

ISBN: 978-607-487-659-8



Es este libro la expresión de un esfuerzo por dejar constancia de la riqueza matemática de la Octava Gran Semana Nacional de la Matemática 2012 (8GSNM). Toda obra editorial se realiza con la esperanza de tener numerosos lectores; si por lo menos los asistentes se convierten en lectores y éstos propagan este volumen, estaremos satisfechos. Los trabajos aquí presentados fueron sometidos a estricto arbitraje.



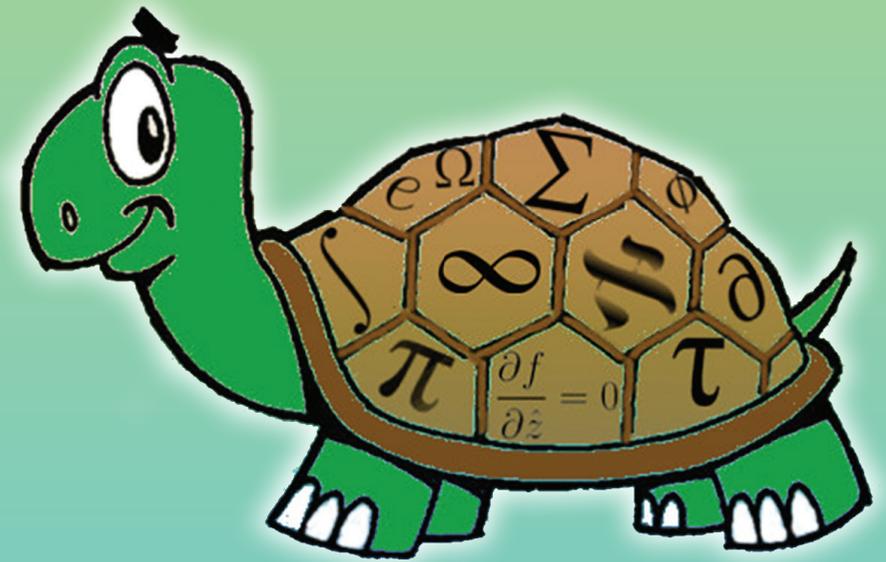
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Dirección de Fomento Editorial



Matemáticas y sus Aplicaciones 3

Fernando Macías Romero
editor

Matemáticas y sus Aplicaciones 3



Fernando Macías Romero
editor

textos
Científicos

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Matemáticas y sus Aplicaciones 3

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Editor

Fernando Macías Romero

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

José Alfonso Esparza Ortiz

Rector

René Valdiviezo Sandoval

Secretario General

Ygnacio Martínez Laguna

Vicerrector de Investigación y Estudios de Posgrado

Fernando Santiesteban Llaguno

Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura

José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

Director de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Primera edición, 2013

ISBN: 978 607 487 659 8

© Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Dirección de Fomento Editorial

2 Norte 1404, C.P. 72000

Puebla, Pue.

Teléfono y fax: 01 222 246 8559

Impreso y hecho en México

Printed and made in Mexico

Matemáticas y sus Aplicaciones 3

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos trabajos presentados en la Octava Gran Semana Nacional de la Matemática 2012, FCFM, BUAP.

Editor

Fernando Macías Romero

Comité científico

Arnoldo Bezanilla López, Jorge Bustamante González, Ángel Cano Cordero, José Luis Carballido Carranza, Hugo Adán Cruz Suárez, Slaviša Djordjević, Martha Guzmán Partida, Alejandro Illanes Mejía, Judy Kennedy, José Luis León Medina, María de Jesús López Toriz, Sergio Macías Álvarez, Jorge Martínez Montejano, Héctor Sánchez Morgado, Víctor Vázquez Guevara, Francisco Solano Tajonar Sanabria, Fernando Velasco Luna, Claudia Zepeda Cortés.

Contenido

| | |
|--|----|
| Presentación | 1 |
| | |
| Análisis matemático | |
| Capítulo 1. Contributions to the study of polynomial approximation in Hölder spaces | 5 |
| <i>Jorge Bustamante-González, Miguel Antonio Jiménez-Pozo</i> | |
| Capítulo 2. Funciones lineales entre espacios normados asimétricos | 25 |
| <i>Slaviša Djordjević, Francisco Javier Mendoza Torres</i> | |
| | |
| Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y modelación matemática | |
| Capítulo 3. El teorema de Poincaré Bendixson | 43 |
| <i>Lucía Cervantes Gómez, Ana Luisa González Pérez, Julio Erasto Poisot Macías</i> | |
| Capítulo 4. Complejidad de sucesiones con valores en un conjunto finito | 67 |
| <i>Juan Francisco Estrada García</i> | |
| | |
| Lógica matemática | |
| Capítulo 5. Una inmersión del cálculo proposicional intuicionista a la lógica modal $S4$ | 87 |
| <i>José Arrazola Ramírez, Iván Martínez Ruiz, Miguel Pérez Gaspar, Rubén Vélez Salazar</i> | |

Probabilidad y estadística

- Capítulo 6. Análisis de procesos de decisión de Markov con horizonte aleatorio** 111
Hugo Adán Cruz Suárez, Rocío Ilhuicatzí Roldán
- Capítulo 7. Un estudio de la incidencia de ciclones en México vía procesos auto-recursivos de orden uno** 129
Hugo Adán Cruz Suárez, Lourdes Pérez Amaro, Víctor Hugo Vázquez Guevara
- Capítulo 8. El precio de una opción barrera de tipo down and out** 143
Nelva Betzabel Espinoza Hernández, Carlos Palomino Jiménez, Héctor David Ramírez Hernández, Francisco Solano Tajonar Sanabria
- Capítulo 9. Análisis de la mortalidad causada por la viruela y las ventajas de la inoculación como medida de prevención** 153
Araceli Flores Solís, Francisco Solano Tajonar Sanabria

Topología

- Capítulo 10. El n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo** 175
Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero
- Capítulo 11. El n -ésimo hiperespacio suspensión de gráficas finitas** 197
David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez
- Capítulo 12. Algunas propiedades de los espacios topológicos linealmente ordenados** 215
Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García

- Índice de Autores** 237

Presentación

Las Grandes Semanas Nacionales de la Matemática son un ejercicio anual del colectivo matemático nacional que, organizado bajo la dirección de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, presenta una gran gama de actividades que forman parte del quehacer matemático.

Es este libro la expresión de un esfuerzo por dejar constancia de la riqueza matemática de la Octava Gran Semana Nacional de la Matemática (8GSNM). Toda obra editorial se realizó con la esperanza de tener numerosos lectores; si por lo menos los asistentes se convierten en lectores y éstos propagan este volumen, estaremos satisfechos.

En este libro se recogen algunos trabajos de la 8GSNM, agrupándolos de acuerdo a las sesiones de la misma, los cuales fueron sometidos a arbitraje riguroso. Agradecemos sinceramente a todos los árbitros su dedicación y profesionalismo, así como a mis auxiliares de servicio social, Leonardo Remedios Santiago y José Luis León Medina quien confeccionó la edición electrónica.

Fernando Macías Romero
Editor

Análisis matemático

Capítulo 1

Contributions to the study of polynomial approximation in Hölder spaces

Jorge Bustamante-González, Miguel Antonio Jiménez-Pozo
FCFM-BUAP

Abstract

In this work we present several of our contributions to the study of classical approximation problems by trigonometric and algebraic polynomials in Hölder norms. It is not a compilation of results but a unified exposition wherein the reader may meet some of the lines of development of the subject. To this aim we include historical remarks, related papers, recent results and open problems.

1. Introduction

In dealing with approximation theory in the context of Hölder spaces, we presented in [7] a wide survey that allows the reader to see historical remarks and the state of the art to the end of twentieth Century. One of the authors published another paper [2], that updates several parts of the quoted survey and establishes open problems as well. At present not only the number of references on Hölder and related approximation results has grown, but also new lines of research have appeared. Thus our interest here is not exactly a continuation of the general survey. Rather we discuss with a unified approach some of our contributions to several polynomial approximation problems in Hölder norms in the last years, a subject to which we have dedicated a part of our mathematical researches. Of course, even with this restriction, the subject is too large to be covered with details. Thus we shall mention other lines and open ways of research along this exposition. But without a deep look at them.

Also due to reasons of objectives as well as a limited space we cannot go inside basic concepts of classical Lipschitz, Hölder, or other related spaces and their applications. If desired, the reader is invited to consult standard books at hands such as [31], [9], [14], and [32]. However to know where we are it will be convenient to begin next section by explaining with some details different links that connect the Hölder polynomial approximation problems. For treating problems on Hölder approximation we introduced a modulus of continuity that we called Lipschitzian. This concept and several results in which we used it are presented in Section 3. While Section 4 deals

with Equilipschitzian sets, a concept introduced by us that has many applications. Its generalization will be treated in Section 5. We devote Section 6 to collect other related results we have found on polynomial approximation in Hölder norms to give a more complete scope. Section 7 contains a brief exposition on polynomials approximation in Besov spaces of 2π -periodic functions. Problems related with Fourier series of Lipschitz functions in Hölder norms will be considered in Section 8. The last section is devoted to a study of polynomial approximation in Besov spaces of periodical functions.

We shall need several notations: The symbol X denotes compact interval of the real line or the complex circle \mathbb{T} . In the last case it is common the identification between \mathbb{T} and the additive group $I = [0, 2\pi)$ of the real numbers modulo 2π with the distance

$$\rho(x, y) = \min\{|x - y|, 2\pi - |x - y|\}.$$

If $X = [a, b]$ and $1 \leq p < \infty$, $L^p(X)$ is the usual Lebesgue space with the norm

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

In the case $p = \infty$, $L^\infty(X) = C[a, b]$, i.e., the space of continuous functions with the norm.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

If $X = \mathbb{T}$ and $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X)$ is the subspace of $L^p[0, 2\pi]$ of all 2π -periodic functions.

If $r \in \mathbb{N}$ and $1 \leq p < \infty$, $D_r^p(X)$ is the family of all $g \in L^p(X)$ such that $g^{(r-1)}$ is absolutely continuous and $g^{(r)} \in L^p(X)$. On the other hand, $D_r^\infty(X)$ is the family of all $g \in C(X)$ such that $g^{(r)} \in L^\infty(X)$.

For $n \in \mathbb{N}_0$, $P_n(X)$ is the family of all algebraic (trigonometric) polynomials of degree non greater than n and $\mathcal{P}(X) = \cup_{n=0}^\infty P_n(X)$.

2. Hölder spaces and approximation: Why and how.

There are different ways of associating Lipschitz spaces to $L^p(\mathbb{T})$. To this aim some kind of translation is needed. The typical one is given by $f_t(x) = f(x + t)$, $f \in L^p(\mathbb{T})$, $x, t \in \mathbb{R}$. Then $f_t \in L^p(\mathbb{T})$ is a necessary hypothesis for forming $Lip_1^p(\mathbb{T})$ to be the functions $f \in L^p(\mathbb{T})$, for which

$$\theta_1(f)_p = \sup \left\{ \|f_t - f\|_p / |t|, t \neq 0 \right\} < \infty. \quad (1)$$

In the case $X = [a, b]$ we have a similar definitions, with the agreement $f_t(x) = f(x)$, if $x + t \notin [a, b]$.

The functional $\theta_1(\circ)_p$ is a semi-norm. Thus $Lip_1^p(X)$ is a normed space (actually Banach) with the norm

$$\|f\|_{Lip_1^p(X)} = \|f\|_p + \theta_1(f)_p. \quad (2)$$

We have the strict inclusions of sets

$$D_1^\infty(X) \subset Lip_1^\infty(X) \subset L^\infty(X).$$

Thus Lipschitz condition provides an intermediate scale for measuring the degree of smoothness between differentiable and continuous functions, and opens the possibility of a new refinement of the scale. This is accomplished by using the so called *Hölder spaces* given as follows.

If (Y, d) is a metric space and $0 < \alpha < 1$ is a real number, then (Y, d^α) is also a metric space. Thus a semi-norm $\theta_\alpha(f)_p$ can be defined by (1) with the simple change of $|t|$ by $|t|^\alpha$. This fact allows the introduction of the so called *Hölder spaces* $Lip_\alpha^p(X)$, normed by (2) with $\theta_\alpha(f)_p$ instead $\theta_1(f)_p$. However, since definitions of Lipschitz and Hölder norms are more or less the same thing, both names are used indistinctly to denominate the spaces $Lip_\alpha^p(X)$.

If $0 < \beta < \alpha \leq 1$, $Lip_\alpha^p(X) \subset Lip_\beta^p(X)$. Then the chain of inclusions expressed above can be rewritten by

$$D_1^p(X) \subset Lip_\alpha^p(X) \subset Lip_\beta^p(X) \subset L^p(X).$$

Since $D_1^p(X)$ contains the linear space $\mathcal{P}(X)$, the natural question about the density of $\mathcal{P}(X)$ in $Lip_\beta^p(X)$ is posed. Nevertheless this question has a negative answer because from the topological point of view, for any $0 < \alpha \leq 1$, the Banach space $Lip_\alpha^p(X)$ is not separable. Anyway the following result was giving by Kalandiya [24], in order to study a certain class of integro-differential equations.

Theorem 2.1. *Fix $\alpha \in (0, 1]$ and $f \in Lip_\alpha^\infty([0, 1])$. Suppose that for $n \in \mathbb{N}$, there exist $P_n \in P_n([0, 1])$ such that $\|f - P_n\|_\infty \leq C_1/n^\alpha$. Then, for $0 < \beta < \alpha/2$,*

$$\theta_\beta(f - P_n)_\infty \leq C_2/n^{\alpha-2\beta}.$$

Taking into account that \mathcal{P} is not dense in $Lip_\alpha^\infty([0, 1])$, this result represents a step toward partial solutions of the problem of finding polynomial approximation of functions in Hölder norms. Kalandiya theorem determined a complete line of research on Hölder polynomial approximation, i. e. the approximation of functions in $Lip_\alpha^p(X)$ with the norm of $Lip_{\alpha-\varepsilon}^p(X)$. For details and references see [7]. But we also pointed

out in [5] this way of measuring the approximation is limited in scope. The reasons will be explained later.

Another point of view in the subject appeared early in connection with the so called Plessner problems [28], i. e. the determination of all elements f in a Banach space E of functions for which the translation $t \in \mathbb{R} \rightsquigarrow f_t \in E$ is continuously defined. Concerning Lipschitz or Hölder spaces the answers were firstly restricted to periodic functions in which translation is completely defined in a natural way. It is known $\|f_t - f\|_p \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$, for $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$. Clearly, we need the continuity of the translation in $L^p(\mathbb{T})$ for defining $\theta_1(\circ)_p$ in (1). This and other related hypothesis about translation are usually required a priori. The continuation of this idea goes till the concept of semigroup of operators [9]. But a main problem appeared with the fact that translation is not continuous in any of the spaces $L^p_\alpha(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$. The development of the theory was as follows. For any $0 < \alpha < 1$, $f \in L^p_\alpha(\mathbb{T})$, $\delta > 0$, set

$$\theta_\alpha(f, \delta)_p = \sup \left\{ \frac{\|f_t - f\|_p}{|t|^\alpha}, \quad 0 < |t| \leq \delta \right\}. \quad (3)$$

Of course $\theta_\alpha(f)_p = \sup \left\{ \theta_\alpha(f, \delta)_p, \delta > 0 \right\}$. Then for $0 < \alpha < 1$, introduce the linear subspace $lip_\alpha^p(\mathbb{T})$ of $Lip_\alpha^p(\mathbb{T})$ conformed by the functions $f \in Lip_\alpha^p(\mathbb{T})$ such that

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \theta_\alpha(f, \delta)_p = 0. \quad (4)$$

If we extend this definition to $\alpha = 1$, we get that $lip_1^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, only contains the (a.e.) constant functions. So nothing new in this case. Another definition for $\alpha = 1$ will be considered later. For the moment being define the linear spaces \mathcal{Q}_α^p of functions $f \in Lip_\alpha^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha \leq 1$, for which

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f_t - f\|_{Lip_\alpha^p(\mathbb{T})} = 0.$$

Characterizations of these spaces are obtained with the use of different papers as follows. From results due to Hardy and Littlewood [16], we get that \mathcal{Q}_1^1 is the space of functions of bounded variation on \mathbb{T} , $\mathcal{Q}_1^\infty = D_1^\infty(\mathbb{T})$, and for $1 < p < \infty$, \mathcal{Q}_1^p is the space of antiderivatives of the functions in $L^p(\mathbb{T})$. Later in [30], Shilov proved that for any $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha \leq 1$, \mathcal{Q}_α^p is exactly the closure in the norm of $Lip_\alpha^p(\mathbb{T})$ of all trigonometric polynomials. Finally Mirkil [27] closed the circle of ideas by proving that for any $0 < \alpha < 1$ and $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{Q}_\alpha^p = lip_\alpha^p(\mathbb{T})$. Thus for $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ is dense in $lip_\alpha^p(\mathbb{T})$. Since this last result also holds in the algebraic situation, we are oriented to study polynomial approximation in the spaces $lip_\alpha^p(X)$.

Still we shall mention a third way of research. Denote by $M_n(f)_\infty$ the best approximation to $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ from $P_n(\mathbb{T})$. A fundamental theorem available in most texts of Approximation Theory establishes the rate of convergence

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{T}), M_n(f)_\infty = \mathcal{O} \left(\omega \left(f, \frac{1}{n} \right) \right), \quad (5)$$

where ω stands for the usual modulus of continuity. If $0 < \alpha \leq 1$ and $f \in Lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$, it follows that

$$\omega(f, \delta) \leq \theta_\alpha(f)_\infty \delta^\alpha.$$

Thus

$$\forall f \in Lip_\alpha^\infty(\mathbb{T}), \quad M_n(f)_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

If f is smooth enough we must guess that the speed of convergence is faster. In fact (see [12]) Jackson generalized the preceding formula. He obtained the so-called *direct approximation theorem*: for $r = 0, 1, \dots$, and $f^{(r)} \in Lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$,

$$M_n(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-r-\alpha}). \quad (6)$$

In the proof of this result it is obtained

$$\forall f \in D_r^\infty(\mathbb{T}), \quad M_n(f)_\infty \leq \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\pi^2}{n}\right)^r \|f^{(r)}\|_\infty. \quad (7)$$

Generalizations of *Jackson inequality* (7) are crucial for most extensions of (6).

The direct theorem establishes a natural question: If $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $0 < \alpha \leq 1$ and $M_n(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-r-\alpha})$, do $f \in D_r^\infty$ and $f^{(r)} \in Lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$?

The *inverse theorem* of Bernstein (see [12]) establishes this is true for $0 < \alpha < 1$. The proof of this theorem passes through the so called *Bernstein inequality*

$$\forall t_n \in P_n(\mathbb{T}), \quad \|t_n^{(r)}\|_\infty \leq n^r \|t_n\|_\infty. \quad (8)$$

Generalizations of Bernstein inequality are needed for inverse theorems of approximation. To pursue this subject see [10]. However Bernstein theorem cannot be extended to the case $\alpha = 1$. To see that, observe the function $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sin(kx)/k^2$ satisfies $M_n(f)_\infty = \mathcal{O}(1/n)$. But $f \notin Lip_1^\infty(\mathbb{T})$. A solution to the characterization was found by Zygmund (see [33]) who introduced the following concept. A function $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, belongs to $Lip_\alpha^*(\mathbb{T})$, $0 < \alpha \leq 1$, whenever

$$\exists C > 0 \forall t \forall x, \quad |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq C |t|^\alpha. \quad (9)$$

It is easy to prove for any $0 < \alpha < 1$ the chain of strict inclusions

$$Lip_1^\infty(\mathbb{T}) \subset Lip_1^*(\mathbb{T}) \subset Lip_\alpha^\infty(\mathbb{T}) = Lip_\alpha^*(\mathbb{T}).$$

Zygmund theorem establishes that for any $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ and $r = 0, 1, 2, \dots$,

$$M_n(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-r-1}) \iff f^{(r)} \in Lip_1^*(\mathbb{T}). \quad (10)$$

Following Zygmund idea the research on polynomial approximation in Hölder spaces is presented as follows.

We substitute the use of derivatives by symmetric differences of higher order. For every integer $r > 0$, real $s > 0$ and $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, we set

$$\Delta_s^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x + ks).$$

For $f \in L^p[a, b]$ we use the same definition under the assumption $\Delta_s^r f(x) = 0$, whenever $x \notin [a, b]$ or $x + rs \notin [a, b]$.

For $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < r$, $\delta > 0$, and $f \in L^p(X)$, define successively

$$\theta_\alpha^r(f, \delta)_p = \sup_{0 < |t| \leq \delta} \frac{\|\Delta_t^r f\|_p}{|t|^\alpha}, \quad (11)$$

$$\theta_\alpha^p(f)_p = \sup_{\delta > 0} \theta_\alpha^r(f, \delta)_p, \quad (12)$$

$$Lip_\alpha^{p,r}(X) = \{f \in L^p(X) : \theta_\alpha^r(f)_p < \infty\},$$

$$lip_\alpha^{p,r}(X) = \left\{ f \in L^p(X) : \lim_{\delta \rightarrow 0} \theta_\alpha^r(f, \delta)_p = 0 \right\},$$

and the norm

$$\|f\|_{Lip_\alpha^{p,r}(X)} = \|f\|_p + \theta_\alpha^r(f)_p.$$

We also recall another important modulus. If $f \in L^p[-1, 1]$ and $h > 0$ the symmetric divided difference $\overline{\Delta}_h^r f(x)$ is defined by

$$\overline{\Delta}_h^r f(x) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f\left(x + \left(\frac{r}{2} - j\right)h\right), \quad (13)$$

whenever $x \pm rh/2 \in [-1, 1]$ and $\overline{\Delta}_h^r f(x) = 0$ otherwise. For $t > 0$, the Ditzian-Totik modulus of order r is defined by

$$\omega_\varphi^r(f, t) := \sup_{h \in (0, t]} \|\overline{\Delta}_{h\varphi}^r f\|_p \quad (14)$$

where $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ($x \in [-1, 1]$) (see [15]). With this modulus the functional

$$\theta_{\varphi, \alpha}^r(f, \delta)_p = \sup_{0 < t \leq \delta} \frac{\omega_\varphi^r(f, t)_p}{t^\alpha}, \quad (15)$$

and the spaces $Lip_{\varphi, \alpha}^{p,r}[-1, 1]$ and $lip_{\varphi, \alpha}^{p,r}[-1, 1]$ are defined analogously. Notice that with a linear change of variable similar notions can be given in any compact real interval $[a, b]$.

Different Hölder polynomial approximation problems have been studied in the situation described above ([5], [6]). We can consider them not only in several variables [11]. But in infinitely many variables as well [20]. Exchanging the sup symbol by integrals one gets different well known Besov spaces (sometimes named *generalized Lipschitz*, for instance in [9]) whose theory has been largely studied and applied, in particular to approximation problems [8]. Hölder approximation by algebraic polynomials has been also well studied by Bustamante and his students [3]. In this paper we will try to summarize some of our main contributions to the subject in hands.

3. The Lipschitzian modulus of smoothness

Different results of approximation in Hölder norms were early obtained by using an approximation scale with a parameter $\beta < \alpha$. To follows this development the reader may consult [7]. But in the periodical case many of them are implied by a somewhat surprising theorem due to Leindler, Meir and Totik in [26] that reads as follows:

Theorem 3.1. *Let $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ be an increasing positive function and (L_n) be a sequence of convolution operators from $L^\infty(\mathbb{T})$ into $L^\infty(\mathbb{T})$. If $n \in \mathbb{N}$ and $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, then*

$$\|L_n f - f\|_\varphi \leq \left(1 + \frac{1}{\varphi(1/n)}\right) \|L_n f - f\|_\infty + 2(1 + \|L_n\|) \sup_{0 < t \leq 1/n} \frac{\omega(f, t)}{\varphi(t)},$$

where for any $g \in L^\infty(\mathbb{T})$,

$$\|g\|_\varphi = \|g\|_\infty + \sup_{t > 0} \frac{\|g_t - g\|_\infty}{\varphi(t)}.$$

Observe we are dealing with Hölder spaces if $\varphi(t) = |t|^\alpha$. Actually the introduction of the function φ is only a small generalization. The authors of the theorem announced a similar estimate is also possible for the usual spaces $L^p(\mathbb{T})$. We shall come back later to this result.

It was explained in Section 2 the early researches on Hölder approximation were carried out by the indirect approximation of functions in $Lip_\alpha^p(X)$, by means of the norm in $Lip_\beta^p(X)$ with $0 < \beta < \alpha \leq 1$. However around 1998 we discovered (see [5]) this method has an inconvenient by proving

“There exists $f \in lip_\beta^p(\mathbb{T})$, $0 < \beta < 1$, such that for any $\alpha > \beta$, $f \notin Lip_\alpha^p(\mathbb{T})$ ”.

In other words this affirmation limits the possibility of a characterization of $Lip_\alpha^p(X)$ (or of $lip_\alpha^p(X)$) by the approximation in Hölder norm of functions in $lip_\beta^p(X)$

with $\beta < \alpha$. On the other hand we also discovered it was possible to use with success the function $\theta_\alpha(\circ, \delta)_p$ introduced in (11) as a modulus of smoothness in $lip_\alpha^p(X)$. Furthermore, following the usual notations if we define for any $\alpha > 0$ and $r = 1, 2, \dots$, the modulus of smoothness of order r (in this especial case r could be greater than $[\alpha] + 1$) in $lip_\alpha^p(X)$ through the traditional formula

$$w_{r,\alpha}(f, \delta)_p := \sup_{0 < |t| \leq \delta} \left(\|\Delta_t^r f\|_{Lip_\alpha^p(X)} \right) \quad (16)$$

and develop such expression, we get that (11) is simpler than (16).

These facts determined our way of research on the subject by means of the modulus (11) in $lip_\alpha^p(X)$ that we firstly called *lipschitzian modulus of smoothness*. Our early results in [5] could be resumed as follows.

For $r = 1, 2, \dots$, let us consider the following Petree's *K-functional*: for every $t > 0$, set

$$K_{r,\alpha}(f, t, X)_p := \inf_{g \in D_r^p(X)} \left\{ \|f - g\|_{Lip_\alpha^p(X)} + t \|g^{(r)}\|_p \right\}.$$

There is a closed interplay between moduli of smoothness and *K-functionals*.

Theorem 3.2. *For each $r = 1, 2, \dots$ fixed and $0 < \alpha < r$, there exist positive constants C_1 and C_2 such that, for every $f \in lip_\alpha^p(X)$ and $t \in (0, 1]$,*

$$C_1 \theta_\alpha^r(f, t)_p \leq K_r(f, t^{r-\alpha}, X)_p \leq C_2 \theta_\alpha^r(f, t)_p.$$

and

$$C_1 w_\alpha^r(f, t)_p \leq K_{r,\alpha}(f, t^r, X)_p \leq C_2 w_\alpha^r(f, t)_p.$$

Corollary 3.3. *For each $r = 1, 2, \dots$, there exist constants C_1 and C_2 (and if $r > 1$ also a constant C_3) depending on r such that, if $f \in lip_\alpha^p(X)$ and $t \in (0, 1]$, then*

$$w_\alpha^r(f, t)_p \leq C_1 \theta_\alpha^r(f, t)_p \leq C_2 w_\alpha^r(f, t^{1-\alpha/r})_p \leq C_3 w_\alpha^{r-1}(f, t)_p.$$

We have given examples that show it is not possible in general an inequality of the form $\theta_\alpha^r(f, t) \leq C w_\alpha^r(f, t)$.

For the modulus (15) we need a different *K-functional*. Let $W_\varphi^{p,r}[-1, 1]$ denote the space of all $g \in L_p[-1, 1]$ such that, g is $r - 1$ times differentiable, $g^{(r-1)}$ is absolutely continuous on each compact subinterval of $(-1, 1)$ and $\|\varphi^r g^{(r)}\|_p < \infty$. In $W_\varphi^{p,r}[-1, 1]$ we consider the seminorm $|g|_{p,r} := \|\varphi^r g^{(r)}\|_p$. Now, for $f \in Lip_{\varphi,\alpha}^{p,r}[-1, 1]$ define

$$K_{r,\varphi,\alpha}(f, t)_p = \inf_{g \in W_\varphi^{p,r}[-1, 1]} \left\{ \|f - g\|_{Lip_{\varphi,\alpha}^{p,r}(X)} + t |g|_{p,r} \right\}.$$

Theorem 3.4. *For each $r = 1, 2, \dots$ fixed and $0 < \alpha < r$, there exist $t_0 > 0$ and positive constants C_1 and C_2 such that, for every $f \in lip_{\varphi,\alpha}^{p,r}[-1, 1]$ and $t \in (0, t_0]$,*

$$C_1 \theta_{\varphi,\alpha}^r(f, t)_p \leq K_{r,\varphi,\alpha}(f, t^{r-\alpha})_p \leq C_2 \theta_{\varphi,\alpha}^r(f, t)_p.$$

4. Equilipschitzian sets

In an earliest paper [6], we introduced the following concepts that are closely related with the convergence in $lip_\alpha^p(X)$:

Definition 4.1. A nonempty set G of real-valued functions on X is called *normal* in $Lip_\alpha^\infty(X)$, if there exists a constant $M := M(\alpha) \geq 0$, such that, for every $g \in G$ and every pair of elements $x, y \in X$, one has

$$|g(x) - g(y)| \leq M d(x, y)^\alpha,$$

i. e. if $\sup \{\theta_\alpha(g) : g \in G\} \leq M$.

The set G is called *equilipschitzian* in $Lip_\alpha^\infty(X)$ if for every $\varepsilon > 0$, there exists a number $\delta := \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$, such that, for every $g \in G$ and every pair of elements $x, y \in X$ for which $d(x, y) \leq \delta$, one has

$$|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon d(x, y)^\alpha,$$

i. e. if $\sup \{\theta_\alpha(g, \delta) : g \in G\} \leq \varepsilon$.

A sequence (g_n) of real functions on X , is called *normal* (respectively, *equilipschitzian*) in $Lip_\alpha^\infty(X)$, if the set $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ is normal (respectively, *equilipschitzian*) in $Lip_\alpha^\infty(X)$.

Notice that every *equilipschitzian* set in $Lip_\alpha^\infty(X)$ is a *normal* set in that space, and that every *normal* set in $Lip_\alpha^\infty(X)$ is uniformly equicontinuous in the usual sense. We proved in [6] the following result.

Theorem 4.2. *Let (f_n) be a sequence in $lip_\alpha^\infty(X)$ and f another real function on X . Then the following conditions are equivalent:*

- (i) $f \in lip_\alpha^\infty(X)$ and $\|f_n - f\|_{Lip_\alpha^\infty(X)} \rightarrow 0$,
- (ii) (f_n) is *equilipschitzian* in $Lip_\alpha^\infty(X)$ and $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Theorem 4.3. *Let (f_n) be normal in $Lip_\alpha^\infty(X)$. Then (f_n) is *equilipschitzian* in $Lip_\beta^\infty(X)$, for every $0 < \beta < \alpha$. Moreover, if f is a real function on X and $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, then $\|f_n - f\|_{Lip_\beta^\infty(X)} \rightarrow 0$ for every $0 < \beta < \alpha$.*

We also applied these theorems for characterizing the compact sets in $lip_\alpha^\infty(X)$ as well as for proving the convergence in $lip_\alpha^\infty(X)$ of different sequences of operators. Moreover in [22] we extended the above results to Hölder spaces of integrable functions, and on the other hand we are now in a position of coming back to Leindler, Meir and Totik theorem for explaining its qualitative origin. In fact, the convolutions of the usual trigonometric kernels with small Lipschitz functions define *equilipschitzian* sequences. Thus we can prove the following

Theorem 4.4. *Let (K_n) be a bounded sequence of integrable functions in the classical space $L^1(\mathbb{T})$, such that*

$$\|K_n * p - p\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{whenever } n \longrightarrow \infty,$$

for every trigonometric polynomial p , where $$ stands for the usual convolution of functions in $L^1(\mathbb{T})$. Then*

$$\|K_n * f - f\|_{Lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})} \longrightarrow 0 \quad \text{whenever } n \longrightarrow \infty,$$

for every fixed $0 < \alpha < 1$ and each $f \in lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$.

Using this theorem we can get different results such as the Cesaro means of Fourier series of functions in $lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ converge to the corresponding functions in norm $\|\circ\|_{Lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})}$, a result that was found by us in another paper dedicated to Fourier series in Hölder norms (see [4]) that will be considered here in Section 8. This is also a particular case of the following version of the celebrated Korovkin theorem.

Corollary 4.5. *(Korovkin type theorem) Let (K_n) be a sequence of positive integrable functions in $L^1(\mathbb{T})$, such that $\|K_n * p_i - p_i\|_\infty \rightarrow 0$ whenever $n \rightarrow \infty$, for the three test functions*

$$p_1(x) \equiv 1, \quad p_2(x) = \sin(x), \quad p_3(x) = \cos(x).$$

Then

$$\|K_n * f - f\|_{Lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})} \longrightarrow 0 \quad \text{whenever } n \longrightarrow \infty$$

for every fixed $0 < \alpha < 1$ and each $f \in lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$.

5. The reasons behind equilipschitzian sets.

Let us explain the actual reasons behind the equilipschitzian sets. Suppose $G \subset lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$. Defining $\theta_\alpha(f, 0) = 0$ for all $f \in G$, we find this set is equilipschitzian if and only if for some $b > 0$, the functions $\theta_\alpha(f, \circ)_\infty$ on $[0, b]$ $f \in G$, are equicontinuous at 0. With this observation in hands and the results we know concerning $lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$, we go to more general settings as follows (see [18] and [19]).

Let I be a real open interval $]0, b[$ (or semi-open $]0, b]$) where

$$I = \mathbb{R}_+^* := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$$

is possible. Denote $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$. Let (E, d_E) be any real or complex metric linear space and

$$\theta : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

a family of seminorms on E . It is assumed that for every fixed $f \in E$, $\theta(f, \circ)$ is a non decreasing function of δ . Set

$$\theta(f) := \sup \{ \theta(f, \delta) : \delta \in I \}, \quad \mathbb{F} := \{ f \in E : \theta(f) < \infty \}$$

and

$$F := \{ f \in \mathbb{F} : \theta(f, \delta) \longrightarrow 0 \text{ as } \delta \longrightarrow 0 \}.$$

Thus, \mathbb{F} and F are linear subspaces of E , that are seminormed by θ and eventually may coincide. We define a norm in \mathbb{F} by setting

$$\|\circ\|_{\mathbb{F}} = d_E(0, \circ) + \theta(\circ).$$

Example 5.1. Let E be the complex linear space of all bounded complex functions f on \mathbb{R} that are continuous to the right and such that $f(x) \longrightarrow 0$ as $x \rightarrow -\infty$. For all $\delta > 0$, set

$$\theta(f, \delta) := \sup \left\{ \begin{array}{l} \sum_{1 \leq i \leq m} |f(y_i) - f(x_i)| : x_1 < y_1 < x_2 < \dots < y_m; \\ m = 1, 2, \dots; \quad \sum_{1 \leq i \leq m} y_i - x_i \leq \delta \end{array} \right\}.$$

Thus $\theta(f)$ stands for the total variation of f in \mathbb{R} ; (\mathbb{F}, θ) is defined to be the Banach space of functions of bounded variation and F is its closed subspace of absolutely continuous functions.

Definition 5.2. A set $G \subset F$ is called *0-equicontinuous* if

$$\theta(G, \delta) := \sup \{ \theta(g, \delta) : g \in G \} \longrightarrow 0 \text{ as } \delta \longrightarrow 0.$$

A sequence (f_n) is called *0-equicontinuous* if the set $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ is. In that case we simplify the notation by writing

$$\theta((f_n), \delta) := \theta(\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \delta).$$

Example 5.3. Let E be the complex linear space of all Borel functions f on $[0, 1]$. For all $\delta > 0$ and $1 \leq p < \infty$, set

$$\theta(f, \delta)_{L^p[0,1]} := \sup \left\{ \int_A |f(x)|^p dx : \text{meas } A \leq \delta \right\}.$$

Then $\mathbb{F} = F = L^p[0, 1]$ and 0-equicontinuous sequences are just the equi-integrable sequences of functions.

Definition 5.4. The family of seminorms $\theta(\circ, \delta)$, $\delta \in I$, is said to be admissible with respect to d_E if the following conditions are satisfied:

- i) $(\mathbb{F}, \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ is complete (Banach).
- ii) There exist a constant $K > 0$ and a function $\Psi : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ such that for each $\delta \in I$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Psi(\delta, t) = \Psi(\delta, 0) := 0$$

and for every $f \in F$,

$$\theta(f) \leq K \theta(f, \delta) + \Psi(\delta, d(f, 0)_E).$$

Example 5.5. As before let X denote either the real interval $[0, 1]$ or \mathbb{T} and $E = L^\infty(X)$ and $\theta(f, \delta)$ be the Lipschitz seminorm $\theta_\alpha^\infty(f, \delta)$, $0 < \alpha < 1$. In this case, $\mathbb{F} = Lip_\alpha^\infty(X)$, F is identified with $lip_\alpha^\infty(X)$, and 0-equicontinuous sets match with the *equilipschitzian* sets. For proving the family of seminorms is admissible, take $K = 1$ and $\Psi(\delta, t) := 2t/\delta^\alpha$.

In this general context of 0-equicontinuous sets, one can prove:

Theorem 5.6. *Let $(E, \|\circ\|_E)$ be a normed space and suppose $(F, \|\circ\|_{\mathbb{F}})$ has been defined from $(E, \|\circ\|_E)$ by a family of admissible seminorms $\theta(\circ, \delta)$, $\delta \in I$. Let $(f_n) \subset F$. Then (f_n) converges in $(F, \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ if and only if it converges in $(E, \|\cdot\|_E)$ and is 0-equicontinuous. Moreover, if for each $\delta \in I$, $\Psi(\delta, \circ)$ is continuous in \mathbb{R}_+ , then*

$$\theta(f_n - f) \leq 2K \theta(f_n, \delta) + \Psi(\delta, \|f_n - f\|_E).$$

Example 5.7. An application of the theorem to the last example leads

$$\|f_n - f\|_{Lip_\alpha^\infty(X)} \leq (1 + 2/\delta^\alpha) \|f_n - f\|_\infty + 2\theta_\alpha(f_n, \delta)_\infty.$$

Other applications and examples can be found in [18] and [19]. The possibility of application of this scheme is so large that even a theorem such as Lebesgue dominated convergence theorem is included (see details in [19]). Even more, the very general modulus of smoothness presented by Bustamante in the already quoted paper [3] is based on the same idea.

6. Other spaces

In this section we shall mention other related results we have found but cannot be developed here due to reasons of space.

Lipschitz norms are defined not only in several variables but in infinitely many variables as well. We studied the related polynomial approximation problems in [20].

The main result there establishes the space of all trigonometric polynomials is dense in $lip_\alpha(C_{2\pi}^{\mathbb{N}})$, where a convenient metric has been defined in $C_{2\pi}^{\mathbb{N}}$.

The case of two (or several) variables let us the possibility of considering the increments of functions in each variable separately. Also the consideration of the interesting case of a Lipschitz or Hölder space in which the modulus of smoothness is defined by

$$\sup_{0 < |t| \leq \delta} \frac{\tau(f, t)_{C(X^2)}}{|t|^\alpha},$$

where $\tau(f, t)_{C(X^2)}$ is the so called mixed modulus of continuity instead the usual $w(f, t)_{C(X^2)}$. Then results on a generalized polynomial approximation are obtained. For details see [11].

Due to the rich properties of Hilbert spaces an interesting problem for us was to find a Hölder norm associated to a scalar product. Those results are associated to Fourier series in *Homogeneous* Banach spaces, a subject originated in the work of Shilov [30] that was later defined and carefully studied in Katznelson [25]. We treated these problems in [21] and [23].

7. Besov spaces

7.1. Basic definitions

There are different possibilities of defining variations of Hölder spaces. But surely very important ones are the so called Besov spaces due to multiples applications. In fact, Besov spaces are a natural consequence of the development of the theory of Function Spaces and its applications to Partial Differential Equations, Singular Integrals, Image Processing, Approximation Theory, and others. To mention at least a few basic references see [9], [31], [14], [13], [7] and [1]. Before finishing we shall present a brief review of our contribution to this subject in the context of polynomial approximation.

For every integer $r > 0$, real $s > 0$ and $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, the modulus of smoothness of order r of f is defined by

$$w_r(f, t)_p = \sup_{0 < s \leq t} \|\Delta_s^r f\|_p.$$

For $1 \leq p, q \leq \infty$ and $f \in L^p(\mathbb{T})$, introduce the function

$$\theta_\alpha^r(f, t)_{p,q} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^t \left(\frac{w_r(f, s)_p}{s^\alpha} \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q}, \quad \text{if } 1 \leq q < \infty,$$

and

$$\theta_\alpha^r(f, t)_{p,\infty} := \sup_{0 < s \leq t} \frac{w_r(f, s)_p}{s^\alpha}.$$

Now the linear spaces

$$B_{p,q}^{r,\alpha} := \{f \in L^p(\mathbb{T}) : \theta_\alpha^r(f, \pi)_{p,q} < \infty\} \quad (17)$$

become Banach spaces with the norm

$$\|f\|_{p,q,r,\alpha} = \|f\|_p + \theta_\alpha^r(f, \pi)_{p,q}$$

or another equivalent one. For instance, if $p = q < \infty$, with

$$\|f\|_{p,p,r,\alpha} = (\|f\|_p^p + \theta_\alpha^r(f, \pi)_{p,p}^p)^{1/p}$$

(see [23]). The spaces defined by (17) are called *Besov* spaces or also *generalized Lipschitz* (even Hölder) spaces. When ∞ appears in scene we must agree these spaces are the (small) Hölder spaces treated before. With these definitions and agreements, for all $1 \leq p, q \leq \infty$ and $f \in B_{p,q}^{r,\alpha}$, the function $\theta_\alpha^r(f, \circ)_{p,q}$ is a modulus of continuity and the translation operator is continuous in $B_{p,q}^{r,\alpha}$. Moreover, the set of all trigonometric polynomials is dense in each of them.

8. Fourier series of Hölder functions.

When E is a Banach space whose elements are functions in $L^1(\mathbb{T})$, a natural question arises about the convergence in this space of the Fourier series of its functions. This has been also de case $E = Lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$.

Some previous results on this subject are due to different authors. See our paper [4] for comments and references. In particular Prössdorf [29] proved the existence of a function $f \in lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ such that the sequence of partial sums $(S_n f)$ of the Fourier series of f does not converge in the norm of the space. While for any $f \in Lip_\beta^\infty(\mathbb{T})$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$, $\|F_n f - f\|_{lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})} = O(n^{\alpha-\beta})$; where $(F_n f)$ represents the sequence of Féjer means of the Fourier series of f .

Represent through $\|S_n\|_{lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})}$ the norms of the partial sums of Fourier series acting as operators $lip_\alpha^\infty(\mathbb{T}) \rightarrow lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})$. One of our main results in [4] is the next theorem.

Theorem 8.1. *For any $0 < \alpha < 1$ there exist positive constants C_1 and C_2 such that for every $n \geq 2$,*

$$C_1 \ln n \leq \|S_n\|_{lip_\alpha^\infty(\mathbb{T})} \leq C_2 \ln n.$$

As a trivial application of this inequalities combined with the classical Banach-Steinhaus theorem we get Prössdorf result about the existence of a function $f \in \text{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$, whose Fourier series does not converge in the norm of the space. However, together with this negative result we also found in the same paper the following positive application.

Theorem 8.2. *If $0 < \alpha < 1$, $f \in \text{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})$ and*

$$\lim_n \theta_\alpha(f, 1/n)_{\text{lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})} = o(\ln n),$$

then

$$\|S_n f - f\|_{\text{Lip}_\alpha^\infty(\mathbb{T})} \longrightarrow 0.$$

Concerning convergence of Fourier series on Hölder norms of integrable functions, we found next theorem whose proof was obtained directly from the results about 0-equicontinuous sets of the last section.

Theorem 8.3. *([17]) For every $1 < p < \infty$, $f \in \text{lip}_\alpha^p(\mathbb{T})$ and $\alpha > 0$ it happens that $\|S_n(f) - f\|_{\text{Lip}_\alpha^p(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Moreover, if*

$$\|S_n(f) - f\|_p = O\left(\omega_r(f, \psi(n))_p\right),$$

where $\psi(n)$ is a real sequence that decreases to zero, then

$$\|S_n(f) - f\|_{\text{lip}_\alpha^p(\mathbb{T})} = O\left(\theta_\alpha(f, \psi(n))_{\text{lip}_\alpha^p(\mathbb{T})}\right).$$

The problem of analyzing Fourier-Jacobi series in Hölder norms is open.

9. Other direct and inverse results

In [3] it was presented a general approach to obtain direct a converse results for the best approximation in generalized Hölder spaces. By this way we can study the trigonometric approximation as well as the algebraic approximation.

Let E be a real Banach space which norm $\|\circ\|_E$ and W a linear subspace of E with a seminorm $|\circ|_W$.

Fix a function $\omega : E \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $t_0 > 0$ and a constant C such that:

(a) For each fixed $t \in (0, \infty)$, the function $\omega(\circ, t)$ is a seminorm on E and for all $f \in E$, $\omega(f, 0) = 0$;

(b) For each fixed $f \in E$, the function $\omega(f, \circ)$ is increasing on $[0, \infty)$ and continuous at 0;

(c) For each $f \in E$, $g \in W$ and $t \in (0, t_0]$, one has $\omega(f) \leq C\|f\|_E$ and for each $\omega(g, t) \leq Ct^r |g|_W$.

(d) For each $t \in (0, t_0]$, there exists a function $L_t : E \rightarrow W$, such that for all $f \in E$,

$$\|f - L_t(f)\|_E \leq C\omega(f, t) \quad \text{and} \quad \|L_t(f)\|_W \leq C\omega(f, t).$$

Fix a real $r > 0$ and assume that $N(E, \omega, r) \neq \text{Ker}(\omega)$ and $N(E, \omega, s) = \text{Ker}(\omega)$ for all $s > r$, where

$$\text{Ker}(\omega) = \{g \in E : \omega(g, t) = 0\} \quad \text{and} \quad N(E, \omega, r) = \left\{ f \in E : \sup_{t>0} \frac{\omega(f, t)}{t^r} \right\} < \infty.$$

For a real $\alpha > 0$, we define $\theta_{\omega, \alpha}(f, 0) = 0$,

$$\theta_{\omega, \alpha}(f, t) = \sup_{0 < s \leq t} \frac{\omega(f, s)}{s^\alpha} \quad \text{and} \quad \|f\|_{\omega, \alpha} = \|f\|_E + \sup_{t>0} \theta_{\omega, \alpha}(f, t).$$

Let

$$E_{\omega, \alpha}^0 = \left\{ f \in E : \|f\|_{\omega, \alpha} < \infty, \lim_{t \rightarrow 0} \theta_{\omega, \alpha}(f, t) = 0 \right\}.$$

Theorem 9.1. *Let $(E, W, L_t, \omega, r, \alpha, t_0)$ be given as above with $0 < \alpha < r$. Let $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ a family of subspaces of E such that, for each n , $G_n \subset G_{n+1} \subset W$, $\dim(G_n) = n$ and $\cup_{n=0}^\infty G_n$ is dense in E .*

For $f \in E_{\omega, \alpha}^0$ let

$$E_{n, \alpha}(f) := \inf \{ \|f - g\|_{\omega, \alpha} : g \in G_n \}$$

be the best approximation of f (in $E_{\omega, \alpha}^0$) by G_n . If there exists a constant C_1 such that for each n , every $g \in W$ and each $h \in G_n$ one has

$$E_{n, \alpha}(g) \leq C_1 \frac{1}{n^{r\beta}} \|g\|_W \quad \text{and} \quad \|h\|_W \leq C_1 n^{r\alpha} \|h\|_E,$$

then there exist positive constants C_2 and C_3 such that for $f \in E_{\omega, \alpha}^0$ and each $n \in \mathbb{N}$ one has

$$C_2 E_{n, \alpha}(f) \leq \theta_{\omega, \alpha} \left(f, \frac{1}{n} \right) \leq C_3 \frac{1}{n^{r-\alpha}} \sum_{k=1}^n k^{r-\alpha-1} E_{k, \alpha}(f).$$

Let us denote by $M_n(f)_p$ the best approximation of $f \in L^p(\mathbb{T})$ by $P_n(\mathbb{T})$ in the $Lip^p(\mathbb{T})$ norm and by $M_n^{r, \alpha}(f)_p$ the best approximation of $f \in lip_\alpha^{p, r}(\mathbb{T})$ by $P_n(\mathbb{T})$ in the $Lip_\alpha^{p, r}(\mathbb{T})$ norm. Next theorem was originally proved in [5], but another proof can be obtained from Theorem 9.1.

Theorem 9.2. *Fix $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ and $0 < \alpha < r$. There exist positive constants C_1 and C_2 such that, if $n \in \mathbb{N}$ and $f \in lip_\alpha^{p, r}(\mathbb{T})$, then*

$$C_1 M_n^{r, \alpha}(f)_p \leq C_r \theta_\alpha^r \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \leq \frac{C_2}{n^{r-\alpha}} \left\{ \|f\|_{lip_\alpha^{p, r}(\mathbb{T})} + \sum_{k=1}^n k^{r-\alpha-1} M_k^{r, \alpha}(f)_p \right\}.$$

Let us denote by $M_n^{r,\alpha}(f)_{p,q}$ the best approximation of $f \in B_{p,q}^{r,\alpha}$ by $P_n(\mathbb{T})$ in the $B_{p,q}^{r,\alpha}$ norm.

Theorem 9.3. *Fix $1 \leq p, q \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ and $0 < \alpha < r$. There exist positive constants C_1 and C_2 such that for every $f \in B_{p,q}^{r,\alpha}$ and each positive integer n*

$$C_1 M_n^{r,\alpha}(f)_{p,q} \leq \theta_\alpha^r \left(f, \frac{1}{n} \right)_{p,q} \leq \frac{C_2}{n^{r-\alpha}} \sum_{k=1}^n k^{r-\alpha-1} M_k^{r,\alpha}(f)_{p,q}.$$

Corollary 9.4. *For $0 < \beta < r - \alpha$, $1 \leq p, q \leq \infty$ and $f \in B_{p,q}^{r,\alpha}$, the relation $M_n^{r,\alpha}(f)_{p,q} = \mathcal{O}(n^{-\beta})$ is equivalent to $\theta_\alpha^r(f, t)_{p,q} = \mathcal{O}(t^\beta)$.*

We know that given a function $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ and a real $\beta \in (0, 1)$, the assertions $M_n(g) = O(n^{-\beta})$ and $\omega_1(g, t) = O(t^\beta)$ are equivalent. However, if we consider functions $f \in C[-1, 1]$ and the modulus $\omega_1(f, t)$, such a result does not hold for the best algebraic approximation in $C[-1, 1]$. This later phenomenon was first recognized by the Russian mathematician Nikolskii.

Now use $E_n(f)_\infty$ to denote the best approximation in the sup norm of $f \in C[-1, 1]$ from P_n . It was proved by Ditzian and Totik that $E_n(f)_\infty = O(n^{-\beta})$ and $\omega_\varphi^r(f, t) = O(t^\beta)$ are equivalent whenever $\beta \in (0, r)$.

Starting with the Banach space $E = C[-1, 1]$, results on Hölder approximation by real-valued algebraic polynomials of degree at most n were obtained later by Bustamante and his students in [3]. Notice that, for each $n \in \mathbb{N}$, $P_n \subset \text{lip}_{\varphi,\alpha}^{p,r}[-1, 1]$. This allows us to define, for $f \in \text{lip}_{\varphi,\alpha}^{p,r}[-1, 1]$, the best algebraic approximation in Hölder norm by

$$E_{n,\alpha}(f)_p := E_{n,\alpha}^{\varphi,r}(f)_p := \inf_{P \in P_n} \|f - P\|_{\text{lip}_{\varphi,\alpha}^{p,r}[-1,1]}.$$

Theorem 9.5. *Fix a positive integer r , $1 \leq p \leq \infty$ and $\alpha \in (0, r)$. There exist positive constants C_1 and C_2 such that, for every $f \in \text{lip}_{\varphi,\alpha}^{p,r}[-1, 1]$ and each $n > r$,*

$$C_1 E_{n,\alpha}(f)_p \leq \theta_{\varphi,\alpha}^r \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \leq \frac{C_2}{n^{r-\alpha}} \sum_{k=1}^n k^{r-\alpha-1} E_{k,\alpha}(f)_p.$$

In [3] it was also presented a general approach to obtain direct and converse results for Hölder approximation in Banach spaces.

Theorem 9.6. *Let $(E, W, L_t, \omega, r, \alpha, t_0)$ and $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ be given as in Theorem 9.1. Let (F_n) be a bounded sequence of linear operators for which there exist a constant C such that for each $f \in E$, every $g \in W$ and all n , one has $F_n(f) \in G_n$ and $\|F_n(g)\|_W \leq C \|g\|_W$.*

If for each $f \in E$ and every n , one has $\|f - F_n(f)\| \leq D\omega(f, \psi(n))$, where $(\psi(n))$ is a decreasing sequence which converges to zero, then there exists a constant D_1 such that, for every $h \in E_{\omega, \alpha}^0$ and each n one has

$$\|h - F_n(h)\|_{\omega, \alpha} \leq D_1 \theta_{\omega, \alpha}(h, \psi(n)).$$

If $r = 2$ and there exists a constant C such that for each $f \in E$,

$$\|F_n(f)\|_W \leq Cn^2 \|f\|_E \quad \text{and} \quad \|F_n(g)\|_W \leq C \|g\|_W,$$

then there exists a constant D_1 such that for each couple of positive integers n and k and $f \in E_{\omega, \alpha}^0$ one has

$$\theta_{\omega, \alpha}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq D_1 \left\{ \|f - F_k(f)\|_{\omega, \alpha} + \left(\frac{k}{n}\right)^{2-\alpha} \theta_{\omega, \alpha}\left(f, \frac{1}{k}\right) \right\}.$$

This last theorem was used in [3] to obtain direct and converse results for approximation of functions by means of Bernstein, Kantorovich, Szász - Mirakyan, Szász - Kantorovich and Baskakov operators.

Bibliography

- [1] G. A. Anastassiou and S. G. Gal, *Approximation Theory*, Birkhäuser, Boston, (2000)
- [2] J. Bustamante, *Problems on approximation in Hölder norms*, Tópicos de Teoría de la Aproximación II, M. A. Jiménez y J. Bustamante, eds, Textos Científicos, Puebla, 2007, 9-48.
- [3] J. Bustamante and C. Castañeda, *Direct and inverse results in Hölder norm*, J. Approx. Theory, 138 (1) (2006), 112-123.
- [4] J. Bustamante and M. A. Jiménez-Pozo, *Fourier series and convergence in Lipschitz norms*, Aportaciones Matemáticas, SMM, Serie Comunicaciones 25 (1999), 147-151.
- [5] J. Bustamante and M. A. Jiménez-Pozo, *The degree of best approximation in the Lipschitz norm by trigonometric polynomials*, Aportaciones Matemáticas, SMM, Serie Comunicaciones 25, (1999), 23-30.
- [6] J. Bustamante and M. A. Jiménez-Pozo, *Chebyshev and Hölder approximation*, Aportaciones Matemáticas SMM, Serie Comunicaciones 27 (2000), 147-151.

- [7] J. Bustamante and M. A. Jiménez-Pozo, *Trends in Hölder approximation*, Proceedings of the 5th International Conference on Approximation and Optimization in the Caribbean; M. Lassonde (Ed): Approximation, Optimization and Mathematical Economics; Physica-Verlag, (2001), 81-96.
- [8] J. Bustamante, M. A. Jiménez-Pozo and R. Linares, *Direct and inverse theorems in generalized Lipschitz spaces*, Automation Computers Applied Math.,15 (2006) No. 1, 37-43.
- [9] P. L. Butzer and H. Berens, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, New York/Berlin, (1967).
- [10] P. L. Butzer and K. Scherer, *On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Steckin*, Aequationes Math., 4 (1969), 170-185.
- [11] D. Cardenas, M. A. Jiménez-Pozo and F. J. Muñoz, *Some remarks on Hölder approximation by Bernstein polynomials*, Appl. Math. Lett., 19, (2006), 1118-1121.
- [12] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, New York, McGraw-Hill, (1996).
- [13] R. A. DeVore, *Nonlinear Approximation*, Acta Numerica (1998), 51-150.
- [14] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, New York, (1993).
- [15] Z. Ditzian and V. Totik, *Moduli of smoothness*, Springer, New York (1987).
- [16] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals I*, Math. Zeit., 27 (1927-28), 565-606.
- [17] M. A. Jiménez-Pozo, *Convergence Fourier series in Hölder norms*, J. Applied Functional Analysis, 1 (1) (2006), 111-115.
- [18] M. A. Jiménez-Pozo, *Characterization of the convergent sequences in a class of Banach spaces*. Comptes Rendus de l'Acad. Bulgare des Sc. 55 Nr.4, (2002), 13-16.
- [19] M. A. Jiménez-Pozo, *A tauberian theorem for a class of function spaces*. Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza, Nr. 20, (2002). 77-85.
- [20] M. A. Jiménez-Pozo, *Study of Lipschitz trigonometric polynomial approximation in infinitely many variables and connectedness*, Automation Computers Applied Mathematics, Vol 18 (2009), 133-145.

- [21] M. A. Jiménez-Pozo, *A new approach to Lipschitz spaces of periodic integrable functions*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 25 (1999), 153-157.
- [22] M. A. Jiménez-Pozo and G. Martínez, *Equilipschitzian sets of Hölder integrable functions*. Aportaciones Matemáticas SMM. Serie Comunicaciones 29, (2001), 55-60.
- [23] M. A. Jiménez-Pozo and R. Linares, *Another Approach to generalized Lipschitz spaces*. In Guddat, J. at al. Parametric Optimization and Related Topics. Aportaciones Matemáticas SMM, Serie Investigaciones 18 (2004), 155-167.
- [24] A. E. Kalandiya, *A direct method of solving the wind theory equation and its application in elastic theory*. Mat. Sbornik 42 (1957), 249-272.
- [25] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Wiley & Son Inc, (1968).
- [26] L. Leindler, A. Meir and V. Totik, *On approximation of continuous functions in Lipschitz norms*, Acta Math. Hung., 45 (3-4), (1985), 441-443.
- [27] H. Mirkil, *Continuos translation of Holder and Lipschitz functions*, Can. J. Math., 12 (1960), 674-685.
- [28] A. Plessner, *Eine Kennzeichnung der totalstetig Funktionen*, J. Reine Angew. Math., 160 (1929), 26-32.
- [29] S. Prössdorf, *Zur Konvergenz der Fourierreihen hölderstetiger Funktionen*, Math. Nachr. 69 (1975), 125-152.
- [30] G. E. Shilov, *Homogeneous rings of functions*, Uspehi Matem. Naukl N. S., 6 (1951), AMS translation 92.
- [31] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Vol. 2, Birkhäuser-Verlag, (1992).
- [32] N. Weaver, *Lipschitz Algebras*, World Scientific, (1999).
- [33] A. Zygmund, *Smooth functions*, Duke Math. J., 12 (1) (1945), 47-76.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

jbusta@fcfm.buap.mx
mjimenez@fcfm.buap.mx

Capítulo 2

Funciones lineales entre espacios normados asimétricos

Slaviša Djordjević, Francisco Javier Mendoza Torres
FCFM-BUAP

Resumen

Presentamos conceptos básicos sobre espacios normados asimétricos. A partir de un sistema fundamental de vecindades, probamos que una transformación lineal entre espacios normados asimétricos es continua si y sólo si es acotada, el cual es un resultado similar al que cumplen las funciones lineales entre espacios normados. También obtenemos algunos resultados que relacionan el espacio semilineal de las transformaciones lineales entre espacios normados asimétricos y el espacio de las transformaciones lineales entre los espacios normados asociados a los primeros.

1. Introducción

Los espacios normados asimétricos son objeto de estudio en diversas ramas de la matemática, su desarrollo ha sido motivado por sus aplicaciones. Por ejemplo, las normas asimétricas y otras estructuras no simétricas de la topología algebraica y del análisis funcional han sido aplicadas en la construcción de modelos matemáticos en la computación teórica [5], [6]. Cabe mencionar que en nuestra Facultad se han realizado diferentes tesis de doctorado que han empleado normas asimétricas en la solución de procesos optimales. Entre estas, la más reciente es la marcada con la referencia [7].

Los espacios normados asimétricos tienen propiedades semejantes a las propiedades que tienen los espacios normados usuales pero aún hay importantes diferencias entre ellos. En la última década, algunas publicaciones sobre topología general y análisis funcional han sido publicadas con la intención de extender resultados conocidos de la teoría de los espacios normados en el marco de los espacios normados asimétricos. Por ejemplo el libro de S. Cobzas [4].

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En la segunda sección exponemos las definiciones básicas y algunos ejemplos de normas asimétricas. La intención de la tercera sección es exponer las nociones básicas sobre normas asimétricas y algunos espacios asociados a ellas, entre estos el de funciones lineales acotadas entre

espacios normados asimétricos. En particular, mostramos que este último espacio es normado asimétrico con la norma

$$p_q(f) = \inf\{M \geq 0 : q(f(x)) \leq Mp(x)\}.$$

En la Sección 4, a partir de un sistema fundamental de vecindades, probamos que una transformación lineal entre espacios normados asimétricos es continua si y sólo si es acotada. Este es un resultado similar al que cumplen las funciones lineales entre espacios normados. En la quinta sección exponemos las conclusiones de nuestra exposición y hacemos mención de nuestras perspectivas en el estudio de los espacios normados asimétricos.

2. Definiciones y resultados preliminares

Sean X un espacio vectorial real y p una función real no negativa definida en X . Si para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$, p satisface:

- $p(x) = p(-x) = 0$ si y sólo si $x = 0$,
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$,
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,

entonces p se llama *norma asimétrica* y al par (X, p) se le llama *espacio normado asimétrico*.

Sea p una norma asimétrica definida en X . Observemos que la función real p^{-1} definida en X por $p^{-1}(x) = p(-x)$ es también una norma asimétrica en X . Cualquier norma en X es una norma asimétrica, pero el recíproco no siempre es válido.

Ejemplos 2.1. (i) Tomando X como \mathbb{R} , observamos que las funciones parte positiva y parte negativa de un número real, esto es, las funciones $u_+(x) = \max\{x, 0\}$ y $u_-(x) = \max\{-x, 0\}$ son normas asimétricas en \mathbb{R} . Es fácil ver que ambas funciones no son normas. También observamos que $u_+^{-1}(x) = u_-(x)$.

(ii) Sea $p \geq 1$, y sea $\tilde{\ell}_p(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las sucesiones $\mathbf{a} = \{a_n\}$ de números reales tales que la suma $\sum_{n=1}^{\infty} (\max\{a_n, 0\})^p$ converge. Se puede ver que

$$u(\mathbf{a}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\max\{a_n, 0\})^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma asimétrica en $\tilde{\ell}_p(\mathbb{R})$.

(iii) Sea $p \geq 1$, y sea $L_p([0, 1])$ el conjunto de todas funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f^p es Lebesgue integrable con respecto a la medida de μ y sea

$$u(f) = \left(\int_0^1 f_+^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$. Entonces u es una norma asimétrica en $L_p([0, 1])$. En general, podemos tomar un espacio compacto X con una medida positiva μ , y considerar el espacio

$$L_p(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ función medible tal que } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Definiendo f_+ de la misma manera que antes, tenemos, en correspondencia con la primera parte de este inciso, que la función $v(f) = \left(\int_X f_+^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ es una norma asimétrica en $L_p(X, \mu)$.

(iv) Sean (X, p) y (Y, q) espacios normados asimétricos. El mapeo $f : X \rightarrow Y$ se llama Lipschitz de lado derecho si existe una constante k tal que

$$q(f(x) - f(y)) \leq kp(x - y),$$

para toda $x, y \in X$. Denotamos con $KL_{x_0}(X, Y)$ al conjunto de todos mapeos Lipschitz de lado derecho de X en Y que se anulan en un punto dado $x_0 \in X$. Introducimos en $KL_{x_0}(X, Y)$ una función real positiva como

$$\|f\|_{p,q} = \sup_{p(x-y) \neq 0} \frac{q(f(x) - f(y))}{p(x - y)}.$$

Entonces $\|f\|_{p,q}$ es una norma asimétrica en $KL_{x_0}(X, Y)$. El nombre de *mapeo Lipschitz de lado derecho* es un nombre empleado comúnmente en los textos que estudian el tema de espacios normados asimétricos. Para más detalles sobre este ejemplo puede consultarse [8].

A partir de p y p^{-1} se definen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} p^s(x) &= \max\{p(x), p^{-1}(x)\}, \\ p_n(x) &= (p(x)^n + p^{-1}(x)^n)^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Estas funciones son normas equivalentes en X , lo cual se puede ver por lo siguiente.

Primero, por la propiedad de norma asimétrica tenemos que p^s y p_α son funciones no negativas que se anulan sólo en $x = 0$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, sabemos que $\alpha = |\alpha| \text{sign}(\alpha)$ por lo que

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(\text{sign}(\alpha)x) = \begin{cases} |\alpha| p(x) & \text{si } \alpha \geq 0 \\ |\alpha| p^{-1}(x) & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

y

$$p^{-1}(\alpha x) = |\alpha| p^{-1}(\text{sign}(\alpha)x) = \begin{cases} |\alpha| p^{-1}(x) & \text{si } \alpha \geq 0 \\ |\alpha| p(x) & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Considerando ambos casos, se tiene que $p^s(\alpha x) = |\alpha|p^s(x)$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \neq 0$, entonces

$$p_n(\alpha x) = |\alpha| \left(p\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}x\right)^n + (p^{-1}\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}x\right))^n \right)^{\frac{1}{n}} = |\alpha| (p(x)^n + (p^{-1}(x))^n)^{\frac{1}{n}} = |\alpha|p_n(x).$$

El caso $\alpha = 0$ es obvio. De las desigualdades del triángulo para p y p^{-1} se siguen las desigualdades del triángulo para las funciones p^s y p_n . Por otro lado, la desigualdad

$$\frac{1}{2}p_n(x) \leq p^s(x) \leq p_n(x)$$

demuestra la equivalencia de las normas.

A la norma p^s le llamaremos la *norma generada por p* , y al espacio (X, p^s) le llamaremos *el espacio normado asociado a (X, p)* .

3. Mapeos lineales acotados entre espacios asimétricos

En lo que resta de esta exposición, si no es necesario mencionarlo, (X, p) y (Y, q) serán espacios normados asimétricos y (X, p^s) y (Y, q^s) serán los espacios normados asociados a ellos. De la definición clásica de mapeo lineal acotado, sabemos que el mapeo lineal $f : (X, p^s) \rightarrow (Y, q^s)$ es acotado si existe una constante $k \geq 0$ tal que

$$q^s(f(x)) \leq kp^s(x),$$

para toda $x \in X$. Denotaremos por $LC_s(X, Y)$ al espacio lineal de todos los mapeos lineales acotados que van de (X, p^s) a (Y, q^s) . Es bien conocido que $LC_s(X, Y)$ es un espacio normado con la norma

$$\|f\|_s = \sup\{q^s(f(x)) : p^s(x) \leq 1\} \quad (1)$$

y, si (Y, q^s) es un espacio de Banach, entonces $(LC_s(X, Y), \|\cdot\|_s)$ también será de Banach.

De resultados elementales del Análisis Funcional, sabemos que la norma $\|f\|_s$ también tiene las siguientes expresiones (vea [2] y [9]):

- $\|f\|_s = \inf\{k \geq 0 : q^s(f(x)) \leq kp^s(x)\},$
- $\|f\|_s = \sup\{\frac{q^s(f(x))}{p^s(x)} : p^s(x) \neq 0\},$
- $\|f\|_s = \sup\{q^s(f(x)) : p^s(x) = 1\}.$

Por analogía con la definición de operador acotado, diremos que una transformación lineal $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$, es *acotada* si existe una constante no negativa k tal que para todo $x \in X$:

$$q(f(x)) \leq kp(x).$$

Denotaremos por $LC((X, p), (Y, q))$ al conjunto de todos los mapeos lineales acotados del espacio (X, p) al espacio (Y, q) . Si no existe riesgo de confusión, lo denotaremos simplemente como $LC(X, Y)$. Una primera característica de $LC(X, Y)$ es que no es un espacio vectorial, y sí es un espacio semilineal (o cono). Un subconjunto A de un espacio vectorial X es un *espacio semilineal* si para cada $x, y \in A$ y $r \in \mathbb{R}^+$, se satisface: $x + y \in A$ y $rx \in A$. También, se dice que A es un *espacio algebraicamente cerrado*.

Ejemplo 3.1. Sea (\mathbb{R}, u_+) el espacio normado asimétrico introducido en el Ejemplo 2.1 (i) y sea id la función identidad sobre \mathbb{R} . Es claro que id es una función lineal acotada de (\mathbb{R}, u_+) a él mismo. También es cierto que $-id$ es una función lineal, pero como para cualquier número real negativo x se tiene que $u_+(-id(x)) = \max\{-x, 0\} = -x$ y $u_+(x) = 0$, entonces $-id$ no es acotada. Esto es, $(-1)id$ no está en $LC((\mathbb{R}, u), (\mathbb{R}, u))$, por lo tanto $LC((\mathbb{R}, u), (\mathbb{R}, u))$ no es un espacio vectorial.

Este ejemplo se puede generalizar usando el Corolario 4.8, donde se prueba que $f \in LC((\mathbb{R}, u), (\mathbb{R}, u))$ si y sólo si f es positivo ($f(x) \geq 0$ para toda $x \geq 0$). Esto nos dice que si $f \in LC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y no es el mapeo nulo, entonces $-f \notin LC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Otra característica importante de $LC(X, Y)$ es que es un espacio normado asimétrico con la norma asimétrica

$$p_q(f) = \inf\{M : q(f(x)) \leq Mp(x)\}.$$

Demostremos esta afirmación en el siguiente resultado.

Proposición 3.2. Sean (X, p) y (Y, q) espacios normados asimétricos. La función $p_q : LC(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$p_q(f) = \inf\{M \geq 0 : q(f(x)) \leq Mp(x)\}$$

es una norma asimétrica en $LC(X, Y)$.

Demostración. Si $p_q(f) = p_q(-f) = 0$, entonces $q(f(x)) = q(-f(x)) = 0$ para todo $x \in X$. Por lo que $f \equiv 0$. Si ahora suponemos que $f \equiv 0$, entonces $f(x) = 0$ y $-f(x) = f(-x) = 0$ para todo $x \in X$. Por las propiedades de norma asimétrica se tendrá que $q(f(x)) = 0$ para todo $x \in X$. Así, $p_q(f) = 0$.

Sea $\alpha > 0$ y sea $p_q(\alpha f) = \inf\{M \geq 0 : q(\alpha f(x)) \leq Mp(x)\}$. Dada $\varepsilon > 0$, $p_q(\alpha f)$ está definida por las condiciones:

- Existe $M_\alpha \geq 0$ tal que $q(\alpha f(x)) \leq M_\alpha p(x)$,

$$\blacksquare 0 \leq M_\alpha < p_q(\alpha f) + \varepsilon.$$

Debido a que existe $M_1 \geq 0$ tal que

$$q(f(x)) \leq M_1 p(x)$$

y

$$0 \leq M_1 < p_q(f) + \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Entonces se satisface:

$$q(\alpha f(x)) \leq \alpha M_1 p(x)$$

y

$$0 \leq \alpha M_1 < \alpha p_q(f) + \varepsilon.$$

Por lo tanto tenemos que

$$p_q(\alpha f) = \alpha p_q(f).$$

Ahora, sean

$$\begin{aligned} A &= \{M \geq 0 : q(f(x)) \leq Mp(x)\}, \\ B &= \{N \geq 0 : q(g(x)) \leq Np(x)\}, \\ C &= \{R \geq 0 : q(f(x) + g(x)) \leq Rp(x)\}. \end{aligned}$$

De la desigualdad $q(f(x) + g(x)) \leq q(f(x)) + q(g(x))$, tenemos que si $M \in A$ y $N \in B$, entonces $M + N \in C$. Esto es $A + B \subset C$, por lo que $\inf\{A + B\} \geq \inf C$. Esto muestra la desigualdad

$$p_q(f + g) \leq p_q(f) + p_q(g).$$

□

La norma asimétrica p_q tiene propiedades análogas a la norma $\|\cdot\|_s$, definida por la formula (1). Por ejemplo

$$p_q(f) = \sup\{q(f(x)) : p(x) \leq 1\}.$$

(para más detalles ver [1], [5] y [6]).

Observamos que si $f \in LC(X, Y)$, entonces existe $k \geq 0$ tal que $q(f(x)) \leq kp(x)$

y

$$\begin{aligned} q^{-1}(f(x)) &= q(-f(x)) = q(f(-x)) \\ &\leq kp(-x) = kp^{-1}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Estas desigualdades nos dicen que $(p^{-1})_{q^{-1}} \leq k$, y que además

$$\begin{aligned} q^s(f(x)) &= \text{máx}\{q(f(x)), q^{-1}(f(x))\} \\ &\leq k \text{máx}\{p(x), p^{-1}(x)\} \\ &= kp^s(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Por lo tanto tenemos que $\|f\|_s \leq k$ y $LC(X, Y) \subset LC_s(X, Y)$. La contención anterior es propia debido a que $LC(X, Y)$ no es un espacio vectorial. Estos resultados los enunciamos a continuación (también puede ver [6, Proposition 1]).

Proposición 3.3. *Sean (X, p) y (Y, q) espacios normados asimétricos. Entonces:*

(a) *Cualquier mapeo lineal acotado de (X, p) a (Y, q) es un mapeo lineal acotado de (X, p^{-1}) a (Y, q^{-1}) ,*

y

(b) $LC(X, Y) \subset LC_s(X, Y)$.

Otra relación importante entre $LC(X, Y)$ y $LC_s(X, Y)$ nos la proporciona el siguiente resultado. Antes observemos que si p es una norma asimétrica en X , por la desigualdad del triángulo, se tiene que para cualesquiera $x, y \in X$,

$$p(x) - p(y) \leq p(x - y).$$

Teorema 3.4. $LC(X, Y)$ es cerrado en $LC_s(X, Y)$, con respecto a la norma $\|\cdot\|_s$.

Demostración. Sea $f \in LC_s(X, Y)$ tal que existe una sucesión $\{f_n\} \subset LC(X, Y)$ para la cual

$$\|f_n - f\|_s \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \tag{4}$$

Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_s < 1$ si $n \geq N$. Como $f_N \in LC(X, Y)$ existe $k > 0$ tal que

$$q(f_N(x)) \leq kp(x) \quad \text{para toda } x \in X. \tag{5}$$

Sea $x \in X$. Si $p(x) \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} q\left(\frac{f(x) - f_N(x)}{p(x)}\right) &= q\left((f - f_N)\left(\frac{x}{p(x)}\right)\right) \\ &\leq \|f_n - f\|_s. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} q(f(x) - f_N(x)) &\leq \|f_n - f\|_s p(x) \\ &\leq p(x). \end{aligned}$$

Las desigualdades anteriores nos llevan a que

$$q(f(x)) \leq q(f_N(x)) + p(x) \leq (k+1)p(x). \quad (6)$$

Ahora supongamos que x es tal que $p(x) = 0$. Por (4), dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_s < \varepsilon \quad \text{si } n \geq N_0.$$

Por (5) se tiene que $q(f_{N_0}(x)) = 0$ y $q(-f_{N_0}(x)) = 0$. Empleando la última desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} q(f(x)) &= q(f(x)) - q(f_{N_0}(x)) \\ &\leq q(f - f_{N_0})(x) \\ &\leq \|f_{N_0} - f\|_s < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $q(f(x)) = 0$. Entonces para estos puntos también se cumple la desigualdad (6), por lo tanto tenemos que $f \in LC(X, Y)$. Así, $LC(X, Y)$ contiene a sus puntos de acumulación, concluyendo que es cerrado en $LC_s(X, Y)$. \square

Para describir otras relaciones entre estos dos espacios de funciones, presentamos el siguiente concepto.

Definición 3.5. Diremos que el espacio normado asimétrico (X, p) es bi-completo (o bi-Banach) si el espacio (X, p^s) es de Banach.

Se tiene que si (Y, q) es un espacio bi-Banach, entonces $(LC(X, Y), p_q)$ es bi-Banach (vea [6, Theorem 1]). Otro relación interesante nos la proporciona el comparar los valores de las normas $\|\cdot\|_s$ y $\|\cdot\|^s$ en $LC_s(X, Y)$ y ambas con la norma asimétrica p_q en $LC(X, Y)$, donde, para $f \in LC_s(X, Y)$,

$$\|f\|^s = \text{máx}\{p_q(f), p_q(-f)\} (\equiv (p_q)^s(f)).$$

Por la definición de la norma $\|\cdot\|^s$ tenemos que $p_q(f) \leq \|f\|^s$ y, por la Proposición 3.3 se tiene que $\|f\|_s \leq p_q(f)$ para toda $f \in LC(X, Y)$.

En general $\|\cdot\|_s \not\leq \|\cdot\|^s$. Sea $(X, p) = (\mathbb{R}, u)$ y $(Y, q) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Notemos que si (Y, q) es un espacio lineal normado, entonces $\|\cdot\|^s = p_q(\cdot)$ sobre $LC_s(X, Y)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f_n(x) = -\frac{x}{n}$. Entonces f_n es lineal y acotada con respecto a la norma euclidiana. Además, como $\sup\{|-x/n| : |x| \leq 1\} = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f_n \rightarrow 0$ con respecto a la norma usual de la convergencia uniforme. Sin embargo tenemos que $\sup\{|-x/n| : u(x) \leq 1\} = +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto nos dice que: $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_s} 0$ y $f_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|^s} 0$.

Lo anterior podemos resumirlo en el siguiente:

Teorema 3.6. Sean (X, p) y (Y, q) espacios normados asimétricos. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- (1) La función $p_q(\cdot)$ es una norma asimétrica extendida en $LC_s(X, Y)$, esto es, existe $f \in LC_s(X, Y)$ tal que $p_q(f) = \infty$ y la restricción de $p_q(\cdot)$ a $LC(X, Y)$ es una norma asimétrica.
- (2) $\|\cdot\|_s \leq p_q(\cdot) \leq \|\cdot\|^s$ sobre $LC(X, Y)$.
- (3) Si (Y, q) es un espacio bi-Banach, entonces $(LC(X, Y), p_q(\cdot))$ es un espacio semilineal bi-Banach.

4. Sistema fundamental de vecindades en un espacio normado asimétrico

En la sección anterior introdujimos el concepto de acotación de una transformación lineal entre espacios normados asimétricos. En analogía con la propiedad sobre acotación que tienen las transformaciones lineales entre espacios normados, se puede suponer que existe una equivalencia entre acotación y un concepto de continuidad inducida por las normas asimétricas. Una manera de relacionar las normas asimétricas y la continuidad de una transformación lineal es a través de las cuasi-métricas y topologías (que son tipos T_0) introducidas por ellas (vea [1]).

Recordamos que, en un conjunto no vacío X , una *cuasi-métrica* es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisface:

(i) $d(x, y) = d(y, x) = 0$ si y sólo si $x = y$,

y

(ii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in X$.

Si d es una cuasi-métrica en X , entonces la función no negativa d^{-1} , definida sobre $X \times X$ como $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$, también es una cuasi-métrica en X . Esta es llamada la *conjugada de d* . A partir de d y d^{-1} definimos d^s en $X \times X$ por

$$d^s(x, y) = \max\{d(x, y), d^{-1}(x, y)\}.$$

Veamos que d^s es una métrica. Es claro que d^s es una función no negativa y $d^s(x, y) = \max\{d(x, y), d^{-1}(x, y)\} = 0$ si y sólo si $x = y$. La simetría se obtiene de la propia definición de d^s . Por otro lado, sea $z \in X$. Como $d^s(x, z)$ es a la vez mayor o igual a $d(x, z)$ y $d^{-1}(x, z)$, y $d^s(z, y)$ lo es a la vez de $d(z, y)$ y $d^{-1}(z, y)$, entonces resumiendo los casos posibles, se tendrá que

$$d^s(x, z) + d^s(z, y) \geq d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$$

y

$$d^s(x, z) + d^s(z, y) \geq d^{-1}(x, z) + d^{-1}(z, y) \geq d^{-1}(x, y).$$

Por lo tanto,

$$d^s(x, z) + d^s(z, y) \geq \max\{d(x, y), d^{-1}(x, y)\} = d^s(x, y).$$

Si d^s es una métrica completa sobre X , entonces se dice que la cuasi-métrica d es *bicompleta* o *biBanach*. El espacio (X, p) se dirá que es *bicompleto* o *biBanach*.

Proposición 4.1. *Sea p una norma asimétrica sobre un espacio lineal X . La función d_p definida para todo $x, y \in X$ como*

$$d_p(x, y) = p(y - x),$$

es una cuasi-métrica en X y

$$d_p^s(x, y) = p^s(y - x).$$

Demostración. La función d_p es no negativa. Como $d_p(x, y) = p(y - x)$ y $d_p(y, x) = p^{-1}(y - x)$, entonces

$$d_p(x, y) = d_p(y, x) = 0 \text{ si y sólo si } x = y.$$

La desigualdad del triángulo se obtiene de las mismas desigualdades para p y p^{-1} . Además,

$$\begin{aligned} d_p^s(x, y) &= \max\{d_p(x, y), d_p^{-1}(x, y)\} \\ &= \max\{d_p(x, y), d_p(y, x)\} \\ &= \max\{p(y - x), p(x - y)\} \\ &= \max\{p(y - x), p^{-1}(y - x)\} \\ &= p^s(y - x). \end{aligned}$$

□

Otro camino que podemos tomar para relacionar las transformaciones lineales acotadas y/o continuas entre espacios normados asimétricos es a través de los sistemas fundamentales de vecindades. Recordemos que en un espacio topológico (S, τ) , un sistema fundamental de vecindades de un punto $x_0 \in S$, denotado como Λ_{x_0} , es una colección de vecindades de x_0 con la propiedad de que toda vecindad de x_0 contiene alguna vecindad V_i que pertenece a Λ_{x_0} . Si esto se cumple para cada $x \in S$, entonces $\{\Lambda_x : x \in S\}$ es un sistema fundamental de vecindades en (S, τ) . Un aspecto importante de los sistemas fundamentales de vecindades es que, por principio, no es necesario tener una topología definida para que él exista, ya que el sistema determina únicamente la topología a la que corresponde. Los siguientes dos criterios aclaran esta situación (vea [3]).

Criterio 4.2. *Una colección de la forma $\{\Lambda_x : x \in S\}$, donde cada Λ_x es a la vez una colección de vecindades del punto $x \in S$ es un sistema fundamental de vecindades en el conjunto S , si satisface lo siguiente:*

- (1) Si $M \in \Lambda_x$ y $N \in \Lambda_x$, entonces existe algún miembro de Λ_x que está contenido en $M \cap N$.
- (2) Si $M \in \Lambda_x$, entonces $x \in M$.
- (3) Si $M \in \Lambda_x$, existe un miembro N de Λ_x tal que, para cada $y \in N$, existe algún subconjunto O de M que pertenece a Λ_y .

Criterio 4.3. Si $\{\Lambda_x : x \in S\}$ es una familia de colecciones no vacías de subconjuntos de un conjunto no vacío S que satisfacen los tres incisos del criterio anterior, entonces es un sistema fundamental de vecindades exactamente en un espacio topológico cuyo conjunto fundamental es S .

Como estamos interesados en probar la equivalencia entre acotación y continuidad de transformaciones lineales, el siguiente criterio nos será útil.

Criterio 4.4. Si $\{\Lambda_x : x \in S_1\}$ y $\{\Theta_y : y \in S_2\}$ son sistemas fundamentales de vecindades en (S_1, τ_1) y (S_2, τ_2) respectivamente, entonces la función $f : S_1 \rightarrow S_2$ es continua en $x \in X$ si para todo $M \in \Theta_{f(x)}$, $f^{-1}(M)$ contiene algún miembro de Λ_x .

Ahora hallamos un sistema fundamental de vecindades en un espacio normado asimétrico.

Proposición 4.5. Sea p una norma asimétrica sobre el espacio lineal X . La familia de conjuntos

$$V_\varepsilon(0) = \{x \in X : p(x) < \varepsilon\}$$

forma un sistema fundamental de vecindades del cero y, para todo $x \in X$, los conjuntos

$$V_\varepsilon(x) = x + V_\varepsilon(0)$$

definen un sistema fundamental de vecindades de x .

Demostración. Probaremos las propiedades indicadas en los tres incisos del Criterio 4.2.

(1) Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Podemos suponer que $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Se tiene que

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon_1}(x_0) \cap V_{\varepsilon_2}(x_0) &= \{x_0 + x : x \in V_{\varepsilon_1}(0) \cap V_{\varepsilon_2}(0)\} \\ &= \{x_0 + x : x \in V_{\varepsilon_2}(0)\}. \end{aligned}$$

(2) Es claro que $x \in V_\varepsilon(x)$, para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$.

(3) Sean $x \in X$, $\varepsilon > 0$ y consideremos la vecindad $V_\varepsilon(x)$. Se tiene que si $y \in V_\varepsilon(x)$, entonces $y = x + t$ es tal que $p(t) < \varepsilon$. Esto es, $\varepsilon > p(y - x)$, por lo que podemos considerar $V_{\varepsilon_0}(y)$ donde $\varepsilon_0 = \varepsilon - p(y - x) > 0$. Además tenemos que $V_{\varepsilon_0}(y) \subset V_\varepsilon(x)$. Haciendo referencia al Criterio 4.2, hemos tomado $M = N = V_\varepsilon(x)$, $O = V_{\varepsilon_0}(y)$. Por lo tanto obtenemos la demostración. \square

La proposición anterior nos asegura la existencia de una topología del espacio normado asimétrico (X, p) , la cual le corresponde al sistema fundamental de vecindades descrita en ese teorema. Denotaremos a esta topología por τ_p .

De la demostración de la proposición previa, podemos ver que $t \in V_\varepsilon(x) = x + V_\varepsilon(0)$ si y sólo si $p(t - x) < \varepsilon$. Por un lado, si $p(t - x) < \varepsilon$, entonces $t - x \in V_\varepsilon(0)$ y $t = x + (t - x)$, por lo tanto $t \in V_\varepsilon(x)$. El recíproco también es inmediato.

Denotemos por τ^s la topología inducida por la métrica d_p^s . Una relación sencilla de descubrir entre τ_p y τ^s , es que $\tau^s \subset \tau_p$. Ya que si $B_\varepsilon(x)$ es la bola de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de x , con respecto a la métrica d_p^s , y si $t \in B_\varepsilon(x)$ entonces

$$d_p^s(x, t) = \max\{p(t - x), p(x - t)\} < \varepsilon.$$

Esto nos dice que $p(t - x) < \varepsilon$, por lo tanto $B_\varepsilon(x) \subset V_\varepsilon(x)$.

Un primer acercamiento para analizar la contención contraria es que si $t \in V_\varepsilon(x)$ y $-t \in V_\varepsilon(-x)$, entonces $\pm t \in B_\varepsilon(x)$. Profundizar en el estudio de las relaciones entre τ^s y τ_p , y sus implicaciones en el estudio de las transformaciones lineales entre espacios asimétricos es una tarea que nos proponemos realizar posteriormente.

Ahora probaremos la equivalencia entre acotación y continuidad de transformaciones lineales (en el sentido de los Criterios 4.2 – 4.4 y la Proposición 4.5). La continuidad es con respecto a la topología τ_p .

Teorema 4.6. *Sea $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ una transformación lineal entre espacios normados asimétricos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

- (a) f es acotada,
- (b) f es continua en todo punto de X ,
- (c) f es continua en 0.

Demostración. Suponiendo que f es acotada, existe $k > 0$ tal que $q(f(x)) \leq kp(x)$, para cualquier $x \in X$. Sean $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Dada la vecindad $V_\varepsilon(f(x_0))$, por la linealidad de f se tiene que

$$f^{-1}(V_\varepsilon(f(x_0))) = \{x \in X : q(f(x - x_0)) < \varepsilon\}.$$

Entonces por la condición de acotación, tenemos que la vecindad $V_{\varepsilon/k}(\{x_0\}) = \{x \in X : p(x - x_0) < \varepsilon/k\}$ está contenida en $f^{-1}(V_\varepsilon(f(x_0)))$. Por lo tanto, por el Criterio 4.4, el inciso (a) implica (b).

Es claro que (b) implica (c).

Ahora, supongamos que f no es acotada, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe x_n tal que

$$q(f(x_n)) > np(x_n). \tag{7}$$

Como f es continua en 0, dado $\varepsilon \in (0, 1)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$V_\delta(\{0\}) \subset f^{-1}(V_\varepsilon(0)) = \{x \in X : q(f(x)) < \varepsilon\}, \tag{8}$$

donde $V_\delta(\{0\}) = \{x \in X : p(x) < \delta\}$. Por (7), $p(x_n) > 0$, entonces podemos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{x_n}{np(x_n)}$. Como $p(t_n) = \frac{1}{n}$ es decreciente y tiende a cero, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ se tiene que $t_n \in V_\delta(\{0\})$. Por (8),

$$q(f(t_n)) < \varepsilon. \tag{9}$$

Por otro lado, por (7), se tendrá que

$$q(f(t_n)) > np\left(\frac{x_n}{np(x_n)}\right) = n \frac{p(x_n)}{np(x_n)} = 1. \tag{10}$$

Las desigualdades (9) y (10) nos llevan a una contradicción, por lo tanto el inciso (c) implica (a). \square

Corolario 4.7. Sean (X, p) y (Y, q) espacios normados asimétricos, y sea $f : X \rightarrow Y$ una transformación lineal. Entonces f es continua si y sólo si existe $M > 0$ tal que

$$p(f(x)) \leq Mq(x),$$

para todo $x \in X$.

Recordemos que una función real f , definida sobre \mathbb{R} , es positiva si $f(x) \geq 0$ para toda $x \geq 0$. Con respecto al Ejemplo 3.1, podemos probar que, en general, $f \in LC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si y sólo si f es positiva y continua; este resultado se prueba en [5, Proposition 4.3], sin embargo habiendo probado la equivalencia entre acotación y continuidad, la prueba es muy simple; a continuación hacemos ésta como otra consecuencia del Teorema 4.6.

Corolario 4.8. Sea $u(x) = \max\{x, 0\}$, y sea (\mathbb{R}, u) el espacio normado asimétrico respectivo. Entonces $f \in LC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si y sólo si f es continua ($f \in LC_s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) y positiva.

Demostración. Tomando en cuenta la Proposición 3.3 tenemos que $f \in LC_s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, falta demostrar que $f \geq 0$. Supongamos que $f \in LC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y sea $x \geq 0$. Se tiene que existe $M > 0$ tal que $u(f(-x)) \leq Mu(-x) = 0$. Como $u(-x) = 0$, entonces $0 = u(f(-x)) = u(-f(x)) = \max\{-f(x), 0\}$. Esto nos dice que $-f(x) \leq 0$. Por lo tanto $f(x) \geq 0$.

Ahora supongamos que $f \in LC_s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y que es positiva. Como, para toda $x \in \mathbb{R}$, $u(x) - x \geq 0$ implica que $f(u(x) - x) \geq 0$ o $f(u(x)) \geq f(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} u(f(x)) &= \max\{0, f(x)\} \\ &\leq \max\{0, f(u(x))\} \quad (\text{como } f(u(x)) \geq 0 \text{ y } f(u(x)) \geq f(x)) \\ &= u(f(u(x))) = f(u(x)) \quad (\text{como } f(u(x)) \geq 0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u(f(x)) &\leq u(f(u(x))) = f(u(x)) = |f(u(x))| \quad (f(u(x)) \geq 0) \\ &\leq \|f\| |u(x)| = \|f\| u(x) \quad (u(x) \geq 0). \end{aligned}$$

Entonces $f \in LC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. □

Observación 4.9. Por el Colorario 4.8 se puede concluir que para cualquier $f \in LC((\mathbb{R}, u), (\mathbb{R}, u))$, $f \neq 0$, se tiene que $-f \notin LC((\mathbb{R}, u), (\mathbb{R}, u))$.

5. Conclusiones

Hemos expuesto algunos conceptos básicos sobre espacios normados asimétricos y el conjunto de transformaciones lineales acotadas entre espacios de este tipo. Lo realizado nos proporciona algunas tareas por desarrollar en un futuro, entre estas tenemos las siguientes:

- 1 Profundizar en el estudio de las relaciones entre las topologías τ^s y τ_p .
- 2 Estudiar sus implicaciones en el estudio de las transformaciones lineales entre espacios asimétricos.
- 3 Dada f , una transformación lineal entre espacios normados asimétricos, estudiar la relación entre la norma de f con las normas asimétricas, y con las normas asimétricas inversas.

Bibliografía

- [1] C. Alegre, *Continuous operators in asymmetric normed spaces*, Acta Math. Hungar. **122** (4) (2009), 357–372.
- [2] G. Bachman and L. Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, 1966.
- [3] D. W. Bushaw, *Elements of General Topology*, John Wiley & Son, Inc., New York, 1967.
- [4] S. Cobzas, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Birkhauser Verlag, 2012.
- [5] J. Ferrer, V. Gregori and C. Alegre, *Quasi-uniform structures in linear lattices*, Rocky Mountain J. Math. **23** (1993), 877–884.

- [6] L. M. Garcia-Raffi, S. Romaguera and E. A. Sánchez-Pérez, *The dual space of an asymmetric normed linear space*, Quaestiones Math. **26** (2003), 83–96.
- [7] J. M. Hernández Morales, *Espacios de Lipschitz con normas asimétricas*, Tesis de doctorado, FCFM-BUAP, México., junio 2012.
- [8] W. Li, D. Zou, D. Li and Z. Zhang, *Best approximation in asymmetric normed linear spaces*, International Conference on Informations Science and Technology, March 26-28, 2011, Nanjing, Jiangsu, China, 398–401.
- [9] A. E. Taylor, *Functional Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1958

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

slavdj@fcfm.buap.mx
jmendoza@fcfm.buap.mx

Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y modelación matemática

Capítulo 3

El teorema de Poincaré Bendixson

Lucía Cervantes Gómez, Ana Luisa González Pérez,
Julio Erasto Poisot Macías
FCFM-BUAP

Resumen

El teorema de Poincaré Bendixson, además de ser un resultado fundamental de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales en el plano, también es muy importante por sus aplicaciones en el análisis de los modelos de gran cantidad de fenómenos reales, sin embargo, casi no es conocido a nivel licenciatura, ni por varios especialistas de otras áreas. Con la intención de motivar su conocimiento, aplicaciones y posterior estudio a profundidad, en este trabajo lo enunciamos de una manera completa, partiendo de las principales definiciones y resultados necesarios para ubicarlo en su contexto.

1. Introducción

Una ecuación de la forma $F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = 0$, donde la incógnita x es una función de una variable, se llama ecuación diferencial ordinaria. Muchas leyes generales de la Física, Biología, Economía, Química, así como la modelización y resolución de diversos problemas de ingeniería, encuentran su expresión natural en esta clase de ecuaciones. Por otro lado, muchas cuestiones en la propia matemática, por ejemplo en Topología, Geometría Diferencial y en el Cálculo de Variaciones, se formulan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o se reducen a ellas.

El estudio de las ecuaciones diferenciales comenzó con métodos del Cálculo Diferencial e Integral, descubiertos por Newton y Leibniz, y elaborados para resolver problemas motivados por consideraciones físicas y geométricas. Estos métodos, en su evolución, poco a poco llevaron a la consolidación de las ecuaciones diferenciales como una nueva rama de la Matemática, que a mediados del siglo XVIII se transformó en una disciplina independiente.

En las primeras etapas del estudio de las ecuaciones diferenciales, el interés principal era la obtención de soluciones de ellas expresadas en términos de lo que llamamos

funciones elementales. En esta época se descubrieron los métodos elementales de resolución (integración) de varios tipos especiales de ecuaciones diferenciales, tales como las de variables separables, las lineales, las de Bernoulli, las de Clairaut, las de Riccati estudiados hasta nuestros días en los cursos introductorios de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este enfoque tuvo un éxito completo en el caso de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, sin embargo, aparecieron dificultades mayores al tratar de avanzar en esta dirección en el caso de las ecuaciones diferenciales no lineales.

Debido a que la mayoría de los fenómenos reales tienen un comportamiento no lineal, y a que muchos se modelan mediante ecuaciones diferenciales no lineales, es importante estudiar el comportamiento de sus soluciones

Un marco de referencia fundamental en la evolución de las ecuaciones diferenciales es el trabajo de Poincaré “Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle” (1881) en el que se sentaron las bases de la Teoría Cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Esta teoría pretende la descripción de la configuración general de las soluciones y el efecto de pequeñas perturbaciones de condiciones iniciales (estabilidad). El estudio de la estabilidad de un sistema es de gran importancia en la tecnología contemporánea, tuvo su origen en problemas de Mecánica Celeste estudiadas inicialmente por Newton, Lagrange y Laplace. Se pregunta si una pequeña perturbación en la posición y la velocidad de un cuerpo celeste lo coloca en una órbita que se aleja o que converge a la órbita original. El problema general de la estabilidad fue simultáneamente estudiado por Liapounov, que juntamente con Poincaré, es considerado fundador de la Teoría Cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Otro aspecto de la Teoría Cualitativa, también estudiado por Poincaré, pretende describir el comportamiento asintótico de las soluciones y la estructura de sus conjuntos límite. Un comportamiento asintótico de una solución se obtiene cuando se hace la variable independiente (tiempo) tender a infinito. Un conjunto límite puede ser un punto de equilibrio, una solución periódica u otro conjunto más complicado. La teoría de Poincaré-Bendixson, responde a este tipo de preguntas en el plano y nos da elementos para hacer una generalización en superficies bidimensionales, por ejemplo, en la esfera.

2. Preliminares

Un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo en un abierto \mathcal{U} de \mathbb{R}^n es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ x'_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

donde cada $f_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, es una función la cual supondremos diferenciable, digamos de clase $C^k, k \geq 1$ y cada x_i es una función real de variable real.

Aquí x'_i denota la derivada con respecto a la variable real $t : x'_i = dx_i/dt$.

El sistema (1) denotado abreviadamente por:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

es equivalente a la ecuación diferencial ordinaria autónoma vectorial

$$x' = F(x) \quad (3)$$

donde $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la función con coordenadas $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ y denotamos a $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definición 2.1. Supongamos que $F \in C^1(\mathcal{U})$, donde \mathcal{U} es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Entonces $\varphi(t)$ es **solución** de la ecuación diferencial (3) en el intervalo I , si $\varphi(t)$ es diferenciable en I y si para toda $t \in I, \varphi(t) \in \mathcal{U}$ y

$$\varphi'(t) = F(\varphi(t))$$

y dado $x_0 \in \mathcal{U}, \varphi(t)$ es una **solución del problema de valor inicial**

$$\begin{aligned} x' &= F(x), \\ \varphi(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (4)$$

en el intervalo I si $t_0 \in I, \varphi(t_0) = x_0$ y $\varphi(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (3) en el intervalo I .

Una **condición inicial** para la solución $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$ es una condición de la forma $\varphi(t_0) = x_0$, donde $t_0 \in I, x_0 \in \mathcal{U}$. Por simplicidad, usualmente tomaremos $t_0 = 0$.

Hasta el momento hemos hablado de ecuaciones diferenciales ordinarias y sus soluciones sin preocuparnos sobre el problema de la existencia de dichas soluciones. Es de esperarse que las ecuaciones diferenciales que consideraremos en la mayoría de los casos tengan solución, de otra forma el tiempo y esfuerzo que se inviertan en buscar una solución estarían irremediabilmente perdidos.

Por otra parte, el hecho de que para una ecuación diferencial en particular una persona no pueda encontrar su solución no significa que la ecuación no tenga solución. De aquí resulta muy deseable conocer algún criterio que nos permita decidir si una ecuación o bien un problema de valor inicial tienen solución.

A continuación vamos a enunciar algunos resultados de gran importancia, uno de ellos es conocido como el teorema fundamental de existencia y unicidad, que proporciona algunas condiciones que garantizan que un problema de valor inicial tenga solución única, otro de ellos nos asegura la existencia de un intervalo máximo donde el problema de valor inicial tiene solución única. Las demostraciones de estos resultados se pueden consultar en [5].

Teorema 2.2. (Teorema Fundamental de existencia y unicidad local) Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , que contiene a x_0 y supongamos que $F \in C^1(\mathcal{U})$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}x' &= F(x), \\ \varphi(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

tiene una única solución $\varphi(t)$ definida en el intervalo

$$\varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathcal{U}.$$

Teorema 2.3. Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y supongamos que $F \in C^1(\mathcal{U})$. Entonces para cada punto $x_0 \in \mathcal{U}$, existe un intervalo máximo J en el que el problema de valor inicial (6) tiene una única solución, $\varphi(t)$; es decir, si el problema de valor inicial tiene solución $\psi(t)$ en el intervalo I entonces $I \subseteq J$ y $\varphi(t) = \psi(t)$ para toda $t \in I$. Además, el intervalo máximo J es abierto; es decir, $J = (\alpha, \beta)$.

Definición 2.4. Un punto $x \in \mathcal{U}$ se llama **punto singular o de equilibrio** de F si $F(x) = 0$ y **punto regular** de F si $F(x) \neq 0$.

3. Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales

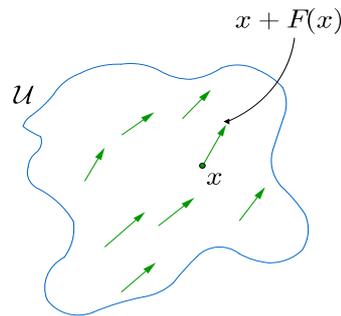
Una ecuación de la forma $x' = F(x)$, tiene la siguiente interpretación geométrica: la parte derecha de esta ecuación se puede pensar como un campo vectorial o campo de direcciones en el abierto \mathcal{U} , como se muestra en la Figura 1. Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto de espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Un **campo vectorial** de clase C^k , $1 \leq k \leq \infty$ en \mathcal{U} es una aplicación $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k . Un campo vectorial asocia, a cada punto $x \in \mathcal{U}$, un vector que se inicia en x y termina en $x + F(x)$. Una **curva integral** o **trayectoria** u **órbita** del campo F es una solución de la ecuación diferencial

$$x' = F(x) \quad (x \in \mathcal{U}) \tag{5}$$

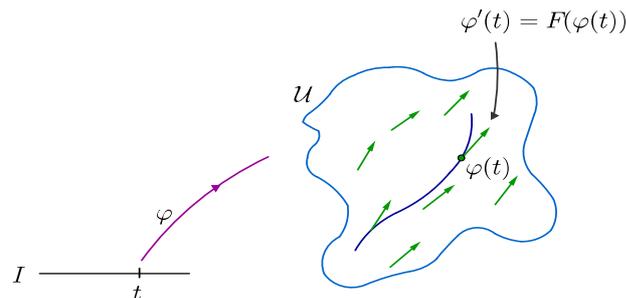
donde como sabemos las soluciones de esta ecuación son funciones diferenciables $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$ (I un intervalo de la recta) tales que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t)) \tag{6}$$

para todo $t \in I$.

Figura 1: Campo vectorial asociado a F

Observación 3.1. La ecuación (5) (o (6)) admite la siguiente interpretación geométrica, $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$ es una **curva integral** de F si y sólo si el vector velocidad $\varphi'(t)$ para todo $t \in I$ coincide con el valor del campo F en $\varphi(t)$, es decir, si φ es una solución de la ecuación diferencial $x' = F(x)$ (véase Figura 2).

Figura 2: Curvas integrales asociadas a F

Veamos algunos ejemplos de campos vectoriales:

- Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo C^∞ dado por:

$$F(x, y) = (-y, x)$$

entonces su representación gráfica esta dado por la Figura 3.

- Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo C^∞ dado por:

$$F(x, y) = (x, -y)$$

entonces su representación gráfica esta dada por la Figura 4.

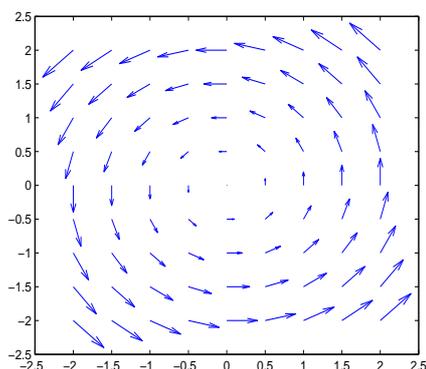


Figura 3: Representación gráfica del campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$

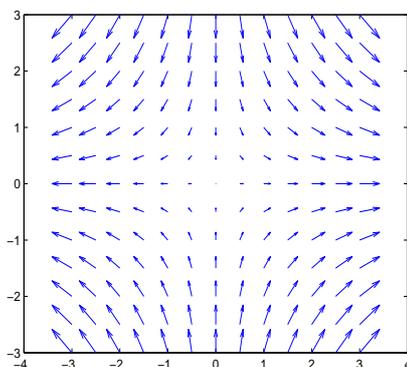


Figura 4: Representación gráfica del campo vectorial $F(x, y) = (x, -y)$

4. Retrato de fase de la ecuación diferencial $x' = F(x)$

Definición 4.1. Si $p \in \mathcal{U}$ definimos $\gamma_p = \{\varphi(t, p), t \in I_p\}$, donde I_p es el intervalo máximo de la solución $\varphi(t)$ del problema de valor inicial $x' = F(x)$, $\varphi(t_0) = p$ y se llama la **órbita** de $x' = F(x)$ (o del campo vectorial F) que pasa por p .

Observación 4.2. Dos órbitas de la ecuación diferencial $x' = F(x)$ coinciden o son disjuntas, esto tiene como consecuencia que \mathcal{U} se descompone en una unión disjunta de curvas diferenciables, las cuales pueden ser de una de las siguientes formas:

- (a) la imagen biunívoca de un intervalo de \mathbb{R} (órbita regular)
- (b) un punto (punto singular), o

(c) la imagen difeomorfa de un círculo (órbita periódica o cerrada)

Definición 4.3. Un conjunto abierto \mathcal{U} , junto con su descomposición como unión disjunta generada por las órbitas del campo F , se llama **retrato de fase de F** . Las órbitas son orientadas en sentido de las curvas integrales del campo F ; los puntos singulares tienen la orientación trivial.

Definición 4.4. Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $F \in C^1(\mathcal{U})$. Para $x_0 \in \mathcal{U}$, sea $\varphi(t, x_0)$ la solución al problema de valor inicial $x' = F(x)$, $\varphi(0) = x_0$ definida en un intervalo máximo de existencia I_{x_0} . Entonces para $t \in I_{x_0}$, la aplicación $\varphi_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ definida como:

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

es llamado el **flujo de la ecuación diferencial** (3) o el flujo definido por la ecuación diferencial (3); a φ_t también se le conoce como el **flujo del campo vectorial $F(x)$** .

Si pensamos en el punto inicial x_0 variando a lo largo de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ entonces el flujo de la ecuación diferencial $x' = F(x)$, $\varphi_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede verse como el movimiento de todos los puntos en el conjunto \mathcal{U} ; véase la Figura 5.

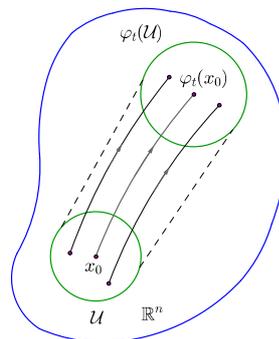


Figura 5: El flujo φ_t de la ecuación $x' = F(x)$

Usando la notación de la definición 4.4, sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{U}$ el siguiente conjunto:

$$\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U} | t \in I_{x_0}\}$$

La aplicación $(t, x_0) \rightarrow \varphi(t, x_0)$ es entonces una función

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{U}.$$

Llamaremos también a φ el **flujo** de la ecuación $x' = F(x)$, donde a menudo escribiremos:

$$\varphi(t, x) = \varphi_t(x).$$

Definición 4.5. Sean $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ los flujos generados por los campos $F_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $F_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectivamente. Se dice que F_1 es **topológicamente conjugado** (respectivamente C^r -conjugado) a F_2 cuando existe un homeomorfismo (respectivamente un difeomorfismo de clase C^r) $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in \Omega_1$.

En este caso, se tiene necesariamente $I_1(x) = I_2(h(x))$. Un homeomorfismo h se llama **conjugación topológica** (respectivamente C^r -conjugación) entre F_1 y F_2 .

Definición 4.6. Sean $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^r , $r \geq 1$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un abierto. Una aplicación diferenciable $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}$ de clase C^r se llama **sección transversal local** de F (de clase C^r) cuando, para todo $a \in \mathcal{A}$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ y $F(f(a))$ generen a \mathbb{R}^n . Sea $\mathcal{S} = f(\mathcal{A})$ dotada con la topología inducida. Si $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ es un homeomorfismo, se dice que \mathcal{S} es una **sección transversal** de F .

Teorema 4.7. (Teorema de rectificación local): Sea p un punto no singular (regular) de $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k y $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$ una sección transversal local de F de clase C^k con $f(0) = p$, entonces existen una vecindad \mathcal{V} de p en \mathcal{U} y un difeomorfismo $h : \mathcal{V} \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ es de clase C^k , donde $\varepsilon > 0$ y B una bola abierta en \mathbb{R}^{n-1} de centro $0 = f^{-1}(p)$ tal que:

- a) $h(\mathcal{S} \cap \mathcal{V}) = \{0\} \times B$
- b) h es una C^r -conjugación en $F|_{\mathcal{V}}$ y el campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

La demostración de este teorema y su corolario se puede consultar en [9].

Corolario 4.8. Sea \mathcal{S} una sección transversal al campo F . Para todo punto $p \in \mathcal{S}$ existen $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, una vecindad \mathcal{V} de p en \mathbb{R}^n y una función $\tau : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tales que $\tau(\mathcal{V} \cap \mathcal{S}) = 0$ y

- a) Para todo $q \in \mathcal{V}$, la curva integral $\varphi(t, q) \in F|_{\mathcal{V}}$ está definida y es biunívoca en $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$.
- b) $\xi(q) := \varphi(\tau(q), q) \in \mathcal{S}$ es el único punto de $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$ intersección a \mathcal{S} . En particular, $q \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ si y sólo si $\tau(q) = 0$.
- c) $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}$ es de clase C^k y $D\xi(q)$ es sobreyectiva para todo $q \in \mathcal{V}$.

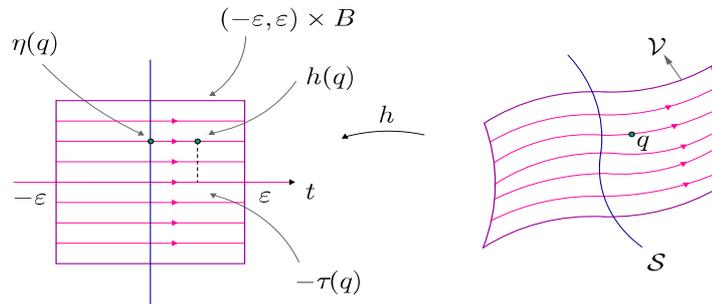


Figura 6

5. Conjuntos α -límite y ω -límite de una órbita

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^k ($k \geq 1$) y $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ la curva integral de F que pasa por el punto p ($\varphi(0) = \varphi(0, p) = p$), definida en su intervalo máximo $I_p = (\delta_-(p), \delta_+(p))$.

Si $\delta_+(p) = \infty$, se define el conjunto $\omega(p) = \{q \in \mathcal{U}; \exists (t_n)_{n \geq 1}$ con $t_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_n) \rightarrow q$, cuando $n \rightarrow \infty\}$, el conjunto ω -límite de p .

Análogamente, si $\delta_-(p) = -\infty$, se define $\alpha(p) = \{q \in \mathcal{U}; \exists (t_n)_{n \geq 1}$ con $t_n \rightarrow -\infty$ y $\varphi(t_n) \rightarrow q$, cuando $n \rightarrow \infty\}$, el conjunto α -límite de p .

6. Ejemplos de conjuntos ω -límite y α -límite

Ejemplo 6.1.

(a) Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo C^∞ dado por:

$$F(x, y) = (x, -y)$$

Las curvas integrales de F se representan por la silla de montar de la Figura 7, en \mathbb{R}^2 , entonces:

1. Si $p = 0$, $\alpha(p) = \omega(p) = \{0\}$
2. Si $p \in E_1 - \{0\}$, $\omega(p) = \emptyset$ y $\alpha(p) = \{0\}$
3. Si $p \in E_2 - \{0\}$, $\omega(p) = \{0\}$ y $\alpha(p) = \emptyset$
4. Si $p \notin E_1 \cup E_2$, $\omega(p) = \alpha(p) = \emptyset$

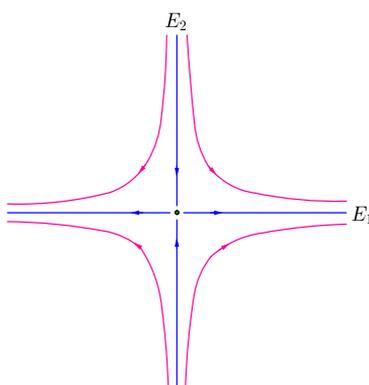


Figura 7: Curvas integrales de $F(x, y) = (x, -y)$

- (b) Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $F(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y))$ un campo de clase C^k cuyas órbitas son espirales exteriores e interiores del círculo C de centro en el origen y de radio 1, como se muestra en la Figura 9.

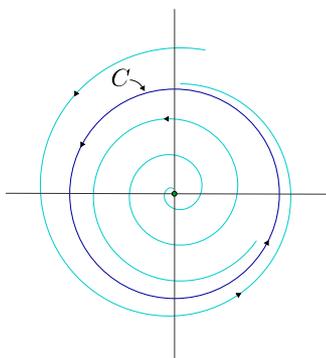


Figura 8: Curvas integrales de $F(x, y) = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2))$

Por ejemplo, si

$$X_1(x, y) = y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$X_2(x, y) = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

entonces F satisface la condición de arriba.

Entonces

1. $\alpha(p) = \{0\}$ si p está en el interior de C

2. $\alpha(p) = \emptyset$ si p está en el exterior de C
3. $\omega(p) = C$ si $p \in C$
4. $\omega(p) = C$ cualquiera que sea el punto p diferente del origen.

(c) Considere el sistema

$$x' = \operatorname{sen} x(-0.1 \cos x - \cos y)$$

$$y' = \operatorname{sen} y(\cos x - 0.1 \cos y).$$

Hay puntos de equilibrio en las esquinas del cuadrado $(0, 0)$, $(0, \pi)$, (π, π) y $(\pi, 0)$, así como en muchos otros puntos. Hay soluciones que son segmentos de recta conectando los puntos de equilibrio en el orden listado. Hay también una fuente de espiral en $(\pi/2, \pi/2)$. Todas las soluciones que inician en el interior de este cuadrado se acumulan hacia los puntos de equilibrio, así como a las 4 soluciones formadas por los segmentos de recta que conectan a estos puntos. De este modo el conjunto ω -límite de cualquier punto en el interior del cuadrado es justamente el cuadrado cuyos vértices son los puntos de equilibrio antes mencionados junto con los segmentos de recta que los conectan (Véase Figura 9).

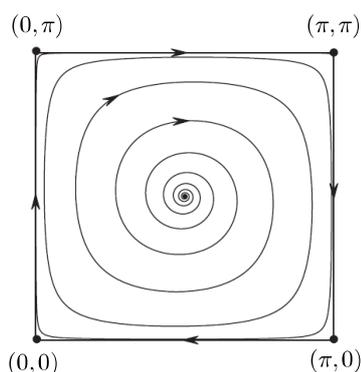


Figura 9: El conjunto ω -límite de cualquier punto en el interior del cuadrado es justamente el mismo cuadrado, cuyos vértices son los puntos de equilibrio $(0, 0)$, $(0, \pi)$, (π, π) y $(\pi, 0)$ y sus lados son los segmentos de recta que conectan esos vértices.

Observaciones

- (a) Si p es cualquier punto singular del campo F , entonces $\alpha(p) = \omega(p) = p$, ya que $\varphi(t) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Si γ_p es una órbita de F en el punto p y $q \in \gamma_p$, entonces $\omega(p) = \omega(q)$. En efecto, si $q \in \gamma_p$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, p) = \varphi(t + c, q)$. Análogamente, $\alpha(p) = \alpha(q)$. Como consecuencia de la observación (b), podemos definir:

Definición 6.2. El conjunto ω -límite de una órbita γ es el conjunto $\omega(p)$, para cualquier $p \in \gamma$. El conjunto α -límite de una órbita α es el conjunto $\alpha(p)$, para cualquier $p \in \gamma$.

Observación 6.3. Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ la curva integral del campo F en el punto p y $\psi(t, p)$ la curva integral del campo $-F$ en el punto p , entonces $\psi(t, p) = \varphi(-t, p)$. De modo que el ω -límite de $\varphi(t)$ es igual a α -límite de $\psi(t)$ y recíprocamente el ω -límite de $\psi(t)$ es igual a α -límite de $\varphi(t)$.

Por esta razón, para estudiar las propiedades generales de los conjuntos α -límite y ω -límite de las órbitas será suficiente restringirnos al estudio del conjunto ω -límite.

Teorema 6.4. Sean $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ un campo de clase C^k , ($k \geq 1$), definido en un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ y $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$ (respectivamente $\gamma^-(p) = \{\varphi(t, p); t \leq 0\}$) la semi-órbita positiva (respectivamente, la semi-órbita negativa) del campo F en el punto p . Si $\gamma^+(p)$ (respectivamente, $\gamma^-(p)$) está contenida en un subconjunto compacto $K \subset \mathcal{U}$, entonces:

- (a) $\omega(p) \neq \emptyset$ (respectivamente, $\alpha(p)$)
- (b) $\omega(p)$ es compacto (respectivamente, $\alpha(p)$)
- (c) $\omega(p)$ es invariante por F (respectivamente, $\alpha(p)$), esto es, si $q \in \omega(p)$, entonces la curva integral de F que pasa por q está contenida en $\omega(p)$
- (d) $\omega(p)$ es conexo (respectivamente, $\alpha(p)$)

Demostración. Por la observación anterior es suficiente demostrar el teorema para un conjunto $\omega(p)$.

- a) Por demostrar que $\omega(p) \neq \emptyset$.

Sea $t_n = n \in \mathbb{N}$. Tenemos por hipótesis que $\{\varphi(t_n)\} \subset K$ es compacto, entonces existe una subsucesión $\{\varphi(t_{n_k})\}$ que converge a un punto $q \in K$.

Tenemos entonces que:

$t_{n_k} \rightarrow \infty$, cuando $n_k \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_{n_k}) \rightarrow q$, luego, por definición $q \in \omega(p)$.

- b) Por demostrar $\omega(p)$ es compacto.

Sabemos que $\omega(p) \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$, por tanto bastará demostrar que $\omega(p)$ es cerrado.

Sea $q_n \rightarrow q$, $q_n \in \omega(p)$. Vamos a demostrar que $q \in \omega(p)$. Como $q_n \in \omega(p)$, entonces existe para cada q_n , una sucesión $(t_m^{(n)})$ tal que $t_m^{(n)} \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_m^{(n)}, p) \rightarrow q_n$, cuando $m \rightarrow \infty$.

Elegimos para cada sucesión $(t_m^{(n)})$ un punto $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$ y tal que $d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}$.

Tenemos entonces que:

$$d(\varphi(t_n, p), q) \leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) < \frac{1}{n} + d(q_n, q)$$

Resulta entonces que $d(\varphi(t_n, p), q) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, es decir $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$. Como $t_n \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$, se sigue que $q \in \omega(p)$.

c) Por demostrar que $\omega(p)$ es invariante por F .

Sea $q \in \omega(p)$ y $\Psi : I(q) \rightarrow \mathcal{U}$ la curva integral de F que pasa por el punto q . Sea $q_1 = \varphi(t_0, q) = \Psi(t_0)$ y vamos a demostrar que $q_1 \in \omega(p)$. Como $q \in \omega(p)$, existe una sucesión (t_n) tal que $t_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$, cuando $n \rightarrow \infty$. Además φ es continua, de modo que :

$$q_1 = \varphi(t_0, q) = \varphi(t_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p)) = \varphi(t_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_0, p)) = \varphi(t_0 + t_n, p)$$

Tenemos entonces que la sucesión $(s_n) = (t_0 + t_n)$ tal que $s_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(s_n, p) \rightarrow q_1$, cuando $n \rightarrow \infty$, es decir $q_1 \in \omega(p)$. Para una ilustración geométrica, véase la figura 10

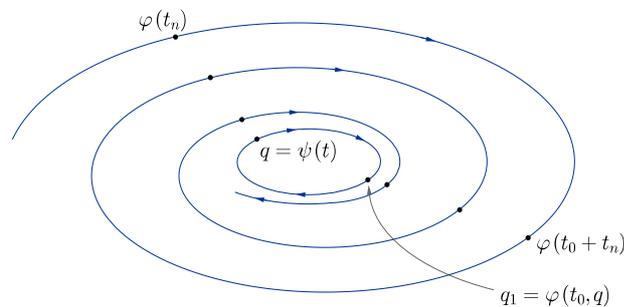


Figura 10

d) Por demostrar que $\omega(p)$ es conexo.

Supongamos que $\omega(p)$ no es conexo, entonces $\omega(p) = A \cup B$, donde A y B son cerrados, no vacíos y $A \cap B = \emptyset$. Siendo $A \neq \emptyset$, existe una sucesión (t'_n) tal que $t'_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t'_n, p) \rightarrow a \in A$, cuando $n \rightarrow \infty$. Análogamente, existe una sucesión (t''_n) tal que $t''_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(t''_n, p) \rightarrow b \in B$, cuando $n \rightarrow \infty$. Luego podemos construir una sucesión (t_n) , $t_n \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $d(\varphi(t_n), A) < d/2$ y $d(\varphi(t_{n+1}), B) > d/2$, (donde $d = d(A, B) > 0$) para todo n impar.

Como la función $g(t) = d(\varphi(t), A)$, $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ para todo n impar es continua y $g(t_n) < d/2$ y $g(t_{n+1}) > d/2$, sigue por el teorema del valor intermedio que existe t_n^* , $t_n < t_n^* < t_{n+1}$, tal que

$$g(t_n^*) = d(\varphi(t_n^*), A) = d/2$$

Dado que la sucesión $(\varphi(t_n^*))$ está contenida en un conjunto compacto $Q = \{x \in \mathcal{U}; d(x, A) = d/2\}$, $(\varphi(t_n^*))$ tiene un subsucesión convergente, que denotaremos también por $(\varphi(t_n^*))$. Sea $p^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n^*)$.

Entonces $p^* \in \omega(p)$. Pero $p^* \notin A$, porque $d(p^*, A) = d/2 > 0$; también $p^* \notin B$, porque $d(p^*, B) \geq d(A, B) - d(p^*, A) = d/2 > 0$. Llegamos por tanto a una contradicción. \square

7. Conceptos y resultados previos

Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y F un campo vectorial de clase C^k , $k \geq 1$ de \mathcal{U} . Supongamos que $\varphi(t, p)$ es una órbita del campo F que está definida para todo $t \geq 0$, denotamos como γ_p^+ a la semi-órbita positiva de p definida como:

$$\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$$

Antes de enunciar y demostrar el teorema de Poincaré-Bendixson, probaremos algunos lemas en los que se basa la demostración. En esta sección seguimos la presentación de este tema de la referencia [9].

Lema 7.1. *Si $p \in \mathcal{S} \cap \omega(\gamma)$, siendo \mathcal{S} una sección transversal al campo F y $\gamma = \{\varphi(t)\}$ una órbita de F , entonces p puede expresarse como límite de una sucesión de puntos $\varphi(t_n) \in \mathcal{S}$, donde $t_n \rightarrow \infty$.*

Demostración. Supongamos que $\gamma = \{\varphi(t)\} = \{\varphi(t, q)\}$ y $p \in \mathcal{S} \cap \omega(\gamma)$. Consideremos una vecindad \mathcal{V} y una función $\tau : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por el corolario 4.8.

Como $p \in \omega(\gamma)$ existe una sucesión (\tilde{t}_n) tal que $\tilde{t}_n \rightarrow \infty$ y $\varphi(\tilde{t}_n) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(\tilde{t}_n) \in \mathcal{V}$, $\forall n \geq n_0$. Si $t_n := \tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n))$, para $n \geq n_0$. Tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(t_n) &= \varphi(\tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n)), q) \\ &= \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)) \end{aligned}$$

y por definición de τ resulta que $\varphi(t_n) \in \mathcal{S}$.

Como τ es continua sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n))) \\ &= \varphi(0, p) = p\end{aligned}$$

pues $\varphi(\tilde{t}_n) \rightarrow p$ y $\tau(\varphi(\tilde{t}_n)) \rightarrow \tau(p) = 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto prueba el lema. \square

Observación 7.2. Una sección transversal \mathcal{S} del campo F , tiene dimensión uno, ya que estamos considerando el campo F en \mathbb{R}^2 , de modo que localmente \mathcal{S} es la imagen difeomorfa de un intervalo de \mathbb{R} . Consideremos de aquí en adelante que toda sección transversal \mathcal{S} tiene una ordenación total (\leq) inducida por la ordenación total del intervalo, podemos por tanto hablar de sucesiones monótonas en \mathcal{S} .

Enunciamos el siguiente teorema que utilizaremos fundamentalmente en la demostración del Lema 7.4, el cual se enuncia como sigue:

Teorema 7.3. (Teorema de la Curva de Jordan) Si J es una curva cerrada, continua y simple (J es la imagen homeomorfa de una circunferencia) entonces $\mathbb{R}^2 - J$ tiene dos componentes conexas: S_i acotada y S_e no acotada las cuales tienen a J como frontera común.

En nuestro caso no demostraremos este teorema, pero se puede consultar la demostración en [3] y [17].

Lema 7.4. Sea \mathcal{S} una sección transversal a F contenida en \mathcal{U} . Si γ es una órbita de F y $p \in \mathcal{S} \cap \gamma$, entonces, $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$ interseca a \mathcal{S} en una sucesión monótona $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

Demostración. Sea $D = \{t \in \mathbb{R}^+; \varphi(t, p) \in \mathcal{S}\}$. Veamos que D es un conjunto discreto; para ello necesitamos probar que para todo $t^* \in D$ existe un intervalo alrededor de t^* tal que para ningún t en ese intervalo $\varphi(t, p) \in \mathcal{S}$. Sea t^* en D , esto es $\varphi(t^*, p) \in \mathcal{S}$, luego por el corolario 4.8, existe un $\varepsilon > 0$, una vecindad \mathcal{V} de $\varphi(t^*, p)$ en \mathbb{R}^2 y una función $\tau : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tal que $\tau(\mathcal{V} \cap \mathcal{S}) = 0$ y para $\varphi(t^*, p) \in \mathcal{V}$, la curva integral $\varphi(t^*, p)$ de $F|_{\mathcal{V}}$ está definida en $J_{\varphi(t^*, p)} = (-\varepsilon + \tau(\varphi(t^*, p)), \varepsilon + \tau(\varphi(t^*, p)))$ y $\xi(\varphi(t^*, p)) = \varphi(\tau(\varphi(t^*, p)), \varphi(t^*, p)) \in \mathcal{S}$ es el único punto donde $\varphi(\cdot, \varphi(t^*, p))|_{J_{\varphi(t^*, p)}}$ interseca a \mathcal{S} por lo tanto se tiene que D es discreto. Podemos por tanto ordenar a $D = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}$.

Sea $p_1 = p$. Definamos, en caso de que exista, $p_2 = \varphi(t_1, p)$. Por inducción, definiremos $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$.

Si $p_1 = p_2$, entonces γ es una trayectoria cerrada de período $\tau = t_1$, y $p = p_n$ para todo n .

Si $p_1 \neq p_2$, digamos $p_1 < p_2$ y si existiera p_3 vamos a demostrar que $p_3 > p_2$.

Orientemos la sección \mathcal{S} , de acuerdo a la Figura 11 y observamos que debido al hecho de que \mathcal{S} es conexo y la continuidad de F , las órbitas de F cruzan la sección siempre en el mismo sentido, digamos, de izquierda a derecha, como se muestra en la Figura 12.



Figura 11

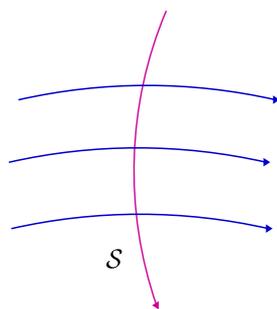


Figura 12

Consideramos la curva de Jordan formada por la unión del segmento $\overline{p_1 p_2} \subset \mathcal{S}$ junto con el arco de la órbita $\widehat{p_1 p_2} = \{\varphi(t, p) : 0 \leq t \leq t_1\}$, como se muestra en la Figura 13. Por el Teorema 7.3 (**Teorema de la Curva de Jordan**), el complemento de esta curva queda dividida en dos componentes conexas una acotada S_i y la no acotada S_e .

La órbita γ , a partir de p_2 , esto es, para valores $t > t_1$, queda contenida en S_i . De hecho, ella no puede intersectar al arco $\widehat{p_1 p_2}$ debido a la unicidad de las órbitas (ver Figura 14) y además no puede intersectar al segmento $\overline{p_1 p_2}$ porque sería contraria al sentido del flujo (véase Figura 15).

Por lo dicho antes, en caso de que p_3 exista, debemos tener $p_1 < p_2 < p_3$, continuando de esta manera obtendremos una sucesión monótona $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < \dots$. Por tanto $\{p_n\}$ es una sucesión monótona. Si $p_2 < p_1$ la demostración es análoga. \square

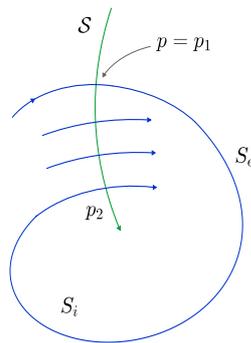


Figura 13

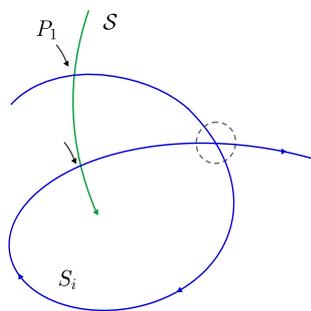


Figura 14

Lema 7.5. Si \mathcal{S} es una sección transversal al campo F y $p \in \mathcal{U}$, entonces \mathcal{S} intersecta a $\omega(p)$ como máximo en un punto.

Demostración. En virtud del lema anterior, el conjunto de puntos de γ_p^+ en \mathcal{S} tiene como máximo un punto límite pues, el mismo forma una sucesión monótona, de esto y del Lema 7.1 el cual nos dice que cualquier punto en $\mathcal{S} \cap \omega(\gamma_p^+)$ debe ser límite de esta sucesión monótona, sigue que puede haber a lo más un punto. \square

Lema 7.6. Sea $p \in \mathcal{U}$, con γ_p^+ contenida en un compacto, y γ una órbita del campo F con $\gamma \subset \omega(p)$. Si $\omega(\gamma)$ contiene puntos regulares, entonces γ es una órbita cerrada y $\omega(p) = \gamma$.

Demostración. Sea $q \in \omega(\gamma)$ un punto regular y sea \mathcal{V} una vecindad de q dada por el Corolario 4.8 y \mathcal{S}_q una sección transversal correspondiente. Por el Lema 7.1, existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\gamma(t_n) \in \mathcal{S}_q$. Como $\gamma(t_n) \in \omega(p)$ la sucesión $\{\gamma(t_n)\}$ se reduce a un punto, esto por el Lema 7.5, esto prueba que γ es periódica.

Probemos ahora que $\gamma = \omega(p)$. Como $\omega(p)$ es conexo y γ es cerrado y no vacío, basta probar que γ es abierto en $\omega(p)$.

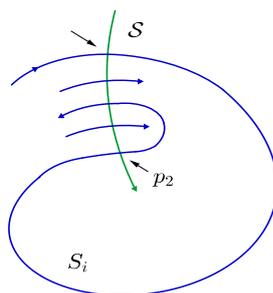


Figura 15

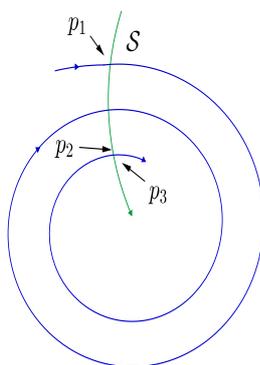


Figura 16

Sea $\bar{p} \in \gamma$, $\mathcal{V}_{\bar{p}}$ una vecindad de \bar{p} y $\mathcal{S}_{\bar{p}}$ la sección transversal correspondiente. Mostraremos que $\mathcal{V}_{\bar{p}} \cap \gamma = \mathcal{V}_{\bar{p}} \cap \omega(p)$.

Sabemos que $\mathcal{V}_{\bar{p}} \cap \gamma \subset \mathcal{V}_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Luego probaremos por contradicción la otra contención. Supongamos que existe $\bar{q} \in \mathcal{V}_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ tal que $\bar{q} \notin \gamma$, por el Teorema 4.7 (**Teorema de rectificación local**) y por la invariancia de $\omega(p)$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, \bar{q}) \in \omega(p) \cap \mathcal{S}_{\bar{p}}$ y $\varphi(t, \bar{q}) \neq \bar{p}$. De esto existen dos puntos distintos de $\omega(p)$ en $\mathcal{S}_{\bar{p}}$ lo cual es imposible por el Lema 7.5, luego $\mathcal{V}_{\bar{p}} \cap \gamma = \mathcal{V}_{\bar{p}} \cap \omega(p)$.

Sea $U = \bigcup_{\bar{p} \in \gamma} \mathcal{V}_{\bar{p}}$ un abierto en \mathcal{U} , $\gamma \subset U$ y $U \cap \omega(p) = U \cap \gamma = \gamma$, es decir, γ es una intersección de un abierto de \mathbb{R}^2 con $\omega(p)$, entonces γ es abierto en $\omega(p)$. \square

8. Enunciado y demostración del teorema de Poincaré - Bendixson

Teorema 8.1. (Teorema de Poincaré-Bendixson) Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ una curva integral de F , definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ está contenida en un compacto $K \subset \mathcal{U}$. Suponga que el campo F posee a lo más un número finito de

singularidades en el conjunto ω -límite de p , $\omega(p)$.

Se tienen las siguientes alternativas:

- (a) Si $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica.
- (b) Si $\omega(p)$ contiene puntos regulares y singulares, entonces $\omega(p)$ consiste de un conjunto de órbitas cada una de las cuales tiende a uno de esos puntos singulares cuando $t \rightarrow \pm\infty$.
- (c) Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es un punto singular.

Demostración.

- i) Supongamos que $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares y $q \in \omega(p)$, entonces la órbita $\gamma_q \subset \omega(p)$. Siendo $\omega(p)$ compacto resulta que $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$. Se sigue del lema 7.6 que $\omega(p) = \gamma_q$ y es una órbita cerrada (véase figura 17).

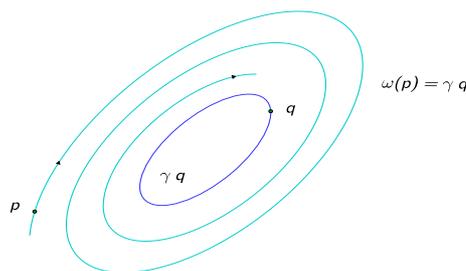


Figura 17: El conjunto $\omega(p)$ es una órbita periódica

- ii) Supongamos que $\omega(p)$ contiene puntos regulares y singulares y γ es una órbita contenida en $\omega(p)$, γ no reducida a un punto singular, entonces por el lema 7.6 si el $\omega(\gamma)$ contiene puntos regulares entonces γ sería una órbita cerrada y $\omega(p) = \gamma$ lo cual contradiría nuestra hipótesis de que $\omega(p)$ contiene tanto puntos regulares como singulares, por tanto $\omega(\gamma)$ contiene sólo puntos singulares, además F tiene solamente un número finito de singularidades y $\omega(\gamma)$ es conexo entonces $\omega(\gamma)$ se reduce a un punto singular del campo F , similarmente $\alpha(\gamma)$ se reduce a un punto singular de F . Ver figuras 18, 19, 20.

La Figura 18 muestra el retrato de fase de un sistema el cual tiene cuatro puntos de equilibrio p_1, p_2, p_3 y p_4 , y cuyo conjunto $\omega(p)$ consiste de esos cuatro puntos singulares y órbitas que conectan estos puntos unos con otros, más aún en los puntos p_2 y p_3 se muestran trayectorias que inician en estos puntos de equilibrio

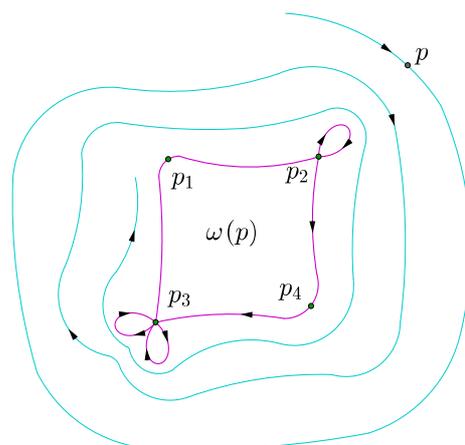


Figura 18

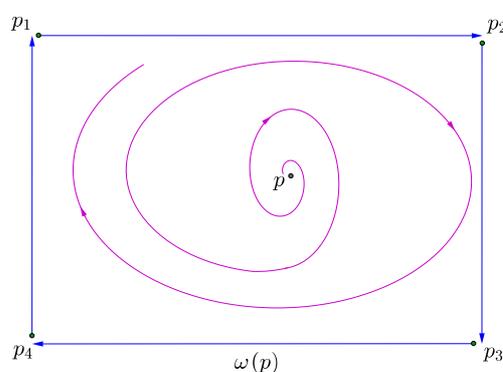


Figura 19

y terminan en esos mismos puntos.

En la Figura 19 hay puntos de equilibrio en las esquinas del cuadrado p_1, p_2, p_3 y p_4 , hay soluciones que son segmentos de recta que conectan los puntos de equilibrio en el orden listado, todas las soluciones que inician en el interior de este cuadrado se acumulan hacia los puntos de equilibrio, así como hacia las 4 soluciones formadas por segmentos de recta que conectan a estos puntos. De este modo, el conjunto $\omega(p)$ de cualquier punto en el interior del cuadrado es justamente el cuadrado cuyos vértices son los puntos de equilibrio antes mencionados junto con los segmentos de recta que los conectan.

Notemos que en la Figura 20 se tiene solamente un punto de equilibrio p_0 , en este punto hay dos trayectorias especiales: una de ellas inicia en este punto en dirección contraria al de las manecillas del reloj y después de dar vuelta regresa

$$\omega(p) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{p_0\}$$

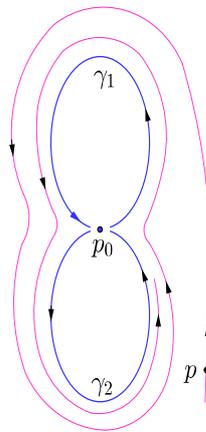
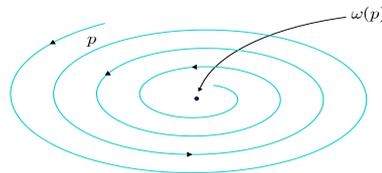


Figura 20

a este mismo punto; la otra inicia en la dirección de las manecillas del reloj y después de dar una vuelta regresa este punto, de modo que el $\omega(p)$ consta de el punto de equilibrio p_0 junto con las dos trayectorias antes descritas.

- iii) El caso c) sigue directamente del hecho de ser $\omega(p)$ conexo y del hecho de tener F solamente un número finito de singularidades en $\omega(p)$. Ver figura 21.

Figura 21: El conjunto $\omega(p)$ es un punto singular

Por lo tanto los tres casos i), ii) y iii) han quedado demostrados y con ello el teorema. \square

9. Una aplicación del teorema de Poincaré-Bendixson

Una consecuencia importante del teorema de Poincaré-Bendixson es el siguiente resultado sobre la existencia de singularidades.

Teorema 9.1. *Sea F un campo vectorial de clase C^1 , definido en un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Si γ es una órbita cerrada de F tal que $\text{Int}\gamma \subset \mathcal{U}$, entonces existe un punto singular de F contenido en $\text{Int}\gamma$.*

Demostración. Supongamos que no existen puntos singulares en $\text{Int}\gamma$. Consideremos el conjunto Γ de órbitas cerradas de F contenidas en $\overline{\text{Int}\gamma}$, ordenadas de acuerdo al siguiente orden parcial

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow \overline{\text{Int}\gamma_1} \supseteq \overline{\text{Int}\gamma_2};$$

mostraremos que todo subconjunto S totalmente ordenado de Γ (es decir, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ en S implica que $\gamma_1 < \gamma_2$ ó $\gamma_2 < \gamma_1$) admite una cota superior, lo que significa que existe un elemento mayor o igual que cualquier elemento de S . Un conjunto ordenado con estas condiciones se llama *inductivo*.

En efecto, sea $\sigma = \{\cap \overline{\text{Int}\gamma_i}, \gamma_i \in S\}$. Notemos que $\sigma \neq \emptyset$, ya que para cada $\overline{\text{Int}\gamma_i}$ es compacto y la familia $\{\overline{\text{Int}\gamma_i}, \gamma_i \in S\}$ tiene la Propiedad de Intersección Finita. Esto es, cualquier intersección finita de elementos de la familia es no vacía. Sea $q \in \sigma$. Por el **Teorema de Poincaré-Bendixson** (Teorema 8.1) $\omega(q)$ es una órbita cerrada contenida en σ , ya que este conjunto es invariante por F y no contiene puntos singulares. Esta órbita es una cota superior de S .

Por el **Lema de Zorn**, Γ tiene un elemento maximal, μ , porque Γ es inductivo. Por lo tanto no existe ninguna órbita cerrada de Γ contenida en $\text{Int}\mu$. Pero si $p \in \text{Int}\mu$, $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ son órbitas cerradas por el **Teorema de Poincaré-Bendixson** (Teorema 8.1) ya que no existen puntos singulares. Como $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ no pueden ser ambas iguales a μ para verificar esto supongamos que $\omega(p) = \mu$ y sea $p' \in \mu$ entonces $p' \in \omega(p)$. Construimos una sección transversal \mathcal{S} al campo F que pasa por p' , de modo que $p' \in \mathcal{S} \cap \omega(p)$, aplicando el Lema 7.1 a $\omega(p)$, p' puede ser expresado como límite de una sucesión de puntos, $\varphi(t_n)$ de \mathcal{S} , donde $t_n \rightarrow \infty$. Por el Lema 7.4 si $p' \in \mathcal{S} \cap \gamma_p$ entonces γ_p intersecciona a \mathcal{S} en una sucesión monótona, por lo cual no podemos construir otra sucesión de puntos $\varphi(t_n)$ pertenecientes a $\mathcal{S} \cap \alpha(p)$ tal que $t_n \rightarrow -\infty$ y $\varphi(t_n) \rightarrow p'$ (contradiciendo el Lema 7.1), por tanto $p' \notin \alpha(p)$. En consecuencia alguna de ellas $\alpha(p)$ u $\omega(p)$ es una órbita cerrada contenida en $\text{Int}\mu$. Esta contradicción prueba que deben existir puntos singulares en $\text{Int}\gamma$. \square

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP el apoyo para la realización de este trabajo, mediante el proyecto de investigación *Aprendizaje de la modelación matemática con ecuaciones diferenciales y en diferencias* (CEGL-EXC12-G), vigente durante el año 2012.

Nota: La contribución de los autores fue similar, los nombres aparecen por orden alfabético de acuerdo a las normas de publicación del libro.

Bibliografía

- [1] T. Apostol, *Análisis Matemático*, 2da. edición, Addison-Wesley, 1971.
- [2] C. Fernández Pérez, F. J. Vázquez Hernández, J. M. Vegas Montaner, *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*, Thomson, 2003.
- [3] F. García Arenas, M. L. Puertas *El teorema de la Curva de Jordan*, Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1 (1998), 43-60.
- [4] A. L. González Pérez, J. E. Poisot Macías, *Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales y el teorema de Poincaré-Bendixson*, tesis de licenciatura, FCFM, BUAP, 2012.
- [5] M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney, *Differential Equations Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*, Second Edition, Elsevier Academic Press, 2004.
- [6] J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Prentice Hall, Inc, 2000.
- [7] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition, Springer, 2001.
- [8] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, 1976.
- [9] J. M. Sotomayor Tello, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 1979.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

lcervant@fcfm.buap.mx
anilu_g_65@hotmail.com
jpoisot@fcfm.buap.mx

Capítulo 4

Complejidad de sucesiones con valores en un conjunto finito

Juan Francisco Estrada García
FCFM-BUAP

Resumen

En este capítulo, siguiendo un escrito de **P. Arnoux** [1], se definirá la complejidad y la entropía de una sucesión, después se definirá sucesión aleatoria. Se mostrará como en ciertos casos se puede calcular explícitamente la complejidad de una sucesión, considerando un sistema dinámico adecuado. También se darán algunos ejemplos en los cuales podemos aplicar lo anterior.

1. Motivación

El estudio de las sucesiones con valores en un conjunto finito A , llamado *alfabeto*, resulta de interés en los siguientes contextos. En la teoría como en la práctica de la información, es necesaria la codificación de la información que se desea transmitir (texto, sonido, imágenes, etc.), cf. [3] Cap. I, y [6] págs. 380 y 625. En el tratamiento de imágenes, el problema consiste en transmitir imágenes $2D$ definidas por $N \times N$ valores, a saber el número de píxeles, cada uno tomado entre p valores posibles, el número de niveles de un cierto color cf. [8] pág. 5. En física o en ingeniería, cuando se estudia la evolución de un sistema en el transcurso del tiempo, cuando sólo se pueden hacer mediciones discretas. En biología, el estudio de los mensajes genéticos de los animales y de las plantas, se remite al estudio del ADN de los cromosomas. El ADN, está constituido por una larga cadena de elementos pertenecientes a cuatro tipos diferentes, que uno puede representar por cuatro letras. La información genética, está contenida en largos mensajes escritos con un alfabeto de cuatro letras cf. [7] pág. 10. En el lanzamiento de una moneda, uno se enfrenta a la incertidumbre total en cuanto al resultado de un lanzamiento, y con el análisis de los juegos llamados de azar, se da lugar al cálculo de probabilidades. Y uno llega a la certidumbre más o menos completa, para una larga sucesión de lanzamientos. El paso de la incertidumbre a la casi-certeza, que se produce si uno observa largas sucesiones de eventos, es un tema esencial en el estudio del azar cf. [2] Cap. I. El conjunto de todas las sucesiones posibles formadas con valores en un conjunto finito, constituye un espacio modelo, donde se

puede desarrollar el estudio de los procesos estocásticos discretos. Un evento, como por ejemplo el hecho de obtener el resultado A (un elemento del *alfabeto*) en el tiempo 0, es representado por el conjunto de todas las sucesiones para las cuales en el lugar 0 aparece A . Todo evento en el cual uno se interese, puede ser asociado igualmente a un subconjunto de sucesiones. Para introducir en este modelo el transcurso del tiempo, se introduce la función *corrimiento*, que a cada sucesión dada, le asocia la sucesión cuyos elementos son los mismos que la sucesión dada, sólo que han sido recorridos en un lugar hacia la izquierda; los resultados sucesivos son los mismos, pero el tiempo presente es avanzado en un lugar. En este contexto, definir la probabilidad de un evento, es definir la medida relativa del conjunto de sucesiones que satisfacen cierta propiedad.

2. Complejidad de una sucesión

Un método bastante general para obtener sucesiones con valores en un conjunto finito consiste en considerar el *sistema dinámico* en un espacio X , generado por la iteración de la transformación continua $T : X \rightarrow X$ y una función que codifica $f : X \rightarrow A$, es decir, una partición finita de X indexada por A , la órbita positiva de $x \in X$ bajo T es $O_+^T(x) = \{T^n(x) | n \in \mathbf{N}\}$; se consideran entonces las sucesiones con término general $f(T^n(x))$ con $n \in \mathbf{N}$, codificación simbólica de la órbita de un punto x bajo la acción de T , [4] pág. 607

Uno se interesa, inicialmente, en evaluar el carácter más o menos aleatorio de una tal sucesión; si uno conoce n símbolos de la sucesión, ¿qué puede uno decir de los siguientes? Un método posible consiste en calcular el número de combinaciones posibles de n símbolos consecutivos. Esto es lo que se llama la *complejidad* de la sucesión; para formalizar esto necesitamos algunas definiciones:

Se llama *palabra* con el alfabeto A a una sucesión finita $W = w_1 \dots w_n$ con valores en A ; se denota por $|W| = n$ la longitud de la palabra y por $|W|_a$ el número de apariciones de la letra a en W . Se dice que una palabra W es un *factor* de la sucesión $u = \{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ si existe un entero k tal que $W = u_k \dots u_{k+n-1}$.

Definición 2.1. *Se llama complejidad de la sucesión u a la función p que, a todo entero n , asocia el número de factores de longitud n en u .*

Es claro que, si el alfabeto A es de cardinal k , $p(n)$ está acotado por k^n ; es fácil de demostrar que, $p(n+m) \leq p(n)p(m)$ ya que una palabra de longitud $n+m$, se puede descomponer en dos palabras de longitud n y m respectivamente, y que $\log(p(n))/n$ admite un límite finito, cuando n tiende al infinito; al cual le llamamos *la entropía* de la sucesión. Una sucesión de entropía $\log k$ contiene todas las palabras posibles; una sucesión de entropía estrictamente positiva, es decir, cuando la complejidad de

la sucesión crece mucho más rápido que n , puede ser considerada como aleatoria y, una sucesión de entropía cero, como no aleatoria.

Lema 2.2. *La complejidad de una sucesión es creciente.*

La demostración es evidente, ya que todo factor de longitud n de u es el inicio de al menos un factor de longitud $n + 1$, y dos factores distintos son el inicio de otros dos factores distintos, hay entonces al menos tantos factores de longitud $n + 1$ como de factores de longitud n .

Las sucesiones periódicas tienen entropía cero, para una tal sucesión, el número de palabras de longitud n está acotado por el período de la sucesión; entonces la complejidad es constante a partir de un cierto rango. Más general, para una sucesión *preperiódica* (periódica a partir de cierto rango) se tiene una caracterización completa de las sucesiones de complejidad acotada:

Lema 2.3. *Las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

1. La sucesión u es preperiódica.
2. La complejidad de u está acotada.
3. Existe un entero n tal que $p(n) = p(n + 1)$ para u .

Demostración: Si la sucesión es periódica de período t a partir del rango n_0 se tiene siempre que $p(n) \leq n_0 + t$. Por tanto, (1) implica (2); que (2) implica (3) es claro, resta demostrar que (3) implica (1).

Si hay tantos factores de longitud n como de $n+1$ cada factor de longitud n es el inicio de un único factor de longitud $n + 1$; es decir, cuando se conocen n letras se conoce la siguiente. Además, como sólo hay un número finito de factores, se reencuentran a lo más $p(n)$ veces un factor ya visto, y la sucesión es entonces periódica a partir de la aparición de ése factor. \square

Se deduce que, al contrario, la complejidad de una sucesión no preperiódica es estrictamente creciente; como $p(1)$ vale al menos 2, si no habría un solo símbolo y la sucesión sería constante, la complejidad de una sucesión no preperiódica verifica $p(n) \geq n + 1$.

Definición 2.4. Se dice que una sucesión es sturmiana, si no es preperiódica y de complejidad minimal $p(n) = n + 1$.

Puesto que $p(1) = 2$, una sucesión sturmiana está definida con un alfabeto de dos letras, que podemos nombrar 0 y 1. Las sucesiones sturmianas son, de alguna forma, las sucesiones no preperiódicas más ordenadas, su entropía es nula.

3. El ejemplo más simple: las sucesiones sturmi- nas

Con frecuencia, los sistemas dinámicos están codificados por dinámicas simbólicas. Por lo cual es conveniente introducir la notación y definición siguiente. Para $k \in \mathbf{N}$ y ≥ 1 . El espacio de todas las sucesiones con valores en el conjunto $\{1, \dots, k\}$ es denotado por $\Sigma_k^+ = \{1, \dots, k\}^{\mathbf{N}}$. En Σ_k^+ se introduce la topología producto. Esta topología está definida por la métrica siguiente:

$$d(\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

La dinámica está dada por el *corrimiento de Bernoulli* $S_k^+ : \Sigma_k^+ \rightarrow \Sigma_k^+$ definido por:

$$S_k^+[\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}] = \{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}, \text{ donde } y_n = x_{n+1}.$$

Las sucesiones sturmiánas poseen numerosas caracterizaciones; combinatorias, dinámicas, aritméticas y geométricas, las cuales pueden resumirse en el resultado siguiente:

Teorema 3.1. *Para una sucesión, u , no preperiódica con un alfabeto de dos letras $\{0, 1\}$, las propiedades siguientes son equivalentes:*

1. (complejidad) *La sucesión u es de complejidad minimal: $p(n) = n + 1$.*
2. (equilibrio) *El número de 0 contenidos en dos factores de la misma longitud, difieren a lo más por 1: si U y V son dos factores de u tales que $|U| = |V|$, entonces $|U|_0 - |V|_0 \leq 1$.*
3. (generación por sustitución y corrimiento) *Existen dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de enteros estrictamente positivos que verifican $a_n \geq b_n$, y una letra $a = 0$ o 1 , tales que, para todo n , la sucesión u empieza por la palabra*

$$S^{b_1} \sigma_1^{a_1 - 1} S^{b_2} \sigma_0^{a_2} S^{b_3} \sigma_1^{a_3} \dots S^{b_{2n}} \sigma_0^{a_{2n}}(a)$$

donde S es la transformación corrimiento y el superíndice de S indica el lugar de aplicación, y σ_0 (σ_1) es la transformación (sustitución) que, a una palabra, asocia la palabra obtenida reemplazando 0 por 0 y 1 por 10 (0 por 01 y 1 por 1).

4. (aritmética) *Existen dos números α, β en el intervalo $[0, 1[$ con α irracional, tales que la sucesión $\{u_n\}$ está definida por $u_n = [(n + 1)\alpha + \beta] - [n\alpha + \beta]$ o $u_n = \lceil (n + 1)\alpha + \beta \rceil - \lceil n\alpha + \beta \rceil$, donde $[x]$ denota el más grande entero inferior o igual a x (parte entera de x), y $\lceil x \rceil$ denota el entero más pequeño superior o igual a x .*

5. (rotación) Existen dos reales α y β en $[0, 1]$, con α irracional, tales que, la sucesión u está dada por la codificación de la órbita de β en el sistema dinámico

$$R_\alpha : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$$

$$x \mapsto x + \alpha$$

mod 1 respecto a la partición $[0, 1 - \alpha[$, $[1 - \alpha, 1[$ (o por la codificación obtenida tomando los intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha).

Observación Las propiedades (4) y (5) son susceptibles de una interpretación simple: si el plano cartesiano es cuadrículado por líneas horizontales y verticales, con coordenadas enteras en las intersecciones con los ejes, con la recta $y = \alpha x + \beta$, se cuenta el número de horizontales que esta recta corta entre dos verticales sucesivas, ese número vale 0 o 1 si $\alpha < 1$, y se obtiene la sucesión u ; bajo esta forma, el sentido de la propiedad de equilibrio es bastante claro (ver Figura 1).

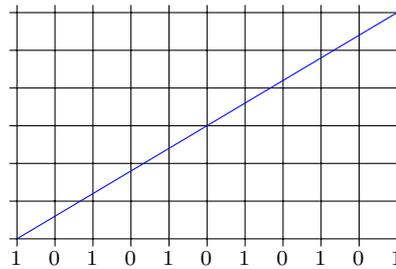


Figura 1

Puede ser más natural considerar, la codificación obtenida, anotando H cada vez que la recta considerada corte una horizontal y anotando V cada vez que ella corte una vertical. Esa codificación se obtiene a partir de la precedente, reemplazando 0 por V y 1 por HV ; se puede demostrar que la sucesión obtenida es aún sturmiana, como imagen de una sucesión sturmiana, utilizando una “buena” sustitución.

Se puede también demostrar que esta sucesión está directamente asociada con la rotación de ángulo $\alpha/(1 + \alpha)$. Denotemos por L_n la línea quebrada (“escalera”) que une los puntos de la forma $(k, n - k)$ y los puntos de la forma $(k, n + 1 - k)$, para $k \in \mathbb{Z}$, por segmentos horizontales y verticales; una recta de pendiente α corta una y sola una vez cada línea quebrada L_n , y la codificación queda determinada por el hecho de que ésta corta L_n en un segmento horizontal o vertical. Denotemos por D la recta $x + y = 0$, y busquemos la codificación asociada a la semirecta que sale de un punto p de D ; para encontrar el n -ésimo término de la sucesión se proyecta L_n sobre D paralelamente a la dirección $(1, \alpha)$, lo cual da un adoquinado periódico de D en dos tipos de intervalos, de longitudes respectivas $1/(1 + \alpha)$ y $\alpha/(1 + \alpha)$ (si

tomamos el vector $(-1, 1)$ como base); el tipo de intervalo al cual pertenece p da el término buscado de la sucesión. Si se recorre el punto p utilizando el vector $(-1, 1)$ se reencuentra la misma codificación; uno puede entonces formar el cociente de D con el grupo de traslaciones para encontrarse a una circunferencia con una partición de dos intervalos, en el dibujo se muestra que la partición obtenida a partir de L_{n+1} se deduce de la partición obtenida de L_n por una rotación de $\alpha/(1+\alpha)$, de donde se obtiene el resultado buscado (ver Figura 2).

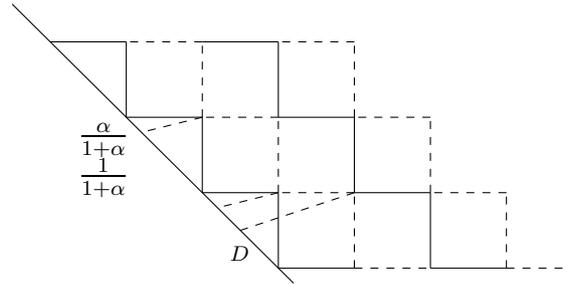


Figura 2

Otra forma de obtener esta sucesión es jugando al billar en un cuadrado, partiendo en la dirección $(1, \alpha)$ y anotando H (resp. V) cada vez que se toca un lado horizontal (resp. vertical).

Idea de la Demostración. Las propiedades (i) y (ii) son combinatorias, así que la prueba de su equivalencia también es combinatoria. Una forma de trabajar es considerando el árbol asociado con la construcción de todas las sucesiones posibles, en este caso obtenemos un árbol diádico. Para valores pequeños de n se puede verificar fácilmente la afirmación. Para valores grandes de n también es posible argumentar en términos de este árbol, pero ya no es tan sencillo.

Las propiedades (iv) y (v) son claramente equivalentes: (iv) no es más que la escritura explícita de la codificación dada por (v). Nótese en particular que, utilizar la función $[x]$ (respect. $\lceil x \rceil$) en (iv) es como tomar los intervalos cerrados por la izquierda (respect. por la derecha) en (v); de hecho, las sucesiones obtenidas por una u otra codificación son las mismas salvo por un número numerable de valores de β (de la forma $p - n\alpha$), donde ellas difieren en dos posiciones.

Es fácil de demostrar que toda sucesión obtenida por la codificación de una rotación es de complejidad minimal, se darán dos pruebas. Para demostrar que la sucesión $[(n+1)\alpha + \beta] - [n\alpha + \beta]$ es sturmiana, uno puede utilizar la propiedad de equilibrio: el número de 1 que aparecen entre u_k y u_{k+n-1} por construcción es igual a $[(k+n)\alpha + \beta] - [k\alpha + \beta]$, y es claro que, para n fijo, ése número sólo puede tomar a lo más dos valores distintos después de n . Se puede también estudiar directamente

la complejidad y la prueba siguiente es más susceptible de generalización.

Necesitamos algunas notaciones. Para α irracional fijo, se denota por R_α a la rotación de ángulo α sobre la circunferencia identificada al intervalo $[0, 1]$; se denota por P a la partición en los dos intervalos $I_0 = [0, 1 - \alpha[$ e $I_1 = [1 - \alpha, 1[$. La transformación f que codifica está dada por $f(x) = 0$ (respect. 1) si $x \in I_0$ (respect. I_1), y se busca la complejidad de la sucesión $u(\beta) = (f(R_\alpha^n \beta))_{n \in \mathbb{N}}$.

Como un factor de $u(\beta)$ que aparece en la posición k es un factor inicial de $u(\beta + k\alpha)$: en vez de buscar todos los factores de β de longitud n , con β fija, uno puede buscar el factor inicial de todas las sucesiones $u(x)$.

La primer letra de $u(x)$ está determinada por la posición de x respecto a la partición P ; la segunda letra está determinada por la posición de $R_\alpha x$, respecto a P , o de la posición de x respecto a $R_\alpha^{-1}P$. Ciertamente, se tiene que $u_1(x) = 0$ si y sólo si $R_\alpha x \in I_0$, o $x \in R_\alpha^{-1}I_0$. Para conocer el factor inicial de $u(x)$ hay que localizar a x respecto a las particiones $P, R_\alpha^{-\infty}P, \dots, R_\alpha^{-\infty}R_\alpha^{+\infty}P$, y por tanto, hay tantos factores iniciales posibles como de conjuntos en la intersección $P \wedge R_\alpha^{-\infty}P \wedge \dots \wedge R_\alpha^{-\infty}R_\alpha^{+\infty}P$ de éstas particiones.

Un cálculo inmediato demuestra que la partición $R_\alpha^{-k}P$ está constituida por dos intervalos $[-k\alpha, 1 - (k + 1)\alpha[$ y $[1 - (k + 1)\alpha, 1 - k\alpha[$ (no olvidar que estos cálculos se hacen módulo 1, véase figura 3); la intersección de las primeras n iteradas inversas de la partición P estan dadas entonces por $n + 1$ puntos, y la partición obtenida tiene entonces $n + 1$ elementos. Así, se ha demostrado que hay $n + 1$ factores iniciales posibles de longitud n y, en consecuencia, a lo más $n + 1$ factores posibles para $u(\beta)$. Teniendo en cuenta el hecho de que la sucesión $u(\beta)$ no es preperiódica, entonces ella es de complejidad $n + 1$. Utilizando el hecho de que la órbita de un punto para una rotación irracional sobre la circunferencia es densa, uno podría demostrar directamente que todos los factores iniciales posibles son factores de $u(\beta)$.

La demostración de la afirmación recíproca; toda sucesión de complejidad minimal puede ser obtenida por la codificación de una rotación es difícil, para lo cual es necesario utilizar la propiedad (iii), la cual es la más complicada de interpretar.

Lo que es simple de demostrar es que toda sucesión sturmiana puede reescribirse por medio de σ_0 o σ_1 ; en efecto, ya que $p(2) = 3$, sólo hay tres factores de longitud 2; o, ya que la sucesión no es periódica, ella no es constante, en consecuencia las dos letras 0 y 1 aparecen una infinidad de veces, así que las dos palabras 01 y 10 también; por tanto uno de los dos factores 00 o 11 no aparece. Supongamos que sea 11; entonces todo 1 es seguido de un 0, y se puede recodificar la sucesión utilizando 0 y 10; es decir, existe una única sucesión v tal que $u = \sigma_0(v)$. Sería suficiente entonces

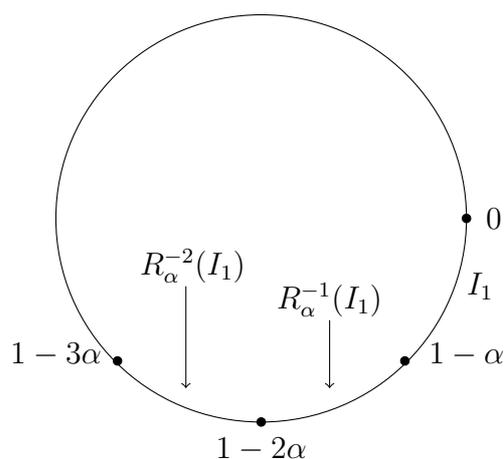


Figura 3

que v sea sturmiana, para poder iterar y obtener u como resultado de una sucesión infinita de recodificaciones.

Existe desgraciadamente un problema técnico: en general, la sucesión v no es sturmiana, pero la sucesión Sv si lo es, es decir, v privada de su primer término; en efecto, si u comienza por un 0 uno no puede saber directamente si éste debe ser considerado, para la recodificación, como la palabra 0 o como la segunda letra de la palabra 10. Sin embargo, se puede demostrar que u siempre se puede escribir bajo la forma $\sigma_0(v)$ o $S\sigma_0(v)$, donde v es una sucesión sturmiana; es aquí donde interviene la transformación S de corrimiento.

Ya que toda sucesión de codificación de una rotación es sturmiana, ella se puede recodificar de ésta forma y, se puede entonces, interpretar la sucesión $\{a_n\}$: la cual, no es otra cosa que el desarrollo en fracción continua del número α ; la sucesión $\{b_n\}$ es asociada, de forma más compleja, al número β . Es entonces bastante simple probar que toda sucesión sturmiana es una sucesión de rotación, ya que entonces es suficiente tomar las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dadas por la propiedad (iii), construir los números reales α y β , y demostrar que la codificación asociada resulta ser la sucesión buscada. La propiedad (iii) da, de hecho, una interpretación combinatoria del desarrollo en fracción continua del número α ; en el caso donde ése desarrollo es periódico, la sucesión puede tomar una forma muy simple.

En particular, si se considera $a_n = 1$, $b_n = 0$, $a = 0$ o 1 , se obtienen las dos codificaciones posibles para la órbita, de la rotación de ángulo $(\sqrt{5} - 1)/2$, del punto $(3 - \sqrt{5})/2$. A la cual se le encuentra entonces partiendo de una de las dos letras, reemplazando 0 (respect. 1) por 01 (respect. 101) e iterando. Se puede demostrar

que la órbita de $(\sqrt{5} - 1)/2$ para la misma rotación está dada por la iteración de la sustitución llamada de *Fibonacci*, $1 \mapsto 10$, $0 \mapsto 1$; la palabra infinita obtenida, llamada *palabra de Fibonacci*, es la sucesión sturmiana más fácil de explicitar. \square

4. Sucesiones generadas por sistemas dinámicos

Se puede, de hecho, generalizar la demostración anterior. Consideremos como al inicio, un sistema dinámico generado por una transformación $T : X \rightarrow X$, una partición $P = \{X_1, \dots, X_m\}$ de X indexada por el alfabeto $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ y la función asociada f que codifica. Asociamos a cada punto la sucesión $\{a_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ de acuerdo a los subíndices de los elementos de la partición por los cuales ella pasa en el transcurso de la dinámica. Es decir:

$$\text{Si } T^j(x) \in X_i \text{ para } j \in \mathbf{N} \cup \{0\} \text{ con } 1 \leq i \leq n \text{ entonces } f(T^j(x)) = a_i.$$

Así que uno se interesa en las observaciones que pueden tomar sólo un número finito de valores. Cada elemento de la partición contiene entonces todos los puntos que proveen el mismo valor en la observación codificada por f . Nótese que este método se acopla bien a la operación de medida en física e ingeniería: medir es un proceso que en general no se puede hacer con precisión infinita, la única información que uno obtiene concierne con la presencia del objeto de estudio en una región del espacio de posiciones posibles.

Hasta ahora nada nos indica que todas las sucesiones posibles correspondan efectivamente a la historia de un punto del espacio original. No sabemos si ese modo de representación caracteriza las órbitas de los puntos: puede llegar a suceder que a puntos distintos corresponda la misma historia. El problema importante consiste entonces en determinar si el conjunto de sucesiones provisto de la función corrimiento da una parte substancial, o eventualmente la totalidad, de la información sobre la dinámica original. De hecho, no todas las particiones del espacio X tienen el mismo interés. Uno se concentra sobre aquellas que son denominadas *generatrices*, las cuales tienen la propiedad de que para dos puntos distintos se tienen imágenes distintas bajo T , a saber de historias distintas. Saber determinar si existe, para un sistema dinámico dado, particiones generatrices, se convierte entonces en un problema importante. Resulta que la entropía permite establecer la existencia de particiones generatrices. Un teorema publicado por Krieger en 1969 muestra que es suficiente, para tal efecto, que la entropía sea finita y que los puntos periódicos del sistema sean de medida cero, lo cual se cumple para los ejemplos siguientes

Denotamos por $u(x) = \{f(T^n x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ a la sucesión dada por la codificación de la órbita de x ; de acuerdo a lo anterior es claro que un factor de $u(x)$ que aparece en

la posición k es el factor inicial de $u(T^k(x))$. El problema es, entonces, reconstituir a partir de medidas intrínsecamente imprecisas y parciales informaciones concernientes a la dinámica misma, con una precisión que una medida individual no lo permite.

Por otra parte, la letra de orden k de $u(x)$ da la posición de x respecto a la partición $T^{-k}P = \{T^{-k}A_1, \dots, T^{-k}A_m\}$ y, de acuerdo a lo anterior, para conocer la cantidad de factores iniciales de longitud n es suficiente contar los átomos (componentes conexas) en la intersección $P \wedge T^{-1}P \wedge \dots \wedge T^{-n+1}P$. Es claro también que un factor de $u(x)$, que aparece en la posición k , es factor inicial de $u(T^k(x))$. En resumen tenemos:

Proposición 4.1. *Sea $u(x)$ la sucesión dada por la codificación de la órbita de x respecto al sistema $T : X \rightarrow X$ respecto a la partición P ; la complejidad de orden n de u , está mayorada por el número de átomos de la intersección $P \wedge T^{-1}P \wedge \dots \wedge T^{-n+1}P$*

En el caso general es imposible mejorar el resultado, por dos razones: por una parte, la órbita de x puede evitar grandes regiones de X (por ejemplo, si la órbita de x es periódica) y las palabras iniciales correspondientes no aparecerán como factores de $u(x)$; por otra parte, la región asociada a una palabra inicial puede ser muy pequeña, es decir, que se reduzca a un número finito de puntos y, en tal caso, la palabra correspondiente no aparecerá en la mayor parte de las órbitas.

En el caso de un sistema dinámico topológico, es decir X es un espacio topológico y T continua, se pueden dar condiciones que evitan tales fenómenos y, se tiene:

Proposición 4.2. *Sea X un espacio métrico compacto y T un homeomorfismo de X . Sea $P = \{X_a : a \in A\}$ una partición de X que verifique la condición siguiente: (*) Para toda sucesión finita a_0, a_1, \dots, a_{n-1} el conjunto $X_{a_0} \cap T^{-1}X_{a_1} \cap \dots \cap T^{-n+1}X_{a_{n-1}}$ es vacía o de interior vacía.*

Entonces, si x es un punto de órbita $O_+^T(x)$ densa en X , la complejidad de la sucesión $u(x)$ es igual al número de átomos de las particiones $P \wedge T^{-1}P \wedge \dots \wedge T^{-n+1}P$.

Demostración. En efecto, toda palabra inicial corresponde a un conjunto que contiene un abierto; por la densidad de la órbita de x esa palabra inicial es un factor de x . \square

Hay un caso en el que se verifica fácilmente la condición sobre x : se denota por $\omega_T(x)$ el conjunto de los puntos de acumulación de la sucesión $O_+^T(x)$. Si $x \in \omega_T(x)$ se dice que x es **recurrente**. Si $\omega_T(x) = X$ se dice que x es de órbita densa. Si todo punto de X es de órbita densa, se dice que T es **minimal**, lo cual equivale a que X no admite subconjunto cerrado invariante, es decir, para todo subconjunto cerrado $E \subset X$ no se satisface $T(E) \subset E$; en tal caso, se tiene el resultado siguiente:

Teorema 4.3. *Sea $T : X \rightarrow X$ un sistema dinámico minimal y P una partición de X que verifica la condición (*) de la proposición precedente; entonces, para todo punto x , la complejidad de la sucesión $u(x)$ es igual al número de átomos de las particiones $P \wedge T^{-1}P \wedge \dots \wedge T^{-n+1}P$; en particular, todas las sucesiones codificadas tienen la misma complejidad (de hecho, los mismos factores).*

Uno de los ejemplos más conocidos en donde se tiene minimalidad es para las rotaciones de ángulo irracional sobre una circunferencia.

Proposición 4.4. *Sea S la circunferencia unitaria en \mathbf{C} . Si $\alpha \in S$, se define $R_\alpha : S \rightarrow S$ por $R_\alpha(z) = \alpha z$. Si $\arg(\alpha) \in 2\pi\mathbf{Q}$, todas las órbitas de R_α son periódicas del mismo período. Si $\arg(\alpha) \notin 2\pi\mathbf{Q}$, entonces R_α es minimal.*

Demostración. Se tiene $R_\alpha^n = R_{\alpha^n}$ así que se sigue el resultado en el caso cuando $\arg(\alpha) \in \mathbf{Q}$. En el caso cuando $\arg \notin 2\pi\mathbf{Q}$, definimos $\beta = \arg(\alpha)/2\pi \notin \mathbf{Q}$. El subgrupo aditivo de \mathbf{R} generado por 1 y β es denso en \mathbf{R} . Sea $z \in S$ y $x \in \mathbf{R}$ tal que $z = e^{2i\pi x}$. Podemos encontrar sucesiones de enteros $\{n_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ y $\{p_j\}_{j \in \mathbf{N}}$, tales que $x = \lim_{j \rightarrow \infty} n_j\beta + p_j$ entonces $z = \lim_{j \rightarrow \infty} e^{2i\pi(n_j\beta + p_j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha^{n_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} R_\alpha^{n_j}(1)$. En consecuencia la órbita de 1 es densa. Así que para todo $z \in S$, se tiene $R_\alpha^n(z) = \alpha^n z = z R_\alpha^n(1)$, lo cual demuestra la densidad de las otras órbitas. \square

En lo que sigue se expondrán algunas aplicaciones del teorema anterior. Para cierto tipo de sucesiones se dará un sistema dinámico asociado, se demostrará que es minimal y se calcularán por medio de métodos geométricos el número de átomos de la partición asociada.

5. Otro ejemplo: las diferencias segundas de la sucesión $[n^2\alpha]$

Se vió anteriormente que una sucesión sturmiana puede ser obtenida como sucesión de diferencia de términos consecutivos de la sucesión de valores enteros $[n\alpha + \beta]$. Se puede tratar de generalizar esto, considerando la sucesión definida por $w_n = [n^2\alpha]$, con α irracional. Para obtener una sucesión con valores en un alfabeto finito esta vez hay que tomar la sucesión u de diferencias segundas, dada por $u_n = w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n$. Esta sucesión no está asociada a una rotación, pero se le puede también obtener como sucesión de codificación de un sistema dinámico. Para tal efecto, se dará una transformación T del toro $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ en sí mismo y una función f sobre \mathbf{T}^2 , que toma sólo un número finito de valores, y de forma que se tenga $u_n = f(T^n(0,0))$. El procedimiento es como sigue: para encontrar f y T se escribe $[n^2\alpha]$ como una sucesión recurrente (los primeros k términos son dados y, cada término subsiguiente de la sucesión se expresa en función de sus precedentes); considerando la transformación

afín A definida por $A(x, y) = (x + y + \alpha, y + 2\alpha)$ se verifica de manera inmediata que $A^n(0, 0) = (x_n, y_n) = (n\alpha, n^2\alpha)$. Se puede entonces escribir a u_n en función de x_n y y_n , ya que por definición tenemos:

$$\begin{aligned} u_n &= w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n \\ &= [x_{n+2}] - 2[x_{n+1} + [x_n]] \\ &= [x_n + 2y_n + 4\alpha] - 2[x_n + y_n + \alpha] + [x_n]. \end{aligned}$$

Así que podemos escribir $u_n = f(x_n, y_n)$, con $f(x, y) = [x + 2y + 4\alpha] - 2[x + y + \alpha] + [x]$; se verifica de manera inmediata que f es \mathbf{Z}^2 -periódica, en consecuencia, puede ser considerada como una transformación definida sobre el toro \mathbf{T}^2 , con lo cual, A está asociada con una matriz de $SL(2, \mathbf{Z})$, pasa al cociente como una transformación afín T de \mathbf{T}^2 . El siguiente diagrama conmutativo explica lo anterior.

Se denota por $\pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ la proyección sobre las clases. Se considera a \mathbf{R}^2 con la estructura euclidiana canónica que determina su topología. El toro \mathbf{T}^2 es provisto de la *topología cociente* correspondiente, para la cual π es continua.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{T}^2 & \xrightarrow{T} & \mathbf{T}^2 \end{array}$$

donde $\pi \circ A = f \circ \pi$

Se sabe que T es lo que se llama un producto cruzado encima de una rotación y que es minimal si α es irracional; lo cual se sigue de los trabajos de Furstenberg. De hecho, no se demuestra que toda órbita es densa, sino una propiedad más fuerte: toda órbita es equidistribuida sobre el toro \mathbf{T}^2 (cf. [9]). Estamos entonces en la posibilidad de aplicar el teorema precedente; sólo falta demostrar que P satisface la propiedad (*) y calcular el número de átomos.

Pero según la escritura de f los interiores de los átomos de la partición P son las células de la descomposición celular de \mathbf{T}^2 engendrada por las tres circunferencias $x = 0$, $x + y + \alpha = 0$ y $x + 2y + 4\alpha = 0$, es decir, las cuatro componentes conexas entre las rectas $x + 2y + 4\alpha = 0$ y $x + 2y + 4\alpha = 2$ determinadas por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $x + y + \alpha = 0$ y $x + 2y + 4\alpha = 1$ (cf. figura 4); un cálculo directo muestra que la partición $T^{-n}P$ está engendrada igualmente por las circunferencias $H_k = T^{-k}H_0$ con ecuación $x + ky + k^2\alpha = 0$, con $n \leq k \leq n + 2$.

Esas células son polígonos con un número finito de lados; para que la condición (*) no se satisfaga se necesitaría una coincidencia de vértices entre algunas de esas células y que al menos 3 de las circunferencias H_k tengan una intersección no vacía, lo cual es imposible por la irracionalidad de α . Se puede entonces calcular efectivamente la complejidad; tenemos una descomposición celular del toro, dada por un número finito de circunferencias, de la cual queremos conocer el número F_n de caras. Puesto que

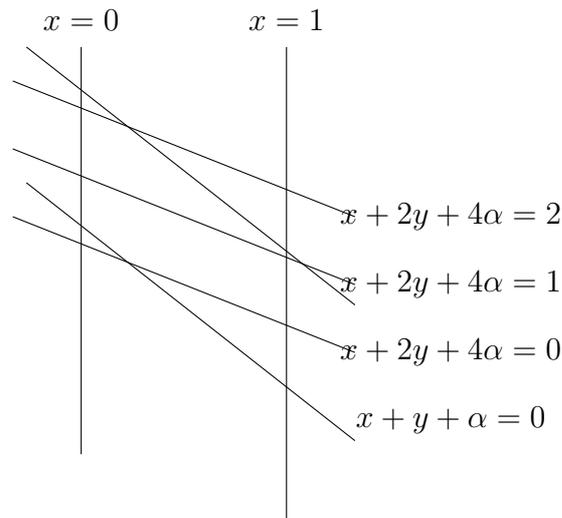


Figura 4: Los 4 átomos de P

cada arista tiene dos vértices y que todo vértice, perteneciente a dos circunferencias, delimita 4 aristas, los números S_n de vértices y A_n de aristas verifican $A_n = 2S_n$. Teniendo en cuenta la fórmula de Euler sobre el toro, $S - A + F = 0$, se deduce que hay tantas caras como vértices. Lo cual nos lleva a calcular el número de puntos de intersección de H_j y H_k , o de otra forma, efectuando la acción de T^j sobre H_k , y calcular los puntos de intersección entre H_0 y H_{k-j} , que vale $|k - j|$. Efectuando la suma sobre todas las parejas de hiperplanos se obtiene:

$$p(n) = \sum_{0 \leq j < k \leq n+1} (k - j) = (n + 1)(n + 2)(n + 3)/6.$$

De lo cual se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 5.1. *La complejidad de la sucesión, u , de las diferencias segundas de $[n^2\alpha]$ está dada por:*

$$p(n) = (n + 1)(n + 2)(n + 3)/6.$$

En particular, al igual que para las sucesiones sturmianas, la complejidad no depende del valor de α .

Nota. Desde un punto de vista riguroso no se contaron el número de átomos de la intersección $P \wedge T^{-1}P \wedge \dots \wedge T^{-n+1}P$, sino el número de componentes conexas de esos átomos; habría que demostrar que esos átomos son conexos, lo cual se deja al

lector.

Estos argumentos se generalizan a sucesiones que se obtienen a partir de polinomios de grado arbitrario; recuérdese que, si w es una sucesión valuada en los reales, la sucesión $v = \Delta w$ de las diferencias esta definida por: $v_n = w_{n+1} - w_n$. El resultado precedente es un caso particular del siguiente teorema:

Teorema 5.2. *Sea Q un polinomio de grado d con coeficientes reales, donde el coeficiente dominante es irracional; la sucesión $\{\Delta^d([Q(n)])\}_{n \in \mathbf{N}}$ toma sólo un número finito de valores, su complejidad depende sólo de d y está dada por la fórmula:*

$$p(n) = \frac{1}{V(0, 1, \dots, d-1)} \sum_{0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_d \leq n+d-1} V(k_d, \dots, k_1)$$

donde $V(k_d, \dots, k_1) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (k_j - k_i)$ es el determinante de Vandermonde asociado a $\{k_d, \dots, k_1\}$.

6. Otro ejemplo: las sucesiones del billar cúbico

En lugar de generalizar la definición aritmética de las sucesiones sturmianas, uno puede considerar la definición geométrica: en el billar cúbico el sistema está formado por un punto en movimiento al interior de un cubo, sin fuerzas exteriores, con reflexiones elásticas sobre las paredes o caras del cubo.

Se codifica cada una de las trayectorias del punto por la sucesión de caras que este encuentra en su movimiento. No se hace diferencia entre las caras paralelas, así que se denota por 0, 1 y 2 los tres tipos de caras. A toda trayectoria se le asocia así una palabra infinita sobre el alfabeto $\{0, 1, 2\}$. Se tiene el resultado siguiente:

Teorema 6.1. *La complejidad de una trayectoria de pendiente (α, β, γ) , donde α, β y γ son racionalmente independientes, es igual a $n^2 + n + 1$.*

Idea de la demostración. Para simplificar los cálculos se supondrá que α, β, γ son tres reales racionalmente independientes en el conjunto que satisface: $\alpha + \beta + \gamma = 1$. La primera etapa es hacer notar que, de manera análoga al estudio de las sucesiones sturmianas, es equivalente estudiar el billar cúbico al estudio de una recta de pendiente irracional en \mathbf{R}^3 y sus intersecciones con los planos $x = n, y = n, z = n$ para todo entero n .

Se procede entonces de forma análoga al estudio hecho para la recta de pendiente irracional en el plano: Si definimos la altura del punto (a, b, c) como el número $a+b+c$, llamaremos a \sum_n la “superficie plegada” que une los puntos de altura $n, n+1, n+2$

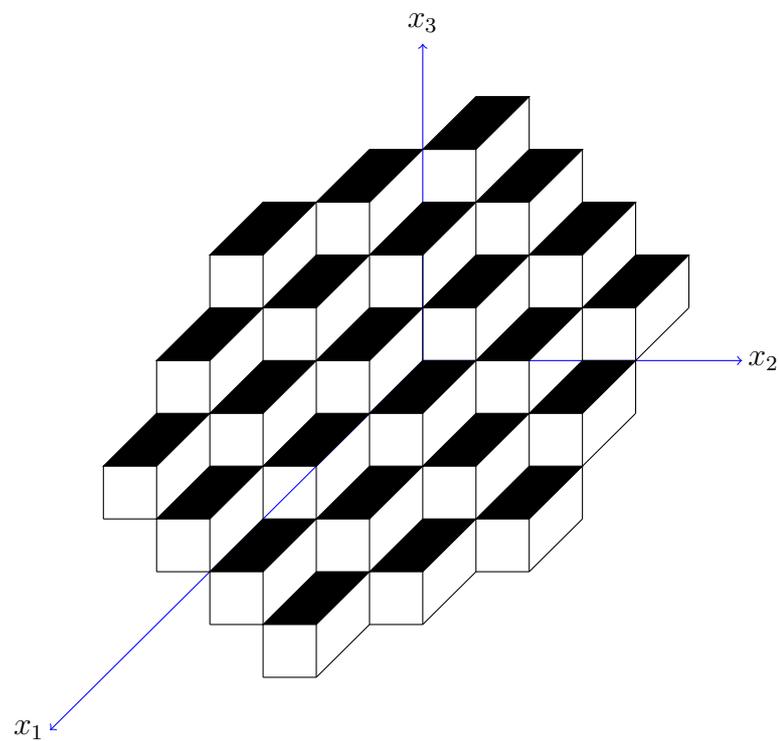


Figura 5: Figura en escalera

(véase Figura 5). La recta considerada corta cada superficie plegada una sola vez en una de sus tres tipos de caras.

Sí proyectamos la superficie plegada sobre el plano diagonal $x + y + z = 0$ se obtiene un mosaico periódico de ese plano; un cálculo simple muestra que se pasa del mosaico proyectado de \sum_n al mosaico proyectado \sum_{n+1} por una traslación dada por el vector $(1 - \alpha, -\beta, -\gamma)$ que es proyección sobre el plano diagonal del vector $(1, 0, 0)$ (se podría proyectar otro de los tres vectores básicos, ya que la diferencia entre esas tres proyecciones pertenecen al grupo de traslación del mosaico); haciendo cociente con el grupo del mosaico uno es conducido a estudiar una traslación del toro \mathbf{T}^2 codificada respecto a una partición en tres cuadriláteros. Un teorema de Kronecker nos asegura que una traslación irracional del toro es minimal, el cual es una generalización del resultado dado anteriormente para circunferencias.

Entonces hay que, como anteriormente, mostrar que la partición considerada satisface la condición (*), lo cual viene de la hipótesis de irracionalidad, después demostrar que los átomos de la intersección de las particiones iteradas son conexas y uno es conducido a un problema de conteo.

La partición interseccionada de orden n viene de una triangulación del toro con S_n puntos, A_n aristas y F_n caras que satisfacen la fórmula de Euler $S_n - A_n + F_n = 0$. La partición de orden 1, que es la proyección de un cubo en perspectiva, tiene 3 puntos, 6 aristas y 3 caras, que corresponden a las tres letras de la codificación. Se pasa de la partición de orden n a la partición de orden $n + 1$ agregando 3 segmentos y un punto (proyección de un cubo de altura más grande que los precedentes); pero esos tres segmentos recortan las aristas ya existentes. Se demuestra que los segmentos agregados en la etapa n recortan los segmentos agregados en la etapa i en 2 puntos si $i < n - 1$ y en 0 puntos si $i = n - 1$ (más exactamente, en el caso que ellos recorten esos segmentos en su extremidad, lo cual no agrega nuevos puntos). Se tiene por tanto $S_{n+1} = S_n + 2n + 1$ y $S_n = n^2 + 2$. Se demuestra igualmente que $A_{n+1} = A_n + 4n + 3$ y $A_n = 2n^2 + n + 3$, de lo cual se deduce el resultado buscado. \square

Bibliografía

- [1] *P. Arnoux*. Complexité de suites dans un ensemble fini, Aspects des systèmes dynamiques, Centre de Mathématiques École Polytechnique U.R.A. 169 du C.N.R.S. 19-33 (1994).
- [2] *L. Breiman*. Probability and Stochastic Processes, Houghton Mifflin Company-Boston (1969).
- [3] *P. Billingsley*. Ergodic theory and information, John Wiley & Sons, Inc., NY, 1965.
- [4] *G. A Hedlund*. Sturmian minimal sets, Amer. J. Math. 66 (1944) 605-620.

- [5] *G. A. Hedlund, M. Morse*. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories, Amer. J. Math. 62 (1940), 1-42.
- [6] *C. E. Shannon*. A Mathematical Theory of Comunication, The Bell Systems Technical Journal, Vol. 27, pp. 379-433, 623-656 de Julio y Octubre de 1948.
- [7] *P. Russell*. Genetics. N.Y. Benjamin Cummings (2001) ISBN 0-805-34553-1.
- [8] *R. de Vore, B. Jawerth and V. Popov*. Image compression through wavelet transform coding, IEE Transactions on Information Theory, 38, 1992, 719-747.
- [9] *H. Furstenberg*. Strict ergodicity and transformation of the torus, Amer. J. Math. 83 (1961), 573-601.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

festrada@fcfm.buap.mx

Lógica Matemática

Capítulo 5

Una inmersión del cálculo proposicional intuicionista a la lógica modal $S4$

José Arrazola Ramírez, Iván Martínez Ruiz, Miguel Pérez Gaspar, Rubén Vélez Salazar

FCFM-BUAP

Resumen

Estudiamos a las Lógicas Modales, para ello listamos algunos axiomas conocidos y a partir de estos axiomas enunciarnos algunos sistemas lógicos, como lo es $S4$. Se establecen las Semánticas de Kripke para la Lógica Modal y se exponen algunas propiedades importantes. Se concluye el Capítulo estableciendo la traslación de Gödel T y se demuestra que es un encaje de CPI en $S4$.

1. Introducción

Se considera que el inicio de la lógica modal como una disciplina matemática se da en 1918, el año en el que C. I. Lewis publica “Survey of Symbolic Logic”. Ciertamente Lewis no fue el primero en considerar el razonamiento modal, tampoco en construir sistemas simbólicos con este propósito. Parece que el primero en hacer esto fue Hugh MacColl, él exploró las consecuencias de enriquecer la Lógica Proposicional Clásica con operadores ϵ (“es cierto que”) y η (“es imposible que”), sin embargo su trabajo se desvió debido a la tradición algebraica que imperaba en el siglo XIX. Lewis creó las lógicas $S1$ - $S5$ de las cuales $S4$ y $S5$ se han convertido en las más conocidas entre las lógicas modales, también introdujo estas nuevas lógicas creando todo un sistema axiomático con nuevos conectivos. Después de Lewis, Gödel mostró que $S4$ se puede axiomatizar simplemente enriqueciendo la Lógica Proposicional Clásica. Hasta antes de 1960 Parry, McKinsey y Tarski continuaron con este trabajo desarrollando la sintaxis de la lógica modal, pero hasta ese momento no se tenía una semántica aceptable. Carnap fue pionero en emplear la lógica modal para la descripción de estados, aproximándose así a la semántica relacional de la lógica modal. Jonsson y Tarski trabajaron sobre las álgebras modales. Además crearon toda una teoría de construcción de modelos lo cual dio herramientas para probar los resultados de completitud que dominaron la siguiente etapa del desarrollo de la lógica modal conocida como la era clásica. Aproximadamente en 1962 es cuando Kripke encuentra la conexión

entre las semánticas relacionales y el trabajo realizado por Tarski, renaciendo así la lógica modal. Durante esa misma década también Lemmon y Scott mostraron cómo explotar los modelos canónicos.

Para la siguiente década destacan los trabajos de Sergerberg, Thomason y Goldblatt, en esta etapa se relacionaron firmemente los lenguajes modales con la teoría clásica de modelos.

2. Sintaxis

Esta sección está fuertemente apoyada en [1], [2], [4] y [6].

La lógica modal está diseñada para formalizar el comportamiento deductivo de la necesidad y posibilidad. Tiene los siguientes símbolos primitivos.

1. Una colección numerable de variables proposicionales (p, q, p_1, q_1, \dots) .
2. Los conectivos Booleanos \neg y \wedge .
3. El conectivo Modal \Box (necesidad).
4. Paréntesis $(,)$.

La clase Φ de todas las fórmulas bien formadas (wff) es definido por las tres reglas de formación:

1. Cada variable es una fórmula bien formada.
2. Si α es una fórmula bien formada, también lo son $\neg\alpha$ y $\Box\alpha$.
3. Si α y β son fórmulas bien formadas, también lo es $\alpha \wedge \beta$.

Consideramos las abreviaciones:

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &:= \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta). \\ \alpha \rightarrow \beta &:= \neg\alpha \vee \beta. \\ \alpha \leftrightarrow \beta &:= (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha). \\ \diamond\alpha &:= \neg\Box\neg\alpha.\end{aligned}$$

Definición 2.1. Una lógica modal es un conjunto $\Lambda \subseteq \Phi$ que satisface:

1. Λ contiene todas las tautologías del cálculo proposicional clásico.
2. Si $\alpha, (\alpha \rightarrow \beta) \in \Lambda$, entonces $\beta \in \Lambda$ (Modus Ponens).

3. Si $\alpha \in \Lambda$ y β , se obtiene de α al reemplazar uniformemente alguna variable por otra fórmula bien formada, entonces $\beta \in \Lambda$ (Sustitución Uniforme).

El símbolo K (de Kripke) denota la lógica axiomática por el sistema que tiene una base estándar para cálculo proposicional clásico (incluyendo MP y sustitución uniforme como reglas de inferencia) junto con el axioma

$$K. \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

y la regla de necesidad de α inferir $\Box\alpha$.

3. Axiomas

Cuáles deben ser los axiomas de la lógica modal es algo muy debatido. Diferentes conjuntos de axiomas posiblemente permiten demostrar diferentes teoremas, por ende los axiomas que se eligen muchas veces dependen de los teoremas que se quieren demostrar. La siguiente es una lista de algunos de los axiomas más conocidos:

| Nombre | Axioma |
|--------|---|
| K | $\Box(\alpha \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\psi)$. |
| T | $\Box\alpha \rightarrow \alpha$. |
| 4 | $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$. |
| 5 | $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$. |
| B | $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$. |

Diferentes combinaciones de axiomas dan lugar a diferentes sistemas de lógica modal. El sistema K (llamado así en honor a Saul Kripke) es el que menos axiomas utiliza: aparte de los axiomas de la lógica proposicional, el sistema K se sirve sólo del axioma K (no confundir el axioma con el sistema). Por esta misma razón, sin embargo, el sistema K también es el más débil de los sistemas, es decir, el que menos teoremas puede demostrar. Sistemas más fuertes se construyen agregando axiomas a K. Para detalles vea [1] y [3]. A continuación hay una tabla con los nombres de los sistemas más conocidos y sus axiomas:

| Sistema | Axiomas |
|---------|----------|
| K | K. |
| T | K, T. |
| S4 | K, T, 4. |
| S5 | K, T, 5. |
| B | K, T, B. |

4. Lógicas normales

Definición 4.1. Una lógica es normal si y sólo si K es cerrado bajo necesidad.

Si Γ es un conjunto de fórmulas bien formadas, $K\Gamma$ denota la lógica normal generada al agregar los miembros de Γ como axiomas adicionales al sistema que genera K .

Definición 4.2. Sea Λ una lógica modal, $\Gamma \subseteq \Phi$ y $\alpha \in \Phi$. Entonces

1. α es Λ -derivable de Γ , $\Gamma \vdash_{\Lambda} \alpha$ si y sólo si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$ tales que $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \alpha) \in \Lambda$.
2. Γ es Λ -consistente si existe al menos un *wff* no Λ -derivable de Γ , y es Λ -inconsistente en otro caso.
3. Γ es Λ -maximal si y sólo si Γ es Λ -consistente y para cada *wff* α , o bien $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$.

Denotamos por W_{Λ} a la clase de subconjuntos Λ -maximales de Φ . Para cada $\alpha \in \Phi$, $|\alpha|_{\Lambda} = \{x \in W : \alpha \in x\}$ y para $\Gamma \subseteq \Phi$, $|\Gamma|_{\Lambda} = \bigcap \{|\alpha|_{\Lambda} : \alpha \in \Gamma\} = \{x \in W_{\Lambda} : \Gamma \subseteq x\}$.

5. Álgebras modales y frame de Kripke

Definición 5.1. Una álgebra modal normal (AM) es una estructura

$$\mathcal{U} = \langle A, \cap, ', \mathbf{l} \rangle$$

que satisface:

1. $\langle A, \cap, ' \rangle$ es un álgebra Booleana (AB), y
2. \mathbf{l} es un operador unario sobre A que satisface: $\mathbf{l}(a \cap b) = \mathbf{l}a \cap \mathbf{l}b$, y $\mathbf{l}1 = 1$ donde 1 es un elemento unitario de \mathcal{U} .

Ahora consideramos para cada *wff* $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ con n variables una función polinomial n -aria $h_{\alpha}^{\mathcal{U}}$ sobre \mathcal{U} que puede definirse inductivamente de la siguiente manera:

1. $h_{p_i}^{\mathcal{U}}(a_1, \dots, a_n) = a_i$.
2. $h_{\neg\alpha}^{\mathcal{U}}(a_1, \dots, a_n) = (h_{\alpha}^{\mathcal{U}}(a_1, \dots, a_n))'$.
3. $h_{\alpha \wedge \beta}^{\mathcal{U}}(a_1, \dots, a_n) = h_{\alpha}^{\mathcal{U}}(a_1, \dots, a_n) \cap h_{\beta}^{\mathcal{U}}(a_1, \dots, a_n)$.
4. $h_{\Box\alpha}^{\mathcal{U}}(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{l}(h_{\alpha}^{\mathcal{U}}(a_1, \dots, a_n))$.

α es válida en \mathcal{U} ($\mathcal{U} \models \alpha$) si y sólo si $h_{\alpha}^{\mathcal{U}} = 1$ (es decir, $h_{\alpha}^{\mathcal{U}}$ toma el valor de 1 para todos los argumentos en su dominio). Una lógica Λ está determinada o caracterizada por la clase \mathcal{C} de álgebras modales si y sólo si para cualquier $\alpha \in \Phi$, $\vdash_{\Lambda} \alpha$ si y sólo si $\mathcal{U} \models \alpha$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$.

El siguiente resultado establece que toda lógica se caracteriza por un álgebra simple.

Definición 5.2. Si Λ es una lógica modal, entonces el álgebra Lindembaum de Λ es la estructura

$$\mathcal{U}_\Lambda = \langle A_\Lambda, \cap, ', \mathbf{1} \rangle$$

definida como sigue:

1. $A_\Lambda = \{\|\alpha\|_\Lambda : \alpha \in \Phi\}$, donde $\|\alpha\|_\Lambda = \{\beta : \alpha =_\Lambda \beta\}$ y $\alpha =_\Lambda \beta$ si y sólo si $\vdash_\Lambda \alpha \leftrightarrow \beta$.
2. $\|\alpha\|'_\Lambda = \|\neg\alpha\|_\Lambda$.
3. $\mathbf{1}\|\alpha\|_\Lambda = \|\Box\alpha\|_\Lambda$.
4. $\|\alpha\|_\Lambda \cap \|\beta\|_\Lambda = \|\alpha \wedge \beta\|_\Lambda$.

Una interpretación para un lenguaje modal es un conjunto ordenado de dos elementos, definido de la siguiente manera:

Definición 5.3. Una frame de Kripke (K-frame) es una estructura $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, donde W es un conjunto no vacío, denominado el conjunto base o portador de \mathfrak{F} , y R una relación en W .

Definición 5.4. Una valuación V en \mathfrak{F} es una función que asocia a cada variable p un subconjunto $V(p)$ de W .

El dominio de V se extiende a todo Φ según las siguientes condiciones:

1. $x \in V(\alpha \wedge \beta)$ si y sólo si $x \in V(\alpha)$ y $x \in V(\beta)$.
2. $x \in V(\neg\alpha)$ si y sólo si $x \notin V(\alpha)$.
3. $x \in V(\Box\alpha)$ si y sólo si, para todo y , si xRy entonces $y \in V(\alpha)$.
4. $x \in V(\Diamond\alpha)$ si y sólo si, existe y tal que xRy y $y \in V(\alpha)$.

Definición 5.5.

1. α es válida en \mathfrak{F} ($\mathfrak{F} \models \alpha$) si y sólo si $V(\alpha) = W$, para toda valuación V en \mathfrak{F} .
2. α es válida en un clase \mathcal{C} de frames ($\mathcal{C} \models \alpha$) si y sólo si para todo $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}$ se tiene $\mathfrak{F} \models \alpha$.
3. \mathcal{C} determina o caracteriza una lógica Λ si y sólo si para todo $\alpha \in \Phi$, $\vdash_\Lambda \alpha$ si y sólo si $\mathcal{C} \models \alpha$.

Intuitivamente tenemos que W es el conjunto de mundos posibles y que x y y están relacionados (xRy) si y sólo si x es un mundo accesible a y .

Definición 5.6. Si Λ es una lógica modal normal, el K -frame canónico para Λ es la estructura

$$\mathfrak{F}_\Lambda^K = \langle W_\Lambda, R_\Lambda \rangle,$$

donde:

1. W_Λ es la clase de subconjuntos Λ maximales de Φ , y
2. xRy si y sólo si $\{A \in \Phi : \Box A \in x\} \subseteq y$ si y sólo si $\{\Diamond A : A \in y\} \subseteq x$.

La valuación canónica V_Λ es definida por $V_\Lambda(\alpha) = |\alpha|_\Lambda$.

Teorema 5.7. Para todo $\alpha \in \Phi$, $V_\Lambda(\alpha) = |\alpha|_\Lambda$.

La demostración es por inducción sobre la complejidad de la fórmula y la definición de valuación canónica.

Definición 5.8. Un modelo de Kripke para una lógica modal es un par $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, donde:

1. $\mathfrak{F} = (W, R)$.
2. V es una valuación en \mathfrak{F} .

Sea $x \in \mathfrak{F}$. Por inducción en la construcción de φ definimos una relación de verdad $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$, “ φ es verdadera en el mundo x en el modelo \mathfrak{M} ”, tomando:

1. $(\mathfrak{M}, x) \models p$ si y sólo si $x \in V(p)$, para cada p variable.
2. $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \wedge \chi$ si y sólo si $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ y $(\mathfrak{M}, x) \models \chi$.
3. $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \vee \chi$ si y sólo si $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ o $(\mathfrak{M}, x) \models \chi$.
4. $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \rightarrow \chi$ si y sólo si $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ implica $(\mathfrak{M}, x) \models \chi$.
5. $(\mathfrak{M}, x) \not\models \perp$.
6. $\mathfrak{M} \models \Box \varphi$ si y sólo si $(\mathfrak{M}, y) \models \varphi$ para todo $y \in W$ tal que xRy .
7. $\mathfrak{M}, x \models \neg \varphi$ si y sólo si $(\mathfrak{M}, x) \not\models \varphi$.
8. $\mathfrak{M} \models \Diamond \varphi$ si y sólo si $(\mathfrak{M}, y) \models \varphi$ existe $y \in W$ tal que xRy .

Si $(\mathfrak{M}, x) \not\models \varphi$, entonces decimos que φ es falsa en el mundo $x \in \mathfrak{M}$.

Definición 5.9. Dos modelos (algebraicos) son semánticamente equivalentes si ellos validan precisamente las mismas fórmulas modales.

Definición 5.10. Sea $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ un frame y $x, y \in W$. Decimos que y es accesible de x por $n > 0$ pasos y escribimos $xR^n y$ o $y \in x \uparrow^n$ o $x \in \downarrow_n$ si existen puntos (no necesariamente distintos) $z_1, \dots, z_{n-1} \in W$, tales que $xRz_1Rz_2 \dots Rz_{n-1}Ry$. Entenderemos $xR^0 y$, $y \in x \uparrow^0$ y $x \in \downarrow_0$ como $x = y$.

Observación 5.11.

1. Si R es transitiva, entonces $xR^n y$ implica xRy , para $n > 0$.
2. Si R es reflexiva, entonces el inverso también se tiene.

Definición 5.12.

1. Un punto x es llamado reflexivo si xRx , para tal x , $xR^n x$ se cumple para $n > 0$.
2. Un frame es reflexivo si todos los puntos son reflexivos.

Definición 5.13. Sea \mathfrak{F} frame transitivo.

Definimos en W una relación de equivalencia \sim de la siguiente manera: Para cualesquiera $x, y \in W$

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x = y \text{ o } xRy \text{ y } yRx.$$

Las clases de equivalencia respecto a \sim son llamados *cluster*. Los cluster que contienen un punto x se denotarán por $\mathcal{C}(x)$.

Definición 5.14. El frame cociente de un frame transitivo con respecto a \sim , es el frame $\langle W/\sim, R/\sim \rangle$, donde:

1. $W/\sim = \{\mathcal{C}(x) : x \in W\}$, y
2. $\mathcal{C}(x)R/\sim \mathcal{C}(y)$ si y sólo si xRy .

Es llamado el esqueleto de \mathfrak{F} y lo denotamos por $\rho\mathfrak{F} = \langle \rho W, \rho R \rangle$.

Observación 5.15.

1. Si R es reflexivo, entonces $\rho\mathfrak{F}$ es un orden parcial por $\rho\mathfrak{F}$.
2. Una relación binaria reflexiva y transitiva es llamada casi-orden.

Distinguimos 2 tipos de Cluster.

1. Un *cluster simple* consiste de un punto singular reflexivo.
2. Un *cluster propio* contiene al menos dos puntos reflexivos.

6. Frames de primer orden

Las conexiones entre álgebras modales y frames de Kripke fueron estudiados por Lemmon en [5], donde se muestra que cada K -frame tiene un álgebra modal semánticamente equivalente.

Definición 6.1. Si $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ es un K -frame entonces \mathfrak{F}^+ es el álgebra modal $\langle 2^W, \cap, \setminus, \mathbf{l}_R \rangle$, donde:

1. 2^W es el conjunto potencia de W .
2. \cap intersección, \setminus complementación.
3. Si $S \subseteq W$, $\mathbf{l}_R(S) = \{x \in W : \forall y(xRy \rightarrow y \in S)\}$.

Teorema 6.2. Sea $\alpha(p_1, \dots, p_n) \in \Phi$. Entonces para toda valuación V en \mathfrak{F} , $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = V(\alpha)$.

Demostración. Por inducción sobre la complejidad de la fórmula α .

Caso 1. $\alpha = p_i$.

$$h_{p_i}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = V(p_i).$$

Supongamos que el teorema se cumple para fórmulas de complejidad menor que α .

Caso 2. $\alpha = \neg\beta$.

$$\text{Veamos que } h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = V(\neg\beta).$$

$$x \in h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = (h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)))' \text{ si y sólo si } x \notin h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = V(\beta) \text{ si y sólo si } x \notin V(\beta).$$

$$\text{Por lo tanto } h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = V(\neg\beta).$$

Caso 3. $\alpha = \beta \wedge \gamma$.

$$\text{Veamos que } h_{\beta \wedge \gamma}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = V(\beta \wedge \gamma).$$

$$x \in h_{\beta \wedge \gamma}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) \text{ si y sólo si } x \in h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) \wedge x \in h_{\gamma}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) \text{ si y sólo si } x \in V(\beta) \wedge x \in V(\gamma) \text{ si y sólo si } x \in V(\beta \wedge \gamma).$$

$$\text{Por lo tanto } h_{\beta \wedge \gamma}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = V(\beta \wedge \gamma).$$

Caso 4. $\alpha = \Box\beta$.

$$\text{Veamos que } h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = V(\Box\beta). \text{ Por Definición 5.1, tenemos que } h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = \mathbf{l}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n))). \text{ Así verifiquemos que } \mathbf{l}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n))) = V(\Box\beta).$$

$$x \in \mathbf{l}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n))) \text{ si y sólo si, para toda } y, \text{ si } xRy \text{ implica que}$$

$y \in \mathbf{I}(h_\beta^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n))) = V(\beta)$, es decir, $y \in V(\beta)$. Por lo tanto, para todo y , si xRy , entonces $y \in V(\beta)$, esto es por Definición 5.3 que $x \in V(\beta)$.

□

Corolario 6.3. $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{F} \models \alpha$, esto es que para toda V valuación en \mathfrak{F} , se tiene que $V(\alpha) = 1$, entonces por Teorema 6.2, se cumple que $1 = V(\alpha) = h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n))$. Por lo tanto $h_\alpha^{\mathfrak{F}^+}(V(p_1), \dots, V(p_n)) = 1$, esto es, $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$. De manera análoga se tiene el recíproco. □

Definición 6.4. Un frame (modal normal) es una estructura

$$\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle,$$

donde:

1. $\langle W, R \rangle$ es un K -frame, y
2. P es una colección no vacía de subconjuntos de W que es cerrado bajo

$$\cap, \setminus \text{ y } \mathbf{I}_R.$$

Una valuación V en un frame \mathfrak{F} es una función como en la Definición 5.4 con el agregado:

3. $V(p) \in P$, para toda variable p .
La condición 2 garantiza que:
4. $V(\alpha) \in P$, para todo $\alpha \in \Phi$.

Definición 6.5. Si $\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle$ es un frame, entonces \mathfrak{F}^+ es la estructura

$$\langle P, \cap, \setminus, \mathbf{I} \rangle,$$

es una álgebra modal en virtud de 2 de la definición anterior.

Un frame \mathfrak{F} es fuerte si $P = 2^W$.

7. Subframes

Definición 7.1. Si $\mathfrak{F}^+ = \langle P, \cap, \setminus, \mathbf{I} \rangle$ es una álgebra modal y $P_1 \subseteq P$, entonces se tiene que $\mathfrak{F}_1^+ = \langle P_1, \cap, \setminus, \mathbf{I} \rangle$ es un álgebra modal con las mismas operaciones. En este caso diremos que \mathfrak{F}_1^+ es una subálgebra modal (sub-AM) de \mathfrak{F} .

Teorema 7.2. Sean $\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle$ y $\mathfrak{F}_1 = \langle W, R, P_1 \rangle$ frames con $P_1 \subseteq P$. Entonces $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}_1 \models \alpha$.

Demostración. Sean $\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle$ y $\mathfrak{F}_1 = \langle W, R, P_1 \rangle$ frames con $P_1 \subseteq P$ y $\mathfrak{F} \models \alpha$. Como P es una colección no vacía de subconjuntos de W que es cerrado bajo $\cap, \setminus, \mathbf{l}_R$, entonces \mathfrak{F}_1^+ es una sub-AM de \mathfrak{F}^+ , entonces $h_\alpha^{\mathfrak{F}_1^+} = 1$ idénticamente sólo si $h_\alpha^{\mathfrak{F}_1^+} = 1$, es decir, $\mathfrak{F}_1^+ \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}_1^+ \models \alpha$, equivalentemente $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$. Por otro lado, $\mathfrak{F}_1 \models \alpha$ y $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$. \square

Definición 7.3. Sea R una relación en W . Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la relación $R^k \subseteq W \times W$ por el esquema inductivo.

1. xR^0y si y sólo si $x = y$.
2. $xR^{k+1}y$ si y sólo si existe $z : (xRz \wedge zR^ky)$.

Definición 7.4. Si $R \subseteq W^2$, entonces $W' \subseteq W$ es R -hereditaria si y sólo si $x \in W'$ y xRy implican $y \in W'$.

Proposición 7.5. La intersección de una clase de conjuntos R -hereditarios es R -hereditario.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{W' \subseteq W : W' \text{ es } R\text{-hereditario}, R \subseteq W^2\}$. Queremos ver que $\bigcap \mathcal{C}$ es R -hereditario, $R \subseteq W \times W$. Sea $x \in \bigcap \mathcal{C}$ y xRy . Por demostrar que $y \in \bigcap \mathcal{C}$. Como $x \in \bigcap \mathcal{C}$, para toda $C \in \mathcal{C}$, se tiene que $x \in C$ y como C es R -hereditario, entonces para toda $C \in \mathcal{C}$, se tiene que $y \in C$. Por lo tanto $y \in \bigcap \mathcal{C}$. \square

La proposición anterior nos asegura que, para cualquier $W' \subseteq W$ hay un conjunto más pequeño $W_{R'}$ que es R -hereditario y contiene a W' .

Teorema 7.6.

$$W_{R'} = \{y : \exists x \exists k (x \in W' \text{ y } xR^ky)\}.$$

Demostración. \supseteq] Sean $\mathcal{C} = \{y : \exists x \exists k (x \in W' \text{ y } xR^ky)\}$, $z \in \mathcal{C}$ y zRw . Por demostrar que $w \in \mathcal{C}$. Como $z \in \mathcal{C}$, existen x, k tales que $w \in w'$ y xR^kz y como zRw , entonces $xR^{k+1}w$. Por lo tanto $w \in \mathcal{C}$. Así \mathcal{C} es R -hereditario y como $W' \subseteq \mathcal{C}$, entonces $W_{R'} \subseteq \mathcal{C}$.

\subseteq] Sea $W' = \{D \subseteq W : D \text{ es } R\text{-hereditario y } W' \subseteq D\}$. Veamos que $\mathcal{C} \subseteq W_{R'}$. Sea $D \subseteq W$ R -hereditario tal que $W' \subseteq D$, veamos que $\mathcal{C} \subseteq D$. Sea $y \in \mathcal{C}$, entonces existen $x \in W'$ y $k \geq 0$ tal que xR^ky y $xRzRz_2 \dots Rz_{k-1}Ry$. Por lo tanto $y \in D$, así $\mathcal{C} \subseteq D$. Por lo tanto $\mathcal{C} \subseteq W_{R'}$. \square

Definición 7.7. Si $\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle$ y $\mathfrak{F}' = \langle W', R', P' \rangle$ son frames, entonces \mathfrak{F}' es un subframe de \mathfrak{F} ($\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$) si cumple:

1. W' es un subconjunto R -hereditario de W .

2. $R' = R \cap (W' \times W')$.
3. $P' = \{W' \cap S : S \in P\}$.

Teorema 7.8. *Si W' es un subconjunto R -hereditario de W y $R' = R \cap (W' \times W')$, entonces:*

1. $W' \setminus (W' \cap S) = W' \cap (W \setminus S)$.
2. $(W' \cap S) \cap (W' \cap S_1) = W' \cap (S \cap S_1)$.
3. $m_{R'}(W' \cap S) = W' \cap m_R(S)$.
4. $\mathbf{l}_{R'}(W' \cap S) = W' \cap \mathbf{l}_R(S)$.

Demostración.

1. Sea $a \in W' \setminus (W' \cap S)$, entonces $a \in W' \wedge a \notin W' \cap S$, es decir $a \in W' \wedge a \in W \setminus S$, entonces $a \in (W' \setminus S) \cap (W' \cap W) = (W' \setminus S) \cap W'$, entonces $a \in W' \setminus S$. Por lo tanto $a \in W' \cap (W \setminus S)$.
2. $x \in (W' \cap S) \cap (W' \cap S_1)$ si y sólo si $x \in (W' \cap S) \wedge x \in (W' \cap S_1)$ si y sólo si $(x \in W' \wedge x \in S) \wedge (x \in W' \wedge x \in S_1)$ si y sólo si $(x \in W' \wedge x \in S) \wedge (x \in S \wedge x \in S_1)$ si y sólo si $x \in W' \wedge (x \in S \wedge x \in S_1)$ si y sólo si $x \in W' \cap (S \cap S_1)$.
3. Sea $x \in m_{R'}(W' \cap S)$, entonces $x \in W'$ y $xR'y$ para algún $y \in W' \cap S$, entonces xRy y como $y \in S$, se cumple que $x \in m_R(S)$. Por lo tanto $x \in W' \cap m_R(S)$. Por otro lado, sea $x \in W' \cap m_R(S)$, entonces $x \in W'$ y $x \in m_R(S)$, entonces xRy para algún $y \in S$ y como W' es R -hereditario entonces $y \in W'$. Por lo tanto $x \in m_{R'}(W' \cap S)$.
4. Sea $x \in \mathbf{l}_{R'}(W' \cap S)$, entonces $x \in W'$ y para todo y se tiene que $xR'y$, tenemos que $y \in W' \cap S$, entonces xRy pues $R' = R \cap (W' \times W')$, así $x \in W' \cap \mathbf{l}_R(S)$. Por otro lado sea $x \in W' \cap \mathbf{l}_R(S)$, entonces $x \in W'$ y $x \in \mathbf{l}_R(S)$, entonces para toda y se tiene que xRy implica que $y \in S$ y como W' es R -hereditario se tiene que $y \in W'$, así $xR'y$ y $y \in W' \cap S$, es decir, $x \in \mathbf{l}_{R'}(W' \cap S)$.

□

Corolario 7.9. *Si $\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle$ es un frame y $W' \subseteq W$ es R -hereditario, entonces $\mathfrak{F}_{W'} = \langle W', R', P_{W'} \rangle$ es un subframe de \mathfrak{F} , donde:*

1. $R' = R \cap (W' \times W')$ y
2. $P_{W'} = \{W' \cap S : S \in P\}$.

Demostración. Sea $\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle$ un frame y $W' \subseteq W$ tal que W' es R -hereditario. Por demostrar que $\mathfrak{F}_{W'} = \langle W', R', P_{W'} \rangle$ es un subframe de \mathfrak{F} , donde $R' = R \cap (W' \times W')$ y $P_{W'} = \{W' \cap S : S \in P\}$. Veamos que se satisface la Definición 7.7. El único requisito que no se satisface inmediatamente es que $F_{W'}$ es un frame, es decir, $P_{W'}$ se cerrado bajo $\cap, \setminus, y \mathbf{l}_R$, pero esto se sigue de Teorema 7.8. \square

Corolario 7.10. *Sea $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ es una colección de frames de \mathfrak{F} , y $W' = \bigcap_{i \in I} W_i$. Entonces si $W' \neq \emptyset$, $\mathfrak{F}_{W'}$ es un subframe de \mathfrak{F} .*

Demostración. Veamos que W' es R -hereditario. Sea $x \in W'$ y xRy . Por demostrar que $y \in W'$. Como $x \in W' = \bigcap_{i \in I} W_i$, entonces para todo $i \in I$ se tiene que $x \in W_i$ y como para cada $i \in I$ se tiene que W_i es R -hereditario y además xRy se tiene que para cada $i \in I$ se cumple que $y \in W_i$. Por lo tanto $y \in \bigcap_{i \in I} W_i$, así W' es R -hereditario. En virtud del Corolario 7.9, se tiene que $\mathfrak{F}_{W'} = \langle W' = \bigcap_{i \in I} W_i, R', P_{W'} \rangle$ es un subframe de \mathfrak{F} . \square

El Corolario 7.10 afirma en efecto que la intersección de subframes es un subframe, por lo que cada $W' \subseteq W$ tiene un subframe mas pequeño de \mathfrak{F} que lo contiene. Este subframe es $\mathfrak{F}_{W'_R}$ y es llamado el subframe de \mathfrak{F} generado por W' . Si $W' = \{x\}$ entonces $\mathfrak{F}_{W'_R}$ lo escribiremos como \mathfrak{F}_x , el subframe generado por x .

Teorema 7.11. *Si $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$, $\alpha(p_1, \dots, p_n) \in \Phi$, y $S_1, \dots, S_n \in P$,*

$$h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n) = W' \cap h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'+} (S_1, \dots, S_n).$$

Demostración. Haremos inducción sobre la complejidad de α .

Caso 1. $\alpha = p_i$, $i = 0, 1, \dots$ (átomo), entonces

$$h_{p_i}^{\mathfrak{F}'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n) = W' \cap S_i$$

Por otro lado,

$$W' \cap h_{p_i}^{\mathfrak{F}'+} (S_1, \dots, S_n) = W' \cap S_i.$$

Por lo tanto $h_{p_i}^{\mathfrak{F}'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n) = W' \cap h_{p_i}^{\mathfrak{F}'+} (S_1, \dots, S_n)$.

Supongamos ahora que el teorema se cumple para fórmulas de complejidad menor que α .

Caso 2. $\alpha = \neg\beta$, entonces

$$\begin{aligned}
h_{-\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n) &= [h_{\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n)]' \\
&= [W' \cap h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)]' \\
&= [W' \setminus W'] \cup [W' \setminus h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)] \\
&= W' \setminus h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n) \\
&= W' \cap [h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)]' \\
&= W' \cap h_{-\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n).
\end{aligned}$$

Caso 3. $\alpha = \beta \wedge \gamma$, entonces

$$\begin{aligned}
h_{\beta \wedge \gamma}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n) &= [h_{\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n)] \cap \\
&\quad [h_{\gamma}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n)] \\
&= [W' \cap h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)] \cap \\
&\quad [W' \cap h_{\gamma}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)] \\
&= W' \cap [h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)] \cap \\
&\quad [h_{\gamma}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)] \\
&= W' \cap h_{\beta \wedge \gamma}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n).
\end{aligned}$$

Caso 4. $\alpha = \Box\beta$, entonces

Veamos que $h_{\Box\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, S_n) = W' \cap h_{\Box\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)$, por la Definición 5.1 es equivalente a probar lo siguiente:

$$\mathbf{l}_{R'}[h_{\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n)] = W' \cap \mathbf{l}_R(h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)).$$

Sea $x \in \mathbf{l}_{R'}[h_{\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n)]$, entonces $x \in W'$ y $xR'y$ implica que $y \in h_{\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n)$ y por hipótesis esto último es igual a $W' \cap h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)$, entonces $y \in W'$ y $y \in h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)$ y como $xR'y$ se tiene que xRy . Por lo tanto $x \in W' \cap \mathbf{l}_R(h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n))$.

Por otro lado sea $x \in W' \cap \mathbf{l}_R(h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n))$, entonces $x \in W'$ y $x \in \mathbf{l}_R(h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n))$.

Ahora sea $x \in W' \cap \mathbf{l}_R(h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n))$, entonces $x \in W'$ y

$x \in \mathbf{l}_R(h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n))$, entonces $x \in W' \subseteq W$ y xRy , entonces $y \in h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)$ y como W' es R -hereditario, entonces

$y \in W' \cap h_{\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n)$, entonces por hipótesis inductiva, $y \in h_{\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n)$. Así $x \in \mathbf{l}_R(h_{\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n))$. Por lo tanto

$$h_{\Box\beta}^{\delta'+} (W' \cap S_1, \dots, S_n) = W' \cap h_{\Box\beta}^{\delta'+} (S_1, \dots, S_n).$$

□

Corolario 7.12. Si $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F} \models \alpha$, entonces $\mathfrak{F}' \models \alpha$.

Demostración. Como $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}' \models \alpha$, es suficiente probar que $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$ sólo si $\mathfrak{F}'^+ \models \alpha$. Si $\mathfrak{F}'^+ \not\models \alpha$ entonces, existen $T_1, \dots, T_n \in P'$ tales que $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'^+}(T_1, \dots, T_n) \neq W'$. Por inciso 3 de la Definición 7.7, para $1 \leq i \leq n$ existen $S_i \in P$ tales que $T_i = W' \cap S_i$. Por lo tanto, por el Teorema 7.11,

$$\begin{aligned} W' \neq h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'^+}(T_1, \dots, T_n) &= h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'^+}(W' \cap S_1, \dots, W' \cap S_n) \\ &= W' \cap h_{\alpha}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \dots, S_n). \end{aligned}$$

Entonces $W' \cap h_{\alpha}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \dots, S_n) \neq W'$, así $W' \not\subseteq h_{\alpha}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \dots, S_n)$ pues de lo contrario $W' \cap h_{\alpha}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \dots, S_n) = W' \neq W' \subseteq W$.

Por lo tanto $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}^+}(S_1, \dots, S_n) \neq W$, así $\mathfrak{F}^+ \not\models \alpha$. □

En contexto de K -frames, tenemos el siguiente caso especial del Teorema 7.11.

Teorema 7.13. Sea V una valuación en $\langle W, R \rangle$, $W' \subseteq W$ y sea $\langle W'_R, R' \rangle$ el sub- K -frame generado por W' (W'_R como se definió en el Teorema 7.6 y $R' = R \cap (W'_R \times W'_R)$). Definimos $V_{W'}$, por $V_{W'}(p) = W'_R \cap V(p)$, todas las variables p , Entonces $V_{W'}(\alpha) = W'_R \cap V(\alpha)$, todo $\alpha \in \Phi$.

La función $V_{W'}$ se llamará la *valuación derivada* de (generada por) V .

8. Homomorfismos

El hecho de que los subframes preservan una propiedad de validez (Corolario 7.12) puede, en efecto, establecerse indirectamente a partir de la preservación de las identidades polinómicas en homomorfismos de álgebras. En efecto, por la Definición 7.7 y el Teorema 7.8 si $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$, entonces la función $S \mapsto W' \cap S$ es un homomorfismo de álgebras modales de \mathfrak{F}^+ en \mathfrak{F}'^+ . Hay otras construcciones algebraicas que preservan las identidades (subálgebras) y, como veremos, cada una de ellas está asociada con una construcción de frame en particular. En esta sección, se muestra que la estructura de la preservación de las funciones entre los frames están vinculados con las subálgebras modales.

Definición 8.1. Si $\mathfrak{F} = \langle W, R, P \rangle$ y $\mathfrak{F}' = \langle W', R', P' \rangle$ son frames, una función $\mathcal{Q} : W \rightarrow W'$ es un homomorfismo de frames de \mathfrak{F} a \mathfrak{F}' si y sólo si

1. xRy sólo si $\mathcal{Q}(x)R'\mathcal{Q}(y)$.
2. $\mathcal{Q}(x)R'z$ sólo si $\exists y(xRy \text{ y } \mathcal{Q}(y) = z)$.

3. $S \in P'$ sólo si $\mathcal{Q}^{-1}(S) \in P$, donde $\mathcal{Q}^{-1}(S) = \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in S\}$.

Si \mathcal{Q} es sobreyectiva (i.e. $\mathcal{Q}(W) = W'$), entonces \mathfrak{F} es una imagen homeomorfa de \mathfrak{F}' (escribimos $\mathfrak{F}' \preceq \mathfrak{F}$).

\mathcal{Q} es un encaje si y sólo si es inyectivo y satisface

4. $S \in P \Rightarrow \exists T \in P'(\mathcal{Q}(S) = \mathcal{Q}(W) \cap T)$.

Si \mathcal{Q} es biyectiva y \mathcal{Q}^{-1} es un homomorfismo, entonces \mathcal{Q} es un isomorfismo, en cada caso \mathfrak{F} y \mathfrak{F}' son isomorfos ($\mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}'$).

Un isomorfismo puede alternativamente describirse como un encaje sobreyectivo. Note que un homomorfismo biyectivo necesariamente no es un isomorfismo, es decir, si $P \neq 2^W$, entonces la función identidad de $\langle W, R, 2^W \rangle$ a $\langle W, R, P \rangle$ es un homomorfismo biyectivo cuya inversa no satisface la condición 3 de la Definición 8.1.

Teorema 8.2. *Si $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ es un homomorfismo de frames, entonces para $S, T \subseteq W'$.*

1. $\mathcal{Q}^{-1}(W' \setminus S) = W \setminus \mathcal{Q}^{-1}(S)$.
2. $\mathcal{Q}^{-1}(S \cap T) = \mathcal{Q}^{-1}(S) \cap \mathcal{Q}^{-1}(T)$.
3. $\mathcal{Q}^{-1}(m_{R'}(S)) = m_R(\mathcal{Q}^{-1}(S))$.
4. $\mathcal{Q}^{-1}(l_{R'}(S)) = l_R(\mathcal{Q}^{-1}(S))$.

Demostración.

1.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}^{-1}(W' \setminus S) &= \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in W' \setminus S\} \\
 &= \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in W' \wedge \mathcal{Q}(x) \notin S\} \\
 &= \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in W'\} \cap \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \notin S\} \\
 &= \mathcal{Q}^{-1}(W') \cap (\mathcal{Q}^{-1}(S))' \\
 &= W \setminus \mathcal{Q}^{-1}(S)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}^{-1}(S \cap T) &= \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in S \cap T\} \\
 &= \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in S \wedge \mathcal{Q}(x) \in T\} \\
 &= \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in S\} \cap \{x \in W : \mathcal{Q}(x) \in T\} \\
 &= \mathcal{Q}^{-1}(S) \cap \mathcal{Q}^{-1}(T)
 \end{aligned}$$

3. Sea $x \in \mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{m}_{R'}(S))$ entonces $\mathcal{Q}(x) \in \mathbf{m}_{R'}(S)$, luego $\mathcal{Q}(x)R'z$ para algún $z \in S$, entonces existe y tal que xRy y $\mathcal{Q}(y) = z$. Por lo tanto $y \in \mathcal{Q}^{-1}(S)$. Por ende $x \in \mathbf{m}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S))$.

Por otro lado sea $x \in \mathbf{m}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S))$, entonces xRy y para algún y tal que $y \in \mathcal{Q}^{-1}(S)$, es decir, xRy y $\mathcal{Q}(y) \in S$. Y por definición $\mathcal{Q}(x)R'\mathcal{Q}(y)$, así $\mathcal{Q}(x) \in \mathbf{m}_{R'}(S)$. Por lo tanto $x \in \mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{m}_{R'}(S))$.

4.

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{l}_{R'}(S)) &= \mathcal{Q}^{-1}(W' \setminus \mathbf{m}_{R'}(S)) \\ &= W \setminus \mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{m}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S))) \\ &= W \setminus \mathbf{m}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S)) \\ &= \mathbf{l}_R(\mathcal{Q}^{-1}(S)).\end{aligned}$$

□

Teorema 8.3. Sean $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ un homomorfismo y $\mathfrak{F}_\mathcal{Q} = \langle W_\mathcal{Q}, R', P_\mathcal{Q} \rangle$ el subframe de \mathfrak{F}' generado por $\mathcal{Q}(W)$. Entonces:

1. \mathcal{Q} es una imagen homeomorfa de \mathfrak{F} bajo \mathcal{Q} , y
2. $\mathfrak{F}_\mathcal{Q} \cong \mathfrak{F}$ si \mathcal{Q} es un encaje.

Demostración.

1. Notamos que $\mathcal{Q}(W)$ es un conjunto R' -hereditario. En efecto, supongamos que $x \in \mathcal{Q}(W)$ y $xR'y$. Veamos que para $y \in \mathcal{Q}(W)$ existe $w_1 \in W$ tal que $\mathcal{Q}(w_1) = y$. Como $x \in W$, entonces existe $w_1 \in W$ tal que $\mathcal{Q}(w_1) = x$ y $xR'y$, entonces $\mathcal{Q}(w_1)R'y$, así existe $w_2 \in W$ tal que w_1Rw_2 y $\mathcal{Q}(w_2) = y$ entonces $y \in \mathcal{Q}(W)$. Por lo tanto $\mathcal{Q}(W)$ es R -hereditario, así \mathcal{Q} es una función sobre $\mathfrak{F}_\mathcal{Q}$. Ahora si $S \in P_\mathcal{Q}$, entonces existe $T \in P' : S = \mathcal{Q}(W) \cap T$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{-1}(S) &= \mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{Q}(W) \cap T) \\ &= \mathcal{Q}^{-1}(\mathcal{Q}(W)) \cap \mathcal{Q}^{-1}(T) \\ &= W \cap \mathcal{Q}^{-1}(T) \\ &= \mathcal{Q}^{-1}(T) \in P.\end{aligned}$$

Finalmente tenemos que xRy , implica $\mathcal{Q}(x)R'\mathcal{Q}(y)$.

2. Si \mathcal{Q} es inyectiva, entonces $(\mathcal{Q}^{-1})^{-1} = \mathcal{Q}$ implica por definición de encaje tenemos que, dada $S \in P$, se cumple que $(\mathcal{Q}^{-1})^{-1}(S) = \mathcal{Q}(S) \in P_\mathcal{Q}$ por lo que \mathcal{Q}^{-1} es un homomorfismo. Esto, junto con (1), nos da que \mathcal{Q} es un isomorfismo entre \mathfrak{F} y $\mathfrak{F}_\mathcal{Q}$.

□

Teorema 8.4. Si $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ es un homomorfismo, $\alpha(p_1, \dots, p_n) \in \Phi$, y si $S_1, \dots, S_n \in P'$, entonces $\mathcal{Q}^{-1}(h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n)) = h_{\alpha}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n))$.

Demostración. Por inducción de la longitud de α .

Caso 1. $\alpha = p_i$, entonces

$$\mathcal{Q}^{-1}(h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n)) = \mathcal{Q}^{-1}(S_i).$$

Por otro lado

$$h_{\alpha}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n)) = \mathcal{Q}^{-1}(S_i).$$

Supongamos que el Teorema se vale para fórmulas de complejidad menor que α .

Caso 2. $\alpha = \neg\beta$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{-1}(h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n)) &= \mathcal{Q}^{-1}(W' \setminus h_{\beta}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n)) \\ &= W \setminus \mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n)) \\ &= W \setminus h_{\beta}^{\mathfrak{F}'+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n)) \\ &= h_{\neg\beta}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n)). \end{aligned}$$

Caso 3. $\alpha = \beta \wedge \gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta \wedge \gamma}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n)) &= \mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n) \cap (h_{\gamma}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n))) \\ &= \mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n)) \cap \mathcal{Q}^{-1}(h_{\gamma}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n)) \\ &= h_{\beta}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n)) \cap \\ &\quad h_{\gamma}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n)) \\ &= h_{\beta \wedge \gamma}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n)). \end{aligned}$$

Caso 4. $\alpha = \Box\beta$, entonces

Veamos que

$$\mathcal{Q}^{-1}(h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n)) = h_{\Box\beta}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n))$$

Por Definición 5.1 verifiquemos los siguiente

$$\mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{l}_{R'}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n))) = \mathbf{l}_R(h_{\beta}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n))).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{-1}(\mathbf{l}_{R'}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n))) &= \mathbf{l}_R(\mathcal{Q}^{-1}(h_{\beta}^{\mathfrak{F}'+}(S_1, \dots, S_n))) \\ &= \mathbf{l}_R(h_{\beta}^{\mathfrak{F}+}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1), \dots, \mathcal{Q}^{-1}(S_n))) \end{aligned}$$

□

Corolario 8.5. Si $\mathfrak{F}' \preceq \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F} \models \alpha$, entonces $\mathfrak{F}' \models \alpha$.

Demostración. Sea $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ homomorfismo.

Por demostrar $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'}(S_1, \dots, S_n) = W'$

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'}(S_1, \dots, S_n) &\supseteq \mathcal{Q}(\mathcal{Q}^{-1}(h_{\alpha}^{\mathfrak{F}}(S_1, \dots, S_n))) \\ &= \mathcal{Q}(h_{\alpha}^{\mathfrak{F}}(\mathcal{Q}^{-1}(S_1, \dots, S_n))) \\ &= \mathcal{Q}(W) \\ &= W'. \end{aligned}$$

Por lo tanto $W' \subseteq h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'}(S_1, \dots, S_n)$. Por otro lado, por definición tenemos que $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'}(S_1, \dots, S_n) \subseteq W'$. Así $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'}(S_1, \dots, S_n) = W'$. □

Corolario 8.6. Cualesquiera dos frames isomorfos son semánticamente equivalentes.

Demostración. Sea $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ isomorfismo de frames.

Por demostrar que $\mathfrak{F} \models \alpha$ si y sólo si $\mathfrak{F}' \models \alpha$.

Supongamos que $\mathfrak{F} \models \alpha$. Queremos ver que $\mathfrak{F}' \models \alpha$. Bastará ver que $\mathfrak{F}^+ \models \alpha$ entonces

$\mathfrak{F}' \models \alpha$. Por demostrar que $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'}(S_1, \dots, S_n) = W'$. Esto se sigue del Corolario 8.5.

Ahora si $\mathfrak{F}' \models \alpha$. Por demostrar que $\mathfrak{F} \models \alpha$. Consideremos $P = \mathcal{Q}^{-1} : \mathfrak{F}' \rightarrow \mathfrak{F}$ homomorfismo. Verifiquemos que $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}}(S_1, \dots, S_n) = W$.

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{\mathfrak{F}}(S_1, \dots, S_n) &\supseteq P(P^{-1}(h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'}(S_1, \dots, S_n))) \\ &= P(h_{\alpha}^{\mathfrak{F}'}(P^{-1}(S_1), \dots, P^{-1}(S_n))) \\ &= P(W') \\ &= W. \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}}(S_1, \dots, S_n) \subseteq W$, esto por definición. Por lo tanto $h_{\alpha}^{\mathfrak{F}}(S_1, \dots, S_n) = W$. □

Teorema 8.7. Si \mathfrak{F} esta encajado en \mathfrak{F}' , entonces $\mathfrak{F}' \models \alpha$ implica que $\mathfrak{F} \models \alpha$.

Demostración. Sean $\mathfrak{F}' \models \alpha$ y $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ un encaje. Entonces por el Teorema 8.3, se tiene que $\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}} \subseteq \mathfrak{F}'$ y $\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}} \cong \mathfrak{F}$. Por otro lado, por Corolario, 7.12 como $\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}} \subseteq \mathfrak{F}'$ y $\mathfrak{F}' \models \alpha$, entonces $\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}} \models \alpha$ y como $\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}} \cong \mathfrak{F}$ por Corolario 8.6, entonces $\mathfrak{F} \models \alpha$. □

Definición 8.8. Si $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}'$ es un homomorfismo de frames, entonces $\mathcal{Q}^+ : \mathfrak{F}'^+ \rightarrow \mathfrak{F}^+$ es definida por $\mathcal{Q}^+(S) = \mathcal{Q}^{-1}(S)$, para todo $S \in P'$.

Teorema 8.9.

1. \mathcal{Q}^+ es un homomorfismo de álgebras modales.
2. \mathcal{Q}^+ es inyectivo si \mathcal{Q} es sobre.
3. \mathcal{Q}^+ es sobre si \mathcal{Q} es un encaje.
4. \mathcal{Q}^+ es un homomorfismo de álgebras modales si \mathcal{Q} es un isomorfismo de frame.

Demostración.

1. Por demostrar:

- a) $\mathcal{Q}^+(S \cap T) = \mathcal{Q}^+(S) \cap \mathcal{Q}^+(S) \cap \mathcal{Q}^+(T)$,
- b) $\mathcal{Q}^+(\setminus S) = \setminus \mathcal{Q}^+(S)$,
- c) $\mathcal{Q}^+(\mathbf{m}'_R(S)) = \mathbf{m}_R(\mathcal{Q}^+(S))$.

Se sigue de la Definición 8.8 y el Teorema 8.2.

2. Supongamos que \mathcal{Q} es sobre. Por demostrar que \mathcal{Q}^+ es inyectivo. Sean $S, T \in P'$ tales que $\mathcal{Q}^+(S) = \mathcal{Q}^+(T)$. Como $\mathcal{Q}^+(S) = \mathcal{Q}^+(T)$ por Definición 8.8, se tiene que $\mathcal{Q}^{-1}(S) = \mathcal{Q}^{-1}(T)$, entonces $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}^{-1}(S)) = \mathcal{Q}(\mathcal{Q}^{-1}(T))$ y como \mathcal{Q} es sobre, se tiene que $S = T$.
3. Supongamos que \mathcal{Q} es un encaje. Por demostrar que \mathcal{Q}^+ es sobre. Sea $S \in P$ y como \mathcal{Q} es encaje, entonces existe $T \in P'$ tal que $\mathcal{Q}(S) = \mathcal{Q}(W) \cap T$. Notamos que $S \subseteq \mathcal{Q}^{-1}$; Si $x \in \mathcal{Q}^{-1}(T)$, entonces $\mathcal{Q}(x) \in T \cap \mathcal{Q}(W) = \mathcal{Q}(S)$, así para algún $y \in S$ se tiene que $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}(y)$. Pero \mathcal{Q} es inyectivo, entonces $x = y$. Por lo tanto $\mathcal{Q}^{-1}(T)(S)$, es decir, $\mathcal{Q}^+(T) = S$.
4. Se sigue de 1-3.

□

9. Inmersión de CPI en $S4$

Uno puede notar la cercanía de CPI y $S4$ cuando se piensa en la implicación intuicionista como implicación necesaria y notar la semejanza de los modelos. Gödel vio la conexión mucho antes de la existencia de modelos de Kripke al señalar que la interpretación de \Box como la noción intuitiva de probabilidad. Él construyó la siguiente traslación T de IPC en $S4$.

Definición 9.1. (Traslación de Gödel) Para toda p variable intuicionista y para cualesquiera φ y ψ fórmulas intuicionistas,

1. $T(p) = \Box p$.
2. $T(\perp) = \Box \perp$.
3. $T(\varphi \wedge \psi) = T(\varphi) \wedge T(\psi)$.
4. $T(\varphi \vee \psi) = T(\varphi) \vee T(\psi)$.
5. $T(\varphi \rightarrow \psi) = T(\varphi) \rightarrow T(\psi)$.

Los conectivos Intuicionistas son transformados por T en las correspondientes Clásicas, pero se entienden ahora en el contexto de demostrabilidad.

Sea $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$ un modelo modal en un frame casi-ordenado \mathfrak{F} . Definimos en el esqueleto $\rho\mathfrak{F}$ de \mathfrak{F} una valuación intuicionista ρV por tomar, a cada variable intuicionista p ,

$$\rho V(p) = \{ \mathcal{C}(x) : (\mathfrak{M}, x) \models \Box p \},$$

$\rho V(p)$ es upward closed.

Decimos que el modelo $\rho\mathfrak{M} = \langle \rho\mathfrak{F}, \rho V \rangle$ es el esqueleto de el modelo \mathfrak{M} .

Inversamente, si $\mathfrak{N} = \langle \rho\mathfrak{F}, U \rangle$ es un modelo intuicionista basado en un esqueleto de un frame-casi ordenado $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, entonces tomando a cada variable intuicionista p

$$V(p) = \{ x \in W : (\mathfrak{N}, \mathcal{C}(x)) \models p \}$$

obtenemos un modelo modal $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$ cuyo esqueleto es (isomorfo a \mathfrak{N}). En particular, si todos los clusters en \mathfrak{F} son simples y además \mathfrak{F} es isomorfo a $\rho\mathfrak{F}$, entonces el modelo \mathfrak{M} es también isomorfo a su esqueleto \mathfrak{N} .

Lema 9.2. *(del Esqueleto) Para cada modelo \mathfrak{M} de lógica modal basado en un frame casi-ordenado, todo punto x en \mathfrak{M} y cada fórmula intuicionista φ ,*

$$(\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \varphi \text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \models T(\varphi).$$

Demostración. Sean \mathfrak{M} un modelo de lógica modal basado en un frame casi-ordenado y x en \mathfrak{M} . Haremos inducción sobre la complejidad de la fórmula φ .

Caso 1. $\varphi = p$ átomo, entonces

$$\begin{aligned} (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models p & \text{ si y sólo si } \mathcal{C}(x) \in V(p) \\ & \text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \models \Box p. \end{aligned}$$

Por otro lado $(\mathfrak{M}, x) \models T(p) = \Box p$.

Supongamos que el teorema se cumple para fórmulas de complejidad menor que φ .

Caso 2. $\varphi = \psi \vee \chi$, entonces

$$\begin{aligned} (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \psi \vee \chi & \text{ si y sólo si } (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \psi \text{ o } (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \chi \\ & \text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \models \psi \text{ o } (\mathfrak{M}, x) \models \chi \\ & \text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \models \psi \vee \chi. \end{aligned}$$

Caso 3. $\varphi = \psi \wedge \chi$, entonces

$$\begin{aligned} (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \psi \wedge \chi & \text{ si y sólo si } (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \psi \\ & \text{ y } (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \models \chi \\ & \text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \models \psi \\ & \text{ y } (\mathfrak{M}, x) \models \chi \\ & \text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \models \psi \wedge \chi. \end{aligned}$$

Caso 4. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, entonces

$$\begin{aligned} (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(x)) \not\models \varphi & \text{ si y sólo si existe } y \in x \uparrow: \\ & (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(y)) \models \psi \text{ y } (\rho\mathfrak{M}, \mathcal{C}(y)) \not\models \chi \\ & \text{ si y sólo si existe } y \in x \uparrow: \\ & (\mathfrak{M}, y) \models T(\psi) \text{ y } (\mathfrak{M}, y) \not\models T(\chi) \\ & \text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \not\models \Box(T(\psi) \rightarrow T(\chi)) \\ & \text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \not\models T(\psi \rightarrow \chi) \\ & \text{ si y sólo si } (\mathfrak{M}, x) \not\models T(\varphi). \end{aligned}$$

□

Corolario 9.3. Para cada frame casi-ordenado \mathfrak{F} y cada fórmula intuicionista φ ,

$$\rho\mathfrak{F} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{F} \models T(\varphi).$$

Teorema 9.4. La traslación de Gödel es un encaje de CPI a S4.

Demostración. Deseamos probar que, para toda fórmula intuicionista φ

$$\varphi \in CPI \text{ si y sólo si } T(\varphi) \in S4.$$

Supongamos que $T(\varphi) \notin S4$. Entonces existe un frame casi-ordenado \mathfrak{F} tal que $\mathfrak{F} \not\models T(\varphi)$. Por el Corolario 9.3, $\rho\mathfrak{F} \not\models \varphi$ y así $\varphi \notin CPI$. Inversamente, supongamos que $\varphi \notin CPI$. Entonces, existe un frame intuicionista finito \mathfrak{F} refutando φ y como un frame modal es isomorfo a su esqueleto. Por el corolario anterior, $\mathfrak{F} \not\models T(\varphi)$, de esto se sigue que $T(\varphi) \notin S4$. □

Bibliografía

- [1] A. Chagrov and M. Zakharyashev, *Modal Logic*, Oxford University Press, (1997).
- [2] B. F. Chellas, *Modal Logic an Introduction*, Cambridge University Press, (1980).
- [3] N. B. Cocchiarella and M.A. Freud, *Modal Logic*, Oxford University Press, (2008).
- [4] R. Goldblatt, *Mathematics of Modality*, CSLI Lecture Notes No. 43, (1993).
- [5] E. J Lemmon, *Semantics for Modal Logic I*, Journal Symbolic Logic 31 ,46-65,(1966).
- [6] E. N. Zalta, *Basic Concepts in Modal Logic*, Center for the Study of Language and Information Stanford University, (1995).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

arrazola@fcmf.buap.mx
imartinez@fcmf.buap.mx
miguetux@hotmail.com
ruvelsa@yahoo.com

Probabilidad

Capítulo 6

Análisis de procesos de decisión de Markov con horizonte aleatorio

Hugo Adán Cruz Suárez, Rocío Ilhuicatzí Roldán
FCFM-BUAP

Resumen

Se considera un modelo de control de Markov con espacios de estados y acciones de Borel con función de costo no acotada. Se analiza el problema de Decisión de Markov con criterio de rendimiento el costo total esperado y horizonte aleatorio cuya distribución de probabilidad es conocida. Para este problema se plantea la ecuación de optimalidad y se proporciona un teorema que permite garantizar la existencia de una política óptima estacionaria. Los resultados obtenidos son aplicados a un problema de tipo Lineal-Cuadrático con incertidumbre en el horizonte.

1. Introducción

El problema de Decisión de Markov se estudia generalmente con horizonte finito y cuando éste es suficientemente grande se considera como horizonte infinito. Sin embargo, aún después de haber determinado el tipo de horizonte del problema cabe la posibilidad de que factores externos obliguen a concluir el proceso antes de lo esperado. Podría considerarse de forma más correcta incertidumbre en el horizonte. En *Savings and Consumption with an Uncertain Horizon* (véase [2]) se analiza un problema de consumo-inversión utilizando un modelo de control de Markov con horizonte aleatorio, siendo el principal objetivo estudiar el consumo inicial respecto a diferentes distribuciones del horizonte; aquí se considera sólo el caso en que la distribución de probabilidad del horizonte tiene soporte finito. En *Markov Decision Processes with Random Horizon* (véase [3]) se analiza el problema de Decisión de Markov con horizonte aleatorio en el caso no homogéneo, con espacio de estados numerable y costo acotado, proporcionando un algoritmo que permite hallar una política óptima o ϵ -óptima para el caso de soporte infinito, dando como ejemplo una aplicación a sistemas de inventarios. De forma más general nosotros analizamos el Problema de Decisión de Markov con horizonte aleatorio considerando espacios de estados y acciones de Borel con costo no acotado estableciendo un resultado que, bajo ciertas condiciones, garantiza la existencia de una política óptima estacionaria. Finalmente se ejemplifica la teoría desarrollada en un problema de tipo Lineal-Cuadrático con horizonte aleatorio.

2. Teoría Básica

2.1. Modelo de Control de Markov

Un modelo de control de Markov es una quintupla

$$(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$$

donde

- (a) X es un espacio de Borel, llamado espacio de estados;
- (b) A es un espacio de Borel, llamado espacio de acciones;
- (c) $\{A(x) \mid x \in X\}$ es una familia de subconjuntos no vacíos $A(x)$ de A medibles, donde $A(x)$ denota el conjunto de controles o acciones admisibles cuando el sistema está en el estado $x \in X$, y con la propiedad de que el conjunto de pares admisibles estado-acción:

$$\mathbb{K} := \{(x, a) \mid x \in X, a \in A(x)\}$$

es un subconjunto medible de $X \times A$.

- (d) Q es un kernel estocástico sobre X dado \mathbb{K} llamado ley de transición. Es decir, es una función $Q(\cdot \mid \cdot)$ tal que $Q(\cdot \mid k)$ es una medida de probabilidad sobre X para cada $k \in \mathbb{K}$ y $Q(B \mid \cdot)$ es una función medible sobre X para cada $B \in \mathcal{B}(X)$.
- (e) $c : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, llamada función de costo por etapa.

2.2. Políticas

Sea $(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$ un modelo de control de Markov. Para cada $t = 0, 1, \dots$ se define el espacio \mathbb{H}_t de historias admisibles hasta el tiempo t como

$$\mathbb{H}_0 := X,$$

$$\mathbb{H}_t := \mathbb{K}^t \times X = \mathbb{K} \times \mathbb{H}_{t-1},$$

para $t = 1, 2, \dots$

Un elemento arbitrario h_t de \mathbb{H}_t , el cual es llamado una t -historia admisible o simplemente t -historia, es un vector de la forma

$$h_t = (x_0, a_0, \dots, x_{t-1}, a_{t-1}, x_t),$$

con $(x_i, a_i) \in \mathbb{K}$ para $i = 0, 1, \dots, t-1$ y $x_t \in X$.

Definición 2.1. Una política de control es una sucesión $\pi = \{\pi_t, t = 0, 1, \dots\}$ de kérneos estocásticos π_t sobre el conjunto de control A dado \mathbb{H}_t tal que

$$\pi_t(A(x_t) | h_t) = 1,$$

$$h_t \in \mathbb{H}_t, t = 0, 1, \dots$$

Definición 2.2. Sea Φ el conjunto de todos los kérneos estocásticos φ tales que $\varphi(A(x) | x) = 1$ para todo $x \in X$, y sea \mathbb{F} el conjunto de todas las funciones medibles $f : X \rightarrow A$ tal que $f(x) \in A(x)$ para todo $x \in X$. Las funciones en \mathbb{F} son llamadas selectores de la multifunción $x \mapsto A(x)$.

El conjunto de todas las políticas es denotado por Π y podemos tener entre otras:

- **Políticas Deterministas Markovianas**, si existe una sucesión $\{f_t\}$ de funciones $f \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_t(\cdot | h_t)$ está concentrada en $f_t(x_t) \in A(x_t)$ para todo $h_t \in \mathbb{H}_t$, $t = 0, 1, 2, \dots$, es decir

$$\pi_t(C | h_t) = I_C[f_t(x_t)] \quad \text{para todo } C \in \mathcal{B}(A).$$

- **Políticas Deterministas Estacionarias**, si existe una función $f \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_t(\cdot | h_t)$ esta concentrada en $f(x_t) \in A(x_t)$ para todo $h_t \in \mathbb{H}_t$, $t = 0, 1, 2, \dots$

2.3. Construcción canónica del espacio de probabilidad

Sea (Ω, \mathcal{F}) el espacio medible que consiste del espacio muestral canónico $\Omega := \mathbb{H}_\infty = (X \times A)^\infty$ y \mathcal{F} la σ -álgebra producto correspondiente. Los elementos de Ω son sucesiones de la forma $\omega = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots)$ con x_t en X y a_t en A para toda $t = 0, 1, 2, \dots$. Las proyecciones x_t y a_t de Ω a los conjuntos X y A son llamados estado y acción, respectivamente.

Sea $\pi = \{\pi_t\}$ una política de control arbitraria y μ una medida de probabilidad arbitraria sobre X , referida como la “distribución inicial”. Entonces por el teorema de Ionescu-Tulcea (véase [1], p. 178), existe una única medida de probabilidad P_μ^π sobre (Ω, \mathcal{F}) concentrada en \mathbb{H}_∞ , es decir, $P_\mu^\pi(\mathbb{H}_\infty) = 1$. Además, para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, $C \in \mathcal{B}(A)$ y $h_t \in \mathbb{H}_t$, $t = 0, 1, \dots$

$$P_\mu^\pi(x_0 \in B) = \mu(B),$$

$$P_\mu^\pi(a_t \in C | h_t) = \pi_t(C | h_t),$$

$$P_\mu^\pi(x_{t+1} \in B | h_t, a_t) = Q(B | x_t, a_t).$$

La última ecuación manifiesta la propiedad de Markov.

2.4. Función de rendimiento u objetivo

Sea $(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$ un modelo de control de Markov, para dicho modelo definimos los siguientes criterios de rendimiento, dichos criterios son usados para medir la calidad de cada una de las políticas de operación.

- **Costo Total Esperado.**

Sean $\pi \in \Pi$ y $x \in X$. El costo total esperado con horizonte finito N se define por

$$J(\pi, x) := E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{N-1} c(x_t, a_t) + c_N(x_N) \right],$$

donde c_N es una función medible llamada función de costo terminal.

- **Costo Total Esperado Descontado.**

Sean $\pi \in \Pi$ y $x \in X$. El costo total esperado descontado a horizonte infinito se define por

$$V(\pi, x) := E_x^\pi \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(x_t, a_t),$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ es llamado factor de descuento.

2.5. Problema de decisión de Markov

Se considera el modelo de control de Markov $(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$ y se supone que se desea minimizar, por ejemplo; la función de rendimiento con horizonte finito N dada por

$$J(\pi, x) := E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{N-1} c(x_t, a_t) + c_N(x_N) \right], \quad \pi \in \Pi, \quad x \in X.$$

Se define la función de valor óptimo como

$$J(x) := \inf_{\pi \in \Pi} J(\pi, x), \quad x \in X.$$

El problema de control óptimo o de decisión de Markov consiste en encontrar una política $\pi^* \in \Pi$ tal que

$$J(\pi^*, x) = J(x), \quad x \in X.$$

El principal método de solución a este problema es *Programación Dinámica*.

2.6. Programación Dinámica.

El siguiente teorema nos presenta un procedimiento iterativo para resolver un problema de control con horizonte finito y cuya función objetivo o criterio de rendimiento es el costo total esperado.

Teorema 2.3. Sean J_0, J_1, \dots, J_N las funciones definidas por

$$J_N(x) := c_N(x),$$

y para $t = N - 1, N - 2, \dots, 0$,

$$J_t(x) := \min_{A(x)} \left[c(x, a) + \int_X J_{t+1}(y)Q(dy | x, a) \right]. \quad (1)$$

Suponga que estas funciones son medibles y que, para cada $t = 0, 1, \dots, N - 1$, existe un selector $f_t \in \mathbb{F}$ tal que

$$J_t(x) = c(x, f_t) + \int_X J_{t+1}(y)Q(dy | x, f_t), \quad x \in X, \quad t = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2)$$

Entonces la política determinista Markoviana $\pi^* = \{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$ es óptima y la función de valor óptimo J^* es igual a J_0 , es decir,

$$J(x) = J_0(x) = J(\pi^*, x), \quad x \in X.$$

Demostración. Véase [1] p. 24. □

Como puede observarse una de las condiciones del Teorema 2.3 es la suposición de selectores medibles. Dicho supuesto puede comprobarse directamente en cada iteración o bien bajo ciertas características del modelo de control. A continuación se enuncian algunas condiciones para garantizar la existencia de selectores medibles.

Condiciones I

- (a) El conjunto de controles admisibles $A(x)$ es compacto para todo $x \in X$.
- (b) El costo por etapa c satisface que: $c(x, \cdot)$ es semicontinuo inferiormente sobre $A(x)$ para cada $x \in X$.
- (c) La función $v'(x, a) := \int_X v(y)Q(dy | x, a)$ sobre \mathbb{K} satisface cualquiera de las siguientes dos condiciones:
 - (c1) $v'(x, \cdot)$ es semicontinuo inferiormente sobre $A(x)$ para cada $x \in X$ y cada función continua y acotada v sobre X ;
 - (c2) $v'(x, \cdot)$ es semicontinuo inferiormente sobre $A(x)$ para cada $x \in X$ y cada función medible y acotada v sobre X .

Condiciones II

- (a) $A(x)$ es compacto para todo $x \in X$ y la multifunción $x \mapsto A(x)$ es semicontinua superiormente.
- (b) El costo por etapa $c(x, \cdot)$ es semicontinuo inferiormente sobre $A(x)$ para cada $x \in X$ y acotado por abajo.
- (c) La ley de transición Q satisface alguna de las condiciones siguientes:
 - (c1) débilmente continuo, esto es $v'(x, \cdot)$ es continua y acotada sobre \mathbb{K} para cada función continua y acotada v sobre X ;
 - (c2) fuertemente continuo, esto es $v'(x, \cdot)$ continua y acotada sobre \mathbb{K} para cada función medible y acotada v sobre X .

Condiciones III

- (a) El costo por etapa c es semicontinuo inferiormente, acotado por abajo e inf-compacto sobre \mathbb{K} .
- (b) La ley de transición Q es
 - (b1) débilmente continuo, o
 - (b2) fuertemente continuo

Para problemas con horizonte infinito y función de rendimiento el costo total esperado descontado consideremos lo siguiente.

Definición 2.4. En un modelo de control de Markov una función medible $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ es solución a la ecuación de optimalidad de costo α -descontado si ésta satisface que

$$v(x) = \min_{A(x)} \left[c(x, a) + \alpha \int_X v(y) Q(dy | x, a) \right], \quad x \in X.$$

Suposición 1 El costo por etapa c es semicontinuo inferiormente, no negativo e inf-compacto sobre \mathbb{K} .

Suposición 2 Q es fuertemente continuo, es decir $v'(x) = \int_X v(y) Q(dy | x, a)$ es continua y acotada sobre \mathbb{K} para cada función medible y acotada v sobre X .

Suposición 3 Existe una política π tal que $V(\pi, x) < \infty$ para cada $x \in X$.

La familia de todas las políticas que satisfacen la suposición 3 se denota por Π^0 .

Teorema 2.5. Sea $(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$ un modelo de control de Markov. Considere que las suposiciones 1, 2 y 3 se cumplen. Entonces

(a) La función de valor óptimo α -descontado V es la mínima solución a la ecuación de optimalidad de costo α -descontado, es decir,

$$V(x) = \min_{A(x)} \left[c(x, a) + \alpha \int_X V(y)Q(dy \mid x, a) \right], \quad x \in X, \quad (3)$$

y si u es otra solución a la ecuación de optimalidad de costo α -descontado, entonces $u \geq V$.

(b) Existe un selector $f_* \in \mathbb{F}$ tal que

$$V(x) = c(x, f_*) + \int_X V(y)Q(dy \mid x, f_*), \quad (4)$$

y la política determinista estacionaria f_*^∞ es óptima α -descontada; inversamente, si $f_*^\infty \in \Pi_{DS}$ es óptima α -descontada entonces satisface (4).

(c) Si π^* es una política tal que $v(\pi^*, \cdot)$ es una solución a la ecuación de optimalidad de costo α -descontado y satisface que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n E_x^{\pi^*} V(\pi^*, x_n) = 0, \quad \pi \in \Pi^0, \quad x \in X,$$

entonces $V(\pi^*, \cdot) = V(\cdot)$; por lo tanto π^* es óptima α -descontada.

(d) Si existe una política óptima α -descontada, entonces es estacionaria determinista.

Demostración. Véase [1] p. 50. □

Para hallar la función de valor óptimo, en este caso, se utiliza iteración de valores, esto es, se consideran las funciones de valores iterados definidas como

$$V_n(x) = \min_{A(x)} \left[c(x, a) + \alpha \int_X V_{n-1}(y)Q(dy \mid x, a) \right],$$

$x \in X$ y $n = 1, 2, 3, \dots$, con $V_0 = 0$, y

$$V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x), \quad x \in X.$$

3. Planteamiento del Problema

Consideremos el modelo de control de Markov $(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$ con horizonte de planeación τ , donde τ se supone que es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $P(\tau = t) = f_t$, $t = 0, 1, 2, \dots, T$, donde T puede ser finito o infinito. Definamos como criterio de rendimiento el costo total esperado de la siguiente manera:

$$J^\tau(\pi, x) := E \sum_{t=0}^{\tau} c(x_t, a_t), \quad \pi \in \Pi, \quad x \in X,$$

y la función de valor óptimo como

$$J^\tau(x) := \inf_{\pi \in \Pi} J^\tau(\pi, x), \quad x \in X.$$

Así, el problema de decisión de Markov consiste en encontrar una política $\pi^* \in \Pi$ tal que

$$J^\tau(\pi^*, x) = J^\tau(x), \quad x \in X.$$

Supongamos además que τ es independiente del proceso $\{(x_t, a_t)\}$. Bajo este supuesto

$$\begin{aligned} J^\tau(\pi, x) &= E \left[E \left(\sum_{t=0}^{\tau} c(x_t, a_t) \mid \tau \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^T \left(E_x^\pi \sum_{t=0}^n c(x_t, a_t) \right) f_n \\ &= \sum_{t=0}^T \sum_{n=t}^T E_x^\pi c(x_t, a_t) f_n \\ &= E_x^\pi \sum_{t=0}^T P_t c(x_t, a_t), \quad \pi \in \Pi, \quad x \in X, \end{aligned}$$

donde $P_t = \sum_{n=t}^{\infty} f_n = P(\tau \geq t)$. De esta manera, el problema de decisión de Markov con horizonte aleatorio τ y función objetivo el costo total esperado es equivalente a un problema de decisión de Markov con horizonte finito, cuya función objetivo es no homogénea.

Primero se analizará el caso $T < +\infty$.

Teorema 3.1. Sean J_0, J_1, \dots, J_{T+1} las funciones definidas por

$$J_{T+1}(x) := 0$$

y para $t = T, T - 1, \dots, 0$,

$$J_t(x) := \min_{A(x)} \left[P_t c(x, a) + \int_X J_{t+1}(y) Q(dy | x, a) \right]. \quad (5)$$

Bajo cualquier bloque de condiciones I, II o III, para cada $t = 0, 1, \dots, T$, existe un selector $f_t \in \mathbb{F}$ tal que en $f_t(x) \in A(x)$ se alcanza el mínimo en (5) para todo $x \in X$; esto es

$$J_t(x) = P_t c(x, f_t) + \int_X J_{t+1}(y) Q(dy | x, f_t), \quad x \in X, \quad t = 0, 1, \dots, T. \quad (6)$$

Entonces la política determinista Markoviana $\pi^* = \{f_0, f_1, \dots, f_T\}$ es óptima y la función de valor óptimo J^π es igual a J_0 , es decir,

$$J^\pi(x) = J^\pi(\pi^*, x) = J_0(x), \quad x \in X.$$

Demostración. Sea $\pi = \{\pi_t\}$ una política arbitraria y definamos

$$C_t(\pi, x) := E^\pi \left[\sum_{n=t}^T P_n c(x_n, a_n) \mid x_n = x \right], \quad t = 0, 1, \dots, T,$$

$$C_{T+1}(\pi, x) := E^\pi [c_{T+1}(x_{T+1}) \mid x_{T+1} = x] = 0.$$

Obsérvese que

$$J^\pi(\pi, x) = C_0(\pi, x), \quad (7)$$

y demostremos primero que para todo $x \in X$ y $t = 0, 1, \dots, T + 1$

$$C_t(\pi, x) \geq J_t(x)$$

y con $\pi = \pi^*$

$$C_t(\pi^*, x) = J_t(x).$$

Realizando inducción hacia atrás, tenemos que para $t = T + 1$

$$C_{T+1}(\pi, x) = 0 = J_{T+1}(x).$$

Luego, supongamos que para algún $t = T, T - 1, \dots, 0$

$$C_{t+1}(\pi, x) \geq J_{t+1}(x) \quad \forall x \in X.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} C_t(\pi, x) &= E^\pi \left[P_t c(x_t, a_t) + \sum_{n=t+1}^T P_n c(x_n, a_n) \mid x_t = x \right] \\ &= \int_A \left[P_t c(x, a) + \int_X C_{t+1}(y) Q(dy | x, a) \right] \pi_t(da | x), \end{aligned}$$

y por la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} C_t(\pi, x) &\geq \int_A \left[P_t c(x, a) + \int_X J_{t+1}(y) Q(dy | x, a) \right] \pi_t(da | x) \\ &\geq \min_{A(x)} \left[P_t c(x, a) + \int_X J_{t+1}(y) Q(dy | x, a) \pi_t(da | x) \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $C_t(\pi, x) \geq J_t(x)$. Por otro lado, si $C_{t+1}(\pi, x) = J_{t+1}(x) \forall x \in X$ con $\pi = \pi^*$, $\pi_t(\cdot | h_t)$ es la medida de Dirac concentrada en $f_t(x_t)$, entonces se mantiene la igualdad en los cálculos previos obteniendo $C_t(\pi, x) = J_t(x)$. Luego, si $C_t(\pi, x) \geq J_t(x)$, en particular para $t = 0$, usando (7), se tiene que

$$J^\tau(\pi, x) \geq J_0(x)$$

y para $\pi = \pi^*$

$$J^\tau(\pi^*, x) = J_0(x).$$

□

Observación 3.2. Haciendo el cambio

$$V_t(x) = \frac{J_t(x)}{P_t},$$

podemos reescribir la ecuación de programación dinámica dada en (5) de la siguiente forma equivalente

$$V_t(x) := \min_{A(x)} \left[c(x, a) + \alpha_t \int_X V_{t+1}(y) Q(dy | x, a) \right], \quad (8)$$

donde

$$\alpha_t = \frac{P_{t+1}}{P_t}.$$

Obviamente el caso $T < \infty$ resulta ser no complicado. El caso interesante es cuando la distribución del horizonte τ tiene soporte infinito, esto es cuando $T = \infty$.

Sea

$$\begin{aligned} V^\tau(\pi, x) &:= E \sum_{t=0}^{\tau} c(x_t, a_t) \\ &= E_x^\pi \sum_{t=0}^{\infty} P_t c(x_t, a_t), \quad \pi \in \Pi, \quad x \in X \end{aligned}$$

y

$$V^\tau(x) := \inf_{\pi \in \Pi} V^\tau(\pi, x), \quad x \in X.$$

En la siguiente sección se darán condiciones sobre la distribución de τ que permiten resolver el problema de Decisión de Markov correspondiente.

4. Resultado Principal

Para cada $n = 1, 2, \dots$, definamos

$$V_n^\tau(\pi, x) := E_x^\pi \sum_{t=0}^n P_t c(x_t, a_t), \quad \pi \in \Pi, \quad x \in X.$$

Por el teorema de la convergencia monótona

$$V^\tau(\pi, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^\tau(\pi, x), \quad \pi \in \Pi, \quad x \in X.$$

Más adelante se probará que, bajo ciertas condiciones también

$$V^\tau(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^\tau(x), \quad x \in X,$$

donde

$$V_n^\tau(x) = V_n^\tau(\pi^*, x) = \inf_{\pi \in \Pi} V_n^\tau(\pi, x), \quad x \in X.$$

Observación 4.1. $V_n^\tau(x)$ se obtiene mediante la ecuación de programación dinámica

$$\begin{aligned} V_0^\tau(x) &:= 0; \\ V_t^\tau(x) &:= \min_{A(x)} \left[c(x, a) + \alpha_t \int_X V_{t+1}^\tau(y) Q(dy | x, a) \right], \quad t = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

de acuerdo con el Teorema 3.1 y la Observación 3.2.

Retomemos las suposiciones del Teorema 2.5 para nuestro problema, estas son:

Suposición 1 El costo por etapa c es semicontinuo inferiormente, no negativo e ínf-compacto sobre \mathbb{K} .

Suposición 2 Q es fuertemente continuo, es decir $v'(x) = \int_X v(y) Q(dy | x, a)$ es continua y acotada sobre \mathbb{K} para cada función medible y acotada v sobre X .

Suposición 3 Existe una política π tal que $V^\tau(\pi, x) < \infty$ para cada $x \in X$.

Además consideremos la siguiente suposición.

Suposición 4 $\alpha_t \leq \alpha_{t+1}$ para cada $t = 0, 1, 2, \dots$ y sea $\bar{\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t$.

Lema 4.2. Sea u y u_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ funciones semicontinuas inferiormente, acotadas por abajo e ínf-compactas sobre \mathbb{K} . Si $u_n \uparrow u$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{A(x)} u_n(x, a) = \min_{A(x)} u(x, a), \quad x \in X.$$

Demostración. Véase [1] p. 48. □

Definición 4.3. Sea $M(X)^+$ el cono de funciones medibles no negativas sobre X . Para cada $u \in M(X)^+$, Tu es el operador sobre X definido como

$$Tu(x) := \min_{A(x)} \left[c(x, a) + \bar{\alpha} \int_X u(y) Q(dy | x, a) \right], \quad x \in X.$$

Lema 4.4. *Bajo la Suposición 1, para cada $u \in M(X)^+$, $Tu \in M(X)^+$ y además existe un selector $f \in \mathbb{F}$ tal que*

$$Tu(x) = c(x, f) + \bar{\alpha} \int_X u(y) Q(dy | x, f), \quad x \in X.$$

Demostración. Véase [1] p. □

Lema 4.5. *Considere que las Suposiciones 1, 2 y 4 se cumplen. Si $u \in M(X)^+$ es tal que $u \geq Tu$ entonces $u \geq V^r$.*

Demostración. Sea $u \in M(X)^+$ que satisface $u \geq Tu$ y, de acuerdo al Lema 4.4; sea $f \in \mathbb{F}$ tal que

$$u(x) \geq c(x, f) + \bar{\alpha} \int_X u(y) Q(dy | x, f), \quad x \in X.$$

Iterando esta desigualdad obtenemos

$$u(x) \geq E_x^f \left[\sum_{t=0}^{n-1} \bar{\alpha}^t c(x_t, f) \right] + \bar{\alpha}^n E_x^f u(x_n), \quad \forall n \geq 1, x \in X,$$

donde

$$E_x^f u(x_n) = \int u(y) Q^n(dy | x, f),$$

siendo $Q^n(\cdot | x, f)$ el kernel de transición de n pasos del proceso de Markov $\{x_t\}$ cuando se usa f^∞ . Usando el hecho de que $\alpha_t \leq \bar{\alpha}$ para cada $t = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{t=0}^{n-1} \bar{\alpha}^t c(x, f) \geq \sum_{t=0}^{n-1} \alpha_0 \cdots \alpha_{t-1} c(x, f) = \sum_{t=0}^{n-1} P_t c(x, f);$$

por lo tanto

$$u(x) \geq E_x^f \left[\sum_{t=0}^{n-1} P_t c(x, f) \right] + \bar{\alpha}^n E_x^f u(x_n), \quad \forall n \geq 1, x \in X.$$

Luego, como u es no negativa

$$u(x) \geq E_x^f \left[\sum_{t=0}^{n-1} P_t c(x, f) \right], \quad \forall n \geq 1, x \in X.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ y de la definición de V^τ se obtiene

$$u(x) \geq V^\tau(f, x) \geq V^\tau(x).$$

□

Lema 4.6. *Si las Suposiciones 1-4 se cumplen, entonces $V_n^\tau \uparrow V^\tau$ y V^τ satisface la ecuación de optimalidad*

$$V^\tau(x) = c(x, f) + \bar{\alpha} \int_X V^\tau(y) Q(dy | x, f), \quad x \in X.$$

Demostración. Como c es no negativo

$$V_n^\tau(x) = \inf_{\Pi} V_n^\tau(\pi, x) \leq \inf_{\Pi} V^\tau(\pi, x) = V^\tau(x), \quad \forall n \geq 1, x \in X,$$

es decir

$$V_n^\tau(x) \leq V^\tau(x), \quad \forall n \geq 1, x \in X. \quad (9)$$

Además, el operador $Tu = u$ es monótono, esto es, si $u, u' \in M(X)^+$ y $u \geq u'$ entonces $Tu \geq Tu'$ y por lo tanto, para $n \geq 1$ las funciones de valores iterados forman una sucesión no decreciente en $M(X)^+$, lo cual implica $V_n^\tau \uparrow V^*$ para alguna función $V^* \in M(X)^+$. Esto a la vez, por el teorema de la convergencia monótona, implica $u_n \uparrow u$, donde

$$u_n(x, a) = c(x, a) + \alpha_t \int_X V_n^\tau(y) Q(dy | x, a),$$

$$u(x, a) = c(x, a) + \bar{\alpha} \int_X V^*(y) Q(dy | x, a),$$

y de acuerdo al Teorema 3.3.5 (ii) en [1], se tiene que u y u_n son semicontinuas e inf-compactas sobre \mathbb{K} . Así por el lema 4.2

$$V^* = \lim_n V_n^\tau = \lim_n TV_{n-1}^\tau = TV^*,$$

esto es V^* satisface $V^* = TV^*$. Resta probar que $V^* = V^\tau$. Por el lema 4.5, $V^* = TV^*$ implica $V^* \geq V^\tau$. La desigualdad contraria se obtiene de (9) y del hecho de que $V_n^\tau \uparrow V^*$. □

Teorema 4.7. *Suponga que las Suposiciones 1, 2, 3 y 4 se cumplen. Entonces*

(a) *La función de valor V^τ satisface la ecuación de optimalidad*

$$V^\tau(x) = \min_{a \in A(x)} \left[c(x, a) + \bar{\alpha} \int_X V^\tau(y) Q(dy | x, a) \right], \quad x \in X, \quad (10)$$

y si u es otra solución a la ecuación de optimalidad, entonces $u \geq V^\tau$.

(b) *Existe un selector $f_* \in \mathbb{F}$ tal que $f_*(x) \in A(x)$ logra el mínimo en la ecuación (10) para todo $x \in X$, es decir,*

$$V^\tau(x) = c(x, f_*) + \bar{\alpha} \int_X V^\tau(y) Q(dy | x, f_*), \quad (11)$$

y la política determinista estacionaria f_^∞ es óptima.*

Demostración.

(a) Del lema 4.6 se tiene que V^τ satisface la ecuación de optimalidad (10) y del lema 4.5 para $u = Tu$, entonces $u \geq V^\tau$.

(b) La existencia del selector $f_* \in \mathbb{F}$ que satisface (11) se garantiza por el Lema 4.4. Ahora, iterando (11) se muestra que

$$V^\tau(x) \geq E_x^{f_*} \left[\sum_{t=0}^{n-1} P_t c(x, f_*) \right] \quad \forall n \geq 1, \quad x \in X.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ y de la definición de V^τ se obtiene

$$V^\tau(x) \geq V^\tau(f_*^\infty, x), \quad x \in X.$$

Además

$$V^\tau(x) \leq V^\tau(\pi, x), \quad \forall \pi \in \Pi.$$

En particular

$$V^\tau(x) \leq V^\tau(f_*^\infty, x).$$

Así

$$V^\tau(x) = V^\tau(f_*^\infty, x), \quad x \in X$$

y por lo tanto f_*^∞ es óptima.

□

Observación 4.8. En la literatura existen resultados análogos al del teorema anterior, en ellos se supone que $\alpha_t = \bar{\alpha}$ para cada $t = 0, 1, \dots$. En este caso el problema de horizonte aleatorio se reduce al problema descontado con factor de descuento $\alpha = \bar{\alpha}$. El ejemplo conocido en el que sucede lo anterior es cuando el horizonte tiene distribución geométrica con parámetro p , obteniéndose $\alpha_t = 1 - p$, $t = 0, 1, 2, \dots$

Teorema 4.9. Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ $V_n^\tau \leq V_n$ y $V^\tau(x) = V(x)$.

Demostración. La prueba se realiza por inducción y es una consecuencia directa de los resultados desarrollados previamente. \square

Ejemplo 4.10. Considere un problema lineal cuadrático, esto es, el modelo de control de Markov con $X = A = A(x) = (-\infty, \infty)$, $c(x, a) = qx^2 + ra^2$ y $F(x_t, a_t) = \gamma x_t + \beta a_t + \xi_t$, donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $E[\xi_t] = 0$ y $Var[\xi_t] = E[\xi_t^2] = \sigma^2$ con horizonte aleatorio τ cuya distribución es de tipo Logarítmica, es decir, $f_k = P(\tau = k) = -\frac{(1-p)^k}{k \ln p}$, $0 < p < 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Para resolver este problema se verificarán principalmente las suposiciones 3 y 4 del Teorema 4.7 y se aplicará el Teorema 4.9 (las suposiciones 1 y 2 evidentemente se cumplen).

Para verificar la suposición 4 se tiene que,

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \frac{P_{t+1}}{P_t} \\ &= \frac{1 - \sum_{k=1}^t f_k}{1 - \sum_{k=1}^{t-1} f_k} \\ &= 1 - \frac{f_t}{\sum_{k=t}^{\infty} f_k} \\ &= 1 - \frac{-\frac{(1-p)^t}{t \ln p}}{-\sum_{k=t}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{k \ln p}} \\ &= 1 - \frac{(1-p)^t}{t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-p)^{t+j}}{t+j}} \\ &= 1 - \frac{1}{t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-p)^j}{t+j}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-p)^j}{1+\frac{j}{t}}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\bar{\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j} = 1 - p.$$

Ahora se verificará que $\alpha_t \leq \alpha_{t+1}$ para cada $t = 0, 1, 2, \dots$. Esto es, se debe probar que

$$1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-p)^j}{1+\frac{j}{t}}} \leq 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-p)^j}{1+\frac{j}{t+1}}},$$

o equivalentemente que,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-p)^j}{1+\frac{j}{t}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-p)^j}{1+\frac{j}{t+1}}. \quad (12)$$

Como para cada $j = 0, 1, 2, \dots$ se satisface que

$$\frac{1}{1+\frac{j}{t}} \leq \frac{1}{1+\frac{j}{t+1}},$$

entonces se cumple (12), verificando así la suposición 4. Para verificar la suposición 3, consideremos la política estacionaria $\pi = (-\frac{\gamma}{\beta}x, -\frac{\gamma}{\beta}x, -\frac{\gamma}{\beta}x, \dots)$ y $x_0 = x$. Al aplicar la dinámica tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma x_0 + \beta a_0 + \xi_0 = \gamma x - \beta \frac{\gamma}{\beta} x + \xi_0 = \xi_0 \\ x_2 &= \gamma x_1 + \beta a_1 + \xi_1 = \gamma \xi_0 - \beta \frac{\gamma}{\beta} \xi_0 + \xi_1 = \xi_1 \\ x_3 &= \gamma x_2 + \beta a_2 + \xi_2 = \gamma \xi_1 - \beta \frac{\gamma}{\beta} \xi_1 + \xi_2 = \xi_2 \\ &\vdots \\ x_t &= \gamma x_{t-1} + \beta a_{t-1} + \xi_{t-1} = \gamma \xi_{t-2} - \beta \frac{\gamma}{\beta} \xi_{t-2} + \xi_{t-1} = \xi_{t-1}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} V_{\tau}(\pi, x) &= E_x^{\pi} \sum_{t=0}^{\infty} P_t c(x_t, a_t) \\ &= E_x^{\pi} \sum_{t=0}^{\infty} P_t (qx_t^2 + ra_t^2) \\ &= E_x^{\pi} \sum_{t=0}^{\infty} P_t \left(q + r \frac{\gamma}{\beta} \right) \xi_{t-1}^2 \\ &= \left(q + r \frac{\gamma}{\beta} \right) \sigma^2 \sum_{t=0}^{\infty} P_t, \end{aligned}$$

como $P_t > 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_{t+1}}{P_t} = \bar{\alpha} < 1$ entonces $\sum_{t=0}^{\infty} P_t < \infty$. Por lo tanto $V_{\tau}(\pi, x) < \infty$ para la política $\pi = (-\frac{\gamma}{\beta}x, -\frac{\gamma}{\beta}x, -\frac{\gamma}{\beta}x, \dots)$.

Finalmente, de acuerdo al Teorema 4.9, la solución de este problema coincide con la solución del problema descontado con factor de descuento $\bar{\alpha}$ (véase [1] p. 70), esto es

$$V^{\tau}(x) = Cx^2 + D$$

y

$$f(x) = -\frac{\bar{\alpha}\beta\gamma C}{r + \bar{\alpha}\beta^2 C}x,$$

donde

$$C = \frac{-r + \bar{\alpha}(r\gamma^2 + q\beta^2) + \sqrt{r^2 - 2r\bar{\alpha}(r\gamma^2 - q\beta^2) + \bar{\alpha}^2(r\gamma^2 + q\beta^2)}}{2\bar{\alpha}^2 + \beta^2}$$

y

$$D = \frac{\bar{\alpha}\sigma^2 C}{1 - \bar{\alpha}}.$$

Bibliografía

- [1] O Hernández-Lerma and Jean B. Lasserre, *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [2] D Levhari and L Mirman, *Savings and Consumption with an Uncertain Horizon*, Journal of Political Economy, V.85, No. 2, 1977.
- [3] I Tetsuo and M Masao, *Markov Decision Processes with Random Horizon*, Journal of the Operations Research, V. 39, 1996.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
 Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
 Puebla, Pue. C.P. 72570
 hcs@fcfm.buap.mx
 rociOil@hotmail.com

Capítulo 7

Un estudio de la incidencia de ciclones en México vía procesos auto-recursivos de orden uno

Hugo Adán Cruz Suárez, Lourdes Pérez Amaro,
Víctor Hugo Vázquez Guevara
FCFM-BUAP

Resumen

En este Capítulo se presenta un estudio sobre la teoría de martingalas a tiempo discreto, así como su aplicación en los procesos auto-recursivos de orden uno. Se presentan simulaciones computacionales con datos artificiales para ilustrar los resultados teóricos discutidos. Posteriormente se discute el uso de la teoría estudiada en el modelado y predicción del número de ciclones que han impactado a México en el periodo 1970-2011, la información pertinente fue extraída de la página web del Servicio Meteorológico Nacional.

1. Martingalas a tiempo discreto

Existen varias aprobaciones para el término **martingala**. Una de ellas hace referencia a un tipo de proceso estocástico que básicamente cumple la identidad $E(X_{n+1}|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = x_n$. En otras palabras, esta igualdad significa que el estado promedio del proceso al tiempo futuro $n + 1$ es el valor del proceso en su último momento observado, es decir, x_n . Esto es, se trata de una ley de movimiento aleatorio que es equilibrada pues en promedio el sistema no se mueve del último momento observado. A estos procesos también se les conoce como procesos de juegos justos pues si se considera una sucesión infinita de apuestas sucesivas y si X_n denota el capital de uno de los jugadores al tiempo n , entonces la propiedad de martingala establece que el juego es justo pues en promedio el jugador no pierde ni gana en cada apuesta. Parte de la motivación para el estudio de este tipo de procesos fue demostrar la inexistencia de estrategias ventajosas en este juego de apuestas. El concepto de martingala fue incorporado a la teoría de la probabilidad por Paul Lévy, y buena parte de su desarrollo inicial fue realizado por Joseph Doob.

Las demostraciones de todos los resultados presentes en este capítulo pueden ser encontradas en [2].

Emplearemos las siglas c.s. para referirnos a casi seguramente y las siglas i.i.d. para referirnos a independiente e idénticamente distribuida.

Antes de dar la definición de Martingala, enunciemos las siguientes definiciones:

Definición 1.1. Una sucesión de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ sobre el espacio muestral, Ω , tal que

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots \subset \mathcal{F}$$

es llamada una **filtración**.

Donde \mathcal{F}_n representa nuestro conocimiento acerca del experimento aleatorio hasta el tiempo n . Así, \mathcal{F}_n contiene a todos los eventos A , tal que al tiempo n es posible decir si el evento A ha ocurrido o no.

Definición 1.2. Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es **adaptada** a una filtración $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ si X_n es \mathcal{F}_n -medible y una sucesión de variables aleatorias $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es **previsible** a una filtración $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ si X_n es \mathcal{F}_{n-1} -medible para cada $n = 1, 2, \dots$

Definición 1.3. Una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es **integrable** si:

$$E(|X|) = \int_{\Omega} |X| dP < \infty.$$

Como ya se mencionó, el concepto de martingala describe un juego justo, lo cual se observa en la tercera condición de la siguiente noción.

Definición 1.4. Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es llamada **martingala** con respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ si:

1. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es integrable,
2. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es adaptada a $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ y
3. Para cada $n = 1, 2, \dots$

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \text{ c.s.} \quad (1)$$

Cuando en lugar de (1) se cumple la desigualdad $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$ c.s., entonces el proceso es una **submartingala** y si $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ c.s., entonces es una **supermartingala**.

2. Martingalas de cuadrado integrable

Definición 2.1. Una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es de **cuadrado integrable** si:

$$E(|X|^2) = \int_{\Omega} |X|^2 dP < \infty.$$

Como paso preliminar para enunciar algunos resultados asintóticos sobre martingalas a tiempo discreto, es necesario definir lo que se entenderá de aquí en adelante como el proceso creciente de una martingala.

Definición 2.2. Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una martingala de cuadrado integrable. A la sucesión $\{\langle X \rangle_n, n \in \mathbb{N}\}$ definida por

$$\langle X \rangle_0 = 0 \quad \text{y}$$

para toda $n > 0$

$$\langle X \rangle_{n+1} = E[(X_{n+1} - X_n)^2 | \mathcal{F}_n] + \langle X \rangle_n$$

se le llama **proceso creciente** asociado a $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$.

■ Ley de los grandes números

La ley de los grandes números para martingalas generaliza la ley de los grandes números para las variables aleatorias independientes e integrables. Denotamos por

$$\langle X \rangle_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle X \rangle_n.$$

Teorema 2.3. (Primera ley de los grandes números)

Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una martingala de cuadrado integrable y sea $\{\langle X \rangle_n, n \in \mathbb{N}\}$ su proceso creciente. Entonces

1. sobre $\{\langle X \rangle_{\infty} < \infty\}$, $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge c.s. hacia una variable aleatoria X_{∞} de cuadrado integrable.
2. sobre $\{\langle X \rangle_{\infty} = \infty\}$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\langle X \rangle_n} = 0 \quad \text{c.s.}$$

Antes de enunciar la segunda ley de los grandes números denotemos a

$$f_n = \frac{\langle X \rangle_{n+1} - \langle X \rangle_n}{\langle X \rangle_{n+1}} = \frac{\Delta \langle X \rangle_{n+1}}{\langle X \rangle_{n+1}},$$

donde $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es adaptada a $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ con $0 < f_n < 1$.

Teorema 2.4. (*Segunda Ley de los grandes números*)

Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una martingala de cuadrado integrable y sea $\{\langle X \rangle_n, n \in \mathbb{N}\}$ su proceso creciente. Si $\langle X \rangle_n \rightarrow \infty$ c.s., tenemos para todo $\gamma > 0$ que

$$\left(\frac{X_n^2}{\langle X \rangle_n} \right) = o\left((\log \langle X \rangle_n)^{1+\gamma}\right) \quad \text{c.s.} \quad \text{y que}$$

$$\sum_{k=1}^n f_k \left(\frac{X_k^2}{\langle X \rangle_k} \right) = o\left((\log \langle X \rangle_{n+1})^{1+\gamma}\right) \quad \text{c.s.}$$

■ Teorema del límite central

El teorema del límite central para las variables aleatorias independientes y de cuadrado integrable se generaliza también a un teorema de límite central para martingalas.

Teorema 2.5. Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una martingala de cuadrado integrable y sea $\{\langle X \rangle_n, n \in \mathbb{N}\}$ su proceso creciente. Sea $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión determinista, positiva, creciente hacia infinito. Supongamos que:

1. Existe un límite determinista $\ell \geq 0$ tal que

$$\frac{\langle X \rangle_n}{a_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \ell.$$

2. La condición de Lindeberg se satisface, es decir, para todo $\epsilon > 0$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n E \left[|\Delta X_k|^2 I_{(|\Delta X_k| \geq \epsilon \sqrt{a_n})} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}} X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \ell) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Además, si $\ell > 0$, tenemos que

$$\sqrt{a_n} \frac{X_n}{\langle X \rangle_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\ell}\right) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

3. Procesos auto-recursivos

Los procesos auto-recursivos desempeñan un papel central en la modelación de numerosos fenómenos concretos.

Consideremos el proceso auto-recursivo de orden uno

$$M_{n+1} = \theta M_n + \varepsilon_{n+1},$$

donde el estado inicial M_0 es elegido arbitrariamente y la sucesión $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ es i.i.d., centrada ($E[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$) y de varianza $\sigma^2 > 0$ ($E[\varepsilon_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \sigma^2$). Supongamos además que M_0 y $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ son independientes. Este proceso constituye una de las más simples series de tiempo. Su estudio teórico depende de la tricotomía $|\theta| < 1$, $|\theta| = 1$ y $|\theta| > 1$. El proceso será **estable** si $|\theta| < 1$, **inestable** si $|\theta| = 1$ y **explosivo** si $|\theta| > 1$. En los tres casos, estimamos los parámetros desconocidos θ y σ^2 al tiempo n mediante

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n M_k M_{k-1}}{\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2} \quad (2)$$

y

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (M_k - \hat{\theta}_{k-1} M_{k-1})^2. \quad (3)$$

Consideremos la siguiente sucesión de variables aleatorias

$$X_n = \sum_{k=1}^n M_{k-1} \varepsilon_k.$$

donde X_n es una martingala, con proceso creciente

$$\langle X \rangle_n = \sum_{k=1}^n E[(X_k - X_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sigma^2 \sum_{k=1}^n M_{k-1}^2.$$

Además, tenemos la siguiente relación:

$$\sigma^2 \frac{X_n}{\langle X \rangle_n} = \hat{\theta}_n - \theta.$$

Como consecuencia de la Primera Ley de los Grandes Números para martingalas tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Sean $S_n = \sum_{k=0}^n M_k^2$ y $V_n = S_n/n$, tal que, en el caso estable,

$$V_n \rightarrow \ell \text{ c.s.}, \text{ donde } \ell = \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2},$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle X \rangle_n}{n} = \frac{\sigma^4}{1 - \theta^2} \text{ c.s.}$$

entonces, tenemos que

$$\widehat{\theta}_n \rightarrow \theta \text{ c.s.} \quad \widehat{\sigma}_n^2 \rightarrow \sigma^2 \text{ c.s.} \quad (4)$$

y

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) = \sqrt{n} \frac{X_n}{\langle X \rangle_n} \sigma^2 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1 - \theta^2) \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

4. Aplicación del proceso auto-recursivo

4.1. Datos de los ciclones que han impactado a México

Ciclón tropical es un término meteorológico usado para referirse a un sistema de tormentas caracterizado por una circulación cerrada alrededor de un centro de baja presión y que produce fuertes vientos y abundante lluvia.

El término “tropical” se refiere tanto al origen geográfico de estos sistemas, que se forman casi exclusivamente en las regiones tropicales del planeta, como a su formación en masas de aire tropical de origen marino. El término “ciclón” se refiere a la naturaleza ciclónica de las tormentas, con una rotación en el sentido contrario al de las agujas del reloj en el hemisferio norte y en el sentido de las agujas del reloj en el hemisferio sur.

Oficialmente, la “entrada en tierra” se produce cuando el centro de una tormenta (el centro del ojo, no su extremo), alcanza tierra. Naturalmente, las condiciones de tormenta pueden sentirse en la costa y en el interior mucho antes de la llegada. En realidad, para una tormenta moviéndose hacia el interior, las áreas de entrada en tierra experimentan la mitad de la misma antes de la llegada del centro del ojo.

Los aspectos destructivos de los ciclones tropicales, que marcan su intensidad, se deben principalmente a cuatro aspectos: viento, oleaje, marea de tormenta y lluvia.

Las tormentas que alcanzan fuerza tropical reciben un nombre, para ayudar a la hora de formular demandas del seguro, ayudar a advertir a la gente de la llegada de una tormenta y además para indicar que se trata de fenómenos importantes que no deben ser ignorados. Estos nombres se toman de listas que varían de región a región

y son renovadas. Cada año, los nombres de tormentas que hayan sido especialmente destructivas (si ha habido alguna) son “retirados” y se eligen nuevos nombres para ocupar su lugar.

Los efectos de un ciclón tropical también tienen un efecto positivo, traen consigo lluvias para las cosechas de temporada y proporcionan agua para el llenado de presas que permiten el abastecimiento de agua a las ciudades, el riego en zonas semiáridas y la generación de energía eléctrica. Una presa llena, puede funcionar hasta por más de un año.

En México el Servicio Meteorológico Nacional se encarga de captar, procesar e interpretar dichos datos con la finalidad de mantener informados a los centros de prevención y autoridades, así como a la población sobre el surgimiento, trayectoria de desplazamiento, avance y otras características de los huracanes.

Entre los meses de mayo a noviembre, en México se presentan en promedio 23 ciclones tropicales con vientos mayores a 63 km/h. Del orden de 14 ciclones tropicales ocurren en el océano Pacífico y 9 en el Golfo de México y el mar Caribe. De ellos 4 inciden cada año sobre territorio nacional o se acercan a menos de 100 km, 2 desde el Pacífico y 2 desde el Atlántico.

Es importante conocer el número de ciclones tropicales que entran a México cada año, así como sus consecuencias y aplicar acciones para disminuir el riesgo por efectos de estos, tanto en los estados costeros como en algunos del interior pues, por ejemplo, se han presentado ciclones devastadores, como el caso de Gilbert, en el golfo de México en 1988, el cual provocó muertes principalmente en la ciudad de Monterrey (ciudad no costera del estado de Nuevo León) y pérdidas económicas considerables en la zona de Cancún, Quintana Roo. En el primer caso, el río Santa Catarina sobrepasó su capacidad total, y en el segundo, el fuerte oleaje, más la acción de la marea de tormenta, removió la arena de las playas de Cancún. Otro caso importante fue en 1997 cuando apareció en el océano Pacífico el huracán Pauline, que provocó la muerte de varios cientos de personas en la costa de los estados de Oaxaca y Guerrero, resultando dañado principalmente el puerto de Acapulco, donde se produjeron flujos de escombros y de lodo, producto de las intensas lluvias que dejó a su paso el huracán sobre la zona montañosa cercana.

Es por ello que estamos interesados en estudiar sobre dicho tema. El estudio estadístico que se desarrolla en esta investigación trata sobre el número de ciclones que han impactado a México cada año y comprende 2 períodos, el primero de 1970-2011 y el segundo de 1990-2011. Los datos que se presentan en la Figura 1 fueron extraídos de la página del Servicio Meteorológico Nacional: <http://smn.cna.gob.mx/>

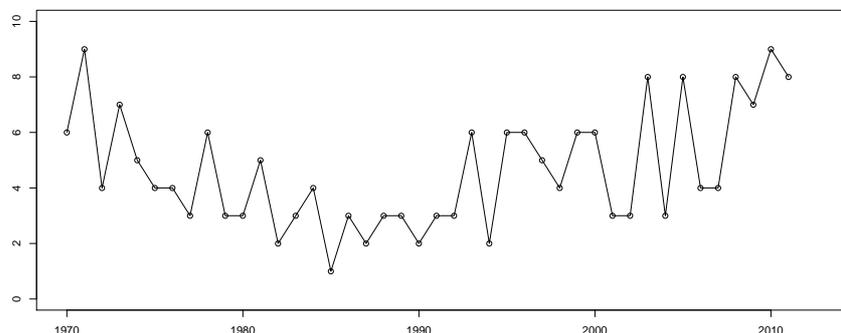


Figura 1: Número de ciclones que han impactado a México

Denotaremos a M'_i como el número de ciclones observados en el i -ésimo año a partir de 1970; es decir, $i = 1, 2, \dots, 42$ y a M''_i como el número de ciclones observados en el i -ésimo año a partir de 1990; es decir, $i = 1, 2, \dots, 22$. Por lo tanto, el tamaño de la muestra para M'_i es 42 y para M''_i es 22.

De las ecuaciones (2) y (3) obtenemos las siguientes expresiones recursivas para estimar los parámetros θ y σ^2 al tiempo $n = 42$ y $n = 22$.

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_{i-1} + \frac{1}{S_{i-1}} M_{i-1} (M_i - \hat{\theta}_{i-1} M_{i-1}) \quad \text{y}$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \left(1 - \frac{1}{i}\right) (\hat{\sigma}_{i-1}^2) + \frac{1}{i} (M_i - \hat{\theta}_i M_{i-1})^2 \quad (6)$$

donde $i \geq 2$, $\hat{\theta}_1 = 0$ y $\hat{\sigma}_1^2 = M_1^2$.

Cabe señalar que M_i toma los valores de M'_i y M''_i según sea el caso.

Hemos utilizado el software estadístico R para la estimación de los parámetros anteriores, ver el comportamiento de ε y predecir el número de ciclones en el año 2012. Además de estimar los parámetros con datos artificiales y comprobar (5).

En la Figura 2 observamos las estimaciones de los parámetros θ y σ^2 cuando tenemos $n = 42$ datos y en la Figura 3 observamos las estimaciones de los parámetros cuando tenemos $n = 22$ datos.

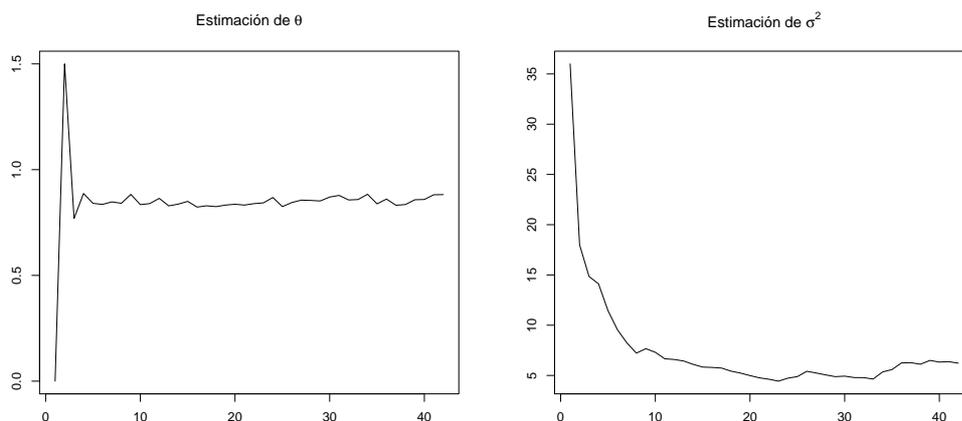


Figura 2: Estimación de los parámetros

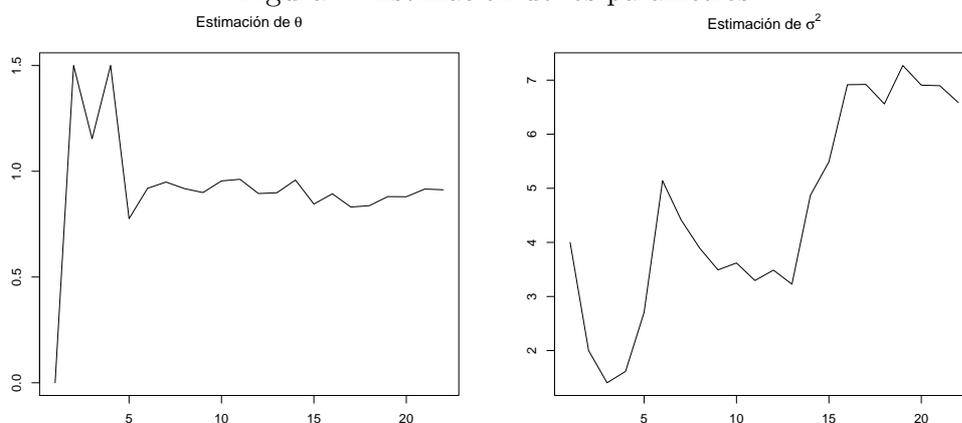


Figura 3: Estimación de los parámetros

En la siguiente tabla presentamos el último valor de los parámetros.

| | $n = 42$ | $n = 22$ |
|--------------------|-----------|-----------|
| $\hat{\theta}_n$ | 0.8818898 | 0.9124204 |
| $\hat{\sigma}_n^2$ | 6.221792 | 6.585502 |

Observamos que para ambos casos $|\hat{\theta}_n| < 1$, por lo tanto el proceso es estable.

Recientemente, Bercu B. y Proia F. (ver [1] Teorema 5.6) consideraron que las variables aleatorias $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ pueden estar correlacionadas mediante un proceso auto-recursivo de orden uno:

$$\varepsilon_{n+1} = \rho\varepsilon_n + V_{n+1},$$

en donde $|\rho| < 1$ y V_{n+1} es una sucesión de variables aleatorias i.i.d., centrada y de varianza positiva. En este marco obtuvieron una prueba basada en la estadística de

Durbin-Watson para contrastar las hipótesis

$$H_0 : \rho = \rho_0 \text{ contra } H_1 : \rho \neq \rho_0,$$

en donde ρ_0 es un valor fijo. Se consideró $\rho_0 = 0$ y se verificó que la sucesión ε_n es i.i.d.

Para el presente trabajo, primero estimamos los valores de los residuos en cada instante i , mediante la siguiente expresión:

$$\widehat{\varepsilon}_i = M_i - \widehat{\theta}_n M_{i-1},$$

donde $i \geq 2$ y $\widehat{\varepsilon}_1 = M_1$

Utilizando la prueba de Bercu B. y Proia F. ya mencionada, obtenemos que para $n = 42$, rechazamos la hipótesis nula, es decir, $\widehat{\varepsilon}_1, \widehat{\varepsilon}_2, \dots, \widehat{\varepsilon}_{42}$ no son independientes, sin embargo para $n = 22$, no rechazamos la hipótesis nula, así, tenemos independencia de $\widehat{\varepsilon}_1, \widehat{\varepsilon}_2, \dots, \widehat{\varepsilon}_{22}$. Por lo tanto consideraremos los datos del número de ciclones que impactaron a México desde 1990.

Luego, con la prueba Anderson-Darling no rechazamos la hipótesis nula que nos dice que los residuos siguen una Distribución Normal, con un nivel de significancia igual a 0.01, y observamos dicho comportamiento en la Figura 4.

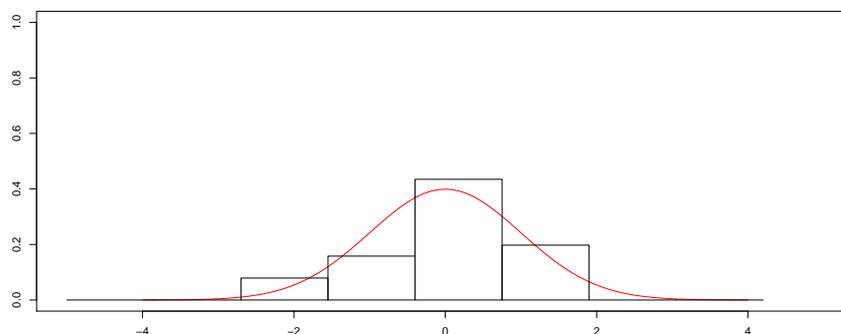


Figura 4: Distribución de los residuos

Además con la prueba t-Student no rechazamos la hipótesis de media cero, con un nivel de significancia igual a 0.05, entonces los residuos tienen media cero.

Podemos decir que $\varepsilon \sim N(0, \widehat{\sigma}_{22}^2)$.

Ahora, gracias a que conocemos la distribución de ε , es posible predecir (con fines comparativos) el número de ciclones en el año 2012, mediante

$$\widehat{M}_{23} = \widehat{\theta}_{22}\widehat{M}_{22} + \varepsilon,$$

donde $\varepsilon \sim N(0, \widehat{\sigma}_{22}^2)$.

Así tenemos que el número de ciclones que impactaron a México en el año 2012 según el modelo presentado es 7, sin embargo el Servicio Meteorológico Nacional informó que fueron 6 a través de la página: <http://www.conagua.gob.mx/>.

Ahora, consideraremos las primeras diferencias de nuestros 22 datos para tener un proceso estacionario, como se muestra en la Figura 5.

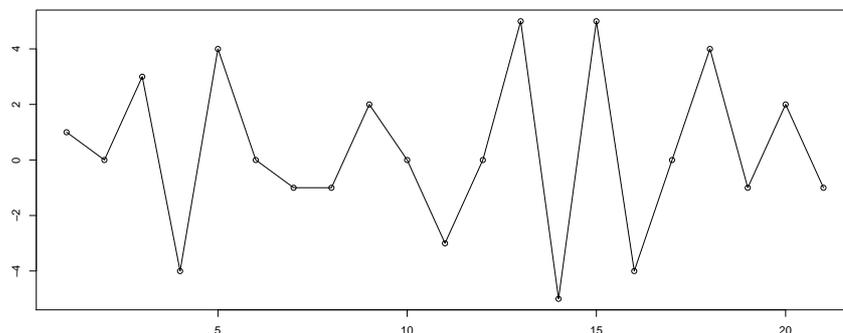


Figura 5: Primeras Diferencias

Luego en la Figura 6 observamos la estimación de los parámetros θ y σ^2 , donde $\widehat{\theta}_{21} = -0.6331361$ y $\widehat{\sigma}_{21}^2 = 4.412827$

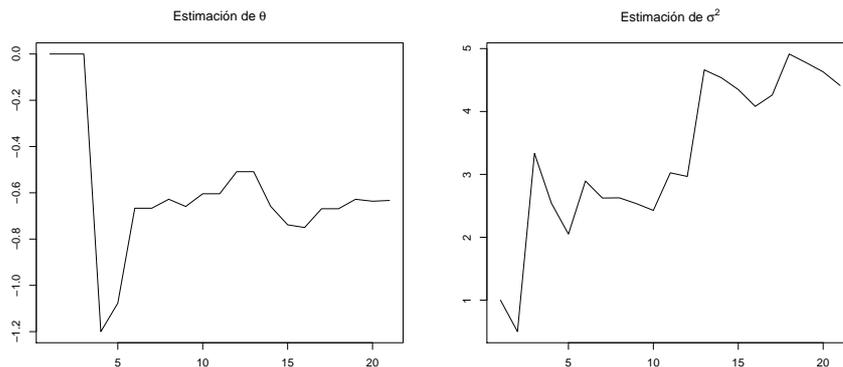


Figura 6: Estimación de los parámetros con Primeras Diferencias

y tenemos que $|\widehat{\theta}_{21}| = |-0.6331361| < 1$, así el proceso es estable.

Luego con la prueba de Bercu B. y Proia F., no rechazamos la hipótesis nula, es decir, obtenemos independencia de $\widehat{\varepsilon}_1, \widehat{\varepsilon}_2, \dots, \widehat{\varepsilon}_{21}$ y con la prueba de Anderson-Darling tampoco rechazamos nuestra hipótesis nula y por lo tanto podemos decir que los residuos siguen una distribución Normal, observando dicho comportamiento en la Figura 7

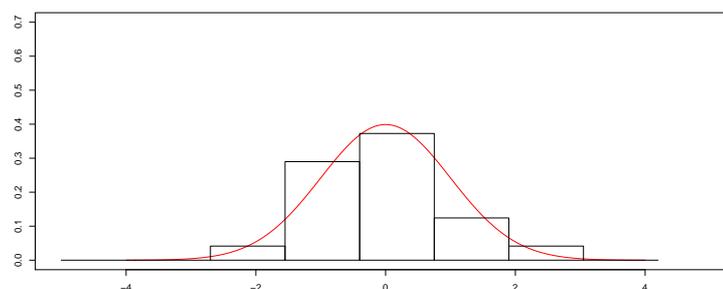


Figura 7: Distribución de los residuos con Primeras Diferencias

Además con la prueba t-Student no rechazamos nuestra hipótesis nula que nos dice que los residuos tienen media cero.

Podemos decir por lo tanto que $\varepsilon \sim N(0, \widehat{\sigma}_{21}^2)$.

Ahora, nuestra predicción estará dada por

$$\widehat{M}_{23} = D_{22} + \widehat{M}_{22},$$

donde $D_{22} = \widehat{\theta}_{21} D_{21} + \varepsilon$ y $\varepsilon \sim N(0, \widehat{\sigma}_{21}^2)$.

Llegamos a que el número de ciclones que impactaron a México en el año 2012 fueron 9, con primeras diferencias, sin embargo, como ya lo habíamos mencionado, el Servicio Meteorológico Nacional informó que fueron 6.

4.2. Datos artificiales

Nuestros datos artificiales estarán dados por el proceso auto-recursivo de orden uno

$$M_n = \theta M_{n-1} + \varepsilon_n$$

donde $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$, al igual que M_1 .

Consideremos $\theta = 0.3$ y $\sigma^2 = 2$, y obtenemos 30000 observaciones del proceso M_n .

De las ecuaciones recursivas (6) estimamos los parámetros θ y σ^2 , observando una mejor estimación conforme n crece, como lo muestra la Figura 8.

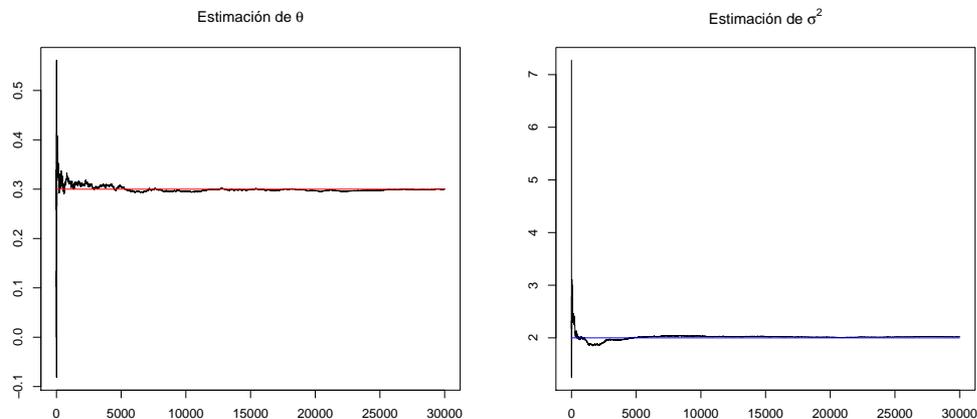


Figura 8: Estimación de los parámetros

Luego, obtenemos que $\hat{\theta}_{30000} = 0.300324$ y $\hat{\sigma}_{30000}^2 = 2.023835$. Por lo tanto corroboramos las convergencias (4).

Finalmente, hacemos 1000 realizaciones de $\hat{\theta}_{30000}$: $\hat{\theta}_{30000}^1, \hat{\theta}_{30000}^2, \dots, \hat{\theta}_{30000}^{1000}$ y definimos

$$Z_k = \frac{\sqrt{30000}[\hat{\theta}_{30000}^k - .3]}{\sqrt{1 - (.3)^2}} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 1000.$$

Luego, representamos el siguiente histograma de $Z_1, Z_2, \dots, Z_{1000}$

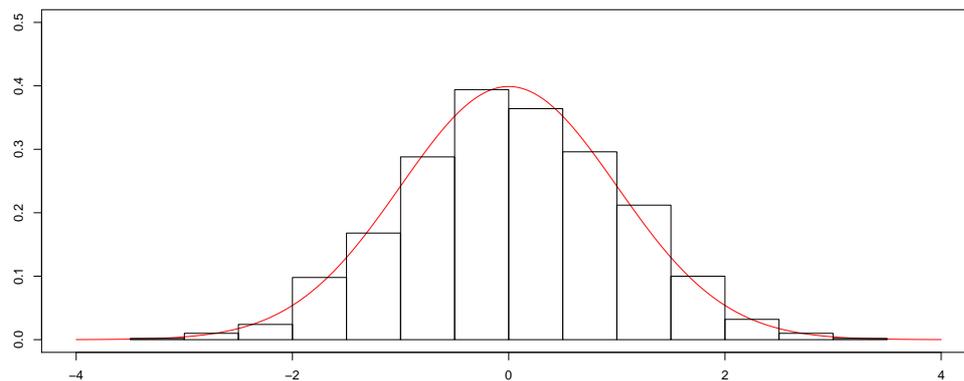


Figura 9: Distribución de Z

observando que Z aproximadamente tiene una distribución Normal estandar como se esperaba.

Conclusiones

Mediante el uso de la teoría básica de Martingalas y de los procesos auto-recursivos fue posible modelar el comportamiento del número de ciclones que impactaron a México de 1990 a 2011, con la finalidad de predecir el número de ciclones en el año 2012.

Anexando el número de ciclones que realmente hubo en el año 2012, pronosticamos de manera análoga el número de ciclones para el año 2013 y 2014. Así, pronosticamos 5 ciclones para el año 2013 y 2014 sin diferencias y con diferencias pronosticamos 7 ciclones para el 2013 y 6 para el 2014.

Además, mediante el uso de simulaciones computacionales, algunos de los resultados referentes a la estimación de los parámetros del modelo auto-recursivo de orden uno (convergencia c.s. y Teorema de límite central para martingalas) fueron ilustrados.

Bibliografía

- [1] Bercu, Proia, *A sharp analysis on the asymptotic behavior of the Durbin-Watson statistic for the first order autoregressive process*, ESAIMPS, Vol. 16, 2012.
- [2] Pérez Amaro, *Procesos auto-recursivos de orden uno, su relación con las martingalas y su aplicación en la predicción de ciclones en México*, Tesis de Licenciatura, 2013.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

hcruz@fcfm.buap.mx
200514126@alumnos.fcfm.buap.mx
vvazquez@fcfm.buap.mx

Capítulo 8

El precio de una opción barrera de tipo down and out

Nelva Betzabel Espinoza Hernández¹, Carlos Palomino Jiménez¹, Héctor David Ramírez Hernández¹, Francisco Solano Tajonar Sanabria²
FCC-BUAP¹, FCFM-BUAP²

Resumen

En la valuación de opciones se entiende que el valor de un call europeo con una barrera de tipo down-and-out depende de la barrera. En este trabajo se analiza la valuación de una opción barrera simple del tipo down and out.

1. Introducción

Actualmente los procesos que surgen dentro de las bolsas de valores modernas son muy diversos y complejos. La teoría moderna de las matemáticas financieras [9], las cuales pretenden describir estos procesos y predecir su dirección, se finca en los logros y por supuesto de la experiencia de más 300 años de teoría de la probabilidad, así como de otras ramas de las matemáticas, sin excluir la ayuda de las computadoras dotadas con un software sofisticado.

La matemática financiera es uno de los campos de más rápido desarrollo en el campo del mundo moderno bancario y corporativo. La creciente sofisticación de los productos financieros ha propiciado un fuerte ímpetu para este desarrollo, debe ser claro que nadie que trabaje en los mercados de valores puede prescindir de sus métodos.

El objetivo principal de las matemáticas financieras es la construcción e investigación de los modelos matemáticos de los procesos que representan los mercados financieros. Su importancia yace en que estos modelos se emplean en el diseño de diferentes tipos de estrategias de inversión. Para que un modelo matemático sea funcional, se debe tomar en cuenta con suficiente precisión las características más relevantes de los procesos financieros involucrados, pero a la vez debe ser lo suficientemente sencillo para admitir una investigación matemática a fondo y una implementación computacional efectiva. Como consecuencia ningún modelo por sí sólo podrá ser adecuado para todas las posibles aplicaciones que se originan en los mercados financieros.

2. Tipos de Opciones

Las opciones pueden dividirse en dos clases amplias: *Opciones Call (compra)* y *Opciones Put (venta)*.

Definición 2.1. Un Call es un valor que le da a su dueño el derecho de comprar un número fijo de acciones de una empresa especificada, en un precio especificado, en un momento permitido hasta una fecha especificada.

Definición 2.2. Un Put es un contrato que le da a su tenedor el derecho de vender un número fijo de acciones de una empresa especificada, en un precio especificado, en un momento permitido hasta una fecha especificada.

Se debe señalar que el valor que puedan tener las opciones dependen de otro valor, que corresponde a la acción o bien subyacente, y a las cuales se les conoce como derivados financieros.

La opción más conocida y popular, la cual es más sencilla de analizar, es la opción europea. Para una opción europea, la fecha de vencimiento T y el precio de ejercicio K están dados de antemano. En particular, el tenedor no puede ejercer la opción con anterioridad a la fecha de vencimiento. Igual que para la mayoría de las opciones, tienen sus versiones put y call. Un put europeo normalmente se compra cuando el tenedor cree que el precio de la acción bajará.

Las opciones han existido en una forma u otra durante muchos años, por ejemplo, para proveer protección en negocios, de la protección agrícola. Sin embargo, hace varias décadas eran instrumentos financieros poco conocidos, puesto que los contratos de opciones generalmente eran concertados en circunstancias improvisadas (ad hoc), haciéndolos bastante costosos.

La *opción europea* como ya se dijo anteriormente es la opción más popular, pero existen otras que también son utilizadas muy frecuentemente. Una de éstas es la llamada opción americana que difiere de la europea en que puede ejercerse en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento T ; el precio de ejercicio K nuevamente tiene un valor pre-especificado. Las opciones americanas están entre las opciones más populares en los mercados financieros porque el tenedor de la opción tiene la oportunidad de ejercer su derecho cuando lo desee (hasta la fecha T) y esto puede reflejarse en el valor de la opción.

La *opción asiática* le dá al tenedor el derecho de comprar (para un call) o de vender (para un put) las acciones subyacentes al precio que es el promedio del precio de la acción hasta la fecha de vencimiento especificada T . Las opciones asiáticas comparten con las europeas la característica de que no pueden ser ejercidas antes de la fecha de vencimiento T .

Las opciones asiáticas son populares en algunos mercados de “commodities”. Esto debido a que si una firma piensa comprometerse a comprar o vender una cantidad

grande de mercancías en el futuro, entonces es atractivo basar la operación en algún tipo de precio promedio.

Las opciones lookback le dan al tenedor el derecho de vender o de comprar (según sea un put o un call) a un precio igual al máximo o mínimo del precio de la acción hasta la fecha establecida T .

Las opciones digitales (ó binarias) son un contrato cuya liquidación depende del activo subyacente. Las opciones digitales más simples son cash or nothing y asset or nothing. Un ejemplo particular de una opción digital es la llamada opción supershare (SS).

La liquidación de una opción supershare al final del periodo es

$$SS_T = \frac{S_T}{K_1} I_{\{K_1 < S_T < K_2\}} \quad (1)$$

para constantes positivas $K_1 < K_2$.

Aplicando el procedimiento de la demostración del Teorema 1.8 dado en [10], se puede describir el modelo de la siguiente manera,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial SS}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 SS}{\partial S^2} + rS \frac{\partial SS}{\partial S} - rSS = 0 & S > 0, t < T, \\ SS(S, T) = \frac{S_T}{K_1} & K_1 < S < K_2, \\ SS(0, t) = 0 & t < T, \\ SS(S, t) \rightarrow 0 & S \rightarrow \infty, t < T; \end{array} \right.$$

y su solución, es el precio de la opción supershare;

$$SS(S, t) = \frac{S}{K_1} (N(g_1) - N(g_2)),$$

donde

$$g_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K_1}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

y

$$g_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K_2}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Los mercados financieros actualmente también trabajan con opciones barreras [6, 11, 12], las cuales se pueden ejercer si durante la vida de la opción el precio de la acción subyacente es siempre mayor (o siempre menor) que cierto valor X_0 (la barrera) o alternativamente, si esta barrera se alcanza durante la vida de la opción. A diferencia de las opciones de tipo europeo, el valor del derecho contingente de una opción barrera no está dado por ninguna función que dependa del precio final de la acción solamente, también depende de toda la historia bursátil.

Además de lo anterior, las opciones barreras son opciones que dependen de las trayectorias. Una opción que depende de la trayectoria es una opción cuyo pago no solo

depende del precio del bien subyacente al expirar; si no que también depende de la historia pasada.

Las opciones barreras difieren de las opciones vainilla en que parte del contrato de la opción se activa si el precio del bien subyacente, S , alcanza una cierta barrera, B , en un tiempo anterior a expirar. El derecho a ejercer la opción puede ser abandonado en ésta barrera, una barrera out, o la opción solo existe si el precio del bien cruza un cierto valor, una barrera in. Las opciones barrera pueden ser un put o un call y son clasificadas como sigue:

- Sube y sale (up-and-out): La opción caduca sin valor si el precio de la acción sube hasta la barrera $S = X_0$ (i.e., la barrera es alcanzada desde abajo) antes del día del vencimiento.
- Baja y entra (down-and-in): La opción caduca sin valor a menos que la barrera $S = X_0$ sea alcanzada desde arriba antes del vencimiento.
- Baja y sale (down-and-out): La opción caduca sin valor si el precio de la acción cae hasta la barrera $S = X_0$ (i.e., la barrera es alcanzada desde arriba) antes del vencimiento.
- Sube y entra (up-and-in): La opción caduca sin valor a menos que la barrera $S = X_0$ sea alcanzada desde abajo antes del vencimiento.

Frecuentemente una rebaja es permitida, por lo que el tenedor de la opción recibe un monto especificado si la barrera es alcanzada, en el caso de barreras out o no cruzadas en el caso de barreras in.

Una de las características por las cuales las opciones barreras son populares es por que tienen menor costo que las opciones vainilla; esto es por que las opciones vainilla suponen una vista más precisa de la dirección del mercado. Es por esto que en este trabajo nos ocuparemos de estas opciones con una barrera.

Existen mucho tipos diferentes de opciones con barreras (barrera europea, barrera americana, barrera asiática, etc.), según el tipo de pago.

Se debe señalar que en la literatura de matemáticas financieras [4, 5, 7, 8, 9, 14, 15] tratan principalmente sobre la valuación de las opciones más comunes: las europeas y las americanas. Recientemente, al menos en el marco teórico, surge el estudio de la valuación de opciones barreras [11], las cuales solo se han modelado con un activo. Es importante notar que en la mayoría de los textos elementales no se toca a profundidad el tema de las opciones barreras. Germán [3] deriva el precio de una opción con dos barreras de tipo knock-and-in. En textos tales como Wilmott, et al. [10] presentan un enfoque unificado para modelar derivados financieros, como ecuaciones diferenciales parciales así como también expone porqué la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales son de las mejores aproximaciones para modelar problemas financieros, así como también muestran técnicas de modelación. Pelsser [1] obtiene una fórmula para

la evaluación de una opción con dos barreras utilizando la transformada de Laplace. Fusai et al., [2] proponen una solución analítica para el precio de una opción barrera discreta, reducen el problema de valuación a una ecuación de Wiener-Hopf que puede ser resuelta analíticamente, todo esto dentro del marco de Black-Scholes. Poulsen [13], utiliza un resultado de reflexión para dar demostraciones simples de fórmulas de valuación para opciones con una barrera con cero rebaja en el modelo de Black-Scholes.

Para valuar y proteger derivados de seguridad es necesario e importante tener un buen modelo de distribución de probabilidad del producto subyacente. El modelo más famoso de tiempo continuo es el célebre modelo de Black-Scholes el cual utiliza la distribución normal para ajustar los precios de las acciones subyacentes.

3. Valuación de una opción call europeo con barrera en el marco de Black-Scholes

En esta sección se trabaja con la opción supershare con una barrera del tipo down-and-out. Se sabe que al expirar el contrato de la opción, su pago está dado por (1), siempre que S no se encuentre por debajo de la barrera X_0 . Si S alcanza X_0 entonces la opción pierde su valor. Por supuesto el supershare down-and-out cuesta menos que el correspondiente supershare, pues se tiene el riesgo adicional del knock-out con la pérdida prematura de la prima (la cual se paga al inicio cuando se firma el contrato). Bajo las suposiciones usuales del modelo de Black-Scholes, se tiene una fórmula explícita para el valor justo de esta opción. Solo se considerará en detalle el caso en donde la barrera inferior se coloca debajo del precio strike de la opción, $K > X_0$. Supóngase que estamos por arriba de la barrera, el precio de la opción $S > X_0$ en el tiempo t y que se tiene un call down-and-out. Suponiendo que en el siguiente tiempo infinitesimal la barrera no es tocada, se puede aplicar el análisis de cobertura de Black-Scholes para mostrar que el valor de la opción supershare con una barrera $SS_{DAO}(S, t)$ satisface la ecuación de Black-Scholes [12]

$$\frac{\partial SS_{DAO}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 SS_{DAO}}{\partial S^2} + rS \frac{\partial SS_{DAO}}{\partial S} - rSS_{DAO} = 0. \quad (2)$$

Por supuesto esta ecuación solo se cumple para $X_0 < S < \infty$. La opción vale cero para $S < X_0$.

La condición final para la ecuación (2) es

$$SS_{DAO}(S, T) = \frac{S_T}{K_1} I_{\{K_1 < S_T < K_2\}} \quad (3)$$

para $X_0 < S < \infty$.

La segunda condición de frontera se aplica en $S = X_0$ i.e., si S alcanza X_0 entonces la opción expira sin valor; esto se traduce en la siguiente condición

$$SS_{DAO}(X_0, t) = 0, t < T \quad (4)$$

y por último

$$SS_{DAO}(S, t) \sim S \text{ cuando } S \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Esto completa la formulación del problema de la opción supershare con una barrera. Ahora, supongamos que $K_2 > X_0$. Haciendo los cambios de variable

$$S = K_1 e^x, \tau = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}, SS_{DAO}(S, t) = K_1 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau), \quad (6)$$

donde

$$\alpha = -\frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right), \beta = \alpha = \ln \left(\frac{K_{1,2}}{K_1} \right),$$

en el problema (2)-(5) tenemos la siguiente ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \tau > 0, \quad x_1 < x, \quad (7)$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = \frac{e^{(1-\alpha)x}}{K_1} I_{\{0 < x < k_2\}}, \quad (8)$$

la condición de frontera

$$u(x_1, \tau) = 0 \quad (9)$$

y la condición de suavidad

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{(1-\alpha)x - \beta \tau}. \quad (10)$$

En adelante, denotaremos con

$$x_1 = \ln \left(\frac{X_1}{K_1} \right), \quad k_{1,2} = \ln \left(\frac{K_{1,2}}{K_1} \right)$$

Para resolver este problema utilizaremos el método de imágenes, el cual se describe en la siguiente sección.

4. Método de las Imágenes

Si $u(x, \tau)$ es una solución de la ecuación de la difusión, entonces $u(\pm x + c, \tau)$ ($c \in \mathbb{R}$ una constante) también son soluciones de la ecuación de la difusión.

Sea, $u(x, \tau)$ la solución del problema usual (sin barreras) es decir, del problema

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (11)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad (12)$$

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty \quad (13)$$

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{(1-\alpha)x-\beta\tau}. \quad (14)$$

Introduzcamos

$$u_1(x, \tau) = u_0(x, \tau) - u_0(2x_0 - x, \tau),$$

con $x_0 = \ln\left(\frac{X_0}{K}\right)$. Entonces $u_1(x, \tau)$ satisface (7).

Para verificar (8), se tiene que para $x > x_0$ ($x_0 \leq 0$) tenemos

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_0(x, 0) - u_0(2x_0 - x, 0) \\ &= g(x) - g(2x_0 - x) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Para verificar la condición (9), se tiene que

$$\begin{aligned} u_1(x_0, \tau) &= u_0(x_0, \tau) - u_0(2x_0 - x_0, \tau) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por último, para verificar (6) vemos lo siguiente.

Si $x \rightarrow +\infty$ entonces $(2x_0 - x) \rightarrow -\infty$. Luego $u_0(2x_0 - x, \tau) \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow +\infty$ tenemos

$$\begin{aligned} u_1(x, \tau) &= u_0(x, \tau) - u_0(2x_0 - x, \tau) \\ &\rightarrow e^{(1-\alpha)x-\beta\tau}. \end{aligned}$$

Así,

$$u_1(x, \tau) = u_0(x, \tau) - u_0(2x_0 - x, \tau)$$

es la solución del problema (7)-(10) cuando u_0 es solución del problema (7)-(10).

5. Cambio de Variables Inversos

Realizando los cambios de variables inversos

$$x = \ln\frac{S}{K_1}, \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), SS_{DAO}(S, t) = Ke^{\alpha x + \beta\tau} u_1(x, \tau),$$

con

$$\alpha = -\frac{1}{2}(m - 1), \beta = -\frac{1}{4}(m + 1)^2.$$

Aquí,

$$SS_{DAO}(S, t) = SS_1(S, t) - SS_2(S, t),$$

donde

$$SS_1(x, t) = SS(s, t)$$

es el precio de una opción supershare,

$$\begin{aligned} 2x_0 - x &= 2\ln \frac{X_0}{K_1} - \ln \frac{S}{K_1} \\ &= \ln \left(\frac{X_0}{K_1} \right)^2 \frac{K_1}{S} \\ &= \ln \frac{X_0^2}{K_1 S} \end{aligned}$$

y $x \Leftrightarrow 2x_0 - x$ corresponde a $S \Leftrightarrow \frac{X_0^2}{S}$.

$$\begin{aligned} SS_{DAO(S,t)} &= SS(S, t) - e^{2\alpha(x-x_0)} K_1 e^{2\alpha(x-x_0)+\beta\tau} u(2x_0 - x, \tau) \\ &= SS(S, t) - \left(\frac{K e^x}{K e^{x_0}} \right)^{2\alpha} SS \left(\frac{X_0^2}{S}, t \right), \end{aligned}$$

con $m = \frac{2r}{\sigma^2}$.

Así, obtenemos el valor de una opción supershare con una barrera

$$SS_{DAO} = \begin{cases} 0, & \text{si } s \leq 0, \\ SS(S, t) - \left(\frac{S}{X_0} \right)^{1-m} SS \left(\frac{X_0^2}{S}, t \right). & \end{cases}$$

Bibliografía

- [1] A. Pelsser, *Pricing double barrier options using Laplace transform*. Finance Stochastics, 4:1, 95-104, 2000.
- [2] G. Fusai, D. Abrahams, C. Sgarra, *An exact analytical solution for discrete barrier options*, Finance and Stochastics, 1-26, 2006.
- [3] H. German, *Pricing and Hedging Double-Barrier Options: A probabilistic Approach*. Math. Finance 6:4, 365-378, 1996.
- [4] I. Karatzas, *Lectures of the Mathematics of Finance*, 1997.
- [5] I. Karatzas and M. Yor, *Methods of Mathematical Finance*, 1995.
- [6] I. Nelken, *Handbook of Exotic Options*, 1995.

- [7] J. Cos and M. Rubinstein, *Option Markets*. Prentices Hall, New Yersey, 1985.
- [8] M. Musiela and M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, 2007.
- [9] P. Wilmott, J. Dewynne and S. Howison, *Option Pricing: Mathematical Model and Computation*, 1993.
- [10] P. Wilmott, J. Dewynne and S. Howison, *The Mathematics of financial derivatives: A Student Introduction*, 1995.
- [11] P. Zhang, *Exotic Options: A Guide to the Second Generation Option*, 1996.
- [12] R. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, 1973.
- [13] R. Poulsen, *Barrier Option and Their Static Hedges: Simple derivations and Extensions*, 2006.
- [14] S. Shreve, *Stochastic calculus for finance I (the binomial asset pricing model)*, 2004.
- [15] S. Shreve, *Stochastic calculus for finance II (the binomial asset pricing model)*, 2004.

Facultad de Ciencias de la Computación, BUAP
Avenida San Claudio y 14 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

nespinoza@cs.buap.mx
cpalomino@cs.buap.mx
nespinoza@cs.buap.mx
ftajonar@fcfm.buap.mx

Capítulo 9

Análisis de la mortalidad causada por la viruela y las ventajas de la inoculación como medida de prevención

Araceli Flores Solis, Francisco Solano Tajonar Sanabria
FCFM-BUAP

Resumen

En este trabajo se analiza una aplicación de la estadística a un problema real de epidemiología el cual se cita en la memoria de D. Bernoulli presentado en la Academia de Ciencias de París en 1760. Se presentan los argumentos planteados por Bernoulli sobre la inoculación como una medida preventiva contra la viruela. Se comparan las Tablas realizadas por Bernoulli y las que se construyen usando los paquetes Mathematica y Matlab.

1. Introducción

Uno de los problemas que siempre ha padecido una población es el enfrentarse a las enfermedades epidémicas, tales como la viruela y recientemente la influenza (H1N1). Este tipo de enfermedades son de tipo viral y su contagio sólo se puede dar de persona a persona. Además, los gobiernos en su afán de atender este tipo de epidemias siempre han implementado políticas de campañas de vacunación, no obstante, siempre han surgido preguntas tales como: En caso de que la población en general sea vacunada contra la viruela (variola mayor), ¿Los beneficios de la vacunación masiva son mayores que los riesgos?, ¿Cuántas muertes se producen como resultado de una campaña de vacunación masiva contra la viruela?, ¿Pueden los modelos matemáticos de vacunación contra la viruela ser utilizados para determinar la política de salud?, etc., ([1]). Aunque la viruela se declaró erradicada por la organización Mundial de la Salud en 1979, estas preguntas han sido recientemente discutidas, basadas en la premisa de que la viruela pueda ser utilizada como un arma de bioterrorismo. Por lo cual, una serie de análisis se ha publicado recientemente sobre el uso de modelos matemáticos para tratar de determinar la respuesta de salud pública más efectiva en caso de un ataque. Se debe señalar que estas mismas preguntas también fueron discutidas en el siglo XVIII ([1] y [7]).

El objetivo es realizar un análisis del trabajo presentado por Daniel Bernoulli en 1760 ante la Real Academia de Ciencias de París ([1] y [7]). Señalando que bajo los mismos supuestos que usó Bernoulli, se construyen las tablas de mortalidad en el estado con viruela y en el estado sin viruela. Haciendo uso de los paquetes de Mathematica y de Matlab, respectivamente, se obtuvieron resultados muy cercanos.

El presente trabajo se ubica dentro del análisis de supervivencia. En los últimos años, el análisis de supervivencia ha desarrollado importantes aplicaciones, en muchas áreas, dentro de las que destacan, estudios médicos, biológicos, en particular, los que están relacionados con estudios quirúrgicos, con el cáncer, con el desarrollo de enfermedades ([2],[3] y [6]). Además, existen aplicaciones que determinan el tiempo de falla en maquinaria, la durabilidad de electrodomésticos, la resistencia de materiales al calor, las cuales se pueden abordar en el contexto de la teoría de confiabilidad. Como se puede observar, para este tipo de aplicaciones, la variable de interés es el tiempo transcurrido hasta que se observa un suceso, que puede ser, la muerte, la aparición de un tumor, la recurrencia de enfermedades, dejar de fumar, falla de maquinaria, entre otros. A este tiempo, comúnmente se le llama **tiempo de supervivencia o tiempo de falla**.

2. La Viruela e Inoculación

La viruela fue una enfermedad devastadora en la Europa del siglo XVIII. La tasa de población creció de manera excesiva haciendo más fácil la propagación de la enfermedad.

La viruela fue considerada como la más terrible de todas las muertes, se estimaba que entre el 10 y 30 por ciento de todos los pacientes con viruela en una población no vacunada podía morir, mientras que aquellos que sobrevivían estaban exentos de secuelas y con frecuencia sufrían de ceguera. La tasa de supervivencia era en particular baja para los niños.

La viruela es una enfermedad infecciosa y muy contagiosa de origen viral. El período de incubación del virus es de 7 a 19 días, pero generalmente se extiende de 10 a 14 días, este inicia con fiebres repentinas, dolor de cabeza, náuseas, etc. Luego de dos a cuatro días de fiebre comienza a disminuir, produciéndose la erupción, caracterizada por la aparición de manchas rojas sobre la piel que se convierten en vesículas, después en pústulas llenas de pus, dolorosas, densas y redondas para acabar formando costras. Estas manifestaciones aparecen primero en la mucosa de la boca y faringe, luego en la cara y extremidades, para pasar por último al tronco y a las palmas de las manos y pies. Las costras aparecen alrededor del octavo o noveno día de evolución de la enfermedad, la piel del paciente se cubre con grandes y abultadas pústulas que a menudo dejan un llamativo hueco sobre la piel, y el aspecto físico del sobreviviente

espantoso.

Alrededor de la segunda década del siglo XVIII, el método de inoculación que provenía de Asia, había llegado a los países europeos.

La inoculación consistía en introducir un hilo de seda impregnado de pus que era tomado de una pústula de viruela de alguien que sufriese la enfermedad, se preparaba al paciente a inocular con una dieta blanda y con una ligera incisión hecha en el brazo, se le aplicaba a la persona a inocular, el hilo era retirado al cabo de dos días y se aislaba a la persona durante una semana, justo hasta que un breve acceso de fiebre junto con una erupción local marcaba la aparición de la enfermedad artificial. El procedimiento era arriesgado ya que la persona inoculada corría el riesgo de morir a causa de la enfermedad, este método prevaleció hasta que E. Jenner (1749-1823) descubrió la vacuna como método mucho menos arriesgado.

3. El trabajo de Daniel Bernoulli

El 30 de abril de 1760, Daniel Bernoulli (1700-1782), dió lectura ante la Real Academia de Ciencias de París, su memoria titulada, *ESSAI D'UNE NOUVELLE ANALYSE De la mortalité cauféo par la petite Vérole, des avantages de l'Inoculation pour la prévenir*. La cual fue publicada hasta 1765.

Bernoulli dice haber compuesto su memoria sobre la mortalidad de la viruela a petición de Maupertuis (1698-1759) matemático, astrónomo, biólogo francés, con importantes trabajos en genética, que le había confiado su proyecto de exponer en una misma tabla los dos estados de la humanidad, uno tal como es efectivamente y otro tal como sería si se pudiese eliminar la viruela de todo el género humano.

En la memoria de Bernoulli se presenta la primera doble tabla de vida decreciente de la historia de la ciencia, proponiendo para ello un modelo matemático del comportamiento de la viruela en una población.

La gran debilidad de este trabajo fue la falta de datos empíricos. El único dato constatado con el que Bernoulli contaba es la proporción de la mortalidad de la viruela sobre el total de muertes, considerando todas las edades: “Esta constatado por una larga serie de observaciones que la viruela se lleva a la décimo tercera o décimo cuarta parte de la generación”. Es decir, parte del supuesto constatado que, la suma de todas las muertes de viruela hace alrededor de $\frac{1}{13}$ del total de las muertes, es decir, 100 sobre su generación de 1300. Bernoulli toma como base de su cálculo la tabla de mortalidad establecida por el astrónomo inglés Halley (Tabla 1), la cual se publicó en 1693 y está basada en los registros de nacimientos y muertes de la ciudad de Breslau durante los años de 1687 a 1691. Para la preparación de esta tabla se asumió que la población de Breslau había permanecido estable (por ejemplo, el número total de la población al igual que la edad y el género no cambian en décadas), y naturalmente no fue del todo correcta, debido a que la tabla de mortalidad resultante fue imprecisa.

| x | y | x | y | x | y | x | y | x | y | x | y |
|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1000 | 15 | 628 | 29 | 539 | 43 | 417 | 57 | 272 | 71 | 131 |
| 2 | 855 | 16 | 622 | 30 | 531 | 44 | 407 | 58 | 262 | 72 | 120 |
| 3 | 798 | 17 | 616 | 31 | 523 | 45 | 397 | 59 | 252 | 73 | 109 |
| 4 | 760 | 18 | 610 | 32 | 515 | 46 | 387 | 60 | 242 | 74 | 98 |
| 5 | 732 | 19 | 604 | 33 | 507 | 47 | 377 | 61 | 232 | 75 | 88 |
| 6 | 710 | 20 | 598 | 34 | 499 | 48 | 367 | 62 | 222 | 76 | 78 |
| 7 | 692 | 21 | 592 | 35 | 490 | 49 | 357 | 63 | 212 | 77 | 68 |
| 8 | 680 | 22 | 586 | 36 | 481 | 50 | 346 | 64 | 202 | 78 | 58 |
| 9 | 670 | 23 | 579 | 37 | 472 | 51 | 335 | 65 | 192 | 79 | 49 |
| 10 | 661 | 24 | 573 | 38 | 463 | 52 | 324 | 66 | 182 | 80 | 41 |
| 11 | 653 | 25 | 567 | 39 | 454 | 53 | 313 | 67 | 172 | 81 | 34 |
| 12 | 646 | 26 | 560 | 40 | 445 | 54 | 302 | 68 | 162 | 82 | 28 |
| 13 | 640 | 27 | 553 | 41 | 436 | 55 | 292 | 69 | 152 | 83 | 23 |
| 14 | 624 | 28 | 546 | 42 | 427 | 56 | 282 | 70 | 142 | 84 | 20 |

Tabla 1: Registro de Nacimientos y Muertes de Breslau, Halley.

Bernoulli conoce esta tabla a través del autor alemán Süssmilch (1741) que supone había partido de una generación de 1238 niños, estimación del número de nacimientos en Breslau para el período considerado, y de los que sobreviven 1000 a la edad de un año. Bernoulli tenía presente las tablas de Buffon, publicadas en 1749, que daban una mortalidad infantil mucho más elevada, entonces, toma como punto de partida a la edad de cero años, una cifra arbitraria de 1300 niños, intermedia entre las estimaciones de Buffon y Süssmilch.

4. El Modelo de Daniel Bernoulli

El problema planteado es encontrar una fórmula que permita obtener, a partir de la tabla de mortalidad en el estado natural y con viruela una tabla de mortalidad del estado sin viruela.

Bernoulli se preguntaba si las tablas de vida disponibles en esa época reflejaban la mortalidad de la población, tomando en cuenta todas las causas de muerte incluyendo la viruela y ¿cómo pueden estas tablas cambiar, si la vacunación es obligatoria, y las muertes por viruela fuesen totalmente eliminadas?, con esto, Bernoulli plantea dos principios:

1. En tanto no se haya tenido la viruela, se corre continuamente el mismo riesgo de tenerla.

2. El riesgo de morir de viruela cuando se es atacado, es el mismo en toda edad.

Ante la falta de datos empíricos, Bernoulli se ve en la necesidad de introducir hipótesis, para poder realizar sus cálculos y construir su tabla. Asume que nadie puede padecer viruela más de una vez en la vida, e introduce dos proporciones que considera constantes para las diferentes edades:

1. La proporción anual de los que adquieren la viruela entre aquellos que nunca la han tenido es

$$\frac{1}{n},$$

es decir, de cada n individuos que no han tenido viruela uno la padece en el plazo de un año.

2. La proporción anual de muertes entre aquellos que enferman de viruela es

$$\frac{1}{m},$$

es decir, de cada m individuos que enferman de viruela en el mismo año, uno de ellos fallece de esta enfermedad.

De acuerdo con lo anterior, la probabilidad de que un individuo que hasta el momento no ha padecido viruela, muera de esta enfermedad en el plazo de un año, es el producto de las dos anteriores, esto es

$$\frac{1}{nm}.$$

Bernoulli trata de obtener una fórmula, que bajo supuestos razonables proporcione el número “ s ” de personas que no han tenido viruela, de una edad “ x ” en función de dicha edad y del número “ y ” de supervivientes. Además, argumenta lo siguiente:

Los supervivientes s , que no han tenido viruela decrecen por

1. Aquellos que cogen (o adquieren) la viruela (muriendo o no de ello).
2. Aquellos que mueren de otras causas sin haber tenido viruela alguna vez.

Para un elemento de tiempo dx el decrecimiento de s es $-ds$ (ds y dy , son intrínsecamente negativos debido a que s y y son decrecientes, y el signo menos, es entonces necesario para convertirlos en números positivos).

El número de ataques por viruela es

$$\frac{sdx}{n}.$$

Mientras que el número de aquellos que mueren de viruela es

$$\frac{sdx}{nm}.$$

El número total de muertes por todas las causas en un tiempo dx es $-dy$. Por tanto, el número de muertes por otras causas distintas a la viruela es

$$\frac{-dy-sdx}{nm}.$$

Pero este número relaciona a y personas, mientras que al formar una ecuación para s hemos referido el número de muertes por otras causas entre s , esto es, con $\frac{(dy-\frac{sdx}{nm})s}{y}$ muertes.

Entonces el decremento en un tiempo dx del número de individuos que no han padecido la viruela es igual a la suma de los afectados por la misma en ese tiempo, más los que han fallecido por otras causas distintas de la viruela:

$$-ds = \frac{sdx}{n} + \frac{(-dy - \frac{sdx}{nm})s}{y}. \quad (1)$$

Por tanto,

$$\frac{sdy - yds}{s^2} = \frac{ydx}{sn} - \frac{dx}{nm}.$$

Observemos que (1) es igual a

$$\begin{aligned} -ds &= s\left(\frac{dx}{n} + \frac{(-dy - \frac{sdx}{nm})}{y}\right) \\ -\frac{ds}{s} &= \frac{ydx + n\left(\frac{-nmdy - sdx}{nm}\right)}{ny} \\ -nyds &= sydx + s\frac{(-nmdy - sdx)}{m} \\ -nyds &= sydx - sndy - \frac{s^2dx}{m} \\ \frac{sdy - yds}{s^2} &= \frac{sydx}{n} - \frac{s^2dx}{nm} \\ \frac{sdy - yds}{s^2} &= \frac{ydx}{sn} - \frac{dx}{nm}. \end{aligned}$$

Tomando a

$$r = \frac{y}{s},$$

se tiene,

$$dr = \frac{sdy - yds}{s^2},$$

luego,

$$\begin{aligned}\frac{sdy - yds}{s^2} &= r \frac{dx}{n} - \frac{dx}{nm} \\ &= \frac{nmr dx - ndx}{n^2 m} \\ &= \frac{mrdx - dx}{nm},\end{aligned}$$

por consiguiente,

$$dr = \frac{mrdx - dx}{nm},$$

luego,

$$\begin{aligned}nmdr &= mrdx - dx \\ &= (mr - 1)dx.\end{aligned}$$

Así,

$$dx = \frac{nmdr}{mr - 1}. \quad (2)$$

Integrando (2) se obtiene

$$n \ln\left(\frac{my}{s} - 1\right) = x + c, \quad (3)$$

donde c es una constante por determinar. Tomando a $x = 0$, $y = s$, y sustituyendo estos valores en (3), obtenemos

$$c = n \ln(m - 1).$$

Tomemos nuevamente a (3) y sustituyendo el valor de c , que hemos encontrado, tenemos

$$\begin{aligned}n \ln\left(\frac{my}{s} - 1\right) &= x + n \ln(m - 1) \\ n \left(\ln\left(\frac{my}{s} - 1\right) - \ln(m - 1)\right) &= x \\ \ln\left(\frac{\frac{my}{s} - 1}{m - 1}\right) &= \frac{x}{n},\end{aligned}$$

tomando exponenciales en ambos lados, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\frac{my}{s} - 1}{m - 1} &= \exp\left(\frac{x}{n}\right) \\ \frac{my}{s} &= (m - 1)\exp\left(\frac{x}{n}\right) + 1 \\ my &= [(m - 1)\exp\left(\frac{x}{n}\right) + 1]s,\end{aligned}$$

entonces, la fórmula buscada es:

$$s = \frac{my}{(\mathbf{m-1})\exp\left(\frac{x}{n}\right) + 1}. \quad (4)$$

Bernoulli supuso que m y n eran conocidos (él estimaba a ambos parámetros alrededor de 8) y que eran independientes de x .

Al sustituir en (4) los valores de $m = n = 8$, se obtiene

$$s = \frac{8y}{7\exp\left(\frac{x}{8}\right) + 1}. \quad (5)$$

Esta última ecuación, es simplemente numérica y nos da las condiciones para calcular el valor de s para cada una de las edades. A continuación, se explica como se construyó cada una de las columnas, para la tabla en estado natural y estado varioloso de Bernoulli (Tabla 2).

La primera columna muestra las edades por años cumplidos y será denotado por la variable x , iniciando en 0, que corresponde a la edad de nacimiento.

La segunda columna muestra el número de personas que siguen vivos en cada edad. Esta columna se basa en la tabla de mortalidad de Halley y estos números son denotados por la variable y .

La tercera columna muestra el número de personas que aún no han tenido viruela, este número se calcula mediante la ecuación (5).

La cuarta columna muestra el número de personas que ya han tenido la viruela, se han recuperado y no han muerto de cualquier otra enfermedad y se expresa como $y - s$.

La quinta columna muestra el número de aquellos que contrajeron la viruela en ese año, por tanto $\frac{1}{8}s$, pero para mayor exactitud se toma para s la media entre los valores para ese año y el anterior, es decir, $\frac{1}{8} * \frac{s_{x-1} + s_x}{2}$.

La sexta columna muestra el número de personas que mueren de viruela durante el año, es decir, una octava parte de la quinta columna.

La séptima columna muestra la suma de todos los que han muerto de viruela, desde el nacimiento hasta completar cada año de vida.

La octava columna muestra el número de todas las demás enfermedades, aparte de la viruela durante cada año. Así, cada número de esta columna es la diferencia entre las muertes totales del año anterior, que sabemos de la segunda columna, y los que

han muerto de viruela durante el mismo año, es decir, $y_{x-1} - y_x$ - columna 6.

Como se puede observar gráficamente, los valores que se obtuvieron en la Tabla 3 y Tabla 4, son muy cercanos, entonces podemos utilizar cualquiera de las dos. Para este trabajo, se utiliza la tabla que se construyó con la rutina de Matlab.

Una contribución importante de este trabajo es la construcción de la misma tabla obtenida por Bernoulli, pero ahora, señalando que los cálculos se realizaron de forma manualmente con Mathematica, la cual se muestra en la Tabla 3.

Es claro que al realizar los cálculos manualmente resulta complicado la construcción de la tabla, por esta razón, se tuvo que recurrir a la elaboración de una rutina en Matlab, la cual nos proporciona valores muy cercanos a la Tabla 3, en menos tiempo Tabla 4.

Es de interés en este trabajo, llevar a cabo una comparación de la tabla construida por Bernoulli y la tabla que se construye usando Matlab. Como se puede notar del gráfico, los resultados son muy cercanos.

Muchos problemas han sido tomados para evaluar la ganancia que se podría obtener de la inoculación si se realizará en general, y la ventaja para cada individuo que fue inoculado. Para esto, Bernoulli dijo: He decidido por tanto, que el único camino a tomar es determinar, para la misma generación de 1300 niños recién nacidos, lo que sería el número de supervivientes al final de cada año si la totalidad de esta generación fuese liberada de la viruela o lo que es lo mismo, nadie murió de ella. Dada esta determinación será suficiente comparar los resultados con la segunda columna de la Tabla 2 para ver a simple vista la relación entre estas dos formas de vida. Entonces la forma en que podemos proceder a preparar esta nueva tabla (Tabla 5), conformándonos con un registro de la situación, año tras año, como de hecho, estamos obligados a hacer ya que no tenemos listas de mortalidad semestral que podríamos utilizar con una mejor exactitud.

| Edad años | Sobrevivi. según Halley | Sin viruela | Con viruela | Viruela por año | Muertes de viruela por año | Suma de muertes | Muertes otras causas cada año |
|-----------|-------------------------|-------------|-------------|-----------------|----------------------------|-----------------|-------------------------------|
| 0 | 1300 | 1300 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1000 | 896 | 104 | 137 | 17.1 | 17.1 | 283 |
| 2 | 855 | 685 | 170 | 99 | 12.4 | 29.5 | 133 |
| 3 | 798 | 571 | 227 | 78 | 9.7 | 39.2 | 47 |
| 4 | 760 | 485 | 275 | 66 | 8.3 | 47.5 | 30 |
| 5 | 732 | 416 | 316 | 56 | 7.0 | 54.5 | 21 |
| 6 | 710 | 359 | 351 | 48 | 6.0 | 60.5 | 16 |
| 7 | 692 | 311 | 381 | 42 | 5.2 | 65.7 | 12.8 |
| 8 | 680 | 272 | 408 | 36 | 4.5 | 70.2 | 7.5 |
| 9 | 670 | 237 | 433 | 32 | 4.0 | 74.2 | 6 |
| 10 | 661 | 208 | 453 | 28 | 3.5 | 77.7 | 5.5 |
| 11 | 653 | 182 | 471 | 24.4 | 3.0 | 80.7 | 5 |
| 12 | 646 | 160 | 486 | 21.4 | 2.7 | 83.4 | 4.3 |
| 13 | 640 | 140 | 500 | 18.7 | 2.3 | 85.7 | 3.7 |
| 14 | 634 | 123 | 511 | 16.6 | 2.1 | 87.8 | 3.9 |
| 15 | 628 | 108 | 520 | 14.4 | 1.8 | 89.6 | 4.2 |
| 16 | 622 | 94 | 528 | 12.6 | 1.6 | 91.2 | 4.4 |
| 17 | 616 | 83 | 533 | 11.0 | 1.4 | 92.6 | 4.6 |
| 18 | 610 | 72 | 538 | 9.7 | 1.2 | 93.8 | 4.8 |
| 19 | 604 | 63 | 541 | 8.4 | 1.0 | 94.8 | 5 |
| 20 | 598 | 56 | 542 | 7.4 | 0.9 | 95.7 | 5.1 |
| 21 | 592 | 48.7 | 543 | 6.5 | 0.8 | 96.5 | 5.2 |
| 22 | 586 | 42.5 | 543 | 5.6 | 0.7 | 97.2 | 5.3 |
| 23 | 579 | 37 | 542 | 5.0 | 0.6 | 97.8 | 6.4 |
| 24 | 572 | 32.4 | 540 | 4.4 | 0.5 | 98.3 | 6.5 |

Tabla 2. Tabla de Bernoulli para el estado natural y varioloso.

| Edad años | Sobrevivi. según Halley | Sin viruela | Con viruela | Viruela por año | Muertes de viruela por año | Suma de muertes | Muertes otras causas cada año |
|-----------|-------------------------|-------------|-------------|-----------------|----------------------------|-----------------|-------------------------------|
| 0 | 1300 | 1300 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1000 | 895.652 | 104.348 | 137.228 | 17.1535 | 17.1535 | 282.9 |
| 2 | 855 | 684.81 | 170.19 | 98.7789 | 12.3474 | 29.5009 | 132.653 |
| 3 | 798 | 570.767 | 227.233 | 78.4736 | 9.8092 | 39.3101 | 47.1908 |
| 4 | 760 | 484.808 | 275.192 | 65.9734 | 8.24668 | 47.5568 | 29.7533 |
| 5 | 732 | 415.976 | 316.024 | 56.229 | 7.03738 | 54.5942 | 20.9626 |
| 6 | 710 | 359.062 | 350.938 | 48.4399 | 6.05498 | 60.6492 | 15.945 |
| 7 | 692 | 311.149 | 380.851 | 41.8882 | 5.23602 | 65.8852 | 12.764 |
| 8 | 680 | 271.62 | 408.38 | 36.4231 | 4.55288 | 70.4381 | 7.44712 |
| 9 | 670 | 237.573 | 432.427 | 31.8246 | 3.97807 | 74.4162 | 6.02193 |
| 10 | 661 | 207.924 | 453.076 | 27.8436 | 3.48045 | 77.8967 | 5.51955 |
| 11 | 653 | 182.113 | 470.887 | 24.3773 | 3.04716 | 80.9439 | 4.95284 |
| 12 | 646 | 159.645 | 486.355 | 21.3599 | 2.66998 | 83.6139 | 4.33002 |
| 13 | 640 | 140.086 | 499.914 | 18.7332 | 2.34165 | 85.9556 | 3.65835 |
| 14 | 634 | 122.862 | 511.138 | 16.4343 | 2.05428 | 88.0099 | 3.94572 |
| 15 | 628 | 107.705 | 520.295 | 14.4104 | 1.8013 | 89.9112 | 4.1987 |
| 16 | 622 | 94.3794 | 527.621 | 12.6303 | 1.57878 | 91.39 | 4.42122 |
| 17 | 616 | 82.6703 | 533.33 | 11.0656 | 1.3832 | 92.7732 | 4.6168 |
| 18 | 610 | 72.3884 | 537.612 | 9.69117 | 1.2114 | 93.9846 | 4.7886 |
| 19 | 604 | 63.3646 | 540.635 | 8.48456 | 1.06057 | 95.0452 | 4.93943 |
| 20 | 598 | 55.449 | 542.551 | 7.42585 | 0.928231 | 95.9734 | 5.07177 |
| 21 | 592 | 48.5087 | 543.491 | 6.49736 | 0.81217 | 96.7856 | 5.18783 |
| 22 | 586 | 42.4259 | 543.574 | 5.68341 | 0.710427 | 97.496 | 5.28957 |
| 23 | 579 | 37.0329 | 541.967 | 4.96618 | 0.620772 | 98.1168 | 6.37923 |
| 24 | 572 | 32.3167 | 539.683 | 4.33435 | 0.541794 | 98.6586 | 6.45821 |

Tabla 3. Tabla para el estado natural y varioloso utilizando Mathematica.

| Edad años | Sobrevivi. según Halley | Sin viruela | Con viruela | Viruela por año | Muertes de viruela por año | Suma de muertes | Muertes otras causas cada año |
|-----------|-------------------------|-------------|-------------|-----------------|----------------------------|-----------------|-------------------------------|
| 0 | 1300 | 1300 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1000 | 895.65 | 104.35 | 137.23 | 17.154 | 17.154 | 282.85 |
| 2 | 855 | 684.81 | 170.19 | 98.779 | 12.347 | 29.501 | 132.65 |
| 3 | 798 | 570.77 | 227.23 | 78.474 | 9.8092 | 39.31 | 47.191 |
| 4 | 760 | 484.81 | 275.19 | 65.973 | 8.2467 | 47.557 | 29.753 |
| 5 | 732 | 415.98 | 316.02 | 56.299 | 7.0374 | 54.594 | 20.963 |
| 6 | 710 | 359.06 | 350.94 | 48.44 | 6.055 | 60.649 | 15.945 |
| 7 | 692 | 311.15 | 380.85 | 41.888 | 5.236 | 65.885 | 12.764 |
| 8 | 680 | 271.62 | 408.38 | 36.423 | 4.5529 | 70.438 | 7.4471 |
| 9 | 670 | 237.57 | 432.43 | 31.825 | 3.9781 | 74.416 | 6.0219 |
| 10 | 661 | 207.92 | 453.08 | 27.844 | 3.4804 | 77.897 | 5.5196 |
| 11 | 653 | 182.11 | 470.89 | 24.377 | 3.0472 | 80.944 | 4.9528 |
| 12 | 646 | 159.65 | 486.35 | 21.36 | 2.67 | 83.614 | 4.33 |
| 13 | 640 | 140.09 | 499.91 | 18.733 | 2.3416 | 85.955 | 3.6584 |
| 14 | 634 | 122.86 | 511.14 | 16.434 | 2.0543 | 88.01 | 3.9457 |
| 15 | 628 | 107.71 | 520.29 | 14.41 | 1.8013 | 89.811 | 4.1987 |
| 16 | 622 | 94.379 | 527.62 | 12.63 | 1.5788 | 91.39 | 4.4212 |
| 17 | 616 | 82.67 | 533.33 | 11.066 | 1.3832 | 92.773 | 4.6168 |
| 18 | 610 | 72.388 | 537.61 | 9.6912 | 1.2114 | 93.984 | 4.7886 |
| 19 | 604 | 63.365 | 540.64 | 8.4846 | 1.0606 | 95.045 | 4.9394 |
| 20 | 598 | 55.449 | 542.55 | 7.4259 | 0.92823 | 95.973 | 5.0718 |
| 21 | 592 | 48.509 | 543.49 | 6.4974 | 0.81217 | 96.785 | 5.1878 |
| 22 | 586 | 42.426 | 543.57 | 5.6834 | 0.71043 | 97.496 | 5.2896 |
| 23 | 579 | 37.033 | 541.97 | 4.9662 | 0.62077 | 98.116 | 6.3792 |
| 24 | 572 | 32.317 | 539.68 | 4.3343 | 0.54179 | 98.658 | 6.4582 |

Tabla 4. Tabla en el estado natural y varioloso con rutina en Matlab.

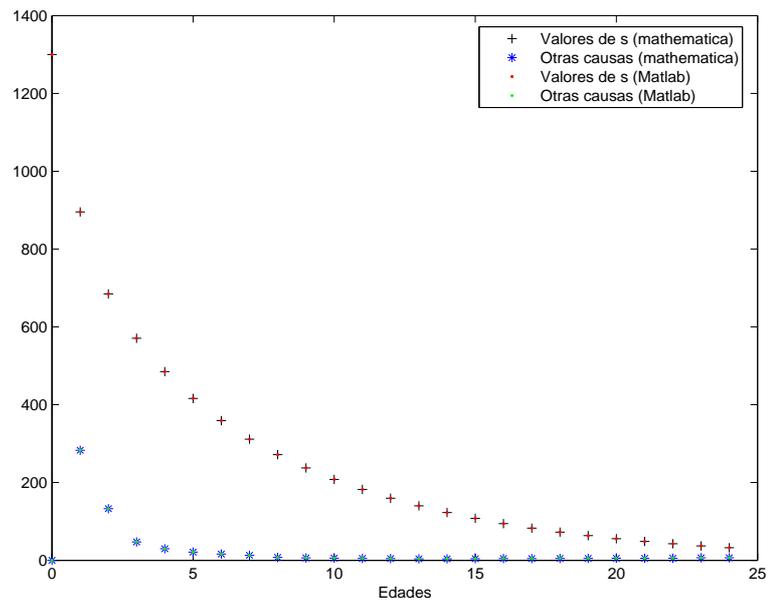


Figura 1: Comparación de Tablas en Mathematica y Matlab.

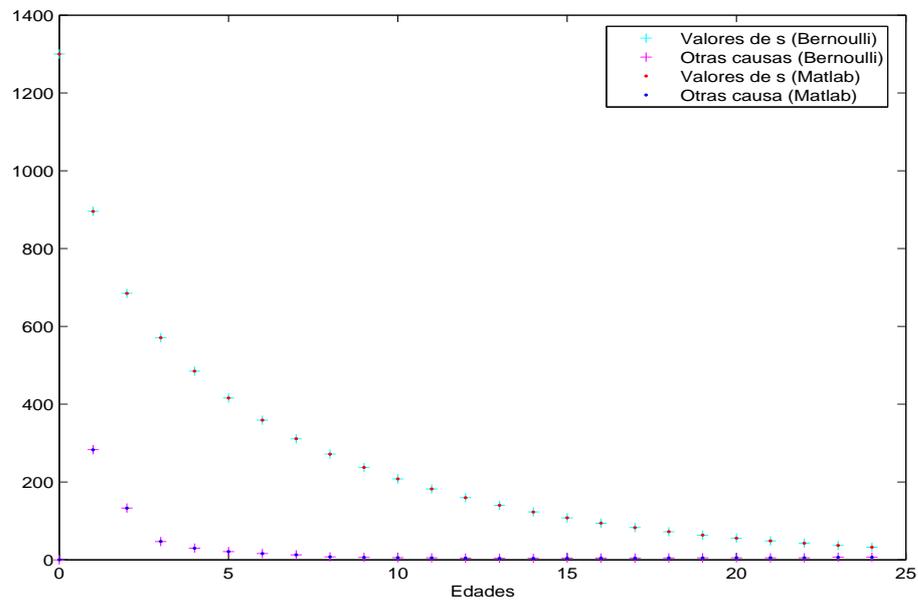


Figura 2: Comparación de la Tabla de Bernoulli y Matlab.

Por otro lado, la sexta columna (Tabla 2), muestra que la viruela se llevó a 17 niños durante el primer año de vida, de modo que sin la enfermedad, habría 1017 en lugar de

1000 (col. 2) que alcanzarían la edad de un año. Entonces, al tomar en cuenta que si 133 (col. 8) mueren durante el segundo año fuera de los 1000 vivos al inicio del mismo, 135.3 morirán de los 1017, de manera que 881.7 siguen vivos y alcanzan el tercer año, veamos de la tabla que si hay 855 que llegan al tercer año en el estado natural en el que la viruela se produce, y que si hay 881.7 en el estado en el cual se elimina la viruela. La tabla precedente muestra también, que durante el curso del tercer año todas las enfermedades, excepto la viruela se lleva a 47 personas. Tenemos que decir, que si mueren 47 de los 855, ¿cuántos morirán de los 881.7?, nos encontramos que son 48.4, que tenemos que restar de los 881.7 para encontrar el siguiente número, que por lo tanto es 833.3. En general, podemos continuar con la lista de los números que estamos determinando, reduciendo el último número determinado por $\frac{p}{q} r$, tomando para q los números sucesivos de la segunda columna de la Tabla 2, para r los de la octava columna y para p el término anterior de la nueva lista, ya que el número de personas que mueren cada año de todas las enfermedades, excepto de viruela, sin duda es proporcional al número de personas que viven a esta edad, cualquiera que sea la proporción entre los que ya han tenido la viruela y los que aún no han tenido.

| Edad por años | Estado natural y varioloso | Estado no varioloso | Diferencia o ganancia | Edad por años | Estado natural y varioloso | Estado no varioloso | Diferencia o ganancia |
|---------------|----------------------------|---------------------|-----------------------|---------------|----------------------------|---------------------|-----------------------|
| 0 | 1300 | 1300 | 0 | 13 | 640 | 741.1 | 74.1 |
| 1 | 1000 | 1017.1 | 17.1 | 14 | 634 | 709.7 | 75.7 |
| 2 | 855 | 881.8 | 26.8 | 15 | 628 | 705.0 | 77.0 |
| 3 | 798 | 833.3 | 35.3 | 16 | 622 | 700.1 | 78.1 |
| 4 | 760 | 802.0 | 42.0 | 17 | 616 | 695.0 | 79.0 |
| 5 | 732 | 779.8 | 47.8 | 18 | 610 | 689.6 | 79.6 |
| 6 | 710 | 762.8 | 52.8 | 19 | 604 | 684.0 | 80.0 |
| 7 | 692 | 749.1 | 57.2 | 20 | 598 | 678.2 | 80.2 |
| 8 | 680 | 740.9 | 60.9 | 21 | 592 | 672.3 | 80.3 |
| 9 | 670 | 734.4 | 64.4 | 22 | 586 | 666.3 | 80.3 |
| 10 | 661 | 728.4 | 67.4 | 23 | 579 | 659.0 | 80.0 |
| 11 | 653 | 722.9 | 69.9 | 24 | 572 | 651.7 | 79.7 |
| 12 | 646 | 718.2 | 72.2 | 25 | 565 | 644.3 | 79.3 |

Tabla 5. Tabla de Bernoulli con valores aproximados para el estado sin viruela.

Haciendo uso de los supuestos de Bernoulli, se realiza en Matlab una nueva rutina para la construcción de la Tabla 6, para el estado sin viruela, considerando los datos que se han obtenido en la tabla anterior (Tabla 4).

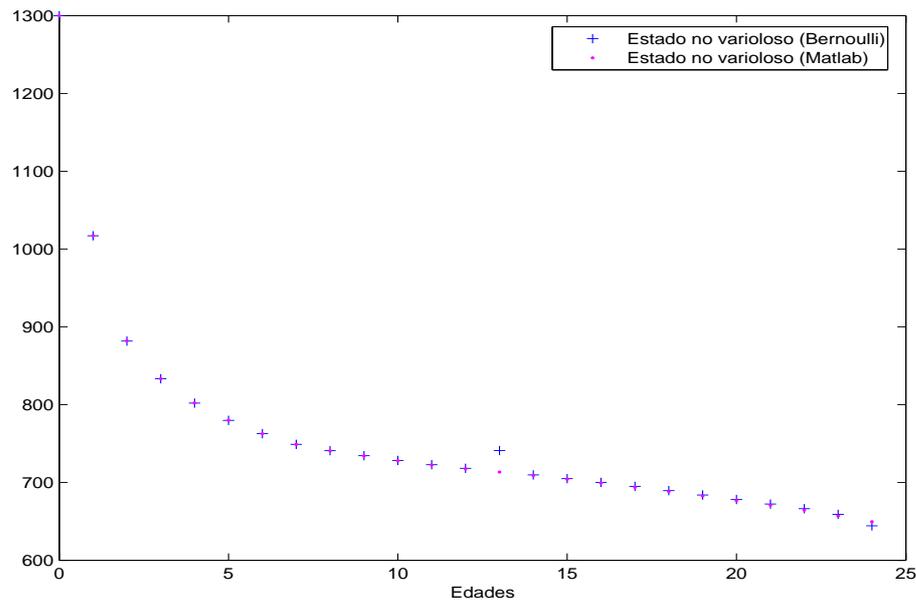


Figura 3: Comparación de Bernoulli y Matlab en estado varioloso.

De la gráfica (Figura 3) podemos concluir que los resultados obtenidos en ambas tablas, son muy próximos.

Al construir la Tabla 5, Bernoulli descuida el hecho de que algunos de estos supervivientes podrían morir en ese año de otras enfermedades, esto mismo lo rectificó Du-villard en su trabajo (1806).

Por otro lado, Bernoulli observó que con todo lo anterior, era posible obtener una expresión, que relacionará los supervivientes de las dos tablas. Como había expuesto antes, el número de muertes en el período de tiempo dx es $-dy$ y la mortalidad de la viruela que es $\frac{sdx}{mn}$, tenemos que la mortalidad total para el estado libre de viruela es $-dy - \frac{sdx}{nm}$ con respecto a una población de y individuos. Por tanto, para una población de z supervivientes en estado no varioloso podemos escribir

$$-dz = -\frac{z}{y}\left(dy + \frac{sdx}{nm}\right)$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} + \frac{sdx}{nmy}$$

o bien,

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = \frac{sdx}{nmy}.$$

| Edad por años | Estado natural y varioloso | Estado no varioloso | Diferencia o ganancia | Edad por años | Estado natural y varioloso | Estado no varioloso | Diferencia o ganancia |
|---------------|----------------------------|---------------------|-----------------------|---------------|----------------------------|---------------------|-----------------------|
| 0 | 1300 | 1300 | 0 | 13 | 640 | 713.45 | 71.587 |
| 1 | 1000 | 1017.1 | 17.1 | 14 | 634 | 708.98 | 73.455 |
| 2 | 855 | 882.23 | 27.225 | 15 | 628 | 704.2 | 74.979 |
| 3 | 798 | 833.41 | 35.406 | 16 | 622 | 699.14 | 76.198 |
| 4 | 760 | 802.19 | 42.187 | 17 | 616 | 693.85 | 77.144 |
| 5 | 732 | 779.91 | 47.913 | 18 | 610 | 688.34 | 77.849 |
| 6 | 710 | 762.78 | 52.779 | 19 | 604 | 682.64 | 78.339 |
| 7 | 692 | 748.92 | 56.924 | 20 | 598 | 676.77 | 78.639 |
| 8 | 680 | 740.77 | 60.768 | 21 | 592 | 670.75 | 78.769 |
| 9 | 670 | 734.12 | 64.123 | 22 | 586 | 664.59 | 78.749 |
| 10 | 661 | 727.99 | 66.99 | 23 | 579 | 657.15 | 78.594 |
| 11 | 653 | 722.45 | 69.453 | 24 | 572 | 649.6 | 77.601 |
| 12 | 646 | 717.59 | 71.587 | 25 | 565 | 641.95 | 76.948 |

Tabla 6. Tabla de valores aproximados para el estado sin viruela con rutina en Matlab .

Sustituyendo (4) para un s dado, tenemos que

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{(m-1)e^{\frac{x}{n}}}{1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}}} \right) dx, \quad (6)$$

observemos que

$$\frac{1}{1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}}} \frac{dx}{n} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{(m-1)e^{\frac{x}{n}}}{1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}}} \right) dx.$$

Integrando la expresión (6), tenemos

$$\int \left(\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} \right) = \int \left[\frac{1}{n} \left(1 - \frac{(m-1)e^{\frac{x}{n}}}{1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}}} \right) \right] dx,$$

por propiedades de la integral se tiene

$$\int \frac{dz}{z} - \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{n} - \int \frac{(m-1)e^{\frac{x}{n}}}{1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}}} \frac{dx}{n}.$$

Por otro lado, tomemos

$$\begin{aligned} u &= 1 + (m-1)e^{\frac{x}{n}} \\ du &= (m-1)e^{\frac{x}{n}} \frac{dx}{n}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{(m-1)e^{\frac{x}{n}}}{1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}} \frac{dx}{n} &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln u + c, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \ln z + c - (\ln y + c) &= \int \frac{dz}{z} - \int \frac{dy}{y} \\ &= \int \frac{dx}{n} - \int \frac{(m-1)e^{\frac{x}{n}}}{1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}} \frac{dx}{n} \\ &= \frac{x}{n} + c - (\ln(1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}) + c), \end{aligned}$$

Así, la integral nos da

$$\ln \frac{z}{y} = \frac{x}{n} - \ln(1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}) + c, \tag{7}$$

Dado que $y = z$ cuando $x = 0$, entonces $c = \ln m$. Tomando exponencial en ambos lados de (7), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{z}{y} &= \exp\left(\frac{x}{n} - \ln(1+(m-1)e^{\frac{x}{n}})\right) \exp(\ln m) \\ \frac{z}{y} &= \exp\left(\frac{x}{n} - \ln(1+(m-1)e^{\frac{x}{n}})\right) m \\ \frac{z}{y} &= \frac{e^{\frac{x}{n}} m}{\exp(\ln(1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}))} \\ \frac{z}{y} &= \frac{e^{\frac{x}{n}} m}{1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}} \end{aligned}$$

Así,

$$z = \frac{me^{\frac{x}{n}}}{1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}} y. \tag{8}$$

Aún cuando Bernoulli, no construye la tabla en el estado sin viruela con la expresión exacta (8), es importante llevar a cabo la construcción de la misma, y con una nueva rutina en Matlab, se obtuvo la Tabla 7.

| Edad por años | Estado natural y varioloso | Estado no varioloso | Diferencia o ganancia | Edad por años | Estado natural y varioloso | Estado no varioloso | Diferencia o ganancia |
|---------------|----------------------------|---------------------|-----------------------|---------------|----------------------------|---------------------|-----------------------|
| 0 | 1300 | 1300 | 0 | 13 | 640 | 711.42 | 71.416 |
| 1 | 1000 | 1014.9 | 14.907 | 14 | 634 | 707.02 | 73.02 |
| 2 | 855 | 879.31 | 24.313 | 15 | 628 | 702.33 | 74.328 |
| 3 | 798 | 830.46 | 32.462 | 16 | 622 | 697.37 | 75.374 |
| 4 | 760 | 779.31 | 39.313 | 17 | 616 | 692.19 | 76.19 |
| 5 | 732 | 777.15 | 45.146 | 18 | 610 | 686.8 | 76.802 |
| 6 | 710 | 760.13 | 50.134 | 19 | 604 | 681.23 | 77.234 |
| 7 | 692 | 746.41 | 54.407 | 20 | 598 | 675.51 | 77.507 |
| 8 | 680 | 738.34 | 58.34 | 21 | 592 | 669.64 | 77.642 |
| 9 | 670 | 731.78 | 61.775 | 22 | 586 | 663.65 | 77.653 |
| 10 | 661 | 725.73 | 64.725 | 23 | 579 | 656.42 | 77.424 |
| 11 | 653 | 720.27 | 67.27 | 24 | 572 | 649.1 | 77.098 |
| 12 | 646 | 715.48 | 69.479 | 25 | 565 | 641.69 | 76.687 |

Tabla 7 Tabla de valores exactos para el estado sin viruela con rutina en Matlab .

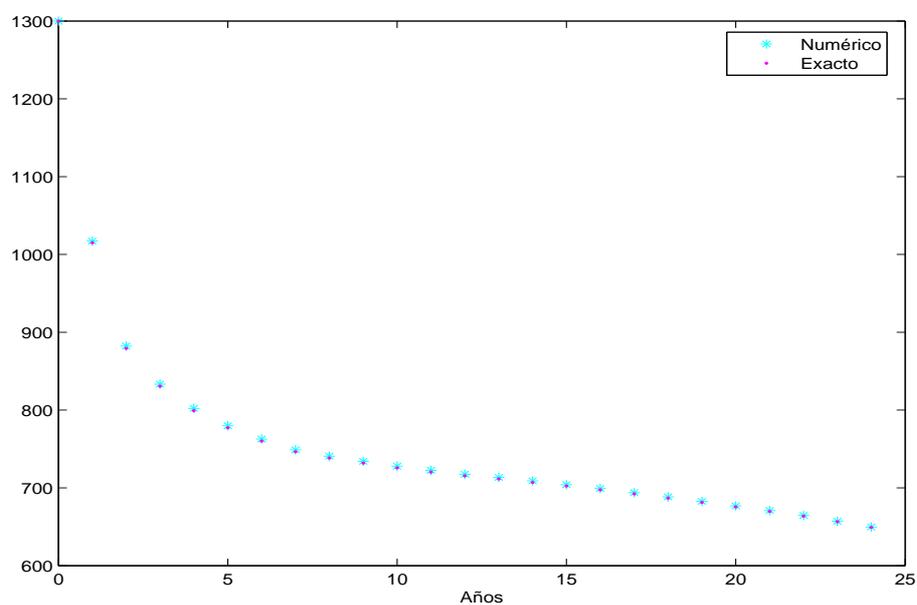


Figura 4: Comparación de los valores exactos y numéricos.

Se puede observar del gráfico (Figura 4) que los valores obtenidos por la expresión

aproximada y exacta son muy cercanos.

Se hace notar que nuestra ecuación (8) da los mismos valores que los valores aproximados. Sin embargo, si las pequeñas diferencias que existen pudieran causar dificultad, tendríamos que tomar solamente los valores que se arrojan con la ecuación (8).

Bibliografía

- [1] S. Blower, *An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it*, Wiley InterScience, 14, pp. 275-288. 2004.
- [2] D. R. Cox and D. Oakes, *Analysis of Survival Data*, Chapman and Hall. ISBN 0-412-24490-X. 1984.
- [3] J. D. Kalbfleisch and R. L. Prentice, *The Statistical Analysis of Failure Time Data*, New York John Wiley. ISBN 0-471-05519-0. 1980
- [4] P. Klein John and L. Melvin Moeschberger, *Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data*, New York: Springer-Verlag. 1997.
- [5] J. H. Lambert, *The mortality of smallpox in children*, Beytrage zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Vol. III, pp. 568-599. 1772.
- [6] J. F. Lawless, *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, Second Edition Wiley Series. Second Edition. ISBN 0-471-37215-3. 2003.
- [7] S. Monroe G, *On the mathematics of competing risks*, Diane Publishin Co. ISBN 0-8406-0138-7. 1979.
- [8] M. Pintilie, *Competing Risks, A Pratical Perspective*, John Wiley and Sons, Ltd. ISBN10 0-470-87068-0. 2006.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

araflosol@yahoo.com
ftajonar@fcfm.buap.mx

Topología

Capítulo 10

El n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo

Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco,
María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero
FCFM-BUAP

Resumen

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un **hiperespacio** es una familia de subconjuntos de X con alguna propiedad particular. En este capítulo estudiamos el n -ésimo **hiperespacio suspensión** de un continuo y revisamos algunas propiedades conocidas de éste.

1. Introducción

Una parte de la Topología está dedicada al estudio de los espacios métricos compactos y conexos, de hecho a los espacios con estas características les llamamos continuos, los primeros libros modernos que exponen esta teoría son [18] y [19]. El n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo es una herramienta de la teoría de los continuos que nos permite obtener información del continuo y viceversa, en relación con esto, últimamente se han obtenido resultados de D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez [8]; D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero [9]; S. Macías [14]; V. Martínez-de-la-Vega [16].

El material de este capítulo está dividido en cinco secciones. En la Sección 2 recordamos algunas propiedades básicas de los espacios cociente. La Sección 3 está dedicada a revisar qué es un hiperespacio de un continuo, se retoman algunas propiedades básicas de ciertos hiperespacios de continuos que nos sirven para probar algunas de las propiedades del n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo. La Sección 4 es para recordar algunas propiedades de la dimensión. En la Sección 5 vemos algunas propiedades del n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo. Vemos, por ejemplo, que un continuo X es localmente conexo si y sólo si el n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo es localmente conexo, vea el Teorema 5.6. También revisamos que si X es un continuo de dimensión finita, entonces es equivalente que $C_n(X)$ tenga dimensión finita a que $HS_n(X)$ tenga dimensión finita, vea el Teorema 5.11. De hecho, si la dimensión de $C_n(X)$ es finita o la dimensión de $HS_n(X)$ es finita, entonces estas dimensiones coinciden, vea el Corolario 5.12. Se prueba también que $HS_n(X)$ contiene una n -celda, vea el Teorema 5.14.

2. Espacios cociente

Para definir el n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo iniciamos con algunas propiedades básicas de la teoría de los espacios cociente. Los resultados que presentamos aquí son la herramienta para probar que el n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo es un continuo. Los conceptos no definidos en este capítulo son considerados como en el libro de Teoría de los Continuos de Nadler [19].

Teorema 2.1. *Si X es un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva, entonces*

$$\mathcal{T}_g = \{U \subset Y : g^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

es una topología para Y .

Demostración. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_g$. Como $g^{-1}(U_1 \cap U_2) = g^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2)$, tenemos que $g^{-1}(U_1 \cap U_2)$ es abierto en X . Luego, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_g$.

Ahora, sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_g$. Luego, para cada $U \in \mathcal{U}$, tenemos que $g^{-1}(U)$ es abierto en X . Como $g^{-1}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} g^{-1}(U)$, tenemos que $g^{-1}(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U)$ es abierto en X . Así, $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}_g$.

Además, como $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $g^{-1}(Y) = X$, tenemos que $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_g$. Por lo tanto, \mathcal{T}_g es una topología para Y . \square

La topología \mathcal{T}_g del Teorema 2.1 tiene un nombre especial, como vemos a continuación.

Definición 2.2. Sean X un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. La topología $\mathcal{T}_g = \{U \subset Y : g^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$ es conocida como la **topología cociente** sobre Y inducida por la función g .

Dados X un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $g : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva, notemos que la función g es continua con la topología \mathcal{T}_g . Además, si \mathcal{T} es una topología para Y con la que g resulta ser continua, entonces $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_g$.

Definición 2.3. Un espacio topológico Y es un **espacio cociente** de un espacio topológico X si existe una función suprayectiva $g : X \rightarrow Y$ tal que \mathcal{T}_g coincide con la topología de Y . En tal caso, la función g se llama **función cociente**.

Teorema 2.4. *Sean X y Y espacios topológicos. Las proposiciones siguientes son equivalentes:*

- (1) *El espacio Y es un espacio cociente de X .*
- (2) *Existe una función suprayectiva y continua $g : X \rightarrow Y$ tal que U es abierto en Y si y sólo si $g^{-1}(U)$ es abierto en X .*

(3) Existe una función suprayectiva y continua $g : X \rightarrow Y$ tal que E es cerrado en Y si y sólo si $g^{-1}(E)$ es cerrado en X .

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Por hipótesis existe una función suprayectiva $g : X \rightarrow Y$ tal que \mathcal{T}_g coincide con la topología de Y . Tenemos que $g : X \rightarrow Y$ es una función continua con la topología \mathcal{T}_g para Y . Ahora, si U es abierto en Y , entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en X . Recíprocamente, si $g^{-1}(U)$ es abierto en X , entonces $U \in \mathcal{T}_g$. Luego, U es abierto en Y .

Veamos que (2) implica (3). Por hipótesis existe $g : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva y continua. Sea $E \subset Y$. Supongamos que E es un cerrado en Y . Luego, $Y - E$ es abierto en Y . Así, $g^{-1}(Y - E)$ es abierto en X . Notemos que $g^{-1}(Y - E) = g^{-1}(Y) - g^{-1}(E) = X - g^{-1}(E)$. Es decir, $g^{-1}(E)$ es un cerrado en X . Recíprocamente, supongamos que $g^{-1}(E)$ es un cerrado en X . Luego, $X - g^{-1}(E)$ es abierto en X . Como $X - g^{-1}(E) = g^{-1}(Y - E)$, tenemos que $g^{-1}(Y - E)$ es abierto en X . Así, $Y - E$ es abierto en Y . Luego, E es cerrado en Y .

Para ver que (3) implica (1), supongamos que existe una función suprayectiva y continua $g : X \rightarrow Y$. Sea \mathcal{T}_Y la topología de Y . Veamos que $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_g$. Sea $U \in \mathcal{T}_Y$. Como $Y - U$ es cerrado en Y , por hipótesis, $g^{-1}(Y - U)$ es cerrado en X . Notemos que $g^{-1}(Y - U) = g^{-1}(Y) - g^{-1}(U) = X - g^{-1}(U)$. Luego, $g^{-1}(U)$ es abierto en X . Por lo tanto, $U \in \mathcal{T}_g$. Ahora, sea $U \in \mathcal{T}_g$. Así, $g^{-1}(U)$ es abierto en X . Luego, $X - g^{-1}(U)$ es cerrado en X . Como $X - g^{-1}(U) = g^{-1}(Y - U)$, tenemos que $g^{-1}(Y - U)$ es cerrado en X , por hipótesis $Y - U$ es cerrado en Y . Luego, U es abierto en Y . Por lo tanto, $U \in \mathcal{T}_Y$. \square

A continuación mostramos condiciones necesarias para obtener una función cociente.

Teorema 2.5. Sean X y Y espacios topológicos. Si $g : X \rightarrow Y$ es una función suprayectiva, continua y abierta o cerrada, entonces g es una función cociente.

Demostración. Sea \mathcal{T}_Y la topología de Y . Como \mathcal{T}_Y es una topología para Y con la cual g es continua, tenemos que $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_g$. Supongamos que g es abierta. Veamos que $\mathcal{T}_g \subset \mathcal{T}_Y$. Sea $U \in \mathcal{T}_g$. Luego, $g^{-1}(U)$ es abierto en X . Como g es abierta, tenemos que $g(g^{-1}(U))$ es abierto en Y . Por otro lado, como g es suprayectiva, tenemos que $g(g^{-1}(U)) = U$. Así, U es abierto en Y . Luego, $\mathcal{T}_g \subset \mathcal{T}_Y$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_g = \mathcal{T}_Y$. Ahora, supongamos que g es cerrada. Sea $U \in \mathcal{T}_g$. Luego, $g^{-1}(U)$ es abierto en X . Así, $X - g^{-1}(U)$ es cerrado en X . Como g es cerrada, tenemos que $g(X - g^{-1}(U))$ es cerrado en Y . Por otro lado, como g es suprayectiva, tenemos que $g(X - g^{-1}(U)) = Y - U$, es decir, $Y - U$ es cerrado en Y . Así, U es abierto en Y . Luego, $\mathcal{T}_g \subset \mathcal{T}_Y$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_g = \mathcal{T}_Y$. Así, g es una función cociente. \square

Observemos que no toda función cociente es cerrada.

Ejemplo 2.6. En cualquier producto de espacios topológicos $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, cada factor X_α , es un espacio cociente del producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, porque cada función proyección $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ es continua, suprayectiva y abierta, vea el Capítulo 6 de [2]. Así, cada función proyección π_β es una función cociente. En particular, $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cociente. La función π_1 no es cerrada porque si consideramos $A = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$, tenemos que A es cerrado en \mathbb{R}^2 y $\pi_1(A) = (0, \infty)$ no es cerrado en \mathbb{R} .

Ejemplo 2.7. Como toda función continua de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es cerrada, por el Teorema 2.5, toda función continua y suprayectiva de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es una función cociente. En particular, toda función continua y suprayectiva entre continuos es una función cociente.

Teorema 2.8. Sean X, Y y Z espacios topológicos y $g : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Si la topología de Y coincide con la topología \mathcal{T}_g , entonces una función $f : Y \rightarrow Z$ es continua si y sólo si $f \circ g : X \rightarrow Z$ es continua.

Demostración. Sea $f : Y \rightarrow Z$ una función continua. Como $g : X \rightarrow Y$ es una función cociente, tenemos que g es continua. Luego, $f \circ g : X \rightarrow Z$ es continua.

Recíprocamente, supongamos que $f \circ g : X \rightarrow Z$ es continua y sea V un abierto en Z . Luego, $(f \circ g)^{-1}(V)$ es abierto en X . Como $(f \circ g)^{-1}(V) = g^{-1}(f^{-1}(V))$, tenemos que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_g$. Por hipótesis, \mathcal{T}_g coincide con la topología Y . Luego, $f^{-1}(V)$ es abierto en Y . Por lo tanto, f es continua. \square

El resultado siguiente nos proporciona una topología para una partición de un espacio topológico.

Teorema 2.9. Si X es un espacio topológico y \mathcal{P} es una partición de X , entonces

$$T_{\mathcal{P}} = \left\{ \mathcal{U} \subset \mathcal{P} : \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \text{ es un conjunto abierto en } X \right\}$$

es una topología para \mathcal{P} .

Demostración. Como $\bigcup_{U \in \mathcal{P}} U = X$ y X es abierto en X , tenemos que $\mathcal{P} \in T_{\mathcal{P}}$. También notemos que $\emptyset \subset \mathcal{P}$ y $\bigcup_{U \in \emptyset} U = \emptyset$. Como \emptyset es abierto en X , tenemos que $\emptyset \in T_{\mathcal{P}}$.

Ahora, sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in T_{\mathcal{P}}$. Veamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in T_{\mathcal{P}}$. Como $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ y $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ son abiertos en X , tenemos que $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) \cap (\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B)$ es abierto en X . Notemos que

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right) \cap \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \right) = \bigcup_{C \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}} C.$$

Así, $\bigcup_{C \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}} C$ es abierto en X . Por lo tanto, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in T_{\mathcal{P}}$.

Sean $\mathcal{A}_\alpha \in T_{\mathcal{P}}$, para $\alpha \in J$. Veamos que $\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha \in T_{\mathcal{P}}$. Para cada $\alpha \in J$, tenemos que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}_\alpha} A$ es abierto en X . Luego, $\bigcup_{\alpha \in J} \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}_\alpha} A \right)$ es abierto en X . Notemos que

$$\bigcup_{\alpha \in J} \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}_\alpha} A \right) = \bigcup_{C \in \bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha} C.$$

Así, $\bigcup_{C \in \bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha} C$ es abierto en X . Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha \in T_{\mathcal{P}}$. \square

Enseguida recordamos el nombre de la topología $T_{\mathcal{P}}$ y del espacio $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ que aparecen en el Teorema 2.9.

Definición 2.10. Sean X un espacio topológico y \mathcal{P} una partición de X . El espacio topológico $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un **espacio de descomposición** de X y la topología $T_{\mathcal{P}}$ es la **topología de descomposición**.

Ejemplo 2.11. Sean $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $\mathcal{P} = \{\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}\}$. El espacio $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un espacio de descomposición de X . De hecho, $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es homeomorfo a una esfera, vea la Sección 22 de [17].

Definición 2.12. Sean X un espacio topológico y \mathcal{P} una partición de X . La **función natural** de X sobre \mathcal{P} es la función $q : X \rightarrow \mathcal{P}$ definida por $q(x) = P_x$, donde P_x es el único elemento de la partición que contiene al punto x .

Sean X un espacio topológico y \mathcal{P} una partición de X . Notemos que si $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}$, entonces

$$q^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in X : q(x) \in \mathcal{U}\} = \{x \in X : P_x \in \mathcal{U}\} = \bigcup_{P_x \in \mathcal{U}} P_x.$$

Así, si \mathcal{U} es abierto en \mathcal{P} , tenemos que $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ es abierto en X . Luego, $q^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X . Por lo tanto, la función natural q es continua.

Notemos que dado un espacio de descomposición $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ de un espacio topológico X , la topología $T_{\mathcal{P}}$ es la topología más grande tal que la función natural es continua.

Además, notemos que q es suprayectiva. De hecho, q es una función cociente como lo establece el resultado siguiente.

Teorema 2.13. *Todo espacio de descomposición de un espacio topológico X es un espacio cociente de X .*

Demostración. Sea $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X . Veamos que la función $q : X \rightarrow \mathcal{P}$ satisface que $\mathcal{T}_q = T_{\mathcal{P}}$. Como q es una función continua y suprayectiva con la topología $T_{\mathcal{P}}$, tenemos que $T_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{T}_q$. Por otro lado, si $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_q$, por la definición de la topología \mathcal{T}_q , tenemos que $q^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X . Como $q^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, tenemos que $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ es abierto en X . Así, $\mathcal{U} \in T_{\mathcal{P}}$. Luego, $\mathcal{T}_q \subset T_{\mathcal{P}}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_q = T_{\mathcal{P}}$. Así, $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un espacio cociente de X . \square

Sean X y Y espacios topológicos, para una función cociente $g : X \rightarrow Y$, consideramos la colección

$$\mathcal{P}_g = \{g^{-1}(y) : y \in Y\}.$$

Notemos que \mathcal{P}_g es una partición de X . Además, \mathcal{P}_g con la topología de descomposición $T_{\mathcal{P}_g}$ es un espacio topológico homeomorfo a Y , demostramos este hecho a continuación.

Teorema 2.14. *Todo espacio cociente de un espacio topológico X es homeomorfo a un espacio de descomposición de X .*

Demostración. Sean Y un espacio cociente de un espacio topológico X y $g : X \rightarrow Y$ una función cociente. Consideremos el espacio de descomposición dado por la partición $\mathcal{P}_g = \{g^{-1}(y) : y \in Y\}$, que $q : X \rightarrow \mathcal{P}_g$ es la función natural y h está definida para todo $y \in Y$ por $h(y) = g^{-1}(y)$. Veamos que el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow q & \swarrow h \\ & & \mathcal{P}_g \end{array}$$

Para esto, sean $x \in X$ y $y = g(x)$. Luego, $x \in g^{-1}(y)$. Así, $q(x) \in g^{-1}(y)$ y $h(g(x)) = h(y) = g^{-1}(y)$. Así, para todo $x \in X$, tenemos que $q(x) = h(g(x))$, es decir, $q = h \circ g$. Como q es continua, tenemos que $h \circ g$ es una función continua. Veamos que h es biyectiva. Para esto, sean $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \neq y_2$. Luego, $g^{-1}(y_1)$ y $g^{-1}(y_2)$ son elementos diferentes de \mathcal{P}_g . Así, $h(y_1) \neq h(y_2)$. Además, si $E \in \mathcal{P}_g$, entonces $E = g^{-1}(y)$ para algún $y \in Y$. Luego, $h(y) = g^{-1}(y) = E$. Por lo tanto, h es inyectiva y suprayectiva. Por el Teorema 2.8, tenemos que h es una función continua. Ahora, probemos que h es una función abierta. Para esto, primero notemos que si $U \subset Y$, entonces $h(U) = q(g^{-1}(U))$. También, $q^{-1}(q(g^{-1}(U))) = g^{-1}(U)$. Como $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_g$, tenemos que si U es abierto en Y , entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en X . Así, $q^{-1}(q(g^{-1}(U)))$ es abierto en X . Como en la prueba del Teorema 2.13, tenemos que $\mathcal{T}_q = T_{\mathcal{P}_g}$. Luego, $q(g^{-1}(U)) \in T_{\mathcal{P}_g}$. Finalmente, como $h(U) = q(g^{-1}(U))$, tenemos que $h(U) \in T_{\mathcal{P}_g}$. Así, h es una función abierta. Por lo tanto, h es un homeomorfismo. \square

En seguida dos lemas útiles para probar el Teorema 2.17.

Lema 2.15. *Sean X un espacio topológico compacto y Y un espacio topológico de Hausdorff. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea A un cerrado en X . Como X es compacto, tenemos que A es compacto. Luego, $f(A)$ es compacto en Y . Como Y es de Hausdorff, tenemos que $f(A)$ es cerrado en Y . Así, f es una función cerrada. \square

Lema 2.16. *Todo espacio topológico regular con base numerable es metrizable.*

Demostración. Sea X un espacio topológico regular con base numerable. Por [6, Teorema 1.26], tenemos que X es homeomorfo a un subespacio del producto topológico $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, donde $I_i = [0, 1]$. Como $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$ es metrizable [17, Teorema 20.5], tenemos que X es metrizable. \square

Teorema 2.17. *Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio topológico de Hausdorff. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es metrizable.*

Demostración. Sea \mathcal{B} una base numerable para X . Para cada subconjunto finito \mathcal{L} de \mathcal{B} , sea $E_{\mathcal{L}} = Y - f(X - \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L)$. Como \mathcal{B} es un conjunto numerable, el conjunto $\mathcal{P} = \{E_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{B}\}$ es numerable. Notemos que para cada subconjunto finito \mathcal{L} de \mathcal{B} , tenemos que $X - \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$ es cerrado en X . Por el Teorema 2.15, tenemos que f es cerrada. Luego, para cada subconjunto finito \mathcal{L} de \mathcal{B} , tenemos que $E_{\mathcal{L}}$ es abierto en Y . Ahora, sean U un abierto en Y y $p \in U$. Como f es continua, tenemos que $f^{-1}(\{p\})$ es cerrado en X y $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Luego, $f^{-1}(\{p\})$ es compacto. Además, $f^{-1}(\{p\}) \subset f^{-1}(U)$. Como \mathcal{B} es una base para X , existe un conjunto finito \mathcal{L}_p de \mathcal{B} tal que $f^{-1}(\{p\}) \subset \bigcup_{L \in \mathcal{L}_p} L \subset f^{-1}(U)$. Si $p \notin E_{\mathcal{L}}$, entonces $p \in f(X - \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L)$, así, existe $x \in X - \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$ tal que $f(x) = p$, es decir, $x \in f^{-1}(p)$ pero $f^{-1}(\{p\}) \subset \bigcup_{L \in \mathcal{L}_p} L$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $p \in E_{\mathcal{L}}$. Como $\bigcup_{L \in \mathcal{L}_p} L \subset f^{-1}(U)$, obtenemos que $E_{\mathcal{L}} \subset U$. Así, $p \in E_{\mathcal{L}} \subset U$, con lo que \mathcal{P} es una base numerable para Y . Como f es continua, tenemos que Y es compacto. Además, como Y es de Hausdorff, tenemos que X es normal, en particular X es regular. Así, por el Teorema 2.16, tenemos que Y es metrizable. \square

Teorema 2.18. *Un espacio de descomposición $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ de un espacio métrico compacto X es metrizable si y sólo si $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es de Hausdorff.*

Demostración. Si $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es metrizable, obviamente $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es de Hausdorff. Ahora, supongamos que $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es de Hausdorff. Como la función natural $q : X \rightarrow \mathcal{P}$ es continua y suprayectiva, por el Teorema 2.17, tenemos que $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es metrizable. \square

Teorema 2.19. *Un espacio de descomposición $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ de un continuo X es un continuo si y sólo si $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es de Hausdorff.*

Demostración. Si $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un continuo, tenemos que es metrizable. Luego, $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es de Hausdorff. Ahora, supongamos que $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es de Hausdorff, por el Teorema 2.18, tenemos que $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es metrizable. Como la función natural $q : X \rightarrow \mathcal{P}$ es continua, y la compacidad y la conexidad son invariantes topológicos, tenemos que \mathcal{P} es compacto y conexo. Así, $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un continuo. \square

Definición 2.20. Sea X un espacio topológico. Una partición \mathcal{P} de X es **semicontinua superior** si para cada $P \in \mathcal{P}$ y para cada U abierto en X con $P \subset U$, existe un abierto V en X con $P \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{P}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Definición 2.21. Sea $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X . Un subconjunto A de X es \mathcal{P} -saturado si existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ tal que $A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.

Observación 2.22. Dado un espacio de descomposición $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ de un espacio topológico X , consideremos la función natural $q : X \rightarrow \mathcal{P}$. Para cada $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$, tenemos que $q^{-1}(\mathcal{B})$ es \mathcal{P} -saturado porque $q^{-1}(\mathcal{B}) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

Teorema 2.23. Sea $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X . Un subconjunto A de X es \mathcal{P} -saturado si y sólo si $A = q^{-1}(q(A))$.

Demostración. Supongamos que A es \mathcal{P} -saturado. Luego, existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ tal que $A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Así, $q(A) = \{q(x) : x \in A\} = \mathcal{C}$. Por lo tanto, $q^{-1}(q(A)) = q^{-1}(\mathcal{C}) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$.

Recíprocamente, supongamos que $A = q^{-1}(q(A))$. Como $q(A) \subset \mathcal{P}$, tenemos que $q^{-1}(q(A))$ es \mathcal{P} -saturado. Así, A es \mathcal{P} -saturado. \square

Teorema 2.24. Sea $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X . Si V es un conjunto abierto en X y \mathcal{P} -saturado, entonces $q(V)$ es abierto en \mathcal{P} .

Demostración. Como V es \mathcal{P} -saturado, por el Teorema 2.23, tenemos que $V = q^{-1}(q(V))$. Luego, $q^{-1}(q(V))$ es abierto en X . Como $q^{-1}(q(V)) = \bigcup_{W \in q(V)} W$, tenemos que $\bigcup_{W \in q(V)} W$ es abierto en X . Luego, $q(V)$ es abierto en \mathcal{P} . \square

Teorema 2.25. Sean X un espacio topológico y $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ un espacio de descomposición de X . Entonces las condiciones siguientes son equivalentes.

- (1) La partición \mathcal{P} es una descomposición semicontinua superior.
- (2) La función natural $q : X \rightarrow \mathcal{P}$ es cerrada.
- (3) Si $P \in \mathcal{P}$ y U es abierto en X con $P \subset U$, entonces existe un abierto V en X tal que V es \mathcal{P} -saturado y $P \subset V \subset U$.

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Sea C un cerrado en X . Veamos que $q^{-1}(\mathcal{P} - q(C))$ es abierto en X . Sea $p \in q^{-1}(\mathcal{P} - q(C))$. Luego, $q(p) \in \mathcal{P} - q(C)$. Veamos que $q(p) \subset X - C$. Supongamos, por el contrario, que existe $y \in q(p) \cap C$. Como $y \in q(y)$, tenemos que $q(y) \cap q(p) \neq \emptyset$. Luego, $q(p) = q(y) \in q(C)$. Esto contradice el hecho de que $q(p) \in \mathcal{P} - q(C)$. Por lo tanto, $q(p) \subset X - C$. Ahora, como $X - C$ es abierto en X y \mathcal{P} es una descomposición semicontinua superior, existe un abierto V en X con $q(p) \subset V$ tal que si $P \in \mathcal{P}$ y $P \cap V \neq \emptyset$, entonces $P \subset X - C$. Notemos que si $x \in V$, entonces $q(x) \in \mathcal{P}$ y $q(x) \cap V \neq \emptyset$. Luego, $q(x) \subset X - C$. Veamos que $q(V) \subset \mathcal{P} - q(C)$. Sea $Z \in q(V)$. Luego, existe $r \in V$ tal que $Z = q(r)$. Supongamos, por el contrario, que $q(r) \in q(C)$. Luego, existe $y \in C$ tal que $q(r) = q(y)$. Así, $y \in C \cap q(r)$. Luego, $q(r) \notin X - C$. Por lo tanto, $r \notin V$. Esto es una contradicción. Así, $q(V) \subset \mathcal{P} - q(C)$. Luego, $V \subset q^{-1}(\mathcal{P} - q(C))$. Como $p \in q(p) \subset V$, tenemos que

$q^{-1}(\mathcal{P} - q(C))$ es abierto en X . Por la Observación 2.22, tenemos que $q^{-1}(\mathcal{P} - q(C))$ es \mathcal{P} -saturado. Por el Teorema 2.24, tenemos que $q(q^{-1}(\mathcal{P} - q(C)))$ es abierto en \mathcal{P} . Como q es suprayectiva, tenemos que $q(q^{-1}(\mathcal{P} - q(C))) = \mathcal{P} - q(C)$. Así, $\mathcal{P} - q(C)$ es abierto en \mathcal{P} . Por lo tanto, $q(C)$ es cerrado en \mathcal{P} .

Veamos que (2) implica (3). Sean $P \in \mathcal{P}$ y U un abierto en X con $P \subset U$. Como $X - U$ es cerrado en X y q es cerrada, tenemos que $q(X - U)$ es cerrado en \mathcal{P} . Luego, $\mathcal{P} - q(X - U)$ es abierto en \mathcal{P} . Como q es continua, tenemos que $q^{-1}(\mathcal{P} - q(X - U))$ es abierto en X . Sea $V = q^{-1}(\mathcal{P} - q(X - U))$. Por la Observación 2.22, el conjunto V es \mathcal{P} -saturado. Veamos que $P \subset V \subset U$. Sea $x \in P$. Como $P \in \mathcal{P}$, tenemos que $q(x) = P$. Como $P \subset U$, tenemos que $q(x) \notin q(X - U)$. Así, $q(x) \in \mathcal{P} - q(X - U)$. Luego, $x \in q^{-1}(\mathcal{P} - q(X - U))$. Por lo tanto, $P \subset V$. Ahora, veamos que $V \subset U$. Sea $t \in q^{-1}(\mathcal{P} - q(X - U))$. Así, $q(t) = D$, para algún $D \in \mathcal{P} - q(X - U)$. Luego, $D \notin q(X - U)$. Luego, $D \subset U$, es decir, $q(t) \subset U$. Por lo tanto, $t \in U$. Así, $V \subset U$.

Veamos que (3) implica (1). Sean $P \in \mathcal{P}$ y U un abierto en X con $P \subset U$. Por hipótesis, existe un abierto V en X tal que V es \mathcal{P} -saturado y $P \subset V \subset U$. Sea $A \in \mathcal{P}$ tal que $A \cap V \neq \emptyset$. Como V es \mathcal{P} -saturado, existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ tal que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = V$. Así, $A \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = V$. Por lo tanto, $A \subset U$. \square

Teorema 2.26. *Sea X un espacio topológico tal que los conjuntos singulares son cerrados en X . Si \mathcal{P} es una descomposición semicontinua superior de X , entonces todo elemento de \mathcal{P} es cerrado en X .*

Demostración. Sean $P \in \mathcal{P}$, $x \in P$ y $q : X \rightarrow \mathcal{P}$ es la función natural. Por hipótesis, $\{x\}$ es cerrado en X , por (2) del Teorema 2.25, tenemos que $q(\{x\})$ es cerrado en \mathcal{P} . Notemos que $q(\{x\}) = \{q(x)\} = \{P\}$. Luego, $\{P\}$ es cerrado en \mathcal{P} . Como q es continua, tenemos que $q^{-1}(\{P\})$ es cerrado en X . Además, $P = q^{-1}(\{P\})$. Así, P es cerrado en X . \square

Teorema 2.27. *Si \mathcal{P} es una descomposición semicontinua superior de un espacio métrico compacto, entonces $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es metrizable.*

Demostración. Sean X un espacio métrico compacto. Veamos que $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un espacio de Hausdorff. Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ con $P_1 \neq P_2$. Por el Teorema 2.26, tenemos que P_1 y P_2 son cerrados en X . Como $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ y X es normal, existen conjuntos ajenos y abiertos U_1 y U_2 en X tales que $P_1 \subset U_1$ y $P_2 \subset U_2$. Como \mathcal{P} es semicontinua superior, por (3) de Teorema 2.25, existen abiertos V_1 y V_2 en X tales que para cada $i \in \{1, 2\}$, tenemos que $P_i \subset V_i \subset U_i$ y V_i es \mathcal{P} -saturado; sea $x \in P_i$; luego, $q(x) \in q(P_i) \subset q(V_i)$; notemos que $q(x) = P_i$; así, $P_i \in q(V_i)$. Por el Teorema 2.24, tenemos que $q(V_1)$ y $q(V_2)$ son abiertos en \mathcal{P} . Como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $V_i \subset U_i$, tenemos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Por el Teorema 2.23, tenemos que $q^{-1}(q(V_1)) = V_1$ y $q^{-1}(q(V_2)) = V_2$. Luego, $q(V_1) \cap q(V_2) = \emptyset$. Así, $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es de Hausdorff. Por el Teorema 2.18, tenemos que $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es metrizable. \square

Teorema 2.28. *Si \mathcal{P} es una descomposición semicontinua superior de un continuo, entonces $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un continuo.*

Demostración. Sea X un continuo y $q : X \rightarrow \mathcal{P}$ es la función natural. Como q es continua, y la compacidad y la conexidad son invariantes topológicos, tenemos que \mathcal{P} es compacto y conexo. Además, por el Teorema 2.27, tenemos que $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es metrizable. Así, $(\mathcal{P}, T_{\mathcal{P}})$ es un continuo. \square

Teorema 2.29. *Si X es un espacio topológico, A un conjunto cerrado en X y $\mathcal{P} = \{\{x\} : x \in X - A\} \cup \{A\}$, entonces \mathcal{P} es una descomposición semicontinua superior de X .*

Demostración. Sean $P \in \mathcal{P}$ y U un abierto en X con $P \subset U$.

Caso I. Supongamos que $P = A$. Sean $V = U$ y $Q \in \mathcal{P}$ tal que $Q \cap V \neq \emptyset$. Si $Q = A$, entonces $Q \subset U$; si $Q = \{x\}$, para algún $x \in X - A$, entonces $x \in V$, es decir, $Q \subset U$. Caso II. Supongamos que $P = \{x\}$, para algún $x \in X - A$. Tomemos $V = U \cap (X - A)$. Sea $Q \in \mathcal{P}$ tal que $Q \cap V \neq \emptyset$. Notemos que $Q \neq A$, pues de lo contrario, si $Q = A$, entonces $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \cap V = A \cap (U \cap (X - A)) = \emptyset$. Así, tenemos que $Q = \{y\}$, para algún $y \in X - A$. Como $\{y\} \cap V \neq \emptyset$, se sigue que $y \in U$, y así $Q \subset U$. Por lo tanto, \mathcal{P} es una descomposición semicontinua superior de X . \square

3. Hiperespacios

En esta sección revisamos el concepto de hiperespacio de un continuo, así como algunas propiedades de algunos hiperespacios de continuos que ocupamos en lo que sigue.

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideremos los hiperespacios siguientes de X .

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$$

y

$$C_n(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado, no vacío y tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Por ejemplo en el libro de Nadler [19, 4.2], se prueba que 2^X es metrizable. La métrica que se define para 2^X se conoce como **métrica de Hausdorff**. Como $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son subconjuntos de 2^X , tenemos que $F_n(X)$ y $C_n(X)$ también son metrizable. De hecho, a $F_n(X)$ y a $C_n(X)$, considerados con la métrica de Hausdorff, se les conoce

como el n -ésimo producto simétrico de X y el n -ésimo hiperespacio de X , respectivamente.

Ahora vemos que para un continuo, la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X se puede describir mediante los conjuntos abiertos del continuo X . Para esto necesitamos la siguiente notación.

Si X es un continuo, $m \in \mathbb{N}$ y U_1, \dots, U_m son subconjuntos de X , definimos

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ y para cada } i \in \{1, \dots, m\}, A \cap U_i \neq \emptyset \right\}.$$

El siguiente teorema nos muestra una base para la topología de 2^X .

Teorema 3.1. [11, Teorema 1.2] *Si X es un continuo, entonces*

$$\mathcal{B} = \{ \langle U_1, \dots, U_m \rangle : m \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \dots, U_m \text{ son abiertos en } X \}$$

es una base para una topología de 2^X .

A la topología generada por \mathcal{B} se le conoce como la **topología de Vietoris**.

Dado un continuo X , el conjunto $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_{C_n(X)}$ denota la intersección del conjunto abierto $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$, con la topología de Vietoris, con el hiperespacio $C_n(X)$.

La topología generada por la métrica de Hausdorff coincide con la topología de Vietoris. Enunciamos a continuación este hecho como un lema.

Lema 3.2. [11, Teorema 3.1] *Sea X un continuo. La topología de Vietoris y la topología generada por la métrica de Hausdorff en 2^X son iguales.*

En seguida un resultado que nos ayuda a probar que el n -ésimo producto simétrico de un continuo es un continuo.

Teorema 3.3. [10, 2.3] *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. La función $g : X^n \rightarrow F_n(X)$ definida para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ por*

$$g((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

es suprayectiva y continua.

Teorema 3.4. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Como el producto finito de espacios compactos es compacto y el producto finito de espacios conexos es conexo, tenemos que X^n es compacto y conexo. Como la conexidad y la compacidad son invariantes bajo funciones continuas, por el Teorema 3.3, tenemos que $F_n(X)$ es conexo y compacto. Así, $F_n(X)$ es un continuo. \square

Teorema 3.5. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Sea $f : C(X)^n \rightarrow C_n(X)$ la función definida, para cada $(A_1, \dots, A_n) \in C(X)^n$, por $f((A_1, \dots, A_n)) = \bigcup_{i=1}^n A_i$. En [18, (1.48)] se prueba que la función f es continua. Es claro que la función f es suprayectiva. En [15, 1.8.5] se prueba que $C(X)$ es compacto. En [18, (1.13)] se prueba que $C(X)$ es conexo. Como el producto finito de espacios compactos es compacto y el producto finito de espacios conexos es conexo, tenemos que $C(X)^n$ es compacto y conexo. Como la conexidad y la compacidad son invariantes bajo funciones continuas, tenemos que $C_n(X)$ es conexo y compacto. Así, $C_n(X)$ es un continuo. \square

Definición 3.6. Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$. Una **retracción** es una función continua $r : X \rightarrow Y$ tal que, para todo $y \in Y$, $r(y) = y$. En este caso, consideramos que Y es un **retracto** de X .

Definición 3.7. Un espacio métrico X es un **retracto absoluto** si X es un retracto de todo espacio métrico Z que contiene a X como un subespacio cerrado.

Definición 3.8. Un espacio topológico X es **localmente conexo en** $p \in X$ si y sólo si para todo conjunto U abierto en X con $p \in U$, existe un conjunto V abierto en X tal que V es conexo y $p \in V \subset U$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que X es **localmente conexo**.

A continuación vamos a ver lo que significa que un espacio topológico sea conexo en pequeño en un punto.

Definición 3.9. Un espacio topológico X es **conexo en pequeño en** $p \in X$ si para cada vecindad N de p existe una vecindad G de p tal que G es un conjunto conexo y $G \subset N$.

Es claro que si el espacio X es localmente conexo en el punto p , entonces X es conexo en pequeño en p , sin embargo, el recíproco no es cierto [21, 27.15, pág. 201]. Globalmente hablando, dichos conceptos son idénticos como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 3.10. [6, Teorema 1.48] *Un espacio topológico X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos si y sólo si X es localmente conexo.*

Teorema 3.11. [22, Théorème II] *Si X es un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ es un retracto absoluto.*

Teorema 3.12. [18, 1.49] Sea X un continuo. Si \mathcal{C} es un subcontinuo de 2^X tal que $\mathcal{C} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ es un subcontinuo de X .

Teorema 3.13. Un continuo X es localmente conexo si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $C_n(X)$ es localmente conexo.

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Por el Teorema 3.11, tenemos que $C_n(X)$ es un retracto absoluto. Por [1, 2.6, pág. 101], se obtiene que $C_n(X)$ es localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que $C_n(X)$ es localmente conexo. Sean $x \in X$ y U un abierto en X con $x \in U$. Como $C_n(X)$ es localmente conexo, existe un conjunto conexo y abierto \mathcal{V} en $C_n(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V} \subset \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \subset \langle U \rangle_{C_n(X)}$. Sea $\langle V_1, \dots, V_m \rangle_{C_n(X)}$ un básico tal que $\{x\} \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle_{C_n(X)} \subset \mathcal{V}$. Sean $V = \bigcap_{j=1}^m V_j$ y $y \in V$. Luego, $\{y\} \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle_{C_n(X)}$. Así, $\{y\} \in \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V})$. Por lo tanto, $y \in \bigcup_{V \in \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V})} V$. Como $\{x\} \in \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V})$, por el Teorema 3.12, tenemos que $\bigcup_{V \in \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V})} V \in C(X)$. Luego, $x, y \in \bigcup_{V \in \text{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V})} V \subset U$. Así, X es conexo en pequeño en x . Por el Teorema 3.10, tenemos que X es localmente conexo. \square

Teorema 3.14. [13, Teorema 3.4] Si X es un continuo no degenerado y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ contiene una n -celda.

De hecho, el amable lector puede encontrar una prueba detallada del Teorema 3.14 en la tesis de Betsy Christian Cuevas Martínez [3].

Teorema 3.15. [14, Lema 5.1] Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(X) - F_n(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.

4. Dimensión

Esta sección la dedicamos a la noción de dimensión, vemos la definición y propiedades básicas que nos serán de ayuda en la prueba de varios resultados de la Sección 5.

Comenzamos con la definición de dimensión de un espacio métrico separable.

Definición 4.1. Sea X espacio un espacio métrico separable. La **dimensión** de X , denotada por $\dim[X]$ es un entero mayor o igual a -1 o infinito, denotado por ∞ . La definición de dimensión se da inductivamente como sigue:

- (1) $\dim[X] = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$.
- (2) Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x \in X$. Se dice que la dimensión de X en x es menor o igual que n , denotado por $\dim_x[X] \leq n$, si para cada abierto V en X con $x \in V$ existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset V$ y $\dim[\text{fr}_X(U)] \leq n - 1$.

- (3) Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $\dim[X] \leq n$ si y sólo si para todo $x \in X$, tenemos que $\dim_x[X] \leq n$.
- (4) Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $\dim[X] = n$ si y sólo si para cada $x \in X$, tenemos que $\dim_x[X] \leq n$ y $\dim[X] > n - 1$.
- (5) $\dim[X] = \infty$ si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que $\dim[X] > n$.

La dimensión es un invariante topológico y enunciamos este hecho como un teorema.

Teorema 4.2. *Sean X y Y espacios métricos separables y $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. Si X es homeomorfo a Y y $\dim[X] = n$, entonces $\dim[Y] = n$.*

Demostración. La prueba la hacemos por inducción sobre $\dim[X]$. Sea $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo.

Si $\dim[X] = -1$, entonces $X = \emptyset$. Como f es suprayectiva, tenemos que $Y = h(X) = h(\emptyset) = \emptyset$. Así, $\dim[Y] = -1$.

Veamos que si $\dim[X] = n$, entonces la $\dim[Y] = n$. Sean $y \in Y$ y U un abierto en Y tal que $y \in U$. Como h es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como h es continua y $y \in U$, tenemos que $h^{-1}(U)$ es abierto en X tal que $x \in h^{-1}(U)$. Como $\dim[X] = n$, existe V abierto en X tal que $x \in V \subset h^{-1}(U)$ y $\dim[\text{fr}_X(V)] \leq n - 1$. Luego, $h(x) \in h(V) \subset h(h^{-1}(U))$. Como h es biyectiva, tenemos que $h(h^{-1}(U)) = U$. Así, $y \in h(V) \subset U$. Como h es una función abierta, tenemos que $h(V)$ es abierto en Y . Como $\dim[\text{fr}_X(V)] \leq n - 1$ y $h|_{\text{fr}_X(V)} : \text{fr}_X(V) \rightarrow h(\text{fr}_X(V))$ es un homeomorfismo, por hipótesis de inducción, obtenemos que $\dim[h(\text{fr}_X(V))] \leq n - 1$. Como $h(\text{fr}_X(V)) = \text{fr}_Y(h(V))$, tenemos que $\dim[\text{fr}_Y(h(V))] \leq n - 1$. Así, $\dim[Y] \leq n$.

Resta ver que $\dim[Y] > n - 1$. Supongamos que $\dim[Y] \leq n - 1$. Por hipótesis de inducción, obtenemos que $\dim[X] \leq n - 1$. Esto es una contradicción porque $\dim[X] = n$. Así, $\dim[Y] > n - 1$. Por lo tanto, $\dim[Y] = n$. \square

Teorema 4.3. [20, 3.2] **Teorema del Subespacio.** *Sea X un espacio métrico separable. Si Y es un subespacio de X y $\dim[X] \leq n$, entonces $\dim[Y] \leq n$.*

Teorema 4.4. Teorema de Suma Finita. [20, 6.1] *Sea X un espacio métrico separable. Si Y y Z son subespacios de X , entonces $\dim[Y \cup Z] \leq 1 + \dim[Y] + \dim[Z]$.*

Recordemos que un subconjunto A de un espacio topológico X es F_σ si A se puede escribir como la unión numerable de cerrados en X .

Teorema 4.5. Teorema de Suma para Espacios n -Dimensionales. [20, 7.1] *Sea X un espacio métrico separable. Si X es unión numerable de subconjuntos de X tales que son F_σ y de dimensión menor o igual que n , entonces X tiene dimensión menor o igual que n .*

Corolario 4.6. *Sea X un espacio métrico separable. Si X es unión numerable de conjuntos cerrados en X de dimensión menor o igual que n , entonces X tiene dimensión menor o igual que n .*

Demostración. Como todo conjunto cerrado es F_σ , el resultado se sigue del Teorema 4.5. \square

Teorema 4.7. *Sean X un espacio métrico separable y Y y Z subespacios de X de dimensión menor o igual que n . Si $X = Y \cup Z$ y Y es cerrado en X o Z es cerrado en X , entonces la dimensión de X es menor o igual que n .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que Y es cerrado en X . Luego, $X - Y$ es abierto en X . Como en un espacio métrico todo conjunto abierto es un conjunto F_σ [5, pág. 76], tenemos que $X - Y$ es un conjunto F_σ . Notemos que $X - Y \subset Z$. Luego, $\dim[X - Y] \leq \dim[Z]$. Por el Teorema 4.3, tenemos que la dimensión de $X - Y$ es menor o igual que n . Por el Teorema 4.5, tenemos que $(X - Y) \cup Y$ tiene dimensión menor o igual que n . Así, X tiene dimensión menor o igual que n . \square

Corolario 4.8. *Sean X un espacio métrico separable y Y un subespacio de X . Si la dimensión de Y es menor o igual que n y $p \in X - Y$, entonces la dimensión de $Y \cup \{p\}$ es menor o igual que n .*

5. El n -ésimo hiperespacio suspensión

En esta sección retomamos algunas propiedades del n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo; por lo que comenzamos enunciando su definición.

Definición 5.1. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. El n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo, que denotamos por $HS_n(X)$, es el espacio de descomposición de $C_n(X)$ dado por

$$HS_n(X) = \{\{A\}: A \in C_n(X) - F_n(X)\} \cup \{F_n(X)\}.$$

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, denotamos en este caso particular por

$$q_X^n : C_n(X) \rightarrow HS_n(X)$$

a la función natural. Al punto $q_X^n(F_n(X))$ lo denotamos por F_X^n .

Notemos que para un continuo X se tiene que $F_n(X) \subset C_n(X) \subset 2^X$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.2. *El n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo es un continuo.*

Demostración. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 3.4, tenemos que $F_n(X)$ es un subconjunto compacto de $C_n(X)$. Por el Teorema 3.5, tenemos que $C_n(X)$ es un continuo. Luego, $C_n(X)$ es de Hausdorff. Así, $F_n(X)$ es un cerrado en $C_n(X)$. Por el Teorema 2.29, tenemos que $HS_n(X)$ es una descomposición semicontinua superior. Luego, por el Teorema 2.28, tenemos que $HS_n(X)$ es un continuo. \square

La conexidad local se preserva bajo funciones continuas, suprayectivas y cerradas. Este hecho se enuncia a continuación.

Teorema 5.3. [2, (2.E.7)] *Sean X y Y espacios topológicos. Si X es localmente conexo, $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, suprayectiva y cerrada, entonces Y es localmente conexo.*

Como toda función continua de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es cerrada, tenemos el resultado siguiente.

Corolario 5.4. *La propiedad de ser un continuo localmente conexo es invariante bajo funciones continuas.*

Teorema 5.5. *Si X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $HS_n(X) - \{F_X^n\}$ es homeomorfo a $C_n(X) - F_n(X)$.*

Demostración. Consideremos la función natural $q_X^n : C_n(X) \rightarrow HS_n(X)$. Sea

$$h : C_n(X) - F_n(X) \rightarrow HS_n(X) - \{F_X^n\}$$

definida para cada $A \in C_n(X) - F_n(X)$ por $h(A) = q_X^n(A)$. Como q_X^n es una función continua, tenemos que h es continua. Veamos que h es biyectiva. Sean $A, B \in C_n(X)$ tales que $h(A) = h(B)$. Luego, $\{A\} = \{B\}$. Así, $A = B$. Por lo tanto h es inyectiva. Como $q_X^n(F_n(X)) = \{F_X^n\}$, tenemos que h es suprayectiva. Así, h es biyectiva. Ahora, veamos que h es abierta. Sea \mathcal{U} un abierto en $C_n(X) - F_n(X)$. Luego, $q_X^n(\mathcal{U}) = \{q_X^n(C) : C \in \mathcal{U}\} = \{\{C\} : C \in \mathcal{U}\}$. Como $\bigcup_{\mathcal{P} \in q_X^n(\mathcal{U})} \mathcal{P} = \bigcup_{C \in \mathcal{U}} \{C\} = \mathcal{U}$, tenemos que $q_X^n(\mathcal{U})$ es abierto en $HS_n(X)$. Por lo tanto, $h : C_n(X) - F_n(X) \rightarrow HS_n(X) - \{F_X^n\}$ es un homeomorfismo. \square

Como comentamos en la Introducción, el n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo nos da información sobre el continuo mismo, y viceversa, en este sentido se tiene el resultado que sigue.

Teorema 5.6. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $HS_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Como $q_X^n(C_n(X)) = HS_n(X)$, por el Teorema 3.13 se tiene que $C_n(X)$ es localmente conexo; y por el Corolario 5.4, tenemos que $HS_n(X)$ es localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que $HS_n(X)$ es localmente conexo. Como $HS_n(X) - \{F_X^n\}$ es abierto en $HS_n(X)$, por [12, Teorema 3, pág.230], tenemos que $HS_n(X) - \{F_X^n\}$ es localmente conexo. Por el Teorema 5.5, tenemos que $C_n(X) - F_n(X)$ es homeomorfo a $HS_n(X) - \{F_X^n\}$. Luego, $C_n(X) - F_n(X)$ es localmente conexo. Por el Teorema 3.15, tenemos que X es localmente conexo. \square

Teorema 5.7. [19, 5.5] *Si X es un continuo no degenerado, entonces X contiene un subcontinuo propio y no degenerado. Además, si A es un subcontinuo propio de X y U es abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo B de X contenido en U tal que $A \subset B$ y $B \neq A$.*

Teorema 5.8. [5, 4.13, pág. 72] *Sea X un espacio topológico. Un subespacio D de X es denso en X si y sólo si $\text{int}_X(X - D) = \emptyset$.*

Teorema 5.9. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es denso en ninguna parte en $C_n(X)$.*

Demostración. Notemos que, por el Teorema 3.4, $F_n(X)$ es cerrado en $C_n(X)$. Por el Teorema 5.8, basta probar que $C_n(X) - F_n(X)$ es denso en $C_n(X)$.

Sea \mathcal{U} un conjunto no vacío y abierto en $C_n(X)$. Veamos que $\mathcal{U} \cap (C_n(X) - F_n(X)) \neq \emptyset$. Sean U_1, \dots, U_m conjuntos no vacíos y abiertos en X , con $m \leq n$, tales que $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n \subset \mathcal{U}$.

Por la normalidad de X , para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe un abierto V_i en X tal que $V_i \subset \text{cl}_X(V_i) \subset U_i$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea C_i una componente de V_i en U_i . Note que $\text{cl}_X(C_i) \subset \text{cl}_X(V_i)$. Como $\text{cl}_X(C_i)$ es un subcontinuo propio de X contenido en U_i , por el Teorema 5.7, existe un subcontinuo B_i de X contenido en U_i tal que $\text{cl}_X(C_i) \subset B_i$ y $B_i \neq \text{cl}_X(C_i)$.

Sea $A = \bigcup_{i=1}^m B_i$. Notemos que A es un cerrado en X y que A tiene a lo más n componentes. Así, $A \in C_n(X)$.

Como B_i es no degenerado, tenemos que A tiene cardinalidad no finita. Luego, $A \notin F_n(X)$.

Notemos que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, tenemos que $A \cap U_i \neq \emptyset$. Además, $A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$. Así, $A \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$. Por lo tanto, $A \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_n \cap (C_n(X) - F_n(X)) \subset \mathcal{U} \cap (C_n(X) - F_n(X))$. Así, $\mathcal{U} \cap (C_n(X) - F_n(X)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C_n(X) - F_n(X)$ es denso en $C_n(X)$. \square

El siguiente resultado se debe a Sergio Macías [14, Teorema 3.6].

Teorema 5.10. *Sea X un continuo. Si la dimensión de $C_n(X)$ es finita, entonces $\dim[C_n(X)] = \dim[HS_n(X)]$.*

Demostración. Por el Teorema 5.5, tenemos que $C_n(X) - F_n(X)$ es homeomorfo a $HS_n(X) - \{F_X^n\}$. Por el Teorema 4.2, tenemos que $\dim[C_n(X) - F_n(X)] = \dim[HS_n(X) - \{F_X^n\}]$. Además, por el Corolario 4.8, tenemos que $\dim[HS_n(X) - \{F_X^n\}] = \dim[HS_n(X)]$.

Luego, $\dim[C_n(X) - F_n(X)] = \dim[HS_n(X)]$. Por el Teorema 5.9, tenemos que $F_n(X)$ es denso en ninguna parte en $C_n(X)$. Como $C_n(X) = (C_n(X) - F_n(X)) \cup F_n(X)$, tenemos que $\dim[C_n(X)] = \dim[C_n(X) - F_n(X)]$. Luego, $\dim[C_n(X)] = \dim[HS_n(X)]$. \square

Teorema 5.11. *Sea X un continuo de dimensión finita. Entonces la dimensión de $C_n(X)$ es finita si y sólo si la dimensión de $HS_n(X)$ es finita.*

Demostración. Supongamos que la dimensión de $C_n(X)$ es finita. Por el Teorema 5.10, tenemos que $\dim[C_n(X)] = \dim[HS_n(X)]$. Así, la dimensión de $HS_n(X)$ es finita. Recíprocamente, supongamos que la dimensión de $HS_n(X)$ es finita y que la dimensión de $C_n(X)$ no es finita. Como $C_n(X) = (C_n(X) - F_n(X)) \cup F_n(X)$, por el Teorema 4.4, tenemos que $\dim[C_n(X)] \leq 1 + \dim[C_n(X) - F_n(X)] + \dim[F_n(X)]$. De la prueba de [4, Lema 3.1], se sigue que $\dim[F_n(X)] \leq n(\dim[X])$. Por hipótesis como $\dim[X]$ es finita, tenemos que $\dim[F_n(X)]$ es finita. Luego, $\dim[C_n(X) - F_n(X)]$ no es finita. Esto es una contradicción porque por el Teorema 5.5, tenemos que $C_n(X) - F_n(X)$ es homeomorfo a $HS_n(X) - \{F_X^n\}$ y por el Teorema 4.3, tenemos que $HS_n(X) - \{F_X^n\}$ tiene dimensión finita. Por lo tanto, la dimensión de $C_n(X)$ es finita. \square

Corolario 5.12. *Sea X un continuo de dimensión finita. Si la dimensión de $C_n(X)$ es finita o la dimensión de $HS_n(X)$ es finita, entonces $\dim[C_n(X)] = \dim[HS_n(X)]$.*

Demostración. Si la dimensión de $C_n(X)$ es finita, por el Teorema 5.10, tenemos que $\dim[C_n(X)] = \dim[HS_n(X)]$. Supongamos que la dimensión de $HS_n(X)$ es finita. Por el Teorema 5.11, tenemos que la dimensión de $C_n(X)$ es finita. Luego, por el Teorema 5.10, tenemos que $\dim[C_n(X)] = \dim[HS_n(X)]$. \square

El teorema siguiente nos sirve para probar que $HS_n(X)$ contiene n -celdas.

Teorema 5.13. [7, Teorema 1.63] *Sean X un espacio métrico, V una n -celda en X y U un abierto en X . Si $p \in U \cap \text{int}_X(V)$, entonces existe una n -celda J en X tal que $p \in \text{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \text{int}_X(V)$.*

Teorema 5.14. *Si X es un continuo no degenerado y $n \in \mathbb{N}$, entonces $HS_n(X)$ contiene una n -celda.*

Demostración. Por el Teorema 3.14, tenemos que $C_n(X)$ contiene una n -celda \mathcal{L} . En la prueba del Teorema 3.14, ver Teorema 3.4 de [13], se tiene que $\mathcal{L} \cap (C_n(X) - F_n(x)) \neq \emptyset$. Por el Teorema 5.13, existe una n -celda \mathcal{W} tal que $\mathcal{W} \subset \mathcal{L} \cap (C_n(X) - F_n(X))$. Así, $\mathcal{W} \subset C_n(X) - F_n(X)$. Luego, $q_X^n(\mathcal{W}) \subset q_X^n(C_n(X) - F_n(X))$. Por el Teorema 5.5, tenemos que $q_X^n(\mathcal{W}) \subset HS_n(X) - \{F_X^n\}$. Notemos que $q_X^n(\mathcal{W})$ es una n -celda. Como $HS_n(X) - \{F_X^n\} \subset HS_n(X)$, tenemos que $HS_n(X)$ contiene una n -celda. \square

Antes de ver otras propiedades del n -ésimo hiperespacio suspensión recordemos las siguientes definiciones.

Definición 5.15. Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como una unión finita de arcos tales que cualesquiera dos, o son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos puntos extremos.

Dado un continuo X , sean

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ tal que } G \text{ es una gráfica finita}\},$$

$$\mathcal{AM} = \{X : X \text{ es un continuo y } \mathcal{G}(X) \text{ es denso en } X\},$$

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{AM} : X \text{ tiene una base local } \beta \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \beta, \mathcal{U} \cap \mathcal{G}(X) \text{ es conexo}\}.$$

Definición 5.16. Un continuo X es **casi enrejado** si $X \in \mathcal{AM}$ y es **enrejado** si $X \in \mathcal{M}$.

Para concluir este capítulo mencionamos un par de resultados en relación con todo esto, los cuales se han probado recientemente; uno de ellos se debe a David Herrera Carrasco, Alejandro Illanes, Fernando Macías Romero y Francisco Vázquez Juárez.

Teorema 5.17. [8, Teorema 3.2] Sean $n \in \mathbb{N}$ y X una gráfica finita. Si Y es un continuo tal que $HS_n(X)$ es homeomorfo a $HS_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Por otro lado, en [9], David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero, probaron el resultado siguiente:

Teorema 5.18. [9, Teorema 3.3] Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo enrejado. Si Y es un continuo tal que $HS_n(X)$ es homeomorfo a $HS_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Bibliografía

- [1] K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Monografie Mat., Vol. 44, Polish Scientific Publishers, Warszawa, Poland, 1967.
- [2] C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.
- [3] B. C. Cuevas Martínez, *Propiedades básicas del n -ésimo hiperespacio de un continuo*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.
- [4] D. Curtis, N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to \aleph_0 -dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. 19 (1985), 251–260.

-
- [5] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, London, Sydney, Toronto, 1966.
- [6] L. A. Guerrero Méndez, *Clases de continuos localmente conexos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2009.
- [7] L. A. Guerrero Méndez, *Dendritas y productos simétricos*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.
- [8] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , *Topology Proc.* 44 (2014), 75-95.
- [9] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López Toriz, F. Macías-Romero, *Meshed continua have unique n -fold hyperspace suspension*, enviado a *Topology Appl.*
- [10] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, no. 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [11] Illanes A., Nadler Jr. S. B., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [12] K. Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
- [13] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , *Topology Appl.* 109 (2001), 237–256.
- [14] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, *Topology Appl.* 138 (2004), 125–138.
- [15] S. Macías, *Topics on Continua*, Chapman and Hall/CRC, Taylor, Francis, Group, 2005.
- [16] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n -fold hyperspaces of graphs*, *Houston J. Math.* 32 (2006), 783–799.
- [17] J. R. Munkres, *Topology, Second Edition*, Prentice Hall Inc., N. J., 2000.
- [18] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Deckker, New York, Basel, 1978.
- [19] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

- [20] S. B. Nadler Jr., *Dimension Theory: An Introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, no. 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.
- [21] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 1998.
- [22] M. Wojdislawski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fund Math. 32 (1939), 184–192.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

luisgm@alumnos.fcfm.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
mjlopez@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 11

El n -ésimo hiperespacio suspensión de gráficas finitas

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,
Francisco Vázquez Juárez
FCFM-BUAP

Resumen

Un continuo es un espacio métrico con más de un punto, compacto y conexo. Una gráfica finita es un continuo que se puede escribir como unión finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos, son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos puntos extremos. Dados un continuo X y n un número natural, sean $C_n(X)$ el hiperespacio de los subconjuntos cerrados en X , no vacíos, con a lo más n componentes y $F_n(X)$ el hiperespacio de los subconjuntos no vacíos de X con a lo más n puntos, ambos considerados con la métrica de Hausdorff. Sea $HS_n(X)$ el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$ que es obtenido de $C_n(X)$ identificando $F_n(X)$ en un punto, dicho espacio lo consideramos con la topología cociente. En este capítulo, vamos a estudiar de forma minuciosa, para $n \geq 3$, parte del artículo que aparece en la referencia [10], dicho artículo relaciona una propiedad importante entre las gráficas finitas X y su hiperespacio $HS_n(X)$.

1. Introducción

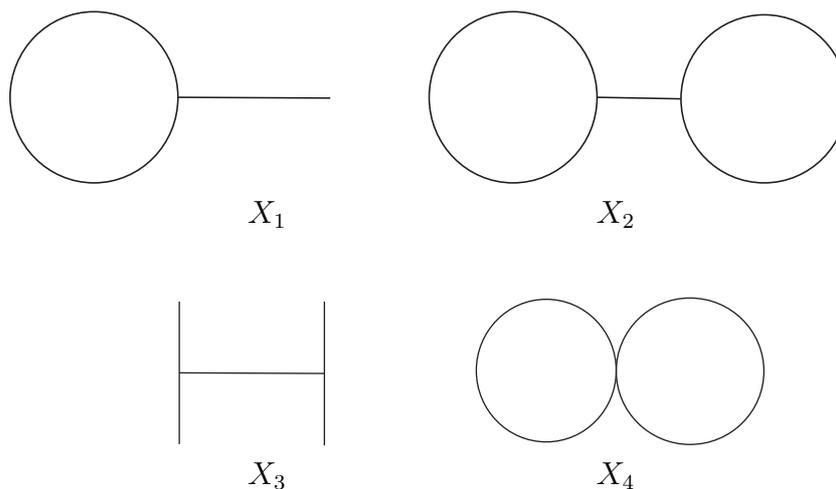
A principios de siglo dentro de la topología general, más precisamente, dentro de la teoría de los continuos e hiperespacios surge la rama de unicidad de hiperespacios; el presente trabajo pertenece a dicha rama. Cabe mencionar que existe una recopilación en [24] de todos los artículos de investigación vinculados con la unicidad de hiperespacios obtenidos desde el año 2000 hasta el 2012. En el citado artículo también se mencionan varios problemas abiertos de la unicidad de hiperespacios.

Definición 1.1. Un **continuo** es un espacio métrico con más de un punto, compacto y conexo.

Definición 1.2. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Dado un arco A , sean $f : [0, 1] \rightarrow A$ un homeomorfismo, $f(0) = p$ y $f(1) = q$. Notemos que si $g : [0, 1] \rightarrow A$ es otro homeomorfismo, tenemos que $\{g(0), g(1)\} =$

$\{f(0), f(1)\}$. Los puntos p y q son los **puntos extremos** de A . Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a S^1 , donde $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como unión finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos, son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos puntos extremos.

Los siguientes continuos denotados por X_1 , X_2 , X_3 y X_4 son ejemplos de gráficas finitas.



Definición 1.3. Dado un continuo X , un **hiperespacio** de X es una colección de subconjuntos de X que satisfacen propiedades específicas.

Dado X un continuo, uno de los hiperespacios es el siguiente:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

Con el fin de dotar a 2^X de una métrica, veamos el concepto de nube.

Definición 1.4. Sean X un espacio métrico compacto con métrica d , $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$. La **nube** de A de radio ϵ es el conjunto

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \epsilon\}.$$

Teorema 1.5. [29, Teorema 4.2, pág. 53] Si X es un espacio métrico compacto con métrica d , entonces la función $H_d : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$ definida, para cada $(A, B) \in 2^X \times 2^X$, por

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$$

es una métrica para 2^X .

Por tanto, si X es un espacio métrico compacto con métrica d , entonces la pareja $(2^X, H_d)$ es un espacio métrico y la función H_d se le conoce como la *métrica de Hausdorff* inducida por d .

Dados X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, otros hiperespacios de X son los siguientes.

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \text{ y}$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Dado que $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son subconjuntos de 2^X , los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(X)$ también tienen la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son conocidos como el n -ésimo hiperespacio de X y el n -ésimo producto simétrico de X , respectivamente. Cuando $n = 1$, escribimos $C(X)$ en lugar de $C_1(X)$ y $C(X)$ es conocido como el hiperespacio de los subcontinuos de X .

Dados X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, consideramos el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$ el que es obtenido de $C_n(X)$ identificando $F_n(X)$ en un punto, dicho espacio lo consideramos con la topología cociente y lo denotamos por $HS_n(X)$. Este espacio cociente fue introducido en [26] y bautizado con el nombre de n -ésimo hiperespacio suspensión de X . El símbolo q_X^n denota la proyección natural $q_X^n : C_n(X) \rightarrow HS_n(X)$ y F_X^n denota el elemento $q_X^n(F_n(X))$.

Si dos continuos X y Y son homeomorfos, entonces cada hiperespacio de X , por ejemplo, $C_n(X)$, $F_n(X)$ o $HS_n(X)$, es homeomorfo al hiperespacio correspondiente de Y . En general, la implicación inversa no es verdadera, esto es, puede ocurrir que dos espacios no homeomorfos tengan el mismo hiperespacio; por ejemplo, los hiperespacios de los subcontinuos de la circunferencia unitaria S^1 , $C(S^1)$, y del intervalo unitario $[0, 1]$, $C([0, 1])$, respectivamente, son homeomorfos, vea [22, Ejemplos 3.1 y 3.2]. Sin embargo, cuando la implicación inversa es verdadera se dice que X tiene hiperespacio único, esto lo establecemos en la siguiente:

Definición 1.6. Para un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{H}(X)$ alguno de los hiperespacios $C_n(X)$, $F_n(X)$ o $HS_n(X)$. Un continuo X tiene **hiperespacio único** $\mathcal{H}(X)$ si para cualquier continuo Y tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Ejemplo 1.7. Los continuos $[0, 1]$ y S^1 no tienen hiperespacio único $C([0, 1])$ y $C(S^1)$, respectivamente.

Estamos interesados en conocer clases de continuos X que tengan hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$, de manera natural surge la pregunta siguiente.

Problema 1.8. Dado un continuo X . ¿Bajo qué propiedades el continuo X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$?

Ya se conocen algunos resultados relacionados con esta cuestión, para comentar algunos necesitamos de la siguiente notación:

$$\mathcal{G} = \{X : X \text{ es una gráfica finita}\}.$$

Hasta el momento se han publicado los siguientes resultados respecto a la unicidad de hiperespacios (a)-(o).

- (a) Si $X \in \mathcal{G}$ y no es un arco y no es una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único $C(X)$, vea [1, Teorema 1] y [7, Teorema 9.1].
- (b) Si $X \in \mathcal{G}$, entonces X tiene hiperespacio único $C_2(X)$, vea [20, Teorema 4.1].
- (c) Si $X \in \mathcal{G}$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, vea [21, Teorema 3.8].
- (d) Si $X \in \mathcal{G}$, $n, m \in \mathbb{N}$ y Y es un continuo tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_m(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y , vea [21, Corolario 3.9].
- (e) Si $X \in \mathcal{G}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$, vea [6, Corolario 5.9].

Una *dendrita* es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples. Cabe mencionar que existen muchas caracterizaciones de una dendrita, puede consultarlas en [8]. En la siguiente clase de dendritas vamos a considerar la noción de punto extremo que aparece en la Definición 2.3.

$$\mathcal{D} = \{X : X \text{ es una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado}\}.$$

Para conocer propiedades sobre la clase \mathcal{D} puede consultar [5], [30] y [15].

- (f) Si $X \in \mathcal{D}$ y no es un arco, entonces X tiene hiperespacio único $C(X)$, vea [9, Teorema 10]. Además, si X es una dendrita y $X \notin \mathcal{D}$, entonces X no tiene hiperespacio único $C(X)$, vea [3, Corolario 4.9].
- (g) Si $X \in \mathcal{D}$, entonces X tiene hiperespacio único $C_2(X)$, vea [17, Teorema 13] y [23, Teorema 3.1].
- (h) Si $X \in \mathcal{D}$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, vea [13, Teorema 5.7].
- (i) Si $X \in \mathcal{D}$ y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$, vea [2, Teorema 5.2] y [11, Teorema 3.7].

Considerando el concepto de punto ordinario que se encuentra en la Definición 2.3, damos otra clase de dendritas:

$$\mathcal{O} = \{X : X \text{ es una dendrita cuyo conjunto de puntos ordinarios es abierto}\}.$$

(j) Si $X \in \mathcal{O}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_2(X)$, vea [19, Teorema 8].

Una *dendrita local* es un continuo tal que cada uno de sus puntos tiene una vecindad que es una dendrita. Sea

$$\mathcal{LD} = \{X : X \text{ es una dendrita local tal que cada uno de sus puntos}$$

tiene una vecindad que está en $\mathcal{D}\}$.

(k) Si $X \in \mathcal{LD}$ y no es un arco y no es una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único $C(X)$, vea [4, Teorema 5.1].

(l) Si $X \in \mathcal{LD}$, $n, m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, Y es un continuo y $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_m(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y , vea [14, Teorema 5.6].

Dado un continuo X , sea

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ tiene una vecindad } T \text{ en } X \text{ tal que } T \text{ es una gráfica finita}\}.$$

Un continuo X es *casi enrejado* si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X . Un continuo casi enrejado X es *enrejado* si tiene una base de vecindades β tal que para cada elemento $\mathcal{U} \in \beta$, tenemos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}(X)$ es conexo.

Sean

$$\mathcal{AM} = \{X : X \text{ es casi enrejado}\} \text{ y } \mathcal{M} = \{X : X \text{ es enrejado}\}.$$

Notemos que $\mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{LD} \subset \mathcal{M}$, vea [18, Teorema 6].

(m) Si $X \in \mathcal{M}$ y $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$. Si $X \in \mathcal{M}$ y X no es un arco y no es una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único $C(X)$, vea [18, Teorema 37].

(n) Si $X \in \mathcal{AM}$, localmente conexo y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$, vea [16, Teorema 4.3].

(o) Si $X \in \mathcal{M}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio único $HS_n(X)$, vea [12].

El propósito principal de este capítulo es probar el siguiente resultado, vea [10, Teorema 12].

Teorema 3.3 *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, entonces X tiene hiperespacio único $HS_n(X)$.*

Nuestra contribución consiste en realizar los detalles de las pruebas de los resultados necesarios para la demostración de dicho teorema.

Cabe mencionar que los resultados (a)-(o) fueron reunidos en el artículo expositivo [24], donde se hizo una exposición general del área de unicidad en hiperespacios hasta antes del año 2012.

2. Preliminares

En esta sección presentamos los conceptos de dimensión, arco libre, arco libre maximal y ciclo y, después damos algunos resultados que involucran dichos conceptos. También vamos a considerar algunos subconjuntos de $HS_n(X)$, ellos nos van a ayudar a obtener el Teorema 3.3, el objetivo principal de este trabajo. Vamos a iniciar con los conceptos y notaciones que vamos a utilizar durante el desarrollo de este trabajo.

Sean Z un espacio topológico y A un subconjunto de Z , los símbolos $cl(A)$, $fr(A)$ y A° denotan la cerradura de A , la frontera de A y el interior de A en Z , respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$. Como es usual, los símbolos \emptyset , \mathbb{N} , y \mathbb{R} , representan el conjunto vacío, los números naturales y los números reales, respectivamente. Un espacio topológico es no degenerado si tiene más de un punto. De hecho, todos los conceptos no definidos aquí serán tomados como en [29].

Definición 2.1. Sean X un espacio topológico regular, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x \in X$. La **dimensión** de X , denotada por $\dim[X]$, es un entero mayor o igual que -1 .

- (1) $\dim[X] = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$.
- (2) La dimensión de X en x es menor o igual que n , denotado por $\dim_x[X] \leq n$, si para cada abierto V en X con $x \in V$ existe U abierto en X tal que $x \in U \subset V$ y $\dim[fr_X(U)] \leq n - 1$.
- (3) $\dim[X] \leq n$ si y sólo si para todo $x \in X$, tenemos que $\dim_x[X] \leq n$.
- (4) $\dim[X] = n$ si y sólo si para cada $x \in X$, tenemos que $\dim_x[X] \leq n$ y $\dim[X] > n - 1$.

En la siguiente definición ocupamos los símbolos \aleph_0 y \mathfrak{c} que denotan la cardinalidad de los números naturales y la cardinalidad de los números reales, respectivamente; mientras que para efectos de orden de un punto pensemos simplemente que ω es un símbolo.

Definición 2.2. Sean X un espacio topológico, $p \in X$ y $\mathbf{n} \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0, \mathfrak{c}\}$. El punto p es de **orden menor o igual** que \mathbf{n} en X , se denota por $ord(p, X) \leq \mathbf{n}$, si para cada subconjunto abierto V en X tal que $p \in V$, existe U un subconjunto abierto en X tal que $p \in U \subset V$ y $|fr_X(U)| \leq \mathbf{n}$. El punto p es de **orden \mathbf{n}** en X , denotado por $ord(p, X) = \mathbf{n}$, si $ord(p, X) \leq \mathbf{n}$ y $ord(p, X) \not\leq \alpha$ para cualquier $\alpha < \mathbf{n}$. El punto p es de **orden ω** en X , denotado por $ord(p, X) = \omega$, si para cada subconjunto abierto V en X tal que $p \in V$, existe U un subconjunto abierto en X tal que $p \in U \subset V$ y $|fr_X(U)|$ es finita, pero $ord(p, X) \notin \mathbb{N}$.

Se puede clasificar los puntos de un espacio topológico de la siguiente manera.

Definición 2.3. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. El punto p es un **punto extremo** de X , si $ord(p, X) = 1$. El conjunto de todos los puntos extremos de X es denotado por $E(X)$. El punto p es un **punto ordinario** de X , si $ord(p, X) = 2$. El conjunto de todos los puntos ordinarios de X es denotado por $O(X)$. El punto p es un **punto de ramificación** de X , si $ord(p, X) \geq 3$. El conjunto de todos los puntos de ramificación de X es denotado por $R(X)$. Notemos que $X = E(X) \cup O(X) \cup R(X)$.

En [28, Teorema 2.4], la autora obtiene una fórmula para calcular la dimensión de $C_n(X)$ en $A \in C_n(X)$, donde X es una gráfica finita; esta fórmula la establecemos en el siguiente resultado.

Teorema 2.4. Si X es una gráfica finita, $A \in C_n(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\dim_A[C_n(X)] = 2n + \sum_{p \in R(X) \cap A} (ord(p, X) - 2).$$

Los resultados que están probados en este capítulo originalmente aparecen en [10].

Teorema 2.5. Sean X una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X) - F_n(X)$. Si $A \cap R(X) \neq \emptyset$, entonces $\dim_{q_X^n(A)}[HS_n(X)] \geq 2n + 1$.

Demostración. Dado que $C_n(X) - F_n(X)$ es un subconjunto abierto en $C_n(X)$, tenemos que $\dim_A[C_n(X)] = \dim_A[C_n(X) - F_n(X)]$. Luego, por el Teorema 2.4, inferimos que $\dim_A[C_n(X) - F_n(X)] \geq 2n + 1$. Dado que $q_X^n|_{C_n(X) - F_n(X)} : C_n(X) - F_n(X) \rightarrow HS_n(X) - \{F_X^n\}$ es un homeomorfismo, $\dim_{q_X^n(A)}[HS_n(X) - \{F_X^n\}] \geq 2n + 1$. Como $HS_n(X) - \{F_X^n\}$ es un subconjunto abierto en $HS_n(X)$, concluimos que $\dim_{q_X^n(A)}[HS_n(X)] \geq 2n + 1$. \square

Teorema 2.6. Sean X una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada subconjunto abierto \mathcal{U} en $HS_n(X)$ tal que $F_X^n \in \mathcal{U}$, tenemos que $\dim[\mathcal{U}] \geq 2n + 1$.

Demostración. Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto en $HS_n(X)$ tal que $F_X^n \in \mathcal{U}$ y pongamos $\mathcal{V} = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$. Notemos que \mathcal{V} es un subconjunto abierto en $C_n(X)$. Fijemos un punto $p \in R(X)$. Dado que $\{p\} \in \mathcal{V}$, podemos elegir un arco A contenido en X tal que $p \in A$ y $A \in \mathcal{V}$. Por tanto, $q_X^n(A) \in \mathcal{U}$ y por el Teorema 2.5, inferimos que $2n + 1 \leq \dim_{q_X^n(A)}[HS_n(X)]$. Como $\dim_{q_X^n(A)}[HS_n(X)] \leq \dim[\mathcal{U}]$, tenemos que $\dim[\mathcal{U}] \geq 2n + 1$. \square

Dados una gráfica finita X y $n \in \mathbb{N}$, sean

$$\mathcal{M}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \notin C_{n-1}(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}, \text{ donde } n \geq 2,$$

$$\mathcal{L}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{M} \text{ en } C_n(X) \text{ tal que } \mathcal{M} \text{ es una } 2n\text{-celda}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{H}\mathcal{L}_n(X) = \{A \in HS_n(X) : A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{M} \text{ en } HS_n(X) \text{ tal que } \mathcal{M} \text{ es una } 2n\text{-celda}\}.$$

El siguiente resultado aparece en [21, Lema 3.5] y nos ayuda a probar el Teorema 2.8.

Teorema 2.7. *Si X es una gráfica finita y $n \geq 3$, entonces $\mathcal{M}_n(X) = \mathcal{L}_n(X)$.*

Teorema 2.8. *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Si $R(X) \neq \emptyset$ o $n \geq 3$, entonces $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_n(X)) = \mathcal{H}\mathcal{L}_n(X)$.*

Demostración. Dado que $q_X^n|_{C_n(X) - F_n(X)} : C_n(X) - F_n(X) \rightarrow HS_n(X) - \{F_X^n\}$ es un homeomorfismo y $C_n(X) - F_n(X)$ y $HS_n(X) - \{F_X^n\}$ son subconjuntos abiertos en $C_n(X)$ y $HS_n(X)$, respectivamente, inferimos que $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_n(X)) = \mathcal{H}\mathcal{L}_n(X) - \{F_X^n\}$. Enseguida consideramos los dos casos que aparecen en la hipótesis:

Caso 1. Sea $R(X) \neq \emptyset$.

Por el Teorema 2.6, tenemos que $\mathcal{H}\mathcal{L}_n(X) - \{F_X^n\} = \mathcal{H}\mathcal{L}_n(X)$. Por tanto, $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_n(X)) = \mathcal{H}\mathcal{L}_n(X)$.

Caso 2. Sea $R(X) = \emptyset$ y $n \geq 3$.

Veamos que $F_X^n \notin \mathcal{H}\mathcal{L}_n(X)$. Supongamos lo contrario, es decir, $F_X^n \in \mathcal{H}\mathcal{L}_n(X)$. Sea \mathcal{M} una vecindad de F_X^n en $HS_n(X)$ tal que \mathcal{M} es una $2n$ -celda. Fijemos un punto $p \in X$. Luego, $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{M})$ es una vecindad de $\{p\}$ en $C_n(X)$. Elegimos un elemento $A \in C_n(X)$ tal que A tiene exactamente $n - 1$ componentes no degeneradas y $q_X^n(A) \in \mathcal{M}^\circ$. Por tanto, existe una $2n$ -celda \mathcal{N} tal que $q_X^n(A) \in \mathcal{N}^\circ$ y $F_X^n \notin \mathcal{N}$. Por consiguiente, $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{N})$ es una $2n$ -celda que contiene A en su interior en $C_n(X)$. Esto contradice al Teorema 2.7. Así que $F_X^n \notin \mathcal{H}\mathcal{L}_n(X)$. Por tanto, $\mathcal{H}\mathcal{L}_n(X) - \{F_X^n\} = \mathcal{H}\mathcal{L}_n(X)$ y $q_X^n(\mathcal{L}_n(X) - F_n(X)) = \mathcal{H}\mathcal{L}_n(X)$. \square

Dados una gráfica finita X y $n \in \mathbb{N}$, sean

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n(X) &= \{A \in C_n(X) : A \notin \mathcal{L}_n(X) \text{ y } A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades en} \\ &C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \dim \mathcal{U} \leq 2n \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X) \text{ es arco conexo}\} \text{ y} \\ \mathcal{HD}_n(X) &= \{A \in HS_n(X) : A \notin \mathcal{HL}_n(X) \text{ y } A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades en} \\ &HS_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \dim \mathcal{U} \leq 2n \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{HL}_n(X) \text{ es arco conexo}\}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado está en [21, Lema 3.6] y es útil para probar el Teorema 2.10.

Teorema 2.9. *Si X es una gráfica finita y $n \geq 3$, entonces $\mathcal{D}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ es conexo y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.*

Teorema 2.10. *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$.*

- (1) *Si $n \geq 3$, entonces $\mathcal{HD}_n(X) - \{F_X^n\} = \{q_X^n(A) \in HS_n(X) : A \in C(X) - F_n(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.*
- (2) *Si $n \geq 3$ y $R(X) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{HD}_n(X) = \{q_X^n(A) \in HS_n(X) : A \in C(X) - F_n(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$.*

Demostración. Probemos (1). Sea $B = q_X^n(A) \in \mathcal{HD}_n(X) - \{F_X^n\}$. Por tanto, $A \in C_n(X) - F_n(X)$ y $\dim_A[C_n(X)] = \dim_B[HS_n(X)] \leq 2n$. Por el Teorema 2.5, tenemos que $A \cap R(X) = \emptyset$. Dado que $B \notin \mathcal{HL}_n(X)$, deducimos que $A \notin \mathcal{L}_n(X)$. Sea \mathcal{B} una base de vecindades de B en $HS_n(X)$ como en la definición de $\mathcal{HD}_n(X)$. Podemos suponer que $F_X^n \notin \mathcal{U}$, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Por el Teorema 2.8, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, inferimos que $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{HL}_n(X)) = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap (q_X^n)^{-1}(\mathcal{HL}_n(X)) = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap (\mathcal{L}_n(X) - F_n(X)) = (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}_n(X)$. Luego, el conjunto $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo. Por tanto, $\{(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades de A en $C_n(X)$ que satisface la definición de $\mathcal{D}_n(X)$. Por el Teorema 2.9, inferimos que $A \in C(X)$. Por lo que $\mathcal{HD}_n(X) - \{F_X^n\} \subset \{q_X^n(A) \in HS_n(X) : A \in C(X) - F_n(X) \text{ y } A \cap R(X) = \emptyset\}$. La otra contención se puede probar con argumentos similares.

Probemos (2). En este caso $R(X) \neq \emptyset$. Por el Teorema 2.6, deducimos que $F_X^n \notin \mathcal{HD}_n(X)$. Por tanto, (2) se obtiene de (1). \square

Definición 2.11. Sean X un continuo y J un arco contenido en X con puntos extremos p y q . Se dice que J es un **arco libre** en X , si $J - \{p, q\}$ es abierto en X . Se dice que J es un **arco libre maximal**, si J es un arco libre en X que es maximal respecto a la inclusión. Un **ciclo** S en X es una curva cerrada simple con a lo más un punto de ramificación de X .

Dados una gráfica finita X y $n \in \mathbb{N}$, sean

$\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X \text{ o } J \text{ es un ciclo en } X\}$ y

$\mathcal{HE}_n(X) = \{A \in HS_n(X) : \dim_A[HS_n(X)] = 2n\}$.

Teorema 2.12. *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que*

- (1) *Si $R(X) \neq \emptyset$ y $n \geq 3$, entonces las componentes de $\mathcal{HD}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X)) - \{F_X^n\}$, donde $J \in \mathcal{A}_S(X)$.*
- (2) *Si $R(X) \neq \emptyset$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces las componentes de $\mathcal{HE}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$, donde $J_1, \dots, J_m \in \mathcal{A}_S(X)$ y $m \leq n$.*

Demostración. Probemos (1). Por el Teorema 2.10, deducimos que $\mathcal{HD}_n(X) = \bigcup \{q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X)) - \{F_X^n\} : J \in \mathcal{A}_S(X)\}$. Dado que los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X)) - \{F_X^n\}$, donde $J \in \mathcal{A}_S(X)$, son abiertos en $\mathcal{HD}_n(X)$, conexos y ajenos por pares, concluimos que ellos son las componentes de $\mathcal{HD}_n(X)$.

Probemos (2). Por el Teorema 2.4, inferimos que $\dim_A[C_n(X)] = 2n$ si y sólo si $A \cap R(X) = \emptyset$. Por el Teorema 2.6, tenemos que $F_X^n \notin \mathcal{HE}_n(X)$. Con todo esto, la prueba de (2) se obtiene. \square

3. Teoremas principales

Con los resultados expuestos en la sección anterior estamos cerca de presentar nuestro resultado principal, para ello necesitamos el siguiente resultado no menos importante.

El siguiente resultado está en [25, Teorema 14.6] y lo utilizamos para probar la Afirmación 2 del Teorema 3.2.

Teorema 3.1. *Si X es un espacio métrico compacto y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, entonces existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(L)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subset \alpha(t)$, si $s \leq t$.*

Teorema 3.2. *Sean X y Y gráficas finitas tales que $R(X) \neq \emptyset \neq R(Y)$, $n \geq 3$ y sea $h : HS_n(X) \rightarrow HS_n(Y)$ un homeomorfismo. Si para cada $J \in \mathcal{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathcal{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X)) - \{F_X^n\}) \subset q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n)$ y $\mathcal{A}_S(Y) = \{J_h : J \in \mathcal{A}_S(X)\}$.*

- (A) *Para cada $J \in \mathcal{A}_S(X)$, tenemos que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$,*
- (B) *La asociación $J \rightarrow J_h$ es una biyección entre $\mathcal{A}_S(X)$ y $\mathcal{A}_S(Y)$,*

$$(C) \quad h(F_X^n) = F_Y^n.$$

Además, si también suponemos que: (1) si J es un ciclo, entonces J_h es un ciclo y (2) si J es un arco libre maximal tal que $|J \cap R(X)| = 1$, entonces J_h es un arco libre maximal tal que $|J_h \cap R(Y)| = 1$, entonces X es homeomorfo a Y .

Demostración. Por el Teorema 2.12 (2), las componentes de $\mathcal{HE}_n(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^n(\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$, donde $J_1, \dots, J_m \in \mathcal{A}_S(X)$ y $m \leq n$. Dado $J \in \mathcal{A}_S(X)$, el conjunto $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$ es una componente de $\mathcal{HE}_n(Y)$. Tomamos dos subarcos distintos A y B de J° . Por tanto, $h(q_X^n(A)), h(q_X^n(B)) \in h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$. Podemos suponer que $h(q_X^n(A)) \neq F_Y^n$. Por hipótesis, inferimos que $h(q_X^n(A)) \in q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$. Así, $h(q_X^n(A))$ pertenece a los conjuntos $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$ y $q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$. Dado que estos dos conjuntos son componentes de $\mathcal{HE}_n(Y)$, deducimos que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$. Esto prueba (A).

Probemos (B). Supongamos que $J, L \in \mathcal{A}_S(X)$ son tales que $J_h = L_h$. Por (A) de este teorema, deducimos que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = h(q_X^n(\langle L^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$. Por lo tanto, $q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\} = q_X^n(\langle L^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$. Si A es un arco tal que $A \subset J^\circ$, entonces $q_X^n(A) \in q_X^n(\langle L^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}$, así existe $B \in \langle L^\circ \rangle_n - F_n(X)$ tal que $q_X^n(A) = q_X^n(B)$. Luego, $A = B \in \langle J^\circ \rangle_n \cap \langle L^\circ \rangle_n$ y $\emptyset \neq A \subset J^\circ \cap L^\circ$. Esto implica que $J = L$. Esto prueba (B).

Probemos (C). Para demostrar que $h(F_X^n) = F_Y^n$, primero veamos que $\{F_X^n\} = \bigcap \{cl_{HS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathcal{A}_S(X)\}$. Sea $J \in \mathcal{A}_S(X)$. Dado que cada elemento de la forma $\{p\}$, donde $p \in J^\circ$ puede ser aproximado por elementos en $\langle J^\circ \rangle_n - F_n(X)$, inferimos que $\{p\} \in cl_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n - F_n(X))$. Esto implica que $F_X^n \in cl_{HS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})$. Supongamos que existe un elemento $B \in \bigcap \{cl_{HS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathcal{A}_S(X)\} - \{F_X^n\}$. Fijemos $J_0 \in \mathcal{A}_S(X)$. Luego, existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ de elementos en $\langle J_0^\circ \rangle_n$ tal que $\lim q_X^n(A_m) = B$. Podemos suponer que $\lim A_m = A$ para algún $A \in \langle J_0^\circ \rangle_n \cap C_n(X)$. Como $B \neq F_X^n$ y $q_X^n(A) = B$, obtenemos que $A \in C_n(J_0) - F_n(J_0)$. Así, A tiene una componente no degenerada y $A \subset J_0$. Esto implica que $A \cap J_0^\circ \neq \emptyset$. Dado que $R(X) \neq \emptyset$, existe $J \in \mathcal{A}_S(X)$ tal que $J \neq J_0$. Con un argumento análogo, existe $D \in C_n(J) - F_n(J)$ tal que $q_X^n(D) = B$. Dado que $B \neq F_X^n$, tenemos que $A = D$. Por tanto, $J_0^\circ \cap J \neq \emptyset$. Esto es una contradicción, de esto concluimos que $\{F_X^n\} = \bigcap \{cl_{HS_n(X)}(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) : J \in \mathcal{A}_S(X)\}$.

Con argumentos similares probamos que $\{F_Y^n\} = \bigcap \{cl_{HS_n(Y)}(q_Y^n(\langle K^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : K \in \mathcal{A}_S(Y)\}$. Así,

$$\begin{aligned} h(\{F_X^n\}) &= \bigcap \{cl_{HS_n(Y)}(h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\})) : J \in \mathcal{A}_S(X)\} = \\ &= \bigcap \{cl_{HS_n(Y)}(q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : J \in \mathcal{A}_S(X)\} = \\ &= \bigcap \{cl_{HS_n(Y)}(q_Y^n(\langle K^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}) : K \in \mathcal{A}_S(Y)\} = \{F_Y^n\}. \end{aligned}$$

Concluimos que $h(F_X^n) = F_Y^n$. Esto completa la prueba de (C).

Vamos a probar que X es homeomorfo a Y . Dado $A \in C_n(X) - F_n(X)$, notemos que $q_X^n(A) \neq F_X^n$. Por tanto, $h(q_X^n(A)) \neq F_Y^n$ y existe un único elemento $D_A \in C_n(Y) - F_n(Y)$ tal que $h(q_X^n(A)) = q_Y^n(D_A)$. Notemos que la asociación $A \rightarrow D_A$ es un homeomorfismo entre los conjuntos $C_n(X) - F_n(X)$ y $C_n(Y) - F_n(Y)$. Luego, $\dim_A[C_n(X)] = \dim_{q_X^n(A)}[HS_n(X)] = \dim_{h(q_X^n(A))}[HS_n(Y)] = \dim_{D_A}[C_n(Y)]$.

Dado $J \in \mathcal{A}_S(X)$, sea $\mathcal{K}_n(J, X) = \text{cl}_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n) - F_n(X)$.

Afirmación 1. Sea $J \in \mathcal{A}_S(X)$. Tenemos que

- (a) $\mathcal{K}_n(J_h, Y) = \{D_A \in C_n(Y) - F_n(Y) : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\}$,
- (b) $\{\dim_A[C_n(X)] : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\} = \{\dim_B[C_n(Y)] : B \in \mathcal{K}_n(J_h, Y)\}$,
- (c) $|J \cap R(X)| = |J_h \cap R(Y)|$,
- (d) si $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$, entonces $|A \cap R(X)| = |D_A \cap R(Y)|$.

Para probar la Afirmación 1 (a), sea $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$. Luego, existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ en $\langle J^\circ \rangle_n - F_n(X)$ tal que $A = \lim A_m$. Dado que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, inferimos que $D_{A_m} \in \langle J_h^\circ \rangle_n - F_n(Y)$ y $D_A \in \mathcal{K}_n(J_h, Y)$. Esto prueba la inclusión \supset . La prueba de la otra contención es análoga. La propiedad (b) se obtiene de (a). Para probar (c), es suficiente observar que, por el Teorema 2.4, deducimos que $|\{\dim_A[C_n(X)] : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\}| \geq 3$ si y sólo si $|J \cap R(X)| = 2$ y $|\{\dim_A[C_n(X)] : A \in \mathcal{K}_n(J, X)\}| = 2$ si y sólo si $|J \cap R(X)| = 1$. Finalmente, demostremos (d). Sea $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$. Si $|A \cap R(X)| = 2$, entonces $|J \cap R(X)| = 2$. Por tanto, $|J_h \cap R(Y)| = 2$ y, por el Teorema 2.4, inferimos que $\dim_A[C_n(X)] = \max\{\dim_E[C_n(X)] : E \in \mathcal{K}_n(J, X)\}$. Luego, $\dim_{D_A}[C_n(Y)] = \max\{\dim_B[C_n(Y)] : B \in \mathcal{K}_n(J_h, Y)\}$. Esto implica que $|D_A \cap R(Y)| = 2$. Similarmemente, si $|D_A \cap R(Y)| = 2$, entonces $|A \cap R(X)| = 2$. Si $|A \cap R(X)| = 0$, por el Teorema 2.4, tenemos que $2n = \dim_A[C_n(X)] = \dim_{D_A}[C_n(Y)]$. Aplicando de nuevo el Teorema 2.4, obtenemos que $|D_A \cap R(Y)| = 0$. Análogamente, si $|D_A \cap R(Y)| = 0$, entonces $|A \cap R(X)| = 0$. Por último, si $|A \cap R(X)| = 1$, entonces $|D_A \cap R(Y)| \notin \{0, 2\}$. Por tanto, $|D_A \cap R(Y)| = 1$. Esto completa la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2. Si $J \in \mathcal{A}_S(X)$ y $v \in J \cap R(X)$, entonces el conjunto $\mathcal{K}(v, J) = \{A \in \mathcal{K}_n(J, X) : A \cap R(X) = \{v\}\}$ es arco conexo.

Para demostrar la Afirmación 2, sea $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$ tal que $A \cap R(X) = \{v\}$. En el caso que J es un arco, es sencillo mostrar que existe un subarco L de J tal que $A \subset L$ y $L \cap R(X) = \{v\}$. Por el Teorema 3.1, existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow C_n(L)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = L$ y $\alpha(s) \subset \alpha(t)$, si $s \leq t$. Notemos que $\text{Im} \alpha \subset \mathcal{K}_n(J, X)$ y $\alpha(s) \cap R(X) = \{v\}$ para cada $s \in [0, 1]$. Dado que el conjunto $\{N : N \text{ es un subarco de } J \text{ y } N \cap R(X) = \{v\}\}$ es arco conexo, obtenemos que $\mathcal{K}(v, J)$ es arco conexo. Ahora supongamos que J es un ciclo en X . Identificamos J con la circunferencia

unitaria S^1 en \mathbb{R}^2 y v con el punto $(1, 0)$. Sea $e : [0, 1] \rightarrow S^1$ definida por $e(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$. Sea $A = A_1 \cup \dots \cup A_r$, donde A_1, \dots, A_r son las componentes diferentes de A . Supongamos que $v \in A_1$. Si $r < n$ o ($r = n = 1$ y $A = J$), entonces para cada $s \in (0, 1]$, el conjunto $B(s) = e(\{sx : x \in e^{-1}(A)\})$ pertenece a $\mathcal{K}(v, J)$. Notemos que la asociación $s \rightarrow B(s)$ es continua y $B(\frac{1}{2}) \subset e([0, \frac{1}{2}])$. Como $e([0, \frac{1}{2}]) \in \mathcal{K}(v, J)$ y $e([0, \frac{1}{2}])$ es un subarco de J , ahora podemos completar la prueba de este caso como lo hicimos en el caso que J es un arco. Si $r = n > 1$ o ($r = n = 1$ y A_1 es un subarco de J), como $A \in \mathcal{K}_n(J, X)$, v no está en el interior como variedad de A_1 . Por tanto, podemos suponer que existe $s_0 \in [0, 1)$ tal que $A \subset e([0, s_0])$. Dado que $e([0, s_0]) \in \mathcal{K}(v, J)$ y el conjunto $e([0, s_0])$ es un subarco de J , de nuevo podemos completar la prueba de este caso como lo hicimos en el caso que J es un arco. Esto completa la prueba de la Afirmación 2.

Dado $v \in R(X)$, sea $J \in \mathcal{A}_S(X)$ tal que $v \in J$. Sea $\mathcal{K}(v, J)$ como en la Afirmación 2 y sea $A \in \mathcal{K}(v, J)$. Por la Afirmación 1, inferimos que $D_A \in \mathcal{K}_n(J_h, Y)$ y existe un único punto $v_h(A) \in R(Y) \cap D_A$. Notemos que $v_h(A) \in J_h$.

Veamos que $v_h(A)$ no depende de A y, de hecho no depende de la elección de J . Esto es, si $K \in \mathcal{A}_S(X)$, $E \in \mathcal{K}(v, K)$, entonces $v_h(A) = v_h(E)$. En orden para probar esto, tomemos J, K, A y E como se han descrito. Tomemos un subarco A_1 de J tal que $A_1 \neq J$ y v es un punto extremo de A_1 . Observemos que $A_1 \in \mathcal{K}(v, J)$. Similarmente, existe $E_1 \in \mathcal{K}(v, K)$ tal que E_1 es conexo. Por la Afirmación 2, los conjuntos $\mathcal{K}(v, J)$ y $\mathcal{K}(v, K)$ son arco conexos. Por tanto, existen funciones continuas $\alpha_A : [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}(v, J)$ y $\alpha_E : [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}(v, K)$ tales que $\alpha_A(0) = A$, $\alpha_A(1) = A_1$, $\alpha_E(0) = E_1$, $\alpha_E(1) = E$. Esto implica que existe una función continua $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow C(A_1 \cup E_1)$ tal que $\alpha_0(0) = A_1$, $\alpha_0(1) = E_1$ y para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha_0(t) \cap R(X) = \{v\}$ y $\alpha_0(t) \notin F_n(X)$. Definimos $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(A_1 \cup E_1) \cup \mathcal{K}(v, J) \cup \mathcal{K}(v, K)$ por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_A(3t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha_0(3t - 1), & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ \alpha_E(3t - 2), & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = E$, α es una función continua y para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha(t) \cap R(X) = \{v\}$. Sea i_0 el orden de v en X .

Por el Teorema 2.4, para cada $t \in [0, 1]$, deducimos que

$$2n < 2n + (i_0 - 2) = \dim_{\alpha(t)}[C_n(X)] = \dim_{q_X^n(\alpha(t))}[HS_n(X)] = \dim_{h(q_X^n(\alpha(t)))}[HS_n(Y)] = \dim_{(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))}[C_n(Y)].$$

Definimos $T = \{t \in [0, 1] : v_h(A) \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))\}$. Notemos que T es un subconjunto cerrado de $[0, 1]$ y $0 \in T$. Probemos que $T = [0, 1]$. Supongamos lo

contrario, es decir, $T \neq [0, 1]$. Sea R una componente de $[0, 1] - T$. Luego, $t_0 = \inf R \in T$ y existe una sucesión $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de R tal que $\lim r_m = t_0$. Supongamos que el orden de el punto de ramificación $v_h(A)$ en Y es j . Así, $j \geq 3$. Aplicando de nuevo el Teorema 2.4, tenemos que $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))$ interseca $R(Y)$ para cada $t \in [0, 1]$. Dado que el conjunto $R(Y)$ es finito, podemos suponer que existe $w \in R(Y)$ tal que $w \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(r_m))))$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Esto implica que $w \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t_0))))$. Dado que $\dim_{(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(0))))}[C_n(Y)] = 2n + (i_0 - 2)$ y el único punto de ramificación de Y en $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(A))) = (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(0)))) = D_A$ es $v_h(A)$, por el Teorema 2.4, el orden de $v_h(A)$ en Y es i_0 . Por tanto, $j = i_0$. Dado que $r_1 \notin T$, tenemos que $v_h(A) \notin (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(r_1))))$, y así $v_h(A) \neq w$. Sea $j_0 \geq 3$ el orden de w en Y . Como $v_h(A), w \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t_0))))$, por el Teorema 2.4, deducimos que $\dim_{(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t_0))))}[C_n(Y)] \geq 2n + (i_0 - 2) + (j_0 - 2) > 2n + (i_0 - 2)$, una contradicción. Esto completa la prueba de que $T = [0, 1]$. Así, para cada $t \in [0, 1]$, inferimos que $v_h(A) \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))$. Procediendo como en las líneas previas, es posible mostrar que para cada $t \in [0, 1]$, $v_h(A)$ es el único punto de ramificación de Y en el conjunto $(q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(t))))$. Como $v_h(E) \in (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(E))) = (q_Y^n)^{-1}(h(q_X^n(\alpha(1))))$, concluimos que $v_h(A) = v_h(E)$. Por tanto, $v_h(A)$ no depende de la elección de J ni de A .

A partir de ahora, simplemente escribimos v_h en lugar de $v_h(A)$. De esta manera, tenemos una función $\varphi : R(X) \rightarrow R(Y)$ definida por $\varphi(v) = v_h$. Notemos que φ satisface la siguiente propiedad:

Si v es un punto de ramificación de X en J , donde $J \in \mathcal{A}_S(X)$, entonces $\varphi(v)$ es un punto de ramificación de Y en J_h de Y , donde $J_h \in \mathcal{A}_S(Y)$.

Por (b) y (c), las gráficas finitas X y Y satisfacen condiciones simétricas. Por tanto, definimos una función $\varphi^{-1} : R(Y) \rightarrow R(X)$ con un procedimiento similar. Esto es, φ^{-1} puede definirse como sigue. Dado $w \in R(Y)$, sea $K \in \mathcal{A}_S(Y)$ tal que $w \in K$. Sea $J \in \mathcal{A}_S(X)$ tal que $K = J_h$. Sea B un arco tal que $B \subset K$, $B \neq K$, w es un punto extremo de B . Luego, existe un único elemento $A \in C_n(J_h)$ tal que $q_X^n(A) = h^{-1}(q_Y^n(B))$ y $\varphi^{-1}(w)$ es el único punto en $A \cap R(X)$. Notemos que φ^{-1} es la función inversa de φ . Notemos que φ también tiene la siguiente propiedad:

Un punto de ramificación v de X está en J de X , con $J \in \mathcal{A}_S(X)$ si y sólo si el punto de ramificación $\varphi(v)$ de Y está en J_h de Y , con $J_h \in \mathcal{A}_S(Y)$.

Sea $J \in \mathcal{A}_S(X)$ tal que $|J \cap R(X)| = 1$. Por hipótesis (2), si J es un arco, entonces J_h es un arco. Por otra parte, si $J \in \mathcal{A}_S(X)$ tal que $|J \cap R(X)| = 1$ y J_h es un arco, por hipótesis (1), J no es un ciclo. Así, J es también un arco. Por tanto, si $J \in \mathcal{A}_S(X)$ y $|J \cap R(X)| = 1$, entonces J es un arco si y sólo si J_h es un arco. Similarmente, obtenemos que si $J \in \mathcal{A}_S(X)$ satisface que $|J \cap R(X)| = 1$, entonces J es un ciclo si y sólo si J_h es un ciclo.

Ahora podemos extender φ a un homeomorfismo entre X y Y . Tomamos $J \in \mathcal{A}_S(X)$. En el caso que $|J \cap R(X)| = 2$, tenemos que J es un arco. Sean u y v los puntos extremos de J . Así, $\{u, v\} = J \cap R(X)$. Dado que J_h es un arco con puntos extremos $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ podemos considerar un homeomorfismo $\varphi_J : J \rightarrow J_h$ tal que $\varphi_J(u) = \varphi(u)$ y $\varphi_J(v) = \varphi(v)$. En el caso que $|J \cap R(X)| = 1$, supongamos que $J \cap R(X) = \{w\}$, sabemos que $J_h \cap R(Y) = \{\varphi(w)\}$. Si J es un arco, sabemos que w es un punto extremo de J y $\varphi(w)$ es un punto extremo del arco J_h . Por tanto, podemos tomar un homeomorfismo $\varphi_J : J \rightarrow J_h$ tal que $\varphi_J(w) = \varphi(w)$. Finalmente, si J es un ciclo, dado que J_h es un ciclo tal que $\varphi(w) \in J_h$, existe un homeomorfismo $\varphi_J : J \rightarrow J_h$ tal que $\varphi_J(w) = \varphi(w)$.

Por tanto, podemos tomar una extensión común φ de las funciones φ_J (donde $J \in \mathcal{A}_S(X)$). Notemos que φ es un homeomorfismo entre X y Y . Esto completa la prueba del teorema. \square

Concluimos el capítulo con nuestro resultado principal que aparece a continuación.

Teorema 3.3. *Sean X una gráfica finita y $n \geq 3$. Si Y es un continuo tal que $HS_n(X)$ es homeomorfo a $HS_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y , es decir, X tiene hiperespacio único $HS_n(X)$.*

Demostración. Sea Y un continuo tal que $HS_n(X)$ es homeomorfo a $HS_n(Y)$. Dado que X es una gráfica finita, por [27, Teorema 3.2], Y también es una gráfica finita. Sea $h : HS_n(X) \rightarrow HS_n(Y)$ un homeomorfismo. Supongamos que $R(X) \neq \emptyset$. Sea $A \in C_n(X) - F_n(X)$ tal que $A \cap R(X) \neq \emptyset$ y sea $B \in C_n(Y) - F_n(Y)$ tal que $h(q_X^n(A)) = q_Y^n(B)$. Por el Teorema 2.4, inferimos que $2n < \dim_A[C_n(X)] = \dim_B[C_n(Y)]$. Aplicando de nuevo el Teorema 2.4, obtenemos que $B \cap R(Y) \neq \emptyset$. Por tanto, $R(Y) \neq \emptyset$. De esto, tenemos que $R(X) \neq \emptyset$ si y sólo si $R(Y) \neq \emptyset$.

Vamos a verificar que X , Y y h satisfacen la hipótesis del Teorema 3.2.

Dado que h es un homeomorfismo, notemos que $h(\mathcal{H}\mathcal{L}_n(X)) = \mathcal{H}\mathcal{L}_n(Y)$. Esto implica que $h(\mathcal{H}\mathcal{D}_n(X)) = \mathcal{H}\mathcal{D}_n(Y)$. Aplicando el Teorema 2.12 (1) obtenemos que para cada $J \in \mathcal{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathcal{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X)) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C(Y)) - \{F_Y^n\} \subset q_Y^n(\langle J_0^\circ \rangle_n) - \{F_Y^n\}$. Notemos que la asociación $J \rightarrow J_h$ entre $\mathcal{A}_S(X)$ y $\mathcal{A}_S(Y)$ es una biyección. Por el Teorema 3.2, inferimos que $h(F_X^n) = F_Y^n$.

Sea $J \in \mathcal{A}_S(X)$ tal que $|J \cap R(X)| = 1$. Veamos que si J es un arco, entonces J_h es un arco (y, por simetría, la implicación inversa también se cumple). Supongamos que J es un arco con puntos extremos v y p , donde $v \in R(X)$. Sea A un subarco de J tal que $p \in A$ y $v \notin A$. Por la definición de J_h , tenemos que $h(q_X^n(\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X)) - \{F_X^n\}) = q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C(Y)) - \{F_Y^n\}$. Si J_h no es un arco, entonces J_h es una curva cerrada simple. Sean $D = q_X^n(A)$ y $E = h(D)$. Por tanto, $E \in q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C(Y)) - \{F_Y^n\}$.

Entonces existe $B \in \langle J_h^\circ \rangle_n \cap C(Y) - F_1(Y)$ tal que $q_Y^n(B) = E$. Notemos que B es un subarco no degenerado de J_h . Por el Teorema 2.4, inferimos que $2n = \dim_A[C_n(X)] = \dim_D[HS_n(X)] = \dim_E[HS_n(Y)] = \dim_B[C_n(Y)]$. De nuevo, por el Teorema 2.4, $B \cap R(Y) = \emptyset$. Por [25, Ejemplo 5.2], se sigue que B tiene una vecindad \mathcal{M} en $\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C(Y) \subset C(J_h)$ tal que \mathcal{M} es una 2-celda, que contiene a B en su interior como variedad y $\mathcal{M} \cap F_1(Y) = \emptyset$. Por tanto, $q_Y^n(\mathcal{M})$ es una 2-celda, y es una vecindad de E en $q_Y^n(\langle J_h^\circ \rangle_n \cap C(Y)) - \{F_Y^n\}$ y contiene E en su interior como variedad. Dado que $h(F_X^n) = F_Y^n$, $(q_X^n)^{-1}(h^{-1}(q_Y^n(\mathcal{M})))$ es una vecindad de A en $\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X) - F_1(X) \subset C(J)$ que es una 2-celda y tiene el elemento A en su interior como variedad. Esto contradice a [25, Ejemplo 5.1] y completa la prueba de que J_h es un arco.

Como una consecuencia del hecho que probamos en el párrafo anterior, obtenemos que si $J \in \mathcal{A}_S(X)$ satisface $|J \cap R(X)| = 1$, entonces J es un ciclo si y sólo si J_h es un ciclo. Por tanto, por el Teorema 3.2, concluimos que X es homeomorfo a Y . \square

Bibliografía

- [1] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace*. Lecture notes in pure and applied mathematics, 230, 2002, 33–49.
- [2] G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Dendrites and symmetric products*. Glasnik Math. Ser. III 44, no. 1, 2009, 195–210.
- [3] G. Acosta y D. Herrera-Carrasco, *Dendrites without unique hyperspace*, Houston J. Math. 35, 2009, 451–467.
- [4] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero *Local dendrites with unique hiperespace $C(X)$* , Topology Appl. 157, 2010, 2069–2085.
- [5] D. Arévalo, W. J. Charatonik, P. Pellicer y L. Simón, *Dendrites with a closed set of end points* Topology Appl., 115, 2001, 1–17.
- [6] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*. Topology Appl., 153, 2006, 1434–1450.
- [7] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*. I, Fund. Math., 62, 1968, 265–286.
- [8] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 22, 1998, 227–253.
- [9] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math., 33, 2007, 795–805.

- [10] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , to appear in *Topology Proc.*
- [11] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero *Dendrites with unique symmetric products*, *Topology Proc.* 34, 2009, 175–190.
- [12] David Herrera-Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías-Romero, *Meshed continua have unique hyperspace $HS_n(X)$* , impreso.
- [13] D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero, *Dendrites with unique n -fold hyperspace*, *Topology Proc.*, 32, 2008, 321–337.
- [14] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique n -fold hyperspace*, *Topology Appl.* 158, 2011, 244–251.
- [15] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero y F. Vázquez-Juárez, *Dendritas Cuyo Conjunto de Puntos Extremos es Cerrado*, Memorias, 5^a Gran Semana Nacional de la Matemática, 5GSNM, 279-290, ISBN: 978-607-487-133-3, 2010.
- [16] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero y F. Vázquez-Juárez, *Peano Continua With Unique Symmetric Products*, *Journal of Mathematics Research.*, 4, 2012, 1–9.
- [17] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. de J. López y F. Macías-Romero *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$* , *Topology Appl.*, 156, 2009, 549–557.
- [18] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, to appear in *Rocky Mountain J. Math.* Available at <http://www.matem.unam.mx/rod/research/uniquenesshypeano.pdf>
- [19] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace $F_2(X)$* , *JP J. Geom. Topol.*, 2, 2002, 75–96.
- [20] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*. *Glasnik Mat.*, 37, 2002, 347–363.
- [21] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$* . *Topology Proc.*, 27, 2003, 179–188.
- [22] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN: 968-36-3594-6, 2004.
- [23] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$, II*, *Topology Proc.*, 34, 2009, 77–96.

- [24] A. Illanes, *Uniqueness of hyperspaces*. Questions Answers Gen. Topology, 30, 2012, 21–44.
- [25] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.
- [26] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138, 2004, 125–138.
- [27] S. Macías and S. B. Nadler, Jr., *Absolute n -fold hyperspace suspensions*, Colloquium Math. 105, 2006, 221–231.
- [28] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n -fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. 32, 2006, 783–799.
- [29] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.
- [30] F. Vázquez-Juárez, *Dendritas Cuyo Conjunto de Puntos Extremos es Cerrado*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP, 2010.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
205702875@fcfm.buap.mx

Capítulo 12

Algunas propiedades de los espacios topológicos linealmente ordenados

Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García
FCFM-BUAP

Resumen

En este capítulo veremos que en la clase de los espacios topológicos linealmente ordenados se cumplen equivalencias entre propiedades topológicas que no se satisfacen en la clase de todos los espacios topológicos, por ejemplo: el ser secuencial, primero numerable y ser de Frechet. También probaremos que la clase de los espacios ordenados tiene otras propiedades topológicas interesantes.

1. Introducción

Como es costumbre, \mathbb{N} y \mathbb{R} denotarán a los conjuntos de números naturales y reales, respectivamente. Recordemos que un conjunto X está *linealmente ordenado* si existe una relación $<$ en X con las siguientes propiedades:

1. Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$,
2. Si $x < y$, entonces es falso que $y < x$,
3. Si $x \neq y$, entonces $x < y$ o $y < x$.

Cuando sucede lo anterior a $<$ se le acostumbra llamar *orden lineal* sobre X y a la pareja ordenada $(X, <)$ *conjunto linealmente ordenado*.

Sea $(X, <)$ un conjunto linealmente ordenado. Una *cortadura* de X es una pareja (A, B) con $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ tales que: $X = A \cup B$ y si $x \in A$ y $y \in B$, entonces $x < y$. Una cortadura (A, B) es *trivial* si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, y es *propia* o *interior* si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$.

Sea $(X, <)$ un conjunto linealmente ordenado y (A, B) una cortadura. Diremos que:

1. (A, B) es un *salto* si A tiene último elemento y B tiene primer elemento,
2. (A, B) es un *hueco interior* si A no tiene último elemento y B no tiene primer elemento, y

3. (A, B) es *hueco extremo izquierdo (derecho)* si $A = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y B no tiene primer elemento ($A \neq \emptyset$, A no tiene último elemento y $B = \emptyset$).

Es claro que si $(X, <)$ tiene hueco extremo izquierdo (derecho), entonces X no tiene primer elemento (no tiene último elemento). En lo que sigue, siempre que se escriba que u es un hueco de X , se entenderá que u es un hueco interior, un hueco extremo izquierdo o un hueco extremo derecho.

Diremos que $(X, <)$ es *continuamente ordenado* si no tiene saltos ni huecos interiores, pudiendo tener huecos extremos, es decir, no tener ni primero ni último elemento como es el caso de \mathbb{R} con el orden usual.

Dados $a, b \in X$ con $a < b$, los conjuntos:

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\},$$

$$(\leftarrow, b) = \{x \in X : x < b\},$$

$$(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\} \text{ y}$$

$$(\leftarrow, \rightarrow) = X$$

serán llamados intervalos abiertos.

Dados $a, b \in X$ con $a < b$, los conjuntos:

$$[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\},$$

$$(\leftarrow, b] = \{x \in X : x \leq b\} \text{ y}$$

$$[a, \rightarrow) = \{x \in X : a \leq x\}$$

serán llamados intervalos cerrados.

Es fácil ver que $(X, <)$ tiene un *salto* si y sólo si existen elementos $a, b \in X$ tales que $a < b$ y $(a, b) = \emptyset$. Dado $x \in X$ diremos que x tiene un *salto a la izquierda (derecha)* si existe $a \in X$ tal que $a < x$ y $(a, x) = \emptyset$ (si existe $b \in X$ tal que $x < b$ y $(x, b) = \emptyset$).

Es conocido que la familia de intervalos abiertos satisface la siguiente propiedad (ver [6]).

Lema 1.1. *Sea $(X, <)$ un conjunto linealmente ordenado. Entonces la familia*

$$\mathcal{B} = \{I \subset X : I \text{ es un intervalo abierto de } X\}$$

es base para una topología en X la cual será denotada como $\tau_{<}$.

Este resultado nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.2. Un espacio topológico X es un *espacio topológico linealmente ordenado* si su topología está generada por un orden lineal $<$ en X . En este caso, denotaremos a este espacio como $(X, \tau_<)$.

Del Lema 1.1 tenemos que la familia

$$\mathcal{B} = \{I \subset X : I \text{ es un intervalo abierto de } X\}$$

es una base para esta topología.

Recordemos que un conjunto T es *transitivo* si para cada $b \in T$, $a \in b$ implica que $a \in T$ y que α es un *número ordinal* si α es un conjunto transitivo y está bien ordenado por la relación de pertenencia; a cualquier número ordinal α se le puede ver como el conjunto de todos sus elementos, es decir, $\alpha = \{\delta : \delta \text{ es un número ordinal y } \delta \in \alpha\}$; un número ordinal α es *límite* si para cada $\xi < \alpha$ existe un número ordinal γ tal que $\xi < \gamma < \alpha$; si un número ordinal no es límite diremos que es un ordinal *sucesor*. También recordemos que un número ordinal κ es un *número cardinal* si para cada $\alpha < \kappa$, α no es equipotente con κ , es decir, no hay función biyectiva alguna entre α y κ . El Lector interesado en ampliar su conocimiento en este tema puede consultar [3]. Para terminar esta introducción demos algunos ejemplos de espacios topológicos linealmente ordenados y una propiedad sencilla pero importante sobre ellos.

Ejemplo 1.3. Sea $X = (\mathbb{R}, \tau_<)$ donde $<$ es el orden usual en \mathbb{R} y $\tau_<$ es la topología inducida sobre \mathbb{R} por $<$. Este espacio resulta ser el espacio de los números reales con su topología usual. Es claro que \mathbb{R} no tiene ni primero ni último elemento, de donde se sigue que \mathbb{R} tiene huecos extremos.

Ejemplo 1.4. Sea $X = I \times I$ con $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ con el siguiente orden lineal: $(x_1, y_1) <_l (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ o $x_1 = x_2$ y $y_1 < y_2$, donde $<$ es el orden usual en \mathbb{R} (este orden es llamado el orden lexicográfico). Entonces $(X, \tau_{<_l})$ es un espacio topológico linealmente ordenado, al cual llamaremos Cuadrado Lexicográfico.

Ejemplo 1.5. Para cualquier número ordinal α , $(\alpha, \tau_<)$, donde $<$ es la relación de pertenencia, es un espacio topológico linealmente ordenado.

Observación 1.6. Es claro que si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces $X - \{x\} = (\leftarrow, x) \cup (x, \rightarrow)$ para todo $x \in X$ de donde se sigue que X es un espacio T_1 . Ahora, dados $x, y \in X$ tales que $x < y$, si existe $z \in X$ tal que $x < z < y$, entonces (\leftarrow, z) y (z, \rightarrow) son dos conjuntos abiertos en X ajenos tales que $x \in (\leftarrow, z)$ y $y \in (z, \rightarrow)$; si no existen puntos entre x y y , los intervalos (\leftarrow, y) y (x, \rightarrow) son abiertos ajenos tales que $x \in (\leftarrow, y)$ y $y \in (x, \rightarrow)$. Por lo tanto, X es T_2 .

2. Normalidad

Otra de las propiedades importantes que satisface todo espacio topológico linealmente ordenado es la de ser colectivamente normal tal y como demostraremos a continuación (ver [7]). Para ello son necesarias algunas definiciones y un resultado que veremos enseguida. De este último tendremos, en particular, la normalidad de todo espacio topológico linealmente ordenado.

Definición 2.1. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ una familia de subconjuntos de X .

1. \mathcal{A} es *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $|\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}| < \omega$.
2. \mathcal{A} es *discreta* si para cada $x \in X$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $|\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}| \leq 1$.

Claramente toda familia discreta es localmente finita. También es un resultado conocido que si \mathcal{A} es una familia localmente finita de subconjuntos de un espacio topológico X , entonces $cl_X(\cup \mathcal{A}) = \cup \{cl_X(A) : A \in \mathcal{A}\}$ (ver [2]).

Lema 2.2. Sean $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado y una familia discreta $\mathcal{A} = \{\{x_s\}\}_{s \in S}$ de subconjuntos singulares de X . Entonces existe una familia $\{U_s\}_{s \in S}$ de conjuntos abiertos de X tales que las siguientes propiedades se satisfacen:

1. $U_s \cap U_{s^*} = \emptyset$ para cada $s, s^* \in S$ con $s \neq s^*$;
2. para toda $s \in S$, $x_s \in U_s$.

Demostración. Como la familia \mathcal{A} es discreta, para cada $s \in S$ podemos elegir un intervalo I_s tal que $x_s \in I_s$ y para todo $t \in S \setminus \{s\}$, $x_t \notin I_s$. Recordemos que $I_s = (a_s, b_s)$, $I_s = (a_s, \rightarrow)$ o $I_s = (\leftarrow, b_s)$ para algunos $a_s, b_s \in X$. Construyamos la familia de abiertos $\{U_s\}_{s \in S}$ con las propiedades enunciadas. Sea $s \in S$.

1. Si x_s es un punto aislado de X , entonces definamos $U_s = \{x_s\}$.
2. Supongamos que x_s no es un punto aislado de X . Consideremos el correspondiente I_s , entonces existen $a_s, b_s \in X$ tales que $I_s = (a_s, b_s)$, $I_s = (a_s, \rightarrow)$ o $I_s = (\leftarrow, b_s)$. Notemos que si existe $t \in S$ tal que $x_s < x_t$ y $I_s \cap I_t \neq \emptyset$, entonces I_s no es de la forma (a_s, \rightarrow) . En los otros casos afirmamos que $A_s = \{r \in S : x_s < x_r \text{ y } I_s \cap I_r \neq \emptyset\}$ tiene cardinalidad 1. En efecto, si existen $r_1, r_2 \in S$ tales que $x_s < x_{r_1}$, $I_s \cap I_{r_1} \neq \emptyset$, $x_s < x_{r_2}$ y $I_s \cap I_{r_2} \neq \emptyset$, entonces para $x_{r_1} < x_{r_2}$ se tiene que $I_{r_2} = (a_{r_2}, b_{r_2})$, $I_{r_2} = (a_{r_2}, \rightarrow)$ o $I_{r_2} = (\leftarrow, b_{r_2})$ y dado que $I_s \cap I_{r_2} \neq \emptyset$, cualquiera de los tres casos implica que $x_{r_1} \in I_{r_2}$ lo cual es una contradicción. El caso $x_{r_2} < x_{r_1}$ se trata en forma similar.

Análogamente, se demuestra que si existe $t \in S$ tal que $x_t < x_s$ y $I_s \cap I_t \neq \emptyset$, entonces $B_s = \{r \in S : x_r < x_s \text{ y } I_s \cap I_r \neq \emptyset\}$ tiene cardinalidad 1.

Vamos a considerar el caso en que A_s y B_s tienen cardinalidad 1. Entonces $I_s = (a_s, b_s)$ ya que si $I_s = (\leftarrow, b_s)$, entonces $B_s = \emptyset$ y si $I_s = (a_s, \rightarrow)$, entonces $A_s = \emptyset$. Analicemos los siguientes casos.

- a) Supongamos que x_s no tiene un salto a la derecha ni a la izquierda. Para $t \in A_s$ se tiene que $x_s < x_t$ y $I_s \cap I_t \neq \emptyset$, entonces existen $a_t, b_t \in X$ tales que $I_t = (a_t, b_t)$, $I_t = (a_t, \rightarrow)$ o $I_t = (\leftarrow, b_t)$; como $x_s < x_t$, si $I_t = (\leftarrow, b_t)$, se tiene que $x_s \in I_t$, lo cual no puede ser, así que $I_t \neq (\leftarrow, b_t)$; para los dos casos restantes, dado que $I_s \cap I_t \neq \emptyset$, se tiene que $x_s < a_t < b_s$. Ahora, para $r \in B_s$ se tiene que $x_r < x_s$ y que $I_s \cap I_r \neq \emptyset$ lo cual implica que existen $a_r, b_r \in X$ tales que $I_r = (a_r, b_r)$, $I_r = (a_r, \rightarrow)$ o $I_r = (\leftarrow, b_r)$. Observemos que, como $x_r < x_s$, $I_r \neq (a_r, \rightarrow)$ ya que en caso contrario se tendría que $x_s \in I_r$, lo cual no puede ser. Para los casos en que $I_r = (a_r, b_r)$ o $I_r = (\leftarrow, b_r)$ se tiene que $a_s < b_r < x_s$ y dado que ya habíamos obtenido que $x_s < a_t < b_s$, definimos a U_s como el intervalo (b_r, a_t) .
- b) Si x_s tiene un salto a la derecha, entonces $I_s = (a_s, b_s)$ y $[x_s, b_s) \neq \emptyset$, ya que en caso de que $[x_s, b_s) = \emptyset$, $I_s = (a_s, x_s]$ lo cual implica que $A_s = \emptyset$, que contradice nuestra suposición. Por lo tanto, siguiendo la construcción del caso a), definimos $U_s = (b_r, a_t)$.
- c) Si x_s tiene un salto a la izquierda se hace una construcción similar a b).

Otros casos son tratados análogamente.

La familia $\{U_s\}_{s \in S}$ así construida cumple con lo requerido y, por lo tanto, queda probado el lema. \square

Definición 2.3. Un espacio topológico $T_1, (X, \tau)$, es *colectivamente normal* si y sólo si para toda familia discreta $\{F_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos cerrados de X existe una familia $\{U_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $F_s \subset U_s$ para todo $s \in S$ y $U_s \cap U_t = \emptyset$ para todo $s \neq t$.

Teorema 2.4. Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces X es *colectivamente normal*.

Demostración. Sea $\{F_s\}_{s \in S}$ una familia discreta de subconjuntos cerrados de X . Deseamos probar que existe una familia $\{U_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos abiertos de X tal que

1. Si $s, s^* \in S$ y $s \neq s^*$, entonces $U_s \cap U_{s^*} = \emptyset$;
2. para toda $s \in S, F_s \subset U_s$.

Para probarlo, definamos para cada $s \in S$

$$W_s = \cup \{(a, b) : a, b \in F_s \text{ y } (a, b) \cap (\cup \{F_{s^*} : s^* \neq s\}) = \emptyset\}$$

y observemos que $W_s \cap W_{s^*} = \emptyset$ si $s \neq s^*$. En efecto, si $y \in W_s \cap W_{s^*}$, entonces existen $a_s, b_s \in F_s$ y $a_{s^*}, b_{s^*} \in F_{s^*}$ tales que

i) $a_s < y < b_s$ y $a_{s^*} < y < b_{s^*}$;

ii) $(a_s, b_s) \cap (\cup \{F_{s^*} : s^* \neq s\}) = \emptyset$ y $(a_{s^*}, b_{s^*}) \cap (\cup \{F_t : s^* \neq t\}) = \emptyset$.

Dado que $\{F_s\}_{s \in S}$ es una familia discreta tenemos que $a_s \neq a_{s^*}$, lo cual implica que $a_s < a_{s^*}$ o que $a_{s^*} < a_s$. Si $a_s < a_{s^*}$, entonces $a_{s^*} \in (a_s, b_s)$, es decir $(a_s, b_s) \cap (\cup \{F_{s^*} : s^* \neq s\}) \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Análogamente si $a_{s^*} < a_s$. Por lo tanto $W_s \cap W_{s^*} = \emptyset$.

Ahora probaremos que $\{W_s\}_{s \in S}$ es una familia discreta. Para ello sea $x \in X$. Si $x \in \cup \{W_s : s \in S\}$, entonces W_s es abierto y no interseca a ningún W_{s^*} con $s^* \neq s$, por lo tanto existe una vecindad de x in X (a saber W_s) que interseca a lo más un elemento de la familia $\{W_s\}_{s \in S}$. Si $x \in X \setminus \cup \{W_s : s \in S\}$, entonces sea I_x un intervalo que contiene a x y que interseca a lo más a un F_s , digamos F_{s_0} ; veamos que I_x interseca a lo más a W_{s_0} . Supongamos que $I_x \cap W_s \neq \emptyset$ para algún $s \neq s_0$, entonces $I_x \cap F_s \neq \emptyset$; en efecto, si $y \in W_s \cap I_x$, entonces $y \neq x$ pues $x \notin W_s$ y por tanto $a < y < b$ para algún $a, b \in F_s$ y $y \in I_x$ y esto implica que $a \in I_x$ o $b \in I_x$; si $a \notin I_x$ y $b \notin I_x$, como $y \in (a, b) \cap I_x$, entonces $I_x \subseteq W_s$ y por tanto $x \in W_s$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a \in I_x \cap F_s$ o $b \in I_x \cap F_s$, es decir $I_x \cap F_s \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción a la elección de I_x . De aquí se sigue que I_x interseca a lo más a W_{s_0} . Por lo tanto $\{W_s\}_{s \in S}$ es una familia discreta.

Ahora lo que haremos será probar que para cada $s \in S$, $F_s \cap cl_X(\cup \{W_{s^*} : s^* \neq s\}) = \emptyset$.

Supongamos que existen $s \in S$ y $y \in F_s \cap cl_X(\cup \{W_{s^*} : s^* \neq s\})$. Entonces $y \in F_s$ y $y \in \cup \{cl_X W_{s^*} : s^* \neq s\}$ pues $\{W_s\}_{s \in S}$ es localmente finita. Entonces existe $s^* \neq s$ tal que $y \in cl_X W_{s^*}$. Como $y \in F_s$, existe un intervalo abierto I tal que $y \in I$ y $F_{s^*} \cap I = \emptyset$. Sea $z \in I \cap W_{s^*}$. Entonces existen $a, b \in F_{s^*}$ tales que $z \in (a, b)$ y $(a, b) \cap F_s = \emptyset$. En particular, $y \notin (a, b)$. Podemos suponer, por ejemplo, que $y \leq a$. Como $y, z \in I$, se tiene que $a \in I \cap F_{s^*}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $F_s \cap cl_X(\cup \{W_{s^*} : s^* \neq s\}) = \emptyset$.

Ahora probaremos que $\mathcal{F} = \{\{x\} : x \in \cup \{F_s \setminus W_s : s \in S\}\}$ es una familia discreta. Sea $z \in X$.

1. Si z no es punto de acumulación de $\cup \{F_s \setminus W_s : s \in S\}$, entonces existe una vecindad V de z tal que $(V \setminus \{z\}) \cap (\cup \{F_s \setminus W_s : s \in S\}) = \emptyset$.
2. Si z es punto de acumulación de $\cup \{F_s \setminus W_s : s \in S\}$, entonces todo intervalo I_z que contiene a z cumple con $|(I_z \cap (\cup \{F_s \setminus W_s : s \in S\}))| \geq \aleph_0$. Como $\{F_s\}_{s \in S}$ es

discreta existe un intervalo abierto I_z^{**} de X que contiene a z y tal que intersecta a lo más a un F_s . Entonces se puede cumplir que:

- a) $I_z^{**} \cap (\cup \{F_s \setminus W_s : s \in S\}) = \emptyset$ en cuyo caso obtenemos una contradicción con lo que estamos suponiendo de z .
o bien,
- b) existe $s_0 \in S$ tal que se cumple que $|(I_z^{**} \cap (F_{s_0} \setminus W_{s_0}))| \geq \aleph_0$ y $I_z^{**} \cap F_{s^*} = \emptyset$ para todo $s^* \neq s_0$; en este caso sean $x_1, x_2, x_3 \in I_z^{**} \cap (F_{s_0} \setminus W_{s_0})$ tales que $x_3 \in (x_1, x_2)$, entonces existe $s_1^* \neq s_0$ tal que $(x_1, x_2) \cap F_{s_1^*} \neq \emptyset$ (pues si no fuera así tendríamos que $(x_1, x_2) \cap (\cup \{F_{s^*} : s^* \neq s_0\}) = \emptyset$ y así $(x_1, x_2) \subseteq W_{s_0}$ y por tanto obtendríamos que $x_3 \in W_{s_0} \cap (F_{s_0} \setminus W_{s_0})$, pero esto es una contradicción ya que de aquí se sigue que $I_z^{**} \cap F_{s_1^*} \neq \emptyset$. Por lo tanto, este caso no puede ocurrir.

Entonces hemos probado que $\{\{x\} : x \in \cup \{F_s \setminus W_s : s \in S\}\}$ es una familia discreta. Por lo tanto, del Lema 2.2 tenemos que existe una familia de conjuntos abiertos $\{U_x^* : x \in \cup \{F_s \setminus W_s : s \in S\}\}$ tal que $U_x^* \cap U_y^* = \emptyset$ para cualesquiera $x \neq y$ y $x \in U_x^*$ para todo $x \in \cup \{F_s \setminus W_s : s \in S\}$.

Finalmente, definamos $U_s = W_s \cup A_s$ donde $A_s = \cup \{U_x^* : x \in F_s \setminus W_s\} \cap (X \setminus cl_X \cup \{W_{s^*} : s^* \neq s\})$. Claramente $F_s \subset U_s$ para cada $s \in S$. Resta probar que para cada $s \neq s^*$ $U_s \cap U_{s^*} = \emptyset$ y para ello será suficiente probar que para toda $s \neq s^*$, $A_s \cap A_{s^*} = \emptyset$ y $W_s \cap A_{s^*} = \emptyset$. Pero si $s \neq s^*$, $A_s \cap A_{s^*} = \emptyset$ ya que U_x^* con $x \in F_s \setminus W_s$ y U_y^* con $y \in F_{s^*} \setminus W_{s^*}$ son ajenos. Ahora sea $z \in A_{s^*}$, entonces $z \in X \setminus cl_X \cup \{W_t : t \neq s^*\}$ lo cual implica que $z \in X$ y $z \notin cl_X \cup \{W_t : t \neq s^*\} = \cup \{cl_X W_t : t \neq s^*\}$, es decir $z \notin cl_X W_t$ para todo $t \neq s^*$, por tanto $z \notin W_t$ para todo $t \neq s^*$. Por consiguiente, $A_{s^*} \cap W_s = \emptyset$ para todo $s \neq s^*$. Por lo tanto, $\{U_s\}_{s \in S}$ es la familia buscada. \square

Del Teorema 2.4 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.5. *Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces X es normal.*

Antes de enunciar el resultado siguiente daremos una definición.

Definición 2.6. Un espacio topológico X es *perfectamente normal* si X es normal y todo subconjunto cerrado de X es un conjunto G_δ .

La prueba del siguiente teorema puede ser consultada en [2](Teorema 2.1.6).

Teorema 2.7. *La propiedad de ser perfectamente normal es una propiedad hereditaria.*

3. Primero Numerable

Es bien conocido que todo espacio topológico primero numerable es un espacio de Frechet y que todo espacio de Frechet es un espacio secuencial, y que no necesariamente un espacio secuencial es un espacio primero numerable (ver Teorema 1.6.14 y Ejemplos 1.6.18 y 1.6.19 de [2]). En esta sección probaremos que en la clase de los espacios topológicos linealmente ordenados estos tres conceptos coinciden (ver [8]).

Definición 3.1. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. X es *primero numerable* si cada $x \in X$ tiene una base local numerable.
2. X es de *Frechet* si para todo $A \subset X$ se tiene que: $x \in cl_X A$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a x .
3. X es *secuencial* si para todo $A \subset X$ con $A \neq cl_X A$ existen una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A y un punto $x \in X$ tales que: $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x y $x \notin A$.

Teorema 3.2. Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado y secuencial, entonces X es primero numerable.

Demostración. Sea $x \in X$. Si no existen saltos a la izquierda de x , como $x \in cl_X(\leftarrow, x)$ podemos elegir una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos en (\leftarrow, x) tal que $\lim\{a_n\} = x$. En efecto, si suponemos que para cualquier sucesión convergente $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (\leftarrow, x)$ se tiene que $\lim\{a_n\} \neq x$, entonces tendríamos que (\leftarrow, x) es un conjunto no cerrado en donde toda sucesión convergente tiene su límite en (\leftarrow, x) lo cual contradice la secuencialidad de X . Análogamente si no existen saltos a la derecha de x , como $x \in cl_X(x, \rightarrow)$ podemos elegir una sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos en (x, \rightarrow) tal que $\lim\{b_n\} = x$. Por lo tanto, si x no tiene saltos ni a la izquierda ni a la derecha tales sucesiones existen, de donde se sigue que la familia $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local en x .

En el caso que X tenga un salto a la izquierda de x pero no a la derecha existen $a \in X$ y una sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que:

$$\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (x, \rightarrow), (a, x) = \emptyset \text{ y } \lim\{b_n\} = x,$$

entonces la familia $\{(a, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base local numerable en x . Análogamente, si X tiene un salto a la derecha de x y no tiene saltos a la izquierda de x la obtención de la base es similar al caso anterior.

Finalmente si X tiene un salto a la derecha e izquierda de x existen $a, b \in X$ tales que:

$$a < x < b, (a, x) = \emptyset \text{ y } (x, b) = \emptyset$$

por lo tanto $\{(a, b)\}$ es una base numerable en x . Por tanto, X es primero numerable. \square

Del Teorema 3.2 y las observaciones hechas al inicio de esta sección tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.3. *Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. X es primero numerable;
2. X es de Frechet;
3. X es secuencial.

4. Conexidad y compacidad

El objetivo de esta sección es estudiar los conceptos de compacidad, conexidad y otras propiedades que están relacionadas con aquéllos en la clase de los espacios linealmente ordenados. Recordemos primero algunas definiciones básicas.

Definición 4.1. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Una familia $\{A_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos abiertos de X es una *cubierta abierta* de X si $X = \cup \{A_s : s \in S\}$.
2. Una cubierta $\{A_s : s \in S^*\}$ de subconjuntos abiertos de X es una *subcubierta abierta* de otra cubierta abierta \mathcal{A} de X si para cada $s \in S^*$, $A_s \in \mathcal{A}$.
3. X es un espacio *compacto* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Definición 4.2. Sean $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado y $A \subseteq X$. A es un conjunto *acotado superiormente* (*acotado inferiormente*) si existe $a^* \in X$ tal que $a \leq a^*$ para todo $a \in A$ ($a^* \leq a$ para todo $a \in A$).

Teorema 4.3. *Sean $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado y $A \subseteq X$. Si A no es acotado superiormente, entonces X no es compacto.*

Demostración. Como $A \subseteq X$ no es acotado superiormente para cada $x \in X$ existe un $p(x) \in A$ tal que $x < p(x)$.

Consideremos la siguiente cubierta abierta de X :

$$\mathcal{U} = \{(\leftarrow, x) : x \in X\}.$$

Entonces \mathcal{U} no tiene ninguna subcubierta finita. En efecto, para cada familia finita

$$\{(\leftarrow, x_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

consideremos $x = \max\{x_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$, entonces existe $p(x) \in A$ tal que

$$p(x) \notin \cup \{(\leftarrow, x_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

de donde se sigue el resultado deseado. \square

De manera similar al Teorema 4.3 se prueba el siguiente resultado.

Teorema 4.4. *Sean $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado y $A \subseteq X$. Si A no es acotado inferiormente, entonces X no es compacto.*

Teorema 4.5. *Sea $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado. X es compacto si y sólo si para todo $A \subseteq X$ con $A \neq \emptyset$, A tiene supremo e ínfimo.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y que existe $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ tal que A no tiene supremo o no tiene ínfimo. Trataremos el caso en que A no tiene supremo (cuando A no tiene ínfimo se trata de manera similar). Así que supongamos que A no tiene supremo. Tenemos los siguientes casos:

1. Si A no está acotado superiormente, entonces, por el Teorema 4.3, X no es compacto, lo cual es una contradicción.
2. Si A está acotado superiormente, consideremos el siguiente conjunto

$$S = \{y \in X : y \text{ es cota superior de } A\}.$$

Notemos que S no puede tener ínfimo pues si existiera $y_0 \in X$ tal que $y_0 = \inf S$, entonces $y_0 = \sup A$, que contradice nuestra suposición. No es difícil probar que la familia

$$\mathcal{U} = \{(\leftarrow, a) : a \in A\} \cup \{(y, \rightarrow) : y \in S\}$$

es una cubierta abierta de X que no tiene subcubierta finita alguna. Por lo tanto, X no es compacto, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, no puede suceder que X sea compacto y que exista $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ y que A no tenga supremo o no tenga ínfimo.

Para probar la suficiencia sean \mathcal{U} , una cubierta abierta de X y $y(0)$ el primer elemento de X .

Consideremos el conjunto:

$$\mathbb{S} = \{y \in X : [y(0), y) \text{ se puede cubrir por una familia finita de } \mathcal{U}\}.$$

Por hipótesis podemos considerar $\alpha = \sup S$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in U$, por lo tanto existe un intervalo $I_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $\alpha \in I_\alpha \subseteq U$.

Si $I_\alpha = (a, b)$, entonces $a < \alpha < b$, lo cual implica que $a \in S$ y que $(\alpha, b) = \emptyset$ ya que si $z \in (\alpha, b)$, entonces $z \in S$ contradiciendo la definición de α . De aquí se sigue que $b \in S$ lo cual también es imposible. Por lo tanto $I = (a, \rightarrow)$ para alguna $a < \alpha$. Entonces $[y(0), a)$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de \mathcal{U} y $(a, \rightarrow) \subseteq U$. Por lo tanto, X se puede cubrir por una cantidad finita de elementos de \mathcal{U} , es decir, X es compacto. \square

De los Teoremas 4.3, 4.5 y 4.4 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.6. *Sea $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado. Entonces X es compacto si y sólo si X no tiene huecos.*

Ejemplo 4.7. 1) La recta real \mathbb{R} con la topología inducida por el orden usual de \mathbb{R} no es compacto pues \mathbb{R} no tiene supremo ni ínfimo.

2) El Cuadrado Lexicográfico $(X, \tau_{<_l})$, es un espacio compacto. Para probarlo consideremos $A \subseteq X$, con $A \neq \emptyset$. Mostraremos que A tiene supremo e ínfimo en X .

Consideremos $\alpha = \sup(P(A))$ donde $P(A)$ es la primera proyección de A sobre I . Si $\alpha \in P(A)$ consideremos $D = \{y \in [0, 1] : (\alpha, y) \in A\}$ y $\beta = \sup D$.

Afirmamos que $(\alpha, \beta) = \sup A$. En efecto, (α, β) es cota superior de A pues si $(x, y) \in A$, entonces $x \leq \alpha$, es decir, $x < \alpha$ o $x = \alpha$. Si $x < \alpha$, entonces $(x, y) <_l (\alpha, \beta)$ y si $x = \alpha$, entonces $(x, y) \in D$ y por tanto $y \leq \beta$ es decir $(x, y) \leq_l (\alpha, \beta)$.

Ahora, si $(s, t) \in X$ es cota superior de A , entonces para todo $(x, y) \in A$ se tiene que $(x, y) \leq_l (s, t)$, es decir, $x < s$ o $x = s$ y $y \leq t$. Si para todo $(x, y) \in A$, $x < s$, entonces $\alpha \leq s$ pues $\alpha = \sup(P(A))$ y por lo tanto $(\alpha, \beta) \leq_l (s, t)$. Si existe $(x_0, y_0) \in A$ tal que $x_0 = s$, entonces $y_0 \leq t$. Como $x_0 \leq \alpha$, $s \leq \alpha$; por lo tanto, $s = \alpha$. Bastará probar que $\beta \leq t$. Sea $y \in D$, entonces $(\alpha, y) \in A$, es decir, $(\alpha, y) \leq_l (s, t)$; como $\alpha = s$, entonces $y \leq t$ lo cual implica que t es cota superior de D , de donde $\beta \leq t$.

En el caso que $\alpha \notin P(A)$, sea $\beta = 0$ y probemos que $(\alpha, 0)$ es el supremo de A . Como para todo $(x, y) \in A$ se tiene que $x \leq \alpha$, entonces $(x, y) \leq_l (\alpha, 0)$ para todo $(x, y) \in A$. Ahora, si (r, t) es una cota superior de A , entonces $(x, y) \leq_l (r, t)$ para todo $(x, y) \in A$ lo cual implica que $x \leq r$ para todo $(x, y) \in A$, lo que nos dice que r es cota superior de $P(A)$. Por lo tanto, $\alpha \leq r$ de donde se sigue que $(\alpha, 0) \leq_l (r, 0)$ y, dado que $(r, 0) \leq_l (r, t)$ se tiene que $(\alpha, 0) \leq_l (r, t)$.

Por lo tanto, $(\alpha, \beta) = \sup A$.

Análogamente se obtiene el ínfimo de A . Del Teorema 4.5 se sigue que el Cuadrado Lexicográfico es compacto.

Ahora, otras dos nociones fundamentales estudiadas en topología son los conceptos de conexidad y conexidad local.

Definición 4.8. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. X es *conexo* si no existen subconjuntos abiertos no vacíos $A, B \subset X$ tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.
2. X es *localmente conexo* si para cada $x \in X$ y cada vecindad V de x , existe una vecindad conexa C de x tal que $C \subset V$.

Definición 4.9. Sea $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado.

1. $Y \subset X$ es *denso en X en el sentido del orden* si para todo $x, y \in X$, tales que $x < y$ existe $z \in Y$ tal que $z \in (x, y)$;
2. $Y \subset X$ es *convexo* si para todo $x, y \in Y$ tales que $x < y$ se tiene que $(x, y)_X \subset Y$ (donde $(x, y)_X$ es el intervalo abierto en X);
3. X es *continuamente ordenado* si no tiene saltos ni huecos interiores.

Teorema 4.10. Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. X es *conexo*;
2. X es *continuamente ordenado*.

Demostración. Supongamos que X no es continuamente ordenado, entonces X tiene una cortadura (A, B) tal que (A, B) es un salto o (A, B) es un hueco interior.

Si (A, B) es un salto consideremos a x como el último elemento de A y a y como el primer elemento de B . Entonces $X = (\leftarrow, y) \cup (x, \rightarrow)$ lo cual nos dice que X no es conexo.

Si (A, B) es un hueco interior, como $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y A y B son abiertos no vacíos, entonces X no es conexo.

Supongamos ahora que X no es conexo. Entonces existen abiertos no vacíos A, B de X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Sean $x \in A$, $y \in B$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $x < y$. Como X es continuamente ordenado se tiene que $[x, y]$ es compacto y dado que $(A \cap [x, y]) \subseteq [x, y]$ es no vacío existe $z \in X$ tal que $z = \sup(A \cap [x, y])$. Como A es cerrado y X no tiene huecos se tiene que $z \in A$ lo cual implica que $z \notin B$ y, dado que X no tiene saltos, existe $z_1 \in X$ tal que $z_1 \notin B$ con $z < z_1 < y$ (en efecto, si $(z, y) \subset B$ tendríamos que $z \in B$). Así, existe $z_1 \notin A \cup B$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es conexo. \square

Teorema 4.11. Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado y conexo, entonces X es *localmente conexo*.

Demostración. Como X es conexo, por el Teorema 4.10, X es continuamente ordenado. De aquí se sigue que todo intervalo de X también lo es. Ahora, si $x \in X$ y V es una vecindad de x , entonces existe un intervalo I_x tal que $x \in I_x \subset V$ e I_x es conexo. Esto prueba que X es un espacio topológico localmente conexo. \square

Recordemos la siguiente definición.

Definición 4.12. Un espacio topológico Hausdorff (X, τ) es *localmente compacto* si para cada $x \in X$ y cada vecindad V de x existe una vecindad compacta K de x con la propiedad de que $x \in K \subset V$.

Observación 4.13. Notemos que en un espacio topológico linealmente ordenado y conexo X se satisface que para cada $a, b \in X$ tales que $a < b$, el intervalo cerrado $[a, b]$ es compacto.

De la Observación 4.13 y los Teoremas 4.11 y 4.5 se sigue el teorema siguiente.

Teorema 4.14. *Sea $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado conexo, entonces*

1. X es localmente compacto.
2. Si X tiene primer y último elemento, entonces X es compacto.

Es conocido que si X es un espacio topológico secuencialmente compacto, entonces X es numerablemente compacto, que todo espacio numerablemente compacto esseudocompacto y que no necesariamente un espacio numerablemente compacto es secuencialmente compacto (ver [2], Teoremas 3.10.20 y 3.10.30). En lo que resta de esta sección probaremos que en la clase de los espacios topológicos linealmente ordenados estos tres conceptos coinciden. Primero enunciaremos las definiciones correspondientes y un lema que nos permitirá obtener el resultado deseado.

Definición 4.15. Sea (X, τ) un espacio topológico.

- 1) X es *numerablemente compacto* si X es un espacio Hausdorff y toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.
- 2) X es *seudocompacto* si es un espacio Tychonoff y toda función continua de X en \mathbb{R} es acotada.
- 3) X es *secuencialmente compacto* si es un espacio Hausdorff y toda sucesión de puntos de X tiene una subsucesión convergente.

El siguiente resultado es el Teorema 3.10.21 de [2].

Lema 4.16. *Si (X, τ) es un espacio topológicoseudocompacto normal, entonces X es numerablemente compacto.*

Teorema 4.17. *Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado y numerablemente compacto, entonces X es secuencialmente compacto.*

Demostración. Supongamos que X no es secuencialmente compacto. Entonces existe una sucesión $s = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sin subsucesiones convergentes. Mostraremos que existe una subsucesión de s creciente o una subsucesión de s que es decreciente:

Si no existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{M_1}$, entonces construimos una sucesión creciente de la siguiente manera: sea $x_{m_1} = x_1$, entonces existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 < x_{n_2}$; definamos $x_{m_2} = x_{n_2}$. En general, ya que se tiene definido x_{m_k} , existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{m_k} < x_{n_{k+1}}$; definamos $x_{m_{k+1}} = x_{n_{k+1}}$. Entonces $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión creciente de s .

Si existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{M_1}$, entonces sea $x_{m_1} = x_{M_1}$; ahora bien, si no existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{N_1} \leq x_n$, entonces, de manera análoga al caso anterior, podemos construir una subsucesión decreciente de s ; si no es éste el caso, es decir, si existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{N_1} \leq x_n$, entonces definamos $x_{m_2} = x_{N_1}$.

En general, si no existe $M_{k+1} \in \mathbb{N} \setminus \{M_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{M_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$, $x_n \leq x_{M_{k+1}}$, entonces, como en el primer caso, construimos una subsucesión creciente de s ; en caso de que esto no suceda, sea $x_{m_{2k}} = x_{M_{k+1}}$; ahora, si tenemos que no existe $N_{k+1} \in \mathbb{N} \setminus \{N_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{N_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$, $x_{N_{k+1}} \leq x_n$, entonces construimos de manera análoga al primer caso, una subsucesión decreciente de s . Finalmente, si existe $N_{k+1} \in \mathbb{N}$ con tal propiedad, entonces elegimos a $x_{m_{2k}} = x_{N_{k+1}}$.

Si el proceso anterior es finito, obtenemos una subsucesión creciente o bien una decreciente de s . Si es infinito, obtenemos dos subsucesiones de s , $\{x_{m_k}\}_{k \text{ es par}}$ y $\{x_{m_k}\}_{k \text{ es impar}}$, creciente y decreciente, respectivamente.

Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que la subsucesión de s que se obtuvo, $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, es creciente. Consideremos ahora el conjunto $C = \{c \in X : c \text{ es cota superior de } \{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}\}$. Probaremos que C es un conjunto abierto. Si existiera $c \in C$ tal que para cualquier intervalo I_c con $c \in I_c$, $I_c \not\subseteq C$, entonces $c = \sup \{x_{m_k} : k \in \mathbb{N}\}$, lo cual implicaría que $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a c , contradiciendo el hecho de que ninguna subsucesión de s converge. Por lo tanto, C es un conjunto abierto en X . Por consiguiente, la familia de conjuntos abiertos $\{(\leftarrow, x_{m_k}) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{C\}$ es una cubierta abierta numerable de X que no tiene subcubierta finita alguna. Por lo tanto, X no es numerablemente compacto. \square

Ahora sí, ya podemos enunciar y probar el resultado que habíamos anunciado previamente.

Teorema 4.18. *Si $(X, \tau_{<})$ es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. X es secuencialmente compacto;

2. X es numerablemente compacto;

3. X es pseudocompacto.

Demostración. Será suficiente ver que (3) implica (2) y que (2) implica (1). Ahora (3) implica (2) se sigue del Corolario 2.5 y el Lema 4.16 y que (2) implica (1) se sigue del Teorema 4.17. \square

Ahora, si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado conexo, con hueco extremo izquierdo u y hueco extremo derecho v , éste es localmente compacto. Si podemos elegir sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente y creciente respectivamente tales que:

$$x_1 < y_1, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge a } u \text{ y } \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge a } v,$$

entonces al definir para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = [x_n, y_n]$ obtenemos que

$$X = \cup \{X_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto, X es un espacio σ -compacto el cual es localmente compacto. Así, X es un espacio de Lindelöf (ver [2], página 195). Con el argumento anterior hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 4.19. *Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado conexo con hueco extremo izquierdo u y hueco extremo derecho v y existen sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente y creciente respectivamente tales que:*

$$x_1 < y_1, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge a } u \text{ y } \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge a } v,$$

entonces X es compacto si y sólo si X es numerablemente compacto.

De los Teoremas 4.18 y 4.19 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.20. *Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado conexo con hueco extremo izquierdo u y hueco extremo derecho v y existen sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente y creciente respectivamente tales que:*

$$x_1 < y_1, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge a } u \text{ y } \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge a } v,$$

entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es compacto;
2. X es secuencialmente compacto;
3. X es pseudocompacto.

5. Paracompacidad

Se sabe que todo espacio fuertemente paracompacto es paracompacto, que todo espacio paracompacto es metacompacto, que todo espacio metacompacto es metalindelöf, y que no necesariamente estos cuatro conceptos son equivalentes en general (ver [2], sección 5.3). En esta sección probaremos que en la clase de los espacios topológicos linealmente ordenados estos cuatro conceptos son equivalentes. En seguida daremos las definiciones correspondientes y algunos resultado que nos permitan probar lo que hemos anunciado.

Definición 5.1. Sean (X, τ) un espacio topológico, \mathcal{A} y \mathcal{B} familias de subconjuntos de X .

1. \mathcal{A} es *estrelladamente finita* (numerable) si para cada $A^* \in \mathcal{A}$,
 $|\{A \in \mathcal{A} : A \cap A^* \neq \emptyset\}| < \omega$ ($\leq \omega$).
2. \mathcal{A} es *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe $U \in \tau$ con $x \in U$ y tal que
 $|\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}| < \omega$.
3. Para cada $x \in X$ se define el *orden de x en \mathcal{A}* , denotado por $ord(x, \mathcal{A})$, como la cardinalidad del conjunto $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$, es decir,

$$ord(x, \mathcal{A}) = |\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}|.$$

4. \mathcal{A} es *puntualmente finita* (*puntualmente numerable*) si para cada $x \in X$, $ord(x, \mathcal{A}) < \omega$ ($\leq \omega$).
5. Para $x \in X$, la *estrella de x con respecto a la familia \mathcal{A}* es el conjunto, $st(x, \mathcal{A}) = \cup \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$.
6. \mathcal{B} es un *refinamiento* de \mathcal{A} si para cada $B \in \mathcal{B}$ existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A$.

Se sigue de la Definición 5.1 que toda familia \mathcal{A} de conjuntos abiertos estrelladamente finita es localmente finita, que toda familia localmente finita es puntualmente finita y que toda familia puntualmente finita es puntualmente numerable.

Definición 5.2. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. X es *fuertemente paracompacto* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto que es estrelladamente finito.
2. X es *paracompacto* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

3. X es *metacompacto* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto que es puntualmente finito.
4. X es *metalindelöf* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto puntualmente numerable.
5. X es *submetacompacto* si toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto $\mathcal{G} = \cup \{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{G}_n es cubierta abierta de X y para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq \text{ord}(x, \mathcal{G}_n) < \omega$.
6. X es *subparacompacto* si toda cubierta abierta tiene un refinamiento cerrado σ -discreto.

Observación 5.3. Es claro de la Definición 5.2 y del comentario previo a ésta que si X es fuertemente paracompacto, entonces X es paracompacto, que todo espacio paracompacto es metacompacto y que cualquier espacio metacompacto es metalindelöf.

Definición 5.4. Sean X un conjunto y $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de X .

1. Si $A_s, A_{s^*} \in \mathcal{A}$, una *cadena* de A_s a A_{s^*} es una sucesión finita de elementos de \mathcal{A} , $A_{s_1} A_{s_2} \dots A_{s_k}$ tal que $s_1 = s$, $s_k = s^*$ y $A_{s_i} \cap A_{s_{i+1}} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.
2. Diremos que la familia \mathcal{A} está *conectada* si para cada par de elementos $A_s, A_{s^*} \in \mathcal{A}$ existe una cadena de A_s a A_{s^*} .
3. Una subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es *conectada maximal* si \mathcal{B} no es subconjunto propio de alguna subfamilia conectada de \mathcal{A} .
4. Las *componentes* de \mathcal{A} se definen como las subfamilias conectadas maximales.

Observación 5.5. Toda familia \mathcal{A} de subconjuntos de X se descompone en la unión de sus componentes. Además si \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son componentes distintas de \mathcal{A} se tiene que $(\cup \mathcal{A}_1) \cap (\cup \mathcal{A}_2) = \emptyset$.

Teorema 5.6. Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado y \mathcal{A} es una familia conectada de subconjuntos convexos de X , entonces existen sucesiones de puntos x_1, x_2, \dots y y_1, y_2, \dots de $\cup \mathcal{A}$ finitas o infinitas tales que:

1. $x_1 = y_1$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_k < x_{k+1}$ y $y_{k+1} < y_k$;
2. para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} \notin \text{st}(x_k, \mathcal{A})$ y $y_{k+1} \notin \text{st}(y_k, \mathcal{A})$;
3. para todo $k \in \mathbb{N}$, $\text{st}(x_k, \mathcal{A}) \cap \text{st}(x_{k+1}, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ y $\text{st}(y_k, \mathcal{A}) \cap \text{st}(y_{k+1}, \mathcal{A}) \neq \emptyset$;
4. $(\cup \{\text{st}(x_k, \mathcal{A}) : k \in \mathbb{N}\}) \cup (\cup \{\text{st}(y_k, \mathcal{A}) : k \in \mathbb{N}\}) = \cup \mathcal{A}$.

Demostración. Sean r un buen orden en $\cup\mathcal{A}$ y y_1 el r primer elemento de $\cup\mathcal{A}$. Consideremos $st(y_1, \mathcal{A})$. Si existen puntos que $<$ -precedan a y_1 en $\cup\mathcal{A} \setminus st(y_1, \mathcal{A})$ consideremos el r -primer elemento de éstos, tal que $y_2 \notin st(y_1, \mathcal{A})$ y $st(y_2, \mathcal{A}) \cap st(y_1, \mathcal{A}) \neq \emptyset$; esto es posible hacerlo dada la conectividad de la familia: si $u \in \cup\mathcal{A} \setminus st(y_1, \mathcal{A})$ con $u < y_1$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $u \in A$. Consideremos $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset st(y_1, \mathcal{A})$, entonces existe, $A_1, \dots, A_s \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 = A$, $A_s = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$. Por lo tanto existe $k_0 \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ tal que $A_{k_0+1} \subset st(y_1, \mathcal{A})$ y $A_{k_0} \cap (\cup\mathcal{A} \setminus st(y_1, \mathcal{A})) \neq \emptyset$; sea $z \in A_{k_0} \cap (\cup\mathcal{A} \setminus st(y_1, \mathcal{A}))$, entonces obtenemos que $st(z, \mathcal{A}) \cap st(y_1, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ y $z \notin st(y_1, \mathcal{A})$.

Inductivamente, si y_1, y_2, \dots, y_k han sido definidos de esta manera, sea y_{k+1} , si es que existe, el r -primer elemento de $\cup\mathcal{A}$ tal que;

- a) $y_{k+1} < y_k$,
- b) $y_{k+1} \notin st(y_k, \mathcal{A})$ y
- c) $st(y_{k+1}, \mathcal{A}) \cap st(y_k, \mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Además, observemos que este proceso inductivo está indicado efectivamente por \mathbb{N} : si existiera $y_\infty \in \cup\mathcal{A}$ tal que

- i) $y_\infty < y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$,
- ii) $y_\infty \notin st(y_k, \mathcal{A})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y
- iii) $st(y_\infty, \mathcal{A}) \cap (\cup\{st(y_k, \mathcal{A}) : k \in \mathbb{N}\}) \neq \emptyset$,

entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $st(y_k, \mathcal{A}) \cap st(y_\infty, \mathcal{A}) \neq \emptyset$; consideremos un elemento y de esta intersección; entonces existen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tales que $y, y_k \in A_1$ y $y, y_\infty \in A_2$. Si $y_k < y$, entonces $(y_\infty, y) \subset A_2$ por ser A_2 convexo y esto implica que $y_{k+1} \in (y_\infty, y) \subset A_2$. Por tanto $y_{k+1}, y_\infty \in A_2$ lo cual implica que $y_\infty \in st(y_{k+1}, \mathcal{A})$ lo cual contradice a (ii). Por consiguiente, la sucesión $\{y_k\}$ la podemos indicar por \mathbb{N} . Finalmente consideremos $x_1 = y_1$ y de manera análoga elijamos una sucesión $\{x_k\}$ tal que

- a) $x_k < x_{k+1}$,
- b) $x_{k+1} \notin st(x_k, \mathcal{A})$,
- c) $st(x_k, \mathcal{A}) \cap st(x_{k+1}, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Claramente estas sucesiones cumplen las propiedades requeridas. \square

Corolario 5.7. Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado y \mathcal{A} es una familia conectada puntualmente numerable de subconjuntos convexos de X , entonces existe una familia numerable $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tal que $\cup\mathcal{B} = \cup\mathcal{A}$.

Demostración. Se sigue del hecho de que para cada $k \in \mathbb{N}$, $st(x_k, \mathcal{A})$ y $st(y_k, \mathcal{A})$, que aparecen en (4) del Teorema 5.6, contienen solamente una cantidad numerable de elementos de \mathcal{A} . \square

Teorema 5.8. Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es fuertemente paracompacto.

2. X es metalindelöf.

Demostración. (1) implica (2) es válido siempre. Para probar (2) implica (1) consideremos a \mathcal{U} , una cubierta abierta de X y \mathcal{A} un refinamiento abierto puntual numerable de \mathcal{A} . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los elementos de \mathcal{A} son convexos.

Sea $\mathcal{A} = \cup \{C_\alpha : \alpha \in I\}$ donde cada C_α es una componente de \mathcal{A} ; de la Observación 5.5 y el Corolario 5.7 tenemos que:

i) $(\cup C_\alpha) \cap (\cup C_\beta) = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$

ii) para cada $\alpha \in I$ existe una subcolección numerable $\mathcal{D}_\alpha = \{O(\alpha, n) : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\cup \mathcal{D}_\alpha = \cup C_\alpha$.

Entonces se sigue que $\mathcal{H}_n = \{O(\alpha, n) : \alpha \in I\}$ es una familia de conjuntos ajenos dos a dos y por tanto $\mathcal{H} = \cup \{\mathcal{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento abierto estrelladamente numerable de \mathcal{U} de donde, por el Teorema 5.3.10 de [2], se sigue que X es fuertemente paracompacto. \square

De aquí obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.9. *Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. X es fuertemente paracompacto.
2. X es paracompacto.
3. X es metacompacto.
4. X es metalindelöf.

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [1].

Teorema 5.10. *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. X es paracompacto.
2. X es colectivamente normal y subparacompacto.
3. X es colectivamente normal y metacompacto.
4. X es colectivamente normal y submetacompacto.

Que junto con el Teorema 2.4 nos proporcionan el siguiente teorema.

Teorema 5.11. *Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. X es paracompacto.
2. X es submetacompacto.
3. X es subparacompacto.

También se sabe que todo espacio numerablemente compacto y paracompacto es compacto (Teorema 5.1.20 de [2]) así que, si aplicamos los Teoremas 5.9 y 5.11, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 5.12. *Sea $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado. Si X es numerablemente compacto, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

1. X es compacto.
2. X es fuertemente paracompacto.
3. X es metacompacto.
4. X es metalindelöf.

Corolario 5.13. *Sea $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado. Si X es numerablemente compacto, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

1. X es compacto.
2. X es submetacompacto.
3. X es subparacompacto.

Es conocido (Teorema 5.1.18 de [2]) que todo espacio paracompacto es un espacio normal sin que la implicación recíproca sea necesariamente verdadera; sin embargo, en la clase de los espacios topológicos linealmente ordenados perfectamente normales se da esta última implicación, que es lo que demostraremos a continuación. Antes enunciamos una definición y algunos resultados que necesitaremos.

Definición 5.14. Sean Ω un ordinal límite y $S \subseteq \Omega$.

1. S es *cofinal* en Ω si para cada $\alpha < \Omega$ existe $s \in S$ tal que $\alpha < s$.
2. La *cofinalidad* de Ω , denotada por $\text{cof}\Omega$, es el mínimo cardinal κ tal que Ω tiene un subconjunto cofinal de cardinalidad κ .
3. S es un *conjunto estacionario* en Ω si para cada subconjunto cofinal cerrado C de Ω , tenemos que $S \cap C \neq \emptyset$.

Los siguientes resultados están demostrados en [5].

Teorema 5.15. *Sea $(X, \tau_<)$ un espacio topológico linealmente ordenado. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. X no es paracompacto.
2. Para algún ordinal Ω con $\text{cof}\Omega = \Omega > \omega$ algún subconjunto estacionario de ω es homeomorfo a un subconjunto cerrado de X .
3. Para algún ordinal Ω con $\text{cof}\Omega > \omega$ algún subconjunto estacionario de ω es homeomorfo a un subconjunto cerrado de X .

Teorema 5.16. *Sea S un subconjunto estacionario de un ordinal Ω con $\text{cof}(\Omega) > \omega$ y sea T un subconjunto cofinal cerrado en el subespacio S . Entonces T es también estacionario en Ω . En particular, el conjunto de puntos no aislados del subespacio S es estacionario.*

Teorema 5.17. *Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado y perfectamente normal, entonces X es paracompacto.*

Demostración. Por los Teoremas 2.7 y 5.15 es suficiente probar que si Ω es un ordinal con $\text{cof}\Omega > \omega$ y $S \subseteq \Omega$ es un subconjunto estacionario de Ω , entonces S no puede ser perfectamente normal. Con este fin consideremos el conjunto T de puntos no aislados de S el cual es no vacío y cerrado en S y supongamos que T es un subconjunto G_δ de S , es decir, $T = \bigcap \{S \cap U_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde cada U_n es un conjunto abierto de Ω para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, supongamos que para todo $t \in T$, se tiene que $(t, \rightarrow) \subsetneq U_n$, entonces existe $v_t \in (t, \rightarrow)$ tal que $v_t \notin U_n$. Probemos que $C = \{v_t : t \in T\}$ es cofinal en Ω . Si no fuera así tendríamos que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $v_t < z_0$ para toda $t \in T$. Sea $A \subset \Omega$ cofinal cerrado; como, por el Teorema 5.16, T es estacionario y $B = \{x \in A : z_0 < x\}$ es cofinal cerrado en Ω , $B \cap T \neq \emptyset$. Si $t \in B \cap T$, entonces $z_0 < t < v_t$ contradiciendo el hecho de que $v_t < z_0$ para toda $t \in T$. Por lo tanto, C es cofinal. Además, tenemos que $cl_X C \cap T = \emptyset$ ya que si y es un punto de acumulación de C y $y \in U_n$, entonces existe I_n intervalo tal que $y \in I_n \subset U_n$ y esto implica que $\{v_t\} \cap U_n \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $cl_X C \cap T = \emptyset$, pero esto no puede ser pues T es estacionario.

Resumiendo: existe $t_n \in T$ tal que $[t_n, \rightarrow) \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, dado que $\text{cof}\omega > \omega$ existe $t_1 \in T \cap (\bigcap \{[t_n, \rightarrow) : n \in \mathbb{N}\})$ pues Ω es numerablemente compacto y por tanto $\bigcap \{[t_n, \rightarrow) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto cofinal cerrado y T es estacionario. Entonces $[t_1, \rightarrow) \subset U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y esto implica que $S \cap [t_1, \rightarrow) \subset \bigcap \{S \cap U_n : n \in \mathbb{N}\} = T$. Pero esto es imposible ya que si t_2 es el primer elemento de S mayor que t_1 , entonces $\{t_2\} = (t_1, t_2 + 1) \cap S$ es un conjunto abierto en S así que $t_2 \notin T$ y $t_2 \in S \cap [t_1, \rightarrow)$. Por tanto T no es un conjunto G_δ de S y por consiguiente S no es perfectamente normal, lo cual queríamos probar. \square

De los Teoremas 5.9, 5.11 y 5.17 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.18. *Si $(X, \tau_<)$ es un espacio topológico linealmente ordenado y perfectamente normal, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *X es fuertemente paracompacto.*
2. *X es metacompacto.*
3. *X es metalindelöf.*
4. *X es submetacompacto.*
5. *X es subparacompacto.*

Finalmente, agradecemos a los revisores sus comentarios y sugerencias ya que permitieron mejorar sustancialmente una versión preliminar de este capítulo.

Bibliografía

- [1] D. K. Burke, *Covering properties*, Handbook of set theoretic topology (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.), Amsterdam, 1984, 347-422.
- [2] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [3] F. Hernández, *Teoría de Conjuntos, una introducción*, Sociedad Matemática Mexicana, 2011, 3a edición.
- [4] M. Ibarra y A. Martínez, *Algunas funciones cardinales en espacios ordenados*, Topología y Sistemas Dinámicos IV, Textos Científicos, BUAP, 2011, 75-90.
- [5] M. Ibarra y A. Martínez, *Espacios Topológicos Linealmente Ordenados*, Tesis de Licenciatura, UNAM, 1986.
- [6] M. Ibarra y A. Martínez *Subespacios en espacios ordenados*, Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, BUAP, 2011, 327-334.
- [7] I. L. Lynn, *Linearly orderable spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 113 (1964), 189-218.
- [8] P. Meyer, *Sequential properties of ordered topological spaces*, Comp. Math., 21 (1969), 102-106.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

mibarra@fcfm.buap.mx
maga@fcfm.buap.mx

Índice de autores

A

Arrazola Ramírez, José, 87

B

Bustamante-González, Jorge, 5

C

Cervantes Gómez, Lucía, 43

Cruz Suárez, Hugo Adán, 111, 129

D

Djordjević, Slaviša, 25

E

Espinoza Hernández, Nelva Betzabel,
143

Estrada García, Juan Francisco, 67

F

Flores Solis, Araceli, 153

G

González Pérez, Ana Luisa, 43

Guerrero Méndez, Luis Alberto, 173

H

Herrera Carrasco, David, 173, 195

I

Ibarra Contreras, Manuel, 213

Ilhuicatzi Roldán, Rocío, 111

J

Jiménez-Pozo, Miguel Antonio, 5

L

López Toriz, María de Jesús, 173

M

Macías Romero, Fernando, 173, 195

Martínez García, Armando, 213

Martínez Ruiz, Iván, 87

Mendoza Torres, Francisco Javier, 25

P

Pérez Amaro, Lourdes, 129

Pérez Gaspar, Miguel, 87

Palomino Jiménez, Carlos, 143

Poisot Macías, Julio Erasto, 43

R

Ramírez Hernández, Héctor David, 143

T

Tajonar Sanabria, Francisco Solano, 143,
153

V

Vázquez Guevara, Víctor Hugo, 129

Vázquez Juárez, Francisco, 195

Vélez Salazar, Rubén, 87

Matemáticas y sus aplicaciones 3
su composición, diseño y cuidado, estuvo a cargo
de Fernando Macías Romero
se terminó de imprimir en noviembre de 2013, en los talleres de
El Errante editor, S.A. de C.V. sito en privada Emiliano Zapata 5947,
Col. San Baltazar Campeche, Puebla, Pue., México.

El tiraje consta de 300 ejemplares.

