y S es como en (8), entonces B es irreducible entre el punto $(0,0)$ y cualquier punto de $B - S$.*

Demostración. Para verificar la irreducibilidad de B , donde B es el continuo de Knaster, entre $(0,0)$ y cualquier punto de $B - S$, supongamos que existe un subcontinuo propio L de B tal que $(0,0) \in L$ y que $y \in L$, para algún punto $y \in B - S$. Entonces, $L \cap S \neq \emptyset$ y $L \cap (B - S) \neq \emptyset$, de donde $L \not\subset S$. Esto contradice el Lema 7.1. Por tanto, ningún subcontinuo propio L de B contiene a $(0,0)$ e intersecta a $B - S$. Como consecuencia de lo anterior, tenemos que B es irreducible entre $(0,0)$ y cada punto de $B - S$, lo que prueba la indescomponibilidad de B . \square

Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros su amable revisión que hicieron mejorar esta presentación.

Bibliografía

- [1] Charles O. Christenson, William L. Voxman, *Aspects of topology*, Monographs, Textbooks, and Lecture Notes, Vol. 39, Marcel Dekker, inc. New York and Basel. 1977.
- [2] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
- [3] Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez, *Dendritas*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.
- [4] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez, *Dendritas C-determinadas* (Capítulo 8), Matemáticas y su Aplicaciones 4, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014, págs. 183- 207, Primera Edición, ISBN: 978 607 487 791 5.
- [5] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *El n-ésimo hiperespacio suspensión de gráficas finitas* (Capítulo 11), Matemáticas y sus Aplicaciones 3, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2013, págs. 297-214, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-659-8.

- [6] Alejandro Illanes and S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [7] Francis Leon Jones, *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles*, Aportaciones Matemáticas No. 27, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [8] Germán Montero Rodríguez, *Continuos indescomponibles*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.
- [9] J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Massachusetts Institute of Technology, 2009.
- [10] Sam Bernardo Nadler, Jr., *Continuum Theory: an Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Merce Dekker, New York, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
213470925@alumnos.fcfm.buap.mx

Índice de autores

- Ahuatzi Reyes, José Gerardo, 137
Angoa, Juan, 103
Aparicio Hernández, Aarón, 119
- Chacón Tirado, Mauricio Esteban, 165
Contreras, Agustín, 103
- Escalante Vega, Juana Elisa, 23
- Herrera Carrasco, David, 137, 187
- Ibarra, Manuel, 103
- Macías Romero, Fernando, 137, 187
Martínez Palacios, María Teresa Verónica, 45
Mejía de Dios, Jesús Adolfo, 23
Montero Rodríguez, Germán, 187
- Olivares Aguayo, Héctor Alonso, 45
Ortigoza, Gerardo M., 75
Ortiz Ramírez, Ambrosio, 45
- Salem Silva, Francisco Sergio, 23

Matemáticas y sus aplicaciones 5
su composición, diseño y cuidado, estuvo a cargo
de Fernando Macías Romero
se terminó de imprimir el 19 de octubre de 2015, en los talleres de
El Errante editor, S. A. de C. V., sito en privada Emiliano Zapata 5947,
Col. San Baltazar Campeche, Puebla, Pue., México.

El tiraje consta de 500 ejemplares.