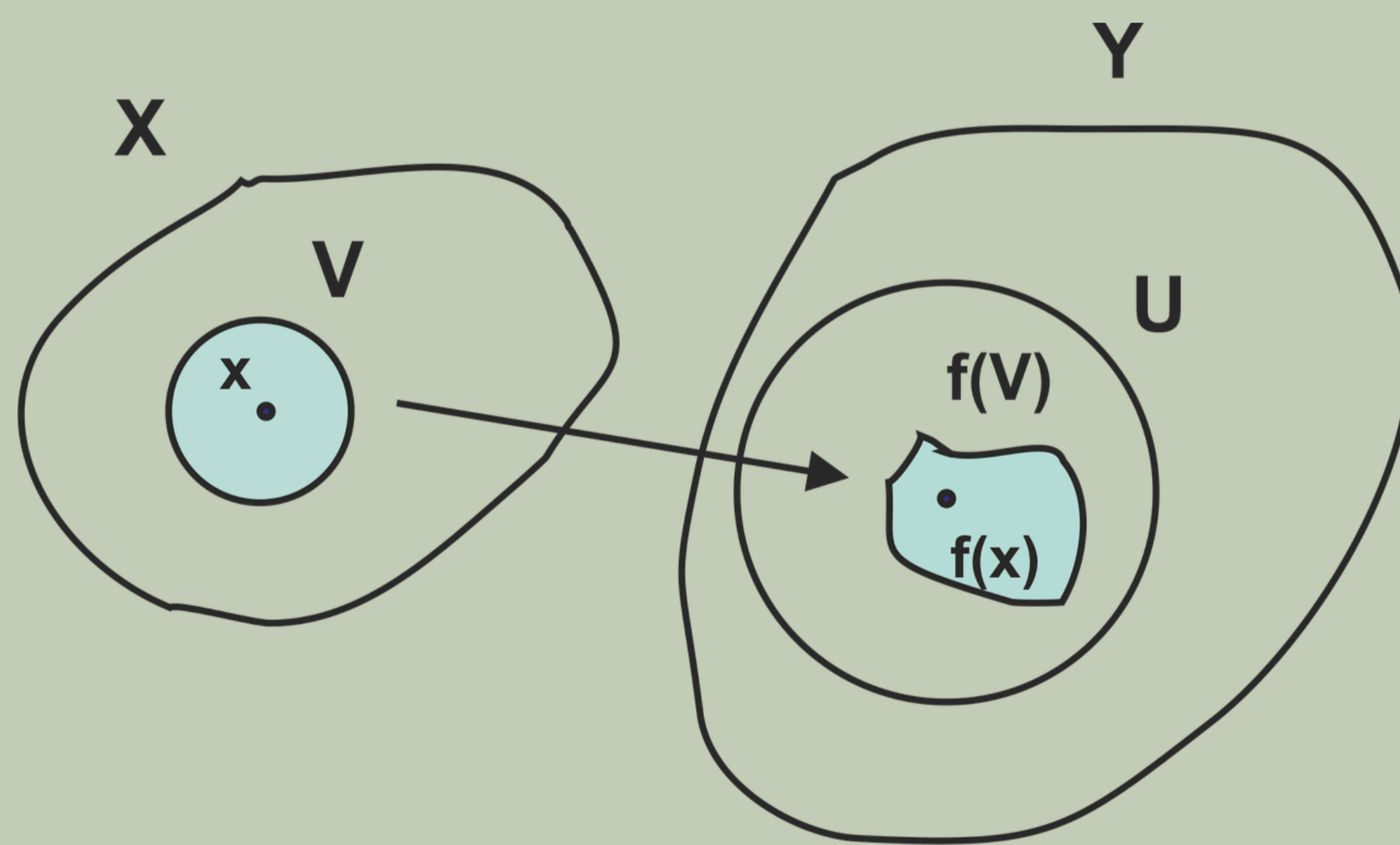


Matemáticas y sus aplicaciones 27

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores



Matemáticas y sus aplicaciones
27

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

RECTORA: MARÍA LILIA CEDILLO RAMÍREZ · SECRETARIO GENERAL:
DANIÁN HERNÁNDEZ MÉNDEZ · VICERRECTOR DE EXTENSIÓN Y DI-
FUSIÓN DE LA CULTURA: ROSALINDA MERINO CALDERÓN · DIRECTOR
GENERAL DE PUBLICACIONES: MARY KRISS PARRA GÓRRIZ

PRIMERA EDICIÓN: 2026

ISBN: 978-968-9744-30-6

D.R. © BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
4 SUR 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE. CP. 72000
TELÉFONO: 2222295500

WWW.BUAP.MX

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES
2 NORTE 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE., CP.72000
Tels.: 2222295500
LIBROS .DGP@CORREO .BUAP .MX | WWW.PUBLICACIONES.BUAP.MX

DISEÑO DE PORTADA: LEONARDO RAMÍREZ APARICIO

HECHO EN MÉXICO

MADE IN MEXICO

Matemáticas y sus aplicaciones 27

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos trabajos de
investigación presentados en
CIMA, FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Comité científico internacional

Florian Buck (TUC, DE), Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Félix Capulín Pérez (UAEMEX), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (UANL), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Rocío Leonel Gómez (Rosario Catellanos), Fernando Macías Romero (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Eiichi Matsuhashi (SHIMADAI, JP), Daria Michalik (UKSW, PL), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Jesús Fernando Tenorio Arvide (UTM, Oax-MEX), Fernando Orozco Zitli (UAEMEX), Ambrosio Ortíz Ramírez (IPN), Nomura Yamato (SHIMADAI, JP), Cenobio Yescas Aparicio (UTM, Oax-MEX).

Contenido

Presentación	1
Análisis Matemático	
Capítulo 1. Apuntes alrededor de la Fórmula de Frullani	5
<i>Jhonatan Saúl López Beltrán, Francisco Javier Mendoza Torres</i>	
1	Introducción 5
2	Preliminares 7
3	Prueba de la versión de Cauchy 8
4	La Forma Clásica 10
5	Ejemplos 15
6	Conclusión 22
Probabilidad y Estadística	
Capítulo 2. Análisis de la radiación solar en el municipio de Puebla usando la metodología de Box-Jenkins y redes neuronales artificiales	27
<i>Bulmaro Juárez Hernández, José Miguel Hernández López, Francisco Solano Tajonar Sanabria</i>	
1	Introducción 28
2	Radiación Solar 29
3	Conceptos básicos de series de tiempo 31
4	Conceptos básicos de redes neuronales 37
5	Análisis del caso de estudio con la metodología de Box-Jenkins 41
6	Análisis del caso de estudio con Redes Neuronales 47

7	Comparación de la metodología Box-Jenkins y Redes Neuronales	48
8	Conclusiones	50

Geometría

Capítulo 3. Reflexiones y el grupo de Möbius 55

Agustín Contreras Carreto, Patricia Domínguez Soto y Lizbeth Rojas Martínez

1	Reflexiones	55
2	Reflexión con respecto de una recta	58
3	Reflexiones de circunferencias	63
4	Reflexiones y ángulos	68
5	Reflexiones de circunferencias coaxiales	72
6	La acción de Möbius euclidiano $Mob_+(\mathbb{R}^2)$	75
7	Transformaciones elípticas	77
8	Subgrupos parabólicos	84
9	Subgrupo elíptico	85

Topología

Capítulo 4. Un estudio sobre la contractibilidad 93

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, David Rodríguez Hernández

1	Introducción	93
2	Preliminares	94
3	Continuos	97
4	Contractibilidad	100

Capítulo 5. Funciones especiales sobre continuos: propiedades y relaciones 115

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

1	Introducción	115
2	Preliminares	116
3	Funciones monótonas y ligeras	119

4	Funciones débilmente monótonas y cuasi-monótonas	127
5	Grado de Multicoherencia	138
Capítulo 6. Un repaso a los límites inversos: teoría básica y ejemplos		143
<i>Jesús Fernando Tenorio Arvide, Raymundo Velasco Vasquez, Cenobio Yescas Aparicio</i>		
1	Introducción	143
2	Preliminares	144
3	Límites inversos: definición y ejemplos	150
4	La topología de un límite inverso	155
5	Cómo evitar un límite inverso vacío	158
Capítulo 7. Clasificación de conjuntos de no corte		167
<i>Mauricio Esteban Chacón Tirado, Augusto César Piceno Cabrera</i>		
1	Introducción	167
2	Definiciones y notación	168
3	Propiedades de conjuntos no cortantes	172
4	Propiedades de conjuntos de no corte preservados por funciones continuas	177
Índice de autores		185

Presentación

La Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) se complace en presentar esta obra, fruto de una estrecha colaboración académica y un compromiso sostenido con la excelencia. Durante más de dos décadas, nuestra comunidad —profesores y estudiantes por igual— ha impulsado el desarrollo de las “International Conferences on Mathematics and its Applications” (CIMA), consolidándolas como un foro anual de referencia internacional en el ámbito de las matemáticas contemporáneas.

La presencia constante de destacados investigadores de diversos países en estas conferencias no solo ha enriquecido nuestro quehacer académico, sino que ha servido de catalizador para la edición de este volumen. Este libro es, en esencia, un testimonio del vigor y el entusiasmo del comité organizador emanado de la Academia de Matemáticas, cuyo motor principal ha sido la pasión por la disciplina y la voluntad de compartir los avances generados en nuestra labor diaria.

El contenido de esta obra se articula a través de capítulos organizados por secciones temáticas, cubriendo diversas áreas de las matemáticas puras y aplicadas. Con el fin de garantizar el rigor científico y la relevancia de los resultados expuestos, cada contribución ha sido sometida a un estricto proceso de arbitraje por pares.

Deseamos expresar nuestro profundo agradecimiento a los revisores y dictaminadores, cuya labor desinteresada, profesionalismo y generosidad intelectual han sido fundamentales para mantener los estándares de calidad de esta serie. Asimismo, extendemos un reconocimiento especial a Felipe de Jesús Aguilar Romero y a Leonardo Ramírez Aparicio por su dedicada labor en la coordinación editorial, así como a Kevin Águila Méndez por su indispensable apoyo técnico en la preparación de este libro 27.

Confiamos en que las páginas que siguen brinden al lector no solo conocimiento especializado, sino también la motivación necesaria para continuar avanzando en la exploración científica.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Academia de Matemáticas, FCFM
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Editores

Análisis Matemático

Capítulo 1

Apuntes alrededor de la Fórmula de Frullani

Jhonatan Saúl López Beltrán, Francisco Javier Mendoza
Torres
FCFM, BUAP

Resumen

Este capítulo tiene como punto de partida la fórmula que desarrolló G. Frullani en 1821. Se hace una prueba de la versión dada a conocer por L. Cauchy en “Exercises de Mathématiques” de 1827, la cual fue exhibida sin demostración por este famoso matemático. Además, se desarrolla una cantidad suficiente de ejemplos y derivaciones de esta fórmula. También se incluye una prueba y un ejemplo de la llamada versión clásica formulada en 1949 por A. Ostrowski.

1 Introducción

Al consultar algunas tablas de integrales que son empleadas en cálculos matemáticos de algún tipo, se observa que algunas de ellas tienen fuerte relación con lo que actualmente se conoce como Fórmula Integral de Frullani, la cual, según J. Edwards [6], Giuliano Frullani se la presenta a Giovanni Plana en 1821. Esta afirma que, para a y b positivos, se satisface que

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right) \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (1)$$

En 1823, en sus “Oeuvres complètes”, Louis Cauchy también hace mención de la fórmula (1). En el artículo “Exercises de Mathématiques” de 1827 [5], Cauchy publica la siguiente fórmula como el resultado (66) de la sección “Sur la transformation des fonctions”

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(\infty) - f(0)] \ln \left(\frac{a}{b} \right), \quad a, b > 0. \quad (2)$$

En la fórmula (2), $f(\infty)$ denota el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito y $f(0)$ el límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero por la derecha.

De acuerdo a A. Ostrowski [13], en 1828, Frullani publica la fórmula (1) en su obra “Sopra Gli Integrali Definiti”, en donde agrega la siguiente nota: “Este resultado lo comuniqué a Geovani Plana en 1821. Posteriormente, en la revista de la Escuela Politécnica del año 1823, ví una demostración debida a Cauchy, la cual se deduce de principios muy diferentes a los anteriores.”

En [5], Cauchy escribió la fórmula mencionada, pero sin demostración y de forma marginal. Nos dimos a la tarea de buscar la demostración de este resultado, pero desafortunadamente no encontramos la referencia adecuada. Es muy probable que la prueba esté publicada en la literatura matemática, pero nosotros no hemos tenido acceso a ella. Así que una aportación de los autores de este artículo es presentar una demostración del resultado de Cauchy.

En 1922, J. Edwards menciona: “la forma más general (2) se debe al profesor E. B. Elliot” [6, 7].

El resultado de Cauchy se ha generalizado reemplazando los límites $f(0)$ y $f(\infty)$ por valores medios adecuados. En 1949, K. Iyengar fue el primero en dar a conocer una fórmula de este tipo [10, 11]. De acuerdo a Alexander Ostrowski, la prueba de Iyengar es incorrecta, sin embargo, su resultado es verdadero [12]. En la misma referencia, se hace el comentario de que, en 1949, A. Ostrowski mejoró el teorema, expresándolo de la siguiente forma, la cual se considera la versión clásica [2]:

Si f es Lebesgue integrable en $(0, +\infty)$ y los siguientes límites existen

$$m(f) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt, \quad M(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt, \quad (3)$$

entonces, para a y b positivos, se satisface la igualdad

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (M(f) - m(f)) \ln \left(\frac{a}{b} \right). \quad (4)$$

A. Ostrowski hace mención de que este resultado era difícil y que su prueba la daría a conocer en otro momento. El teorema fue demostrado por R. Agnew en 1951 y la demostración desarrollada por Ostrowski fue publicada en 1976 [13]. F. Tricomi y A. Ostrowski han generalizado esta fórmula de varias formas [13, 14, 15].

La fórmula central de este artículo tiene aplicaciones en otras áreas de la matemática, que a la vez pueden ser aplicadas a otras ciencias. En el artículo

“Properties and Applications of some Distributions derived from Frullani’s integral” del año 2017 [3], R. Baker emplea una distribución de supervivencia en la Fórmula de Frullani y, al permitir que el logaritmo del cociente de los factores de escala se distribuya uniformemente en un rango finito, da como resultado una clase de distribuciones de cola larga relacionadas con las distribuciones de barra. Además, ilustra la utilidad de la Fórmula de Frullani en el análisis de supervivencia.

Este Capítulo 1 está organizado de la siguiente forma.

En la Sección 2, se enuncian algunos resultados que son de importancia en la demostración de la fórmula propuesta por L. Cauchy.

En la Sección 3, se desarrolla una prueba de la proposición de L. Cauchy. Como ya lo mencionamos, no tuvimos acceso a una prueba específica de este resultado, a pesar del comentario hecho por Arias De Reyna en [2].

En la Sección 4, se presenta una demostración de la llamada forma clásica.

En la última sección, se presentan algunos ejemplos en los cuales se aplica directamente la fórmula (2). También se exhibe un ejemplo para el cual no se puede aplicar dicha fórmula directamente, pues el límite de la función en cuestión cuando x tiende a infinito, no existe. Por lo que se hace uso de la versión clásica de A.Ostrowski.

2 Preliminares

Definición 2.1. *Sea f una función real, definida para (x, t) tal que $x \geq a$ y $\alpha \leq t \leq \beta$. Suponga que, para cada $t \in [\alpha, \beta]$, la integral impropia*

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$$

existe. Se dice que esta converge uniformemente en $[\alpha, \beta]$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un número $M(\epsilon)$ positivo (que no depende de t) tal que si $c \geq M(\epsilon)$, entonces

$$\left| F(t) - \int_a^c f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

Existen distintos criterios para probar que una integral es convergente uniformemente en el sentido impropio de Riemann, como el siguiente.

Teorema 2.2 ([4], Criterio de Cauchy). *Suponga que para cada $t \in [\alpha, \beta]$ la integral impropia $F(t) = \int_a^\infty f(x, t) dx$ existe. Entonces, la convergencia es uniforme en $[\alpha, \beta]$ si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un número $N(\epsilon)$ tal que si $b \geq c \geq N(\epsilon)$ y $t \in [\alpha, \beta]$, entonces*

$$\left| \int_c^b f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

Se pueden encontrar distintos teoremas que nos proporcionan condiciones para poder realizar el cambio en el orden de integración en integrales dobles, uno es el Teorema de Fubini, no siendo el único. A continuación se enuncia un teorema que permite hacer dicho cambio.

Teorema 2.3 ([4], Teoremas 33.6 y 33.7). *Sea g una función continua en (x, t) para $x \geq a$, $t \in [\alpha, \beta]$. Supóngase que*

$$G(x) = \int_a^{+\infty} g(x, t) dx \tag{5}$$

converge uniformemente con respecto a $t \in [\alpha, \beta]$. Entonces G es continua en $[\alpha, \beta]$, y

$$\int_\alpha^\beta G(t) dt = \int_a^\infty \int_\alpha^\beta g(x, t) dt dx.$$

Esto es

$$\int_\alpha^\beta \int_a^\infty g(x, t) dx dt = \int_a^\infty \int_\alpha^\beta g(x, t) dt dx.$$

3 Prueba de la versión de Cauchy

Cuando L. Cauchy presentó por primera vez la fórmula (1) en 1823, no sabía que G. Frullani ya había hecho un trabajo previo sobre ella. Incluso, cuando en 1827 Cauchy vuelve a hacer mención de la fórmula pero ahora con un ligero cambio, seguía sin saber que Frullani había sido el primero en abordarla. Esta “nueva versión” es la más conocida y aceptada, también es la que da pie a la que hoy se conoce como la versión clásica, que como se mencionó anteriormente, el responsable de este hecho fue A. Ostrowski. La prueba presentada a continuación emplea los Teoremas 2.2 y 2.3.

Teorema 3.1. Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x)$ es continua, y sean $0 < a, b$. Si $f(0)$ y $f(\infty)$ existen, entonces

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = [f(\infty) - f(0)] \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (6)$$

Demostración. Primero se verifica que la integral $\int_0^\infty f'(xt) dx$ es uniforme con respecto a $t \in [a, b] \subset (0, \infty)$. Sean $0 < a < b$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\int_0^\infty f'(xt) dx = \frac{f(\infty) - f(0)}{t}. \quad (7)$$

Además, si $a_2 > a_1 > 0$,

$$\int_{a_1}^{a_2} f'(xt) dx = \frac{f(a_2t) - f(a_1t)}{t}. \quad (8)$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(xt) = f(\infty)$, para $t \in [a, b]$ fijo. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) > 0$ tal que si $xt \geq N(\epsilon)$,

$$|f(xt) - f(\infty)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (9)$$

Por otro lado, si $a_2 > a_1 > \frac{1}{a}N(\epsilon)$, entonces $ta_2 > ta_1 > \frac{t}{s}N(\epsilon) > N(\epsilon)$.

Por (9) se tiene que

$$|f(a_2t) - f(\infty)| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |f(a_1t) - f(\infty)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así,

$$\frac{|f(a_2t) - f(a_1t)|}{t} \leq \frac{|f(a_2t) - f(\infty)|}{a} + \frac{|f(a_1t) - f(\infty)|}{a} < \frac{2\epsilon}{2a} = \frac{\epsilon}{a}.$$

Esto es, si $a_2 > a_1 > \frac{1}{a}N(\epsilon)$, entonces, de (8), se tiene que para todo $t \in [a, b]$,

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f'(xt) dx \right| < \frac{\epsilon}{a}.$$

Por el criterio de Cauchy, la integral impropia en (7) es uniforme. Aplicando el Teorema 2.3 se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx &= \int_0^\infty \int_a^b f'(xt) dt dx \\
 &= \int_a^b \int_0^\infty f'(xt) dx dt \\
 &= \int_a^b \frac{f(\infty) - f(0)}{t} dt \\
 &= (f(\infty) - f(0)) \ln \left(\frac{b}{a} \right).
 \end{aligned}$$

□

4 La Forma Clásica

Presentamos la demostración de la Forma Clásica de la Integral de Frullani. Este teorema se puede encontrar propuesto como ejercicio en [1].

Teorema 4.1. *Si f es Riemann integrable sobre $[a, b]$ y los siguientes límites existen*

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt, \quad B = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt,$$

entonces, para $b > a > 0$, se satisface la igualdad

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (B - A) \ln \left(\frac{a}{b} \right). \quad (10)$$

Demostración. Sea $g(x) = \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$ con $x > 0$. Primero veamos que

$$\int_1^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = B \ln \left(\frac{a}{b} \right) + \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt. \quad (11)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_1^T \frac{f(ax)}{x} dx - \int_1^T \frac{f(bx)}{x} dx \right]. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $t = ax$ y $t = bx$ respectivamente, tenemos que

$$\int_1^T \frac{f(ax)}{x} dx = \int_a^{aT} \frac{f(t)}{t} dt \quad y \quad \int_1^T \frac{f(bx)}{x} dx = \int_b^{bT} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_1^T \frac{f(ax)}{x} dx - \int_1^T \frac{f(bx)}{x} dx &= \int_a^{aT} \frac{f(t)}{t} dt - \int_b^{bT} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt + \int_b^{aT} \frac{f(t)}{t} dt - \int_b^{bT} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt - \int_{aT}^{bT} \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx &= \left[\frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \right] \Big|_a^b + \int_a^b \frac{1}{x^2} \left(\int_1^x f(t) dt \right) dx \\ &= g(x) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx \\ &= g(b) - g(a) + \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Análogamente $\int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx = g(bT) - g(aT) + \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x} dx$. Como

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B$, entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g(bT) = B \quad y \quad \lim_{T \rightarrow \infty} g(aT) = B.$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x > x_0$ tenemos que $|g(x) - B| < \epsilon$ equivalente a $B - \epsilon < g(x) < B + \epsilon$.

Así, para cada T tal que $aT > x_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{aT}^{bT} \frac{B - \epsilon}{x} dx &< \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x} dx < \int_{aT}^{bT} \frac{B + \epsilon}{x} dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (B - \epsilon)Ln(x) \Big|_{aT}^{bT} < \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x} dx < (B + \epsilon)Ln(x) \Big|_{aT}^{bT} \\ &\Leftrightarrow (B - \epsilon)Ln\left(\frac{b}{a}\right) < \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x} dx < (B + \epsilon)Ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ &\Leftrightarrow -\epsilon Ln\left(\frac{b}{a}\right) < \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x} dx - BLn\left(\frac{b}{a}\right) < \epsilon Ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Como ϵ se tomó arbitrariamente, vemos que a $\int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x} dx$ lo podemos aproximar a $BLn\left(\frac{b}{a}\right)$ tanto como queramos tomando un T lo suficientemente grande. De aquí que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{aT}^{bT} \frac{g(x)}{x} dx = BLn\left(\frac{b}{a}\right).$$

Por lo tanto

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx = B - B + BLn\left(\frac{b}{a}\right) = BLn\left(\frac{b}{a}\right).$$

Entonces, tomando el límite en (12) se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \frac{f(t)}{t} dt - \int_{aT}^{bT} \frac{f(t)}{t} dt \right] &= \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt + BLn\left(\frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple (11).

Sea $h(x) = x \int_x^1 f(t)t^{-2} dt$. Vamos a repetir el procedimiento anterior para probar que

$$\int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = ALn\left(\frac{b}{a}\right) - \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \quad (13)$$

por lo que se omiten algunos detalles técnicos. Integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx &= \left[-x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt \right] \Big|_{aT}^{bT} + \int_{aT}^{bT} \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt \right) dx \\ &= -h(x) \Big|_{aT}^{bT} + \int_{aT}^{bT} \frac{1}{x} \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt \right) dx \\ &= h(aT) - g(bT) + \int_{aT}^{bT} \frac{h(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 f(t)t^{-2} dt = A$, entonces

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} h(bT) = A \quad y \quad \lim_{T \rightarrow 0^+} h(aT) = A.$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x_0 > x > 0$ tenemos que $|h(x) - A| < \epsilon$ equivalente a $A - \epsilon < h(x) < A + \epsilon$.

Así, para cada $T > 0$ tal que $bT < x_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{aT}^{bT} \frac{A - \epsilon}{x} dx &< \int_{aT}^{bT} \frac{h(x)}{x} dx < \int_{aT}^{bT} \frac{A + \epsilon}{x} dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\epsilon Ln\left(\frac{b}{a}\right) < \int_{aT}^{bT} \frac{h(x)}{x} dx - ALn\left(\frac{b}{a}\right) < \epsilon Ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Como ϵ se tomó arbitrariamente, vemos que a $\int_{aT}^{bT} \frac{h(x)}{x} dx$ lo podemos aproximar a $ALn\left(\frac{b}{a}\right)$ tanto como queramos tomando un $T > 0$ lo suficientemente pequeño. De aquí que

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \int_{aT}^{bT} \frac{h(x)}{x} dx = ALn\left(\frac{b}{a}\right).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \lim_{T \rightarrow 0^+} \int_T^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow 0^+} \left[\int_T^1 \frac{f(ax)}{x} dx - \int_T^1 \frac{f(bx)}{x} dx \right]. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $t = ax$ y $t = bx$ respectivamente, tenemos que

$$\int_T^1 \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{aT}^a \frac{f(t)}{t} dt \quad y \quad \int_T^1 \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{bT}^b \frac{f(t)}{t} dt.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_T^1 \frac{f(ax)}{x} dx - \int_T^1 \frac{f(bx)}{x} dx &= \int_{aT}^a \frac{f(t)}{t} dt - \int_{bT}^b \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_{aT}^{bT} \frac{f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando el límite tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0^+} \left[\int_T^1 \frac{f(ax)}{x} dx - \int_T^1 \frac{f(bx)}{x} dx \right] &= - \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt + \lim_{T \rightarrow 0^+} \int_{aT}^{bT} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= ALn \left(\frac{b}{a} \right) - \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple (13).

Sumando (11) y (13) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_1^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx + \int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \\ &= BLn \left(\frac{a}{b} \right) + ALn \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= BLn \left(\frac{a}{b} \right) - ALn \left(\frac{a}{b} \right) \\ &= (B - A)Ln \left(\frac{a}{b} \right) \end{aligned} \tag{14}$$

donde

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt, \quad B = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt.$$

□

5 Ejemplos

Los siguientes resultados son obtenidos mediante la aplicación directa del Teorema 3.1. Los ejemplos 1 a 11 son ejercicios propuestos o resultados publicados en [9].

1. Siendo $f(x) = e^{-x}$, se tiene que $f(0) = 1$ y $f(\infty) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= [f(0) - f(\infty)] \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= [1 - 0] \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

2. La elección de la función $f(x) = \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{x}$ con $p, q > 0$ satisface que

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-qe^{-qx} + pe^{-px}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} -qe^{-qx} + \lim_{x \rightarrow \infty} pe^{-px} \\ &= -q(0) + p(0) = 0 \end{aligned}$$

y que

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -qe^{-qx} + \lim_{x \rightarrow 0} pe^{-px} = -q(1) + p(1) = p - q.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-aqx} - e^{-apx}}{ax} - \frac{e^{-bqx} - e^{-bpx}}{bx} \right) \frac{dx}{x} &= [f(0) - f(\infty)] \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= [(p - q) - 0] \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= (p - q) \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Note que también se puede escribir como

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-aqx} - e^{-apx}}{a} - \frac{e^{-bqx} - e^{-bpx}}{b} \right) \frac{dx}{x^2} = (p - q) \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right).$$

3. Si $f(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} \exp(-ce^x)$, entonces

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-e^{-x}} \exp(-ce^x) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-e^{-x}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-ce^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ce^x}}.$$

Por L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{ce^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{ce^x} ce^x} = 0,$$

es decir, $f(\infty) = 0$. Por otro lado,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} \exp(-ce^x) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} e^{-ce^x} \right) = (1)(e^{-c}) = e^{-c}.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\frac{ax}{1-e^{-ax}} \exp(-ce^{ax}) - \frac{bx}{1-e^{-bx}} \exp(-ce^{bx}) \right) \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^\infty \frac{a \exp(-ce^{ax})}{1-e^{-ax}} - \frac{b \exp(-ce^{bx})}{1-e^{-bx}} dx \\ &= [f(0) - f(\infty)] \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= [e^{-c} - 0] \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= e^{-c} \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

4. Sea $f(x) = \tan^{-1}(x)$. Teniendo que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1}(x) = 0$ y $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(ax) - \tan^{-1}(bx)}{x} dx &= [f(0) - f(\infty)] \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= \left[0 - \frac{\pi}{2} \right] \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(- \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{a}{b} \right). \end{aligned} \tag{17}$$

5. Con la elección de la función $f(x) = \text{Ln}(a + be^{-x})$ tenemos que

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{Ln}(a + be^{-x}) = \text{Ln}(\lim_{x \rightarrow 0} a + be^{-x}) = \text{Ln}(a + b)$$

y

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Ln}(a + be^{-x}) = \text{Ln}(\lim_{x \rightarrow \infty} a + be^{-x}) = \text{Ln}(a).$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\text{Ln}(a + be^{-px}) - \text{Ln}(a + be^{-qx})}{x} dx &= [f(0) - f(\infty)] \text{Ln} \left(\frac{q}{p} \right) \\ &= [\text{Ln}(a + b) - \text{Ln}(a)] \text{Ln} \left(\frac{q}{p} \right) \\ &= \text{Ln} \left(\frac{a + b}{a} \right) \text{Ln} \left(\frac{q}{p} \right) \\ &= \text{Ln} \left(\frac{a}{a + b} \right) \text{Ln} \left(\frac{p}{q} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

6. La función $f(x) = (1 + a/x)^x$ satisface que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{qx}\right)^{qx} - \left(1 + \frac{a}{px}\right)^{px}}{x} dx &= [f(0) - f(\infty)] \text{Ln} \left(\frac{p}{q} \right) \\ &= [1 - e^a] \left[\text{Ln} \left(\frac{p}{q} \right) \right] \\ &= [e^a - 1] \left[-\text{Ln} \left(\frac{p}{q} \right) \right] \\ &= [e^a - 1] \text{Ln} \left(\frac{q}{p} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Esto ya que

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a/x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + t)^{\frac{a}{t}} = \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right]^a = e^a$$

y

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+a}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+a)^x}{x^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+a)^x}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x} \\
 &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^x)}} = \frac{1}{e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)}} = \frac{1}{e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x}}} \\
 &= \frac{1}{e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}}} = \frac{1}{e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -x}} = \frac{1}{1} = 1.
 \end{aligned}$$

7. Si $f(x) = ab \ln(1+x)/x$, se cumple que

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ab \ln(1+x)}{x} = ab \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = ab$$

y

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ab \ln(1+x)}{x} = ab \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \left(\frac{ab \ln(1+ax)}{ax} - \frac{ab \ln(1+bx)}{bx} \right) \frac{dx}{x} \\
 &= \int_0^\infty \left(\frac{b \ln(1+ax)}{x} - \frac{a \ln(1+bx)}{x} \right) \frac{dx}{x} \\
 &= \int_0^\infty \frac{b \ln(1+ax) - a \ln(1+bx)}{x^2} dx \\
 &= [f(0) - f(\infty)] \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\
 &= [ab - 0] \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\
 &= ab \ln \left(\frac{b}{a} \right).
 \end{aligned} \tag{20}$$

8. Si $f(x) = \frac{a+be^{-x}}{ce^x+g+he^{-x}}$, se tiene que

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a+be^{-x}}{ce^x+g+he^{-x}} = \frac{a+b}{c+g+h}$$

y que

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + be^{-x}}{ce^{qx} + g + he^{-x}} = \frac{a + 0}{\infty + g + 0} = \frac{a}{\infty} = 0.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{a + be^{-qx}}{ce^{qx} + g + he^{-qx}} - \frac{a + be^{-px}}{ce^{px} + g + he^{-px}} \right) \frac{dx}{x} &= [f(0) - f(\infty)] \operatorname{Ln} \left(\frac{p}{q} \right) \\ &= \left[\frac{a + b}{c + g + h} - 0 \right] \operatorname{Ln} \left(\frac{p}{q} \right) \\ &= \frac{a + b}{c + g + h} \operatorname{Ln} \left(\frac{p}{q} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

9. Sea $f(x) = \left(\frac{x+p}{x+q} \right)^n$. Debido a que

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+p}{x+q} \right)^n = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+p}{x+q} \right)^n = 1^n = 1$$

y

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+p}{x+q} \right)^n = \frac{p^n}{q^n} = \left(\frac{p}{q} \right)^n.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{ax+p}{ax+q} \right)^n - \left(\frac{bx+p}{bx+q} \right)^n}{x} dx &= [f(0) - f(\infty)] \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= \left[\left(\frac{p}{q} \right)^n - 1 \right] \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= \left[1 - \left(\frac{p}{q} \right)^n \right] \operatorname{Ln} \left(\frac{a}{b} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

10. Sea $f(x) = e^{-x} \cos(x)$. Note que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \cos(x) = (1)(1) = 1$ y $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos(x) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \cos(ax) - e^{-bx} \cos(bx)}{x} dx &= [f(0) - f(\infty)] \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= [1 - 0] \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

11. Tomando $f(x) = e^{-x} \text{sen}(x)$ se tiene que

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \text{sen}(x) = (1)(0) = 0 \quad y \quad f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \text{sen}(x) = 0.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \text{sen}(ax) - e^{-bx} \text{sen}(bx)}{x} dx &= [f(0) - f(\infty)] \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= [0 - 0] \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

12. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$ no existe, no se puede aplicar directamente la Fórmula de Frullani. Se usará la versión dada a conocer por A. Ostrowski en 1949, recordando que esta es la conocida “versión clásica”.

Sean $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$ y $B = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$. Se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(-\frac{\cos(t)}{t} \Big|_x^1 - \int_x^1 \frac{\text{sen}(t)}{t} dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-x \cos(1) + \cos(x) - x \int_x^1 \frac{\text{sen}(t)}{t} dt \right]. \end{aligned}$$

Sabiendo que [8], para toda $x > 0$, existe un $M > 0$ tal que

$$\left| \int_0^x \frac{\text{sen}(t)}{t} dt \right| \leq M.$$

Se tiene que para cualquier $x > 0$

$$\int_x^1 \frac{\text{sen}(t)}{t} dt$$

también es acotada. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\text{sen}(t)}{t} dt = 0.$$

Por lo tanto

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \cos(1) + \cos(x) - x \int_x^1 \frac{\text{sen}(t)}{t} dt = -0(\cos(1)) + 1 - 0 = 1.$$

Ahora

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x \cos(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [\text{sen}(t)] \Big|_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-\text{sen}(x)}{x} + \frac{\text{sen}(1)}{x} \right).$$

Como $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, entonces, para $x \neq 0$, $\frac{-1}{x} \leq \frac{\text{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Entonces

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-\text{sen}(x)}{x} + \frac{\text{sen}(1)}{x} \right) = 0.$$

Por tanto, sustituyendo en (4) y teniendo en cuenta que $A = m(f)$ y $B = M(f)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx &= [B - A] \ln \left(\frac{a}{b} \right) \\ &= [0 - 1] \ln \left(\frac{a}{b} \right) \\ &= \ln \left(\frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

La relación (25) se puede encontrar en [9] como 3.784.1.

Del resultado 12 se siguen los siguientes dos resultados.

13.

$$\int_0^\infty \text{sen} \left(\frac{(b-a)x}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{(b+a)x}{2} \right) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (26)$$

La igualdad anterior se debe a que

$$\text{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right) = \frac{\cos(b) - \cos(a)}{2},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \text{sen} \left(\frac{(b-a)x}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{(b+a)x}{2} \right) \frac{dx}{x} &= \int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{2} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Note que en la última igualdad se aplica el resultado 12.

14.

$$\int_0^{\infty} \text{sen}(px)\text{sen}(qx) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p+q}{p-q}\right). \quad (28)$$

Dicha relación se obtiene teniendo en cuenta que

$$\cos(px - qx) = \cos(px)\cos(qx) + \text{sen}(px)\text{sen}(qx) \quad (29)$$

$$\cos(px + qx) = \cos(px)\cos(qx) - \text{sen}(px)\text{sen}(qx), \quad (30)$$

y restando (30) a (29) se obtiene $2\text{sen}(px)\text{sen}(qx)$, por lo que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \text{sen}(px)\text{sen}(qx) \frac{dx}{x} &= \int_0^{\infty} \frac{\cos((p-q)x) - \cos((p+q)x)}{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p+q}{p-q}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Note que en la última igualdad se aplica el resultado 12.

6 Conclusión

En nuestra exposición hicimos notar que no solo son importantes las expresiones (2) o (4) de la Fórmula de Frullani, sino también las que se derivan de ella, tales como las de los ejemplos que se presentaron, los cuales satisfacen diferentes condiciones. Cuando puede ser aplicada, la fórmula nos provee de eficiencia a la hora de resolver problemas, obteniendo de manera rápida y precisa soluciones a determinados problemas. Es importante mencionar que esta fórmula tiene algunas aplicaciones en otras ciencias relacionadas con la matemática, por ejemplo, en la física y la estadística [3].

Agradecimientos

Los autores agradecemos a los árbitros por dedicar su tiempo a la revisión de este trabajo.

Referencias

- [1] Apostol, T. (1973). *Mathematical Analysis*. Pasadena: Addison-Wesley.
- [2] Arias de Reyna, J. (1990). On the theorem of Frullani. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 109(1):165–175.
- [3] Baker, R. (2014). Properties and applications of some distributions derived from Frullani's integral. *arXiv preprint arXiv:1408.3490*.
- [4] Bartle, R. (1982). *Introducción al análisis matemático*. Limusa.
- [5] Cauchy, L. (1827). *Exercices de mathématiques, par M. Augustin-Louis Cauchy...: 2: Seconde annee*. chez de Bure freres.
- [6] Edwards, J. (1922). *A treatise on the integral calculus*. New York: Chelsea.
- [7] Elliot, E. (1875). Messenger of Mathematics. *Educational Times*.
- [8] Folland, G. (2009). *Fourier analysis and its applications*, volume 4. American Mathematical Soc.
- [9] Gradshteyn, I. y Ryzhik, I. (2014). *Table of integrals, series, and products*. Academic press.
- [10] Iyengar, K. (1940). *On Frullani integrals*. J. Indian Math Soc. (2).
- [11] Iyengar, K. (1941). *On Frullani integrals*. Cambridge Phill. Soc. 37.
- [12] Ostrowski, A. (1949). On some generalizations of the Cauchy-Frullani integral. *Collected Mathematical Papers*, IV(1):612–616.
- [13] Ostrowski, A. (1976). *On Cauchy-Frullani integrals*. Helvetici: Comment. Math.
- [14] Tricomi, F. (1951). On the theorem of Frullani. *The American Mathematical Monthly*, 58(3):158–164.
- [15] Tricomi, F. (1960). *Esecizi e complementi di Analisi Matematica*. Padova: Parte Seconda, Terza Edizioni, C.E.D.A.M.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

slbeltran43@gmail.com

francisco.mendoza@correo.buap.mx

Probabilidad y Estadística

Capítulo 2

Análisis de la radiación solar en el municipio de Puebla usando la metodología de Box-Jenkins y redes neuronales artificiales

Bulmaro Juárez Hernández, José Miguel Hernández
López, Francisco Solano Tajonar Sanabria
FCFM, BUAP

Resumen

En el presente trabajo se aplica la metodología de los modelos Box-Jenkins y redes neuronales, usando datos semanales de una serie de tiempo de la radiación solar los cuales se pueden observar en forma gráfica en la Figura 1, la escala en que están los valores de los datos es Watt por metro cuadrado $\frac{W}{m^2}$. Los datos con los que se cuentan empiezan desde la primera semana del año 2020 hasta la última semana del año 2022. Se utilizó una base de datos de la estación meteorológica UTP ubicada en la zona norte del municipio de Puebla. La información fue obtenida del sistema nacional de información de la calidad de aire (SINAICA) de la Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales, y fue procesada en el paquete computacional Python. La metodología seguida para la construcción del modelo SARIMA, se ajustó a los pasos sugeridos por Box-Jenkins: estacionariedad, identificación del modelo, estimación de parámetros, diagnóstico y pronóstico, por otro lado en la parte de redes neuronales se utilizó una red neuronal recurrente.



Figura 1: Serie de tiempo datos promediados semanalmente de la radiación solar del municipio de Puebla.

1 Introducción

La radiación solar es aquella energía emitida por el Sol a través de un conjunto de ondas electromagnéticas y de la cual depende la vida en la Tierra. Además de determinar las dinámicas y tendencias atmosféricas y climatológicas, hace posible la fotosíntesis de las plantas, entre otros procesos [2]. Teniendo en cuenta la variabilidad de la radiación solar, una posible forma de conocer los valores a futuro consiste en elaborar pronósticos confiables del comportamiento de esa variable.

Para lograr un pronóstico de una serie de tiempo, existe una amplia gama de investigaciones sobre distintos métodos de predicción, fundamentalmente estadísticos, entre los que destacan los modelos SARIMA o modelo autorregresivo estacional integrado de promedio móvil multiplicativo los cuales han sido ampliamente estudiados y utilizados en pronósticos en el ámbito de las finanzas y la economía debido a que son altamente eficientes en manejar series de datos como por ejemplo en pronóstico de precios del tomate en México, pero dado que en la realidad la linealidad es muy difícil de encontrar no parece ser muy razonable asumir de antemano que una serie de tiempo en particular, es generada por un proceso lineal, cuando en el mundo real los sistemas son regularmente no lineales. Debido al comportamiento no lineal

que presentan algunos pronósticos, las redes neuronales artificiales, son un excelente candidato para la predicción de esta estimación. Una característica importante en las redes neuronales artificiales empleadas en los pronósticos, es que los datos no deben de ser analizados para probar el supuesto de tendencia o estacionalidad en la serie de tiempo previo a la realización del pronóstico [3], esto les da una gran ventaja sobre los modelos tradicionales de series de tiempo.

2 Radiación Solar

El Sol

El Sol es la estrella que pertenece a nuestro Sistema Solar. Su origen al igual que la Tierra fue un conjunto de gases incandescentes que al girar vertiginosamente provocó que los gases más pesados se fueran al centro y los más livianos al exterior. El astro solar es una gigantesca bola de gas a la que la Tierra, al igual que el resto de cuerpos del Sistema Solar, se encuentra íntimamente ligada. Se pueden tener pequeños cambios en las propiedades físicas del Sol y esto causar efectos enormes en el clima y la vida en nuestro planeta.

Este gran astro se formó aproximadamente hace 4,650 millones de años y se puede decir que tiene combustible para 5,000 millones más. Actualmente el Sol se encuentra en la fase de plena actividad, en la que seguirá quemando hidrógeno de manera estable unos 5,000 millones de años más [4].

Radiación Solar

La radiación solar la podemos definir como el flujo de energía que recibimos del Sol en forma de ondas electromagnéticas que permite la transferencia de energía solar a la superficie terrestre. Estas ondas electromagnéticas son de diferentes frecuencias y aproximadamente la mitad de las que recibimos están entre los rangos de longitud de onda de $0.4 \mu m$ y $0.7 \mu m$, y pueden ser detectadas por el ojo humano, constituyendo lo que conocemos como luz visible, ver Figura 2. De la otra mitad, la mayoría se sitúa en la parte infrarroja del espectro y una pequeña parte en la ultravioleta [4].

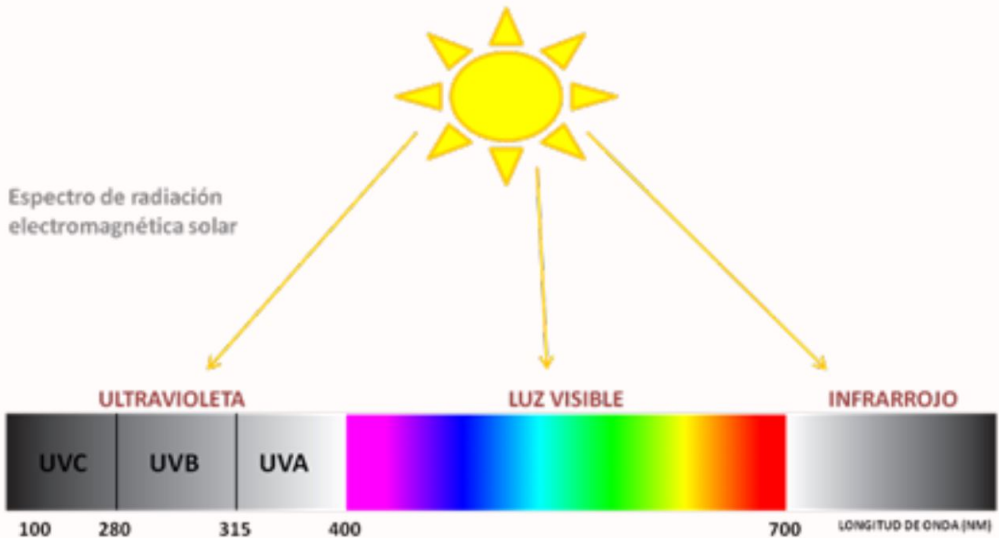


Figura 2: Espectro de radiación electromagnética solar.

Unidades de medida de la radiación solar

Las cantidades de radiación son expresadas generalmente en términos de exposición radiante o irradiancia, siendo esta última una medida del flujo de energía recibida por unidad de área en forma instantánea como energía/área-tiempo y cuya unidad es el Watt por metro cuadrado (W/m^2). Un Watt es igual a un Joule por segundo.

Irradiancia Solar

La irradiancia solar es la potencia por unidad de área recibida del Sol en forma de radiación electromagnética medida en el rango de longitud de onda del instrumento de medición.

Medición de la radiación solar

La radiación solar se mide con distintos propósitos, uno de ellos es fundamental para una buena planificación, diseño e implementación de un proyecto de aplicación solar. Para la medición de la radiación solar existen diversos instru-

mentos, siendo los más comunes las celdas fotovoltaicas y los piranómetros (Figura 3) [5].

Los piranómetros absorben la radiación solar por medio de termocuplas que convierten el calor en voltaje eléctrico proporcional a la radiación. La celda fotovoltaica en tanto, es un pequeño panel de silicio conectado a una resistencia que genera una corriente proporcional a la radiación [5].



Figura 3: Instrumentos para la medición de la radiación solar.

3 Conceptos básicos de series de tiempo

En este apartado se presenta una somera introducción teórica de la metodología Box-Jenkins y series de tiempo.

Series de tiempo

Primeramente, definamos que es una serie de tiempo. Una serie de tiempo es una sucesión cronológica de observaciones X_t , en la que cada una de ellas corresponde a una variable aleatoria distinta, y la ordenación de la sucesión de observaciones es esencial para el análisis de esta. Más aún una serie de tiempo X_t es un proceso estocástico donde el índice está relacionado con el tiempo [6].

En general en una serie de tiempo, no existen limitaciones para el lapso a medir, puede medirse en minutos, días, meses, años, etcétera. Lo único que se requiere es un punto de inicio y un punto final. Entre estos dos puntos se toman las mediciones; el tiempo transcurrido entre cada medición se considera constante y se conoce como periodo, en tanto su valor es llamado frecuencia.

Las series de tiempo se examinan con la esperanza de hallar algún patrón. Con el objeto de identificar dicho patrón, muchas veces es conveniente pensar

que la serie de tiempo consta de varios componentes, los cuales son los siguientes:

- **Tendencia.** La tendencia se refiere al desplazamiento hacia arriba o hacia abajo que caracteriza a las series de tiempo con relación a un periodo de tiempo. Esta refleja el crecimiento o declinación de extensa duración en las series de tiempo. La tendencia puede ser lineal y no lineal [7].
- **Ciclo.** El ciclo se refiere a los movimientos hacia arriba o hacia abajo alrededor de los niveles de tendencia. Estas fluctuaciones tienen una duración que varía dependiendo del problema a estudiar [7].
- **Variaciones estacionales.** Las variaciones estacionales son patrones periódicos en una serie de tiempo que se completa dentro de un periodo anual que se repiten cada año [7].
- **Fluctuaciones irregulares.** Las fluctuaciones irregulares son movimientos erráticos que siguen un patrón indeterminado o irregular [7].

Estacionalidad y estacionariedad

Para el análisis de una serie de tiempo es importante conocer si la serie cuenta con estacionalidad y estacionariedad.

La estacionalidad sugiere que ciertas tendencias aparecerán de forma cíclica. Por ejemplo, las temperaturas suben y bajan según las horas del día y los meses del año. Estos son dos ejemplos distintos de patrones estacionales que observamos en nuestra vida, el cambio durante el día y el cambio durante un año completo.

En cuanto a la estacionariedad, una serie es estacionaria si es estable a lo largo del tiempo. Esto se refiere a que la media, la varianza y la autocorrelación se mantienen constantes, lo que significa que los posibles valores en cada tiempo se mantienen constantes. Formalmente:

1. $\mathbb{E} [X_t] = \text{cte.}$
2. $\text{Var} [X_t] = \text{cte.}$
3. $\text{Cov}(X_{t+k}, X_t) = \text{Cov}(X_{s+k}, X_s), \quad \forall t, s, k \in T$ (conjunto de índices).

Función de autocorrelación (FAC) y función autocorrelación parcial (FACP)

Por lo general cuando se hace un análisis estadístico se supone la existencia de independencia entre las variables aleatorias. Sin embargo, en las series de tiempo existen ciertas correlaciones entre las observaciones, en otras palabras, que los cambios que sufre una de las variables afectan en la otra. Las funciones de autocorrelación contienen la información de la dependencia temporal de un proceso estocástico que se utiliza para generar un patrón y posteriormente, un modelo que refleje el comportamiento de la serie de tiempo que nos permitirá generar pronóstico del comportamiento futuro.

- Función de autocorrelación (FAC). La función de autocorrelación proporciona la autocorrelación para cualquier retraso que consideremos. La alternativa sería encontrar manualmente la correlación entre nuestros datos originales y múltiples retrasos de sí misma.
- Función autocorrelación parcial (FACP). La autocorrelación mide la similitud entre una serie temporal y unas versiones anteriores de sí misma. Sin embargo, los coeficientes también capturan efectos de los momentos anteriores de manera indirecta. Por indirecta nos referimos a todos los demás canales a través de los cuales los datos del pasado afectan a los datos actuales. Si deseamos determinar sólo la relación directa entre la serie de tiempo y su versión retrasada, necesitamos calcular la autocorrelación parcial.

Modelos estacionarios

Los modelos de series tiempo se descomponen en dos partes: la parte sistemática y la parte aleatoria. La parte sistemática es la parte predecible constituida por la serie de tiempo, mientras que la parte aleatoria es la parte donde sus valores no tiene relación alguna o dependencia entre sí. Usualmente cuando se construye un modelo estadístico el problema es formular la parte sistemática

1. Medias Móviles de orden q , $MA(q)$.

Estos procesos representan fenómenos cuyos eventos producen un efecto inmediato que dura lapsos de tiempo cortos. Se define como:

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (1)$$

donde $a_j \sim RB(0, \sigma^2)$ para $j = t - q, \dots, t$.

2. Autoregresivos de orden p $AR(p)$.

Expresa a X_t en función de su pasado hasta el retardo $t - p$ más un factor aleatorio al tiempo t , independientes e idénticamente distribuidos:

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t, \quad (2)$$

donde $\epsilon_j \sim RB(0, \sigma^2)$.

3. Medias Móviles de Autoregresivos, $ARMA(p, q)$.

La combinación de los procesos de $AR(q)$ y $MA(p)$ da como resultado a los procesos mixtos a los cuales se les denomina como $ARMA(p, q)$ y los cuales se definen como sigue:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (3)$$

donde $\{X_t\}$ es estacionaria y $\{\epsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$.

Modelos no estacionarios

ARIMA

El modelo ARIMA permite describir un valor como una función lineal de datos anteriores y errores debidos al azar. Es decir, debe contener todos los elementos necesarios para describir el fenómeno. Box y Jenkins recomiendan como mínimo 50 observaciones en la serie temporal.

Este modelo se denomina **Modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles de orden (p, d, q)** o $ARIMA(p, d, q)$ con p el orden del polinomio autorregresivo estacionario, d el orden de integración y q el orden del polinomio de medias móviles.

El modelo se representa de forma matemática con la siguiente ecuación:

$$\Phi_p(B) \Delta^d X_t = \delta + \Theta_q(B) \epsilon_t, \quad (4)$$

donde $\Phi_p(B)$ y $\Theta_q(B)$ son polinomios en el operador de retardos finitos de orden p y q , y Δ^d es el operador diferencia de orden d .

Modelos multiplicativos

Cuando trabajamos con datos de periodicidad inferior al año (mensuales, semanales, diarios, etc.), suele darse el factor estacional, y deberán analizarse las correlaciones entre los mismos meses, semanas, etc. de años sucesivos.

SARIMA

Un modelo SARIMA incorpora factores estacionales en un modelo multiplicativo. Una notación abreviada para el modelo es $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$, (p, d, q) es la parte no estacional y (P, D, Q) es la parte estacional [8].

p denota el número de términos autorregresivos, d el orden de diferenciadas no estacional, q el número de términos de la media móvil invertible, P denota el número de términos autorregresivos, D el orden de diferencia estacionales, Q el número de términos de la media móvil invertible estacional y s es la ventana de tiempo del patrón estacional [9]. Este modelo plantea una ecuación general y selecciona aquella que cumpla inicialmente con la estacionariedad, estacionalidad y genere ruido blanco en los errores del modelo proyectado, tal como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\Phi_P(B^s)\phi_p(B)\nabla_s^D\nabla^dX_t = \delta + \Theta_Q(B^s)\theta_q(B)\epsilon_t. \quad (5)$$

donde:

- $\phi_p(B)$, es el operador del proceso autorregresivo de orden p .
- $\theta_q(B)$, es el operador del proceso de promedio móvil de orden q .
- $\Phi_P(B^s)$, es el operador estacional autorregresivo de orden P .
- $\Theta_Q(B^s)$, es el operador estacional de promedio móvil de orden Q .
- ∇^d , es el componente de diferencia de orden d .
- ∇_s^D , es el componente de diferencia estacional de periodo s y orden D .
- ϵ_t , es un proceso de ruido blanco Gaussiano [8] [10].

Metodología Box-Jenkins

Identificación de Modelos de Series de Tiempo: Una Introducción a la Metodología Box-Jenkins [11].

Al analizar una serie de tiempo, surge la pregunta fundamental: ¿qué tipo de proceso estocástico subyacente está generando los datos? ¿Se trata de un proceso AR puro, un proceso MA puro, un proceso ARMA o un proceso ARIMA? En cada caso, es crucial determinar los parámetros específicos del modelo, como el valor de p para un proceso AR, el valor de q para un proceso MA, o los valores de p , d y q para un proceso ARIMA.

La Metodología Box-Jenkins: Una Herramienta para la Identificación de Modelos.

La metodología Box-Jenkins es una herramienta estadística ampliamente utilizada para responder a estas preguntas. Desarrollada por los estadísticos George E. P. Box y Gwilym Jenkins, esta metodología proporciona un enfoque sistemático para identificar y estimar modelos de series de tiempo.

Aplicación de la Metodología Box-Jenkins.

La metodología Box-Jenkins implica varios pasos, incluyendo:

1. Análisis de la estacionariedad: determinar si la serie de tiempo es estacionaria o no.
2. Identificación del modelo: utilizar gráficos y estadísticas para determinar el tipo de modelo que mejor se ajusta a los datos.
3. Estimación de parámetros: estimar los parámetros del modelo seleccionado.
4. Validación del modelo: verificar si el modelo es adecuado para los datos.

Conclusión:

La metodología Box-Jenkins es una herramienta poderosa para identificar y estimar modelos de series de tiempo. Al seguir un enfoque sistemático, los analistas pueden determinar el tipo de proceso estocástico subyacente y estimar los parámetros del modelo, lo que les permite tomar decisiones informadas y precisas.

El método considera cinco pasos:

1. Estacionariedad. La estacionariedad está principalmente relacionada con la estabilidad de una serie. Este concepto es de gran importancia para la metodología Box-Jenkins ya que en caso de que los datos no se comporten de manera estable a lo largo del tiempo, es necesario aplicar una transformación a la serie para llevarla a ello. Existen algunas formas

para conocer si una serie es estacionaria: por medio del gráfico de la serie, por medio de la función de autocorrelación simple y por la prueba de Dickey-Fuller.

2. Identificación. Es decir, encontrar los valores apropiados de p , d y q . La función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial ayudan en esta labor.
3. Estimación. Tras identificar los valores apropiados de p y q , la siguiente etapa es estimar los parámetros de los términos autorregresivos y de promedios móviles incluidos en el modelo. Algunas veces, este cálculo se efectúa mediante mínimos cuadrados simples, pero otras hay que recurrir a métodos de estimación no lineal (en parámetros). Como esta labor se lleva a cabo ahora a través de rutinas en diversos paquetes estadísticos, en la práctica no es preciso preocuparse por los desarrollos matemáticos de la estimación [11].
4. Diagnóstico. Después de seleccionar un modelo particular y de estimar sus parámetros, tratamos de ver si el modelo seleccionado se ajusta a los datos en forma razonablemente buena, pues es posible que exista otro modelo que también lo haga. Es por esto que el diseño de modelos con la metodología Box-Jenkins es un arte más que una ciencia; se requiere gran habilidad para seleccionar el modelo correcto. Una simple prueba del modelo seleccionado es ver si los residuales estimados a partir de este modelo son de ruido blanco [11].
5. Pronóstico. Una razón de la popularidad del proceso de construcción de modelos con la metodología Box-Jenkins es su éxito en el pronóstico. En muchos casos, los pronósticos obtenidos por este método son más confiables que los obtenidos por otros modelos, en particular en el caso de pronósticos de corto plazo [11].

4 Conceptos básicos de redes neuronales

Machine learning

El machine learning es una rama de la inteligencia artificial que permite que las máquinas aprendan sin la necesidad de ser programadas para ello. Una

habilidad indispensable para hacer sistemas capaces de identificar patrones entre los datos para hacer predicciones. Esta tecnología está presente en un sinnúmero de aplicaciones como las recomendaciones de Netflix o Spotify, las respuestas inteligentes de Gmail o el habla de Google Home y Alexa [12].

El machine learning ha avanzado de forma exponencial durante los últimos 20 años, y es responsable de crear programas capaces de derrotar a jugadores humanos en distintos juegos para lograr esto es, en concreto, el ‘aprendizaje por refuerzo’ que es una de las cuatro clasificaciones de estilos de aprendizaje en función de la salida esperada y del tipo de entrada [12]:

1. Aprendizaje supervisado.
2. Aprendizaje no supervisado.
3. Aprendizaje semisupervisado.
4. Aprendizaje por refuerzo.

Aprendizaje profundo

El aprendizaje profundo es un tipo de técnica de machine learning que se basa en el cerebro humano. Los algoritmos de aprendizaje profundo analizan los datos con una estructura lógica similar a la que utilizan los humanos. El aprendizaje profundo utiliza sistemas inteligentes, denominados redes neuronales artificiales, para procesar información por capas. Los datos fluyen desde la capa de entrada a través de varias capas de redes neuronales “profundas” ocultas antes de llegar a la capa de salida. Las capas adicionales ocultas permiten un aprendizaje mucho más eficaz que el de los modelos estándar de machine learning [13].

Redes Neuronales Artificiales

Las Redes neuronales Artificiales su nombre y estructura están inspirados en el cerebro humano, imitando la forma en que las neuronas biológicas se envían señales entre sí [14]. Se puede crear una red neuronal artificial simulando una red de neuronas modelo en una computadora. Al aplicar algoritmos que imitan los procesos de las neuronas reales, podemos hacer que la red aprenda a resolver muchos tipos de problemas. Una neurona artificial se denomina

unidad de umbral y su comportamiento se ilustra en la Figura 4. Recibe entradas de otras unidades o fuentes externas, pesa cada entrada y las suma. Si la entrada total está por encima de un umbral, la salida de la unidad es uno, de lo contrario es cero. Por lo tanto, la salida cambia de 0 a 1 cuando la suma total ponderada de las entradas es igual al umbral.

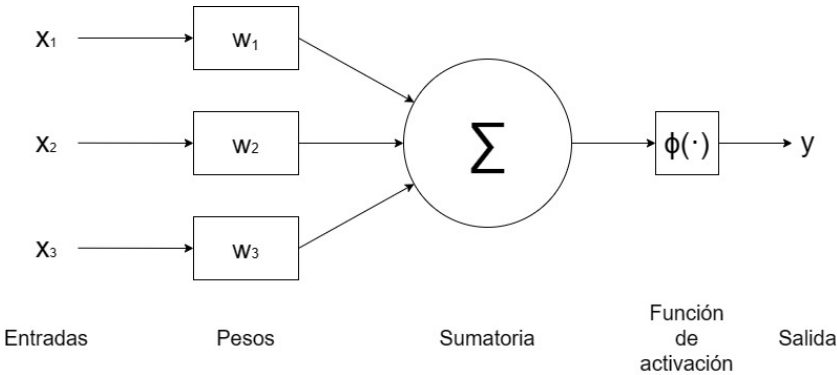


Figura 4: Comportamiento de una Neurona Artificial.

Entonces las redes neuronales artificiales consisten en un conjunto de neuronas o nodos interconectados (véase la Figura 5). Mediante el ajuste de los pesos de los nodos, se puede obtener el rendimiento específico o deseado para un determinado conjunto de entradas. Los pesos se ajustan mediante un algoritmo de aprendizaje y a este proceso se llama entrenamiento o aprendizaje.

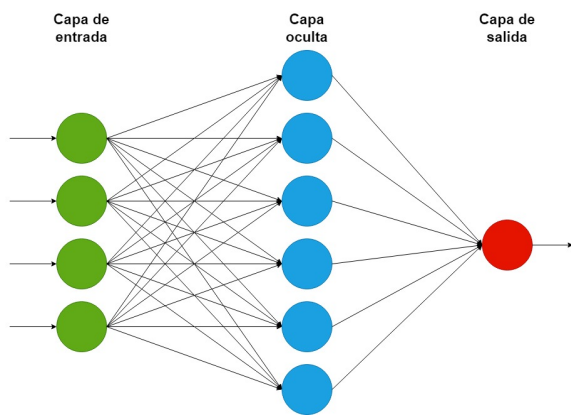


Figura 5: Ejemplo de Red Neuronal Artificial.

Redes Neuronales recurrentes

En la práctica, las Redes neuronales simples tienen una capacidad limitada para aprender dependencias a más largo plazo. Los Redes neuronales comúnmente se entrenan a través del algoritmo backpropagation, en la que pueden experimentar un problema de gradiente de “desaparición” o “explosión” [15]. Estos problemas hacen que los pesos de la red se vuelvan muy pequeños o grandes, lo que limita la efectividad en aplicaciones que requieren que la red aprenda relaciones a largo plazo, por ejemplo, en la series de tiempo.

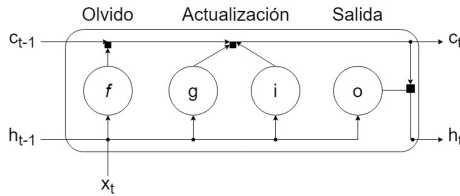


Figura 6: Red LSTM.

Para superar este problema usaremos redes neuronales recurrentes puntualmente redes LSTM, las cuales usan puertas adicionales para controlar qué información en la celda oculta se exporta como salida y al siguiente estado oculto. Las puertas adicionales permiten que la red aprenda relaciones a largo plazo en los datos de manera más efectiva. La menor sensibilidad al intervalo de tiempo hace que las redes LSTM sean mejores para analizar datos secuenciales que las Redes neuronales simples [15]. La arquitectura de un bloque LSTM generalmente tiene una celda de memoria, una puerta de entrada (input gate), una puerta de salida (output gate) y una puerta de olvido (forget gate), como se muestra en la Figura 6.

Donde X_t representa la entrada, h_t el estado oculto, c_t el estado de la celda, f la puerta de olvido, g la memoria de la celda, i la puerta de entrada y o la puerta de salida.

5 Análisis del caso de estudio con la metodología de Box-Jenkins

En la Figura 1 se muestra el gráfico de la serie de tiempo de la radiación solar del municipio de Puebla, es posible observar que la serie presenta estacionalidad, al parecer no hay presencia de tendencia o no es muy visible, note que la serie no oscila alrededor de cero, además note que la variabilidad parece ser constante. Se realizaron transformaciones para estabilizar la varianza usando la función de transformación propuesta por Box-Cox, además de realizar una transformación aplicando logaritmos, se analizaron las respectivas gráficas de las series con los datos transformados, además de sus respectivas FAC y FACP, en el análisis no se observó gran diferencia comparadas con la serie original. Por lo que se decidió trabajar con los datos originales de la serie.

Dado que resulta una buena práctica, cuando se analiza una serie de tiempo usando la metodología de Box-Jenkins, el verificar si la serie es al menos débilmente estacionaria, se graficaron las funciones FAC y FACP de la serie de tiempo de la radiación solar del municipio de Puebla, tales funciones se presentan en la Figura 7. Obsérvese que la FAC se corta con rapidez y se extingue en forma sinusoidal amortiguada, y en cuanto a la FACP es posible observar que esta se extingue a partir del primer rezago y de nuevo vuelve a ser significativo en los rezagos 6, 35, 36, 39 y 44, lo cual puede ser atribuido a la estacionalidad de la serie.

En la Figura 8 se puede observar una sucesión de gráficas de cajas y bigotes, las cuales representan gráficamente los datos agrupados de las semanas 1 de cada uno de los años observados, los datos agrupados de las semanas 2 y así sucesivamente hasta los datos agrupados de las semanas 52 de cada uno de los años observados. De tal manera que como el año contiene 52 semanas se construyeron 52 gráficas de cajas y bigotes, una para cada agrupación.

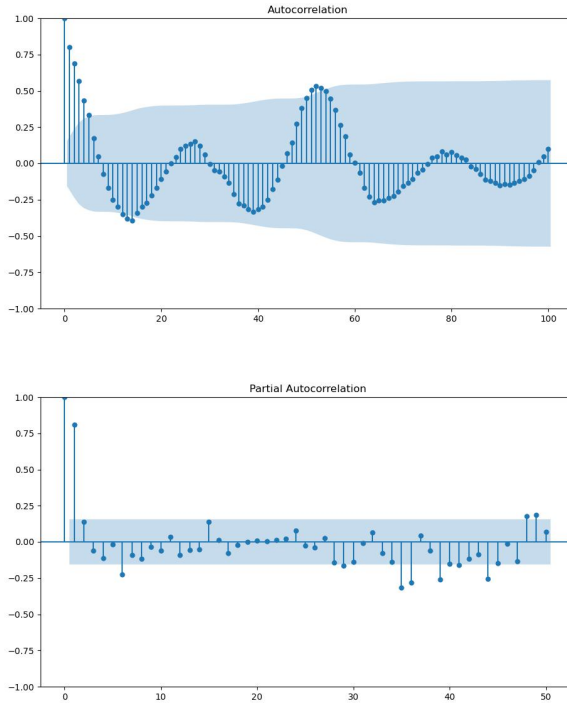


Figura 7: FAC y FACP de la serie original.

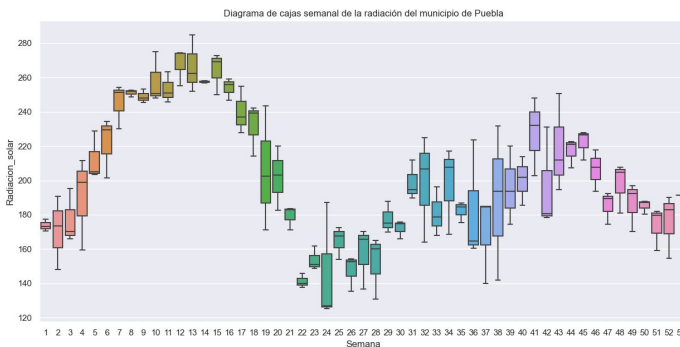


Figura 8: Gráfica de cajas y bigotes de la serie de tiempo de la radiación solar.

Ahora bien, regresando de nuevo a las autocorrelaciones, estas indicarían que se trata de una serie estacionaria, para verificar esto se decidió realizar la prueba de estacionariedad Dickey-Fuller.

En la Tabla 1 se muestran los resultados de la prueba Dickey-Fuller y el contraste de hipótesis, donde resulta que la hipótesis nula se rechaza a cualquier nivel de significancia, en este trabajo se tomará un nivel de significancia del 5%. De acuerdo con los resultados de la prueba, la serie resulta ser estacionaria, además de que es estacional.

Cuadro 1: Prueba de estacionariedad para la serie.

E. de p.	V. c. al 1 %	V. c. al 5 %	V. c. al 10 %
-4.11776	-3.4744	-2.8809	-2.5770

Como se busca el mejor modelo y el más sencillo entonces se decidió realizar una diferencia regular a la serie original y una diferencia estacional (con $s=52$) a la serie diferenciada regularmente, ver Figura 9.

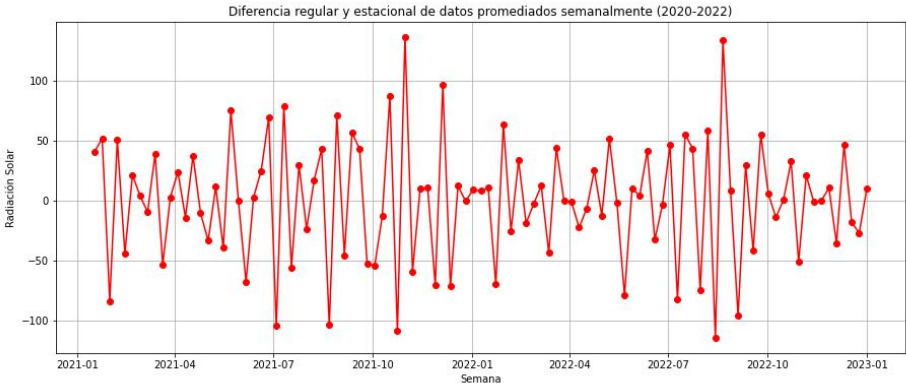


Figura 9: Serie de tiempo con una diferencia regular y una diferencia estacional.

Graficando las FAC y FACP de la serie con una diferencia regular y la FAC y FACP de la serie diferenciada estacionalmente, resulta lo siguiente, ver Figuras 10 y 11.

Las FAC y FACP dadas en la Figura 10 son de ayuda para definir los órdenes de p y q para el modelo que describa la serie de tiempo en la parte no estacional. Obsérvese que en la Figura 10, la FAC tiene una espiga sobresaliente en el primer rezago y después se extingue. Por lo que q puede tomar el valor de 0 ó 1.

Para la *FACP* se tienen 2 espigas sobresalientes, una en el primer rezago donde en esta se corta y la otra espiga que sobresale es en el 14 rezago. Por lo que el valor de p puede ser 0, ó 1. Así, se propuso un modelo *ARIMA*(1, 1, 1) para la parte no estacional.

Por otro lado, se analizó la *FAC* y *FACP* del gráfico en la Figura 11. Obsérvese que, la FAC tiene una espiga sobresaliente en el primer rezago, y se corta, después sobresalen 4 espigas más, pero son muy pequeñas. Por lo que el valor de Q puede ser igual a 0 ó 1.

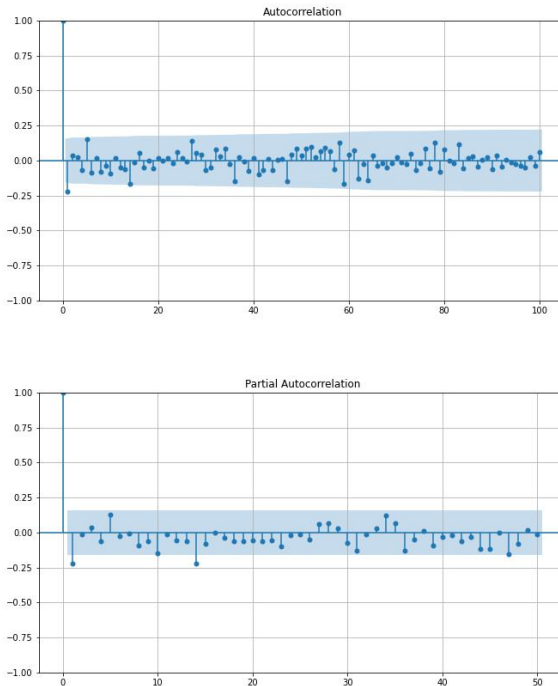


Figura 10: FAC y FACP de la serie con una diferencia regular.

Para la FACP se tienen 6 espigas sobresalientes en los primeros seis rezagos y se corta a partir del rezago 6, después sobresalen las espigas 9 y 10 pero estos son muy pequeños al igual que las espigas 5 y 6. Por lo que el valor de P puede ser 0, 1, 2, 3 ó 4. Así, se propuso un modelo para la parte estacional con $s = 52$, de la forma $ARIMA(1, 1, 0)_{52}$. En resumen, el modelo propuesto es $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 0)_{52}$.

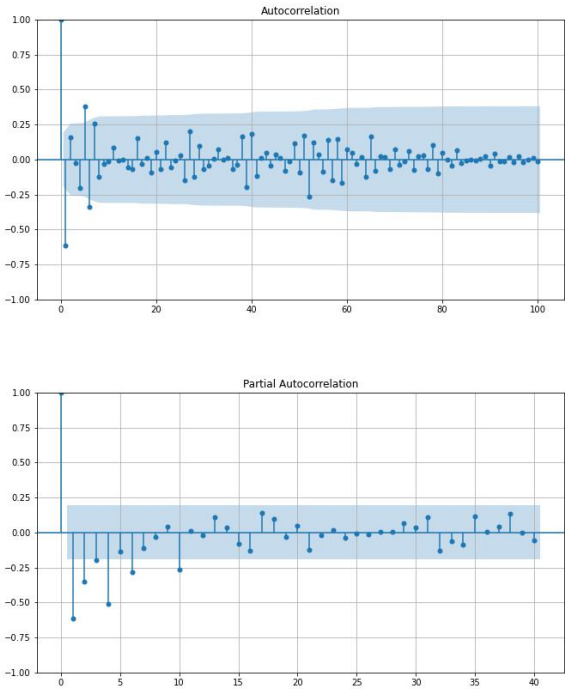


Figura 11: FAC y FACP de la serie con una diferencia regular y una diferencia estacional.

Se propusieron otros 3 modelos con la ayuda de la paquetería *pdmarima* de Python. Los resultados se muestran en la Tabla 2. Luego de observar los resultados obtenidos de acuerdo al criterio de Akaike y BIC, el modelo a elegir fue el $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 0)_{52}$, ya que, éste toma el valor más pequeño conforme a los criterios.

La validación del modelo es una parte importante para evidenciar la

idoneidad del mismo. Para el análisis de residuos, se hizo uso de las herramientas: `.plot_diagnostics()` de la paquetería `pmdarima` de Python, para la comprobación de normalidad de los residuos.

En la Figura 12 se puede ver el diagnóstico del modelo. Obsérvese que en la primera imagen de la Figura 12 se muestran los residuales estandarizados del modelo, donde se observa que están distribuidos de forma aleatoria alrededor del cero, sin mostrar tendencia, por lo que se consideran independientes. En la segunda imagen se muestra que su la distribución de los residuales se asemeja a una distribución normal estándar, es decir que tiene una media de 0 y una desviación estándar de 1.

Y por último en la cuarta imagen, la FAC de los residuales se asemeja a la FAC de un ruido blanco, por lo que parece que se está ante un modelo adecuado.

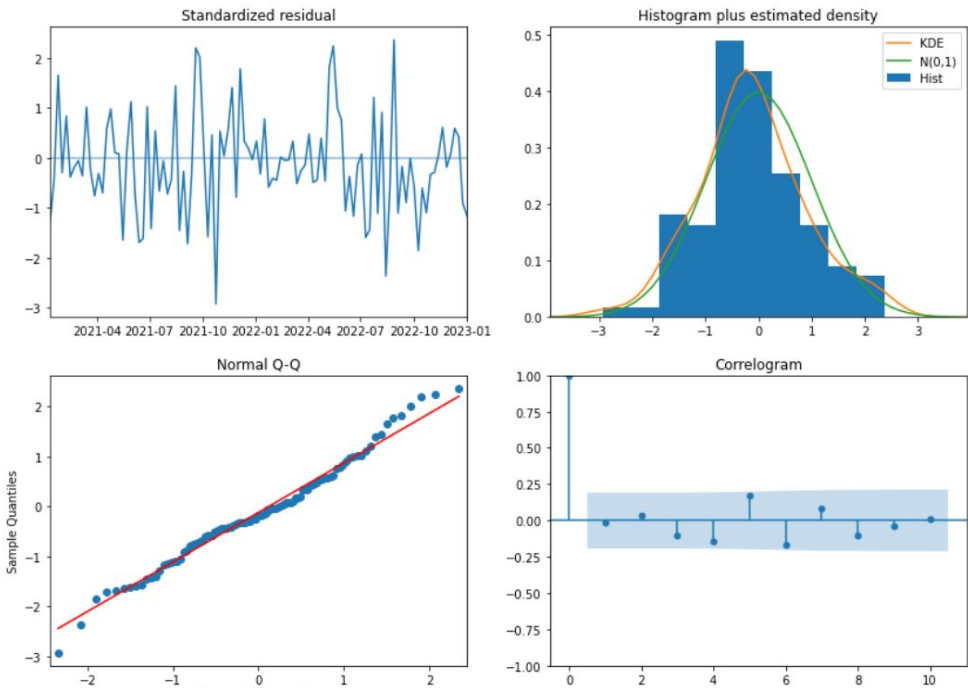


Figura 12: Diagnóstico del modelo.

Cuadro 2: Diferentes modelos propuestos.

Modelos propuestos.		
Modelo.	AIC	BIC
$ARIMA(2, 0, 2)$	1416.567	1434.905
$ARIMA(0, 1, 1)(2, 0, 0)_{52}$	1415.580	1427.779
$ARIMA(1, 0, 0)(1, 1, 0)_{52}$	956.414	964.376
$ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 0)_{52}$	952.448	963.026

6 Análisis del caso de estudio con Redes Neuronales

Se comenzó con un análisis del sistema que ha de utilizar esta red neuronal, así como la división de los datos para el conjunto de datos de entrenamiento y los datos de prueba de la red. El modelo que se decidió utilizar es un modelo secuencial y para la división de los datos, el conjunto de datos de entrenamiento consiste de datos desde la primera semana del año 2020 hasta la última semana del mes de mayo del año 2022 y para los datos de prueba consisten desde la primera semana del mes de junio del año 2022 hasta la última semana del año 2022.

Una vez ya teniendo dividido los datos, estos datos fueron normalizados para optimizar el aprendizaje de la red neuronal. Una vez conseguido, se procedió a diseñar la red neuronal con sus respectivas capas de entrada, salida y en capas ocultas, en la Tabla 3 se da un resumen del diseño de la red neuronal.

Teniendo desarrollada la red neuronal, se entrenó con el primer conjunto de datos para su optimización de parámetros como de estructura interna para encontrar el modelo óptimo mediante RMSE (Error cuadrático medio). Se utilizó el optimizador ADAM, la función de costo RMSE (error cuadrático medio) y un total de 100 épocas para el aprendizaje de la red.

Cuadro 3: Resumen del diseño de la Red Neuronal.

Modelo secuencial.		
Capa (Tipo).	Forma de salida.	Parametros
LSTM	(None, 52, 200)	161600
LSTM	(None, 200)	320800
DENSE	(None, 1)	201

Ya entrenada la red, esta debe ser validada para certificar que es capaz de funcionar con valores no vistos antes, mediante el conjunto de parámetros validados. En la Figura 13 se muestran distintos resultados de tres redes neuronales, seleccionando la última ya que se acoplaba mejor a los datos de prueba.

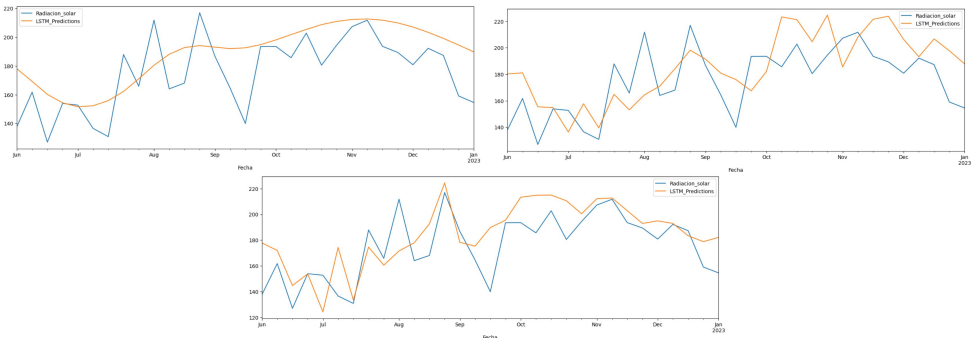


Figura 13: Resultados de distintas redes neuronales.

7 Comparación de la metodología Box-Jenkins y Redes Neuronales

En este trabajo, tal como se mencionó, se abordan el uso de dos metodologías para generar pronósticos, la primera es la metodología Box-Jenkins el cual generó un modelo $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 0)_{52}$ y en la segunda se utilizó una red neuronal recurrente.

En la Tabla 4 y Figura 14, Se muestran los resultados obtenidos para cinco semanas con las dos metodologías, seleccionándose el de menor error relativo. (véase la Tabla 5), siendo en este caso el de Redes neuronales.

Cuadro 4: Resultados.

Pronósticos obtenidos para 2023			
Periodo	Dato real	Box-Jenkins	RNA
08-01-2023	195.08	157.41	171.04
15-01-2023	187.60	148.78	177.33
22-01-2023	187.72	173.11	184.65
29-01-2023	197.75	195.58	198.25
05-02-2023	211.30	206.63	216.73

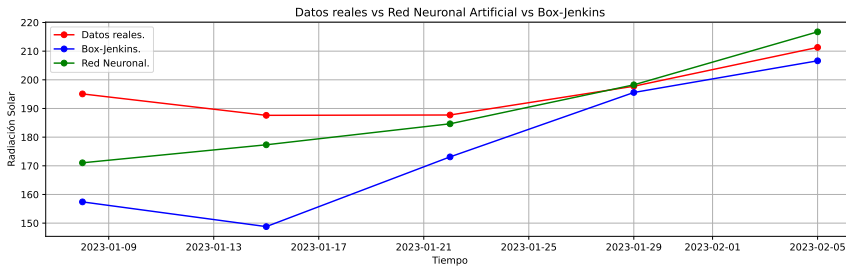


Figura 14: Comparación de resultados en forma gráfica.

Cuadro 5: Errores relativos.

Errores Relativos		
Periodo	Error relativo B-J	Error relativo RNA
08-01-2023	0.193104	0.12321
15-01-2023	0.206932	0.05477
22-01-2023	0.077848	0.01635
29-01-2023	0.011009	-0.0025
05-02-2023	0.022111	-0.0257

8 Conclusiones

Como conclusión a lo expuesto anteriormente, se puede decir que ambas metodologías son buenas ya que generan un pronóstico bastante adecuado a la realidad. Pero existen diferencia entre la metodología de Box Jenkins y la utilización de redes neuronales para pronósticos: entre ellas se destacan que para trabajar con redes neuronales no es necesario probar ninguna distribución en los datos de origen, estos pueden o no tener correlación. Lo anterior se cumple porque las Redes Neuronales Artificiales aprenden sobre sus mismos datos y su propio comportamiento dando una gran ventaja, sin embargo no se puede dejar de lado la metodología que hay detrás de cada una de estas, ya que la metodología Box-Jenkins cuenta con respaldo más sólido desde el punto de vista matemático y las Redes Neuronales Artificiales son aún un método un tanto descriptivo ya que para poder llegar a un pronóstico adecuado, se tuvieron que hacer varios modelos para así determinar al mejor.

El presente trabajo queda abierto para un posible análisis complementario que ayude a mejorar los pronósticos vistos anteriormente, esto es, como realizar otro tipo de análisis alternativo para complementarlo de la mejor manera o incluso realizar otro diseño de red neuronal.

Referencias

- [1] Pérez Amaro, *Procesos auto-recursivos de orden uno, su relación con las martingalas y su aplicación en la predicción de ciclones en México*, Tesis de Licenciatura, 2013.
- [2] IBERDROLA, *Radiación solar: ¿cuál es su impacto sobre el planeta y el ser humano?*, Tomado de <https://www.iberdrola.com/compromiso-social/radiacion-solar> (13/03/2023), 2021.
- [3] Ruelas Santoyo, Edgar Augusto; Laguna González, José Antonio, *Comparación de predicción basada en redes neuronales contra métodos estadísticos en pronósticos de ventas*, Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias, Vol. 4, 2014.

- [4] Ptolomeo UNAM, *Capítulo 2. El potencial de la radiación solar*, Tomado de <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/277/A5.pdf> (13/03/2023).
- [5] Marcelo Martínez, *Radiación Solar, Conceptos y aplicaciones*, Informativo INAI-URURI, Num. 109, 2016.
- [6] González, C. M. P., *Análisis de series temporales: Modelos ARIMA*, Sarrico-on, 2009.
- [7] Bowerman, B. L., O'Connell, R. T., And Koehler, A. B., *Pronósticos, series de tiempo y regresión: Un enfoque aplicado*, CENGAGE Learning, 2007.
- [8] William W. S. Wei, *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, Editorial Pearson Addison Wesley, 2006.
- [9] John Villavicencio, *Introducción a Series de Tiempo*, 1997.
- [10] Gloria Aragón Merino, *Análisis de la radiación solar en el municipio de Tlaxco-Tlaxcala usando la metodología de Box-Jenkins*, Tesis de Licenciatura, 2018.
- [11] Damodar N. Gujarati y Dawn C. Porter, *Econometría*, quinta edición, McGraw-Hill, 2010.
- [12] BBVA, *Machine learning: ¿qué es y cómo funciona?*, Tomado de <https://www.bbva.com/es/machine-learning-que-es-y-como-funciona/> (13/03/2023).
- [13] AWS, S. F., *¿Qué es el machine learning? - Explicación sobre el machine learning empresarial*, Tomado de <https://aws.amazon.com/es/what-is/machine-learning/> (13/03/2023).
- [14] IBM, *What are Neural Networks?*, Tomado de <https://www.iberdrola.com/compromiso-social/radiacion-solar> (13/03/2023), 2021.
- [15] The Math Works, *Long Short-Term Memory (LSTM)*, Tomado de <https://www.ibm.com/topics/neural-networks> (13/03/2023).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Otra Facultad de Otra Institución
Dirección de Otra Institución,
Ciudad y Código Postal

bjuaraz@fcfm.buap.mx
jose.hernandezlopelopel@alumno.buap.mx
ftajonar@fcfm.buap.mx

Geometría

Capítulo 3

Reflexiones y el grupo de Möbius

Agustín Contreras Carreto, Patricia Domínguez Soto y
Lizbeth Rojas Martínez
FCFM, BUAP

Resumen

Las reflexiones son transformaciones geométricas elementales, pero tienen consecuencias importantes; por ejemplo, son necesarias para el estudio geométrico de las transformaciones de Möbius. En este capítulo de divulgación se enuncian varios teoremas y resultados relacionados con estas transformaciones. Se muestra que estas funciones forman un grupo de transformaciones definidas en el plano euclidiano, donde cada una de ellas está generada por composiciones finitas de reflexiones con respecto a líneas o circunferencias.

Se estudiará la geometría y se introducirán las primeras nociones para estudiar la dinámica de las transformaciones de Möbius elementales, a saber, traslaciones, rotaciones y homotecias. Estas transformaciones serán clasificadas como parabólicas, elípticas e hiperbólicas en la notación clásica.

1 Reflexiones

Este capítulo de divulgación está basado en los libros [1], [2], [3], [4], [5] y [6]. Se denotará con \mathcal{L} a una línea recta cualquiera del plano euclidiano, \mathcal{C} a una circunferencia con centro en un punto $O \in \mathbb{R}^2$ y con radio $r > 0$; y AB es la longitud del segmento de recta que va de A a B .

Una **reflexión** con respecto a una recta \mathcal{L} es una transformación $R_{\mathcal{L}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por; $R_{\mathcal{L}}(P) = P'$ tal que el segmento PP' es ortogonal a la línea \mathcal{L} y es bisecado por esta línea, es decir, \mathcal{L} es mediatriz de PP' , véase la Figura 1.

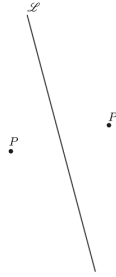


Figura 1: Reflexión con respecto de \mathcal{L}

Observación 1.1. De la geometría clásica dos rectas \mathcal{L} y \mathcal{L}' pueden ser paralelas o bien pueden intersectarse; dependiendo de esto, la composición definirá dos tipos distintos de transformaciones elementales del espacio en \mathbb{R}^2 .

1. Si $P \in \mathcal{L}$, entonces $R_{\mathcal{L}}(P) = P$.
2. Sea $Id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación identidad. Si definimos la composición como:

$$R_{\mathcal{L}}^2 := R_{\mathcal{L}} \circ R_{\mathcal{L}} = Id$$

entonces todos los puntos de \mathbb{R}^2 son puntos fijos, lo que implica que $R_{\mathcal{L}}$ es una **involución**.

3. De la propiedad anterior se sigue que $R_{\mathcal{L}}$ es invertible y que su inversa es $R_{\mathcal{L}}^{-1} = R_{\mathcal{L}}$.

Observar lo siguiente: Otras reflexiones importantes del plano euclidiano \mathbb{R}^2 son las reflexiones respecto a circunferencias.

Definición 1.2. Dada una circunferencia \mathcal{C} con centro O y radio r , Se llama **inversión geométrica** o **reflexión** respecto de la circunferencia \mathcal{C} en \mathbb{R}^2 a la función $R_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que si $P \in \mathbb{R}^2 \setminus O$, entonces $P' = R_{\mathcal{C}}(P) \in \mathbb{R}^2$ el único punto P' que está sobre el rayo \overrightarrow{OP} y satisface la siguiente relación:

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

A P' se le llama el inverso de P respecto a \mathcal{C} .

A la circunferencia \mathcal{C} se le llama **circunferencia de la inversión**; a su centro O , **centro de la inversión**, y a r^2 , **potencia de la inversión**.

Para la construcción del inverso geométrico de un punto mediante la inversión circular $R_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado un punto $P \neq O$ y su imagen $P' = R_{\mathcal{C}}(P)$, se presentan los siguientes dos casos:

Caso 1. Si P es exterior a la circunferencia de inversión \mathcal{C} .

Se traza desde P una recta tangente a \mathcal{C} , denotando por T al punto de tangencia. Luego, se traza la perpendicular al segmento OP que pasa por T ; el pie de esta perpendicular es el punto P' , inverso de P . En efecto, dado que el $\triangle OTP$ es rectángulo en T y el $\triangle OP'T$ es rectángulo en P' , ambos comparten el ángulo en el vértice O . Por el criterio de semejanza ángulo-ángulo (AA), se tiene que $\triangle OTP \sim \triangle OP'T$, de donde:

$$\frac{OP'}{OT} = \frac{OT}{OP} \implies OP \cdot OP' = (OT)^2 = r^2$$

Caso 2. Si P es interior a la circunferencia de inversión \mathcal{C} .

Se traza por P la recta perpendicular al segmento OP , la cual interseca a \mathcal{C} en un punto T . Posteriormente, se construye la recta tangente a la circunferencia en T . El punto donde esta tangente interseca al rayo \overrightarrow{OP} es el punto P' , inverso de P . En este caso, la semejanza se justifica de forma análoga al caso anterior: el $\triangle OTP'$ es rectángulo en T y su altura relativa a la hipotenusa es TP , lo que garantiza que:

$$OP \cdot OP' = (OT)^2 = r^2$$

Observación 1.3. De acuerdo con la definición anterior se puede observar:

- (i) Si $OP > r$, entonces $OP' < r$.
- (ii) Si $OP < r$, entonces $OP' > r$.
- (iii) Si $OP = r$, entonces $OP' = r$. Esto es, \mathcal{C} es invertible bajo $R_{\mathcal{C}}$.
- (iv) Como $OP' = \frac{r^2}{OP}$, si P tiende a cero. Es decir: si OP tiende a infinito. Si OP tiende a infinito, entonces OP' tiende a cero. Entonces, si se añade a \mathbb{R}^2 (o a \mathbb{C}) un punto al que se le llamará “punto al infinito” y se

denotará por ∞ , así, se puede considerar el dominio y el codominio de $R_{\mathcal{C}}$ por $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, de tal manera que $R_{\mathcal{C}}(0) = \infty$ y que $R_{\mathcal{C}}(\infty) = 0$, es decir, $R_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, lo cual resulta un función biyectiva.

De la misma manera que las reflexiones con respecto a líneas, las reflexiones con respecto a circunferencias tienen las siguientes propiedades.

Proposición 1.4.

1. La circunferencia de inversión \mathcal{C} queda fija bajo $R_{\mathcal{C}}$, es decir, si $P \in \mathcal{C}$, entonces $R_{\mathcal{C}}(P) = P$ (\mathcal{C} es invariante puntual bajo $R_{\mathcal{C}}$).
2. La función $R_{\mathcal{C}}$ es una involución, es decir, $R_{\mathcal{C}}^2 = Id$.
3. La función $R_{\mathcal{C}}$ es invertible y su inversa es $R_{\mathcal{C}}^{-1} = R_{\mathcal{C}}$.

De ahora en adelante, se denotará por R una reflexión con respecto a una línea o a una circunferencia. Para especificar qué tipo de reflexión es, se usará la notación $R_{\mathcal{L}}$ para las reflexiones con respecto a una línea y $R_{\mathcal{C}}$ para las reflexiones con respecto a una circunferencia.

2 Reflexión con respecto de una recta

Teorema 2.1. *La reflexión respecto a una recta \mathcal{L} es una colineación; es decir, la imagen de cualquier recta ℓ bajo $R_{\mathcal{L}}$ es también una recta ℓ' .*

Demostración. Sea ℓ una línea.

Caso 1. Si ℓ es paralela a \mathcal{L} , entonces todo punto $P \in \ell$ se refleja en un punto $R_{\mathcal{L}}(P) = P'$, el cual equidista de \mathcal{L} . El lugar geométrico que describen los puntos $P' \in \mathbb{R}^2$ para cada $P \in \ell$ es una línea ℓ' , la cual es paralela a \mathcal{L} , véase la Figura 2.

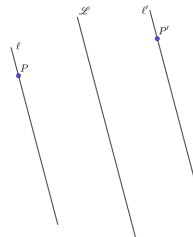


Figura 2: Reflexión de una línea con respecto de \mathcal{L}

Caso 2. Si ℓ interseca a \mathcal{L} , entonces sea P el punto de intersección, como ya se sabe $R_{\mathcal{L}}(P) = P$, por la Proposición 1.4 P es un punto fijo; sean $Q \in \ell \setminus \{P\}$, $Q' = R_{\mathcal{L}}(Q)$ y $\ell' := \overleftrightarrow{PQ'}$. Si $R \in \ell$ y $R' = R_{\mathcal{L}}(R)$, entonces \mathcal{L} es mediatriz del segmento RR' . Sea M es punto medio de RR' tal que $\angle RPM \cong \angle R'PM$ y por razones análogas el $\angle QPM \cong \angle Q'PM$, véase la Figura 3.

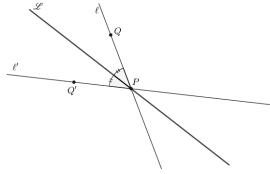


Figura 3: Reflexión de una línea que interseca a \mathcal{L}

Así, $\angle R'PM \cong \angle RPM \cong \angle QPM \cong \angle Q'PM$ porque $R \in \overleftrightarrow{PQ}$, por lo que $R' \in \ell'$, así $R_{\mathcal{L}}(\ell) \subseteq \ell'$ y viseversa $R_{\mathcal{L}}(\ell') \subseteq \ell$, luego $\ell' = R_{\mathcal{L}}^2(\ell) \subseteq R_{\mathcal{L}}(\ell)$, así $\ell' \subseteq R_{\mathcal{L}}(\ell)$, por todo lo anterior se concluye que $\ell' = R_{\mathcal{L}}(\ell)$. □

Para poder hacer el análisis de la reflexión de una línea con respecto a una circunferencia, se necesita el siguiente resultado. Se hará uso de la notación \sphericalangle para denotar un ángulo.

Teorema 2.2. Sea \mathcal{C} una circunferencia en el plano euclidiano, con centro en O y radio r , si $P, Q \in \mathbb{R}^2$ tal que O, P, Q no son colineales; $P' = R_{\mathcal{C}}(P)$ y $Q' = R_{\mathcal{C}}(Q)$ son los respectivos inversos de los puntos P y Q con respecto de la circunferencia \mathcal{C} , entonces $\sphericalangle OP'Q' = \sphericalangle OQP$ y $\sphericalangle OQ'P' = \sphericalangle OPQ$. Véase Figura 4.

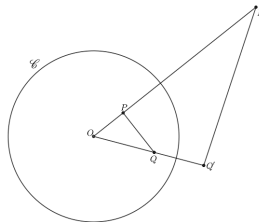


Figura 4: Reflexión de P y Q

Demostración. Como $P' = R_{\mathcal{C}}(P)$ y $Q' = R_{\mathcal{C}}(Q)$

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &= r^2 = OQ \cdot OQ' \\ OP \cdot OP' &= OQ \cdot OQ' \\ \frac{OP}{OQ} &= \frac{OQ}{OP'} \end{aligned}$$

Esto implica que los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OQ'P'$, son semejantes. Por lo que se tiene el resultado. □

Teorema 2.3. *La reflexión $R_{\mathcal{C}}$ de una línea con respecto de una circunferencia \mathcal{C} con centro O y radio r , es una línea o una circunferencia.*

Demostración. Sea \mathcal{L} una línea, se analizarán los siguientes casos:

Caso 1. Si \mathcal{L} es ajena a \mathcal{C} , entonces se traza la línea ortogonal a \mathcal{L} tal que pasa por O e interseca a \mathcal{L} en un punto Q . Sea $P \neq Q$ un punto arbitrario de \mathcal{L} , aplicando la reflexión $R_{\mathcal{C}}$ se tiene que, $R_{\mathcal{C}}(P) = P'$ y $R_{\mathcal{C}}(Q) = Q'$, de ahí que $\triangle OPQ$ y $\triangle OQ'P'$ son semejantes por el teorema anterior.

Como el ángulo $\angle OQP$ es recto, entonces $\angle OP'Q$ es recto también, así que P' está en la circunferencia \mathcal{D} , con diámetro OQ' de esta manera se tiene que $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{D}$. Observar que en la imagen del punto al “infinito” con respecto de la reflexión $R_{\mathcal{C}}$ es el punto O .

Por un argumento análogo y también usando el Teorema 2.3, se tiene $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{L}$. Por (2) de la Proposición 1.4 se tiene que $\mathcal{D} = R_{\mathcal{C}}^2(\mathcal{D}) \subseteq R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$, por tanto $\mathcal{D} = R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})$. También, $\mathcal{L} = R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$.

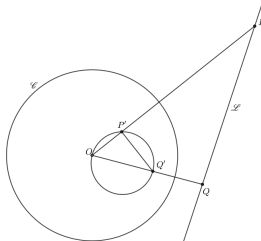


Figura 5: Reflexión de una línea con respecto de \mathcal{C}

A continuación se enuncia dos casos particulares:

Caso 2. Si \mathcal{L} es tangente en P a \mathcal{C} , como $R_{\mathcal{C}}(P) = P$, $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) = \mathcal{D}$, donde \mathcal{D} es la circunferencia con diámetro OP . Por lo tanto $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) = \mathcal{D}$, véase la Figura 6.

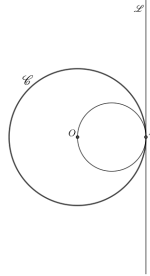


Figura 6: Reflexión de una línea con respecto de \mathcal{C}

Caso 3. Si \mathcal{L} interseca a la circunferencia \mathcal{C} en los puntos P y Q , entonces \mathcal{L} se refleja en una circunferencia \mathcal{D} que pasa por O, P y Q puesto que $R_{\mathcal{C}}(P) = P$ y $R_{\mathcal{C}}(Q) = Q$. Así $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) = \mathcal{D}$, véase la Figura 7.

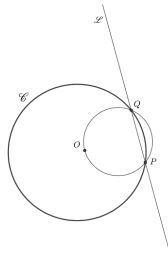


Figura 7: Reflexión de una línea con respecto de \mathcal{C}

Caso 2. Por definición, si $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $P' = R_{\mathcal{C}}(P)$, entonces son colineales, así que si \mathcal{L} pasa por el centro O de la circunferencia \mathcal{C} , entonces $P \in \mathcal{L}$ si y solo si $P' \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, véase la Figura 8. \square

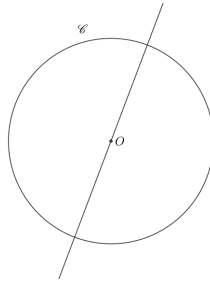


Figura 8: Reflexión de una línea con respecto de \mathcal{C}

Corolario 2.4. *Las líneas paralelas que no pasan por el centro de la circunferencia de reflexión \mathcal{C} , se reflejan en circunferencias que son tangentes en el centro de reflexión, véase la Figura 9.*

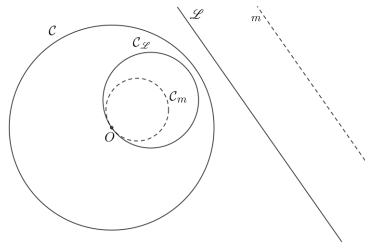


Figura 9: Reflexión de dos líneas con respecto de \mathcal{C}

Demostración. Sean \mathcal{L} y m líneas paralelas que no pasan por el centro de \mathcal{C} . Por el teorema previo, se tiene que $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) = \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ y $R_{\mathcal{C}}(m) = \mathcal{C}_m$, donde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ y \mathcal{C}_m son circunferencias que pasan por el centro de \mathcal{C} . Como \mathcal{L} y m son paralelas, se puede suponer que se intersecan en el punto al infinito¹. De acuerdo con la Observación 1.3, $R_{\mathcal{C}}(\infty) = O$, por lo que se concluye que $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ y \mathcal{C}_m no se intersecan en otro punto salvo en O . Por lo tanto, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ y \mathcal{C}_m son tangentes en O . □

¹Por convención se supondrá que dos líneas paralelas cualesquiera en el plano se intersecan en el punto al infinito ∞ .

3 Reflexiones de circunferencias

Teorema 3.1. *La reflexión de una circunferencia con respecto de una recta \mathcal{L} es una circunferencia.*

Demostración. Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro en O y radio r , se analizarán los siguientes casos.

Caso 1. Si \mathcal{C} no interseca a \mathcal{L} y teniendo en cuenta que $R_{\mathcal{L}}(O) = O'$, entonces para cada punto $P \in \mathcal{C}$ se sigue que $R_{\mathcal{L}}(P) = P'$; y como $R_{\mathcal{L}}$ es una isometría, todos los puntos P' equidistan al punto O' , por lo que el lugar geométrico que describen los puntos $P' \in \mathbb{R}^2$ para cada $P \in \mathcal{C}$ es una circunferencia \mathcal{C}' que no interseca a \mathcal{L} ; véase la Figura 10.

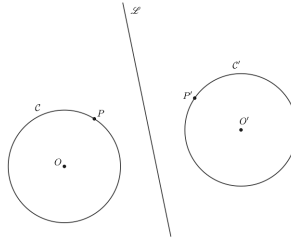


Figura 10: Reflexión de una circunferencia con respecto de \mathcal{L}

Lo anterior es cierto; si $O_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$ es el punto medio del segmento OO' , entonces $OO_{\mathcal{L}} \cong O_{\mathcal{L}}O'$ y $PP_{\mathcal{L}} \cong P_{\mathcal{L}}P'$, donde $P_{\mathcal{L}}$ es el punto medio del segmento PP' , por lo que $PO_{\mathcal{L}} \cong O_{\mathcal{L}}P'$ y, por lo tanto, $OP \cong O'P'$; por el criterio lado-lado-lado, el triángulo $\triangle OPO_{\mathcal{L}}$ es congruente al triángulo $\triangle O'P'O_{\mathcal{L}}$; véase la Figura 11.

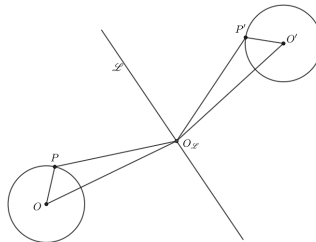


Figura 11: Reflexión de una circunferencia con respecto de \mathcal{L}

Caso 2. Si \mathcal{C} interseca a \mathcal{L} en los puntos P y Q , por definición $R_{\mathcal{L}}(P) = P$ y $R_{\mathcal{L}}(Q) = Q$; sea $R' \in \mathbb{R}^2$, describe una circunferencia que interseca a \mathcal{L} en P y Q ; véase la Figura 12. □

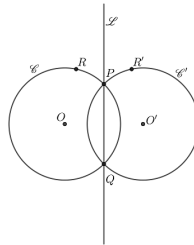


Figura 12: Reflexión de una circunferencia con respecto de \mathcal{C}

Se dice que dos o más circunferencias son **concéntricas** cuando sus centros tienen la misma posición.

Teorema 3.2. *La reflexión $R_{\mathcal{C}}$ de una circunferencia cualquiera \mathcal{D} con respecto de \mathcal{C} una circunferencia con centro en un punto O y radio $r > 0$, es una línea o una circunferencia.*

Demostración. Sea \mathcal{D} una circunferencia, se analizarán los siguientes casos.

Caso 1. Si \mathcal{D} no interseca a \mathcal{C} , entonces se trazan dos líneas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ desde el centro O de la circunferencia \mathcal{C} tal que interseca a \mathcal{D} en los puntos P, Q, R y S . Sean $R_{\mathcal{C}}(P) = P', R_{\mathcal{C}}(R) = R'$ y $R_{\mathcal{C}}(S) = S'$, los puntos imagen con respecto a $R_{\mathcal{C}}$ y sea $\alpha = \angle SPQ$ y $\beta = \angle QRS$, por el resultado que enuncia que un cuadrilátero es cíclico si, solo si cualesquiera dos ángulos opuestos son suplementarios se tiene, $\square PQR S$ es un cuadrilátero cíclico, luego si $\angle OS'R' = \beta$ y $\angle P'Q'Q = \alpha$, se sigue que $\angle R'QP' + \angle P'S'R' = 180^\circ$, porque $\alpha + \beta$ son suplementarios y sus suplementos también lo son, por el resultado enunciado antes sobre cuadrilátero, se tiene que $\square P'S'R'Q'$ es un cuadrilátero cíclico. Por lo tanto la reflexión $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$, con \mathcal{D}' una circunferencia que contiene a P', Q', R' y S' . Observe que \mathcal{D}' no pasa por el centro de \mathcal{C} , véase la Figura 13.

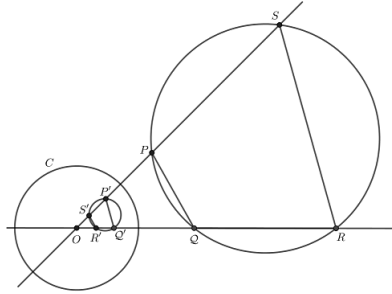


Figura 13: Reflexión de una circunferencia con respecto de \mathcal{C}

Caso 2. Si \mathcal{D} es tangente en el exterior a \mathcal{C} en el punto P , por un argumento similar al caso 1, se tiene que $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ tangente en el interior a \mathcal{C} en el punto P , véase la Figura 14.

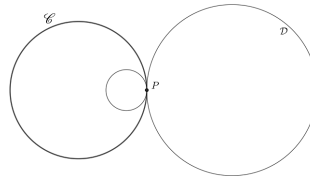


Figura 14: Reflexión de una circunferencia con respecto de \mathcal{C}

Caso 3. Si \mathcal{D} interseca a \mathcal{C} en los puntos P y Q pero no por O , entonces \mathcal{D} se refleja en una circunferencia \mathcal{D}' , es decir, $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ la cual interseca a \mathcal{C} en los puntos P y Q , véase la Figura 15.

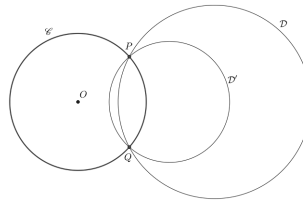


Figura 15: Reflexión de una circunferencia con respecto de \mathcal{C}

Caso 4. Véase la Figura 16, si \mathcal{D} pasa por el centro O de \mathcal{C} , por el Teorema

2.3 y la Proposición 1.4 inciso (ii), se tiene que

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) &= \mathcal{D} \\ R_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})) &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \\ Id(\mathcal{L}) &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \\ \mathcal{L} &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

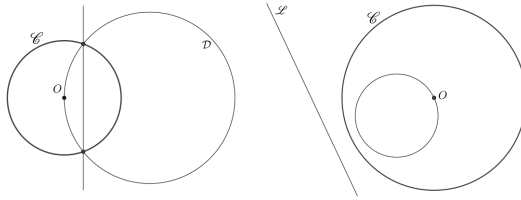


Figura 16: Reflexión de una circunferencia con respecto de \mathcal{C}

Caso 5. Si \mathcal{D} interseca a \mathcal{C} en los puntos P y Q , entonces, por el teorema 2.3 y la Observación 1.3, la imagen $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ es una circunferencia que también interseca a \mathcal{C} en P y Q .

Caso 6. Si \mathcal{D} es una circunferencia concéntrica con \mathcal{C} , sean P un punto cualquiera en \mathcal{D} y $OP = S$ el radio de \mathcal{D} , entonces $R_{\mathcal{C}}(P) = P'$, por lo anterior se tiene;

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &= r^2 \\ S \cdot OP' &= r^2 \\ OP' &= \frac{r^2}{S}. \end{aligned}$$

Es decir, P' está sobre una circunferencia de radio $\frac{r^2}{S}$; véase la imagen 17.

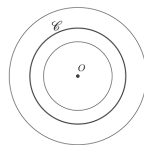


Figura 17: Reflexión de una circunferencia con respecto de \mathcal{C}

Caso 7. Si \mathcal{D} está contenida en \mathcal{C} , que es tangente a \mathcal{C} en un punto P en el exterior de \mathcal{C} , por el Caso 2 de esta prueba, se tiene que $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$, donde \mathcal{D}' es una circunferencia en el exterior de \mathcal{C} , la cual es tangente en un punto P ; entonces

$$\begin{aligned}R_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}')) &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \\ Id(\mathcal{D}') &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \\ \mathcal{D}' &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}).\end{aligned}$$

Así, \mathcal{D} bajo la reflexión $R_{\mathcal{C}}$ es una circunferencia en el exterior de \mathcal{C} , pero es tangente a \mathcal{C} .

Caso 8. Si la circunferencia \mathcal{D} está contenida en el interior de \mathcal{C} , no es concéntrica con esta y contiene al centro de inversión O . Por el teorema 2.3 y la Observación 1.3, su imagen bajo $R_{\mathcal{C}}$ es una recta \mathcal{L} . Dado que la inversión es una involución, es decir, $R_{\mathcal{C}} \circ R_{\mathcal{C}} = Id$, se cumple la siguiente relación:

$$\begin{aligned}R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) &= \mathcal{L} \\ R_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})) &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) \\ (R_{\mathcal{C}} \circ R_{\mathcal{C}})(\mathcal{D}) &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) \\ Id(\mathcal{D}) &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) \\ \mathcal{D} &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que la imagen de la recta \mathcal{L} bajo la inversión es la circunferencia \mathcal{D} .

Caso 9. Si \mathcal{D} es una circunferencia, que pasa por el centro O de \mathcal{C} y por un punto P en \mathcal{C} por el teorema 2.3 y la Observación 1.3, entonces

$$\begin{aligned}R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L}) &= \mathcal{D} \\ R_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}}(\mathcal{L})) &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \\ Id(\mathcal{L}) &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \\ \mathcal{L} &= R_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}).\end{aligned}$$

□

Observación 3.3. Si en la demostración del teorema previo Caso 1, el cuadrilátero $\square PQRS$ en la circunferencia \mathcal{D} en sentido contrario de las manecillas del reloj, a su imagen $\square P'S'R'Q'$ en la circunferencia \mathcal{D}' se le recorre en sentido de las manecillas del reloj.

4 Reflexiones y ángulos

Teorema 4.1. (i) Si dos líneas ℓ y m se intersecan, entonces sus reflexiones con respecto de \mathcal{L} también se intersecan y forman el mismo ángulo que el comprendido entre ℓ y m .

(ii) Si dos circunferencias \mathcal{C} y \mathcal{D} se intersecan, entonces sus reflexiones con respecto de \mathcal{L} también se intersecan y con el mismo ángulo que el comprendido entre \mathcal{C} y \mathcal{D} .

Demostración. (i) Por el teorema 2.1 se sigue que $R_{\mathcal{L}}(\ell) = \ell'$ y $R_{\mathcal{L}}(m) = m'$ con ℓ, m rectas. Sea P el punto de intersección de las líneas ℓ y m , por otro lado $R_{\mathcal{L}}(P) = P'$ es el único punto tal que es intersección de las líneas ℓ' y m' .

Sean α el ángulo que forman ℓ y m , Q un punto en ℓ y R un punto en m y $R_{\mathcal{L}}(Q) = Q'$, $R_{\mathcal{L}}(R) = R'$, como $R_{\mathcal{L}}$ es una isometría, se sigue que $QR = Q'R'$, $PR = PR'$ y $PQ = P'Q'$, luego por el criterio lado-lado-lado, el triángulo $\triangle PQR$ es congruente al triángulo $\triangle P'R'Q'$, de ahí que, $\angle RPQ$ es congruente con $\angle R'P'Q'$, véase la Figura 18.

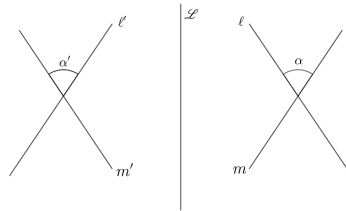


Figura 18: Reflexión de dos líneas intersectadas con respecto de \mathcal{L}

(i) Se tienen los siguientes casos:

Caso 1. Si \mathcal{C} interseca a \mathcal{D} en solo un punto P , entonces por el teorema 3.1 se sigue que $R_{\mathcal{L}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ y $R_{\mathcal{L}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ son circunferencias; como $P \in \mathcal{C}$ y $P \in \mathcal{D}$, por lo que $R_{\mathcal{L}}(P) = P'$ es el único punto de ambas circunferencias, es decir, $P' \in \mathcal{C}'$ y $P' \in \mathcal{D}'$ (Si $Q' \in \mathcal{C}' \cap \mathcal{D}'$, entonces existe $Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, tal que $R_{\mathcal{L}}(Q) = Q'$ por tanto $Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{P\}$. Así, $Q = P$). Luego trazando la recta $\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}$ que pasa por los centros de ambas circunferencias, trazando la tangente ℓ_P a \mathcal{C} y \mathcal{D} por el punto P , por lo que el ángulo entre las líneas $\ell_{O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}}$ y ℓ_P es un ángulo recto. Por la primera parte del teorema se sigue que el

ángulo entre las rectas $R_{\mathcal{L}}(\ell_{O_C O_D}) = \ell'_{O'_C O'_{D'}}$ y $R_{\mathcal{L}}(\ell_P) = \ell'_{P'}$, también forman un ángulo recto.

En pocas palabras las tangentes a \mathcal{C}' y \mathcal{D}' en el punto P' coinciden, la cual es perpendicular a $\ell'_{O'_C O'_{D'}}$, véase la Figura 19.

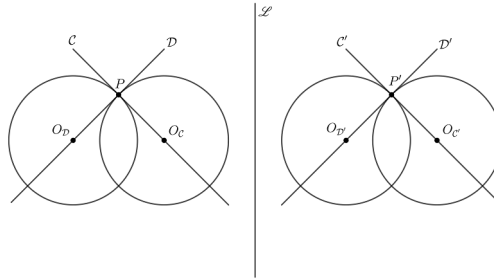


Figura 19: Reflexión de dos circunferencias que se intersectan con respecto de \mathcal{C}

Caso 2. Si \mathcal{C} interseca a \mathcal{D} en dos puntos P y Q , se sigue que $R_{\mathcal{L}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ y $R_{\mathcal{L}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$, como $P, Q \in \mathcal{C}$ y $P, Q \in \mathcal{D}$, se tiene que $R_{\mathcal{L}}(P) = P'$ y $R_{\mathcal{L}}(Q) = Q'$ tal que $P', Q' \in \mathcal{C}'$ y $P', Q' \in \mathcal{D}'$.

Se trazan las líneas tangentes ℓ_C y ℓ_D a \mathcal{C} y \mathcal{D} respectivamente en el punto P , luego se traza la recta que pasa por los centros de las dos circunferencias, la cual se denotará por; $\ell_{O_C O_D}$, de ahí que la recta $\ell_{O_C O_D}$ interseca a ℓ_C como a ℓ_D en los puntos A y B respectivamente y también forman un ángulo θ entre las rectas ℓ_D y ℓ_C y un ángulo α entre las rectas $\ell_{O_C O_D}$ y ℓ_C , por último un ángulo γ entre las líneas $\ell_{O_C O_D}$ y ℓ_D , por el teorema 2.1, cada recta es enviada bajo $R_{\mathcal{L}}$ en otra recta, es decir, $R_{\mathcal{L}}(\ell_{O_C O_D}) = \ell'_{O'_C O'_{D'}}$, $R_{\mathcal{L}}(\ell_C) = \ell'_C$ y $R_{\mathcal{L}}(\ell_D) = \ell'_{D'}$, por la primera parte de este teorema se sigue que los ángulos entre las rectas; $\ell'_{O'_C O'_{D'}}$ y $\ell'_{D'}$ es γ , $\ell'_{O'_C O'_{D'}}$ y ℓ'_C es α , por último ℓ'_C y $\ell'_{D'}$ es θ , por lo que ℓ'_C y $\ell'_{D'}$ son rectas tangentes a \mathcal{C}' y \mathcal{D}' en el punto P respectivamente, por un razonamiento similar se concluye el resultado para el punto Q . Se tiene el resultado. □

Teorema 4.2. Si dos rectas ℓ y m se intersecan en un punto distinto del centro de inversión, entonces el ángulo de intersección en ese punto es igual al ángulo de intersección de las circunferencias reflejadas en el reflejado del punto de intersección, véase la Figura 20.

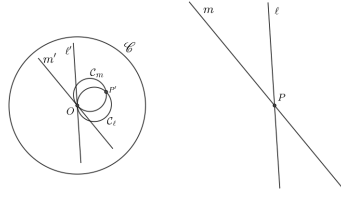


Figura 20: Reflexión de dos líneas intersectadas con respecto de \mathcal{C}

Demostración. Sean rectas ℓ y m que se intersectan en un punto $P \neq O$ y sea γ el ángulo de la intersección de las rectas, entonces la recta ℓ se refleja en una circunferencia, es decir, $R_{\mathcal{C}}(\ell) = \mathcal{C}_{\ell}$ la cual pasa por O , de manera análoga para la recta m se tiene que $R_{\mathcal{C}}(m) = \mathcal{C}_m$ la cual también pasa por el origen. Sean $P' = R_{\mathcal{C}}(P)$ tal que $P' \in \mathcal{C}'$ y $P' \in \mathcal{D}'$ y α el ángulo formado entre las dos circunferencias en el punto P' (el formado por las paralelas tangentes a \mathcal{C}' y \mathcal{D}' en O o en P'). Trazando la tangentes ℓ' y m' a \mathcal{C}' y \mathcal{D}' en el punto O , son paralelas a ℓ y m respectivamente. El ángulo formado entre ℓ' y m' , es decir, α es el mismo que el formado entre ℓ y m . □

Observación 4.3. (a) *Los resultados anteriores muestran que las reflexiones preservan ángulos.*

(b) *El ángulo en el vértice P' va en dirección contraria al ángulo en el vértice P , es decir, si α se orienta de ℓ a m , entonces α' se orienta en sentido contrario, de m a ℓ .*

Proposición 4.4. *Una circunferencia \mathcal{C} que interseca a la circunferencia de inversión \mathcal{C} se refleja en otra circunferencia que pasa por los puntos de intersección y con el mismo ángulo.*

Demostración. Observe que los puntos de intersección P y Q de \mathcal{C} y \mathcal{C} quedan fijos bajo la reflexión $R_{\mathcal{C}}$, luego por el teorema 3.2, se tiene, $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, con \mathcal{C}' una circunferencia que pasa por los puntos $R_{\mathcal{C}}(P) = P'$ y $R_{\mathcal{C}}(Q) = Q'$, luego por el teorema 4.1 \mathcal{C}' y \mathcal{C} preservan el mismo ángulo que \mathcal{C} y \mathcal{C} . □

Corolario 4.5. *Si dos circunferencias \mathcal{C} y \mathcal{D} se intersectan en un punto P , entonces se reflejan conservando el ángulo de intersección.*

Demostración. Por el teorema 4.2 y la proposición previa se sigue el resultado. □

Dos circunferencias se dicen **ortogonales** si son secantes en un punto común (de intersección) y sus tangentes respectivas son perpendiculares. Notar que, por la propiedad de que el radio al punto de tangencia es perpendicular a la tangente, la definición es equivalente a decir que sus radios respectivos en uno de los puntos de intersección son perpendiculares.

Teorema 4.6. *Una circunferencia \mathcal{C} ortogonal a \mathcal{C} , se refleja en sí misma, véase la Figura 21.*

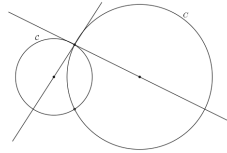


Figura 21: Reflexiones y ortogonalidad

Demostración. Se tiene que $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ pasa por los puntos de intersección $R_{\mathcal{C}}(P) = P$ y $R_{\mathcal{C}}(Q) = Q$, por lo que la reflexión $R_{\mathcal{C}}$ conserva el ángulo, por lo que \mathcal{C} se refleja en sí mismo, □

Teorema 4.7. *Si \mathcal{C} es ortogonal a \mathcal{C} con centro O y radio r , entonces cada rayo que parte de O interseca a \mathcal{C} en dos puntos P y Q , los envía en sus puntos de reflexión. Si \mathcal{C} es una circunferencia que pasa por un punto y su respectivo punto de reflexión, entonces \mathcal{C} es ortogonal a \mathcal{C} .*

Demostración. Por el teorema previo, si \mathcal{C} y \mathcal{C} son dos circunferencias ortogonales, entonces $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, esto implica que todo rayo que parte de O interseca a \mathcal{C} en P de ahí que su punto de reflexión es $R_{\mathcal{C}}(P) = P'$, el cual está sobre el mismo rayo, véase la Figura 22.

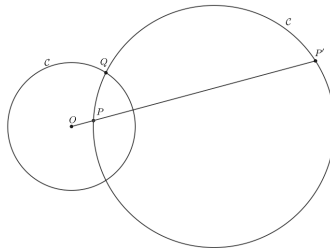


Figura 22: Reflexiones y ortogonalidad

Si $P' = R_{\mathcal{C}}(P)$ y \mathcal{C} es una circunferencia que pasa por los puntos P y P' e interseca a \mathcal{C} en un punto Q , entonces $OP \cdot OP' = r^2$, como $OQ = r$, se sigue que OQ es tangente a \mathcal{C} en el punto Q , por lo tanto \mathcal{C} y \mathcal{C} son ortogonales. \square

5 Reflexiones de circunferencias coaxiales

Se han mencionado algunos resultados sobre las reflexiones con respecto a una línea o una circunferencia. Por lo que en esta sección se analizará el comportamiento de la reflexión con respecto a circunferencias que pertenecen a las diferentes familias coaxiales.

Para el siguiente análisis, se definirá a \mathcal{F} como la familia de circunferencias coaxiales que intersecan en dos puntos, siendo \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos circunferencias de dicha familia.

Sea \mathcal{G} la familia ortogonal a \mathcal{F} , se analizarán los siguientes casos.

Caso 1. Si se refleja a \mathcal{C} con respecto a \mathcal{C}' , entonces $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}''$ pertenece a la familia de \mathcal{F} ya que los puntos de intersección A y B quedan fijos bajo la reflexión $R_{\mathcal{C}}$, por la Observación 1.2, véase la Figura 23.

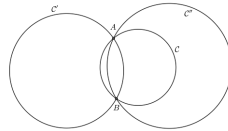


Figura 23: Reflexión de \mathcal{C} con respecto a \mathcal{C}' .

Caso 2. La circunferencia \mathcal{C}'' que biseca el ángulo formado por las circunferencias \mathcal{C} y \mathcal{C}' cumple que $R_{\mathcal{C}''}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ y $R_{\mathcal{C}''}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$ con \mathcal{C} y \mathcal{C}' en la familia \mathcal{G} , debido a que $R_{\mathcal{C}''}$ es inyectiva, véase la Figura 24

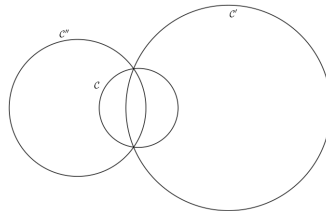


Figura 24: Reflexión de \mathcal{C} con respecto a \mathcal{C} y \mathcal{C}' .

Caso 3. Si \mathcal{C} es un elemento de la familia \mathcal{F} y \mathcal{D} es algún elemento de la familia ortogonal a \mathcal{G} , entonces, por el teorema 4.6, se tiene $R_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$; véase la Figura 25.

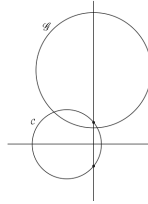


Figura 25: Reflexión de \mathcal{C} con respecto de la familia \mathcal{G} .

Caso 4. Si se refleja a un elemento de la familia \mathcal{G} con respecto a otro miembro de su misma familia, entonces por el teorema 3.2, Caso 1, se refleja en otro miembro de \mathcal{G} , puesto que es una familia ajena, véase la Figura 26.

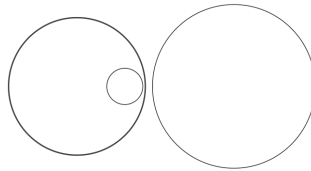


Figura 26: Reflexión de la familia \mathcal{G} con respecto de sí misma.

Caso 5. Si se refleja un elemento de la familia \mathcal{G} con respecto a un miembro \mathcal{C} de \mathcal{F} , entonces se refleja en sí mismo, esto se sigue por el teorema 4.6; véase la Figura 27.

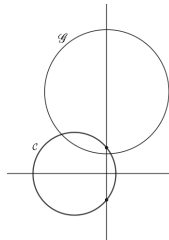


Figura 27: Reflexión de \mathcal{C} de la familia \mathcal{G} con respecto de la familia \mathcal{F} .

Con base en todo lo anterior, se pueden definir las transformaciones de Möbius en el plano Euclidiano.

Definición 5.1. *Una transformación de Möbius euclidiana general en \mathbb{R}^2 , es una composición finita de reflexiones con respecto de líneas o circunferencias. Al conjunto de todas las transformaciones de Möbius euclidianas generales se denotará por $Mob(\mathbb{R}^2)$.*

Teorema 5.2. *El conjunto de todas las transformaciones de Möbius $Mob(\mathbb{R}^2)$ forman un grupo con la composición.*

Demostración. Cerradura. Si $M_1, M_2 \in Mob(\mathbb{R}^2)$ tal que $M_1 = R_S \circ \dots \circ R_1$ y $M_2 = R'_T \circ \dots \circ R'_1$, entonces $M_1 \circ M_2 = R_S \circ \dots \circ R_1 \circ (R'_T \circ \dots \circ R'_1) \in Mob(\mathbb{R}^2)$.

Asociativa. Si $M_1, M_2, M_3 \in Mob(\mathbb{R}^2)$, entonces $(M_1 \circ M_2) \circ M_3 = M_1 \circ M_2 \circ M_3 = M_1 \circ (M_2 \circ M_3)$.

Elemento neutro. La transformación $Id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación de Möbius euclidiana general definida por: $Id := R^2$, donde R es una reflexión de línea o de una circunferencia.

Elemento inverso. Si $M \in Mob(\mathbb{R}^2)$, entonces existe $M' \in Mob(\mathbb{R}^2)$ tal que $M \circ M' = M' \circ M = Id$. Se denota a M' como M^{-1} y se llama inversa de M . Observe que si M es la composición $R_S \circ \dots \circ R_1$, entonces $M^{-1} = R_1 \circ \dots \circ R_S$.

Así, $(Mob(\mathbb{R}^2), \circ)$ es un grupo. \square

A partir de ahora, las circunferencias y líneas con el punto al infinito serán llamadas sólo circunferencias.

Teorema 5.3. *(i) Las transformaciones de Möbius euclidianas generales, envían circunferencias en circunferencias.*

(ii) Las transformaciones de Möbius euclidianas generales conservan ángulos.

Demostración. Para (i), por los Resultados 1.3 y 2.1 y el teorema 5.2 se sigue el resultado. Para (ii), por la primera parte de este teorema y por el teorema 4.1, se sigue el resultado. \square

6 La acción de Möbius euclidiano $Mob_+(\mathbb{R}^2)$

Transformaciones de Möbius elementales

En esta sección se realizará la descripción de tres tipos elementales de transformaciones de Möbius, las cuales se expresan en términos de traslaciones, rotaciones y homotecias. Estas transformaciones ya se analizaron de manera individual en el plano complejo, pero en el plano euclidiano son muy sencillas de entender y también tienen la propiedad de que sus composiciones definen otras transformaciones; sin embargo, sus propiedades geométricas son más intrincadas que las elementales.

Antes de describir estas transformaciones, se darán algunas definiciones generales que ayudarán a describir las propiedades dinámicas de dichas transformaciones.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación de Möbius y P un punto en \mathbb{R}^2 . Se define la **n -ésima iteración** de F como $F^n := F \circ \dots \circ F$, con n en los enteros. Esto es, componer F con ella misma n veces. Obsérvese que si $n < 0$, como F es invertible, entonces $F^n = F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}$.

Definición 6.1. La *órbita hacia adelante* de un punto $P \in \mathbb{R}^2$ bajo F es el conjunto:

$$\mathcal{O}_F(P) := \{F^n(P) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Transformaciones parabólicas

Sean \mathcal{L} y ℓ dos líneas paralelas en \mathbb{R}^2 . La transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como la composición de las reflexiones $R_{\mathcal{L}}$ con R_{ℓ} , se llama **parabólica**. Esto es $T := R_{\ell} \circ R_{\mathcal{L}}$.

Bajo esta transformación, a un punto $P \in \mathbb{R}^2$ se le asocia un punto $P'' = T(P) \in \mathbb{R}^2$, el cual resulta de trasladar a P en la dirección ortogonal a las líneas dadas a partir de P . Observe que, si $R_{\mathcal{L}}(P) = P'$ y $R_{\mathcal{L}}(P') = P''$, entonces la magnitud del segmento PP'' es el doble de la distancia entre \mathcal{L} y ℓ , debido a que las reflexiones son isometrías; véase la Figura 28.

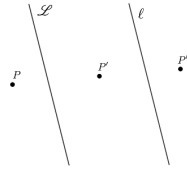


Figura 28: Transformación parabólica

Sea \mathcal{L}' la reflexión de \mathcal{L} con respecto a ℓ . Si las dos líneas \mathcal{L} y ℓ son verticales y están separadas por la distancia $\frac{1}{2}$. Si se denota la composición $R_\ell \circ R_{\mathcal{L}}$ por T_1 , en este caso, el desplazamiento de cualquier punto $P \in \mathbb{R}^2$ se da en la dirección horizontal y perpendicular a \mathcal{L} y ℓ con una distancia de una unidad.

La transformación T_1 se puede describir como $T_1(P) = P + 1$, donde 1 es la magnitud de un segmento fijo perpendicular a \mathcal{L} y ℓ , determinado por las líneas \mathcal{L} y \mathcal{L}' . Además, T_1 es invertible y su inversa está dada por; $T_1^{-1}(P) = P - 1$.

La imagen de \mathcal{L} bajo T_1 es \mathcal{L}' . A la región determinada por las líneas \mathcal{L} y \mathcal{L}' (**sin incluir las líneas**) se le llamará un **dominio (o región) fundamental** para la acción de la transformación T_1 en \mathbb{R}^2 .

Intuitivamente, por la acción de T_1 en \mathbb{R}^2 se referirá a la forma en que T_1 “mueve” a los puntos en \mathbb{R}^2 a través de sus órbitas. Cada elemento de la órbita de un punto $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{T_1^n(\mathcal{L}) : n \in \mathbb{Z}\}$ está en una única “franja” determinada por la región fundamental al aplicarle T_1 reiteradamente, véase la Figura 29.



Figura 29: Región fundamental de una transformación parabólica

Sea $\mathcal{F} := \{T_1^n(\mathcal{L}) : n \in \mathbb{Z}\}$ la familia de rectas verticales determinada como las imágenes de \mathcal{L} bajo iteraciones de T_1 , se tiene que \mathcal{F} es invariante (como familia) bajo la acción de T_1 .

Si m es una recta ortogonal a \mathcal{L} , entonces m es invariante bajo la acción de T_1 y m es ortogonal a todos los miembros de \mathcal{F} ; esto implica que la familia

$\mathcal{G} := \{m : m \perp \mathcal{F}\}$ es invariante bajo la acción de T_1 y es precisamente la familia ortogonal de \mathcal{F} , véase la Figura 30.

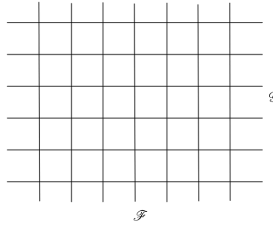


Figura 30: Familias invariantes bajo una transformación parabólica

Las líneas paralelas se intersectan en el punto al infinito; entonces, estas familias \mathcal{G} y \mathcal{F} son familias de “circunferencias” coaxiales tangentes, donde una familia es ortogonal a la otra y se intersecta en el punto al infinito. Estas familias de “circunferencias” que se intersectan en cualquier otro punto $Q \in \mathbb{R}^2$ corresponden exactamente a las familias de circunferencias coaxiales tangentes; véase la Figura 31.

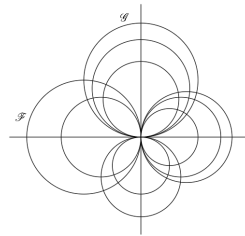


Figura 31: Familias coaxiales tangentes \mathcal{F} , \mathcal{G} y sus ejes radicales

7 Transformaciones elípticas

Si las líneas \mathcal{L} y ℓ se intersecan en un punto $O \in \mathbb{R}^2$. La transformación $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como la composición de las reflexiones $R_{\mathcal{L}}$ y R_{ℓ} se llama **elíptica**. Esto es, $R := R_{\ell} \circ R_{\mathcal{L}}$.

Esta transformación asocia a cada punto P de \mathbb{R}^2 a un punto $P'' = R(P) \in \mathbb{R}^2$, el cual resulta de rotar a P alrededor de O un ángulo igual al doble de la magnitud del ángulo determinado por las líneas \mathcal{L} y ℓ ; véase la Figura 32.

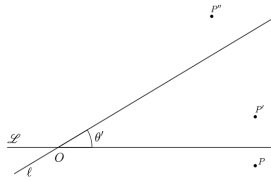


Figura 32: Transformación elíptica

Supóngase que entre \mathcal{L} y ℓ se forma un ángulo de $\frac{\theta}{2}$ al intersecarse en O . Si P es un punto que no está en \mathcal{L} y α , el ángulo entre \mathcal{L} y \overrightarrow{OP} es tal que $R_{\mathcal{L}}$ envía P en P' y el ángulo entre \mathcal{L} y $\overrightarrow{OP'}$ es también α . Si $R_{\mathcal{L}}(P') = P''$ y el ángulo entre $m' := \overrightarrow{OP'}$ y ℓ es β , entonces el ángulo entre $m'' := \overrightarrow{OP''}$ y ℓ también es β . En suma, $\angle POP'' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = \theta$, es decir, $R_{\ell} \circ R_{\mathcal{L}}$ es una rotación a la que se denotará por; R_{θ} . En resumen, todo punto $P \in \mathbb{R}^2$ rota un ángulo θ con respecto a O . Más aún, las imágenes de P bajo iteraciones de R_{θ} están sobre la circunferencia con centro O y radio OP .

Observación 7.1. *Es importante saber, si $\theta := \frac{2p\pi}{q}$ con p y q coprimos, entonces las órbitas de los puntos en \mathbb{R}^2 bajo las iteraciones de R_{θ} son finitas por lo que es posible determinar una región fundamental para la acción de R_{θ} . Es decir, si $\theta = \alpha\pi$ y $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces las órbitas de los puntos son infinitas y densas² en las circunferencia que las contiene. Por lo que en este caso no es posible determinar una región fundamental.*

Supóngase que $\theta = \frac{2p\pi}{q}$, para algún $q > 1$, y se denotará por \mathcal{L}' a la imagen de \mathcal{L} bajo R_{θ} . Como las órbitas de los puntos en \mathbb{R}^2 son finitas de acuerdo con la observación previa, se sigue que el sector circular determinado por las líneas \mathcal{L} y \mathcal{L}' es una región fundamental para la acción de la transformación R_{θ} en \mathbb{R}^2 ; véase la Figura 33.

²Intuitivamente, el concepto de densidad se puede interpretar como que los puntos de las órbitas “lleen” la circunferencia que las contiene.

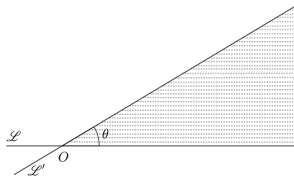


Figura 33: Reflexión fundamental de una transformación elíptica

Sea $\mathcal{F} := \{R_\theta^n(\mathcal{L}) : n \in \mathbb{Z}\}$ la familia de rayos que parten de O determinada por las imágenes de \mathcal{L} bajo iteraciones de R_θ , por lo que \mathcal{F} es invariante (como familia) bajo la acción de R_θ .

Si \mathcal{C} es una circunferencia con centro en O , entonces \mathcal{C} es invariante bajo la acción de R_θ y \mathcal{C} es ortogonal a todos los miembros de \mathcal{F} , por lo que la familia de circunferencias $\mathcal{G} := \{\mathcal{C} : \mathcal{C} \text{ es una circunferencia con centro en } O\}$ es invariante bajo la acción de R_θ y es la familia ortogonal de \mathcal{F} ; véase la Figura 34.

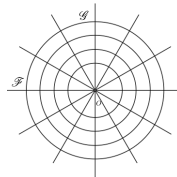


Figura 34: Familias invariantes bajo una transformación elíptica

Observación 7.2. *Las líneas que pasan por O se están intersectando en el punto al infinito, entonces estas familias son familias de circunferencias coaxiales mutuamente ortogonales. Esto es, la familia \mathcal{F} corresponde a una familia coaxial secante que se interseca en los puntos O e ∞ y la familia \mathcal{G} es la respectiva familia coaxial de circunferencias ajenas ortogonales a la familia a \mathcal{F} , véase la Figura 35.*

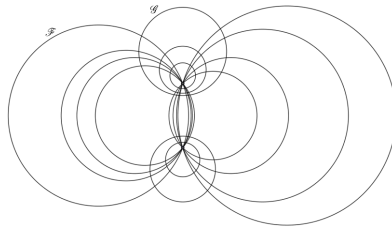


Figura 35: Familias coaxiales \mathcal{F} y \mathcal{G}

Transformaciones hiperbólicas

Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos circunferencias concéntricas en \mathbb{R}^2 con centro en O y r, r' sus radios, respectivamente, tales que $r < r'$. La transformación $H : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ definida como la composición de las reflexiones $R_{\mathcal{C}}$ y $R_{\mathcal{D}}$ se llama **hiperbólica**. Esto es, $H := R_{\mathcal{D}} \circ R_{\mathcal{C}}$.

A un punto $P \in \mathbb{R}^2$ se le asocia, bajo esta transformación, un punto $P'' = H(P) \in \mathbb{R}^2$, el cual resulta de trasladar a P un segmento cuya magnitud es proporcional al cuadrado del cociente de los radios $(\frac{r'}{r})^2 > 1$ y en la misma dirección que OP ; véase la Figura 36.

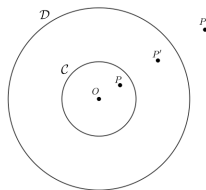


Figura 36: Transformación hiperbólica

Sea $\mathcal{C}' = R_{\mathcal{D}}(\mathcal{C})$; las circunferencias \mathcal{C} y \mathcal{D} son concéntricas y de radios α y 1 respectivamente, con $0 < \alpha < 1$. Se define a $\lambda := \frac{1}{\alpha^2}$ y a esta transformación se le denotará por H_{λ} . En este caso, cualquier punto $P \in \mathbb{R}^2$ se desplaza en la dirección OP al punto $\lambda \cdot OP$. Se puede describir a la transformación H_{λ} como $H_{\lambda}(P) = \lambda \cdot OP$. Además, H_{λ} es invertible y su inversa está dada precisamente por $H_{\lambda}^{-1}(P) = (\frac{1}{\lambda}) \cdot P$.

La imagen de \mathcal{C} bajo H_{λ} es \mathcal{C}' . El anillo determinado por las circunferencias \mathcal{C} y \mathcal{C}' es una región fundamental para la acción de la transformación H_{λ} en \mathbb{R}^2 ; véase la Figura 37.

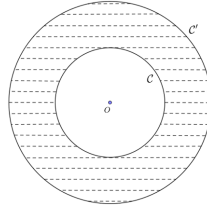


Figura 37: Región fundamental de una transformación hiperbólica

Sea $\mathcal{F} := \{H_\lambda^n(\mathcal{C}) : n \in \mathbb{Z}\}$ la familia de circunferencias concéntricas con \mathcal{C} determinada por las imágenes de \mathcal{C} bajo iteraciones de H_λ , por lo que \mathcal{F} es invariante (como familia) bajo la acción de H_λ .

Si ℓ es un rayo que parte de O , entonces ℓ es invariante bajo la acción de H_λ y es ortogonal a todos los miembros de \mathcal{F} , con lo que la familia $\mathcal{G} := \{\ell : \ell \text{ rayo que parte de } O\}$ es invariante bajo la acción de H_λ y es la familia ortogonal a \mathcal{F} ; véase la Figura 38.

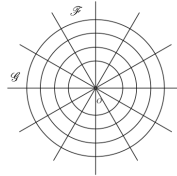


Figura 38: Familias invariantes bajo una transformación hiperbólica

Observación 7.3. *Las líneas que pasan por O también se están intersecando en el punto al infinito, entonces estas familias son familias de circunferencias coaxiales secantes. La familia \mathcal{F} corresponde a un familia coaxial ajena y la familia \mathcal{G} corresponde a una familia de circunferencias coaxial secante en los puntos O e ∞ (basta unir sus rayos opuestos), véase la Figura 39.*

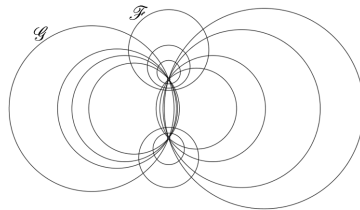


Figura 39: Familias coaxiales \mathcal{F} y \mathcal{G}

Transformaciones loxodrómicas

Se le llama transformación **loxodrómica** a la composición de una transformación elíptica R_θ con una transformación hiperbólica H_λ . Esto es, $L_{\lambda,\theta} := H_\lambda \circ R_\theta$.

Una transformación loxodrómica asocia a un punto $P \in \mathbb{R}^2$ un punto $P'' = L_{\lambda,\theta}(P) \in \mathbb{R}^2$ que resulta de expandir el segmento OP por un factor $\lambda > 1$ en la misma dirección que OP y de rotar P' un ángulo θ con respecto a O . Observe que:

$$L_{\lambda,\theta} := R_\theta \circ H_\lambda = H_\lambda \circ R_\theta.$$

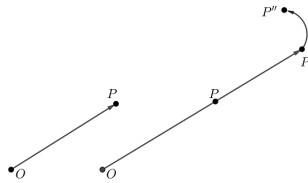


Figura 40: El punto P expandido λ y rotación θ

Véase la imagen 40, si a partir del punto P'' repetimos el proceso de rotar el ángulo θ y expandir un factor λ , se obtiene otro punto en el plano, el cual se puede volver a expandir λ y rotar θ . Habiendo realizado este proceso varias veces, se puede observar que cada punto del plano tiene una órbita contenida en una trayectoria espiral.

Acción de subgrupos elementales

Teorema 7.4. *Si una reflexión $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ invierte la orientación de los ángulos, entonces una composición par de transformaciones de Möbius euclidiana general conserva la orientación de los ángulos.*

Si se consideran únicamente las composiciones pares de transformaciones de Möbius generales como subconjunto de todas las transformaciones de Möbius generales, entonces es un grupo de transformaciones; en efecto, la composición de un número par de transformaciones es otra transformación par, por lo cual la operación de composición es cerrada y, por el teorema previo, las transformaciones pares preservan la orientación; por tanto, pertenecen al subconjunto; por el mismo argumento, allí se encuentra la transformación

identidad y la inversa de una transformación dada. Este grupo se llamará el grupo de Möbius euclidiano y se denotará por $Mob_+(\mathbb{R}^2)$.

Definición 7.5. Una **acción** de subgrupo de transformaciones, de Möbius euclidianas sobre el espacio de euclidiano \mathbb{R}^2 , se define por

$\rho : Mob_+(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\rho(\gamma, P) = \gamma \cdot P := \gamma(P)$, donde P es un punto de \mathbb{R}^2 y $\gamma \in Mob_+(\mathbb{R}^2)$, satisface lo siguiente:

(i) $Id \cdot P = P$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $(\gamma_2 \gamma_1) \cdot P = \gamma_2 \cdot (\gamma_1 \cdot P)$, para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in Mob_+(\mathbb{R}^2)$ y para todo $P \in \mathbb{R}^2$.

En este sentido, se dice que $Mob_+(\mathbb{R}^2)$ actúa (por la izquierda) en \mathbb{R}^2 ; se supondrá que Γ es un subgrupo de $Mob_+(\mathbb{R}^2)$ “discreto” (es decir, para cada $P \in \Gamma$, $\{P\} = A \cap \Gamma$, donde A es un abierto en \mathbb{R}^2).

Definición 7.6. Sea $p \in \mathbb{R}^2$, se llama **órbita** de P bajo la acción de Γ como $\mathcal{O}_\Gamma(P) = \Gamma \cdot P := \{\gamma(P) | \gamma \in \Gamma\}$.

La órbita de P es un subconjunto discreto del plano formado por la imagen de P bajo los distintos elementos de Γ . Por lo que se puede definir la relación \sim en \mathbb{R}^2 como; $P \sim Q$ si y solo si existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $Q = \gamma(P)$; más aún, \sim es una relación de equivalencia.

En este caso, la relación de equivalencia definida a través de las órbitas de la acción del grupo Γ y la clase de equivalencia de un punto P , bajo esta relación, corresponde a la órbita de P bajo la acción de Γ . Por lo cual, las Γ -órbitas determinan una partición de \mathbb{R}^2 en subconjuntos ajenos; serán denotadas por \mathbb{R}^2/Γ al conjunto de todas las órbitas de puntos en \mathbb{R}^2 bajo la acción de Γ , es decir,

$$\mathbb{R}^2/\Gamma := \{\mathcal{O}_\Gamma(P) : P \in \mathbb{R}^2\}$$

En general, \mathbb{R}^2/Γ es distinta de \mathbb{R}^2 ; así, la acción del subgrupo Γ de $Mob_+(\mathbb{R}^2)$ permite definir otros espacios como; $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma$ definido por $\pi(P) = \mathcal{O}_\Gamma(P)$.

Definición 7.7. Sea $P \in \mathbb{R}^2$, se llama **estabilizador** (subgrupo de isotropía) de P como

$$Stab(P) = \Gamma_P := \{\alpha \in \Gamma : \alpha(P) = P\}.$$

Más aún, $Stab(P) \subset \Gamma$ es un subgrupo.

8 Subgrupos parabólicos

Definición 8.1. Sea α un elemento en $Mob_+(\mathbb{R}^2)$, se llama **subgrupo elemental** al subgrupo generado por el elemento α y se denotará por $\Gamma := \{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$. La Γ -órbita o simplemente órbita de un punto $P \in \mathbb{R}^2$, bajo la acción de Γ es el conjunto $\mathcal{O}_\Gamma(P) := \{\alpha^n(P) : n \in \mathbb{Z}\}$ y además coincide con la órbita de P bajo iteraciones de α .

Sean $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $\phi(P) = P + 1$ y $\Gamma_\phi := \{\phi^n : n \in \mathbb{Z}\}$. A la región determinada por las líneas verticales \mathcal{L} y \mathcal{L}' (distantes entre ellas una unidad) se denotará por \mathcal{D}_Γ , véase la Figura 41.



Figura 41: Región fundamental de una transformación parabólica

Definición 8.2. Se llama a \mathcal{D}_Γ región fundamental de la acción de Γ_ϕ en \mathbb{R}^2 .

No es difícil ver que \mathcal{D}_Γ cumple con:

- (i) La órbita de P no tiene puntos de acumulación en \mathbb{R}^2 .
- (ii) La órbita de P interseca a \mathcal{D}_Γ exactamente en un punto.
- (iii) Si $n \neq m$, entonces $\phi^n(\mathcal{D}_\Gamma) \cap \phi^m(\mathcal{D}_\Gamma) = \emptyset$.
- (iv) Si $\mathcal{D} := \mathcal{D}_\Gamma \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$, entonces $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \phi^n(\mathcal{D})$.

Observación 8.3. 1. El inciso (i) se refiere al hecho de que la órbita de P es discreta.

2. La descomposición del espacio euclidiano descrita en el inciso (ii) es llamada “teselación”; en otras palabras, es una descomposición de \mathbb{R}^2 en franjas que se yuxtaponen lateralmente a lo largo de las líneas verticales las cuales son trasladados de la región fundamental bajo la acción Γ_ϕ , véase la imagen 42.

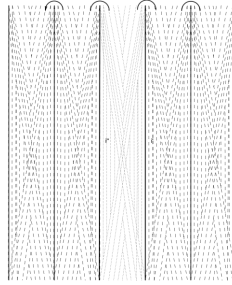


Figura 42: Teselación generada por un subgrupo parabólico

Se denotará a X_ϕ al espacio de órbitas correspondientes a la acción de Γ_ϕ en \mathbb{R}^2 , es decir, $X_\phi = \frac{\mathbb{R}^2}{\Gamma_\phi}$. La región fundamental \mathcal{D}_Γ tiene un único punto en cada órbita de los puntos de \mathbb{R}^2 que no están en $\{\phi^n(\mathcal{L}) : n \in \mathbb{Z}\}$; más aún, si $Q \in \mathcal{O}(P)$, entonces $\mathcal{O}(Q) = \mathcal{O}(P) \in X_\phi$. Los puntos de las líneas frontera \mathcal{L} y \mathcal{L}' se “identifican” en el espacio cociente; es decir, si $P \in \mathcal{L}$, entonces $T(P) \in \mathcal{L}'$ y $\mathcal{O}(P) = \mathcal{O}(T(P))$. Esta relación indica que cada uno de los puntos de \mathcal{L} y \mathcal{L}' está superpuesto, por lo que estos puntos coinciden en el espacio de órbitas. Por lo tanto, existe una correspondencia uno a uno entre el espacio de órbitas X_ϕ y un cilindro recto; véase la Figura 43.

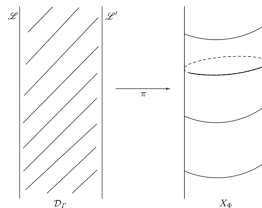


Figura 43: Identificación entre el espacio de órbitas y un cilindro recto

9 Subgrupo elíptico

Para estos subgrupos, se hará la convención de que $\theta = \frac{2\pi}{k}$, para algún entero $k > 1$, y sean $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $R_\theta(P) = AP$, con A matriz definida y $\Gamma_{R_\theta} := \langle R_\theta^n : n \in \mathbb{Z} \rangle \cong \langle A^n : n \in \mathbb{Z} \rangle$. En este caso, una región fundamental \mathcal{D}_Γ para la acción Γ_{R_θ} en \mathbb{R}^2 está determinada por el sector a través de los rayos que parten del punto O , el cual es la intersección de las líneas \mathcal{L} y \mathcal{L}' , las cuales forman un ángulo θ entre ellas; véase la Figura 44.

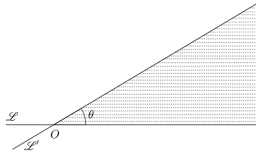


Figura 44: Región fundamental de una transformación elíptica

Así, la región fundamental \mathcal{D}_Γ de estos subgrupos cumple las siguientes propiedades: Sea $P \in \mathbb{R}^2$

- (i) La órbita de P es discreta en \mathbb{R}^2 ; es decir, la órbita es finita (porque es una rotación con ángulo de la forma $\frac{2\pi}{k}$); además, O es un punto fijo de R_θ .
- (ii) La órbita de P interseca a \mathcal{D}_Γ exactamente en un punto.
- (iii) Sea $\mathcal{D} := \mathcal{D}_\Gamma \cup fr^3(\mathcal{D}_\Gamma)$; por lo cual $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} R_\theta^n(\mathcal{D})$.

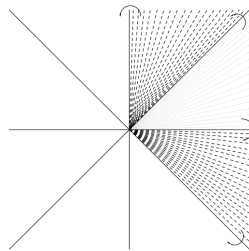


Figura 45: Región fundamental de un subgrupo elíptico

Se denotará por X_{R_θ} el espacio de órbitas correspondiente a la acción de Γ_{R_θ} en \mathbb{R}^2 . Notar que el punto O permanece fijo bajo la acción de Γ_{R_θ} ; es decir, $R_\theta(O) = O$ por tanto, $R_\theta^n(O) = O$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, la órbita del cero es el conjunto de un solo punto; los demás puntos en \mathcal{D}_Γ representan un único punto en X_{R_θ} , y los puntos de la frontera de \mathcal{D}_Γ se identifican en el espacio cociente de la siguiente manera; si P, Q y $P \neq Q$ están en $fr(\mathcal{D}_\Gamma)$, se identifican si y solo si $R_\theta(P) = Q$. es decir, existe una correspondencia uno a uno entre el espacio de órbitas X_{R_θ} y un cono; véase la Figura 46.

³Es la frontera

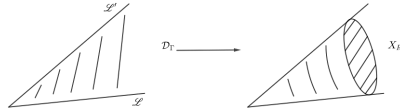


Figura 46: Correspondencia uno a uno entre el espacio de órbitas X_{R_θ} y un cono.

Subgrupos hiperbólicos

Sea $H_\lambda : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ definida por $H_\lambda(P) = \lambda \cdot P$ con $\lambda > 1$ y $\Gamma_{H_\lambda} := \{H_\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}$. En este caso, una región fundamental \mathcal{D}_Γ para la acción de Γ_{H_λ} en \mathbb{R}^2 es el anillo cuya frontera es la unión de la circunferencia \mathcal{C} y \mathcal{C}' , de radios λ y 1 respectivamente, donde $\mathcal{C} = H_\lambda(\mathcal{C}')$; véase la Figura 47.

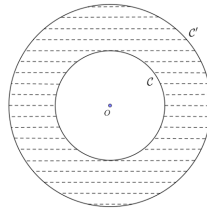


Figura 47: Región fundamental de una transformación hiperbólica

Sea $P \in \mathbb{R}^2$ tal que;

- (i) La órbita de P no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$; es decir, la órbita de P es discreta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.
- (ii) La órbita de P interseca a \mathcal{D}_Γ en un solo punto. Se sigue de la definición de dominio fundamental.
- (iii) Si $n \neq m$, entonces $H_\lambda^n(\mathcal{D}_\Gamma) \cap H_\lambda^m(\mathcal{D}_\Gamma) = \emptyset$ (inmediato del inciso (ii)).
- (iv) Si $\mathcal{D} := \mathcal{D}_\Gamma \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$, entonces $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H_\lambda^n(\mathcal{D})$; véase la Figura 48.

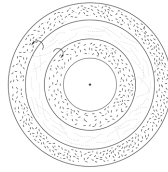


Figura 48: Teselación generada por un subgrupo hiperbólico

Sea X_{H_λ} el espacio de órbitas asociado a la acción de Γ_{H_λ} en \mathbb{R}^2 ; por otro lado los puntos de las circunferencias frontera \mathcal{C} y \mathcal{C}' se identifican en el espacio cociente, es decir, existe una función en la cual hay una correspondencia uno a uno entre el espacio de órbitas X_{H_λ} y un toro; véase la Figura 49.

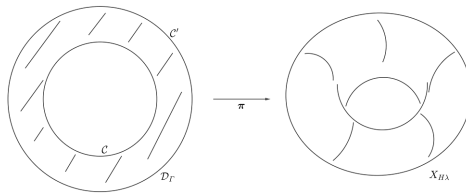


Figura 49: Familias coaxiales \mathcal{F} y \mathcal{G}

Agradecimientos

Los autores expresan su más sincero agradecimiento a los árbitros por el tiempo y la dedicación invertidos en la revisión de este trabajo. Sus valiosas sugerencias y comentarios fueron fundamentales para mejorar y culminar este material. Su contribución ha sido invaluable para garantizar la calidad y precisión del contenido presentado.

Bibliografía

- [1] Artzy, R. *Linear geometry*. Addison-Wesley, 1965.
- [2] Conway, J. B. *Functions of one complex variable*, 2 ed., vol. 159. Springer, 1978.
- [3] Cruz, Manuel, y García, Monserrat *Geometría euclidiana bidimensional y su grupo de transformaciones*, Papirhos, 2017.

- [4] Lascurain, A. *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, UNAM, 2005.
- [5] Marsden, J., y M. J. Hoffman, M. *Basic complex analysis*, Macmillan, 1987.
- [6] Penrose, R., y Burnett-Stuart, G. *Visual Complex Analysis*, Tristan Needham, Department of Mathematics University of San Francisco, 1997.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
acontri@fcfm.buap.mx
pdsoto@fcfm.buap.mx
lizbeth.rojasm@alumno.buap.mx

Topología

Capítulo 4

Un estudio sobre la contractibilidad

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,
David Rodríguez Hernández
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo se estudian algunas propiedades de espacios contráctiles y retractos (absolutos y de vecindad) en el contexto de espacios métricos no vacíos y separables. Se estudian estos conceptos sobre espacios tales como los continuos, dendritas y esferas, empleando técnicas clásicas de la teoría de espacios contráctiles y retractos. A saber, demostramos que todo retracto de un espacio contráctil es contráctil y también que la esfera S^n no es contráctil; además, se prueba que los espacios contráctiles son conexos por trayectorias.

1 Introducción

La teoría de retractos y el estudio de los espacios contráctiles surgieron en el marco del desarrollo de la topología algebraica y la topología general. Sus fundamentos se remontan a los trabajos de *Henri Poincaré* (1854–1912), quien introdujo el concepto de homotopía para formalizar las “deformaciones continuas” de los espacios, noción que constituye el núcleo de la teoría de retractos. Posteriormente, en la década de 1920, *L.E.J. Brouwer* (1881–1966) demostró su célebre teorema del punto fijo, estableciendo un vínculo profundo entre la topología y el análisis funcional; este hito fue decisivo para motivar el estudio sistemático de propiedades estructurales como la contractibilidad.

Este capítulo tiene como objetivo profundizar en los espacios contráctiles y las diversas nociones de retracto en el contexto de la topología general. De manera específica, se examinan los conceptos de **retractos absolutos** (AR),

retractos de vecindad (NR) y **retractos de vecindad absolutos** (ANR), todos ellos definidos sobre espacios métricos separables no vacíos.

En la exposición de los resultados, se incluyen demostraciones detalladas que emplean las técnicas fundamentales de la teoría. No obstante, para aquellos teoremas cuya complejidad requiere un desarrollo teórico más extenso, se ha optado por referir al lector a la bibliografía especializada correspondiente.

2 Preliminares

A continuación, se presenta la notación de algunos términos que hemos convenido utilizar a lo largo de este trabajo.

- Por \mathbb{R} y \mathbb{N} denotamos el conjunto de números reales y el conjunto de números naturales, respectivamente.
- $B^n(r)$ denota la bola cerrada de radio r en \mathbb{R}^n .
- S^n denota la esfera unitaria en \mathbb{R}^{n+1} .
- Si X y Y son espacios, denotamos $C(X, Y)$ como el espacio de funciones continuas de X en Y .
- Si X y Y son espacios topológicos, $A \subset X$, y $f: X \rightarrow Y$ una función. La función $f|_A$ denotará la función restringida al subespacio A .

También tengamos en consideración lo siguiente:

- Decimos que un conjunto es **no degenerado**, si dicho conjunto tiene más de un punto.
- Decimos que un conjunto es **numerable** si es finito o si tiene cardinalidad igual a la del conjunto \mathbb{N} .
- Se entiende que un subconjunto D de un espacio métrico X es **denso** en X si cada subconjunto abierto y no vacío en X intersecta a D .
- Decimos que un espacio topológico X es **separable** si este contiene un subconjunto denso y numerable.

Para este estudio, entenderemos un **espacio** como un espacio métrico, no vacío y separable.

El siguiente lema es útil en este estudio como argumento para un par de pruebas.

Lema 2.1. [2, Teorema (1.F.6)] (**Lema de pegado de funciones**). Sean A y B subconjuntos cerrados de un espacio topológico X . Sea Y un espacio arbitrario y supongamos que $f: A \rightarrow Y$ y $g: B \rightarrow Y$ son funciones continuas tales que $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$. Entonces, la función $h: A \cup B \rightarrow Y$ definida, para cada $x \in A \cup B$, por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ g(x), & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

es continua.

Definición 2.2. Sea \mathcal{L} un espacio vectorial real. Una **norma** sobre \mathcal{L} es una función $\|\cdot\|: \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty)$ que tiene las siguientes propiedades.

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{L}$
- $\|tx\| = |t|\|x\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathcal{L}$
- $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$

Nota: Si $\|\cdot\|$ es una norma sobre un espacio vectorial X , la función $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ define una métrica sobre X .

Definición 2.3. Sean \mathcal{L} un espacio vectorial métrico, separable y no vacío, y C un subconjunto no vacío de \mathcal{L} . Se dice que C es un conjunto **convexo** si para cualesquiera dos elementos c_0 y c_1 de C , se tiene que el conjunto $\{(1-t)c_0 + tc_1 : t \in [0, 1]\} \subset C$.

Definición 2.4. Sean \mathcal{L} un espacio vectorial, métrico, separable y no vacío y A un subconjunto no vacío de \mathcal{L} . Llamamos **envoltura convexa** de A al conjunto

$$\text{conv}(A) = \bigcap \{C : A \subset C, \text{ con } C \text{ convexo}\}.$$

- nótese que la envoltura convexa de A es el subconjunto convexo más pequeño que contiene a A

Obsérvese que si X es un espacio que es compacto, $C(X, \mathbb{R})$ puede ser dotado de una estructura de espacio vectorial, definiendo la suma y el producto por escalar de manera puntual. A saber, si $f \in C(X, \mathbb{R})$, podemos definir $\| \cdot \| : C(X, \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ por $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ como su norma (no es difícil comprobar que, en efecto, es una norma); en consecuencia, $d : C(X, \mathbb{R}) \times C(X, \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ dada por $d(f, g) = \|f - g\|$ define una métrica en $C(X, \mathbb{R})$.

Lema 2.5. [9, Lema (1.2.3.)] *Para cada espacio (X, d) que es compacto, existe un encaje isométrico $i : X \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ tal que:*

- (i) $i(Y)$ es cerrado en $\text{conv}(i(Y))$ para cada $Y \subset X$,
- (ii) $i(X) \subset \{f \in C(X, \mathbb{R}) : \|f\| \leq \text{diam}(X)\}$.

Teorema 2.6. [9, Teorema(1.4.13.)](Teorema de extensión de Dugundji) *Sea \mathcal{L} un espacio vectorial normado. Para cada espacio X , cada subespacio cerrado A de X y toda función continua $f : A \rightarrow \mathcal{L}$, existe una función continua $F : X \rightarrow \mathcal{L}$ tal que $F|_A = f$ y $F(X) \subset \text{conv}(f(A))$.*

Teorema 2.7. [9, Corolario(1.4.14.)](Teorema de extensión de Tietze) *Sean X un espacio y A un subconjunto cerrado de X . Si $f : A \rightarrow [0, 1]$ es una función continua, entonces existe una función continua $F : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $F|_A = f$.*

Lema 2.8. [9, Corolario(1.4.15)](Lema de Urysohn) *Sea X un espacio tal que, para cualquier A y B , subconjuntos cerrados de X y ajenos, existe una función continua $\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\alpha(A) = \{0\}$ y $\alpha(B) = \{1\}$.*

Teorema 2.9. [9, Teorema(1.4.18)] *Todo espacio X se puede encajar en el cubo de Hilbert Q .*

Definición 2.10. *Sea X un conjunto no vacío y sea $f : X \rightarrow X$ una función se dice que $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.*

Ejemplo 2.11. *Es fácil verificar que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x$ tiene como puntos fijos a 0 y 3.*

Ejemplo 2.12. *De igual forma es fácil verificar que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 5$ no tiene puntos fijos.*

Definición 2.13. *Se dice que un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si cada función continua $f: X \rightarrow X$, tiene un punto fijo.*

Ejemplo 2.14. $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo. En efecto, sean $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua, $A = \{x \in [0, 1] : x \leq f(x)\}$ y $B = \{x \in [0, 1] : x \geq f(x)\}$. Observe, $[0, 1] = A \cup B$ y, que A y B son subconjuntos cerrados de $[0, 1]$, además $0 \in A$ y $1 \in B$. Entonces, como $[0, 1]$ es un conexo, existe $x_0 \in A \cap B$, es decir $x_0 \in A$ y $x_0 \in B$ por lo que $x_0 \leq f(x_0)$ y $x_0 \geq f(x_0)$ y en consecuencia $f(x_0) = x_0$.

Ejemplo 2.15. S^n no tiene la propiedad del punto fijo. En efecto, consideremos la función $f: S^n \rightarrow S^n$ dada por $f(x) = -x$. Esta función manda cada punto x de la esfera S^n a un punto diametralmente opuesto $-x$, a saber si f es vista como una transformación lineal, se afirma que f es continua. y como x es siempre distinta de $-x$, se tiene que $f(x) \neq x$ para cada $x \in S^n$. por tanto S^n no tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 2.16. *[9, Teorema(3.5.2.)(Teorema del punto fijo de Brouwer)] Sea $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ una función continua, entonces f tiene un punto fijo.*

Observación: Es importante mencionar que la propiedad del punto fijo se preserva bajo homeomorfismos. Claramente, el teorema previo nos dice que $[0, 1]^n$ tiene la propiedad del punto fijo. Además, se sabe que B^n y $[0, 1]^n$ son homeomorfos, por lo que B^n tiene la propiedad del punto fijo.

3 Continuos

La primera definición formal de *continuo* fue propuesta en 1883 por G. Cantor (1845-1918) y nos dice que un continuo se define como un subconjunto cerrado, denso en sí mismo y conexo en un espacio euclidiano. No obstante, esta noción surgió como resultado de investigaciones previas sobre objetos tales como las curvas y líneas geométricas, cuyas propiedades dominaban el interés matemático de esa época (Ver en [1, pág. 225-226]).

Sin embargo, la noción actual de continuo se formalizó en el siglo XX con los trabajos de Borel, Hausdorff, Urysohn, Alexandroff y Fréchet.

Para esta parte, comenzaremos con la noción de un continuo, daremos algunos ejemplos clásicos de estos y hablaremos un poco de como construir

continuos a partir de algunos ya dados.

Definición 3.1. Un **continuo** es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. Además si X es un continuo y $Y \subset X$ se dirá que Y es un **subcontinuo** de X , si también Y es un continuo.

Nota: Con los puntos anteriores y dado que cada espacio métrico compacto es separable; véase en [3, pág. 62-63], se tiene que los continuos son separables.

Ejemplo 3.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, donde $a < b$, el intervalo $[a, b]$ es un continuo porque $[a, b]$ es conexo y compacto.

Ejemplo 3.3. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((0, 0), (x, y)) = 1\}$ donde d es la métrica usual de \mathbb{R}^2 . X es la circunferencia unitaria y es un continuo.

Ejemplo 3.4. Si $W = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, entonces $X = cl_{\mathbb{R}^2}(W)$ es un continuo, llamado la curva sinoidal del topólogo. Obsérvese que

$$X = W \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Teorema 3.5. La unión de dos continuos es un continuo si su intersección es distinta del vacío.

Demostración. Sean X_1 y X_2 dos continuos en un espacio métrico X , tales que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Queremos probar que $Y = X_1 \cup X_2$ es un continuo. Para esto, obsérvese que $Y \neq \emptyset$, ya que $X_1 \neq \emptyset$ y $X_2 \neq \emptyset$, también Y es compacto, pues la unión finita de compactos es compacto. Para probar la conexidad, supongamos, por el contrario, que Y no es conexo; entonces existen abiertos U y V de X , tales que $U \cap Y \neq \emptyset$, $V \cap Y \neq \emptyset$, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ y $Y \subset U \cup V$. Dado que X_1 es conexo y $X_1 \subset Y \subset U \cup V$, se tiene que $X_1 \subset U$ o $X_1 \subset V$; análogamente, $X_2 \subset U$ o $X_2 \subset V$. Sea $p \in X_1 \cap X_2$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \in U$; entonces $X_1 \subset U$ y $X_2 \subset U$, de donde se deduce $Y = X_1 \cup X_2 \subset U$; entonces $V \cap Y = \emptyset$, lo cual es una contradicción y, por tanto, Y es conexo. Finalmente, al ser $Y \subset X$, restringiendo la métrica de X a Y , se tiene que Y es un espacio métrico. Así, Y es un continuo. \square

Definición 3.6. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Sea A un arco. Para cualquier homeomorfismo $f: [0, 1] \rightarrow A$, se tiene que $\{p, q\} = \{f(0), f(1)\}$. Por esto, los puntos extremos del arco A son p y q . Podemos decir que A es un **arco de p a q** o de **q a p** .

El intervalo $[0, 1]$ es un continuo; así, un arco también es un continuo.

Definición 3.7. *Una curva cerrada simple es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria.*

Definición 3.8. *Un espacio métrico X es localmente conexo en $p \in X$, si para cada vecindad V de p existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p \in U \subset V$. Se dice que X es localmente conexo si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

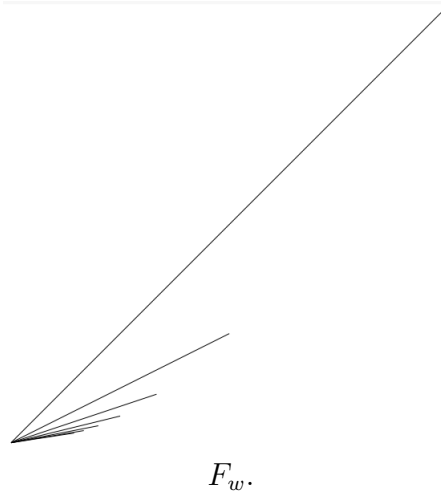
- Si en la definición de continuo agregamos al espacio métrico la conexidad local, tenemos lo que se conoce como un continuo localmente conexo.

Ejemplo 3.9. *Un arco, una curva cerrada simple y una 2-celda (Espacio homeomorfo a $B^2(r)$) son ejemplos de continuos localmente conexos.*

Ejemplo 3.10. *Considere $P = ([0, 1] \times 0) \cup (A \times [0, 1])$, donde $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Conocemos a P como el **Peine**, a saber, P es un continuo que no es localmente conexo.*

Definición 3.11. *Una dendrita es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Ejemplo 3.12. *Sean $A_n = \{r(\cos \frac{\theta}{2^n \pi}, \text{sen} \frac{\theta}{2^n \pi}) : 0 \leq r \leq \frac{1}{2^{n-1}}\}$ definamos a $F_w = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Este continuo es una dendrita, y es llamada F_w o también, en ocasiones, el punto peludo.*



4 Contractibilidad

Antes de comenzar con la definición de contractibilidad, es necesario hablar del concepto de homotopía en esta parte. Podemos pensar de manera intuitiva en la homotopía como una deformación continua de funciones continuas, donde una función se transforma gradualmente en otra sin “romper” su continuidad. Formalmente, tenemos:

Definición 4.1. Sean X e Y espacios topológicos y $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Diremos que f y g son **homotópicas** si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$.

- Usualmente denotamos por $f \simeq g$, cuando f y g son homotópicas.
- La función H es llamada **homotopía**.

Ejemplo 4.2. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas como $f(x) = x$ y $g(x) = 0$. A saber, f y g son homotópicas ya que si consideramos la función $H : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x, t) = (1 - t)x$ se tiene que H es continua y además para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $H(x, 0) = (1 - 0)x = x = f(x)$ y $H(x, 1) = (1 - 1)x = 0 = g(x)$ de donde $f \simeq g$.

Ejemplo 4.3. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ funciones definidas como $f(x) = (x, x^3)$ y $g(x) = (x, e^x)$. A saber f y g son homotópicas ya que si consideramos la función

$H : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $H(x, t) = (x, (1-t)x^3 + te^x)$ se tiene que H es continua y además para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $H(x, 0) = (x, (1-0)x^3 + (0)e^x) = (x, x^3) = f(x)$ y $H(x, 1) = (x, (1-1)x^3 + (1)e^x) = (x, e^x) = g(x)$ de donde $f \simeq g$.

Ejemplo 4.4. Sea $B^n(r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| \leq r\}$ y sean $f, g : B^n(r) \rightarrow B^n(r)$ definidas como siguen $f(\vec{x}) = \vec{x}$ y $g(\vec{x}) = \vec{0}$. f y g son homotópicas pues si consideramos la función $H : B^n(r) \times [0, 1] \rightarrow B^n(r)$ definida por $H(\vec{x}, t) = (1-t)\vec{x}$ se tiene que H es continua y además para cualquier $\vec{x} \in B^n(r)$ se tiene que $H(\vec{x}, 0) = (1-0)\vec{x} = \vec{x} = f(\vec{x})$ y $H(\vec{x}, 1) = (1-1)\vec{x} = \vec{0} = g(\vec{x})$ de donde $f \simeq g$.

En el siguiente teorema verificamos que \simeq es una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones continuas entre X e Y .

Teorema 4.5. Si X e Y son espacios topológicos y $f, g, h : X \rightarrow Y$ funciones continuas, se verifica lo siguiente:

- (i) $f \simeq f$,
- (ii) Si $f \simeq g$, entonces $g \simeq f$,
- (iii) Si $f \simeq g$ y $g \simeq h$, entonces $f \simeq h$.

Demostración. (i) Para este caso, bastará con tomar $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ definida por $H(x, t) = f(x)$; claramente, H es continua, pues f lo es. Además, $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = f(x)$, de donde $f \simeq f$.

(ii) Si $f \simeq g$ se tiene que existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, definamos $H^* : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ como $H^*(x, t) = H(x, 1-t)$; se sigue que H^* es continua, del hecho de que H es continua. Además, $H^*(x, 0) = H(x, 1-0) = H(x, 1) = g(x)$ y $H^*(x, 1) = H(x, 1-1) = H(x, 0) = f(x)$, de donde $g \simeq f$.

(iii) Ahora supongamos que $f \simeq g$ y $g \simeq h$; entonces existen homotopías $H_1, H_2 : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tales que:

$$H_1(x, 0) = f(x) \quad H_1(x, 1) = g(x)$$

y

$$H_2(x, 0) = g(x) \quad H_2(x, 1) = h(x)$$

. Luego, definamos $H^* : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ como sigue:

$$H^*(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Observemos que si $t = \frac{1}{2}$, se tiene que $H_1(x, 2t) = H_1(x, 1) = g(x)$ y $H_2(x, 2t - 1) = H_2(x, 0) = g(x)$; por lo que, por el Lema de pegado de funciones $H^*(x, t)$, está bien definida y además es continua. Más aún, $H^*(x, 0) = H_1(x, 2(0)) = H_1(x, 0) = f(x)$ y $H^*(x, 1) = H_2(x, 2(1) - 1) = H_2(x, 1) = h(x)$; de donde $f \simeq h$. □

Definición 4.6. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es **contráctil** si la función identidad Id_X es homotópica a una función constante c_{x_0} para algún $x_0 \in X$. Es decir, X es contráctil si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$, llamada homotopía, tal que para todo $x \in X$:

$$H(x, 0) = x \quad \text{y} \quad H(x, 1) = x_0.$$

Ejemplo 4.7. El ejemplo 4.2 nos dice que \mathbb{R} es contráctil, mientras que el ejemplo 4.4 nos dice que cualquier bola de radio r de \mathbb{R}^n es contráctil

Definición 4.8. Sea X un espacio y A un subespacio no vacío de X . Se dice que A es un **retracto** de X , si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$.

- La función r es llamada **retracción**.
- Claramente X es un retracto de sí mismo, considerando $Id_X : X \rightarrow X$ como retracción.

Teorema 4.9. Sea X un espacio y A un subespacio no vacío de X . Si A es un retracto de X , entonces A es cerrado de X .

Demostración. Supongamos que A es un retracto de X y sea $r : X \rightarrow A$ una retracción; en caso de que $A = X$ ya acabamos, pues claramente A sería cerrado. Así, supongamos que $A \neq X$. Sea $x_0 \in X \setminus A$; obsérvese que $r(x_0) \neq x_0$ y $r(x_0) \in A$; luego deben existir dos abiertos de X , digamos U_0 y V_0 , tales que $x_0 \in U_0$, $r(x_0) \in V_0$ y $U_0 \cap V_0 = \emptyset$. Luego, como r es continua, se

tiene que $r^{-1}(V_0)$ es un abierto de X tal que $x_0 \in r^{-1}(V_0)$, ya que $r(x_0) \in V_0$. A continuación, consideremos $W_0 = U_0 \cap r^{-1}(V_0)$; notar que W_0 es abierto en X con $x_0 \in W_0$. Además, nótese que $W_0 \subset U_0$ y $W_0 \subset r^{-1}(V_0)$, de donde $r(W_0) \subset V_0$; como $U_0 \cap V_0 = \emptyset$, se tiene que $W_0 \cap r(W_0) = \emptyset$. Supongamos que $W_0 \cap A \neq \emptyset$ y sea $a \in W_0 \cap A$; entonces $a \in W_0$ y $a \in A$ por lo que $r(a) = a$ y así $r(a) \in W_0$; entonces $a \in W_0 \cap r(W_0)$, lo cual es una contradicción, entonces debe suceder que $W_0 \subset X \setminus A$ y por tanto $X \setminus A$ abierto, con lo que concluimos que A es un cerrado en X . \square

Teorema 4.10. *Un subespacio A de un espacio X es un retracto de X si y solo si, para cada espacio Y y cada función continua $f : A \rightarrow Y$ existe una función continua $F : X \rightarrow Y$ tal que $F|_A = f$.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Sea A un retracto de X y $r : X \rightarrow A$ una retracción. Sean Y un espacio y $f : A \rightarrow Y$ una función continua; consideremos $F = f \circ r$, a saber, F es continua y cumple que, para cualquier $a \in A$, $F(a) = f(r(a)) = f(a)$, por lo que $F|_A = f$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que para cada espacio Y y cada función $f : A \rightarrow Y$ existe una función continua $F : X \rightarrow Y$ tal que $F|_A = f$. Si en particular consideramos $Y = A$ y $f = Id_A$, debe existir $F : X \rightarrow A$ tal que $F|_A = Id_A$; entonces, para cada $a \in A$, $F(a) = Id_A(a) = a$, por lo que F es una retracción y, por lo tanto, A es retracto de X . \square

Teorema 4.11. *Si X es un espacio contráctil y A un retracto de X , entonces A es contráctil.*

Demostración. Sean X un espacio contráctil y A un retracto de X . Sea $r : X \rightarrow A$ una retracción. Como X es contráctil, existe $x_0 \in X$ y una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$ para cada $x \in X$. Definamos $F : A \times [0, 1] \rightarrow A$ por $F(a, t) = (r \circ H)(a, t)$ para cada $a \in A$, a saber, F está bien definida, es continua y es tal que para cada $a \in A$,

$$F(a, 0) = (r \circ H)(a, 0) = r(H(a, 0)) = r(a) = a$$

y

$$F(a, 1) = (r \circ H)(a, 1) = r(H(a, 1)) = r(x_0) \in A.$$

Por tanto, A es contráctil. \square

Lema 4.12. *Sea X un espacio que tiene la propiedad del punto fijo; si A es un retracto de X , entonces A tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Como A es un retracto de X , existe $r : X \rightarrow A$ retracción. Sea $g : A \rightarrow A$ una función continua cualquiera y definamos $f : X \rightarrow X$ como $f = g \circ r$, por la manera en que f está definida, se tiene que f es continua. Luego, como X tiene la propiedad del punto fijo, debe existir $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$, es decir, que $g(r(x_0)) = x_0$; obsérvese que $g(r(x_0)) \in A$; por lo que $x_0 \in A$; entonces $r(x_0) = x_0$ y así se tiene que $g(x_0) = x_0$. de donde g tiene un punto fijo y, por lo tanto, A tiene la propiedad del punto fijo. \square

El teorema 4.11 nos dice que todo retracto de un contráctil es contráctil; por tal hecho no podemos ignorar como estos dos conceptos se relacionan. En la literatura sobre retracts, también aparecen los siguientes conceptos.

Definición 4.13. *Sea X un espacio, y A un subespacio no vacío de X . Diremos que A es un **retracto de vecindad** de X si existe un abierto U de X tal que $A \subset U$ y A es un retracto de U .*

Ejemplo 4.14. S^1 es un retracto de vecindad de \mathbb{R}^2 , basta con considerar como $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, claramente $S^1 \subset U$ y obsérvese que $r : U \rightarrow S^1$ definida como $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ es una retracción. De manera similar se puede demostrar que en general S^n es un retracto de vecindad de \mathbb{R}^{n+1} .

Definición 4.15. *Sea X un espacio, diremos que X es un **retracto absoluto**, si para cada espacio Z y cada encaje $h : X \rightarrow Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z se tiene que $h(X)$ es un retracto de Z*

Ejemplo 4.16. *El intervalo $[0, 1]$ y \mathbb{R} , son retracts absolutos, ver la observación del teorema 4.30*

Definición 4.17. *Diremos que un espacio X es un **extensor absoluto** si para cada espacio Z y cada subconjunto cerrado y no vacío A de Z y toda función continua $f : A \rightarrow X$ existe una función continua $F : Z \rightarrow X$ tal que $F|_A = f$.*

Definición 4.18. *Diremos que un espacio X es un **retracto de vecindad absoluto** si para cada espacio Z y cada encaje $h : X \rightarrow Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z , se tiene que $h(X)$ es un retracto de vecindad de Z .*

Definición 4.19. Diremos que un espacio X es un **extensor de vecindad absoluto** si para cada espacio Z , cada subconjunto cerrado y no vacío A de Z y toda función continua $f : A \rightarrow X$, existen un subconjunto abierto U de Z tal que $A \subset U$ y una función continua $F : U \rightarrow X$ tal que $F|_A = f$.

De las definiciones previas, es claro que si un espacio es retracto absoluto, entonces es retracto de vecindad absoluto; también es claro que si un espacio es extensor absoluto, entonces es extensor de vecindad absoluto. A saber, sobre estas últimas, los siguientes teoremas nos dicen que las propiedades de ser extensor absoluto y extensor absoluto de vecindad son invariantes topológicas.

Teorema 4.20. Sean X e Y espacios homeomorfos, si X es un extensor absoluto, entonces Y también lo es.

Demostración. Dado que X y Y son homeomorfos, entonces existe $h : X \rightarrow Y$ homeomorfismo. Sean Z un espacio cualquiera, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f : A \rightarrow Y$ una función continua. Obsérvese que $h^{-1} \circ f : A \rightarrow X$ es una función continua y, como X es un extensor absoluto, existe una función continua $E : Z \rightarrow X$ tal que $E|_A = h^{-1} \circ f$, así, convenientemente definamos $F : Z \rightarrow Y$ como $F = h \circ E$; claramente F es continua, y si $a \in A$, $F(a) = (h \circ E)(a) = h(E(a)) = h((h^{-1} \circ f)(a)) = h(h^{-1}(f(a))) = f(a)$, de donde $F|_A = f$ y, por lo tanto, Y es un extensor absoluto. \square

Teorema 4.21. Sean X e Y espacios homeomorfos, si X es un extensor de vecindad absoluto, entonces Y también lo es.

Demostración. Dado que X y Y son homeomorfos, existe $h : X \rightarrow Y$ homeomorfismo. Sean Z un espacio cualquiera y A un subconjunto cerrado y no vacío de Z , y $f : A \rightarrow Y$ continua. Obsérvese que $h^{-1} \circ f : A \rightarrow X$ es una función continua y dado que X es un extensor de vecindad absoluto, existen U abierto de Z con $A \subset U$ y una función continua $G : U \rightarrow X$ tal que $G|_A = h^{-1} \circ f$. Así, definamos $F : U \rightarrow Y$ como $F = h \circ G$; es claro que F es continua y, además, si $a \in A$, $F(a) = (h \circ G)(a) = h(G(a)) = h((h^{-1} \circ f)(a)) = h(h^{-1}(f(a))) = f(a)$, de donde $F|_A = f$ y, por lo tanto, Y es un extensor de vecindad absoluto. \square

Teorema 4.22. [8, Teorema 3.13] Sea X un espacio. X es un retracto absoluto si y sólo si X es un extensor absoluto. Más aún, X es un retracto de vecindad absoluto si y sólo si X es un extensor de vecindad absoluto.

Teorema 4.23. Sean X e Y espacios homeomorfos, si X es un retracto absoluto, entonces Y también lo es.

Demostración. Supongamos que X es un retracto absoluto; luego, por el teorema 4.22, tenemos que X es un extensor absoluto. Como X es homeomorfo a Y , el teorema 4.20 nos garantiza que Y es un extensor absoluto, y nuevamente, por el teorema 4.22, Y es un retracto absoluto. \square

Teorema 4.24. Sean X e Y espacios homeomorfos, si X es un retracto de vecindad absoluto, entonces Y también lo es.

Demostración. De manera similar al teorema previo, supongamos que X es un retracto de vecindad absoluto; luego, por el teorema 4.22, tenemos que X es un extensor de vecindad absoluto y, como X es homeomorfo a Y , el teorema 4.20 nos garantiza que Y es un extensor de vecindad absoluto. Nuevamente, por el teorema 4.22, Y es un retracto de vecindad absoluto. \square

Teorema 4.25. Sean X un espacio vectorial normado, C un subconjunto convexo de X , entonces C es un retracto absoluto.

Demostración. Obsérvese que, dado que C es convexo, se tiene de antemano que $C = \text{conv}(C)$. Ahora bien, consideremos Z un espacio y $f : C \rightarrow Z$ un encaje para el cual $f(C)$ es un subconjunto cerrado de Z ; queremos ver que $f(C)$ es un retracto de Z . A saber, dado que f es un encaje, se tiene que $f^{-1} : f(C) \rightarrow C$ es una función continua. Luego, por el teorema 2.6 (de extensión de Dugundji), existe una función continua $F : Z \rightarrow C = \text{conv}(C)$ tal que $F|_{f(C)} = f^{-1}$ y $F(Z) \subset \text{conv}(f(C))$. Definamos $r = f \circ F : Z \rightarrow f(C)$. es claro que r es continua; más aún, si $f(c) \in f(C)$ se tiene que $r(f(c)) = (f \circ F)(f(c)) = f(F(f(c))) = f(f^{-1}(f(c))) = f(c)$, por lo cual r es una retracción. Luego, $f(C)$ es un retracto de Z y se concluye que C es un retracto absoluto. \square

Teorema 4.26. Sea X un espacio. Si X es un retracto de vecindad absoluto y U un subconjunto abierto, no vacío de X , entonces U es un retracto de vecindad absoluto.

Demostración. Consideremos Z un espacio y $h : U \rightarrow Z$ un encaje tal que $h(U)$ es un cerrado de Z . Obsérvese que al ser h un encaje, $h^{-1} : h(U) \rightarrow U \subset X$ es una función continua. Ahora bien, por hipótesis X es un retracto de vecindad absoluto y por el teorema 4.22 tenemos que X es un extensor de vecindad absoluto, de donde deben existir un subconjunto abierto V de Z tal que $h(U) \subset V$ y una función continua $F : V \rightarrow X$ tal que $F|_{h(U)} = h^{-1}$. Luego, dado que U es abierto de X , se tiene que $F^{-1}(U)$ es abierto de V y como $V \subset Z$ tenemos que $F^{-1}(U)$ abierto de Z con $h(U) \subset F^{-1}(U) \subset V$. Así consideremos $r : F^{-1} \rightarrow h(U)$ dada por $r(u) = (h \circ F)(u)$, claramente r es continua y si $h(u_0) \in h(U)$ se tiene que $r(h(u_0)) = (h \circ F)(h(u_0)) = h(F(h(u_0))) = h(h^{-1}(h(u_0))) = h(u_0)$ por lo que $h(U)$ es un retracto de $F^{-1}(U)$ y así concluimos que U es un retracto de vecindad absoluto. \square

Teorema 4.27. *Sea X un retracto absoluto y A un retracto de X , entonces A es un retracto absoluto.*

Demostración. Como A es un retracto de X , existe una retracción $r : X \rightarrow A$. Sean Z un espacio y $h : A \rightarrow Z$ un encaje tal que $h(A)$ es cerrado en Z . Como h es un encaje, tenemos que $h^{-1} : h(A) \rightarrow A$ es continua y dado que X es retracto absoluto, el teorema 4.22 nos dice que X es extensor absoluto, por lo que existe una función continua $F : Z \rightarrow X$ tal que $F|_{h(A)} = h^{-1}$. Definamos $r^* : Z \rightarrow h(A)$ como $r^* = h \circ r \circ F$; nótese que r^* es continua. además, si $h(a) \in h(A)$ $r^*(h(a)) = (h \circ r \circ F)(h(a)) = h(r(F(h(a)))) = h(r(h^{-1}(h(a)))) = h(r(a)) = h(a)$, de donde r^* es retracción y en consecuencia $r(A)$ es un retracto de Z y, por tanto, A es un retracto absoluto. \square

Teorema 4.28. *Sea X un retracto de vecindad absoluto y A un retracto de X , entonces A es un retracto de vecindad absoluto.*

Demostración. Como A es un retracto de X , existe una retracción $r : X \rightarrow A$. Sea Z un espacio y $h : A \rightarrow Z$ un encaje tal que $h(A)$ es un cerrado de Z . Queremos ver que $h(A)$ es un retracto de vecindad de Z . Para esto, nótese que, como h es un encaje, se tiene que $h^{-1} : h(A) \rightarrow A \subset X$ es una función continua. Luego, al ser X un retracto de vecindad absoluto, el

teorema 4.22 nos garantiza que X es un extensor de vecindad absoluto, por lo que existen un subconjunto abierto U de Z tal que $h(A) \subset U$ y una función continua $F : U \rightarrow X$ tal que $F|_{h(A)} = h^{-1}$. Definamos $r^* : U \rightarrow h(A)$ como $r^* = h \circ r \circ F$, a saber, r^* es continua y es tal que si $h(a) \in h(A)$, $r^*(h(a)) = (h \circ r \circ F)(h(a)) = h(r(F(h(a)))) = h(r(h^{-1}(h(a)))) = h(r(a)) = h(a)$ por lo que r^* es una retracción. Luego, $h(A)$ es un retracto de vecindad de Z y, por lo tanto, A es un retracto de vecindad absoluto. \square

Teorema 4.29. *Sea X un retracto de vecindad absoluto y A un retracto de vecindad de X , entonces A es un retracto de vecindad absoluto.*

Demostración. Como A es un retracto de vecindad de X , existen un abierto U de X tal que $A \subset U$ y una retracción $r : U \rightarrow A$. Consideremos Z un espacio y $h : A \rightarrow Z$ un encaje tal que $h(A)$ es un cerrado de Z . Luego $h^{-1} : h(A) \rightarrow A \subset X$ es una función continua y como X es un retracto de vecindad absoluto, el teorema 4.22 nos dice que X es un extensor de vecindad absoluto, así deben existir un abierto V de Z tal que $h(A) \subset V$ y una función continua $F : V \rightarrow X$ tal que $F|_{h(A)} = h^{-1}$ y dado que U abierto de X se implica que $F^{-1}(U)$ es un abierto de V y por transitividad abierto de Z tal que $h(A) \subset F^{-1}(U)$. Definimos $G : F^{-1}(U) \rightarrow h(A)$ como $G = r \circ F$, nótese que G es continua y además si $h(a) \in h(A)$, $G(h(a)) = (r \circ F)(h(a)) = r(F(h(a))) = r(h^{-1}(h(a))) = r(a) = a = h^{-1}(h(a))$, de donde $G|_{h(A)} = h^{-1}$ por lo que A es un extensor de vecindad absoluto y por el teorema 4.22 tenemos que A es un retracto de vecindad absoluto. \square

Teorema 4.30. *Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios. $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto si y solo si X_n es un retracto absoluto para cada $n \in \mathbb{N}$*

Demostración. \Rightarrow Primero supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto, consideremos para cada $m \in \mathbb{N}$, $\pi_m : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow X_m$ la función proyección. Luego sean $x'_n \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $h_m : X_m \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ dada por $h_m(x_m) = (x'_1, \dots, x'_{m-1}, x_m, x'_{m+1}, \dots)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Obsérvese que h_m es

un encaje el cual induce un homeomorfismo entre X_m y $h_m(X_m)$. Definimos $r : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow h_m(X_m)$ dada por $r = h_m \circ \pi_m$, a saber r es una retracción de

donde $h_m(X_m)$ es un retracto de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ y por el teorema 4.27 se tiene que X_m es un retracto absoluto para cada $m \in \mathbb{N}$ y así por el teorema 4.23 X_m es un retracto absoluto para cada $m \in \mathbb{N}$.

⊞ Ahora supongamos que X_n es un retracto absoluto para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos Z un espacio y $h : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow Z$ un encaje tal que $h \left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n \right)$ es un subconjunto cerrado de Z , como h es un encaje, tenemos que:

$$h^{-1} : h \left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n \right) \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

es una función continua y considerando para cada $n \in \mathbb{N}$ a π_n nuevamente como la función proyección, tenemos que:

$$\pi_n \circ h^{-1} : h \left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n \right) \rightarrow X_n$$

es una función continua.

Como X_n es un retracto absoluto para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos por el teorema 4.22 que X_n es un extensor absoluto para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función continua $F_n : Z \rightarrow X_n$ tal que

$$F_n \upharpoonright_{h(\prod_{n=1}^{\infty} X_n)} = \pi_n \circ h^{-1}.$$

Sea $F : Z \rightarrow h \left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n \right)$, definida por $F(z) = (F_1(z), F_2(z), \dots, F_i(z), \dots)$,

claramente F es continua, además si $a \in h \left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n \right)$, se tiene que $F(a) = (F_1(a), F_2(a), \dots, F_i(a), \dots) = ((\pi_1 \circ h^{-1})(a), (\pi_2 \circ h^{-1})(a), \dots, (\pi_i \circ h^{-1})(a), \dots) = h^{-1}(a)$, de donde $F \upharpoonright_{h(\prod_{n=1}^{\infty} X_n)} = h^{-1}$ y así $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un extensor absoluto y

nuevamente por el teorema 4.22 se tiene que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto. \square

Observación: \mathbb{R} es un espacio convexo en sí mismo y a \mathbb{R} se le puede dar estructura de espacio vectorial normado, luego el teorema 4.25 garantiza que \mathbb{R} es un retracto absoluto. De manera similar siendo I convexo y subconjunto de \mathbb{R} , se tiene que I es retracto absoluto, sumado a esto, este teorema previo tiene como consecuencia que el cubo de Hilbert \mathcal{Q} , $[0, 1]^n$, \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^∞ son retractos absolutos.

Corolario 4.31. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que S^n es retracto de vecindad absoluto.*

Demostración. Por la observación del teorema anterior, tenemos que \mathbb{R}^{n+1} es un retracto absoluto, lo que implica que \mathbb{R}^n es un retracto de vecindad absoluto, en el ejemplo 4.14 vimos que S^n es un retracto de vecindad de \mathbb{R}^{n+1} , luego el teorema 4.29 nos dice que S^n debe ser un retracto de vecindad absoluto. \square

Teorema 4.32. *Sea X un espacio. Entonces X es contráctil si y solo si para cada espacio Y y cada función continua $f : X \rightarrow Y$ se tiene que $f \simeq k$ con k constante.*

Demostración. \Rightarrow Supongamos que X es contráctil, entonces existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$ con $x_0 \in X$. Luego, consideremos Y un espacio y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y sea $H^* : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ dada por $H^*(x, t) = (f \circ H)(x, t)$, como f y H son continuas, se sigue que H^* es continua, además $H^*(x, 0) = (f \circ H)(x, 0) = f(H(x, 0)) = f(x) \in Y$ y $H^*(x, 1) = (f \circ H)(x, 1) = f(H(x, 1)) = f(x_0) = k$ con k -constante, de donde $f \simeq k$.

\Leftarrow Como para cada espacio Y y cada función continua $f : X \rightarrow Y$ se tiene que $f \simeq k$, en particular, tomando $Y = X$ y $f = Id_X$ se cumple que $Id_X \simeq k$ con k constante y de ahí que X es contráctil. \square

Teorema 4.33. *Sea X un espacio. Si X es contráctil, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea X un espacio contráctil, entonces existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que para cualquier $x \in X$, $H(x, 0) = x$ y

$H(x, 1) = x_0$ con $x_0 \in X$. Sean $p, q \in X$, y $\alpha : I \rightarrow X$ una función definida como:

$$\alpha(t) = \begin{cases} H(p, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H(q, 2 - 2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

por el Lema 2.1 de pegado de funciones se afirma que α está bien definida y es continua. Luego, obsérvenos que $\alpha(0) = H(p, 0) = p$ y $\alpha(1) = H(q, 0) = q$, de donde, existe una trayectoria de p a q en X , por lo que X es conexo por trayectorias. \square

Este resultado previo nos da una manera de descartar espacios que no son contráctiles; tomemos de ejemplo a S^0 . Como sabemos, $S^0 = \{-1, 1\}$, el cual no es conexo por trayectorias, luego S^0 no es contráctil.

Definición 4.34. Sean X e Y espacios. Diremos que X es **contráctil con respecto a Y** si para toda función continua $f : X \rightarrow Y$ se tiene que $f \simeq k$ para k -constante.

- Obsérvese que esta definición nos provee una manera diferente de escribir el teorema 4.32.

Teorema 4.35. Sea X un espacio. Entonces X es contráctil si y solo si es contráctil con respecto a Y para todo espacio Y .

Como ya hemos observado, si X es un retracto absoluto, se implica que X es un retracto de vecindad absoluto; el recíproco no se cumple necesariamente. para esto, debemos pedirle a X algo más.

Teorema 4.36. [9, Corolario 1.6.7] Sea X un espacio, entonces X es un retracto absoluto si y solo si X es un retracto de vecindad absoluto contráctil.

Ejemplo 4.37. En [7, Teorema 16(pág 344)] se muestra que las dendritas son retractos absolutos, luego por el teorema 4.36 se tiene que toda dendrita es contráctil.

Teorema 4.38. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que S^{n-1} no es un retracto de B^n

Demostración. Supongamos que pasa lo contrario, es decir, que S^{n-1} es un retracto de B^n ; como lo indicamos en la observación del teorema 2.16, B^n tiene la propiedad del punto fijo. Luego, por el teorema 4.12, S^{n-1} debe tener la propiedad del punto fijo, lo cual es una contradicción al ejemplo 2.15 por lo tanto, S^{n-1} no es un retracto de B^n . \square

Teorema 4.39. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que S^{n-1} no es contráctil.*

Demostración. Previamente verificamos que S^0 no es contráctil. Supongamos, por el contrario, que S^n es contráctil; por el corolario 4.31 tenemos que S^n es retracto de vecindad absoluto y, entonces, por el teorema 4.36, S^n es retracto absoluto. en particular, S^n puede ser encajado en B^{n+1} , de donde debe existir $r : B^{n+1} \rightarrow S^n$ retracción, lo cual es una contradicción.

Agradecimientos

Los autores expresan su más sincero agradecimiento a los árbitros por el tiempo y la dedicación invertidos en la revisión de este trabajo. Sus valiosas sugerencias y comentarios fueron fundamentales para mejorar y culminar este material. Su contribución ha sido invaluable para garantizar la calidad y precisión del contenido presentado.

Referencias

- [1] Januz J. Charatonik, *Bosquejo de la historia de la teoría de los continuos, Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios*, editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 225–264.
- [2] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.
- [3] Herrera Carrasco David, Macías Romero Fernando, Guerrero Méndez Luis Alberto, *La Magia de los espacios métricos*, FCFM, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 2025.

- [4] S. T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.
- [5] Alejandro Illanes, Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Editorial Marcel Dekker, (1999).
- [6] K. Kuratowski, *Topology*, Vol I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.
- [7] K. Kuratowski, *Topology*, Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
- [8] Sergio Macías, *Una introducción a los retracts absolutos y a los retracts de vecindad absolutos*. Revista de integración, Vol. 31(2013), No. 2, 153–164.
- [9] J. van Mill, *Infinite-dimensional topology*, North Holland Mathematical Library, Amsterdam, 1989.
- [10] James R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, Madrid 2002.
- [11] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
dherrera@fcm.buap.mx
fmacias@fcm.buap.mx
rh223470378@alm.buap.mx

Capítulo 5

Funciones especiales sobre continuos: propiedades y relaciones

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco,
Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo se estudian tipos especiales de funciones definidas sobre continuos, analizando sus propiedades y comportamientos. Entre ellas se destacan las funciones monótonas, cuasi-monótonas, débilmente monótonas, ligeras, abiertas y confluentes. Cada tipo de función se presenta con ejemplos ilustrativos, y se discuten sus propiedades fundamentales, así como las relaciones entre ellas, proporcionando una comprensión clara de su papel en el estudio de los continuos.

1 Introducción

Las propiedades que describen el comportamiento de las funciones continuas entre continuos son herramientas clave para comprender la estructura del espacio y las interacciones entre sus elementos. En este contexto, las nociones de funciones monótonas, ligeras, confluentes, abiertas, cuasi-monótonas y débilmente monótonas cobran gran relevancia, ya que permiten caracterizar cómo las funciones se comportan bajo restricciones de continuidad y las propiedades topológicas del dominio.

Este capítulo está basado esencialmente en el Capítulo 13 del libro *Continuum Theory: An Introduction* de Sam B. Nadler, Jr. (véase [7]). Uno de los resultados centrales del capítulo se enuncia en la sección 3, donde se muestra que

toda función continua entre espacios compactos puede descomponerse como la composición de una función monótona y una función ligera (véase el Teorema 3.10). Esta descomposición permite analizar funciones complejas a partir de componentes con propiedades más manejables y bien comprendidas. Además, se profundiza en el estudio de funciones monótonas, ligeras, abiertas y confluentes, mostrando, por ejemplo, que toda función abierta es confluyente (véase el Teorema 3.20), al igual que toda función monótona (véase el Teorema 3.21). Estos resultados revelan cómo ciertas propiedades topológicas se preservan o se inducen mediante condiciones específicas sobre las funciones.

La Sección 4 está dedicada al análisis de las implicaciones lógicas entre distintas clases de funciones: débilmente monótonas, cuasi-monótonas, confluentes y abiertas (véase el Teorema 4.5). Se examina cómo se relacionan entre sí, qué condiciones permiten pasar de una clase a otra, y cuáles son las diferencias esenciales entre ellas. Asimismo, se estudian las propiedades de las composiciones entre funciones de estas clases, identificando cuándo dichas composiciones conservan o alteran las propiedades originales (véase el Teorema 4.14). En la Sección 5 se presenta el concepto de grado de multicoherencia y se muestra la utilidad de los resultados previos, al establecer bajo qué condiciones y para qué tipos de funciones se preserve la unicoherencia entre continuos (véase el Corolario 5.6).

2 Preliminares

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Dado un continuo X denotaremos por d a la métrica de X . Dado $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, la bola con centro en a y de radio ε , se denota por $B_X(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$. Si A es un subconjunto de X , los símbolos $\text{cl}_X(A)$, $\text{int}_X(A)$ y $\text{Fr}_X(A)$ denotan la **cerradura** de A , el **interior** y la **frontera** de A en X , respectivamente. El **diámetro** de A en X se define como $\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A \text{ con } x \neq y\}$. A su vez, Id_X denotará la función identidad de X en X . La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$. A su vez, todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n son considerados con la topología euclidiana. Un hiperespacio de X es una colección específica de subconjuntos de X . En este trabajo se hace mención del hiperespacio $2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es un cerrado de } X\}$ con la métrica de Hausdorff (véase [7, Teorema 4.2]).

Sean X un espacio topológico y $p \in X$. El espacio X es **localmente conexo en p** si para cada conjunto abierto U en X tal que $p \in U$, existe un conjunto abierto y conexo V en X tal que $p \in V \subset U$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que X es **localmente conexo**. Decimos que X es **totalmente desconexo**, si cada subconjunto conexo en X tiene a lo más un elemento.

A continuación enunciamos algunos resultados, bastante conocidos, que serán citados en este trabajo.

Lema 2.1. [7, Lema 7.11] *Sea X un espacio métrico, compacto y totalmente desconexo. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existen K_1, \dots, K_n , con $n \in \mathbb{N}$, subconjuntos compactos, no vacíos y mutuamente disjuntos en X tales que $\text{diám}(K_i) < \varepsilon$ y $X = \bigcup_{i=1}^n K_i$.*

Lema 2.2. [1, Corolario 7.8] *Sean X un espacio topológico compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entonces, f es una función cerrada.*

Lema 2.3. [7, Lema 3.22](Lema de Transgresión.) *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f : X \rightarrow Y$ una función cociente y $g : X \rightarrow Z$ una función continua. Si g es constante en cada subconjunto de X de la forma $f^{-1}(\{y\})$, para cada $y \in Y$ (es decir, $|(g \circ f^{-1})(y)| = 1$ para toda $y \in Y$) entonces la función $(g \circ f^{-1}) : Y \rightarrow Z$ es continua.*

Teorema 2.4. [7, Teorema 5.2](Teorema del Cable Cortado) *Sean X un espacio métrico compacto, A, B subconjuntos cerrados en X . Si ningún subconjunto conexo en X intersecta a A, B simultáneamente, entonces existen X_1, X_2 subconjuntos cerrados en X tales que, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $A \subset X_1$, $B \subset X_2$ y $X = X_1 \cup X_2$.*

Funciones continuas sobre espacios localmente conexos

Las funciones continuas definidas sobre espacios continuos localmente conexos presentan propiedades interesantes que enriquecen el análisis topológico. En esta sección, exploramos algunas de estas propiedades, que resultan fundamentales para el desarrollo de los resultados que se presentarán más adelante en el capítulo.

Lema 2.5. Sean X, Y continuos, $f : X \rightarrow Y$ una función continua y $y \in Y$. Si U es un subconjunto abierto en X tal que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, entonces existe $r > 0$ tal que $f^{-1}(B_Y(y, r)) \subset U$.

Demostración. Supongamos que no existe $r > 0$ tal que $f^{-1}(B_Y(y, r)) \subset U$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $x_n \in f^{-1}(B_Y(y, \frac{1}{n})) \setminus U$. Es decir, $f(x_n) \in B_Y(y, \frac{1}{n})$, pero $x_n \notin U$.

Dado que X es un continuo, podemos suponer que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, es decir, existe $x \in X$ tal que $\lim x_n = x$. De la continuidad de f , se tiene que $\lim f(x_n) = f(x)$. Como cada $f(x_n) \in B_Y(y, \frac{1}{n})$, se sigue que $f(x) = y$.

Dado que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, se concluye que $x \in U$. Esto implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $r > 0$ tal que $f^{-1}(B_Y(y, r)) \subset U$. \square

Teorema 2.6. Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si las componentes de subconjuntos abiertos en X son abiertas en X .

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean A un subconjunto abierto en X y C una componente de A . Para cada $c \in C$, existe V_c un subconjunto abierto y conexo en X tal que $c \in V_c \subset A$. Como C es una componente de A y V_c es conexo, $V_c \subset C$ para cada $c \in C$, luego $\bigcup_{c \in C} V_c = C$.

Dado que C es la unión de conjuntos abiertos entonces concluimos que C es abierto.

Supongamos que cada componente de cada subconjunto abierto en X es abierto en X . Sean $x \in X$ y V un subconjunto abierto en X , tal que $x \in V$, dado que V es un subconjunto abierto en X entonces sus componentes son abiertas y conexas. Sea C la componente de U tal que $x \in C$, por lo que C es abierta y conexa, tal que $C \subset V$. Esto termina la demostración. \square

Lema 2.7. Sean X un continuo localmente conexo y Y un continuo. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es localmente conexo.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto en Y y C una componente conexa de U . Vamos a probar que C es un subconjunto abierto en Y . Note que $f^{-1}(C) \subset \bigcup \{K : K \text{ es una componente de } f^{-1}(U) \text{ y } K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset\}$. Sea K una componente de $f^{-1}(U)$ tal que $K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$. Supongamos

que $K \not\subseteq f^{-1}(C)$, es decir, $f(K) \not\subseteq C$. Note que, $f(K)$ es un subconjunto conexo, contenido en U , por ende $f(K) \cup C$ es un subconjunto conexo en U que contiene propiamente a C , lo cual contradice el hecho de que C es una componente conexa de U . Por lo tanto $f^{-1}(C) = \bigcup \{K : K \text{ es una componente de } f^{-1}(U) \text{ y } K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset\}$.

Como f es continua, se cumple que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en X . Dado que X es localmente conexo, se cumple que todas las componentes de $f^{-1}(U)$ son subconjuntos abiertos en X . Por ende, $f^{-1}(C)$ es un subconjunto abierto en X . Luego, $X \setminus f^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado en X . Como f es continua, por el Lema 2.2 se cumple que f es una función cerrada. Así, $f(X \setminus f^{-1}(C)) = Y \setminus C$ es un subconjunto cerrado de Y , por ende, C es un subconjunto abierto en Y . Esto implica que Y es localmente conexo. \square

Teorema 2.8. [7, Teorema 8.14](Hahn-Mazurkiewicz) *Todo continuo localmente conexo es la imagen continua del intervalo cerrado $[0, 1]$.*

3 Funciones monótonas y ligeras

En esta sección se presentan las definiciones de función monótona y función ligera, junto con una importante equivalencia para la definición de función monótona (véase el Teorema 3.2). Es crucial abordar el concepto de descomposición semicontinua superior, ya que resulta esencial para la demostración del Teorema 3.10. Este teorema, de gran relevancia, establece que una función continua y suprayectiva puede descomponerse como la composición de una función monótona y una función ligera. Finalmente, culminamos demostrando que todo continuo localmente conexo puede ser representado como la imagen continua de $[0, 1]$ (véase el Teorema 3.12).

Definición 3.1. *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es **monótona** si f es suprayectiva, continua y $f^{-1}(\{y\})$ es un subconjunto conexo en X para cada $y \in Y$. Las funciones inyectivas, crecientes o decrecientes, son ejemplos de funciones reales que son monótonas.*

Lema 3.2. *Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces f es monótona si y sólo si $f^{-1}(E)$ es un subconjunto conexo en X , para todo E subconjunto conexo en Y .*

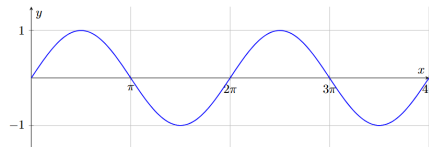
Demostración. Sea $y \in Y$, como $\{y\}$ es un subconjunto conexo en Y , entonces $f^{-1}(\{y\})$ es un subconjunto conexo en Y . Por lo tanto, f es monótona.

Supongamos que f es monótona y que existe E subconjunto conexo en Y tal que $f^{-1}(E)$ es desconexo. Por ende, podemos tomar U, V dos subconjuntos, no vacíos en X , tales que $f^{-1}(E) = U \cup V$, $\text{cl}_X(U) \cap V = \emptyset$ y $U \cap \text{cl}_X(V) = \emptyset$. Dado $y \in E$, como f es monótona, se cumple que $f^{-1}(\{y\})$ es un subconjunto conexo en X . Por ende, $f^{-1}(\{y\}) \subset U$ o $f^{-1}(\{y\}) \subset V$.

Definamos los siguientes conjuntos, $M = \{y \in E : f^{-1}(\{y\}) \subset U\}$ y $N = \{y \in E : f^{-1}(\{y\}) \subset V\}$. Note que $E = M \cup N$. Dado que $U \neq \emptyset$, entonces existe $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0) \in E$. De esto que, $f^{-1}(\{y_0\}) \cap U \neq \emptyset$, esto implica que $f^{-1}(\{y_0\}) \subset U$, por ende $y_0 \in M$, es decir, $M \neq \emptyset$. Con argumentos análogos, se prueba que $N \neq \emptyset$. Como E es conexo, se debe cumplir que $\text{cl}_Y(M) \cap N \neq \emptyset$ o $M \cap \text{cl}_Y(N) \neq \emptyset$. Supongamos sin perder generalidad que $\text{cl}_Y(M) \cap N \neq \emptyset$. Sea $y \in \text{cl}_Y(M) \cap N \neq \emptyset$. Entonces, existe $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de M , que converge a y . Dado que $y \in N$, se cumple que $f^{-1}(\{y\}) \subset V$. A su vez, como $y_i \in M$ se cumple que $f^{-1}(\{y_i\}) \subset U$. Dado que f es suprayectiva podemos tomar $x_i \in f^{-1}(\{y_i\})$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, tenemos $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ una sucesión contenida en U . Como X es compacto, podemos suponer que existe $x \in \text{cl}_X(U)$ tal que $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ converge a x . Como f es continua entonces $\lim f(x_i) = f(x)$, dado que $f(x_i) = y_i$, entonces $f(x) = y$, es decir, $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset V$, esto implica que $\text{cl}_X(U) \cap V \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por ende, $f^{-1}(E)$ es conexo. □

Definición 3.3. Sean X, Y espacios topológicos. Decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es **ligera**, si f es suprayectiva, continua y $f^{-1}(\{y\})$ es un subconjunto totalmente desconexo en X para cada $y \in Y$.

La función $f : [0, 4\pi] \rightarrow [-1, 1]$ definida por $f(x) = \sin(x)$ es una función ligera. Ya que para cada $y \in [-1, 1]$, se cumple que $f^{-1}(\{y\})$ es finito.



De hecho, $|f^{-1}(\{y\})| = 4$ para cada $y \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, $|f^{-1}(\{1\})| = 2 = |f^{-1}(\{-1\})|$ y $|f^{-1}(\{0\})| = 5$

Definición 3.4. Una **descomposición** \mathcal{D} , de un espacio topológico X es una familia de subconjuntos no vacíos de X ajenos entre sí tales que $\cup \mathcal{D} = X$. Se define la **función cociente** $q_X : X \rightarrow \mathcal{D}$ como $q_X(x) = D$, donde D es el único elemento en \mathcal{D} tal que $x \in D$.

Consideremos a la familia $\tau(\mathcal{D}) = \{U \subset \mathcal{D} : q_X^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$. El espacio $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es conocido como el **espacio cociente** de X , y $\tau(\mathcal{D})$ se conoce como la **topología cociente**. Se suele denotar a dicho espacio por X/\mathcal{D} . Note que con la función cociente $q_X : X \rightarrow X/\mathcal{D}$ es continua.

Si un subconjunto en X es la unión de una subcolección de \mathcal{D} se le dirá **\mathcal{D} -saturado**. Note que, para todo $C \subset \mathcal{D}$ se cumple que $\pi^{-1}(C)$ es \mathcal{D} -saturado.

Definición 3.5. Sean X un espacio topológico y \mathcal{D} una descomposición de X . Decimos que \mathcal{D} es **semicontinua superior** (scs) si para cada elemento $D \in \mathcal{D}$ y cada abierto U de X tal que $D \subset U$, existe V abierto en X tal que $D \subset V$ y para cada $W \in \mathcal{D}$ tal que $W \cap V \neq \emptyset$ se cumple que $W \subset U$.

Lema 3.6. Sea (X, τ) un espacio topológico, \mathcal{D} una partición de X y q_X la función cociente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (1) \mathcal{D} es semicontinua superiormente,
- (2) q_X es una función cerrada,
- (3) si $D \in \mathcal{D}, U \in \tau$, y $D \subset U$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $D \subset V \subset U$ y es \mathcal{D} -saturado.

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Sean C un conjunto cerrado en X y $x \in q_X^{-1}(\mathcal{D} \setminus q_X(C))$, note que $q_X(x) \in \mathcal{D} \setminus q_X(C)$. Veamos que $q_X(x) \cap C = \emptyset$. Supongamos por el contrario, que $y \in q_X(x) \cap C$, entonces $q_X(x) \cap q_X(y) \neq \emptyset$ y así, $q_X(x) = q_X(y)$ y por lo que $q_X(x) \in q_X(C)$, lo cual es una contradicción, todo esto por como está definida q_X .

Tenemos entonces que $q_X(x) \subset X \setminus C$. Como $X \setminus C$ es abierto y \mathcal{D} semicontinua superiormente, existe $V \in \tau$ con $q_X(x) \subset V$ tal que si $v \in V$, entonces $q_X(v) \subset X \setminus C$. Supongamos que $q_X(v) \in q_X(C)$, entonces $q_X(v) = q_X(y)$ para algún $y \in C$ y así, $y \in q_X(v) \cap C$, entonces $q_X(v) \not\subset X \setminus C$, lo cual contradice la definición de v . Por lo tanto, $q_X(V) \subset \mathcal{D} \setminus q_X(C)$. Luego, $x \in V \subset q_X^{-1}(\mathcal{D} \setminus q_X(C))$ y se sigue que es abierto. Por lo tanto $\mathcal{D} \setminus q_X(C)$ es abierto. Finalmente, como q_X es la función cociente, se sigue que $q_X(C)$ es cerrado en \mathcal{D} .

Veamos que (2) implica (3). Sean $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tal que $D \subset U$. Considere $V = q_X^{-1}(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$. Notemos que V es abierto puesto que q_X es cerrada y $D \subset V \subset U$. Para ver que V es \mathcal{D} -saturado, veamos que $V = \bigcup(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$. Sea $v \in V$, entonces $v \in q_X(V) \in \mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U)$ y así $v \in \bigcup(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$. Por otro lado, si $v \in \bigcup(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$, existe $A \in \mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U)$ tal que $v \in A$. Luego, $q_X(v) = A$, es decir, $v \in q_X^{-1}(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$, y por lo tanto se cumple (3). Finalmente, se sigue de la definición que (3) implica (2). \square

Lema 3.7. *Sea X un espacio topológico T_1 . Si \mathcal{D} una descomposición semicontinua superior de X , entonces \mathcal{D} es una partición cerrada de X .*

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}$. Dado $x \in D$, como $\{x\}$ es un subconjunto cerrado, por el Lema 3.6 se cumple que $q_X(\{x\}) = \{D\}$ es un subconjunto cerrado de \mathcal{D} . De la continuidad de q_X se cumple que $q_X^{-1}(q_X(\{x\})) = D$ es un subconjunto cerrado de X . Esto termina la demostración. \square

Lema 3.8. *Sea X un espacio métrico compacto y \mathcal{D} una descomposición semicontinua superior de X . Sea*

$$\mathcal{C} = \{C \subset X : C \text{ es una componente de algún } D \in \mathcal{D}\}.$$

Entonces, \mathcal{C} es una descomposición semicontinua superior de X .

Demostración. Sea $C \in \mathcal{C}$ y U un subconjunto abierto en X tal que $C \subset U$. Sea $D \in \mathcal{D}$ tal que $C \subset D$. Por el Lema 3.7 se cumple que D es compacto. Dado que C , $D \cap (X \setminus U)$ son subconjuntos cerrados de D , y como C es una componente de D , no existe un subconjunto conexo que los interseque a ambos, entonces por el Teorema 2.4 existen F_1, F_2 subconjuntos cerrados de D (y por ende en X) tales que $D = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ y $C \subset F_1$, $D \cap (X \setminus U) \subset F_2$. Dado que $D = (D \cap U) \cup (D \cap (X \setminus U))$, se cumple que $F_1 \subset U$. Luego, como X es un espacio normal, existe G un subconjunto abierto en X tal que $F_1 \subset G$, $\text{cl}_X(G) \subset U$ y $\text{cl}_X(G) \cap F_2 = \emptyset$. Así, 1) $C \subset G$ y 2) $G \subset U$.

Afirmación 1. $\text{Fr}_X(G) \cap D = \emptyset$.

Sea $x \in \text{Fr}_X(G)$. Supongamos que $x \in D = F_1 \cup F_2$. Entonces, dado que $x \in \text{cl}_X(G)$ y $\text{cl}_X(G) \cap F_2 = \emptyset$, se cumple que $x \in F_1$. Esto implica que $x \in G$ y como G es abierto entonces $x \notin \text{cl}_X(X \setminus G)$. Lo cual contradice que $x \in \text{Fr}_X(G)$. Por lo tanto, $\text{Fr}_X(G) \cap D = \emptyset$.

Sea $H = X \setminus \text{Fr}_X(G)$. Note que $H = G \cup (X \setminus \text{cl}_X(G))$. Por la Afirmación 1 se cumple que $D \subset H$ y como H es abierto, del hecho de que \mathcal{D} es una

descomposición semicontinua superior, existe W un subconjunto abierto en X tal que $D \subset W$ y

$$\text{Si } A \in \mathcal{D} \text{ y } A \cap W \neq \emptyset, \text{ entonces } A \subset H. \quad (3)$$

Sea $V = W \cap G$. Note que V es un subconjunto abierto en X . A su vez, por 1) $C \subset G$ y dado que $C \subset D \subset W$, se cumple que $C \subset V$.

Afirmación 2. Si $C' \in \mathcal{C}$ y $C' \cap V \neq \emptyset$, entonces $C' \subset U$.

Sea $C' \in \mathcal{C}$ tal que $C' \cap V \neq \emptyset$. Tomemos $D' \in \mathcal{D}$ tal que C' es componente de D' . Esto implica que $D' \cap V \neq \emptyset$, en particular, $D' \cap W \neq \emptyset$. Entonces, por (3) se cumple que $D' \subset H$. Por ende, $C' \subset H = G \cup (X \setminus \text{cl}_X(G))$. Dado que, $C' \cap V \neq \emptyset$ se cumple que $C' \cap G \neq \emptyset$. De la conexidad de C' se debe cumplir que $C' \subset G$. Finalmente, de 2) se tiene que $C' \subset G \subset U$.

Con la demostración de la Afirmación 2 se termina la prueba del Lema, ya que se satisface la Definición 3.5. \square

Teorema 3.9. [7, Teorema 3.21] Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces, la colección

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\},$$

es una descomposición semicontinua superior de X , y \mathcal{D}_f es homeomorfo a Y . Inversamente, cualquier descomposición semicontinua superior de X es un espacio métrico compacto, que es la imagen continua de X .

Teorema 3.10. Sean X, Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces existen, M un espacio métrico compacto, $m : X \rightarrow M$ una función monótona suprayectiva, y $l : M \rightarrow Y$ una función ligera suprayectiva tal que $f = l \circ m$.

Demostración. Sean $\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$, por el Teorema 3.9 se tiene que \mathcal{D}_f es una descomposición semicontinua superior. Consideremos $M = \{C \subset X : C \text{ es una componente de algún } f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{D}_f\}$. Por el Lema 3.8 se cumple que M es una descomposición semicontinua superior, que es homeomorfa a Y . Por ende M es un espacio métrico compacto.

Definamos $m : X \rightarrow M$ por la función cociente, es decir, $m = q_X$. Por ende, m es continua y $m(x) = C$, donde C es el único elemento de M tal que $x \in C$. Sea $z \in M$, luego $m^{-1}(z) = C_z$, de esto que existe $y_z \in Y$ tal que C_z es

componente de $f^{-1}(\{y_z\})$. Note que $f(m^{-1}(z)) = \{y_z\}$. Esto se cumple para cada $z \in M$. Definamos $l : M \rightarrow Y$ por $l(z) = y_z$ para cada $z \in M$. Donde y_z , cumple que $f(m^{-1}(z)) = \{y_z\}$.

Note que la función m es monótona. Sea $z \in M$, luego $m^{-1}(\{z\}) = C_z$, donde C_z es componente de $f^{-1}(\{y_z\})$. Esto implica que, $m^{-1}(\{z\})$ es un subconjunto conexo en X para cada $z \in M$. Además, $m(X) = M$, es decir, m es suprayectiva.

Para cada $x \in X$, $l(m(x)) = y_{m(x)}$, donde $y_{m(x)}$ cumple que $f(m^{-1}(m(x))) = \{y_{m(x)}\}$, es decir, $f(\{x\}) = \{y_{m(x)}\}$. Esto implica que, $l(m(x)) = f(x)$. Por lo tanto, $f = l \circ m$. Luego, para cada $y \in Y$ se cumple que $f^{-1}(\{y\}) = m^{-1}(l^{-1}(\{y\}))$. Por otra parte, dado $y \in Y$ consideremos C_y una componente de $f^{-1}(\{y\})$. De esto que, $C_y \in M$ y como $f(m^{-1}(C_y)) = f(C_y) = \{y\}$, entonces $l(C_y) = y$. Por ende, l es suprayectiva. Resta probar que l es ligera. Note que $|(f \circ m^{-1})(z)| = 1$ para todo $z \in M$, entonces por el Lema 2.3 se cumple que l es continua. Sean $y \in Y$ y K una componente de $l^{-1}(\{y\})$, por el Lema 3.2 se cumple $m^{-1}(K)$ es un subconjunto conexo en X . Entonces, como $K \subset l^{-1}(\{y\})$ se cumple que $m^{-1}(K) \subset m^{-1}(l^{-1}(\{y\})) = f^{-1}(\{y\})$. Así, existe $C \in M$ tal que $m^{-1}(K) \subset C$. Dado que m es la función cociente, se cumple que $m^{-1}(K)$ es M -saturado. Por lo tanto, $C \subset m^{-1}(K)$, decir, $m^{-1}(K) = C$. Esto implica que $K = \{C\}$, por ende l es ligera. Esto concluye la demostración. □

Teorema 3.11. *[7, Proposición 8.22] Si Y es un continuo con más de un elemento y $f : [0, 1] \rightarrow Y$ es una función monótona y suprayectiva, entonces Y es un arco.*

Teorema 3.12. *Todo continuo no degenerado localmente conexo, es la imagen continua de una función ligera del intervalo cerrado $[0, 1]$.*

Demostración. Sea Y un continuo no degenerado, localmente conexo. Por el Teorema 2.8, existe $f : [0, 1] \rightarrow Y$, una función continua y suprayectiva. Luego, por el Teorema 3.10 existen M un espacio métrico compacto, $m : [0, 1] \rightarrow M$ una función monótona y suprayectiva, y $l : M \rightarrow Y$ una función ligera y suprayectiva, tal que $f = l \circ m$. Dado que m es continua, se cumple que M es conexo, por ende M es un continuo. Dado que Y es no degenerado y l es suprayectiva, se cumple que M es no degenerado. Así, por el Teorema 3.11 se cumple que M es un arco. Por ende, existe $h : [0, 1] \rightarrow M$ un homeomorfismo. Consideremos la función $g : [0, 1] \rightarrow Y$ definida por, $g = l \circ h$. Note que, g

es una función continua. Dado $y \in Y$, $g^{-1}(\{y\}) = h^{-1}(l^{-1}(\{y\}))$, como l es ligera $l^{-1}(\{y\})$ es un subconjunto totalmente desconexo, dado que h es un homeomorfismo se cumple que $h^{-1}(l^{-1}(\{y\}))$ es un subconjunto totalmente desconexo. Por lo tanto, g es una función ligera. Esto finaliza la demostración. \square

Funciones Confluentes y Abiertas

A continuación, presentaremos las definiciones de función confluyente y función abierta, acompañadas de algunos ejemplos ilustrativos. El objetivo principal de esta sección es exponer las relaciones clave entre estas dos clases de funciones, proporcionando una visión más profunda de su interacción y sus propiedades en el contexto de espacios métricos y compactos.

Definición 3.13. Sean X y Y espacios topológicos. Una función continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ es **confluyente** si para cada B subcontinuo de Y y para cada A componente de $f^{-1}(B)$ se cumple que $f(A) = B$.

Es siguiente resultado nos da información de las funciones confluentes sobre continuos localmente conexos. El cual será de utilidad más adelante.

Teorema 3.14. [7, Teorema 13.22] Sean X un continuo, Y un continuo localmente conexo y $f : X \rightarrow Y$ una función confluyente. Si U es cualquier subconjunto abierto y conexo en Y y H es cualquier componente de $f^{-1}(U)$, entonces $f(H) = U$.

Ejemplo 3.15. La función tienda es una función confluyente. Esta se define como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Note que para todo subcontinuo B de $[0, 1]$, el conjunto $f^{-1}(B)$ tiene a lo más dos componentes A_1 y A_2 , tal y como se ilustra en la Figura 1. A su vez, la imagen bajo f de estas componentes son iguales al continuo B .

Definición 3.16. Sean X , Y espacios topológicos. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es **abierto**, si es suprayectiva y para cada subconjunto abierto U en X se cumple que $f(U)$ es un subconjunto abierto en Y .

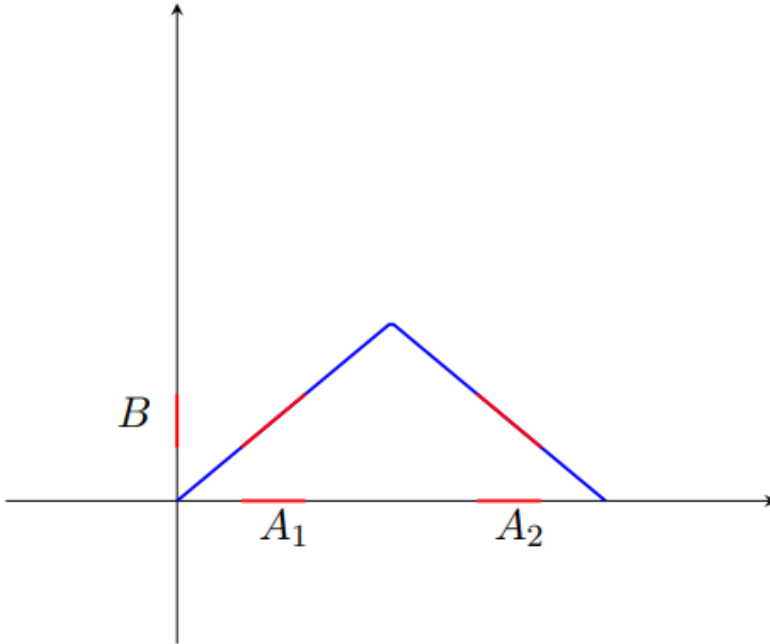


Figura 1: Función Tienda

Un resultado conocido para funciones abiertas es el Teorema 3.17, el cual nos da una gran variedad de ejemplos de funciones abiertas.

Teorema 3.17. [4, Teorema 1.4.18] Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces, f es abierta si y solo si f es un homeomorfismo.

Teorema 3.18. [7, Teorema 13.5] Sean X, Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces, f es una función abierta si y sólo si para toda sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergente en Y , tal $\lim y_i = y$ se cumple que la sucesión $\{f^{-1}(\{y_i\})\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $f^{-1}(\{y\})$ en 2^X .

Lema 3.19. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función abierta. Si $Z \subset Y$, entonces la función $g : f^{-1}(Z) \rightarrow Z$ definida por $g(x) = f(x)$ es una función abierta.

Demostración. Claramente g es una función suprayectiva. Sea U un subconjunto abierto en $f^{-1}(Z)$, por lo que existe V un subconjunto abierto en X tal que $U = V \cap f^{-1}(Z)$. Luego, $g(U) = f(V) \cap Z$. Dado que f es una función

abierta, se cumple que $f(V)$ es un subconjunto abierto en Y , por ende $g(U)$ es un subconjunto abierto en Z . Por lo tanto, g es una función abierta. \square

Teorema 3.20. *Sean X, Y espacios métricos y compactos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función abierta, entonces f es una función confluyente.*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función abierta. Supongamos que f no es confluyente. Entonces, existe un subcontinuo B de Y y A una componente de $f^{-1}(B)$ tal que $f(A) \neq B$. Dado que $f(A) \subset B$, existe $b \in B$ tal que $f^{-1}(\{b\}) \cap A = \emptyset$. De la continuidad de f se cumple que A es un subconjunto cerrado en X y $f^{-1}(\{b\})$ es un subconjunto cerrado en X . Dado que $f^{-1}(\{b\}) \subset f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(\{b\}) \cap A = \emptyset$, se cumple que ningún subconjunto conexo en $f^{-1}(B)$ intersecta a A , $f^{-1}(\{b\})$ simultáneamente. Luego, por el Teorema 2.4 existen G, H subconjuntos cerrados en X tales que $f^{-1}(B) = (G \cap f^{-1}(B)) \cup (H \cap f^{-1}(B))$, $G \cap H \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, $A \subset G \cap f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(\{b\}) \subset H \cap f^{-1}(B)$.

Note que $G \cap f^{-1}(B)$ es un subconjunto abierto y cerrado de $f^{-1}(B)$. Como $G \cap f^{-1}(B)$ cerrado en X entonces $f(G \cap f^{-1}(B))$ es cerrado en B . Por el Teorema 3.19, la función $g : f^{-1}(B) \rightarrow B$ es abierta. Por ende, $g(G \cap f^{-1}(B))$ es un subconjunto abierto en B , es decir, $f(G \cap f^{-1}(B))$ es un subconjunto abierto y cerrado de B . Como $G \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ entonces $f(G \cap f^{-1}(B)) \neq \emptyset$. Note que $b \notin f(G \cap f^{-1}(B))$, por ende $f(G \cap f^{-1}(B)) \neq B$. Esto contradice la conexidad de B . Esto concluye la demostración. \square

Teorema 3.21. *Sean X, Y espacios métricos y compactos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función monótona y suprayectiva, entonces f es confluyente.*

Demostración. Sea B un subcontinuo de Y . Por el Lema 3.2 se cumple que $f^{-1}(B)$ es un subconjunto conexo en X . Luego, dado que f es suprayectiva, se cumple que $f(f^{-1}(B)) = B$. Por ende, f es confluyente. \square

4 Funciones débilmente monótonas y cuasi-monótonas

En esta sección, presentamos las definiciones de funciones débilmente monótonas y cuasi-monótonas. Analizamos su relación entre sí, y con funciones monótonas y confluentes. También se incluyen ejemplos y contraejemplos que ilustran dichas implicaciones. Examinamos cómo la propiedad de ser localmente

conexo facilita la existencia de más relaciones entre estos tipos de funciones. Finalmente, concluimos con el Teorema 4.18, en el cual se demuestra bajo qué condiciones una función cuasi-monótona puede descomponerse como la composición de una función monótona y una función ligera y abierta. Antes, unos resultados que serán usados en esta sección.

Lema 4.1. *Sea X un espacio topológico conexo. Si A_1, \dots, A_n son subcontinuos en X , tales que $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$, entonces existe $l \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\bigcup_{i \neq l} A_i$ es un subcontinuo de X .*

Demostración. Por inducción matemática. Para $n = 2$. En este caso se cumple que $X = A_1 \cup A_2$ para algunos A_1 y A_2 subcontinuos de X , basta tomar $l = 1$, entonces $\bigcup_{i \neq 1} A_i = A_2$, el cual es un subcontinuo de X . Supongamos que para cualquier familia de n elementos se cumple el resultado. Sean A_1, \dots, A_{n+1} subconjuntos cerrados y conexos en X , tales que $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = X$. Como X es conexo, existe $j \in \{1, \dots, n+1\} - \{n+1\}$ tal que $A_{n+1} \cap A_j \neq \emptyset$. Entonces, $A' = A_{n+1} \cup A_j$ es un subconjunto conexo en X . Note que la colección $\{A_1, \dots, A_{n+1}, A'\} - \{A_{n+1}, A_j\}$ tiene n elementos y la unión de la colección es igual a X . Por la hipótesis de inducción, existe un elemento de la colección, que puede ser removido y la unión sigue siendo igual a X . Si ese elemento es distinto de A' se tiene lo deseado. Si el elemento es igual a A' , de la conexidad de X se tiene que podemos remover A_j o A_{n+1} y la unión sigue siendo igual a X , es decir, $l \in \{n+1, j\}$. Esto termina la demostración. \square

Lema 4.2. *Sea X un espacio topológico. Si U es un subconjunto abierto y C es un subconjunto conexo tal que $C \cap \text{Fr}_X(U) = \emptyset$ y $C \cap U \neq \emptyset$, entonces $C \subset U$.*

Demostración. Si $U = X$, el resultado se cumple. Supongamos que $U \neq X$. Note que $X = U \cup \text{Fr}_X(U) \cup \text{int}_X(X - U)$. Supongamos que $C \not\subset U$. Dado que $C \cap \text{Fr}_X(U) = \emptyset$, entonces $C = (C \cap U) \cup (C \cap \text{int}_X(X - U))$. Como $U, \text{int}_X(U)$ son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos, en X , obtenemos que C es desconexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $C \subset U$. \square

Definición 4.3. *Sean X, Y continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es **débilmente monótona** si f es continua, suprayectiva y para cualquier*

subcontinuo B de Y , tal que $\text{int}_Y(B) \neq \emptyset$, y cualquier componente A de $f^{-1}(B)$ se cumple que $f(A) = B$.

Definición 4.4. Sean X, Y continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es **cuasi-monótona** si f es continua, suprayectiva y para cualquier subcontinuo B de Y , tal que $\text{int}_Y(B) \neq \emptyset$, se cumple que $f^{-1}(B)$ tiene un número finito de componentes y la imagen bajo f , de cada componente es igual a B .

El siguiente resultados es consecuencia directa de las definiciones.

Teorema 4.5. Sean X, Y continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se cumple lo siguiente:

- Si f es monótona, entonces f es cuasi-monótona,
- Si f es cuasi-monótona, entonces f es débilmente monótona,
- Si f es confluyente, entonces f es débilmente monótona.

Note que la función tienda del Ejemplo 3.15, es una función cuasi-monótona que no es monótona. A continuación presentamos un ejemplo de una función que es débilmente monótona que no es cuasi-monótona.

Ejemplo 4.6. Sea $n \in \mathbb{N}$, consideremos $X_n = \{(x, \frac{x}{n}) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ y $X_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$. Sea $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. El continuo X es conocido como el abanico armónico. Consideremos la función $f : X \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x, y) = x$, es decir, la función f proyecta su primera coordenada sobre X_0 .

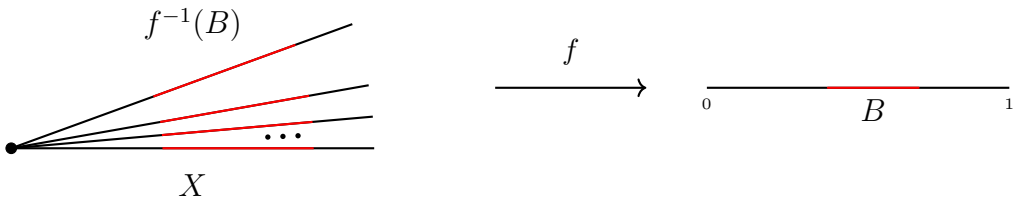


Figura 2: Función f .

Sea B un subcontinuo del intervalo $[0, 1]$ tal que $\text{int}_{[0,1]}(B) \neq \emptyset$, como se representa en la Figura 2. Note $f^{-1}(B)$ está determinado por los segmentos en color rojo del abanico armónico X , tal y como se muestra en la Figura 2. Sean $S_n \subset X_n$ dichos segmentos, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De la definición de f se tiene que $f(S_n) = B$, por ende, f es débilmente monótona. Además, $f^{-1}(B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$, dado que $S_n \cap S_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$, concluimos que f no es cuasi-monótona.

Ejemplo 4.7. Se presenta una función que es débilmente monótona pero no es confluyente. Sea X la cerradura en \mathbb{R}^2 del conjunto $T = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\}$, conocido como la curva del topólogo, el cual está representado en la Figura 3.

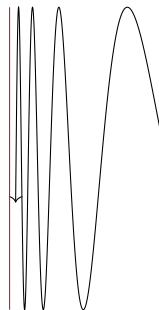


Figura 3: Continuo X .

Consideremos $\mathcal{D} = \{(0, -1), (0, 1)\} \cup \{(x, y) : (x, y) \in X \setminus \{(0, -1), (0, 1)\}\}$ una descomposición de X . Sea $Y = X/\mathcal{D}$ y $q_X : X \rightarrow Y$ la función cociente, recuerde que esta función es continua y suprayectiva. Por [7, Teorema 3.10] tenemos que Y es un continuo, el cual está representado en la Figura 4. Digamos que $D_X = \{(0, -1), (0, 1)\} \in Y$.

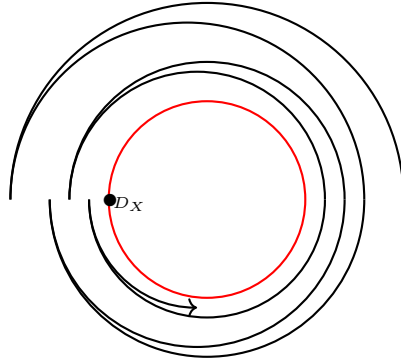


Figura 4: Continuo Y.

Sean $V_1 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, -\frac{1}{2}]\}$, $V_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2}, 1]\}$ y $B = q_X(V_1) \cup q_X(V_2)$. Note que $q_X(V_1)$ es un arco que une a los puntos $\{(0, -\frac{1}{2})\}$, D_X y $q_X(V_2)$ es un arco que une a los puntos $\{(0, \frac{1}{2})\}$, D_X ; respectivamente. Además, $q_X(V_1) \cap q_X(V_2) = D_X$. Por lo tanto, B es un continuo en Y . Sin embargo, las componentes de $q_X^{-1}(B)$ son V_1 y V_2 , las cuales cumplen que $q_X(V_1) \neq B \neq q_X(V_2)$, por ende q_X no es confluyente.

Sean $L = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$ y $S = q_X(L)$. Note que S es la circunferencia de la Figura 4 en color rojo. Para B un subcontinuo de Y tal que $\text{int}_Y(B) \neq \emptyset$ se cumple que $B \cap S = \emptyset$ o $S \subsetneq B$, por ende, $q_X^{-1}(B)$ es un continuo de la forma $\{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}$, con $a, b \in (0, 1]$, o bien, $L \cup \{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, b]\}$ para algún $b \in (0, 1]$, respectivamente. En ambos casos, $q_X^{-1}(B)$ es conexo y además, $q_X(q_X^{-1}(B)) = B$. Por lo tanto, q_X es débilmente monótona, más aún, q_X es cuasi-monótona.

Teorema 4.8. Sean X un continuo, Y un continuo localmente conexo y $f : X \rightarrow Y$ una función. Si f es débilmente monótona, entonces f es confluyente.

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función débilmente monótona. Supongamos que f no es confluyente, es decir, existe B un subcontinuo de Y y A una componente de $f^{-1}(B)$ tal que $f(A) \neq B$. Dado que $f(A) \subset B$, existe $b \in B$ tal que $f^{-1}(\{b\}) \cap A = \emptyset$. Como A componente de un subconjunto cerrado, se cumple que A es un subconjunto cerrado en X , por ende A es compacto. A su vez, dado que f es continua, se cumple que $f^{-1}(\{b\})$ es un subconjunto cerrado en X , por ende es compacto. Luego, existen U, V subconjuntos abiertos y disjuntos en X , tales que $A \subset U$ y $f^{-1}(\{b\}) \subset V$.

Luego, por el Lema 2.5 existe $r > 0$ tal que $f^{-1}(B_Y(b, r)) \subset V$. Dado que Y es localmente conexo, existe C un subconjunto abierto, conexo y no vacío en Y tal que $C \subset \text{cl}_Y(C) \subset B_Y(b, r)$. Sea $Z = B \cup \text{cl}_Y(C)$, Note que Z es un subcontinuo de Y , además dado que $C \subset Z$, se cumple que Z tiene interior no vacío. Note que $f^{-1}(Z) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(\text{cl}_Y(C))$ y $f^{-1}(\text{cl}_Y(C)) \subset V$, por ende A es una componente de $f^{-1}(Z)$. Como f es débilmente monótona, se cumple que $f(A) = Z$, esto implica que $B \subset f(A)$, es decir, $f^{-1}(\{b\}) \cap A \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, f es confluyente. \square

El siguiente resultado, es consecuencia de los Teoremas 4.8 y 4.5.

Corolario 4.9. *Sean X un continuo, Y un continuo localmente conexo y $f : X \rightarrow Y$ una función. Si f es cuasi-monótona, entonces f es confluyente.*

Teorema 4.10. *Sean X un continuo localmente conexo, Y un continuo y $f : X \rightarrow Y$ una función. Si f es débilmente monótona, entonces f es cuasi-monótona.*

Demostración. Por el Lema 2.7 se cumple que Y es localmente conexo. Tomemos B un subcontinuo propio de Y tal que $\text{int}_Y(B) \neq \emptyset$. Sea $y \in \text{int}_Y(B)$, como B es localmente conexo, existe U un subconjunto abierto y conexo en Y , tal que, $y \in U \subset \text{int}_Y(B)$. Como f es débilmente monótona, se cumple que si C es una componente de $f^{-1}(B)$, entonces $f(C) = B$. Por lo que, existe $c \in C$ tal que $f(c) = y$, por ende, $f^{-1}(\{y\}) \cap C \neq \emptyset$. Esto para cada componente de $f^{-1}(B)$.

De la continuidad de f , se tiene que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en X , como X es localmente conexo, por el Lema 2.6, se cumple que las componentes de X son subconjuntos abiertos en X . Digamos que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} K_i$, donde K_i es una componente de $f^{-1}(U)$. Como $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(\{p\})$ es un subconjunto compacto en X se cumple que existe K_1, \dots, K_n componentes de $f^{-1}(U)$ tal que $f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$. Dado que $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(B)$, existe C_i una componente de $f^{-1}(B)$ tal que $K_i \subset C_i$. Puesto que, $f^{-1}(\{y\})$ intersecciona a todas las componentes de $f^{-1}(B)$, podemos concluir que $f^{-1}(B)$ tiene una cantidad finita de componentes. \square

El siguiente resultado es consecuencia de los Teoremas 4.5, 4.10 y el Corolario 4.9.

Corolario 4.11. Sean X, Y continuos localmente conexos y $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Entonces, f es confluyente si y sólo si f es cuasi-monótona.

El siguiente resultado es consecuencia de los Teoremas 3.20, 4.5 y 4.10.

Corolario 4.12. Sean X un continuo localmente conexos, Y un continuo y $f : X \rightarrow Y$ una función. Si f es una función abierta, entonces f es cuasi-monótona.

Teorema 4.13. Sean X, Y continuos localmente conexos y $f : X \rightarrow Y$ una función ligera y suprayectiva. Entonces, f es una función cuasi-monótona si y sólo si f es una función abierta.

Demostración. Sea f una función ligera y suprayectiva. Si f es una función abierta, por el Corolario 4.12, se cumple que f es una función cuasi-monótona. Supongamos que f es una función cuasi-monótona. Veamos que f es una función abierta. Sea U un subconjunto abierto en X y $y \in f(U)$. Tomemos $x \in U \cap f^{-1}(\{y\})$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x, \varepsilon) \subset U$.

Dado que, f es ligera se cumple que $f^{-1}(\{y\})$ es un subconjunto compacto y totalmente desconexo en X . Por el Lema 2.1 existen K_1, \dots, K_n subconjuntos compactos, no vacíos y mutuamente disjuntos en X tales que $\text{diám}(K_i) < \varepsilon$ y $f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que $x \in K_j$, note que $K_j \subset B_X(x, \varepsilon)$.

Como X es un espacio métrico compacto, existen U_1, \dots, U_n subconjuntos abiertos y mutuamente disjuntos, en X , tales que $K_i \subset U_i$ para cada i y $\text{cl}_X(U_s) \cap \text{cl}_X(U_t) = \emptyset$ cuando $s \neq t$. Consideremos $V = B_X(x, \varepsilon) \cap U_j$. Note que $x \in V \subset U$. Supongamos que $\text{Fr}_X(V) \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Como $B_X(x, \varepsilon)$ y U_j son subconjuntos abiertos se cumple que $\text{Fr}_X(V) \subset \text{Fr}_X(B_X(x, \varepsilon)) \cap \text{Fr}_X(U_j)$. Sea $p \in \text{Fr}_X(V) \cap f^{-1}(\{y\})$. Entonces, existe $l \in \{1, \dots, n\}$ tal que $p \in K_l$. Además, $d(x, p) = \varepsilon$, por lo que $p \notin K_j$, es decir, $K_l \neq K_j$. Como $p \in \text{Fr}_X(U_j)$, se cumple que $p \in \text{cl}(U_j)$, esto implica que $\text{cl}(U_j) \cap K_l \neq \emptyset$, es decir, $\text{cl}(U_j) \cap U_l \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\text{Fr}_X(V) \cap f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Esto implica que, $y \in Y \setminus f(\text{Fr}_X(V))$. Sea C_y la componente de $Y \setminus f(\text{Fr}_X(V))$ que contiene a y . Por el Lema 2.2 se cumple que f es una función cerrada, así $f(Y \setminus f(\text{Fr}_X(V)))$ es un subconjunto abierto en Y . Luego, por el Teorema 2.6, se cumple que C_y es un subconjunto abierto en Y .

Como $f(x) = y$, se cumple que $x \in f^{-1}(C_y)$. Sea K la componente de $f^{-1}(C_y)$ tal que $x \in K$. A su vez, por el Corolario 4.11 se cumple que f es

una función confluyente. Así, por el Teorema 3.14 se cumple que $f(K) = C_y$. Dado que, $C_y \subset (Y \setminus f(\text{Fr}_X(V)))$ se cumple que $K \cap \text{Fr}_X(V) = \emptyset$. Por (*) se cumple que $x \in K \cap V$, es decir, $K \cap V \neq \emptyset$. Luego por el Lema 4.2 se cumple que $K \subset V$. Nuevamente por (*) se tiene que:

$$C_y = f(K) \subset f(V) \subset U.$$

Dado que $y \in C_y$ y C_y es un subconjunto abierto de Y , podemos concluir que $f(U)$ es un subconjunto abierto en Y . Por lo tanto, f es una función abierta. \square

Teorema 4.14. Sean X, Y y Z continuos, $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas. Si $h = g \circ f$, entonces se cumple lo siguiente:

- (1) Si f y g son funciones confluyentes, entonces h es una función confluyente.
- (2) Si h es una función confluyente, entonces g es una función confluyente.

Demostración. Para (1). Sea B un subcontinuo de Z y A una componente de $h^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Debemos probar que $h(A) = B$. Note que $A \subset X$. De la continuidad de f se tiene que $f(A)$ es un subconjunto conexo en $g^{-1}(B)$. Sea K la componente de $g^{-1}(B)$ tal que $f(A) \subset K$. De esto que $A \subset f^{-1}(K)$. Además, $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(g^{-1}(B)) = h^{-1}(B)$. Dado que A es una componente de $h^{-1}(B)$, entonces A es una componente de $f^{-1}(K)$.

Como g es una función confluyente, se cumple que $g(K) = B$. A su vez, de la continuidad de g se tiene que $g^{-1}(B)$ es un subconjunto cerrado de Y , por lo tanto, al ser K una componente de $g^{-1}(B)$, se cumple que K es un subconjunto cerrado de Y . Por ende, K es un subcontinuo de Y . Dado que f es una función confluyente, se cumple que $f(A) = K$. Así, $h(A) = (g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(K) = B$. Esto implica que h es una función confluyente.

Para (2). Sea B un subcontinuo de Z y K una componente de $g^{-1}(B)$. Queremos probar que $g(K) = B$. Note que $g(K) \subset B$, por lo que resta probar que $B \subset g(K)$. Sea C una componente de $f^{-1}(K)$. Luego $C \subset f^{-1}(K) \subset f^{-1}(g^{-1}(B)) = h^{-1}(B)$. Por ende, existe Q una componente de $h^{-1}(B)$ tal que $C \subset Q$. Dado que h es una función confluyente, tenemos que $h(Q) = B$. Como Q es conexo, de la continuidad de f , se cumple que $f(Q)$ es un subconjunto conexo en Y . Puesto que $Q \subset h^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$, entonces $f(Q) \subset g^{-1}(B)$. A su vez, como $C \subset Q$, se tiene que $f(C) \subset f(Q)$, dado que $f(C) \subset K$, se cumple que $f(Q) \cap K \neq \emptyset$. De la conexidad de $f(Q)$ se cumple que $f(Q) \subset K$. Así,

$h(Q) = g(f(Q)) \subset g(K)$, es decir, $B \subset g(K)$. Por lo tanto, $g(K) = B$. Esto prueba que g es una función confluyente. \square

Corolario 4.15. *Sean X un continuo localmente conexo, Y, Z continuos y $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas. Si $h = g \circ f$, entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) *Si f y g son funciones cuasi-monótonas, entonces h es una función cuasi-monótona.*
- (2) *Si h es una función cuasi-monótona, entonces g es una función cuasi-monótona.*

Demostración. Para (1). Por el Teorema 2.7, se cumple que Y, Z son continuos localmente conexos. El Corolario 4.11 implica que f y g son funciones confluyentes. Luego, por (1) del Teorema 4.14, se cumple que h es una función confluyente. Nuevamente, por el Corolario 4.11 se cumple que h es una función cuasi-monótona.

Para (2). Del Corolario 4.11 tenemos que h es una función confluyente. Luego, por el Teorema 4.10, se tiene que g es una función confluyente. Así, por el Corolario 4.11 se cumple que g es una función cuasi-monótona. \square

Corolario 4.16. *Sean X un continuo localmente conexo, Y, Z continuos y $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas. Si $h = g \circ f$, entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) *Si f y g son funciones débilmente monótonas, entonces h es una función débilmente monótona.*
- (2) *Si h es una función débilmente monótona, entonces g es una función débilmente monótona.*

Demostración. Para (1). Por el Teorema 2.7, se cumple que Y y Z son continuos localmente conexos. Luego, el Teorema 4.10 implica que f y g son funciones cuasi-monótonas. Así, por (1) del Teorema 4.15, se cumple que h es una función cuasi-monótona. Por lo tanto, del Teorema 4.5 tenemos que h es una función débilmente monótona.

Para (2). Por el Teorema 4.10 se cumple que h es una función cuasi-monótona. Luego, el Teorema 4.15 implica que g es una función cuasi-monótona. Así, por el Teorema 4.5 concluimos que g es una función débilmente monótona. \square

Ejemplo 4.17. *A continuación, veremos que la parte (1) del Teorema 4.16 no se cumple para continuos no localmente conexos. Consideremos X como el abanico armónico, unión $R = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{1}{2}]\}$, esto se muestra en la figura 5. Sea Y el abanico armónico, tal y como se muestra en el Ejemplo 3.15. También, consideremos Z como el intervalo cerrado $[0, 1]$.*

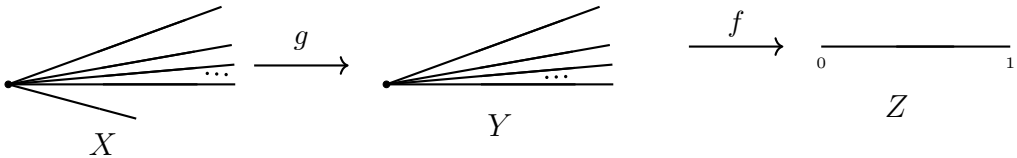


Figura 5: Composición de f y g .

Note que, X y Y son continuos que no son localmente conexos. Sea $g : X \rightarrow Y$ definida como:

$$g(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } y \geq 0 \\ (x, 0), & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Es decir, g proyecta todos los segmentos sobre el segmento X_0 . A su vez, consideramos $f : Y \rightarrow Z$ como $f(x, y) = x$. Note que, f, g son continuas y suprayectivas. Por el Ejemplo 3.15, se cumple que f es una función débilmente monótona.

Veamos que g es una función débilmente monótona. Sea $L_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{1}{2}]\}$ y B un subcontinuo de Y tal que $\text{int}_Y(B) \neq \emptyset$. Si $B \cap L_2 = \emptyset$, entonces $g^{-1}(B)$ es una copia homeomorfa de B , es decir, $g^{-1}(B)$ es conexo. Por otro lado, si $B \cap L_2 \neq \emptyset$, podemos considerar $x_0 = \max\{x \in [0, \frac{1}{2}] : (x, 0) \in B\}$. De esta manera, $g^{-1}(B) = B \cup \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, x_0]\}$. Note que, $g^{-1}(B)$ es conexo. Por lo tanto, $g^{-1}(B)$ tiene un número finito de componentes siempre. Además, en ambos casos se cumple que $g(g^{-1}(B)) = B$. Así, podemos concluir que g es una función cuasi-monótona y por ende débilmente monótona.

Finalmente, consideremos $f \circ g : X \rightarrow Z$. Veamos que $f \circ g$ no es débilmente monótona. Para ello, consideremos $B = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Note que, B es un subcontinuo de Z , tal que $\text{int}_Y(B) \neq \emptyset$. El continuo B y las componentes de $(f \circ g)^{-1}(B)$ se ilustran en la Figura 6.

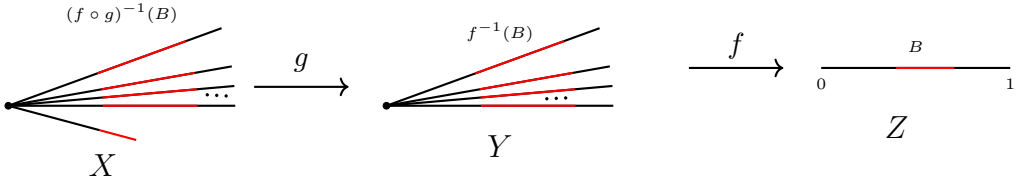


Figura 6: Continuo B y sus preimágenes.

Una componente de $(f \circ g)^{-1}(B)$ es el conjunto $C = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\}$. Pero, $(f \circ g)(C) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Es decir, $(f \circ g)(C) \neq B$. Esto implica que la función $f \circ g$ no es débilmente monótona.

Teorema 4.18. Sean X, Y continuos localmente conexos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces, f es cuasi-monótona si y sólo si existen M es un continuo, $f_1 : X \rightarrow M$ una función monótona y suprayectiva, y $f_2 : M \rightarrow Y$ una función ligera, abierta y suprayectiva tales que $f = f_2 \circ f_1$.

Demostración. Supongamos que existen M es un continuo, $f_1 : X \rightarrow M$ una función monótona y suprayectiva, y $f_2 : M \rightarrow Y$ una función ligera, abierta y suprayectiva tales que $f = f_2 \circ f_1$. Por el Teorema 4.5 se cumple que f_1 es una función cuasi-monótona. Del Teorema 2.7 se cumple que M es un continuo localmente conexo. Luego, por el Corolario 4.12 se tiene que f_2 es una función cuasi-monótona. Finalmente, por el Teorema 4.15 podemos concluir que f es una función cuasi-monótona.

Supongamos ahora que f es una función cuasi-monótona. Por el Teorema 3.10, existen M un espacio métrico compacto, $f_1 : X \rightarrow M$ una función monótona y suprayectiva, y $f_2 : M \rightarrow Y$ una función ligera y suprayectiva tal que $f = f_2 \circ f_1$. Dado que f_1 es una función continua y suprayectiva se cumple que M es un continuo localmente conexo. A su vez, del Teorema 4.15, tenemos que f_2 es una función cuasi-monótona. Finalmente, según el Teorema 4.13, f_2 es una función abierta. Esto concluye la demostración. \square

En el Teorema 4.18, se puede reemplazar la hipótesis de que f es una función cuasi-monótona por la condición de que f sea una función abierta, confluyente y débilmente monótona. Esta sustitución se justifica por el Corolario 4.12, el Corolario 4.11 y el Teorema 4.10, respectivamente.

Corolario 4.19. Una propiedad topológica es invariante bajo funciones cuasi-monótonas, confluentes o débilmente monótonas entre continuos local-

mente conexos, si y sólo si la propiedad es invariante bajo funciones monótonas, ligeras y abiertas entre continuos localmente conexos.

Concluimos esta sección, enunciando un resultado interesante, que es consecuencia de los resultados mostrados en esta sección.

Teorema 4.20. [7, Teorema 13.31] Sean X un arco (o una gráfica finita), Y un continuo no degenerado y $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Si f es una función cuasi-monótona, confluyente o débilmente monótona, entonces Y es un arco (o una gráfica finita). También, si X es una curva cerrada simple, entonces Y es un arco o una curva cerrada simple.

5 Grado de Multicoherencia

En esta sección final, se introduce el concepto de grado de multicoherencia de un continuo, el cual fue propuesto y estudiado por Samuel Eilenberg en [5]. Analizamos cómo se comporta este valor bajo funciones cuasi-monótonas, monótonas, confluentes y abiertas. El resultado más relevante de esta sección es el Corolario 5.6, que establece las condiciones bajo las cuales se preserva la unioherencia entre continuos, con funciones que cumplen con ciertas propiedades.

Definición 5.1. Sea X un continuo y consideremos la familia

$$\mathcal{C} = \{(A, B) : A, B \text{ son subcontinuos de } X \text{ y } A \cup B = X\}.$$

Para cada $(A, B) \in \mathcal{C}$, definimos $r(A, B)$ como

$$r(A, B) = |\{C : C \text{ es una componente de } A \cap B\}| - 1.$$

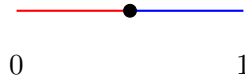
Si $A \cap B$ tiene un número infinito de componentes, decimos que $r(A, B) = \infty$. Entonces, el **grado de multicoherencia** de X , denotado por $r(X)$, se define como:

$$r(X) = \sup\{r(A, B) : (A, B) \in \mathcal{C}\},$$

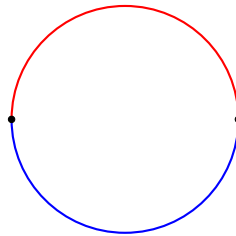
o bien $r(X) = \infty$, dependiendo de si el conjunto $\{r(A, B) : (A, B) \in \mathcal{C}\}$ es acotado superiormente o no.

Definición 5.2. Sea X un continuo, decimos que X es **unicoherente** si para cada par de subcontinuos A, B en X tales que $X = A \cup B$ se cumple que $A \cap B$ es conexo. Note que un continuo X es unicoherente si y sólo si $r(X) = 0$.

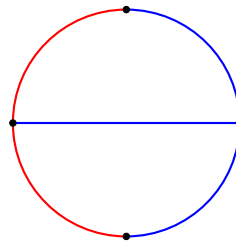
Note que si X es un arco, entonces $r(X) = 0$.



A su vez, si X es una curva cerrada simple entonces, $r(X) = 1$.



Si consideramos a X como la theta gráfica, entonces $r(X) = 2$.



Teorema 5.3. Sean X, Y continuos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función cuasi-monótona, entonces $r(Y) \leq r(X)$.

Demostración. Sean A, B subcontinuos de Y tales que $Y = A \cup B$. Vamos a probar que: a) $r(A, B) \leq r(X)$. Supongamos que $\text{int}_Y(A) = \emptyset$. Sea $y \in Y$, note que para todo $r > 0$ se cumple que $B_Y(y, r) \not\subseteq A$, y dado que $Y = A \cup B$, entonces $B_Y(y, r) \cap B \neq \emptyset$, es decir, $y \in \text{cl}_Y(B) = B$. Esto implica que $B = Y$. Luego, $A \cap B = A$, es decir, $r(A, B) = 0 \leq r(X)$. Por ende, se cumple (a). Si $\text{int}_Y(B) = \emptyset$, se llega al mismo resultado.

Supongamos que $\text{int}_Y(A) \neq \emptyset$ y $\text{int}_Y(B) \neq \emptyset$. Como f es una función cuasi-monótona, se cumple que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subconjuntos cerrados

en X que tienen una cantidad finita de componentes, tales que la imagen bajo f , de cada componente es igual a A o B , respectivamente. Sea $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_m, K_{m+1}, \dots, K_n\}$, donde K_i es una componente de $f^{-1}(A)$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y K_j es una componente de $f^{-1}(B)$, para cada $i \in \{m+1, \dots, n\}$. Entonces, $f(K_i) = A$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y $f(K_j) = B$ para cada $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Como f es una función suprayectiva, se cumple que $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$, por ende, $\bigcup \mathcal{F} = X$. Por el Lema 4.1, existe $l \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\bigcup_{i \neq l} K_i$ es un subcontinuo en X . Sea $C = \bigcup_{i \neq l} K_i$, note que C, K_l son

dos subcontinuos en X tales que $C \cup K_l = X$, entonces $r(C, K_l) \leq r(X)$. Es decir, para probar (a), basta con probar que: (b) $r(A, B) \leq r(C, K_l)$.

Para ello probaremos que: (c) $f(K_l \cap C) = A \cap B$ ya que, de la continuidad y sobreyectividad de f se cumpliría que, por cada componente de $A \cap B$ existe una componente de $C \cap K_l$, esto implicaría (b). Supongamos sin perder generalidad que K_l es una componente de $f^{-1}(A)$, es decir, $l \in \{1, \dots, m\}$. Por ende, $K_l \cap K_i = \emptyset$, para todo $i \in \{1, \dots, m\} - \{l\}$. De esto se tiene que:

$$\begin{aligned} K_l \cap C &= K_l \cap \left(\bigcup_{i \neq l} K_i \right) \\ &= \bigcup_{i \neq l} (K_l \cap K_i) \\ &= \bigcup_{i=m+1}^n (K_l \cap K_i) \\ &\subset f^{-1}(A \cap B). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(K_l \cap C) \subset A \cap B$. Sea $y \in A \cap B$, como $f(K_l) = A$, existe $x \in K_l$ tal que $f(x) = y$. Esto implica que $x \in f^{-1}(B)$, por lo que existe una componente de $f^{-1}(B)$ que tiene a x , es decir, existe $j \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $x \in K_j$. Dado que, $l \neq j$ y $X = C \cup K_l$, se cumple que $x \in C$. Por ende, $x \in K_l \cap C$, así $y = f(x) \in f(K_l \cap C)$. Por lo tanto, $A \cap B \subset f(K_l \cap C)$. Con esto, hemos probado (c), lo cual implica (b). Luego, $r(A, B) \leq r(C, K_l) \leq r(X)$. Como A, B se tomaron de forma arbitraria, podemos concluir que $r(Y) \leq r(X)$. \square

Corolario 5.4. Sean X un continuo unicoherente y Y un continuo. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función cuasi-monótona, entonces Y es unicoherente.

El Corolario 5.5 es consecuencia de los Teoremas 4.5, 5.3 y del Corolario 5.4.

Corolario 5.5. *Sean X, Y continuos y $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Si f es una función monótona, entonces $r(Y) \leq r(X)$. En particular, si X es uncoherente, entonces Y es uncoherente.*

Finalmente, el Corolario 5.6 es consecuencia de los Teoremas 2.7, 5.3 y los Corolarios 4.11, 4.12 y 5.4.

Corolario 5.6. *Sean X un continuo localmente conexo y Y un continuo. Si existe $f : X \rightarrow Y$ una función abierta o confluyente, entonces $r(X) \leq r(Y)$. En particular, si X es uncoherente, entonces Y es uncoherente.*

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

- [1] Fidel Casarrubias-Segura y Angel Tamariz-Mascarúa. *Elementos de topología general*. Spanish. Vol. 37. Aportaciones Mat., Textos. México: Sociedad Matemática Mexicana; (2012). ISBN: 978-607-02-3000-4.
- [2] Charatonik J., *Confluent mappings and uncoherence of continua*, Topology Appl., 33 (1989), 209–215.
- [3] Charatonik J., *On feebly monotone and related classes of mappings*, Topology Appl., 105 (2000), 15–29.
- [4] Ryszard Engelking, *General topology*. English. Rev. and compl. ed. Vol. 6. Sigma Ser. Pure Math. Berlin: Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 3-88538-006-4.
- [5] Eilenberg S., *Sur les espaces multicohérents*, I., Fund. Math., 27(1936), 153–190.

- [6] Maćkowiak T., *Continuos mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat), 158 (1979), 1–95.
- [7] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx
dherrera@fcm.buap.mx
fmacias@fcm.buap.mx

Capítulo 6

Un repaso a los límites inversos: teoría básica y ejemplos

Jesús Fernando Tenorio Arvide, Raymundo Velasco
Vasquez, Cenobio Yescas Aparicio¹

Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Tecnológica de la Mixteca

Resumen

En este capítulo presentamos una breve introducción a la teoría de límites inversos, priorizamos el desarrollo de ciertos ejemplos, analizamos las principales propiedades topológicas preservadas por esta operación y nos enfocamos en demostrar condiciones bajo las cuales un límite inverso sea no vacío. Lo anterior con la finalidad de que el escrito pueda servir de bibliografía de consulta para quienes deseen iniciarse en la teoría básica de los límites inversos.

1 Introducción

En matemáticas, el conocimiento de las diversas técnicas y herramientas que subyacen en cada área resulta ser fundamental. En topología general, algunas herramientas usuales suelen denominarse «operaciones topológicas», las cuales tienen el objetivo de estudiar el comportamiento de alguna propiedad topológica sobre algún espacio dado. Operaciones comunes son, por ejemplo, el producto de espacios topológicos, imagen bajo una función continua, uniones o sumas topológicas. Otra de las operaciones bastante empleada es la denominada

¹Autor para correspondencia. Este trabajo fue realizado con el apoyo del programa de Estancias Posdoctorales por México por parte de CONAHCYT (actualmente SECIHTI), octubre de 2023 a septiembre de 2025.

operación de límite inverso. En el año de 1929, P. Alexandroff en [1] da el primer indicio de lo que posteriormente S. Lefschetz definiría como límite inverso en [7], donde describe que Alexandroff, estudiando espacios métricos, obtuvo cierta sucesión de complejos simpliciales que con ayuda de proyecciones especiales «aproximan» a espacios métricos compactos, gestando así la noción de límite inverso. De esta forma, desde su aparición, los límites inversos pasaron a ser objeto de estudio de la comunidad matemática, se empezaron a estudiar las propiedades topológicas usuales (compacidad, ser Hausdorff, metrizable, etc.) bajo dicha operación. No está demás mencionar que la definición de límite inverso se puede ver de manera categórica (en este sentido lo «topológico» no hace restrictiva la definición). De hecho, en algunas áreas como el álgebra (ver [2]) o el análisis (ver [3]), se ha adecuado el concepto de límite inverso, donde lo topológico no es la parte principal y se han obtenido resultados exitosos de estudio. La conveniencia de la operación topológica de límite inverso continúa bastante presente en la actualidad, se siguen estudiando diversas propiedades topológicas (recientes o no tan recientes), ya sea para mostrar su preservación (invarianza) o bien en la generación de algún contraejemplo. Así, dada la importancia en la topología de los límites inversos, en este trabajo presentamos una breve introducción a esta teoría. Priorizamos el desarrollo de ciertos ejemplos, analizamos las principales propiedades topológicas preservadas por un límite inverso y nos enfocamos en demostrar condiciones bajo las cuales un límite inverso sea no vacío. Consideramos que uno de los aportes principales del escrito es la selección y presentación, en la medida de lo posible detallada, de resultados que se encuentran dispersos en la literatura, unificándolos tanto en temas como en notación y estilo. Todo esto con la intención de que el escrito sirva de bibliografía de consulta para quienes deseen conocer los hechos básicos de esta teoría.

2 Preliminares

En esta sección, con la finalidad de hacer el trabajo lo más autocontenido posible, enunciamos parte de la notación y resultados en teoría de conjuntos y topología general que empleamos. Si el lector requiere conocer con mayor detalle sobre estos preliminares le recomendamos los textos [5, 6, 9]. Para la lectura de este trabajo se requieren nociones de topología básica o lo

equivalente a un curso básico de topología general.

Para el conjunto vacío usamos la notación \emptyset . Dado un conjunto A , al conjunto potencia de A lo denotamos como $\mathcal{P}(A)$. Con $[A]^{<\omega}$ (respectivamente $[A]^{\leq\omega}$) representamos la familia de subconjuntos finitos (respectivamente numerables) de A . Como es usual, \mathbb{R} indica el conjunto de los números reales y \mathbb{N} el conjunto de los números naturales. Dada una función $f : A \rightarrow B$ y un subconjunto $C \subseteq A$, denotamos y definimos la función f restringida a C como $f|_C : C \rightarrow B$ tal que $f|_C(x) = f(x)$, para todo $x \in C$.

Por otro lado, recordemos que si X es un espacio topológico, a los elementos de X se les denomina conjuntos abiertos. Como ejemplos esenciales de topologías sobre un conjunto encontramos la discreta, la indiscreta y la cofinita. Recordamos esta última a continuación.

Ejemplo 2.1. *Para un conjunto no vacío X , la topología cofinita sobre X la denotamos y definimos como $\tau_{\text{cof}} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$.*

Uno de los hechos fundamentales en topología es el siguiente. Dado un espacio topológico (X, τ) , una subfamilia \mathcal{B} de τ es una base para τ si para cada $x \in X$ y para cada $U \in \tau$ con $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Si \mathcal{B} es una base para τ , a sus elementos se les llama conjuntos básicos de la topología τ .

Ahora bien, si X es un conjunto arbitrario, la forma de generar una topología sobre X a partir de una familia de subconjuntos de X es como sigue.

Definición 2.2. *Sean X es un conjunto no vacío y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se dice que \mathcal{B} es base para alguna topología τ sobre X , si se cumplen las condiciones:*

- a) $X = \bigcup \mathcal{B}$.
- b) Para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

A τ se le llama topología generada por la base \mathcal{B} .

La siguiente noción, que usamos en el escrito sin mención explícita, también es un hecho interesante respecto a la topología de un conjunto. Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces la colección $\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$ es una topología para A y se le llama la topología heredada para A o la topología de subespacio.

Para los fines de nuestra exposición, requerimos recordar que un espacio topológico X es compacto si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita. Más aún, una caracterización bastante conocida de la compacidad es la siguiente.

Teorema 2.3. *Sea X un espacio topológico. Se tiene que X es compacto si y solo si cada familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.*

A su vez, tenemos en cuenta las siguientes nociones. Dados los espacios topológicos X y Y y una función $f : X \rightarrow Y$, se dice que f es continua en X si para todo subconjunto abierto V en Y , $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto en X . Además, f es una función abierta (cerrada) si para cada subconjunto abierto (cerrado) A de X , $f(A)$ es un subconjunto abierto (cerrado) de Y . Finalmente, decimos que h es un homeomorfismo de X a Y si h es continua, biyectiva y h^{-1} es continua. Si existe un homeomorfismo de X a Y , decimos que X es homeomorfo a Y .

Pasamos ahora a recordar una de las nociones primordiales para entender los límites inversos, a saber, los conjuntos dirigidos.

Definición 2.4. *Sea Δ un conjunto no vacío. Se dice que Δ es un conjunto dirigido si hay una relación binaria \leq en Δ que satisfice*

- a) (Reflexividad) $\lambda \leq \lambda$, para todo $\lambda \in \Delta$.
- b) (Transitividad) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Delta$, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$.
- c) (Anti-simetría) Para $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta$, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_1$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2$.
- d) (Dirección) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta$, entonces existe algún $\lambda_3 \in \Delta$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Notemos que las condiciones a), b) y c) de la Definición 2.4 indican que \leq es un orden parcial en Δ . Veamos los siguientes ejemplos de conjuntos dirigidos, de los cuales no es difícil verificar su veracidad.

Ejemplo 2.5.

- i) El conjunto \mathbb{N} con el orden usual de \mathbb{R} es un conjunto dirigido.

ii) Si X es un conjunto no vacío, entonces $\mathcal{P}(X)$ es un conjunto dirigido con el orden de la contención de conjuntos. En particular, $[X]^{<\omega}$ y $[X]^{\leq\omega}$ son conjuntos dirigidos con el orden de la contención.

A partir de la parte d) de la Definición 2.4, esto es la condición de dirección en un conjunto dirigido, obtenemos lo siguiente.

Proposición 2.6. Si Δ es un conjunto dirigido y F un subconjunto finito de Δ , entonces existe $\lambda' \in \Delta$ tal que $\lambda \leq \lambda'$, para todo $\lambda \in F$.

Demostración. Sean Δ un conjunto dirigido y F un subconjunto finito de Δ . Pongamos $F = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in F$, por definición de conjunto dirigido existe $\beta_1 \in \Delta$ tal que $\lambda_1, \lambda_2 \leq \beta_1$. Aplicando nuevamente la definición para λ_3 y β_1 , existe $\beta_2 \in \Delta$ tal que $\lambda_3, \beta_1 \leq \beta_2$. Por transitividad del conjunto dirigido, tenemos que $\lambda_1, \lambda_2 \leq \beta_2$. Siguiendo esta idea, de manera inductiva obtenemos la existencia de $\lambda' \in \Delta$ tal que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq \lambda'$. \square

La noción de conjunto dirigido permite definir el siguiente concepto de red.

Definición 2.7. Una red en un conjunto X es una función $P : \Delta \rightarrow X$, donde Δ es algún conjunto dirigido.

Si P es una red en un conjunto X y $\lambda \in \Delta$, al elemento $P(\lambda) \in X$ lo denotamos por x_λ . Hacemos mención de «la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ » sin hacer mención explícita de la función P , a menos que sea requerido. Como es conocido, la definición de red permite extender la de sucesión y la de convergencia de una sucesión a un sentido más general.

Definición 2.8. Sean Δ un conjunto dirigido y $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ una red en un espacio topológico X . Se dice que $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ converge a $x \in X$ (indicado por $x_\lambda \rightarrow x$), si para todo conjunto abierto U que contiene a x , existe algún $\lambda_0 \in \Delta$ tal que para todo $\lambda \in \Delta$ con $\lambda \geq \lambda_0$, se tiene que $x_\lambda \in U$.

No es difícil notar que dadas una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ en un espacio X y una función $f : X \rightarrow Y$, tenemos que $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ es una red en Y . De esto obtenemos la conocida caracterización mediante redes de la continuidad de una función.

Teorema 2.9. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se tiene que f es continua en X si y solo si para todo $x \in X$ y para cualquier red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ en X tal que $x_\lambda \rightarrow x$ en X , se cumple que $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ en Y .

La otra noción fundamental para poder entender la definición de límite inverso es la de topología producto. Para ello recordamos el concepto de producto cartesiano arbitrario el cual, gracias al Axioma de Elección, podemos asegurar que es no vacío cuando consideramos una familia infinita de conjuntos no vacíos (vea [6, Teo. 8.5]).

Definición 2.10. Sean I un conjunto no vacío y $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos. El producto cartesiano de los conjuntos X_α es definido y denotado por:

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{x: I \rightarrow \cup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid x(\alpha) \in X_\alpha, \text{ para cada } \alpha \in I\}.$$

Para cada $\beta \in I$, la función $\pi_\beta: \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ definida por $\pi_\beta(x) = x(\beta)$ es llamada proyección del producto $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ al factor X_β o la β -ésima proyección de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

En la práctica, si $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, a x se le suele pensar y utilizar como $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$, y en consecuencia, la imagen de x bajo la β -ésima proyección se escribe como $\pi_\beta(x) = x_\beta$.

Notación 2.11. Para el caso cuando se tiene un espacio X tal que $X_\alpha = X$, para cada $\alpha \in I$, al elemento de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que todas sus coordenadas sean igual a z , para algún $z \in X$, lo denotamos por $(z)_{\alpha \in I}$. Así, $\pi_\alpha((z)_{\alpha \in I}) = z$.

Sigue ahora asociar una topología al producto. Como es sabido, la topología inmediata a asociar es la *topología de la caja* (vea [9, Cap. 8]). Sin embargo, en algunas situaciones resulta no ser tan «práctica», por lo que en su lugar, la topología que se suele ocupar es la que está definida a través de la siguiente base.

Definición 2.12. Sean I un conjunto no vacío y $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. La topología producto o topología de Tychonoff en el producto cartesiano $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es la generada por la base:

$$\left\{ \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid F \in [I]^{<\omega} \text{ y } U_\alpha \in \tau_\alpha, \text{ para cada } \alpha \in F \right\}.$$

No es complicado verificar que efectivamente esta familia cumple las condiciones de la Definición 2.2.

Dado que las funciones proyección son muy importantes en los espacios producto, enunciamos las Proposiciones 2.13 y 2.14 y el Teorema 2.15 para la visualización de algunas de sus propiedades principales. Las demostraciones de estos resultados se pueden consultar en [9].

Proposición 2.13. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Para todo $\beta \in I$, se tiene que la función $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ es continua, sobreyectiva y abierta.*

Proposición 2.14. *Sean X un espacio topológico, $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos y $f : X \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ una función. Se tiene que f es continua si y solo si $\pi_\beta \circ f$ es continua, para todo $\beta \in I$.*

La Figura 1 brinda una idea más clara de la Proposición 2.14.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \\
 \searrow \pi_\beta \circ f & & \swarrow \pi_\beta \\
 & & X_\beta
 \end{array}$$

Figura 1: Composición de las funciones π_β y f .

El siguiente es un resultado que caracteriza la convergencia de una red en un espacio producto.

Teorema 2.15. *Sean $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos y $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ una red en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Se tiene que $x_\lambda \rightarrow x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ si y solo si para todo $\beta \in I$, se cumple que la red $\{\pi_\beta(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Delta}$ en X_β es tal que $\pi_\beta(x_\lambda) \rightarrow \pi_\beta(x)$.*

Los resultados que siguen exponen el comportamiento de los espacios producto en relación a algunas propiedades topológicas clásicas. Respecto a los axiomas de separación en un espacio producto, contamos con la siguiente equivalencia.

Teorema 2.16. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Dado $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, se tiene que $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es T_i si y solo si X_β es T_i , para cada $\beta \in I$.*

De manera análoga a lo garantizado para los axiomas de separación, tenemos lo correspondiente al caso de los axiomas de numerabilidad.

Teorema 2.17. *Sea $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Se tiene que*

- (i) $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es primero (segundo) numerable si y solo si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es primero (segundo) numerable.
- (ii) $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es metrizable si y solo si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es metrizable.

Finalmente, recordemos el siguiente resultado importante de la topología.

Teorema 2.18 (Teorema de Tychonoff). *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia no vacía de espacios topológicos. Se tiene que $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es un espacio compacto si y solo si X_α es un espacio compacto, para cada $\alpha \in I$.*

3 Límites inversos: definición y ejemplos

Una vez que en la Sección 2 hemos expuesto entre otros temas algunas propiedades de los conjuntos dirigidos y de espacios producto, tenemos la herramienta básica para atender el concepto principal de este trabajo.

Definición 3.1. *Un sistema inverso o espectro inverso es una terna conformada por un conjunto dirigido Δ , una familia de espacios $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ y una familia de funciones continuas $\{p_\alpha^\beta : X_\beta \rightarrow X_\alpha \mid \alpha, \beta \in \Delta \text{ y } \alpha \leq \beta\}$ que cumple lo siguiente:*

- a) p_α^α es la función identidad en X_α , para cada $\alpha \in \Delta$; y
- b) $p_\alpha^\beta \circ p_\beta^\gamma = p_\alpha^\gamma$ siempre que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Un sistema inverso lo denotamos por $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, donde a las funciones p_α^β se les llama funciones *enlace* o *de ligadura*. La composición enunciada en la parte b) de la Definición 3.1 indica que para $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, el diagrama de la Figura 2 conmuta.

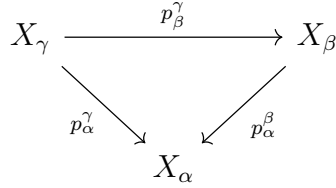


Figura 2: Composición de las funciones enlace.

Aunque la noción de límite inverso aparece por primera vez en [1] en el año de 1929, la definición que enunciamos aquí es la que se considera actualmente en la literatura y es presentada formalmente por S. Lefschetz en 1931 en su artículo [7].

Definición 3.2. *El límite inverso de un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ se define como*

$$\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha \mid \text{si } \alpha \leq \beta, \quad p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha \right\}.$$

Notación 3.3. *Dado $\alpha \in \Delta$, denotamos por p_α la α -ésima proyección del producto $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ restringida a $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, esto es, $p_\alpha = \pi_\alpha|_{\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle}$.*

Observemos el siguiente hecho que involucra las funciones enlace con las proyecciones restringidas al límite inverso.

Proposición 3.4. *Si $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un sistema inverso, entonces $p_\alpha^\beta \circ p_\beta = p_\alpha$, para cada $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$.*

Demostración. Sea $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Se cumple que $(p_\alpha^\beta \circ p_\beta)(x) = p_\alpha^\beta(p_\beta(x)) = p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha = p_\alpha(x)$. De esta manera obtenemos que $p_\alpha^\beta \circ p_\beta = p_\alpha$. □

El siguiente lema es de gran ayuda al momento de trabajar con límites inversos, pues muestra una forma especial de visualizarlos.

Lema 3.5. *Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ un sistema inverso. Para cada $\beta \in \Delta$, sea $A_\beta = \{(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha \mid p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha, \text{ para } \alpha \leq \beta\}$. Se cumple la igualdad $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$.*

Demostración. Probamos la igualdad por contención de conjuntos. Para esto, primero tomemos $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Para ver que x está en la intersección de los conjuntos A_α tomemos $\beta \in \Delta$. Al estar x en el límite inverso, tenemos que $p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$, para todo $\alpha \leq \beta$. De donde, $x \in A_\beta$. Así, $x \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$, por lo que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$. Ahora tomemos $x \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ y $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \leq \beta$. Como $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in A_\beta$, tenemos que $p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$. Así, $x \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ y por lo tanto $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subseteq \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Así, se tiene la igualdad deseada. \square

Por otra parte, la construcción de límites inversos es relativamente sencilla, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6. Sean X un espacio y Δ un conjunto dirigido arbitrarios. Para cada $\alpha \in \Delta$, definimos $X_\alpha = X$. Además, para $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$ tomemos p_α^β igual a la función identidad. De esta manera obtenemos un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Veamos ahora que el límite inverso del sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es homeomorfo a X . Para ello analizamos el comportamiento de los elementos del límite inverso. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Fijemos un $\alpha \in \Delta$ y comparémoslo con un $\beta \in \Delta$ arbitrario. Por ser Δ un conjunto dirigido, existe $\gamma \in \Delta$ tal que $\alpha, \beta \leq \gamma$. Por un lado, por la definición de límite inverso, $p_\beta^\gamma(x_\gamma) = x_\beta$ y $p_\alpha^\gamma(x_\gamma) = x_\alpha$; por otro lado, sabemos que las funciones las establecimos como la identidad. Así, $p_\beta^\gamma(x_\gamma) = x_\gamma$ y $p_\alpha^\gamma(x_\gamma) = x_\gamma$. En consecuencia $x_\alpha = x_\beta$. Como β lo tomamos arbitrario, existe $x \in X$ tal que $x_\alpha = x$, para todo $\alpha \in \Delta$, es decir, $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} = (x)_{\alpha \in \Delta}$ (vea la Notación 2.11). Definimos $h : \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle \rightarrow X$ como $h((x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}) = x$. No es difícil mostrar que h es un homeomorfismo.

Las dos proposiciones siguientes nos proporcionan formas de generar límites inversos más interesantes, en cierto sentido, más interesantes de lo que se muestra en el Ejemplo 3.6. Estos resultados fueron tomados de [4, Sección 1.2] y aquí presentamos las demostraciones detalladamente.

Proposición 3.7. Para cualquier familia de espacios $\{Z_i \mid i \in I\}$, donde I es un conjunto no vacío, existe un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tal que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es homeomorfo al producto $\prod_{i \in I} Z_i$.

Demostración. Primero veamos la manera de generar el sistema inverso. Consideremos $\Delta = [I]^{<\omega}$ con la relación de contención de conjuntos. Por el Ejemplo 2.5-(ii), tenemos que Δ es un conjunto dirigido. Para cada $\alpha \in \Delta$, sea

$X_\alpha = \prod_{i \in \alpha} Z_i$. Además, dados $\alpha, \beta \in \Delta$ tales $\alpha \leq \beta$, definimos las funciones $p_\alpha^\beta : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ como $p_\alpha^\beta((x_i)_{i \in \beta}) = (x_i)_{i \in \alpha}$, para todo $(x_i)_{i \in \beta} \in X_\beta$. Notemos que las funciones p_α^β resultan continuas a consecuencia de que las proyecciones usuales π_α son continuas. Veamos que las funciones p_α^β son funciones enlace, es decir, que se cumplen las condiciones a) y b) de la Definición 3.1.

- a) Sean $\alpha \in \Delta$ y $(z_i)_{i \in \alpha} \in X_\alpha$. Se cumple que $p_\alpha^\alpha((z_i)_{i \in \alpha}) = (z_i)_{i \in \alpha}$, por lo que p_α^α es la función identidad.
- b) Ahora tomemos $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ y $(x_i)_{i \in \gamma} \in X_\gamma$. Se cumple que $p_\alpha^\beta(p_\beta^\gamma((x_i)_{i \in \gamma})) = p_\alpha^\beta((x_i)_{i \in \beta}) = (x_i)_{i \in \alpha} = p_\alpha^\gamma((x_i)_{i \in \gamma})$. De donde, $p_\alpha^\beta \circ p_\beta^\gamma = p_\alpha^\gamma$.

Con ello, $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un sistema inverso. Veamos ahora que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es homeomorfo al producto $\prod_{i \in I} Z_i$. Para ello, para cada $i \in I$, sea $\alpha_i = \{i\}$, y definamos la función $h : \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle \rightarrow \prod_{i \in I} Z_i$ como $h((x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}) = (\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i \in I}$, para cada $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Debemos demostrar que h es un homeomorfismo. Primero veamos que h es inyectiva. Tomemos dos elementos $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}, (y_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tales que $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \neq (y_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$. Esto quiere decir que existe $\beta \in \Delta$ tal que $x_\beta \neq y_\beta$. Por la construcción de X_β , existe $j \in \beta$ tal que $\pi_j(x_\beta) \neq \pi_j(y_\beta)$. En consecuencia $(\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i \in I} \neq (\pi_i(y_{\alpha_i}))_{i \in I}$ y por la definición de h se sigue que $h((x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}) \neq h((y_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$. Ahora probemos que h es sobreyectiva. Tomemos $(z_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Z_i$. Para cada $\alpha \in \Delta$ definamos el elemento $x_\alpha = (z_i)_{i \in \alpha} \in X_\alpha$. Tomando $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$, tenemos que $p_\alpha^\beta(x_\beta) = p_\alpha^\beta((z_i)_{i \in \beta}) = (z_i)_{i \in \alpha} = x_\alpha$. De esta manera $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ y $h((x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}) = (\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i \in I} = (z_i)_{i \in I}$. Lo que verifica que h es sobreyectiva. Veamos que h es continua, para ello utilizamos la caracterización dada en el Teorema 2.9. Sea A un conjunto dirigido y consideremos una red $\{(x_\alpha^\lambda)_{\alpha \in \Delta}\}_{\lambda \in A}$ en $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tal que $(x_\alpha^\lambda)_{\alpha \in \Delta} \rightarrow (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$, para algún $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Debemos verificar que $h((x_\alpha^\lambda)_{\alpha \in \Delta}) \rightarrow h((x_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$, esto es $(\pi_i(x_{\alpha_i}^\lambda))_{i \in I} \rightarrow (\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i \in I}$. Por la convergencia de $\{(x_\alpha^\lambda)_{\alpha \in \Delta}\}_{\lambda \in A}$ y la continuidad de las funciones proyección, tenemos que para todo $i \in I$, $x_{\alpha_i}^\lambda \rightarrow x_{\alpha_i}$, es decir, $\pi_i(x_{\alpha_i}^\lambda) \rightarrow \pi_i(x_{\alpha_i})$. Como esto se cumple para todo $i \in I$, obtenemos que $(\pi_i(x_{\alpha_i}^\lambda))_{i \in I} \rightarrow (\pi_i(x_{\alpha_i}))_{i \in I}$. Por lo tanto, h es continua. Notemos que la inyectividad de h garantiza la existencia de h^{-1} . Mostremos que h^{-1} es continua. Para esto tomemos una red $\{(z_i^\lambda)_{i \in I}\}_{\lambda \in A}$ en $\prod_{i \in I} Z_i$ tal que $(z_i^\lambda)_{i \in I} \rightarrow (z_i)_{i \in I}$, para algún $(z_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Z_i$. Ya que h es biyectiva, para

todo $\lambda \in A$, existe un único $(x_\alpha^\lambda)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tal que $h^{-1}((z_i^\lambda)_{i \in I}) = (x_\alpha^\lambda)_{\alpha \in \Delta}$. De igual forma para $(z_i)_{i \in I}$, existe un único $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tal que $h^{-1}((z_i)_{i \in I}) = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$. Como $(z_i^\lambda) \rightarrow z_i$, para cada $i \in I$, por el Teorema 2.15 $(z_i^\lambda)_{i \in \alpha} = x_\alpha^\lambda \rightarrow (z_i)_{i \in \alpha} = x_\alpha$, para cada $\alpha \in \Delta$. Aplicando nuevamente el Teorema 2.15, tenemos que $(x_\alpha^\lambda)_{\alpha \in \Delta} \rightarrow (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$. Por lo que h^{-1} es continua. Así, queda verificado que h es un homeomorfismo y de esta forma se demuestra que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es homeomorfo a $\prod_{i \in I} Z_i$. \square

Culminamos esta sección mostrando que al igual que en la Proposición 3.7, en el siguiente resultado encontramos otra idea clara de generar límites inversos.

Proposición 3.8. *Sean X un espacio topológico infinito y $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que para $A, B \in \Delta$, existe $C \in \Delta$ con $C \subseteq A \cap B$. Se tiene que existe un sistema inverso $\langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$ con la propiedad de que $\varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$ es homeomorfo a $\bigcap \Delta$.*

Demostración. No es difícil verificar que Δ es un conjunto dirigido con el orden de la contención inversa. Ahora, para cada $A \in \Delta$, sea $X_A = A$. Construyamos las funciones enlace. Tomemos $A, B \in \Delta$ con $A \leq B$ y definamos $p_A^B : X_B \rightarrow X_A$ como la función inclusión. Por la forma en que definimos p_A^B , tenemos el sistema inverso $\langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$. Veamos ahora que $\varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$ es homeomorfo a $\bigcap \Delta$. Primero analizamos la naturaleza de los elementos en $\varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$. Para ello tomemos $(x_A)_{A \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$ y $A, B \in \Delta$. Por ser Δ un conjunto dirigido, existe $C \in \Delta$ tal que $A, B \leq C$. Por definición de límite inverso $p_A^C(x_C) = x_A$ y $p_B^C(x_C) = x_B$. Por otro lado, por definición de función enlace tenemos que $p_A^C(x_C) = x_C$ y $p_B^C(x_C) = x_C$. En consecuencia $x_A = x_B$. Dado que A y B los tomamos arbitrarios, existe $x \in \bigcap \Delta$ tal que $(x_A)_{A \in \Delta} = (x)_{A \in \Delta}$ (recuerde la Notación 2.11). Tomando en cuenta lo anterior, definamos la función $h : \varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle \rightarrow \bigcap \Delta$, como $h((x)_{A \in \Delta}) = x$, para cada $x \in \varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$. Probemos que h es un homeomorfismo. Para mostrar la inyectividad de h , tomemos $(x)_{A \in \Delta}, (y)_{A \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$ tales que $(x)_{A \in \Delta} \neq (y)_{A \in \Delta}$. De esta manera $x \neq y$, por lo que $h((x)_{A \in \Delta}) \neq h((y)_{A \in \Delta})$. Por otro lado, si $x \in \bigcap \Delta$, tenemos que $(x)_{A \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$ y $h((x)_{A \in \Delta}) = x$, por lo que h es sobreyectiva. Ahora mostramos que h es continua. Sea $\{(x^\lambda)_{A \in \Delta}\}_{\lambda \in \mathcal{A}}$ una red en $\varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$, donde \mathcal{A} es un conjunto dirigido, y supongamos que $(x^\lambda)_{A \in \Delta} \rightarrow (x)_{A \in \Delta}$, para algún $(x)_{A \in \Delta} \in$

$\varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$. Debemos mostrar que $h((x^\lambda)_{A \in \Delta}) \rightarrow h((x)_{A \in \Delta})$, es decir, $x^\lambda \rightarrow x$. Sin embargo, esta convergencia se obtiene de manera inmediata por el Teorema 2.15. Así, h es continua. Dada la biyectividad de h , sabemos que h^{-1} existe y que $h^{-1}: \bigcap \Delta \rightarrow \varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$. Además, $h^{-1}(x) = (x)_{A \in \Delta}$, para cada $x \in \bigcap \Delta$. Afirmamos que h^{-1} es continua. En efecto, tomemos una red $\{x^\lambda\}_{\lambda \in A}$ en $\bigcap \Delta$ tal que $x^\lambda \rightarrow x$, para algún $x \in \bigcap \Delta$. Nuevamente aplicando el Teorema 2.15, obtenemos que $(x^\lambda)_{A \in \Delta} \rightarrow (x)_{A \in \Delta}$, es decir, $h^{-1}(x^\lambda) \rightarrow h^{-1}(x)$. De donde, h^{-1} es continua. Así, h es un homeomorfismo y por lo tanto $\varprojlim \langle X_A, p_A^B, \Delta \rangle$ es homeomorfo a $\bigcap \Delta$. \square

4 La topología de un límite inverso

En esta sección incluimos algunos resultados generales del comportamiento topológico de los límites inversos. De hecho, en vista de que el límite inverso $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subespacio de $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$, éste hereda la topología del producto topológico. El siguiente hecho muestra una base para el límite inverso, cuyos conjuntos abiertos básicos resultan más convenientes de trabajar que abiertos de alguna otra base. Dicho resultado fue tomado de [4, Prop. 1.2.1]. Recordemos que $p_\alpha = \pi_\alpha|_{\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle}$ (vea la Notación 3.3).

Teorema 4.1. *Dado un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, se tiene que la familia:*

$$\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in \Delta \text{ y } U_\alpha \text{ es un abierto en } X_\alpha\}$$

forma una base para la topología del subespacio $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$.

Demostración. Sea $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ y $G = \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle \cap \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ un subconjunto abierto básico de $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tal que $x \in G$, donde $F \in [\Delta]^{<\omega}$. Por la Proposición 2.6, existe $\beta \in \Delta$ tal que $\beta \geq \alpha$, para todo $\alpha \in F$. Por la continuidad de las funciones enlace, $U_\beta = \bigcap_{\alpha \in F} (p_\alpha^\beta)^{-1}(U_\alpha)$ es un subconjunto abierto de X_β , además de que $x_\beta \in U_\beta$. Dado $\alpha \in F$, por la Proposición 3.4 tenemos que $p_\beta^{-1} \circ (p_\alpha^\beta)^{-1} = p_\alpha^{-1}$ y por definición de p_α , se cumple que $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle \cap \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Con ello, se obtiene que $p_\beta^{-1}(U_\beta) = \bigcap_{\alpha \in F} p_\beta^{-1}((p_\alpha^\beta)^{-1}(U_\alpha)) = \bigcap_{\alpha \in F} p_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle \cap \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Así, tenemos que $p_\beta^{-1}(U_\beta) = G$. Notemos que $x \in p_\beta^{-1}(U_\beta)$. De este modo dicha familia es una base. \square

El siguiente teorema garantiza condiciones suficientes para que un límite inverso sea un conjunto cerrado.

Teorema 4.2. *Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ un sistema inverso. Si para cada $\alpha \in \Delta$, X_α es un espacio de Hausdorff, entonces $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subespacio cerrado de $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$.*

Demostración. Veamos que $(\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha) \setminus \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un conjunto abierto. Tomemos $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in (\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha) \setminus \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, esto quiere decir que existen $\alpha_0, \beta_0 \in \Delta$ tales que $\beta_0 > \alpha_0$ y $x'_{\alpha_0} = p_{\alpha_0}^{\beta_0}(x_{\beta_0}) \neq x_{\alpha_0}$. Como X_{α_0} es de Hausdorff, existen dos subconjuntos abiertos U_{α_0} y U'_{α_0} de X_{α_0} tales que $x_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0}$, $x'_{\alpha_0} \in U'_{\alpha_0}$ y $U_{\alpha_0} \cap U'_{\alpha_0} = \emptyset$. Dado que $p_{\alpha_0}^{\beta_0}$ es una función continua, $V_{\beta_0} = (p_{\alpha_0}^{\beta_0})^{-1}(U'_{\alpha_0})$ es un subconjunto abierto de X_{β_0} tal que $x_{\beta_0} \in V_{\beta_0}$. Notemos que $W = \pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) \cap \pi_{\beta_0}^{-1}(V_{\beta_0})$ es un subconjunto abierto de $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ que contiene a x . Supongamos que $W \cap \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle \neq \emptyset$ y sea $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in W \cap \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Por un lado, por ser $y \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ y $\alpha_0 < \beta_0$, se cumple que $p_{\alpha_0}^{\beta_0}(y_{\beta_0}) = y_{\alpha_0}$. Por otro lado, como $y \in W$, se sigue que $y \in \pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ y $y \in \pi_{\beta_0}^{-1}(V_{\beta_0})$, esto quiere decir que $y_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0}$ y $y_{\beta_0} \in V_{\beta_0}$. Así, $p_{\alpha_0}^{\beta_0}(y_{\beta_0}) = y_{\alpha_0} \in U'_{\alpha_0}$ y de esta manera $y_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0} \cap U'_{\alpha_0}$, lo cual es una contradicción, puesto que $U_{\alpha_0} \cap U'_{\alpha_0} = \emptyset$. Concluimos que $W \cap \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \emptyset$. Con esto tenemos que $W \subseteq (\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha) \setminus \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, es decir, $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha \setminus \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subconjunto abierto del producto $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$. Por lo que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$. \square

Cuando los espacios de un sistema inverso no son de Hausdorff no podemos asegurar que el límite inverso sea cerrado. Esto lo podemos observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3. *Sean Δ un conjunto dirigido no numerable y $X_\alpha = \mathbb{N}$ bajo la topología indiscreta, para cada $\alpha \in \Delta$. Es claro que cada X_α no es de Hausdorff. Ahora, para cada $\alpha \leq \beta$, sea $f_\alpha^\beta : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ la función identidad. Veamos que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subconjunto no vacío de $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ que no es cerrado. Para esto, notemos que por el Ejemplo 3.6, $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \{(x)_{\alpha \in \Delta} \mid x \in \mathbb{N}\}$ es homeomorfo a \mathbb{N} . Luego, dado que en este caso la topología producto de $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ coincide con la topología indiscreta, $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ no es un subespacio cerrado.*

En vista de que el límite inverso es un subespacio del producto, los siguientes resultados se obtienen de manera inmediata.

Proposición 4.4. *Sean $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ un sistema inverso e $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. Si X_α es T_i , para todo $\alpha \in \Delta$, entonces $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es T_i .*

Demostración. Sea $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ y $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ una familia de espacios T_i . Por el Teorema 2.16 tenemos que $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ es T_i . Luego, dado que la propiedad de ser T_i se preserva a subespacios, concluimos que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es T_i . \square

Los siguientes dos resultados se restringen a considerar sistemas inversos cuando su conjunto dirigido es \mathbb{N} .

Proposición 4.5. *Sea $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$ un sistema inverso. Si X_n es primero (segundo) numerable, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\varprojlim \langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$ es primero (segundo) numerable.*

Demostración. Por el Teorema 2.17-(i), se obtiene que $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es primero (segundo) numerable y dado que los axiomas de numerabilidad son preservados bajo subespacios, obtenemos que $\varprojlim \langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$ es primero (segundo) numerable. \square

Proposición 4.6. *Sea $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$ un sistema inverso. Si X_n es un espacio metrizable, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\varprojlim \langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$ es un espacio metrizable.*

Demostración. Dado que cada X_n es metrizable, por el Teorema 2.17-(ii), tenemos que $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es metrizable y dado que la metrizabilidad se hereda a subespacios, tenemos que $\varprojlim \langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$ también es metrizable. \square

Terminamos la sección con un teorema fundamental de los límites inversos, a saber la preservación de la compacidad en estos espacios.

Teorema 4.7. *Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ un sistema inverso. Si X_α es un espacio compacto y Hausdorff, para cada $\alpha \in \Delta$, entonces $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un espacio compacto.*

Demostración. Dado que para todo $\alpha \in \Delta$, X_α es compacto, del Teorema Tychonoff (vea Teorema 2.18) tenemos que $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ es compacto. También, tenemos que como cada X_α es un espacio de Hausdorff, por el Teorema 4.2, $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subespacio cerrado del producto. Así, al ser $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ un subespacio cerrado de un espacio compacto, tenemos que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es compacto. \square

5 Cómo evitar un límite inverso vacío

En la práctica, dado un sistema inverso arbitrario, su límite inverso puede resultar vacío. Mostramos esto a continuación detallando un ejemplo propuesto en [8].

Ejemplo 5.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $X_n = \mathbb{N}$ con la topología cofinita τ_{cof} (vea el Ejemplo 2.1), y para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ definamos la función $p_n^m : X_m \rightarrow X_n$ dada por $p_n^m(k) = k + (m - n)$, para cada $k \in X_m$. Se tiene que $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$ es un sistema inverso cuyo límite inverso es vacío. En efecto, primero demostraremos que $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$ es efectivamente un sistema inverso. Veamos que para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, p_n^m es continua. Para esto, tomemos un subconjunto abierto básico A de X_n . En vista de que $(p_n^m)^{-1}(A) = \{a - (m - n) \mid a \in A \setminus \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m - n\}\}$ y de que p_n^m es inyectiva, se tiene que $(p_n^m)^{-1}(A)$ posee complemento finito, pues A tiene complemento finito; así, $p_n^m(A)^{-1} \in \tau_{cof}$. Es decir, la preimagen de A es subconjunto abierto de X_m . Por lo tanto, tenemos que p_n^m es una función continua. Ahora, notamos que las funciones p_n^m cumplen las condiciones para ser de enlace:*

- a) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X_n$. Tenemos que $p_n^n(x) = x + (n - n) = x$. Así, p_n^n es la función identidad.
- b) Dados $m, n, l \in \mathbb{N}$ tales que $l \leq n \leq m$ y $x \in X_m$, se cumple que $(p_l^n \circ p_n^m)(x) = p_l^n(p_n^m(x)) = p_l^n(x + (m - n)) = x + (m - n) + (n - l) = x + (m - l) = p_l^m(x)$.

De esta manera, las funciones p_n^m son de enlace y con ello concluimos que $\langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$ es un sistema inverso.

Por otro lado, mostremos que $\varprojlim \langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle = \emptyset$. Procedamos por contradicción, supongamos que $\varprojlim \langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle \neq \emptyset$ y tomemos $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim \langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, por definición de límite inverso tenemos que $p_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$. Además, por definición de función enlace se cumple que $p_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1} + 1$. De esta manera $x_{n+1} = x_n - 1$, y reescribimos x como $(x_1, x_1 - 1, x_1 - 2, x_1 - 3, \dots)$. Se sigue que para $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_1 - n + 1$. Dado que $x_1 \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_{x_1+2} = x_1 - (x_1 + 2) + 1 = -1$. Luego, $x_{x_1+2} \notin \mathbb{N} = X_{x_1+2}$ lo cual es una contradicción. En conclusión, $\varprojlim \langle X_n, p_n^m, \mathbb{N} \rangle = \emptyset$.

El siguiente resultado brinda condiciones bajo las cuales se garantiza que un límite inverso siempre será vacío. Es un ejercicio propuesto en la sección

de límites inversos de [5] y aquí presentamos su solución con los detalles necesarios.

Proposición 5.2. *Sean I un conjunto no numerable y $\Delta = [I]^{<\omega}$ con el orden de la contención de conjuntos. Consideremos la familia de espacios topológicos $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}$ donde $X_\alpha = \{f : \alpha \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ es inyectiva}\}$ tiene la topología discreta para cada $\alpha \in \Delta$. Dados $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \subseteq \beta$, consideremos las funciones $p_\alpha^\beta : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ tales que $p_\alpha^\beta(f) = f|_\alpha$. Se cumple lo siguiente:*

- (i) La terna $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un sistema inverso.
- (ii) Las funciones p_α^β son sobreyectivas.
- (iii) $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \emptyset$.

Demostración.

(i) Es claro que las funciones p_α^β son continuas. Ahora veamos que cumplen los incisos a) y b) de la Definición 3.1.

- a) Para cada $\alpha \in \Delta$ y $f \in X_\alpha$, tenemos que $p_\alpha^\alpha(f) = f|_\alpha = f$, por lo que p_α^α es la función identidad.
- b) Ahora, si $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ con $\alpha \subseteq \beta \subseteq \gamma$ y $f \in X_\gamma$, entonces $(p_\alpha^\beta \circ p_\beta^\gamma)(f) = p_\alpha^\beta(f|_\beta) = f|_\alpha = p_\alpha^\gamma(f)$.

Por lo tanto, tenemos que las funciones p_α^β son enlace. Como Δ es un conjunto dirigido, queda definido el sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$.

(ii) Ahora demostremos que las funciones enlace son sobreyectivas. Tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \subseteq \beta$. Para ver que p_α^β es sobreyectiva tomemos $g \in X_\alpha$. Veamos que existe $f \in X_\beta$ tal que $p_\alpha^\beta(f) = f|_\alpha = g$. Tengamos en cuenta que $\alpha \subseteq \beta$ y como ambos son conjuntos finitos, obtenemos que $\beta \setminus \alpha \in \Delta$; también se cumple que $g(\alpha)$ está acotado superiormente en \mathbb{N} . Definamos la función $f : \beta \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \alpha, \\ n_x & \text{si } x \in \beta \setminus \alpha, \end{cases}$$

donde cada n_x es un único número para x en \mathbb{N} tal que este es mayor al supremo de $g(\alpha)$. De esta manera $f : \beta \rightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva y se cumple que $f|_\alpha = g$. Esto es, p_α^β es sobreyectiva.

(iii) Mostremos que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \emptyset$. Supongamos lo contrario y tomemos $f = (f_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Ahora, consideremos la función $h : I \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $h(x) = f_{\{x\}}(x)$ para todo $x \in I$. Veamos que h es inyectiva. Para ello tomemos $x, y \in I$ con $x \neq y$. Por un lado, como $\{x\} \subseteq \{x, y\}$, de las hipótesis iniciales tenemos $p_{\{x\}}^{\{x,y\}}(f_{\{x,y\}}) = f_{\{x,y\}}|_{\{x\}}$. Por otro lado, por propiedades del límite inverso $p_{\{x\}}^{\{x,y\}}(f_{\{x,y\}}) = f_{\{x\}}$. Se sigue que $f_{\{x,y\}}$ coincide con $f_{\{x\}}$ en $\{x\}$, esto es $f_{\{x,y\}}(x) = f_{\{x\}}(x)$. Bajo un razonamiento análogo, obtenemos que $f_{\{x,y\}}(y) = f_{\{y\}}(y)$. Por lo que evaluando h en x , $h(x) = f_{\{x\}}(x) = f_{\{x,y\}}(x)$ y $h(y) = f_{\{y\}}(y) = f_{\{x,y\}}(y)$. Por la elección de f , tenemos que $f_{\{x,y\}} \in X_{\{x,y\}}$; por lo que $f_{\{x,y\}}$ es inyectiva y se cumple que $h(x) \neq h(y)$, así h es inyectiva. Esto quiere decir que hemos encontrado una función inyectiva de I a \mathbb{N} . Lo que significa que la cardinalidad de I es menor o igual a la cardinalidad de \mathbb{N} , pero I es no numerable, por lo que se tiene una contradicción. Por lo tanto, concluimos que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \emptyset$. Con todo, se concluye la demostración. \square

Es de poco interés cuando un límite inverso es vacío. De esta forma surge la inquietud de saber condiciones necesarias para asegurar que éste sea distinto de vacío. Con la intención de atender este problema, hemos incluido los Teoremas 5.7 y 5.8, los cuales fueron tomados del artículo [8] y los presentamos a detalle. Previo a esto, requerimos la siguiente teoría auxiliar.

Definición 5.3. *Dado un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, decimos que $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subsistema de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ si está indexado por el mismo conjunto Δ , cada Y_α es un subconjunto de X_α y $g_\alpha^\beta = p_\alpha^\beta|_{Y_\alpha}$. Si cada Y_α es cerrado decimos que $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es subsistema cerrado.*

Notemos que, por definición, todo sistema inverso es un subsistema inverso de sí mismo. Además, tenemos el siguiente resultado que no es difícil de verificar.

Lema 5.4. *Para un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, la familia de todos los subsistemas cerrados $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tales que $Y_\alpha \neq \emptyset$ está parcialmente ordenado por el orden \leq_{is} dado por $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle \leq_{is} \langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ si y solo si $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subsistema cerrado de $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$.*

Ahora, recordemos el siguiente resultado muy conocido.

Lema 5.5 (Lema de Zorn). *Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena tiene una cota inferior contiene al menos un elemento minimal.*

Lema 5.6. *Para un sistema inverso $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ donde cada X_α es compacto y cada p_α^β es una función cerrada, se cumple que la familia de todos los subsistemas cerrados $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tales que $Y_\alpha \neq \emptyset$ y $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \varprojlim \langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ admite un elemento minimal bajo el orden dado por \leq_{is} .*

Demostración. Sea \mathcal{C} la familia de todos los subsistemas cerrados $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tales que $Y_\alpha \neq \emptyset$ y $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \varprojlim \langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Notemos que \mathcal{C} es una familia no vacía, pues el mismo $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un elemento de \mathcal{C} . Además, por el Lema 5.4, la familia \mathcal{C} está parcialmente ordenada. Ahora veamos que se cumple la hipótesis requerida en el Lema de Zorn (Lema 5.5) para \mathcal{C} . Para esto tomemos una cadena \mathcal{C} en \mathcal{C} y demostremos que \mathcal{C} tiene una cota inferior en \mathcal{C} . Para cada $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle \in \mathcal{C}$, sea $S_{\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle} = \{Y_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$. Así, para cada $\alpha \in \Delta$ definimos el conjunto

$$L_\alpha = \bigcap \{Y_\alpha \mid Y_\alpha \text{ es el } \alpha\text{-ésimo elemento de } S_H \text{ y } H \in \mathcal{C}\}.$$

Notemos que L_α es cerrado en X_α , puesto que es una intersección de conjuntos cerrados. Se tiene que L_α es un conjunto no vacío. En efecto, dado que \mathcal{C} es una cadena, toda intersección finita de los Y_α es no vacía y como X_α es compacto, por el Teorema 2.3, tenemos que $L_\alpha \neq \emptyset$. Ahora, dados $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$ es fácil corroborar que $p_\alpha^\beta(L_\beta) \subseteq L_\alpha$. De esta forma, podemos definir la función $l_\alpha^\beta = p_\alpha^\beta|_{L_\beta}$. Así, tenemos que $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subsistema cerrado de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Para demostrar que $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ se encuentra en \mathcal{C} resta probar que $\varprojlim \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. No es difícil ver que $\varprojlim \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle \subseteq \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Para demostrar que se cumple la otra contención, tomemos $x \in \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Por la definición de \mathcal{C} tenemos que $x \in \varprojlim \langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, para todo $\langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle \in \mathcal{C}$. En consecuencia, para cada $\alpha \in \Delta$, $x_\alpha \in L_\alpha$. Ahora tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \leq \beta$. Luego, tenemos que $l_\alpha^\beta(x_\beta) = p_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$, para todo $x_\beta \in L_\beta$. Por lo tanto, $x \in \varprojlim \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ y se cumple la igualdad deseada. Así, $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle \in \mathcal{C}$ y claramente es cota inferior de \mathcal{C} . Por el Lema de Zorn, existe un elemento minimal en \mathcal{C} , bajo el orden dado por \leq_{is} . \square

Teorema 5.7. *Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ un sistema inverso donde cada X_α es compacto y cada p_α^β es una función cerrada. Se tiene que existe un subsistema cerrado $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ que cumple las siguientes condiciones:*

- (a) L_α es compacto y no vacío, para todo $\alpha \in \Delta$,
- (b) l_α^β es cerrada y sobreyectiva, para todo $\alpha \leq \beta$; y
- (c) $\varprojlim \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$.

Demostración. Sea $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ el elemento minimal garantizado en el Lema 5.6. Notemos que $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ cumple con los incisos (a), (c) y parcialmente con (b). Esto es, resta demostrar que las funciones enlace l_α^β son sobreyectivas, es decir, que $l_\alpha^\beta(L_\beta) = L_\alpha$, para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\beta \geq \alpha$.

Afirmación 1. Para $\alpha \in \Delta$, la familia $\{l_\alpha^\beta(L_\beta) \mid \beta \geq \alpha\}$ tiene la propiedad de intersección finita. En efecto, tomamos $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Delta$ arbitrarios con $\beta_i \geq \alpha$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por la Proposición 2.6 tenemos que existe $\gamma \in \Delta$ tal que $\gamma \geq \alpha$ y $\gamma \geq \beta_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Sean $y_\gamma \in L_\gamma$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, tenemos que $l_\alpha^\gamma(y_\gamma) \in l_\alpha^\gamma(L_\gamma) = l_\alpha^{\beta_i}(l_{\beta_i}^\gamma(L_\gamma)) \subseteq l_\alpha^{\beta_i}(L_{\beta_i})$, y de esta manera $l_\alpha^\gamma(y_\gamma) \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} l_\alpha^{\beta_i}(L_{\beta_i})$.

En vista de la Afirmación 1, como L_α es compacto, por el Teorema 2.3 tenemos que $\bigcap \{l_\alpha^\beta(L_\beta) \mid \beta \geq \alpha\}$ es diferente del vacío. Así, para cada $\alpha \in \Delta$, sea $Z_\alpha = \bigcap \{l_\alpha^\beta(L_\beta) \mid \beta \geq \alpha\}$.

Afirmación 2. Para cada $\alpha \in \Delta$, Z_α es compacto. En efecto, puesto que $l_\alpha^\beta(L_\beta)$ es un subconjunto cerrado de L_α y además la intersección infinita de subconjuntos cerrados es un subconjunto cerrado, obtenemos que Z_α es un conjunto cerrado de L_α . Así, ya que $Z_\alpha \subseteq L_\alpha \subseteq X_\alpha$, X_α es compacto y Z_α es cerrado, tenemos que Z_α es compacto.

La Afirmación 2 permite considerar el sistema $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, donde $h_\alpha^\beta = l_\alpha^\beta|_{Z_\beta}$, para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$.

Afirmación 3. Para $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$, $l_\alpha^\beta(Z_\beta) \subseteq Z_\alpha$. En efecto, simplemente

notemos que:

$$\begin{aligned}
 l_\alpha^\beta(Z_\beta) &= l_\alpha^\beta\left(\bigcap\{l_\beta^\gamma(L_\gamma) \mid \gamma \geq \beta\}\right) \\
 &\subseteq \bigcap\{l_\alpha^\gamma(L_\gamma) \mid \gamma \geq \beta\} \\
 &\subseteq \bigcap\{l_\alpha^\gamma(L_\gamma) \mid \gamma \geq \alpha\} \\
 &= Z_\alpha.
 \end{aligned}$$

De esta manera, la Afirmación 3 indica que $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subsistema cerrado de $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ y de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, donde cada $Z_\alpha \neq \emptyset$.

Afirmación 4. Se cumple la igualdad $\varprojlim \langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \varprojlim \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. En efecto, por un lado tenemos que $\varprojlim \langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle \subseteq \varprojlim \langle Y_\alpha, g_\alpha^\beta, \Delta \rangle$; para la otra contención, sea $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \varprojlim \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Dado $\alpha \in \Delta$, se cumple que $l_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha$, para todo $\beta \in \Delta$ con $\beta \geq \alpha$. Por lo tanto, $y_\alpha \in \bigcap\{l_\alpha^\beta(L_\alpha) \mid \beta \geq \alpha\} = Z_\alpha$, y así $h_\alpha^\beta(y_\beta) = g_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha$. En conclusión, $y \in \varprojlim \langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, por lo que $\varprojlim \langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \varprojlim \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$.

Por la Afirmación 4 obtenemos que $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ es un subsistema cerrado de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ tal que $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \varprojlim \langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Dada la minimalidad de $\langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ y que $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle \leq_{is} \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, tenemos que $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \langle L_\alpha, l_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. Por lo tanto, $Z_\alpha = L_\alpha$, para todo $\alpha \in \Delta$.

Ahora veamos que $l_\alpha^\beta(L_\beta) = L_\alpha$, tomamos $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$. Hemos visto que $l_\alpha^\beta(L_\beta) \subseteq L_\alpha$. Por otro lado, $L_\alpha = \bigcap\{l_\alpha^\gamma(L_\gamma) \mid \gamma \geq \alpha\} \subseteq l_\alpha^\beta(L_\beta)$. Así, $l_\alpha^\beta(L_\beta) = L_\alpha$, lo que quiere decir que l_α^β es sobreyectiva. De esta manera queda demostrada la existencia de un subsistema inverso que cumple con las propiedades (a), (b) y (c). \square

El siguiente resultado brinda una solución a la inquietud sobre conocer condiciones que garantizan límites inversos no vacíos. La demostración de este hecho emplea el Teorema 5.7, el cual reduce de manera significativa la prueba.

Teorema 5.8. *Sea $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ un sistema inverso donde, para todo $\alpha \in \Delta$, X_α es compacto y de Hausdorff. Si cada función enlace es cerrada, entonces $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle \neq \emptyset$.*

Demostración. Por el Teorema 5.7, tenemos que existe un subsistema cerrado $\langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle$ de $\langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle$, donde cada Z_α es compacto y h_α^β es cerrada y

sobreyectiva tal que

$$\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle = \varprojlim \langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle.$$

Para cada $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$ definimos el siguiente conjunto:

$$A_\alpha^\beta = \{(z_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} Z_\alpha \mid h_\alpha^\beta(z_\beta) = z_\alpha\}.$$

Veamos que cada A_α^β es no vacío. Para esto tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \leq \beta$ y un elemento arbitrario $z_\alpha \in Z_\alpha$. Dado que h_α^β es sobreyectiva, existe $z_\beta \in Z_\beta$ tal que $h_\alpha^\beta(z_\beta) = z_\alpha$. De esta manera, claramente podemos elegir $z \in \prod_{\alpha \in \Delta} Z_\alpha$ tal que $\pi_\beta(z) = z_\beta$ y $\pi_\alpha(z) = z_\alpha$. Por lo que tenemos que $z \in A_\alpha^\beta$, y en consecuencia $A_\alpha^\beta \neq \emptyset$.

Ahora veamos que la familia $\{A_\alpha^\beta \mid \alpha, \beta \in \Delta \text{ tales que } \alpha \leq \beta\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Para esto tomemos $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \in \Delta$ arbitrarios con $\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$ y veamos que $\bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} A_{\alpha_i}^{\beta_i} \neq \emptyset$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea $z_{\alpha_i} \in Z_{\alpha_i}$. Así, para $i \in \{1, \dots, n\}$, de la sobreyectividad de la función $h_{\alpha_i}^{\beta_i}$, existe $z_{\beta_i} \in Z_{\beta_i}$ tal que $h_{\alpha_i}^{\beta_i}(z_{\beta_i}) = z_{\alpha_i}$. De esta manera podemos elegir $z \in \prod_{\alpha \in \Delta} Z_\alpha$ tal que $\pi_{\beta_i}(z) = z_{\beta_i}$ y $\pi_{\alpha_i}(z) = z_{\alpha_i}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Así tenemos que $z \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} A_{\alpha_i}^{\beta_i}$ y se sigue que $\{A_\alpha^\beta \mid \alpha, \beta \in \Delta \text{ tales que } \alpha \leq \beta\}$ tiene la propiedad de intersección finita.

Demostremos que cada A_α^β es un subconjunto cerrado. Tomemos $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \leq \beta$ y $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} Z_\alpha \setminus A_\alpha^\beta$, así $h_\alpha^\beta(x_\beta) \neq x_\alpha$. Pongamos $x'_\alpha = h_\alpha^\beta(x_\beta)$. Dado que $Z_\alpha \subseteq X_\alpha$ y X_α es de Hausdorff, tenemos que Z_α es de Hausdorff. Por lo que existen dos subconjuntos abiertos U y U' de Z_α , tales que $x_\alpha \in U$, $x'_\alpha \in U'$ y $U \cap U' = \emptyset$. Por la continuidad de h , tenemos que $x_\beta \in V = (h_\alpha^\beta)^{-1}(U')$. Se sigue que $x \in W = \pi_\beta^{-1}(V) \cap \pi_\alpha^{-1}(U)$, donde W es un subconjunto abierto básico del producto. Hay que demostrar que $W \cap A_\alpha^\beta = \emptyset$. Supongamos que $W \cap A_\alpha^\beta \neq \emptyset$ y tomemos $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in W \cap A_\alpha^\beta$. Por un lado, $y \in A_\alpha^\beta$, es decir, $h_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha$. Por otro lado, como $y \in W$, tenemos que $y_\alpha \in U$ y $y_\beta \in V$. Esto implica que $h_\alpha^\beta(y_\beta) = y_\alpha \in U'$, lo cual es una contradicción, puesto que $U \cap U' = \emptyset$. Por lo tanto, $W \cap A_\alpha^\beta = \emptyset$ y $W \subseteq (\prod_{\alpha \in \Delta} Z_\alpha) \setminus A_\alpha^\beta$. Se concluye que $(\prod_{\alpha \in \Delta} Z_\alpha) \setminus A_\alpha^\beta$ es abierto, es decir, A_α^β es cerrado.

Finalmente, como cada Z_α es compacto, por el Teorema de Tychonoff (vea Teorema 2.18) tenemos que $\prod_{\alpha \in \Delta} Z_\alpha$ es compacto. Más aún, como cada A_α^β es cerrado, por el Teorema 2.3 tenemos que $\bigcap_{\alpha \leq \beta} A_\alpha^\beta \neq \emptyset$. Ahora, por el Lema

3.5, obtenemos que $\bigcap_{\alpha \leq \beta} A_\alpha^\beta = \varprojlim \langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle$. De donde $\varprojlim \langle Z_\alpha, h_\alpha^\beta, \Delta \rangle \neq \emptyset$. En conclusión, $\varprojlim \langle X_\alpha, p_\alpha^\beta, \Delta \rangle \neq \emptyset$. \square

Agradecimientos

Los autores agradecen las observaciones hechas por los árbitros, con las cuales el trabajo mejoró sustancialmente.

El tercer autor agradece a la Universidad Tecnológica de la Mixteca todo el apoyo recibido para la realización de su estancia posdoctoral de octubre de 2023 a septiembre de 2025.

Bibliografía

- [1] Alexandroff, P., *Untersuchungen Über Gestalt und Lage Abgeschlossener Mengen Beliebiger Dimension*, Annals of Mathematics, Vol. 30 (1): 101-187, 1928.
- [2] Bergman, G. M., *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, Universitext Vol. 558, Springer International Publishing, 2015.
- [3] Cheeger, J. y Kleiner, B., *Realization of Metric Spaces as Inverse Limits, and Bilipschitz Embedding in L_1* , Geometric and Functional Analysis, Vol. 23 (1): 96-133, 2013.
- [4] Chigogidze, A., *Inverse Spectra*, North-Holland Mathematical Library Vol. 53, Elsevier Science, 1996.
- [5] Engelking, R., *General topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.
- [6] Hernández Hernández, F., *Teoría de conjuntos. Una introducción*, Sociedad Matemática Mexicana, Tercera Edición, 2011.
- [7] Lefschetz, S., *On Compact Spaces*, Annals of Mathematics, Vol. 32 (3):521-538, 1931.
- [8] Stone, A. H., *Inverse limits of compact spaces*, General Topology and its Applications, Vol. 10 (2):203-211, 1979.

- [9] Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1970.

Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Av. Doctor Modesto Seara Vázquez No. 1, Acatlima, Heroica Ciudad de Huajuapán de León, Oaxaca, C.P. 69004, México.

jtenorio@mixteco.utm.mx [Jesús Fernando Tenorio Arvide]

raymundoveva@gmail.com [Raymundo Velasco Vásquez]

cenobio@mixteco.utm.mx [Cenobio Yescas Aparicio]

Capítulo 7

Clasificación de conjuntos de no corte

Mauricio Esteban Chacón Tirado, Augusto César Piceno
Cabrera

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

En la literatura se han estudiado diversos tipos de puntos y conjuntos con interior vacío cuyos complementos son conexos, tales como puntos colocamente conexos, puntos/conjuntos de no corte débiles, puntos/conjuntos que no estorban, puntos/conjuntos orilla, etc. Ampliamos ese estudio de la siguiente manera: considerando un continuo X , clasificamos a los conjuntos $A \in 2^X$ que cumplen que $X - A$ es conexo, según el grado de conectividad del complemento de A . Cuando nos restringimos a los conjuntos con interior vacío, estas clasificaciones coinciden con las ya conocidas de conjuntos de no corte con interior vacío.

1 Introducción

Uno de los principales temas de interés en topología es poder determinar si un espacio es conexo, y, cuando un espacio X es conexo, es interesante determinar cuán fuertemente conectado está X . En el caso de los continuos, se han estudiado varios tipos de puntos y conjuntos cuyos complementos son conexos, y también se ha investigado cierto grado de conectividad de estos complementos. Uno de los trabajos más relevantes en este sentido fue publicado por R.L. Moore [8], donde se demuestra la existencia de puntos de no corte en cualquier continuo. Otro resultado importante relacionado con el grado de conectividad del complemento de un punto en un continuo es el obtenido por R. H. Bing [1], que establece que para cualquier punto de un continuo metrizable no degenerado, hay un subconjunto denso propio y conexo

por continuos que contiene ese punto. Algunos de los artículos que se pueden consultar sobre el tema son [3], [4], [5], [6], [9], [11] y [12].

Este escrito contiene 4 secciones. En la Sección 2, proporcionamos las definiciones que utilizaremos a lo largo del mismo. En particular, definimos grados de conectividad, que denominamos Q_1 a Q_7 , y Q_0 , siendo Q_1 el más fuerte y Q_7 el más débil. Algo que deseamos enfatizar es la uniformidad de las definiciones para clasificar el grado de conectividad de un espacio, lo que hace que algunos resultados sean directos.

En la Sección 3, para cada grado de conectividad, consideramos el hiperespacio de conjuntos cerrados cuyos complementos tienen ese grado de conectividad, exploramos las relaciones entre esos hiperespacios, cuyos elementos denominamos conjuntos no cortantes. Proporcionamos condiciones para asegurar cuándo un complemento que es Q_7 implica también que es Q_1 . Ofrecemos herramientas para descubrir nuevos conjuntos no cortantes a partir de otros.

En la Sección 4, profundizamos en la investigación de los tipos de funciones que preservan conjuntos no cortantes bajo su imagen o preimagen.

2 Definiciones y notación

En este artículo, todos los espacios son métricos. El conjunto \mathbb{N} representa los enteros positivos. Dado un subconjunto A de un espacio X , la cerradura y el interior de A se denotan por $\text{cl}_X(A)$ y $\text{int}_X(A)$, respectivamente, y omitimos el subíndice cuando no creemos que exista riesgo de confusión respecto a nuestro espacio. Un *mapeo* es una función continua. Un *continuo* es un espacio compacto y conexo con más de un punto.

Un espacio métrico compacto X es *indescomponible* si cada subcontinuo de X tiene interior vacío. Se dice que un continuo X es *irreducible respecto a* $A \subset X$ si ningún subcontinuo propio de X contiene A . Se dice que un continuo X es *irreducible* si X es irreducible respecto a p, q para algunos $p, q \in X$, en cuyo caso decimos que X es *irreducible entre p y q* . Un espacio Y es *conexo por continuos* si cualquier par de puntos está contenido en un continuo $X \subset Y$. Sea $\mathcal{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

Dado un espacio no vacío X y $n \in \mathbb{N}$, consideramos los siguientes *hiperespacios* de X , dotados con la métrica de Hausdorff:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y compacto}\},$$

$$M(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene interior vacío}\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo sumo } n \text{ componentes}\},$$

$$D_0(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene dimensión } 0\},$$

y

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo sumo } n \text{ elementos}\}.$$

Los elementos de $C_1(X) = C(X)$ se llaman *subcontinuos* de X . Claramente $F_1(X)$ es homeomorfo a X .

Para una colección finita X_1, \dots, X_m de subconjuntos de X , definimos $\langle X_1, \dots, X_m \rangle$ como el conjunto $\{A \in 2^X : A \subset X_1 \cup \dots \cup X_m \text{ y } A \cap X_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in 1, \dots, m\}$.

Se sabe que si X_1, \dots, X_m son subconjuntos cerrados de X , entonces $\langle X_1, \dots, X_m \rangle$ es cerrado en 2^X y que la colección de todos los subconjuntos de la forma $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$, donde U_1, \dots, U_m son subconjuntos abiertos de X , es una base para la topología de 2^X (ver [7]).

El objetivo de la siguiente definición es introducir el grado de conectividad de un espacio.

Definición 2.1. *Dado un espacio no vacío X , decimos que X es:*

1. *Q1 si existe $b \in X$, tal que para cada $x \in X$, existe un continuo $D \subset X$ tal que $x \in \text{int}(D)$ y $b \in D$.*
2. *Q2 si existe $b \in X$ tal que, para cada $x \in X$, existe un continuo $D \subset X$ tal que $x \in D$ y $b \in D$.*
3. *Q3 si para cada $x \in X$, y para cada conjunto abierto no vacío U de X , existe un continuo $D \subset X$ tal que $x \in D$ y $D \cap U \neq \emptyset$.*
4. *Q0 si existe $b \in X$ tal que para cada conjunto abierto no vacío U de X , existe un continuo $D \subset X$ tal que $b \in \text{int}(D)$ y $U \cap \text{int}(D) \neq \emptyset$.*
5. *Q4 si existe $b \in X$, tal que para cada conjunto abierto no vacío U de X , existe un continuo $D \subset X$ tal que $b \in D$ y $D \cap U \neq \emptyset$.*

6. Q_5 si para cada familia finita \mathcal{U} de conjuntos abiertos no vacíos contenidos en X , existe $D \in C(X)$ tal que $D \cap U \neq \emptyset$, para cada $U \in \mathcal{U}$.
7. Q_6 si para dos conjuntos abiertos no vacíos U_1, U_2 de X , existe $D \in C(X)$ tal que $D \cap U_1 \neq \emptyset \neq D \cap U_2$.
8. Q_7 si X es conexo.

Nota 2.2. Claramente, para cada $m \in \{1, \dots, 5\}$, ser Q_m implica ser $Q_{(m+1)}$. Además, ser Q_1 implica ser Q_0 , y ser Q_0 implica ser Q_4 . En la figura siguiente, se representa lo que se ha expuesto aquí.

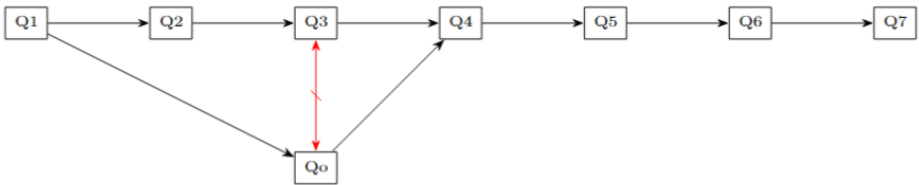


Figura 1: Relaciones entre grados de conectividad.

Observe que en la Figura 1, se indica que no hay relación entre Q_0 y Q_3 . Los contraejemplos para este hecho son el Ejemplo 3.2 para $Q_0 \not\Rightarrow Q_3$ y un solenoide diádico perforado para $Q_3 \not\Rightarrow Q_0$. Por otro lado, no pudimos probar o negar $Q_2 \Rightarrow Q_0$. Una pregunta relacionada con esto es la Pregunta 3.1.

Las siguientes definiciones se proporcionan para clasificar conjuntos basados en el grado de conectividad de sus complementos. La mayoría de ellas son generalizaciones de las presentadas en [3] y [5].

Definición 2.3. Dado un espacio métrico compacto no degenerado X , se dice que un elemento $A \in 2^X$ es:

1. conjunto de conexidad colocal de X siempre que $A = X$ o $X - A$ sea Q_1 ;
2. conjunto de no corte débil de X siempre que $A = X$ o $X - A$ sea Q_2 ;
3. conjunto no estorbador de X si $A = X$ o $X - A$ es Q_3 ;

4. conjunto que no bloquea abiertos de X siempre que $A = X$ o $X - A$ sea Q_0 ;
5. conjunto que no estorba débilmente de X siempre que $A = X$ o $X - A$ sea Q_4 ;
6. conjunto orilla de X siempre que $A = X$ o $X - A$ sea Q_5 ;
7. conjunto no centro fuerte de X siempre que $A = X$ o $X - A$ sea Q_6 .

Consideramos los siguientes subespacios de 2^X , estos son llamados *hiperespacios de conjuntos no cortantes* de X :

1. $CC(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto de conexidad colocal de } X\}$;
2. $NWC(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto de no corte débil de } X\}$;
3. $NB(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto no estorbador de } X\}$;
4. $NBO(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto que no bloquea abiertos de } X\}$;
5. $NB^*(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto que no estorba débilmente de } X\}$;
6. $S(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto orilla de } X\}$;
7. $NSC(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto no centro fuerte de } X\}$;
8. $NC(X) = \{A \in 2^X : X - A \text{ es conexo}\}$.

Nota 2.4. Para un continuo X , de acuerdo con nuestras definiciones y las definiciones $P1, P2, P3, P4, P5$ dadas en [3], p es un punto $P1$ si y solo si $X - \{p\}$ es $Q1$; p es un punto $P2$ si y solo si $X - \{p\}$ es $Q2$; p es un punto $P3$ si y solo si $X - \{p\}$ es $Q4$; p es un punto $P4$ si y solo si $X - \{p\}$ es $Q5$, y p es un punto $P5$ si y solo si $X - \{p\}$ es $Q6$.

Nota 2.5. Los conjuntos $NWC(X), NB(F_1(X)), NB^*(F_1(X)), S(X), NC(X)$ definidos en [5], coinciden con los conjuntos $NWC_1(X) \cap M(X), NB_1(X) \cap M(X), NB_1^*(X) \cap M(X), S_1(X) \cap M(X)$ y $NC_1(X) \cap M(X)$, respectivamente.

3 Propiedades de conjuntos no cortantes

Esta sección presenta varios resultados clave en el contexto de hiperespacios de conjuntos de no corte de continuos. Estos resultados establecen relaciones entre diferentes familias de conjuntos de no corte.

El siguiente teorema es inmediato de la Nota 2.2.

Teorema 3.1. *Dado un continuo X , se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $CC(X) \subset NWC(X) \subset NB(X) \subset NB^*(X) \subset S(X) \subset NSC(X) \subset NC(X)$; y
2. $CC(X) \subset NBO(X) \subset NB^*(X)$.

El siguiente ejemplo muestra que la inclusión $NBO(X) \subset NB(X)$ es falsa en general.

Ejemplo 3.2. *El abanico armónico es el conjunto $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\bigcup\{(x, \frac{x}{n}) : x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}\})$, considerado como un subespacio de \mathbb{R}^2 . Sea X el abanico armónico y sea $A = \{(\frac{1}{2}, 0)\}$. Entonces, $A \in NBO(X)$ y $A \notin NB(X)$.*

A partir del Ejemplo 3.2 y 1 del Teorema 3.1, sabemos que existen continuos X tales que $NWC(X) \neq NBO(X)$. Lo que no sabemos es lo siguiente:

Pregunta 3.1. *¿Existe un continuo X tal que $NWC(X) \not\subset NBO(X)$?*

Nota 3.2. *Los ejemplos $(P2 \setminus P1)$, $(P4 \setminus P3)$, $(P5 \setminus P4)$ y $(P6 \setminus P5)$ presentados en [3] satisfacen que $CC(X) \subsetneq NWC(X)$, $NB^*(X) \subsetneq S(X)$, $S(X) \subsetneq NSC(X)$ y $NSC(X) \subsetneq NC(X)$ respectivamente. Mientras que los ejemplos a) y b) de la Observación 3.3 de [5] satisfacen que $NWC(X) \subsetneq NB(X)$ y $NB(X) \subsetneq NB^*(X)$ respectivamente. Adicionalmente, por el Ejemplo 3.2 y el Teorema 3.1.1, tenemos que $CC(X) \subsetneq NBO(X)$. Finalmente, en el caso del solenoide diádico X , tenemos que $NBO(X) \subsetneq NB^*(X)$.*

Es de interés reconocer u obtener nuevos conjuntos no cortantes a partir de algunos ya conocidos; los Teoremas 3.3 y 3.7 abordan esto.

Teorema 3.3. *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $C \in 2^X$ tal que $\text{int}(A) \subset C \subset A$.*

1. *Si $A \in NBO(X)$, entonces $C \in NBO(X)$.*

2. Si $A \in NB^*(X)$, entonces $C \in NB^*(X)$.
3. Si $A \in S(X)$, entonces $C \in S(X)$.
4. Si $A \in NSC(X)$, entonces $C \in NSC(X)$.
5. Si $A \in NC(X)$, entonces $C \in NC(X)$.

Demostración. 1. Sea $A \in NBO(X)$ y sea $b \in X - A$ que comprueba que $X - A$ es un espacio Qo. Sea V un conjunto abierto no vacío de $X - C$. Dado que $\text{int}(A) \subset C \subset A$, $V_A = V - A$ es un conjunto abierto no vacío de $X - A$. Por lo tanto, existe un continuo $D \subset X - A$ tal que $\text{int}(D) \cap V_A \neq \emptyset$ y $b \in \text{int}(D)$, lo que implica que $\text{int}(D) \cap V \neq \emptyset$ y $b \in \text{int}(D)$. Así, b sirve para comprobar que $X - C$ es un espacio Qo, por lo que $C \in NBO(X)$.

2. Sea $A \in NB^*(X)$, y sea $b \in X - A$ que comprueba que $X - A$ es un espacio Q4. Dado que $\text{int}(A) \subset C \subset A$, para cada conjunto abierto no vacío V de $X - C$, $V_A = V - A \neq \emptyset$ es un conjunto abierto de $X - A$. Por lo tanto, existe un continuo $D \subset X - A \subset X - C$ tal que $D \cap V_A \neq \emptyset$ y $b \in D$, lo que implica que $D \cap V \neq \emptyset$. Así, b comprueba que $X - C$ es un espacio Q4, por lo que $C \in NB^*(X)$.
3. Sea $A \in S(X)$ y sea \mathcal{U} una familia finita de conjuntos abiertos no vacíos de $X - C$. Dado que $\text{int}(A) \subset C \subset A$, la familia $\mathcal{V} = \{U - A : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia finita de conjuntos abiertos no vacíos de $X - A$. Por lo tanto, existe $D \in C(X - A)$ tal que $D \cap V \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}$, lo que implica que $D \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Así, $X - C$ es un espacio Q5, por lo que $C \in S(X)$.
4. Sea $A \in NSC(X)$ y sean U_1, U_2 dos conjuntos abiertos no vacíos de $X - C$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, sea $V_i = U_i - A$. Tenemos que V_1, V_2 son dos conjuntos abiertos no vacíos de $X - A$. Por lo tanto, existe $D \in C(X - A)$ tal que $D \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Así, $X - C$ es un espacio Q6, por lo que $C \in NSC(X)$.
5. Observe que $X - A \subset X - C \subset X - \text{int}(A) = \text{cl}(X - A)$. Por lo tanto, $X - C$ tiene como máximo el mismo número de componentes que $X - A$. □

El Ejemplo 3.4 muestra que el Teorema 3.3 no puede ser extendido a los conjuntos $CC(X)$, $NWC(X)$ y $NB(X)$.

Ejemplo 3.4. Sea X el círculo de pseudo-arcs y sea $f : X \rightarrow \mathcal{S}^1$ la función sobreyectiva, monótona y abierta tal que la preimagen de puntos son subcontinuos terminales (véase [2]). Como f es sobreyectiva, monótona y abierta, para cada $x \in \mathcal{S}^1$, $f^{-1}(x) \in CC(X)$ (ver Proposición 4.3 y Proposición 4.4), y ningún subconjunto propio de $f^{-1}(x)$ es un elemento de $CC(X)$, de $NWC(X)$ ni de $NB(X)$.

El siguiente lema nos da una caracterización de los elementos en $NBO(X)$.

Lema 3.5. Sea X un continuo y $A \in 2^X$. Entonces, $A \in NBO(X)$ si y solo si para cada familia finita no vacía \mathcal{U} de conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $X - A$, existe $D \in C(X - A)$ tal que $\text{int}(D) \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}$.

Demostración. Sea $A \in NBO(X)$ y sea $b \in X - A$ que comprueba que $X - A$ es un espacio Qo. Sea $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ una familia finita no vacía de conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $X - A$. Entonces, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe $D_i \in C(X - A)$, tal que $\text{int}(D_i) \cap U_i \neq \emptyset$ y $b \in \text{int}(D_i)$.

Por lo tanto, $D = \bigcup_{i=1}^m D_i \in C(X - A)$ satisface $\text{int}(D) \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$.

Ahora supongamos que $A \in 2^X$ satisface que para cada familia finita no vacía \mathcal{U} de conjuntos abiertos no vacíos de $X - A$, existe $D \in C(X - A)$ tal que $\text{int}(D) \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Si $A = X$, tenemos $A \in NBO(X)$.

Supongamos $A \neq X$. Por hipótesis, para la familia $\{X - A\}$, existe $D \in C(X - A)$ tal que $\text{int}(D) \cap (X - A) \neq \emptyset$. Definamos $\alpha(D) = \bigcup \{K \in C(X - A) : K \cap D \neq \emptyset\}$. Observe que si U es un abierto no vacío de $X - A$, entonces para la familia $\{\text{int}(D), U\}$ existe un $C \in C(X - A)$ tal que $C \cap U \neq \emptyset$ y $C \cap \text{int}(D) \neq \emptyset$, así $C \subset \alpha(D)$, por lo tanto, $\alpha(D)$ es densa.

Ahora, sea $b \in \text{int}(D)$. Si U es cualquier conjunto abierto no vacío de $X - A$, entonces existe un continuo F tal que $\text{int}(F) \cap U \neq \emptyset$ y un continuo $K \subset X - A$ tal que $K \cap D \neq \emptyset \neq K \cap (U \cap \text{int}(F))$.

Por lo tanto, $D \cup K \cup F \in C(X - A)$, $B \cap \text{int}(D \cup K \cup F) \neq \emptyset$ y $\text{int}(D \cup K \cup F) \cap U \neq \emptyset$. Así, b comprueba que $X - A$ es un espacio Qo, por lo que $A \in NBO(X)$. \square

El siguiente lema nos da una caracterización de los elementos en $CC(X)$.

Lema 3.6. Sean X un continuo, $A \in 2^X$. Entonces, $A \in CC(X) - \{X\}$ si y solo si para cada conjunto abierto U con $A \subset U$, existe un conjunto abierto V tal que $A \subset V \subset U$ y $X - V \in C(X)$.

Demostración. Sea $A \in CC(X) - \{X\}$ y sea U un conjunto abierto tal que $A \subset U$. Sea $b \in X - A$ que comprueba que $X - A$ es un espacio Q1. Para cada $y \in X - U$, sea D_y un continuo tal que $y \in \text{int}(D_y)$, $b \in D_y$ y $D_y \subset X - A$. Como $X - U$ es compacto y $\{\text{int}(D_y) : y \in X - U\}$ es una cubierta abierta de $X - U$, existe una subcubierta finita $\text{int}(D_1), \dots, \text{int}(D_k)$ de $X - U$. Sea $V = (X - \bigcup_{i=1}^k D_i) \subset U$, observe que V es un conjunto abierto, $A \subset V \subset U$ y $X - V = \bigcup_{i=1}^k D_i \in C(X)$.

Ahora supongamos que $A \in 2^X$ es tal que para cada conjunto abierto U con $A \subset U$, existe un conjunto abierto V tal que $A \subset V \subset U$ y $X - V \in C(X)$. Observe que $X - A$ debe ser conexo. Elige $b \in X - A$. Sean $y \in X - A$, $V_y \subset X - A$ una vecindad cerrada de y y $U = X - (V_y \cup \{b\})$. Dado que $A \subset U$, existe un conjunto abierto V tal que $A \subset V \subset U$ y $X - V \in C(X)$, lo que implica que $X - V \subset X - A$ es un continuo que contiene y en su interior y también $b \in X - V$. Así, $A \in CC(X)$. \square

Teorema 3.7. Sea X un continuo y sean $A, C \in 2^X$ tales que C es una unión de componentes de A .

1. Si $A \in CC(X)$, entonces $C \in CC(X)$.
2. Si $A \in NWC(X)$, entonces $C \in NWC(X)$.
3. Si $A \in NC(X)$, entonces $C \in NC(X)$.

Demostración. Si $A = X$, el resultado es inmediato pues $A = C$. Supongamos $A \neq X$.

1. Sean $A \in CC(X)$ y $b \in X - A$ que comprueba que $X - A$ es un espacio Q1. Sea $x \in X - C$. Si $x \in X - A$, existe un continuo G que contiene a x en su interior tal que $b \in G$. Ahora, supongamos que $x \in A - C$, y sea D la componente de x en $A - C$. Dado que A es compacto, existen dos conjuntos abiertos U y V tales que $C \subset U$, $D \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U \cup V$;

además, por el Lema 3.6, podemos suponer que $E = X - (U \cup V)$ es conexo. Por lo tanto, $E \cup V = X - U \in C(X)$ (Teorema 5.6 de [10]) y contiene a x en su interior. Así, existe un continuo G que contiene a x en su interior tal que $b \in G$ y $b \in X - C$. Por lo tanto, $C \in CC(X)$.

2. Sea $A \in NWC(X)$ y $b \in X - A$ que comprueba que $X - A$ es un espacio Q2. Sea $x \in X - C$. Si $x \in X - A$, existe un continuo F que contiene a x tal que $F \subset X - A$, y $b \in F$. Ahora, supongamos que $x \in A - C$. Sea D la componente de A que contiene a x . Dado que A es compacto, existen dos conjuntos abiertos U y V tales que $C \subset U$, $D \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U \cup V$. Por lo tanto, existe un continuo G tal que $D \subsetneq G \subset U$ (Corolario 5.5 de [10]). Elige $r \in G - A$. Dado que $r \in X - A$, existe un continuo F que contiene a r tal que $F \subset X - A$ y $b \in F$. Por lo tanto, $F \cup G$ es un continuo que contiene a x tal que $F \cup G \subset X - C$, y $b \in (F \cup G)$. En conclusión, b comprueba que $X - C$ es un espacio Q2, por lo que $C \in NWC(X)$.
3. Sea $A \in NC(X)$. Sea $x \in X - C$. Si $x \in X - A$, la componente de x en $X - A$ está contenida en la componente de x en $X - C$. Ahora, supongamos que $x \in A - C$. Sea D la componente de A que contiene a x . Dado que A es compacto, existen dos conjuntos abiertos U y V tales que $C \subset U$, $D \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U \cup V$. Por lo tanto, existe un continuo G tal que $D \subsetneq G \subset U$ (Corolario 5.5 de [10]). Elige $r \in G - A$. Dado que $r \in X - A$, la componente de r en $X - C$ contiene a G y contiene la componente de r en $X - A$, y la componente de x en $X - C$ es la misma que la componente de r en $X - C$. Por lo tanto, cada componente de $X - C$ contiene alguna componente de $X - A$, así que $C \in NC(X)$.

□

Los siguientes ejemplos muestran que no podemos generalizar el teorema anterior a los hiperespacios $NB(X)$, $NBO(X)$, $NB^*(X)$, $S(X)$ y $NSC(X)$.

Ejemplo 3.8. Sea Y el solenoide diádico, sea $S \subset Y$ un arco y sea $h : I \times \{0\} \rightarrow S$ un homeomorfismo. Define $X = Y \cup_h (I \times I)$, $A = \{p\} \cup (I \times I)$ donde p es un punto de X no en la componente de $I \times I$, y sea $C = \{p\}$. Observe que $A \in NB(X)$ y $C \notin NB(X)$.

Ejemplo 3.9. Sea Y una compactación del rayo con el resto \mathcal{S}^1 , sea $S \subset \mathcal{S}^1$ un arco y $h : I \times \{0\} \rightarrow S$ un homeomorfismo. Defina $X = Y \cup_h (I \times I)$, $A = \{p\} \cup (I \times I)$ donde $p \in \mathcal{S}^1 - S$, y $C = \{p\}$. Observe que $A \in NBO(X)$, C es una componente de A y $C \notin NSC(X)$.

4 Propiedades de conjuntos de no corte preservados por funciones continuas

Los resultados presentados aquí destacan cómo diferentes tipos de mapeos preservan algunas propiedades de los conjuntos no cortantes.

Comenzamos con un lema.

Lema 4.1. Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo sobreyectivo entre continuos. Si $y \in Y$, $y \in D \in 2^X$ son tales que $f^{-1}(y) \subset \text{int}_X(D)$, entonces $y \in \text{int}_Y(f(D))$.

Demostración. Sean $y \in Y$, $D \in 2^X$ y supongamos que $f^{-1}(y) \subset \text{int}_X(D)$. Observe que $y \in Y - f(X - \text{int}_X(D)) \subset f(D)$ y $Y - f(X - \text{int}_X(D))$ es abierto en Y . Por lo tanto, $y \in \text{int}_Y(f(D))$. \square

Proposición 4.1. Sean $f : X \rightarrow Y$ un mapeo sobreyectivo entre continuos y $A \in 2^Y$. Los siguientes enunciados son ciertos:

1. Si $f^{-1}(A) \in CC(X)$, entonces $A \in CC(Y)$.
2. Si $f^{-1}(A) \in NWC(X)$, entonces $A \in NWC(Y)$.
3. Si $f^{-1}(A) \in NB(X)$, entonces $A \in NB(Y)$.
4. Si $f^{-1}(A) \in NB^{\setminus}(X)$, entonces $A \in NB^{\setminus}(Y)$.
5. Si $f^{-1}(A) \in S(X)$, entonces $A \in S(Y)$.
6. Si $f^{-1}(A) \in NSC(X)$, entonces $A \in NSC(Y)$.
7. Si $f^{-1}(A) \in NC(X)$, entonces $A \in NC(Y)$.

Demostración. Observe que las afirmaciones son ciertas si $A = Y$. Supongamos que $A \neq Y$.

1. Supongamos que $f^{-1}(A) \in CC(X)$. Sea $b \in X - f^{-1}(A)$ que comprueba que $X - f^{-1}(A)$ es un espacio Q1. Sea $y \in Y - A$. Para cada $x \in f^{-1}(y)$, existe un continuo D_x contenido en $X - f^{-1}(A)$ tal que $x \in \text{int}_X(D_x)$ y $b \in D_x$. Por la compacidad de $f^{-1}(y)$, podemos encontrar un número finito de elementos $x_1, \dots, x_m \in f^{-1}(y)$ tales que $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^m D_{x_i}$. Observe que $\bigcup_{i=1}^m D_{x_i} \subset X - f^{-1}(A)$ es un continuo que contiene $f^{-1}(y)$ en su interior. Por el Lema 4.1, $f(\bigcup_{i=1}^m D_{x_i}) \subset Y - A$ es un subcontinuo de Y tal que $f(b) \in f(\bigcup_{i=1}^m D_{x_i})$ y tiene a y en su interior, así que $f(b)$ comprueba que $Y - A$ es un espacio Q1, por lo tanto $A \in CC(Y)$.
2. Supongamos que $f^{-1}(A) \in NWC(X)$. Sea $b \in X$ que comprueba que $X - f^{-1}(A)$ es un espacio Q2, sea $y \in Y - A$ y $x \in f^{-1}(y)$. Dado que $X - f^{-1}(A)$ es Q2, existe un continuo $D \subset X$ tal que $D \cap f^{-1}(A) = \emptyset$, $w \in D$ y $b \in D$. Por lo tanto, $f(D) \subset Y - A$ es un continuo, $x \in f(D)$ y $f(b) \in f(D)$, así que $f(b)$ comprueba que $Y - A$ es un espacio Q2, por lo tanto $A \in NWC(Y)$.
3. Supongamos que $f^{-1}(A) \in NB(X)$. Sea $y \in Y - A$ y $x \in f^{-1}(y)$. Sea $U \subset Y - A$ un conjunto abierto no vacío. Observe que $f^{-1}(U) \subset X - f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto no vacío de X ; dado que $X - f^{-1}(A)$ es Q3 y $x \notin f^{-1}(A)$, existe un continuo $D \subset X - f^{-1}(A)$ tal que $x \in D$ y $D \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, así que $f(D) \subset Y - A$ es un continuo tal que $f(x) \in f(D)$, $f(D) \cap U \neq \emptyset$ y $y = f(x)$, por lo que y comprueba que $Y - A$ es un espacio Q3, por lo tanto $A \in NB(Y)$.
4. Supongamos que $f^{-1}(A) \in NB^*(X)$. Sea $b \in X$ que comprueba que $X - f^{-1}(A)$ es un espacio Q4. Sea $U \subset Y - A$ un conjunto abierto no vacío. Observe que $f^{-1}(U) \subset X - f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto no vacío de X ; dado que $X - f^{-1}(A)$ es Q4, existe un continuo $D \subset X - f^{-1}(A)$ tal que $b \in D$ y $D \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, así que $f(D) \subset Y - A$ es un continuo tal que $f(b) \in f(D)$ y $f(D) \cap U \neq \emptyset$, por lo que $f(b)$ comprueba que $Y - A$ es un espacio Q4, por lo tanto $A \in NB^*(Y)$.
5. Supongamos que $f^{-1}(A) \in S(X)$. Sea U_1, \dots, U_m un número finito de conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $Y - A$. Dado que $X - f^{-1}(A)$ es un espacio Q5 y $f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_m)$ es un número finito de conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $X - f^{-1}(A)$, existe un elemento $D \in C(X)$ tal que $D \subset X - f^{-1}(A)$, $D \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$,

por lo tanto $f(D) \subset Y - A$ es un elemento de $C(Y)$ tal que $f(D) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Así, $Y - A$ es un espacio Q5, por lo tanto $A \in S(Y)$.

6. Supongamos que $f^{-1}(A) \in NSC(X)$. Sean U_1, U_2 dos conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $Y - A$. Dado que $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)$ son dos conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $X - f^{-1}(A)$ y $X - f^{-1}(A)$ es un espacio Q6, existe un elemento $D \in C(X)$ tal que $D \subset X - f^{-1}(A)$, $D \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$, por lo tanto $f(D) \subset Y - A$ es un elemento de $C(Y)$ tal que $f(D) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Así, $Y - A$ es un espacio Q6, por lo tanto $A \in NSC(Y)$.
7. Supongamos que $f^{-1}(A) \in NC(X)$. Dado que $Y - A = f(X - f^{-1}(A))$ y $X - f^{-1}(A)$ es conexo, se cumple que $Y - A$ es conexo. Por lo tanto, $A \in NC(Y)$.

□

En el siguiente ejemplo, mostramos que no es posible extender la Proposición 4.1 al hiperespacio $NBO(X)$. Un resultado más débil se presenta en la Proposición 4.2.

Ejemplo 4.2. Sean Y el continuo de Knaster, $p \in Y$ el extremo de Y , y $\alpha : [0, 1) \rightarrow K$ un mapeo sobreyectivo tal que $\alpha(0) = p$, donde K es la componente de Y que contiene p . Define $X = (Y \times \{0\}) \cup \{(\alpha(t), 1 - t) : t \in [0, 1)\} \subset Y \times [0, 1]$ y sea $f : X \rightarrow Y$ la proyección sobre Y . Entonces f es un mapeo sobre. Nota que para $z \in Y - K$, $f^{-1}(z) = \{(z, 0)\} \in NBO(X)$ y $z \notin NBO(Y)$.

Proposición 4.2. Sean $f : X \rightarrow Y$ un mapeo sobreyectivo y abierto entre continuos y $A \in 2^Y$. Si $f^{-1}(A) \in NBO(X)$, entonces $A \in NBO(Y)$.

Demostración. Supongamos que $f^{-1}(A) \in NBO(X)$. Si $A = Y$, entonces $A \in NBO(X)$. Supongamos $A \neq Y$. Sea $b \in X$ que comprueba que $X - f^{-1}(A)$ es un espacio Qo. Sea U un conjunto abierto de $Y - A$. Entonces, existe $D \in C(X)$ tal que $D \subset X - f^{-1}(A)$ y $b \in D$ y $\text{int}(D) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(D) \subset Y - A$ y $f(b) \in f(D)$, y dado que f es abierto, $\text{int}(f(D)) \cap U \neq \emptyset$, lo que implica que $Y - A$ es un espacio Qo, por lo tanto $A \in NBO(Y)$. □

Proposición 4.3. Sean $f : X \rightarrow Y$ un mapeo sobreyectivo y monótono entre continuos, y $A \in 2^Y$. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. Si $A \in CC(Y)$, entonces $f^{-1}(A) \in CC(X)$.
2. Si $A \in NWC(Y)$, entonces $f^{-1}(A) \in NWC(X)$.
3. Si $A \in NC(Y)$, entonces $f^{-1}(A) \in NC(X)$.

Demostración. Observe que las afirmaciones son ciertas si $A = Y$. Supongamos que $A \neq Y$.

1. Supongamos que $A \in CC(Y)$. Sean $b \in Y - A$ que comprueba que $Y - A$ es un espacio Q1 y $b' \in X - f^{-1}(A)$ tal que $f(b') = b$. Sea $x \in X - f^{-1}(A)$. Elige $D \in C(Y)$ tal que $D \subset Y - A$, $b \in D$ y $f(x) \in \text{int}_Y(D)$. Por lo tanto, $f^{-1}(D) \subset X - f^{-1}(A)$ es un continuo con $b' \in f^{-1}(D)$ y $x \in \text{int}_X(f^{-1}(D))$. Así que $f^{-1}(A) \in CC(X)$.
2. Supongamos que $A \in CC(Y)$. Sea $b \in Y - A$ que comprueba que $Y - A$ es un espacio Q2 y $b' \in X - f^{-1}(A)$ tal que $f(b') = b$. Sea $x \in X - f^{-1}(A)$. Por las propiedades de b , existe un continuo $D \subset Y - A$ tal que $f(x) \in D$ y $b \in D$. Por lo tanto, $f^{-1}(D) \subset X - f^{-1}(A)$ es un continuo con $x \in f^{-1}(D)$ y $b' \in f^{-1}(D)$. Así que $f^{-1}(A) \in NWC(X)$.
3. Sea $A \in NC(Y)$. Observe que $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$ es conexo, por lo tanto $f^{-1}(A) \in NC(X)$.

□

El siguiente ejemplo muestra que el Teorema 4.3 no se sostiene para los hiperespacios $NB(Y)$, $NB^*(Y)$, $S(Y)$ y $NSC(Y)$. No sabemos si la Proposición 4.3 se sostiene para $NBO(X)$.

Ejemplo 4.3. Sean Y el solenoide diádico, $S \subset Y$ un arco y $h : I \times \{0\} \rightarrow S$ un homeomorfismo. Tomemos $X = Y \cup_h (I \times I)$ y definamos $f : X \rightarrow Y$ como $f(x) = x$ si $x \in Y$, y $f(x) = h(x_1, 0)$ si $x = (x_1, x_2) \in I \times I$. Observe que $f : X \rightarrow Y$ es un mapeo sobreyectivo y monótono. Sin embargo, para $A = \{h(\frac{1}{2}, 0)\} \in NB(Y)$ y $f^{-1}(A) \notin NSC(X)$.

Sin embargo, si añadimos a las condiciones del Teorema 4.3 que el mapeo $f : X \rightarrow Y$ es abierto, el Teorema 4.3 se sostiene para los otros hiperespacios de conjuntos no cortantes.

Proposición 4.4. Sean $f : X \rightarrow Y$ un mapeo sobre, abierto y monótono entre continuos y $A \in 2^Y$. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. Si $A \in NB(Y)$, entonces $f^{-1}(A) \in NB(X)$.
2. Si $A \in NBO(Y)$, entonces $f^{-1}(A) \in NBO(X)$.
3. Si $A \in NB(Y)$, entonces $f^{-1}(A) \in NB(X)$.
4. Si $A \in S(Y)$, entonces $f^{-1}(A) \in S(X)$.
5. Si $A \in NSC(Y)$, entonces $f^{-1}(A) \in NSC(X)$.

Demostración. Observe que las afirmaciones son ciertas si $A = Y$. Supongamos que $A \neq Y$.

1. Supongamos que $A \in NB(Y)$. Sea $(x \in X - f^{-1}(A))$. Dado que $Y - A$ es un espacio Q3, se satisface que para cada conjunto abierto no vacío $U \subset Y - A$, existe un continuo $D \subset Y - A$ tal que $f(x) \in D$ y $D \cap U \neq \emptyset$. Ahora, si $V \subset X - f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto no vacío de X , entonces $f(V)$ es abierto en $Y - A$, por lo que existe un continuo D tal que $f(x) \in D$ y $D \cap f(V) \neq \emptyset$. Así, $f^{-1}(D) \subset X - f^{-1}(A)$ es un continuo y $f^{-1}(D) \cap V \neq \emptyset$ y $x \in f^{-1}(D)$. Por lo tanto, $X - f^{-1}(A)$ es un espacio Q3 y $f^{-1}(A) \in NB(X)$.
2. Supongamos que $A \in NBO(Y)$. Sea $b \in Y - A$ que comprueba que $Y - A$ es un espacio Qo. Sea $b' \in X - f^{-1}(A)$ tal que $f(b') = b$. Considera un conjunto abierto no vacío $U \subset X - f^{-1}(A)$. Dado que $f(U) \subset Y - A$ es no vacío y abierto, existe un continuo $D \subset Y - A$ tal que $b \in \text{int}(D)$ y $\text{int}(D) \cap f(U) \neq \emptyset$. Así, $f^{-1}(D) \subset X - f^{-1}(A)$ es un continuo y $b' \in \text{int}(f^{-1}(D))$ y $\text{int}(f^{-1}(D)) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $X - f^{-1}(A)$ es un espacio Qo y $f^{-1}(A) \in NBO(X)$.
3. Supongamos que $A \in NB^*(Y)$. Sea $b \in Y - A$ que comprueba que $Y - A$ es un espacio Q4. Sea $b' \in X - f^{-1}(A)$ tal que $f(b') = b$. Considera un conjunto abierto no vacío $U \subset X - f^{-1}(A)$. Dado que $f(U) \subset Y - A$ es no vacío y abierto, existe un continuo $D \subset Y - A$ tal que $b \in D$ y $D \cap f(U) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f^{-1}(D) \subset X - f^{-1}(A)$ es un continuo y $b' \in f^{-1}(D)$ y $f^{-1}(D) \cap U \neq \emptyset$. Así, $X - f^{-1}(A)$ es un espacio Q4 y $f^{-1}(A) \in NB^*(X)$.

4. Supongamos que $A \in S(Y)$. Sean U_1, \dots, U_m un número finito de conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $X - f^{-1}(A)$. Dado que $f(U_1), \dots, f(U_m)$ son un número finito de conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $Y - A$ y $A \in S(Y)$, existe un elemento $D \in C(Y - A)$ tal que $D \cap f(U_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto, $f^{-1}(D) \in C(X - f^{-1}(A))$ satisface $f^{-1}(D) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Así, $f^{-1}(A) \in S(X)$.
5. Supongamos que $A \in NSC(Y)$. Sean U_1, U_2 dos conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $X - f^{-1}(A)$. Dado que $f(U_1), f(U_2)$ son dos conjuntos abiertos no vacíos contenidos en $Y - A$ y $A \in NSC(Y)$, existe un elemento $D \in C(Y)$ tal que $D \subset Y - A$ y $D \cap f(U_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, $f^{-1}(D) \in C(X)$, $f^{-1}(D) \subset X - f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(D) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Así, $f^{-1}(A) \in NSC(X)$.

□

Bibliografía

- [1] R. H. Bing, Some Characterizations of Arcs and Simple Closed Curves, American Journal of Mathematics. Vol. 70 No. 3 (Jul., 1948), pp. 497-506.
- [2] R. H. Bing, F. B. Jones, Another homogeneous plane continuum, Transactions of the American Mathematical Society. 90.1 (1959): 171-192.
- [3] J. Bobok, P. Pyrih, B. Vejnar, Non-cut, shore and non-block points in continua, Glasnik matematički. 51(1) (2016), 237-253.
- [4] J. Bobok, P. Pyrih, B. Vejnar, On blockers in continua, Topology Appl. 202 (2016), 346-355.
- [5] R. Escobedo, C. Estrada-Obregón, J. Sánchez-Martínez, On hyperspaces of non-cut sets of continua, Topology Appl. 216 (2017) 97-106.
- [6] A. Illanes, P. Krupski, Blockers in hyperspaces, Topology Appl. 158 (2011) 653-659.
- [7] S. Macías, On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X II, Topology Proc. 25(2000), 255-276.

- [8] R. L. Moore, *Concerning the cut-points of continuous curves and of other closed and connected point-sets*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 161(4):101 – 106, 1923.
- [9] P. Minc, *Bottlenecks in dendroids*, Topology Appl. 129 (2003), 187–209.
- [10] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [11] V. C. Nall, *Centers and shore points of a dendroid*, Topology Appl. 154 (2007), 2167–2172.
- [12] G. T. Whyburn, *Semi-locally connected sets*, American Journal of Mathematics. 61(3) (1939), 733–749.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

mauricio.chacon@correo.buap.mx
cesar.piceno@fcfm.buap.mx

Índice de autores

- Hernández López, José Miguel, 27
- Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 114
- Chacón Tirado, Mauricio Esteban, 167
- Contreras Carreto, Agustín, 55
- Domínguez Soto, Patricia, 55
- Herrera Carrasco, David, 93, 114
- Juárez Hernández, Bulmaro, 27
- López Beltrán, Jhonatan Saúl, 5
- Macías Romero, Fernando, 93, 114
- Mendoza Torres, Francisco Javier, 5
- Piceno Cabrera, Augusto César, 167
- Rodríguez Hernández, David, 93
- Rojas Martínez, Lizbeth, 55
- Tajonar Sanabria, Francisco Solano , 27
- Tenorio Arvide, Jesús Fernando, 143
- Velasco Vasquez, Raymundo, 143
- Yescas Aparicio, Cenobio, 143

Matemáticas y sus aplicaciones 27
Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco
10 de febrero de 2026
pdf
6 MB

Matemáticas y sus aplicaciones 27

Fernando Macías Romero

David Herrera Carrasco

Editores

La serie Matemáticas y sus aplicaciones llega a su volumen 27 consolidándose como uno de los referentes editoriales más importantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Esta obra colectiva reúne investigaciones de vanguardia que reflejan la vitalidad y el rigor de la comunidad matemática contemporánea.

A través de sus capítulos, el lector encontrará un recorrido profundo por diversas áreas del conocimiento:

- **Fundamentos y Estructura:** Avances en topología de continuos y teoría de hiperespacios.
- **Herramientas Analíticas:** Desarrollos en análisis, probabilidad y geometría.
- **Impacto y Sociedad:** Aplicaciones prácticas en modelación matemática y propuestas innovadoras para la enseñanza de la disciplina.

Cada trabajo incluido en este volumen ha superado un estricto proceso de arbitraje por pares, asegurando que los contenidos cumplan con los más altos estándares de calidad y relevancia científica. Más que una compilación de artículos, este libro es un testimonio del intercambio intelectual generado a causa de las conferencias internacionales CIMA y un recurso indispensable para investigadores, académicos y estudiantes de licenciatura y de posgrado que buscan comprender y expandir las fronteras de las ciencias matemáticas.

