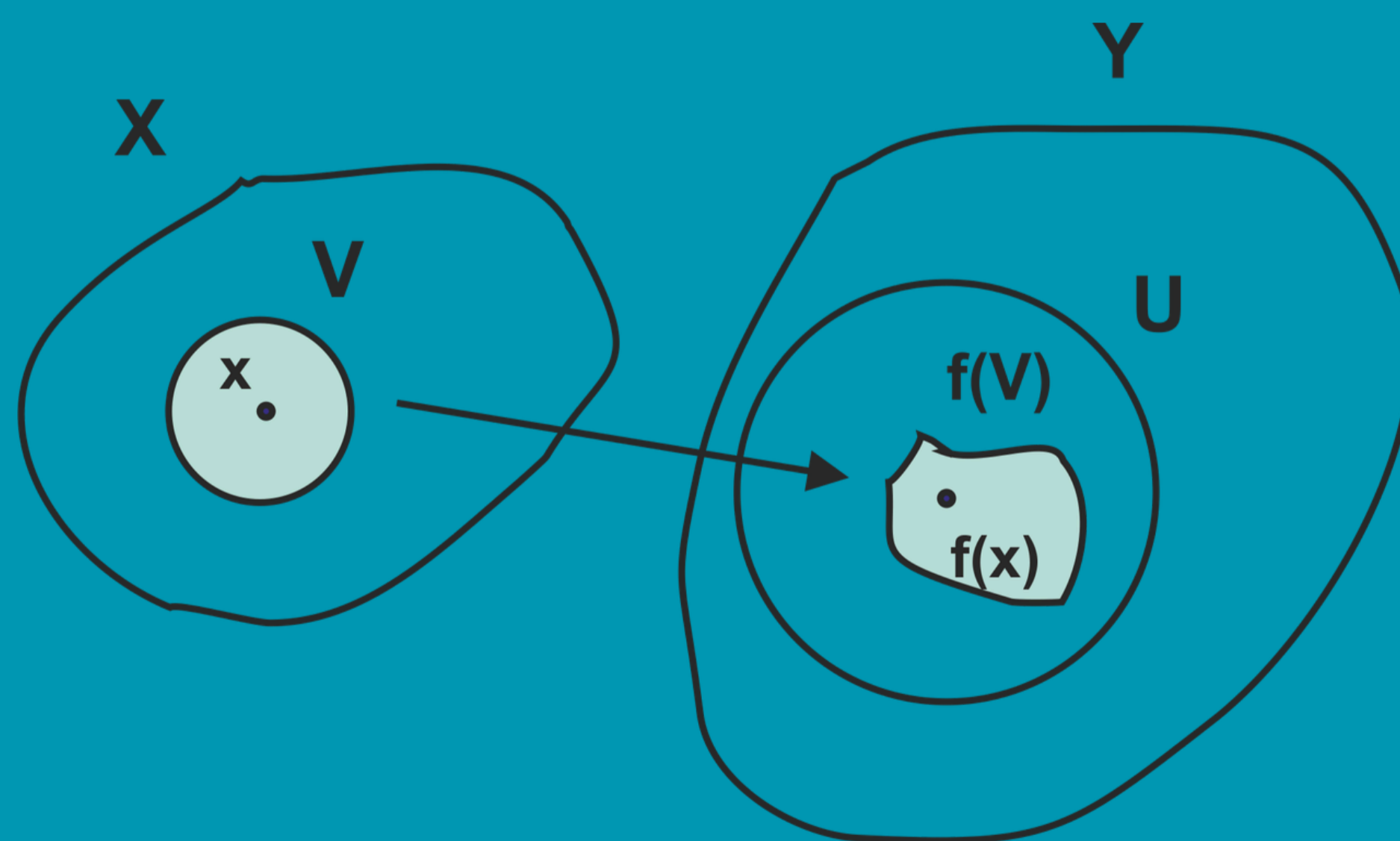


Matemáticas y sus aplicaciones 26

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores



Matemáticas y sus aplicaciones
26

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

RECTORA: MARÍA LILIA CEDILLO RAMÍREZ · SECRETARIO GENERAL:
DANIÁN HERNÁNDEZ MÉNDEZ · VICERRECTOR DE EXTENSIÓN Y DI-
FUSIÓN DE LA CULTURA: ROSALINDA MERINO CALDERÓN · DIRECTOR
GENERAL DE PUBLICACIONES: MARY KRISS PARRA GÓRRIZ

PRIMERA EDICIÓN: 2026

ISBN: 978-968-9744-39-9

D.R. © BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
4 SUR 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE. CP. 72000
TELÉFONO: 2222295500

WWW.BUAP.MX

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES
2 NORTE 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE., CP.72000
Tels.: 2222295500
LIBROS .DGP@CORREO .BUAP .MX | WWW.PUBLICACIONES.BUAP.MX

DISEÑO DE PORTADA: LEONARDO RAMÍREZ APARICIO

HECHO EN MÉXICO

MADE IN MEXICO

Matemáticas y sus aplicaciones 26

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Comité científico internacional

Florian Buck (TUC, DE), Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Félix Capulín Pérez (UAEMEX), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (UANL), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Rocío Leonel Gómez (Rosario Catellanos), Fernando Macías Romero (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Eiichi Matsushashi (SHIMADAI, JP), Daria Michalik (UKSW, PL), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Jesús Fernando Tenorio Arvide (UTM, Oax-MEX), Fernando Orozco Zitli (UAEMEX), Ambrosio Ortíz Ramírez (IPN), Nomura Yamato (SHIMADAI, JP), Cenobio Yescas Aparicio (UTM, Oax-MEX).

Contenido

Presentación	1
---------------------	---

Física

Capítulo 1. Quantum tunnel effect and reflection using mathematical models of barriers	5
---	---

Jesús Alonso Arriaga Hernández, Bolivia Teresa Cuevas Otahola, Cristina Monzerrat López López, María de los Ángeles Pérez-Villegas, and María Monserrat Morín Castillo

1	Introduction	5
2	Wave equation	7
3	Schrödinger equation solution	9
4	Free particle and d'Alembert problem: Barriers and Wells	15
5	Reflection coefficient and future work: conexions	26
6	Conclusions	28

Probabilidad y Estadística

Capítulo 2. Una deducción de la EDP de Black-Scholes mediante el enfoque de portafolio replicantes: teoría y ejemplos	33
--	----

33

Ambrosio Ortiz Ramírez, Ana Cecilia Parada Rojas

1	Introducción	33
2	EDP Black-Scholes	36
3	Fórmula de Black y Scholes	44
4	Conclusiones	51
5	Apéndice	53

Topología

Capítulo 3. Continuos homeomorfos a una esfera	65
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Leonardo Ramírez Aparicio</i>	
1	Introducción 65
2	Definiciones 66
3	Espacios cocientes 77
4	Hiperespacios $SF_n(X)$ homeomorfos a $C_1(X)/F_1(X)$ 82
5	Productos simétricos $F_n(X)$ homeomorfos a $SF_n(X)$ que son n -esferas 84
6	Preguntas 86
Capítulo 4. La propiedad de Kelley en el hiperespacio $C(X)$ y en niveles de Whitney pequeños	89
<i>José Gerardo Ahuatzí Reyes, Norberto Ordoñez Ramírez, Aurora Ríos Medina</i>	
1	Introducción 89
2	Preliminares 91
3	Un ejemplo de W. J. Charatonik 97
4	La propiedad de Kelley no se induce a $C(X)$ 102
5	La propiedad de Kelley no se preserva a los niveles de Whitney 110
Capítulo 5. Embedding theorem	115
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Eiichi Matsuhashi, José Alberto Ortega Becerril</i>	
1	Introduction 115
2	Inverse limits 117
3	Indecomposable Continua of Inverse Limits 120
4	Embedding theorem 122
Capítulo 6. Sobre la pseudo-contractibilidad y los conjuntos rígidos en continuos	135
<i>Félix Capulín Pérez, Roberto Souza Carranza, Fernando Orozco Zitli</i>	
1	Introducción 135

2	Preliminares	137
3	Pseudo-homotopías	138
4	Pseudo-contractibilidad	142
5	Hiperespacios de g -crecimiento	148
6	Conjuntos rígidos y pseudo-contractibilidad	153
7	Conjuntos rígidos, hiperespacios y pseudo-contractibilidad	162
Índice de autores		169

Presentación

La Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) ha colaborado activamente, junto con sus estudiantes, en el desarrollo de las «International Conferences on Mathematics and its Applications (CIMA)», una tradición que se ha consolidado durante 21 años de celebración anual. Este evento ha contado con la destacada participación de matemáticos de renombre internacional, lo que ha motivado la edición del libro que ahora presentamos.

La base fundamental de este esfuerzo ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso, emanado de la Academia de Matemáticas de la FCFM de la BUAP. El amor por las matemáticas ha sido el motor que ha impulsado la creación de esta obra, la cual comparte parte de nuestras actividades diarias y nos brinda la sabiduría necesaria para avanzar en este campo.

Los capítulos de este libro están cuidadosamente agrupados por secciones temáticas, y cada uno de ellos ha pasado por un riguroso proceso de arbitraje que garantiza la calidad y relevancia de los contenidos presentados.

Queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a todos los árbitros por su amabilidad, gentileza, dedicación y labor científica, fundamentales para el éxito de esta publicación. Asimismo, agradecemos profundamente a Leonardo Ramírez Aparicio y Felipe de Jesús Aguilar Romero por su invaluable apoyo en la edición de esta obra 26, que ha sido esencial para hacer posible su realización.

*Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores*

Física

Capítulo 1

Quantum tunnel effect and reflection using mathematical models of barriers

Jesús Alonso Arriaga Hernández¹, Bolivia Teresa Cuevas
Otahola², Cristina Monzerrat López López¹, María de los
Ángeles Pérez-Villegas³, and María Monserrat Morín
Castillo²

FCFM-BUAP¹, FCE-BUAP², IA-UNAM³

Abstract

In this chapter, we analyze particle quantum theory to model different potentials and boundary conditions suitable to simulate the nature of barriers and potential wells. We study Schrödinger solutions (as differential equations) associated with the Hamiltonian modeling the condition of particles colliding with potential barriers or wells, recalling that a well is formed between two potential barriers. We consider two symmetric barriers case with different heights, studying their eigenvalues and bound states. We proved the existence of the solution, the relation between the model and Hilbert space and the relevance of our results. Our main motivation is to set the foundations for N-body models in field theory and quantum gravity according to general relativity theory under the Schwarzschild solution, since our models can be applied to complex systems. We refer to their relation with mass concentrations modeled by N-body algorithms with large mass densities.

1 Introduction

At the beginning of 20th century, several problems were not able to be tackled by physical theory, being able to give solution to others. In the latter cases, those answers were partial, determining certain phenomena, but leaving without explanation other problems associated to the same phenomenon,

obtaining a large number of complications instead of solutions. This situation led to an analysis of the physical-mathematical science, established to break the conceived idea up to the late 19th century of "physics as science, is a complete science". These ideas led to a fundamental change in theory, unifying the phenomena complexity, without leaving anything out from the analysis, establishing a new physical theory to describe the operation of atomic systems and elemental particles, called "Quantum Mechanics".

Technological development pushed the boundaries of current physics, and keeps setting milestones at very deep levels in the scientific development with quantum computing, inducing the modification of central processing units (CPU), moving from the bit to the qbit [13] in PCs, aiming to be used in all homes, revolutionizing current computing. The development of new materials along with solid state physics [11], is related with the technological advances and current techniques that allow us to perform atomic deposition in the creation of new materials, where, once again, quantum mechanics sets the trends. These techniques of atomic manipulation promise unimaginable developments of devices at nanometric scales (nanotechnology) based on barriers and quantum wells [1]. Nowadays, it is possible to build heterostructures of diverse materials, where electrons move and are distributed according to the sequence of the potential wells separated by potential barriers. We highlight from all possible phenomena, those involving electrons as free particles (subject to potentials of the matter itself); reflexive phenomena, transmutative ones, highlighting tunnel effect [1, 5].

In this chapter, we study the reflections and tunnel effect of particles subject to finite arrays of potential barriers: periodical, symmetrical and asymmetrical, in addition to model impurities by modifying the symmetry of potentials. We analyze the basic properties of the differential operators in several variables to apply this to solutions of a differential equation and its physical interpretations in different phenomena [6]. We analyze the physical properties of the wave equations and Hamiltonians, considering different potentials [16, 8] leading to the Planck, Heisenberg and Pauli principles, which lead to build fundamentals of quantum theory and correct the phenomena that variational classic physics cannot solve, regarding the ultraviolet catastrophe and black body [14]. We go through such preamble until we obtain the Schrödinger equation as a wave equation modified by potentials under the Hamilton-Jacobi construction [5]. We enunciate some definitions to mathematically model the wave concept, analyzing the Maxwell fundamentals to obtain the wave equation

and subsequently, analyze them from the differential equations point of view to give a solution. We focus on d'Alembert solution for a wave operator and we subsequently, generalize the solution to the d'Alembertian operator, which generalizes the wave equation model, showing the solution, and relating them with the Schrödinger equation, in addition to show that such solutions lie somewhere in the Hilbert space (H). Therefore, we model different phenomena with the proper power manipulation, considering suitable boundary conditions to compute the transfer matrix, which allows us to determine the transmission and reflection coefficients. We model several configurations of barriers and wells with the aim of determining a quantity free particles (N-body), up to a density we can consider to be large enough in terms of their number and energy. The latter is related with general relativity theory to set the foundations of a models under Schwarzschild solution of Einstein equations for large mass and energy densities deforming space-time.

2 Wave equation

We start by proposing an object with periodical movement [2], which is replicated once a certain parameter moves trough in the domain of a function invariant to other properties such as maxima and minima;

Definition 2.1. *Let $f : A \rightarrow B$ be a function where A, B are ordered sets. If there exists a parameter $T \in A$ parameter such that $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + T)$; for every $\mathbf{x} \in A$, we define f as a wave and T the period of f .*

Without loss of generality, the mentioned sets can satisfy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ and $B \subseteq \mathbb{R}$ (with \mathbb{R} the set of real numbers). In several phenomena in mathematical physics, harmonic functions are often confused with period functions. Hence, we consider the next definition.

Definition 2.2. *Let $f : A \rightarrow B$ be a continuous and differentiable function (A is a set of dimension n). We refer to a function f as a class $C^n(A) \rightarrow C^n$ function if f has continuous partial n -th order derivatives.*

To ease Definition 2.2 regarding partial differential equations we set the partial derivative $\frac{\partial}{\partial x}$ under the following notation $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ for the sake of simplicity, which satisfies all the properties of differential operators, such as linearity, commutativity by a constant, and is equal to zero if we derive a constant

[6, 15]. Hence, from the latter and Definition 2.2, we are able to define the differential operator, which is key in variational and differential calculus in \mathbb{R}^n , in addition to the directional derivative [6, 15, 2, 10].

Definition 2.3. *We define the vector differential operator ∇ Nabla denoted by $\nabla = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \partial_{x_i}$, where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in A$ and $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)$ is the base of A .*

Definition 2.4. *A function f that satisfies the relation $\nabla^2 f = 0$; is known as harmonic function.*

$\nabla^2 = \Delta$ is the Laplacian operator and equation $\nabla^2 f = 0$ defines the Laplace equation [6, 15, 2, 10]. We can extend the analysis of ordinary differential equations by means of the Nabla operator $\sum_{i=1}^n a_i(x) D^i f(x) = g(x)$ (variable coefficients $a_i(x)$ and non-homogeneous, $g(x) \neq 0$) to differential equations in several variables of the form $\sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}) \nabla^i f(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$ (variable coefficients $b_i(x)$ and non-homogeneous by $G(\mathbf{x}) \neq 0$). The most salient examples in mathematical physics are those related with the wave equation

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}, t) = \Delta f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{v^2} \partial_t^2 f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{v^2} \partial_{tt} f(\mathbf{x}, t); \quad (1)$$

where v is the wave velocity. Clearly, $\partial_t^2 = \partial_{tt}$ (according to Einstein notation) and according to Definition 2.1, the solution functions of 1 are waves (according to d'Alembert theory). In this context, Maxwell formalizes electromagnetic theory, unifying electric and magnetic phenomena (both as differentials or integrals) applying Gauss divergence and Stokes rotational theorems [6, 15]. These equations lead to the application of diverse results in vector calculus to obtain the wave equations by means of Maxwell equations for an electromagnetic perturbation $\psi(\mathbf{x}, t)$, obtaining $\Delta \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \psi(\mathbf{x}, t)$, i.e., the perturbations with electromagnetic nature are waves with velocities equal to the light velocity c , which satisfies $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ for the electrical permittivity in the vacuum ϵ_0 and magnetic permeability in the vacuum μ_0 [5, 14]. Maxwell theory explained and solved doubts regarding several problems that were ambiguous to physics, yet including Lagrange, Hamilton and Jacobi theory [16, 8]. However, such theory was not capable of explaining corpuscular problems, black body radiation and ultraviolet catastrophe [14]. Kirchoff introduced the concept of black body as the ideal radiation emitter. Therefore, stars and other astronomical bodies (galaxies, clusters, etc.) are

located far away, but astronomers and cosmologists devised solutions to obtain measurable parameters and determine their electromagnetic radiation by estimating their temperature, chemical composition, velocity, age, size, etc [4] since their radiation resembles that of a Kirchoff black body. Rayleigh-Jeans (based on classic physics of variational calculus) explained the emission curve of black body radiation by means of an expression fitting experimental data to large wavelengths, except for ultraviolet wavelengths; the ultraviolet catastrophe. Subsequently, Planck and Einstein solved the ultraviolet problem by perfectly fitting a black body to the data, in addition to the relation with the particle energy $E = h\nu = \hbar\omega$ (where h is the Planck constant, ν the frequency, $\hbar = h/2\pi$ and $\omega = 2\pi\nu$), setting the starting point of quantum mechanics [5, 14].

Quantum mechanics breaks all existing paradigms by solving corpuscular and radiation problems under Hamilton theory obtaining an expression similar to 1, which is Schrödinger equation

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t) = \widehat{\mathbf{H}}\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t). \quad (2)$$

3 Schrödinger equation solution

In general, Schrödinger equation (2) can be studied in several ways, depending on the potential V in $\widehat{\mathbf{H}}$, resulting in two different ways to analyze it; a stationary case or time-invariant considering the energy states (E) by $\widehat{\mathbf{H}}\psi(\mathbf{x}, t) = E\psi(\mathbf{x}, t)$, and the general time-dependent case for the evolution of wave-like and probabilistic phenomena in quantum mechanics (which in the majority of cases admit variable separation [1, 5, 6, 2] easing the analysis since $\psi(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{x})T(t)$, and moreover, for the potential and performing and analysis regarding the position and another one with respect to time evolution [1, 5]). These approaches are general, highlighting from the analysis of a free particle, which is the base of all the development that is extended to N-body models (going through the solution of atomic models; He, N, O, etc.) since, it sets the foundations to generalize potentials and Hamiltonians $\widehat{\mathbf{H}}$.

Subsequently, 2 is consequence of 1, and generalizes a large quantity of phenomena by modeling different potentials V . However, the undulatory nature of solutions is maintained since they come from a linear equation in

second-order partial derivatives. Both equations are homogeneous, but, in the general case, assuming a given event or state independent on the solution we could have a non-homogeneous equation given a continuous function $g : A \rightarrow B$ such that $\widehat{\mathbf{H}}\psi(\mathbf{x}, t) - i\hbar\partial_{tt}\psi(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t)$, which allows us to build the definition for the d'Alembert wave equation. We emphasize on the majority of time-dependent functions since it is clear that the wave function ψ depends on space A and also on time t , which could easily hold that $t \in A$. However, we need to take into account that in a bulk of physical phenomena, time could imply an irreversible process, which could not return to the ground state after a certain time evolution, although it could return to the ground space state [1, 5], and hence, Definition 2.1 should be modified since the wave could have period and space and time frequency [5, 9, 17]. Although the structure of Definition 2.1 would remain unchanged, we need to introduce a second variable, where time has constraints and starts in the ground state ($t = 0$), and hence, $t \in \mathbf{t} = [0, A_t]$ for cases where $A_t > 0$, which could be also a supreme of A . Thus, wave functions ψ would be defined according to Definition 2.1 with periods in space and time T_A, T_t , specifying that the definition of Planck energy is for $h\nu$ with ν as time frequency [5]. Hence, (as continuation of d'Alembert operator definition and periods) we consider (under Δ) $D_A \{ \cdot \} = \partial_{tt} \{ \cdot \} - \Delta \{ \cdot \}$ and refer to it as the d'Alembertian operator. Hence, we are able to define the general form of the wave equation by d'Alembert [6] as follows:

Definition 3.1. *Let $\psi_i : A' \rightarrow B$ be class C^2 functions (with $i = 1, 2$). If $g : A' \times [0, A_t] \rightarrow B$ is a C^2 class function, then, we use the term Wave Equation regarding the wave $\psi (\in C^2(A' \times [0, A_t]))$ to refer to*

$$\begin{aligned} D_A \{ \psi(\mathbf{x}, t) \} &= g(\mathbf{x}, t) \\ \psi(\mathbf{x}, 0) &= \psi_1(\mathbf{x}) \quad . \\ \partial_t \psi(\mathbf{x}, 0) &= \psi_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3}$$

On the other hand, the difference between spaces $A \subseteq \mathbb{R}^n$ and A' can be easily observed by the construction of A and the exclusion of the time variable in $A' \times [0, A_t]$, observing that $A' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, $[0, A_t] \subseteq \mathbb{R}$, hence $\{A' \times [0, A_t]\} \subseteq \mathbb{R}^n$ [15, 10]. Therefore, it is clear that Definition 3.1 generalizes Definition 2.1, considering 1, allowing mathematical modeling to include boundary conditions with more freedom, according to the analyzed phenomena [7], including in a clear manner that the solutions of 2 are waves. Moreover, every function ψ

$\in C^2(A \times [0, A_t])$ implies that second partial derivatives are admitted regarding space variables (A) and also second derivatives regarding time variables (t). Therefore, for the solution of 3, we recall that by construction of Definition 2.1, we start from periodic functions, which implies that the Fourier series of such functions exist [6, 8, 2, 7]. Hence, the Fourier transforms of such functions also exist ($\mathcal{F}\{\psi(\mathbf{x}, t)\}$) since functions ψ are C^2 class functions, which allows us to obtain the following result.

Proposition 3.2. *For a given wave ψ and functions ψ_i ($i = 1, 2$), g of class $C^2(A' \times [0, A_t])$, 3 has a solution in terms of the time integral transform over \mathbf{x} of an auxiliary function m such that $m(t)R_g(\mathbf{x})$ (where $R_g(\mathbf{x})$ is the space part before variable separation) and (its Fourier transform is) $\mathcal{F}\{m(t)R_g(\mathbf{x})\}$; the solution satisfies the following*

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \partial_t [m(t)\psi_1(\mathbf{x})] + m(t)\psi_2(\mathbf{x}) + \int_0^t m(t-l)g(\mathbf{x}, l)dl. \quad (4)$$

(Note: In the integral transform, the right end of 4 uses variables l and dl since, in the generalization of the process and solution we can, without loss of generality, apply the line integral and Green problem [6, 8, 15, 2, 7], given that the solution method is based on the classical methods of differential equations: undetermined coefficients and parameters variation [6].)

Proof. (This proof can be explicitly followed in Logan [12] and Bleecker et al. [3], where the 1D wave equation is deduced, and subsequently the corresponding equations for several variables; following the steps for the d'Alembert solution in a set with the d'Alembertian construction).

By hypothesis, it follows that all ψ functions are C^2 class ($\psi_i, i = 1, 2$), and also, we separate and extend the domain to $A' \times [0, A_t]$. Subsequently, we recall the term $\partial_t [m(t)\psi_1(\mathbf{x})]$ which encompasses two functions. Hence, $A \subseteq \mathbb{R}^n, A' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, t \in [0, A_t] \subseteq \mathbb{R}$ and $\{A' \times [0, A_t]\} \subseteq \mathbb{R}^n$; we recall that we are under the \mathbb{R} field, where we can build several things.

Let $N(\mathbf{x}_0, r)$ be a ball centered at \mathbf{x}_0 with radius r , that is a set inside space A' , which is a metric and normed space since $A' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ under field \mathbb{R} . Then, if $N(\mathbf{x}_0, r) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, then $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ [10]. (Considering the chapter "*Schwarzschild Black Holes and their effects in a mathematical modeling framework*", in this book). Therefore, since $\mathbf{x} \in A'$, we consider in a similar way, Minkowski cones in the Schwarzschild results, two regions defined by $N(\mathbf{x}_0, r)$ where

$$\begin{cases} \psi_i \in N(\mathbf{x}_0, r); & \psi_i \neq 0 \\ \psi_i = 0; & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (5)$$

(for $i = 1, 2$) interpreting the local nature of ψ_i inside N ; and additionally, we define a second region from the border to the cone

$$\Gamma = \{(\mathbf{x}, t \in \{A' \times [0, A_t]\}) \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r + t\}, \quad (6)$$

satisfying the boundary condition

$$\begin{cases} \text{if } g \in \Gamma; & g \neq 0 \\ g = 0; & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (7)$$

i.e., g is null in region Γ^c (complement of Γ). Without loss of generality, we recall the d'Alembertian $D_A \{\cdot\} = \partial_{tt} \{\cdot\} - \Delta \{\cdot\}$ (applied to ψ), which we can apply the Fourier transform to [6, 15, 12, 3], obtaining

$$\mathcal{F} \{D_A \{\psi(\mathbf{x}, t)\}\} = \mathcal{F} \{\partial_{tt}(\psi(\mathbf{x}, t))\} - \mathcal{F} \{\Delta \psi(\mathbf{x}, t)\}; \quad (8)$$

considering the Fourier transform properties [5, 2, 17, 12, 3], in 8, we obtain

$$\mathcal{F} \{D_A \{\psi(\mathbf{x}, t)\}\} = \partial_{tt} \mathcal{F} \{(\psi(\mathbf{x}, t))\} - \mathcal{F} \{\Delta \psi(\mathbf{x}, t)\}. \quad (9)$$

Subsequently, considering separation variables admitted by $\psi : A' \times [0, A_t] \rightarrow B$, we can separate the variables for applying the transform. Clearly, we are interested in analyzing space variable changes, and for this reason we apply the transform to \mathbf{x} and not over t since operator Δ is defined in space but not in time. Thus, regarding $\mathcal{F} : f(\mathbf{x} \in A') \rightarrow F(w)$ in the frequency space, it holds

$$\mathcal{F} \{D_A \{\psi(\mathbf{x}, t)\}\} = \partial_{tt} \mathcal{F} \{(\psi(\mathbf{x}, t))\} - \|\mathbf{w}\|^2 \mathcal{F} \{\psi(\mathbf{x}, t)\}. \quad (10)$$

Recalling 3, we obtain the following reduced version of 10

$$\mathcal{F} \{g(\mathbf{x}, t)\} = \partial_{tt} \mathcal{F} \{(\psi(\mathbf{x}, t))\} - \|\mathbf{w}\|^2 \mathcal{F} \{\psi(\mathbf{x}, t)\}, \quad (11)$$

10 is reduced to a second order equation with respect to t since the space variable is affected by the Fourier propagator under the Fourier transform. Recalling the conditions $\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_1(\mathbf{x})$, we obtain $\mathcal{F} \{\psi(\mathbf{x}, 0)\} = \mathcal{F} \{\psi_1(\mathbf{x})\}$;

and the condition $\partial_t \psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_2(\mathbf{x})$, from which, we obtain $\mathcal{F} \{ \partial_t \psi(\mathbf{x}, 0) \} = \partial_t \mathcal{F} \{ \psi(\mathbf{x}, 0) \}$ and hence $\partial_t \mathcal{F} \{ \psi(\mathbf{x}, 0) \} = \partial_t \mathcal{F} \{ \psi_2(\mathbf{x}) \}$.

The latter returns the initial conditions for the first derivative with respect to t and an initial state with variable coefficients, in addition to the non-homogeneity by g under the boundary conditions of the cone surfaces Γ and ball N . Hence, we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \psi(\mathbf{x}, t) \} &= \cos(t \|\mathbf{w}\|) \mathcal{F} \{ \psi_1(\mathbf{x}) \} + \frac{\sin(t \|\mathbf{w}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \mathcal{F} \{ \psi_2(\mathbf{x}) \} + \dots \\ &\dots + \int_0^t \frac{\sin((t-l)\|\mathbf{w}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \mathcal{F} \{ g(\mathbf{x}, l) \} dl \end{aligned} \tag{12}$$

where, clearly $\partial_t [\sin(t \|\mathbf{w}\|)] = \|\mathbf{w}\| \cos(t \|\mathbf{w}\|)$. Thus, we consider the inverse Fourier transform, which satisfies $\mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ \psi(\mathbf{x}) \} \} = \psi(\mathbf{x})$; to apply to 12 (i.e. $\mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ \psi(\mathbf{x}, t) \} \}$), in addition to the translation and convolution properties [6, 12, 3]), obtaining

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \partial_t [m(t)\psi_1(\mathbf{x})] + m(t)\psi_2(\mathbf{x}) + \int_0^t m(t-l)g(\mathbf{x}, l)dl, \tag{13}$$

which restricts the condition $\mathcal{F} \{ m(t)R_g(\mathbf{x}) \}$ so that it is necessarily satisfied that $\mathcal{F} \{ m(t)R_g(\mathbf{x}) \} = \frac{\sin(t\|\mathbf{w}\|)}{\|\mathbf{x}\|} R_g(\mathbf{w})$, which is tailored to ψ_1 and ψ_2 . \square

At this point, we recall the Fourier transform and series conditions [1, 7], given that for a solution function of 1 and 3, exists $\mathcal{F} \{ \psi \}$, and hence, the elements to build the terms of the Fourier series of ψ . From the latter it follows that there exist orthogonal elements constituting the same wave solution, implying that a space solution can be determined in 1, which could be straightforwardly extended to 3, in addition to 2.

Definition 3.3. *A pre-Hilbertian space is a vector space V over the \mathbb{K} field (which could be either $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), provided with a scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ between the elements of V . For such scalar product the following properties hold:*

- *Hermiticity: For every $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ it follows that $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$, since if $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Hermiticity is reduced to the ordinary symmetry (the upper line denotes the conjugate).*

- *Sesquilinearity:* For every $a \in \mathbb{K}$ and $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, in addition to $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.
- *Defined positive:* For every $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ and $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, if and only if $\mathbf{x} = 0$.
- *In a pre-Hilbertian space,* a norm induced by a scalar product can be defined as: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$

Definition 3.4. A Hilbert space is a pre-Hilbertian space which is in addition complete regarding the norm induced by the scalar product. This means that every Cauchy succession in space converges to an element inside the space. Hence, a Hilbert space is a pair $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ where H is a vector space over \mathbb{K} and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is a scalar or inner product such that H is complete with the norm $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.

From the latter, the Fourier transform maps a function in the domain (both space and time variables) into a function with a frequency domain (\mathbf{w}, ν) , respectively. In the context of Hilbert spaces, the Fourier transform can be regarded as an unitary operator mapping a Hilbert space $L^2(\mathbb{K})$ (the space of square-integrable functions) into itself [15, 7, 12, 3], as an integral operator preserving the norm induced by the inner product (as an isomorphism of Hilbert spaces, implying that it is a linear transformation that preserves the structure of the Hilbert space).

Corollary 3.5. Since the solutions of both 1 and 3 are waves, the solutions set of the Schrödinger equation (2) is contained inside the solutions of Definition 3.1 and Proposition 3.2. Hence, we showed that d'Alembert solution for the d'Alembertian in Proposition 3.2 are elements of a given Hilbert space H , and hence the solutions of Schrödinger equation are elements of a given Hilbert space.

Proof. The proof is followed in a intuitive and axiomatic way regarding the definitions of a pre-Hilbertian (Definition 3.3 and Hilbertian (Definition 3.4)) spaces, since the solutions ψ of the d'Alembertian model in Definition 3.1 have Fourier transforms (i.e., implying the existence of $\mathcal{F}\{\psi\}$), implying also that there exist elements to determine the Fourier series of ψ , inducing the orthonormality of those solutions ψ , which leads to $\psi \in V$ with V a pre-Hilbertian space. Hence, since $\psi \in C^2(A' \times [0, A_t])$ where clearly $A' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ and

$[0, A_t] \subseteq \mathbb{R}$, with the real numbers \mathbb{R} a complete set [15, 10, 12, 3]. Therefore, the solutions ψ of Schrödinger equation (2) are elements of a Hilbert space H . □

4 Free particle and d'Alembert problem: Barriers and Wells

Now, we focus on quantum theory under corpuscular concepts, momentum-energy (resembling the bases of the momentum-energy tensor in Einstein equations), Pauli exclusion and Heisenberg principles and Schrödinger solution in 2.

In order to analyze the free particle case and formulate suitable models, we start with the 1D erroneous case, which is called erroneous since it is clear that to perceive or analyze explicitly a solution of Schrödinger equation (2) a 2D space (bi-dimensional) is required given that both time and space evolution will be given by the same function. If we intend to extend this case, we need a 3D space for a free case particle under the action of a 1D field by the pair (ψ, \mathbf{x}) and pair (ψ, t) . However, we recall that to generalize d'Alembert solution, the function $\psi : A' \times [0, A_t] \rightarrow B$ has the capability to allow variable separation, with a solution in space and time evolution in such solution. Hence, considering the general case of the wave equation (Definition 3.1) it follows that in the "free particle" case $g(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ which reduces d'Alembert solution 13, also considering the absence of potentials ($V(\mathbf{x}, t) = 0$ in Schrödinger equation) solving only the case in 1.

In this case, we can consider that variable separation is admitted ($m(t)R_g(\mathbf{x})$ Proposition 3.2), and hence, $\psi \in H$ follows that $\psi(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega t}\varphi(\mathbf{x})$ is a solution of 1, and thus

$$\Delta\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{v^2}\partial_{tt}\psi(\mathbf{x}, t) \implies \Delta e^{i\omega t}\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{v^2}\partial_{tt}e^{i\omega t}\varphi(\mathbf{x}); \quad (14)$$

hence, it follows that

$$e^{i\omega t}\Delta\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\varphi(\mathbf{x})}{v^2}\partial_{tt}e^{i\omega t} = -\varphi(\mathbf{x})\frac{\omega^2}{v^2}e^{i\omega t} \implies \Delta\varphi(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{v^2}\varphi(\mathbf{x}) = 0. \quad (15)$$

Subsequently, under certain physical conditions, where $v = \lambda\nu$, momentum \mathbf{p} follows $p = \|\mathbf{p}\|$ (under the same norm $\|\cdot\|$ of H) and $h = \lambda p$ since $E = cp$ and $cp = \omega\hbar$, we obtain

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{v^2}\varphi(\mathbf{x}) = \Delta\varphi(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2}\varphi(\mathbf{x}) = 0. \quad (16)$$

Recalling momentum-energy-potential equation $E = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{x})$, we obtain the stationary or independent form [5]

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{x}) = 0 \implies -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) = E\varphi(\mathbf{x}). \quad (17)$$

Thus, to consider the free particle we set $V = 0$. Therefore, 17 solves d'Alembert problem for a wave in a vibrant string [12, 3] under energy considerations in the magnitude of the wave vector for $V = 0$. Hence,

$$-\Delta\varphi(\mathbf{x}) = E\frac{2m}{\hbar^2}\varphi(\mathbf{x}) = k^2\varphi(\mathbf{x}) \implies \Delta\varphi(\mathbf{x}) + k^2\varphi(\mathbf{x}) = 0, \quad (18)$$

where $\Delta \rightarrow \partial_x$, which has solution we obtained from the Euler method [1, 6] with $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(x) = Ae^{mx}$, resulting in the characteristic equation $m^2 + k^2 = 0$ from where we get that $m = \pm ik$, leading to two complex solutions $\varphi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}$, after considering the polar form of a complex number (with $\varphi(x) \in \mathbb{C}$) $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, it follows that

$$\varphi(x) = B_1\sin(kx) + B_2\cos(kx); \quad (19)$$

with $B_1 = i(A_1 - A_2)$ and $B_2 = A_1 + A_2$, where clearly $\varphi(x)$ follows all conditions such that $\varphi(x) \in H$. Hence, by modeling proper conditions ensuring the string is fixed to rigid points in $x = 0$ and $x = L$, the solution must satisfy $\varphi(x) = 0$ if $x \in \partial[0, L]$, which allows us to conclude that $\varphi(x) = B_1\sin(kx)$. Hence, in order to consider the states, we analyze the cases for which $\varphi(L) = B_1\sin(kL) = 0$, due to boundary conditions. Thus, for the non-trivial solution $B_1 \neq 0$ it follows that $KL = n\pi$ with $n \in \mathbb{Z}$.

In order to determine the harmonic states of vibration we first fix index n , and subsequently k , representing the magnitude of the wave vector $k = 2\pi/\lambda$ [5, 2, 9] implying that vibration frequencies or harmonics are $\omega_n = n(\pi/L)v$; moreover, we deduce the natural frequency of the string as $\nu_0 = v/(2L)$. Thus,

$KL = n\pi$, $\omega_n = n(\pi/L)v$ and 19, allows us to build a relation with quantization of E (energy) and the states. This leads to the idea of a Eigenvalues equation (E), and allows us to re-write 17 as

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x}) \right\} \varphi_n(\mathbf{x}) = L\varphi_n(\mathbf{x}) = E_n\varphi_n(\mathbf{x}), \quad (20)$$

which determines the eigenvalues of L (equivalent to ω_n o λ_n) or the eigenfunctions φ_n . Subsequently, by solving 20, we can determine the eigenvalues and eigenfunctions. It is clear that n enumerates the solutions which could be continuous, discrete or partially continuous or discrete. For instance, the solutions of the stationary Schrödinger equation (2) are eigenfunctions of operator L , with eigenvalues matching the possible energy values, discrete for an atom, but continuous for a free particle [5].

Hence, without loss of generality, we can set boundary conditions to a differential equation (Schrödinger, 2), either elliptic or parabolic, according to the model, for instance Neumann conditions $\partial\varphi/\partial n = 0$ (normal derivative equal to zero) in the boundary regarding the normal \mathbf{n} to the boundary surface; or Cauchy conditions fixing φ (resembling d'Alembert solution in Proposition 3.2) and $\partial\varphi/\partial n$ in the boundary over a closed surface [6, 2, 7].

Barriers and Potential Wells

We start showing a classic potential curve for an analysis of Hamilton Jacobi and Lagrangians, where we observe the behavior of the wells as field attractors under the property of the elements of the set, feeling the action due to their properties, as a gravitational potential (well), attracting a mass or a electric potential (which could be a barrier or a well) repelling or attracting a particle according to its charge [16, 8], as can be seen in Figure 1.

Analogously, we address the problems of 1 and 2 potential barriers, and subsequently, we take for granted the case of more barriers with the aim of showing the transmission coefficient and the tunnel effect.

For the solution of this problem, we separate the barrier region in 3 zones: I, where the travel of the particle starts, II, where the particle is subject to the potential and is transmitted from I to II, with the probability to be reflected to I, and, in III, where the particle escapes from the potential and is transmitted to III, departing to the complement of the potential region with a probability

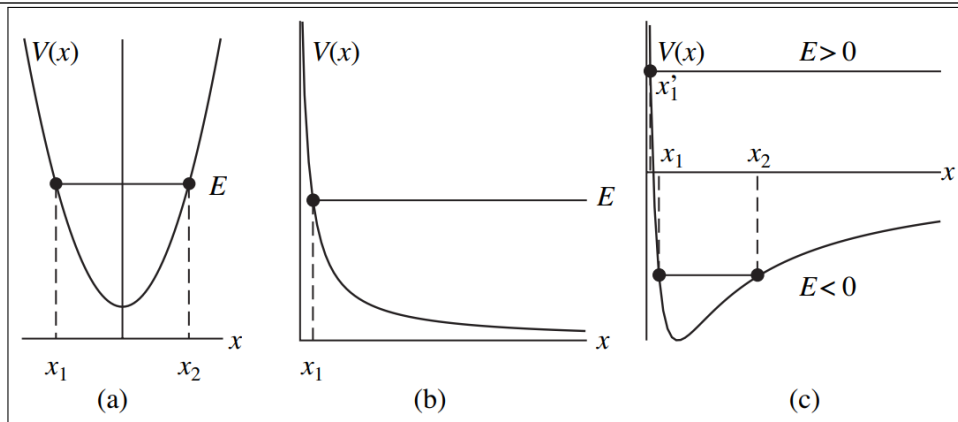


Figure 1: In (a) we show an attractive potential well (attractor) forming a bound system resulting in a discrete spectrum. In (b), we show a repulsive potential, producing open orbits and a continuum spectrum. In (c), a classic curve of effective potential [16, 8], with potentials for which, both situations can be illustrated; in the example, for negative energies the spectrum is discrete, however, for positive energies it is continuum. The notion of orbit used is the quantum one (Figure obtained from De-La-Peña) [5]).

of getting trapped in II. Hence, we properly model the potential inside the stationary Schrödinger equation 20 (in addition to 20) as

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0, & x \in [-a/2, a/2] \\ 0, & x \notin [-a/2, a/2] \end{cases}, \quad (21)$$

allowing us to model the solutions (according to the Euler-Lagrange method [16, 8]), by region, according to Figure 2, determining the interfaces (where an interface is the imaginary line dividing a region, which in the case of glass of water, the interface would be glass [1, 5, 9]) obtaining

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_I(x)A_1e^{ik_1x} + B_1e^{-ik_1x}, & x \in (-\infty, -a/2] \\ \varphi_{II}(x) = A_2e^{ik_{II}x} + B_2e^{-ik_{II}x}, & x \in [-a/2, a/2] \\ \varphi_{III}(x) = A_3e^{ik_{III}x} + B_3e^{-ik_{III}x}, & x \in [a/2, \infty) \end{cases}, \quad (22)$$

where by construction of the model of potentials and regions in 21 and 22 it follows that $k_I = k_{III} = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k_{II} = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$, since the

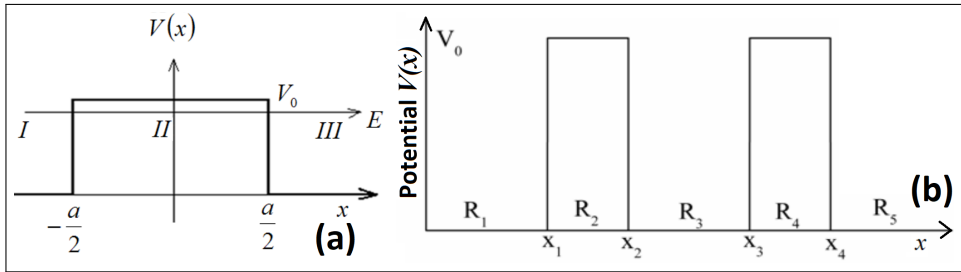


Figure 2: We show two figures. In (a), we illustrate a potential barrier with height V_0 whereas in (b), we show the case of two symmetric potential barriers with the same height, highlighting that at the center of the two barriers a potential well $-V_0$ is formed. In both cases, we show different interfaces or lines, separating and giving place to boundary conditions for each region [5].

potential only has finite discontinuities due to the interfaces, and, both the wave function as well as its first derivative are continuous (given that $\varphi \in C^2$ according to Proposition 3.2) in the points where the potential has finite discontinuities. Subsequently, considering the boundary conditions in the interfaces, it must hold that

$$\begin{cases} \varphi_I(x)|_{x-\frac{a}{2}} = \varphi_{II}(x)|_{x-\frac{a}{2}} & \left(\frac{d}{dx}\varphi_I(x)\right)|_{x-\frac{a}{2}} = \left(\frac{d}{dx}\varphi_{II}(x)\right)|_{x-\frac{a}{2}} \\ \varphi_{II}(x)|_{x-\frac{a}{2}} = \varphi_{III}(x)|_{x-\frac{a}{2}} & \left(\frac{d}{dx}\varphi_{II}(x)\right)|_{x-\frac{a}{2}} = \left(\frac{d}{dx}\varphi_{III}(x)\right)|_{x-\frac{a}{2}} \end{cases}. \quad (23)$$

Mixing conditions in 22 and 23, we obtain two systems of equations with two equations and two unknown variables, which can be written in matrix form as

$$\begin{pmatrix} A_I \\ B_I \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{k_{II}}{k_I}\right)e^{i(k_I - k_{II})\frac{a}{2}} & \left(1 - \frac{k_{II}}{k_I}\right)e^{-i(k_I + k_{II})\frac{a}{2}} \\ \left(1 - \frac{k_{II}}{k_I}\right)e^{i(k_I + k_{II})\frac{a}{2}} & \left(1 + \frac{k_{II}}{k_I}\right)e^{-i(k_I - k_{II})\frac{a}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{II} \\ B_{II} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} A_{II} \\ B_{II} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{k_{III}}{k_{II}}\right)e^{i(k_{II} - k_{III})\frac{a}{2}} & \left(1 - \frac{k_{III}}{k_{II}}\right)e^{-i(k_{II} + k_{III})\frac{a}{2}} \\ \left(1 - \frac{k_{III}}{k_{II}}\right)e^{i(k_{II} + k_{III})\frac{a}{2}} & \left(1 + \frac{k_{III}}{k_{II}}\right)e^{-i(k_{II} - k_{III})\frac{a}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{III} \\ B_{III} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

where k_{II} could be any complex number (because $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) and is determined according to the solutions of 22 by Euler [6, 2] (with $k_I = k_{III}$), depending on

whether the energy E is higher, equal or lower than the potential V_0 (height of the potential barrier (Figure 2 (a)). Substituting $(A_{II} \ B_{II})^T$ (where in \mathbf{A}^T symbol T in the context of matrices denotes the transpose of a matrix) in 24, we explicitly obtain the linear relation between vectors $(A_I \ B_I)^T$ and $(A_{III} \ B_{III})^T$ given the expression $(A_I \ B_I)^T = \mathbf{M}(A_{III} \ B_{III})^T$. Therefore, \mathbf{M} is the transfer matrix given by

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

where $M_{11} = (\cosh(ak_{II}) + i\frac{\varepsilon}{2}\sinh(ak_{II})) e^{iak_I}$, $M_{12} = \frac{in}{2}\sinh(ak_{II})$, $M_{21} = \overline{M_{12}}$ and $M_{22} = \overline{M_{11}}$. On the other hand, with respect to 26, it follows that $\varepsilon = (k_{II}/k_I) - (k_I/k_{II})$ and $\eta = (k_{II}/k_I) + (k_I/k_{II})$. We immediately notice that the transfer matrix 26 is invariant under time inversions and conserves the probability flux [1, 5]. Thus, the transmission coefficient is given by $T = |\det(\mathbf{M}/M_{22})|^2$, explicitly by considering \mathbf{M} in 26, we obtain

$$T = \frac{1}{|\cosh(ak_{II}) + i\frac{\varepsilon}{2}\sinh^2(ak_{II})|}. \quad (27)$$

Normalizing the energy to the potential $\xi = E/V_0$, we obtain the following expression of the transmission coefficient

$$T(\xi) = \begin{cases} \frac{4\xi(1-\xi)}{4\xi(1-\xi) + \text{Senh}^2(\varpi a)}, & \text{si } 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{4\xi(\xi-1)}{4\xi(\xi-1) + \text{Sen}^2(\varsigma a)}, & \text{si } \xi > 1 \end{cases}, \quad (28)$$

with $\varpi = \sqrt{2m(V_0 - E)}$, $\varsigma = \sqrt{2m(E - V_0)}$ and $m = 9.109x10^{-31}kg$, setting the phenomenon for electrons with mass values. Subsequently, 28 illustrates analytically the behavior of the transmission coefficient for an electron-bombar ded potential barrier (electrons beam). In Figure 3, we show for $\xi \leq 1$, i.e., $E < V_0$ coefficient $T(\xi) < 1$ implying that a particle has larger probability of being reflected. However, there is certain probability that the particle is transmitted through the barrier. This behavior, is a typical feature of the quantum realm, known as the "Tunnel Effect". Recalling the same equation, we notice that the thinner the barrier is (smaller a value), the higher will be the probability of manifesting tunneling (Tunnel Effect), however, it will never be equal to one. For $\xi > 1$, it follows that there exist determined energies

($\xi_n = 2.59$) of the particle (such that $T(\xi) = 1$) implying that there is no reflection and the particle is in resonance. Such resonances occur when the particle has a wavelength that ensures the width of the barrier is equal to a semi-integer multiple of such wavelength. Reportedly, the particles with such energies do not even collide with the barrier (invisibility of the barrier), but the resonances do not occur when the particle energy is lower than the potential barrier height.

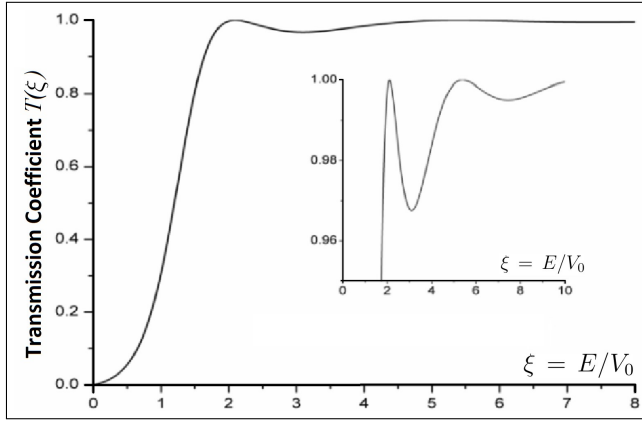


Figure 3: We show the behavior of the transmission coefficient for a potential barrier with height V_0 [Figure 2 (a)] and width a as function of energy of the incident particle normalized to the potential height ξ .

For the two barriers case, we perform the same procedure, considering two symmetric barriers of width a , separation d and height $V(\mathbf{x}) = V_0$. We proceed analogously as in the case of one barrier, solving 20 (from 2) considering different sections as the particle (electron) moves forward toward the potential barriers, crossing different interfaces and finally leaves or is transmitted outside the barriers configuration in Figure 2 (b). Subsequently, the modeled potential $V(\mathbf{x})$ for two symmetric potential barriers corresponds to

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & , \text{ si } x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \\ 0 & , \text{ si } x \notin [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \end{cases} \tag{29}$$

under the considerations $x_2 - x_1 = x_4 - x_3 \equiv a$ and $x_3 - x_2 \equiv d$ to obtain $R_1 = (-\infty, x_1]$, $R_2 = [x_1, x_2]$, $R_3 = [x_2, x_3]$ and $R_4 = [x_3, x_4]$. Hence, solutions φ of Schrödinger equation (2) are flat waves traveling to the right and the other

one to the left. Therefore, the general solution is a linear combination of these waves (according to Euler method [1, 6, 2]) following $\varphi_j(\mathbf{x}) = a_j e^{ik_j x} + b_j e^{-ik_j x}$ with $k_j = \sqrt{2m(E - V_j)}/\hbar$ (with $j = 1, 2, 3, 4, 5$) the magnitude of the vector wave in the j -th region (R_j) (depends on whether $E \geq V_j$ or $E < V_j$). From $\varphi(\mathbf{x})$ we observe that the wave function evaluated in two different points x and x' in the j -th region differs in a phase shift in the sense of d'Alembert [12, 3], quantifiable by multiplying the function in point x for a diagonal matrix called propagation matrix \mathbf{P} (a method resembling that of ABCD matrices in photonics [17])

$$\varphi_j(x') \begin{pmatrix} \exp(ik_j \Delta x) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_j \Delta x) \end{pmatrix} \varphi_j(x) \equiv \mathbf{P}_j \varphi_j(x), \quad (30)$$

where $\Delta x = x' - x$. Matrix \mathbf{P}_j propagates the wave from points x to x' through a constant potential. Subsequently, we observe the propagation of the wave function when the potential suffers a finite leap in the interfaces with continuous derivatives. These conditions of continuity, take the form of

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik_1 & -ik_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 e^{ik_1 x_1} \\ b_1 e^{-ik_1 x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik_2 & -ik_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 e^{ik_2 x_1} \\ b_2 e^{-ik_2 x_1} \end{pmatrix} \quad (31)$$

very common continuity conditions in the methods based on Fourier series [2]. Multiplying by the inverse of the first matrix on the left side and using the notation given by $\varphi(\mathbf{x})$ we obtain

$$\varphi_2(x_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{k_1}{k_2} & 1 - \frac{k_1}{k_2} \\ 1 - \frac{k_1}{k_2} & 1 + \frac{k_1}{k_2} \end{pmatrix} \varphi_1(x_1) = \mathbf{I}_{12} \varphi_1(x_1). \quad (32)$$

Matrix \mathbf{I}_{12} allows the propagation of the wave function from region R_1 to region R_2 through the interface (finite discontinuity of the potential in $x = x_1$). If x_0 is an arbitrary point in region R_1 , using 30 and 32 we can link the wave function in point x_0 to the wave function in point x_1 , immediately after the interface with

$$\mathbf{I}_{12} \mathbf{P}_1 \varphi_1(x_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{k_1}{k_2}) e^{ik_1(x_1-x_0)} & (1 - \frac{k_1}{k_2}) e^{-ik_1(x_1-x_0)} \\ (1 - \frac{k_1}{k_2}) e^{ik_1(x_1-x_0)} & (1 + \frac{k_1}{k_2}) e^{-ik_1(x_1-x_0)} \end{pmatrix} \varphi_1(x_0), \quad (33)$$

where $\varphi_2(x_1) = \mathbf{I}_{12}\mathbf{P}_1\varphi_1(x_0)$. In position x_1 in R_2 , we can propagate the wave function $\psi_2(x_1)$ up to x_2 by means of applying matrix \mathbf{P}_2 . At that point, we can pass through the interface between regions R_2 and R_3 applying matrix \mathbf{I}_{23} through $\varphi_3(x_2) = \mathbf{I}_{23}\mathbf{P}_2\varphi_2(x_1)$. Hence, it means that the first barrier was crossed, right after the second interface, linking φ in R_1 with $\varphi(x_2)$ in R_3 ; subsequently, for the sake of simplicity, we set $\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}_{23}\mathbf{P}_2\mathbf{I}_{12}\mathbf{P}_1$. Thus, to continue propagating the electron (φ) up to region R_3 ($\varphi(x_3)$) and multiply by matrix \mathbf{I}_{34} to cross the interface between R_3 and R_4 , we have $\psi_4(x_3) = \mathbf{I}_{34}\mathbf{P}_3\psi_3(x_2)$, located already in x_3 on the side of region R_4 , we propagate once again the wave function $\varphi_4(x_3)$ up to point x_4 by applying matrix \mathbf{P}_4 and immediately after we multiply by matrix \mathbf{I}_{45} to cross interface $R_4 - R_5$ to obtain $\varphi(x_4)$ in region R_5 , we set $\varphi_5(x_4) = \mathbf{I}_{45}\mathbf{P}_4\mathbf{I}_{34}\mathbf{P}_3\mathbf{M}_1\varphi_1(x_0)$. We have passed through two potential barriers and the transfer matrix corresponding to the second barrier is $\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{I}_{45}\mathbf{P}_4\mathbf{I}_{34}\mathbf{P}_3$, where we can finally obtain $\varphi_5(x_4) = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\varphi_5(x_0)$. As we showed previously, solutions of 3 (Proposition 3.2) and 2 (properties inherited to 20) are elements of a given Hilbert space (in other words, they are Hilbertians) and matrices \mathbf{I} , \mathbf{P} , and thus, \mathbf{M} are also Hilbertians. Therefore, the product of transfer matrices is closed (since the field defined by the Hilbert space is complete, given that \mathbb{C} is built from \mathbb{R} which is complete [15, 10]).

Figure 4 shows the transmission coefficient T for two potential barriers [see Figure 2 (b)], as a function of the particle energy normalized to the potential height ($\xi = E/V_0$). The separation between barriers is $d = 0.6\text{nm}$ and their width $a = 0.4\text{nm}$ ($m = m_e$). We observe that in the region of energies characteristic of tunneling ($E < V_0$) exists an energy of $0.358V_0$ when the transmission coefficient is equal to one (we also obtain resonance), which does not occur in one barrier case. For this energy, the disperser system is invisible. To understand this resonance energy, we observe Figure 2 (b) since between two barriers there exists an infinite potential well, where the these potentials contain a finite number of bound states.

It is clear that this matrix procedure can be extended analogously to an arbitrary number of potential barriers. Even in the case of asymmetric barriers, we can simulate doping or alterations between compositions of a given material [1, 5, 16, 2] or simply, anomalous conditions between the bonds of the matter itself [11]. We simulate this in our solution by means of modifications in the heights, widths, and separation between the barriers. Due to the time invariance (of the disperser potential, which resemble the vacuum conditions

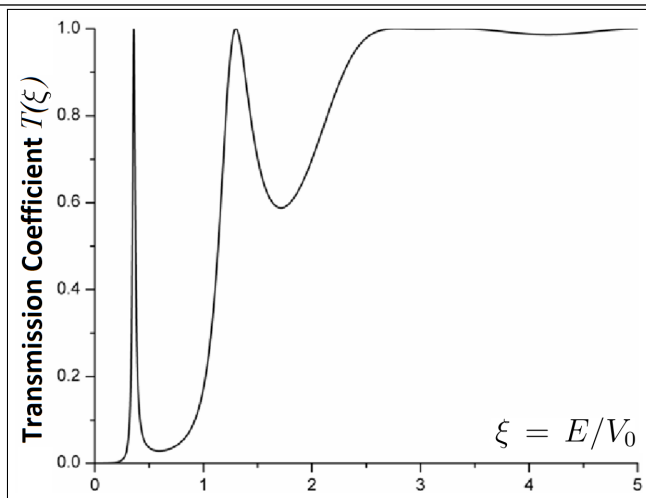


Figure 4: Transmission coefficient for two potential barriers $V = V_0$ and width a separated by a distance $d = 0.6\text{nm}$ as function of the energy of the incident particle normalized to the potential height.

considered by Schwarzschild, see Cap. "*Schwarzschild Black Holes and their effects in a mathematical modeling framework*"), and therefore the condition of \mathbf{M} with inputs $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ where $M_{22} = \overline{M_{11}}$ and $M_{21} = \overline{M_{12}}$ [1, 5]. In addition, flux conservation implies that the determinant of the transfer matrix is equal to one ($\det(\mathbf{M}) = 1$). Hence, the transmission coefficient is given by $T = |\det(\mathbf{M}/M_{22})|^2$, i.e., $T = |1/M_{22}|^2$.

By highlighting the zone generated between the barriers in Figure 2 (b) we observe the formation of a potential well with a sink value $V = -V_0$ which we can model as follows

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & , \text{ si } x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \\ 0 & , \text{ si } x \notin [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \end{cases} \quad (2.1)$$

It is widely known that, in quantum mechanics, a potential well contains a finite number of bound states with defined parity, alternating them from the ground state which has even parity [1, 5], and eigenvalues (energies) corresponding to these states which given by the following transcendent equations, where $\xi = E/V_0$ and $k = \sqrt{2mE}/\hbar$:

$$\text{even states } \sqrt{1 - \xi} = \sqrt{\xi} \text{Tan}\left(\frac{1}{2}kd\right), \tag{34}$$

$$\text{odd states } \sqrt{1 - \xi} = -\sqrt{\xi} \text{Cotg}\left(\frac{1}{2}kd\right). \tag{35}$$

Figure 5 shows a graphic solution of the states parity of 34 and 35 for a finite potential well enclosed between two barriers (with transmission coefficient shown in Figure 4). We observe that for this well there exists a unique solution (with even parity) with energy $0.358V_0$, which is precisely the resonating tunneling energy for those two barriers. In this unique state for the electron, the well is a bound state since the well walls have finite size due to the finite probability of tunneling through barriers, having as a result a probability density within this type of well with a decay in terms of time. Hence, the states of wells as the one in Figure 2 (b) formed between the barriers, are not stationary, and it requires to properly solve 2.

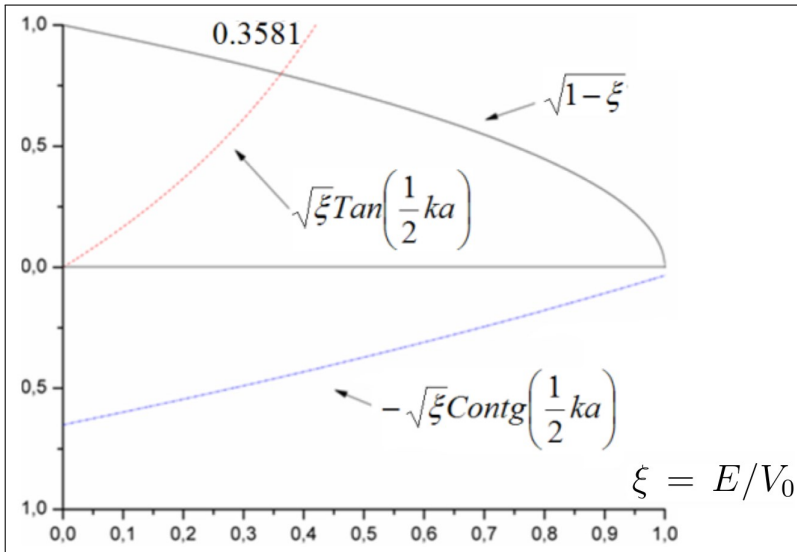


Figure 5: Graphic solution of 34 and 35 for a potential well with height $V_0 = 1\text{eV}$ and width $a = 0.4\text{nm}$ separated by a distance $d = 0.6\text{nm}$, as a function of the energy of the incident particle (electron) normalized to the potential height $\xi = E/V_0$.

5 Reflection coefficient and future work: connections

In radiative phenomena of matter in industry and cosmology the atomic decomposition by emission is always considered by bombardment or due to the action of a potential [5], where a particle accelerated and emitting can also be considered as emission due to the action of a potential. In this type of phenomenon, we consider the total probability of possible phenomenon inside coefficients T (transmission), R (reflection) and A (absorption)

$$A + T + R = 1; \tag{36}$$

absorption case is practically negligible given the mean life of the electron of 2.210^{-6} sec, and hence, if we are in the massive bombardment case, we could talk about a population in regions in the inner parts of barriers; however, since we are in one particle case, we can neglect such coefficient ($R \rightarrow 0$), which reduces 36 a $R + T = 1$, and thus, we obtain $R = 1 - T$ and from expression $T = |\det(\mathbf{M}/M_{22})|^2$ it follows that $R = 1 - |1/M_{22}|^2$. Therefore, from 28 it follows that

$$T(\xi) = \begin{cases} \frac{\text{Senh}^2(\varpi a)}{4\xi(1-\xi) + \text{Senh}^2(\varpi a)}, & \text{si } 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{\text{Sen}^2(\varsigma a)}{4\xi(\xi-1) + \text{Sen}^2(\varsigma a)}, & \text{si } \xi > 1 \end{cases}, \tag{37}$$

where also $\varpi = \sqrt{2m(V_0 - E)}$, $\varsigma = \sqrt{2m(E - V_0)}$ and $m = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ (electron mass), $V_0 = -1\text{eV}$ and the separation between barriers, which this time would match the well width $a = 0.6\text{nm}$, subject to energy normalization $\xi = E/V_0$.

The formulated theory in this chapter can be generalized for the N-barriers case potential, which can simulate an electron through a N-particles array with repulsive potentials but, in the interstice, where there are no particles, attractors are generated causing constructive interference in the electron path resulting in resonance effects. We are currently working on this new extended N-body model with the aim of ensuring that the potentials of the rest of particles are symmetric or not considering doping [1]. We are also reviewing several architectures since we could also bombard with n-electrons the barriers configuration highlighting that in the interstices we would have particles

(implying that $R \neq 0$ with mass concentrations and other resonant effects in addition to the bound states), which implies some of the models resemble mass conglomerates and mass density in N-body cosmological models. The latter is of fundamental interest since in chapter "*Schwarzschild Black Holes and their effects in a mathematical modeling framework*" (also in this book) we introduce Einstein equations as a Schwarzschild solution, determining more than one resemblance with the proposal in this chapter, for instance, vacuum conditions involving the stationary Schrödinger equation (17), where the considerations of coefficients R , T and A contribute to the theory where A could determine conditions for the mass and density considerations. Hence, we can highlight the modification and conditions for both theories that can solve similar phenomena, since the masses are larger in Schrödinger considerations regarding Einstein/Schwarzschild equations. Thus, we should consider that the wells need to have a larger depth and endure singularities, making equivalences between different tensors (metric, Einstein, and Christoffel symbols).

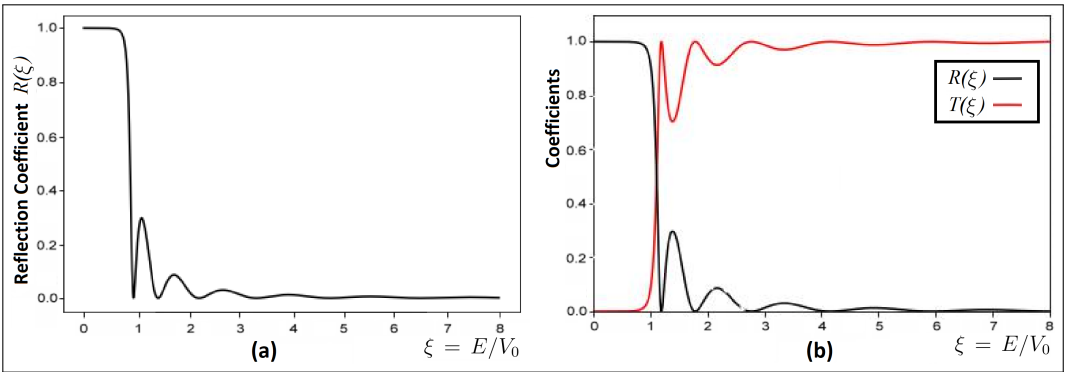


Figure 6: (a) Graphic solution of 37 for a potential well generated by two adjacent barriers [Figure 2 (b)] with height $V_0 = 1\text{eV}$ and width $a = 0.4\text{nm}$, separated by a distance $d = 0.6\text{nm}$, as function of the energy of the incident particle (electron) normalized to the potential height $\xi = E/V_0$. In (b), we show the comparison between the reflection (black) and transmission (red) coefficients.

6 Conclusions

The aim of this chapter is to show that the solutions of Schrödinger equation (2) are elements of a Hilbert space H under the d'Alembert solution, which generalizes the model of the wave equation, considering the existence of a norm function, inner product and orthogonality of such solutions due to the possibility of Fourier transforms. After showing that such solutions are Hilbertians, we proceed to build differential models and suitable potentials that allow us to represent special cases of particles reflection and transmission. Subsequently, from the solutions we focus on tunnel effect, which represents that an incident particle over a potential barrier has a probability depending on its energy to ensure it crosses freely through space without feeling the potential influence.

We set the foundations required to link the research in chapter "*Schwarzschild Black Holes and their effects in a mathematical modeling framework*" (also in this book) based on Schwarzschild solution for Einstein equations in general relativity under a tensor analysis to connect quantum mechanics models for n potentials and extend them to N -body models, to subsequently modify them and build necessary relations of mass and energy of particles and cosmological objects suitable for such models; i.e. modeling quantum relativity in N -body simulations.

Acknowledgments

The authors thank SECIHTI (Secretaría de Ciencias, Humanidades, Tecnología e Innovación) and Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) at Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, for the support given during the course of this investigation.

Bibliography

- [1] Arriaga Hernández Jesús Alonso, *Efecto túnel resonante a través de arreglos de barreras de potencial*, bachelor thesis, ESFM-IPN, 2010.
- [2] Arriaga Jesús Alonso, Cuevas-Otahola B., Oliveros-Oliveros J.J. and Morin-Castillo M.M. *Fourier Series Method with Circular and*

- Spheric Harmonics applied to physical phenomena regarding the direct problem solution* Matemáticas y sus Aplicaciones 17, Chap. 7, 161-188, BUAP ed., 2021.
- [3] Bleecker D. and Csordas G.P. *Basic Partial Differential Equations*, CRC Press, 2018.
- [4] Cuevas-Otahola B., Mayya Y.D., Arriaga-Hernández J., Puerari I. and Bruzual G. *The cluster initial mass function of the M82 disc super star clusters*, *MNRAS*, 4(**525**); 5262–5277, 2023.
- [5] De-La-Peña L. *Introducción a la mecánica cuántica*, Fondo de Cultura Económica, 2014.
- [6] Dennemeyer R. *Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, 1968.
- [7] Glowinski R. and Neittaanmäki P. *Partial Differential Equations: Modelling and Numerical Simulation*, Springer Science, 2008.
- [8] Goldstein H., Pool C. and Saiko J. *Classical Mechanics*, Thomson, 2004.
- [9] Hecht E. *Optics*, Pearson, 2016.
- [10] Iribarren I.L. *Topología de espacios métricos*, Limusa-Wiley, 1973.
- [11] Charles Kittel and Paul M. *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley & Sons, 2018.
- [12] Logan J.D. *Partial Differential Equations*, Springer Science, 2004.
- [13] David Mermin, *Combinatorial versus decision-theoretic components of impossibility theorems*, *Am. J. Phys.*, 71 **1** (2003) 23–30.
- [14] Resnick R. *Introducción a la teoría especial de la relatividad*, Limusa, 1977.
- [15] Rudin W. *Principles of mathematical analysis*, cambridge University Press, 1964.

- [16] Thornton S.T. and Marion J.B. *Classical Dynamics Of Particles And Systems*, Thomson, 2004.
- [17] Verdeyen J.T. *Laser Electronics*, Pearson, 1994.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. México, C.P. 72570

Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. México C.P., 72570

Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México
(IAUNAM-Ensenada)

Carr. Tijuana-Ensenada km 107, C.I.C.E.S.E., 22860 Ensenada, B.C. México,
C.P. 22860

jesus.arriagahdz@correo.buap.mx

bolivia.cuevasotahola@viep.com.mx

crisrina.lopezl@alumno.buap.mx

mperez@astro.unam.mx

maria.morin@correo.buap.mx

Probabilidad y Estadística

Capítulo 2

Una deducción de la EDP de Black-Scholes mediante el enfoque de portafolio replicantes: teoría y ejemplos

Ambrosio Ortiz Ramírez, Ana Cecilia Parada Rojas
Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico
Nacional

Resumen

El objetivo de este trabajo es aplicar el método de portafolios replicantes para deducir la ecuación diferencial parcial (EDP) que satisface el precio de una opción financiera de compra o de venta de tipo europeo y determinar la fórmula de valoración de opciones de Black-Scholes-Merton (BSM). Para ello se presentan la teoría respectiva y descripciones intuitivas con ejemplos concretos para facilitar su comprensión. La metodología propuesta muestra que mediante la construcción de un portafolio que replica la dinámica de la opción, es factible establecer un único precio para la opción. Asimismo, se discuten algunas propiedades que se desprenden del análisis de los componentes de la fórmula y sus implicaciones con ejemplos ilustrativos.

1 Introducción

En este trabajo se deduce la EDP de Black-Scholes (o de Black-Scholes-Merton) por el método de portafolios replicantes. La EDP desempeña un papel fundamental en la teoría moderna de valoración de productos derivados, en particular en la valuación de opciones financieras desde un enfoque analítico. Históricamente, hay dos trabajos publicados previamente en el siglo XIX que sentaron las bases de lo que hoy se conoce teoría moderna de valuación de opciones, los cuales son: la tesis de Louis Bachelier [1], del cual hay una traducción al inglés y [11]. En este último, el capítulo 17: *The History of Option Pricing and Hedging* [12] proporciona un listado detallado de los

artículos que precedieron a [3, 17]. Aquí es pertinente mencionar que en [23], el autor tomó como base la tesis de Bachelier para la valuación de *warrants*. De esta manera, en [3] y de manera independiente en [17], se planteó y desarrolló un modelo cuyo supuesto base es que el precio del activo subyacente es guiado por un movimiento geométrico browniano (MGB), o sea, los rendimientos se distribuyen como una normal con media y varianza escaladas por el tiempo, del que se desprende una fórmula cerrada para la valuación de opciones europeas. En reconocimiento a sus contribuciones, Merton y Scholes recibieron el premio Nobel de Economía en 1997. Una descripción visual de la historia de la EDP de BSM está en [27].

En 2023 se cumplió el 50 aniversario de la publicación de los artículos seminales [3, 17], año en que la revista *Willmott Magazine* [28, 29] publicó dos números con diversos artículos de prestigiados investigadores y practicantes, los autores expresan sus opiniones sobre el impacto y la precisión de este modelo desde su publicación a la fecha. Es notable que la fórmula y sus variantes, hayan permanecido como el estándar de la industria en los mercados de derivados internacionales y en la academia durante más de cincuenta años. A pesar de los supuestos poco realistas que le sustentan, precios de opciones teóricos calculados con la fórmula de Black-Scholes son usados como referencia previa por los participantes de los mercados de derivados, véase, por ejemplo, [18]. Hasta cierto punto, el acuerdo de precios puede simplemente reflejar el hecho de que un mercado es una combinación de factores tan complejos que podrían resumirse en la oferta y la demanda de los bienes que circulan en la economía.

Se dice que en los mercados financieros, los agentes participantes asumen riesgos que proceden de las variaciones en precios de activos financieros, tales variaciones pueden generar grandes pérdidas con efectos significativos [22]. Una propuesta de solución a esto es el desarrollo y aplicación de derivados financieros. Un derivado se define como un instrumento financiero cuyo valor depende (o se deriva) de los valores de otras variables subyacentes más simples. Por lo general, tales variables son precios de activos que se negocian en los mercados de: capitales, dinero, divisas, energía, materias primas, agrícolas, criptomonedas y recientemente a activos asociados a la exposición ambiental, social y de gobernanza (ASG).

En lo que respecta la utilización de derivados se encuentran las opciones financieras y para su valuación se deben considerar lo siguiente:

1. Las opciones estándar o *plain vanilla* pueden ser de compra (*call*) o de venta (*put*), que también se distinguen por su manera de ser ejercida, es decir: estilo europeo o americano. Las de estilo europeo se ejercen sólo al vencimiento, mientras que las americana se pueden ejercer en cualquier momento durante la vigencia de la opción. Ambos tipos de opciones son listadas tanto en mercados de valores regulados como en mercados sobre mostrador, conocidos también como mercados *Over The Counter* (OTC).
2. En las opciones existen dos posiciones, las cuales indican la postura que presenta cada una con respecto al contrato: **Posición larga:** es la postura que presenta el comprador (quien paga la prima) de una opción, sin importar si ésta es un opción de compra o de venta. **Posición corta:** es la postura que presenta el emisor o vendedor de la opción (recibe la prima) de compra o de venta.
3. Las opciones exóticas o de segunda generación, son las que impliquen cambiar una o más variables de las opciones estándar y se negocian fundamentalmente en mercados OTC, estas surgen para atender requerimientos concretos de los agentes, en gran medida son acuerdos diseñados a la medida en cuanto a cantidad, calidad y tipo de subyacente, entre otros.

En general, los métodos para la valoración de derivados se clasifican en analíticos y numéricos. El primero se ocupa en modelar funciones de pago de opciones con ecuaciones diferenciales parciales (EDP's). En el caso de métodos numéricos se tiene al método de Monte Carlo, su amplio uso se debe a que permite encontrar soluciones aproximadas en modelación matemática que involucran procesos estocásticos planteados en sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas [19].

Dentro de los enfoques analíticos se encuentra la valuación neutral al riesgo, el cual consiste en considerar la distribución del subyacente y su función de densidad asociada. En este caso, el concepto de valuación neutral al riesgo permite deducir fórmulas cerradas de valuación de opciones, tal enfoque requiere de conceptos de matemáticas financieras, probabilidad, estadística, procesos estocásticos, entre otros.

El objetivo de este trabajo consiste en presentar de manera simple, una deducción de la EDP de BS mediante el método de portafolios replicantes

y discutir las propiedades que se desprenden de la interpretación de sus componentes. Se presentan algunos ejemplos representativos en los que se verifica la validez de la EDP para algunos casos. Posteriormente, se presenta el concepto de valuación neutral al riesgo, que en su esencia consiste en descontar con la tasa libre de riesgo la esperanza de la función de pago de la opción, con el supuesto que la tendencia del proceso subyacente, en este caso un movimiento geométrico browniano, se sustituye por la tasa libre de riesgo. Este concepto se utiliza para la deducción de la fórmula de Black y Scholes.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera, en la siguiente sección se introducen algunos resultados para deducir la EDP de BS, en la tercera sección se obtiene la fórmula de Black y Scholes, se discuten algunas observaciones respecto al comportamiento de los parámetros de la fórmula y la condición de paridad *put-call*. Se concluye en la cuarta sección con algunas extensiones que se pueden consultar en la literatura al respecto.

2 EDP Black–Scholes

La EDP de Black y Scholes inició a lo que se conoce como la teoría moderna de las finanzas. Se ha generado una enorme cantidad de artículos de investigación y revolucionó la manera en que los participantes de los mercados de derivados calculan precios de opciones, con supuestos que han sido objeto de crítica y extensión hasta la fecha. La EDP se basa en el supuesto que el precio del activo subyacente se modela con un movimiento geométrico browniano (MGB) [14]. El método de deducción es relativamente simple: en cada instante de tiempo se combinan precios de activos en un portafolio que reproduce el comportamiento local de un activo contingente, en este caso, una opción financiera, posteriormente ante cambios en los precios de los activos que lo componen y la presencia de un mercado en el que se puede prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante continuamente capitalizable, se obtiene una EDP que satisface el precio de la opción.

Los supuestos para la deducción de la EDP de BS son los siguientes:

1. La tasa de interés a todos los plazos es constante;
2. El mercado opera en forma continua;
3. Los costos de transacción e impuestos son cero;

4. La acción no paga dividendos;
5. Las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;
6. La volatilidad de la acción es conocida y es constante durante la vida de la opción.

Bajo estos supuestos, el precio de la opción dependerá únicamente del precio del activo subyacente, del tiempo y de variables que son constantes conocidas. De esta manera, la dinámica del precio del subyacente S_t se modela con un MGB descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (1)$$

En este caso, el parámetro de tendencia, $\mu \in \mathbb{R}$, es el rendimiento medio esperado del activo subyacente y $\sigma > 0$ es su volatilidad instantánea por unidad de tiempo. El proceso de Wiener dW_t modela las fluctuaciones propias del mercado del subyacente y satisface: $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$, $E[dW_t] = 0$ y $\text{Var}[dW_t] = E[(dW_t)^2] = dt$.

Sea B_t el precio de un bono que paga \$1 al tiempo $t = T$. Suponga que la tasa de interés r es constante y no hay otros pagos antes del vencimiento, es decir, es un bono cupón cero. El precio del bono satisface:

$$dB_t = rB_t dt, \quad (2)$$

En otras palabras, $B_t = B_0 e^{rt} = e^{T-t}$, después de considerar la condición de frontera $B_T = 1$.

Considere ahora una opción de compra sobre S_t . El precio de este derivado es una función de S_t y t , es decir, $f(S_t, t)$ es el precio de la opción al tiempo t cuando el precio de la acción es S_t . Suponga que f es dos veces diferenciable respecto del precio de una opción de compra, de venta u otro derivado sobre S_t . El objetivo es determinar una ecuación que modele el comportamiento de $f(S_t, t)$.

Teorema 2.1. *Suponga que el precio S_t y el bono son descritos por (1) y por (2), respectivamente, entonces el precio del derivado sobre S_t satisface:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = r f. \quad (3)$$

Demostración. Considere una estructura en tiempo continuo, en el que se forma un portafolio compuesto por unidades de una acción y unidades de un bono con el propósito de que el portafolio coincida exactamente con las características de rendimiento del derivado período a período. En esta parte es conveniente enunciar el Lema de Itô [6, 24]:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (4)$$

Se dice que la ecuación anterior es un proceso de difusión con tendencia dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2$$

y coeficiente de difusión

$$\frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma S_t.$$

En seguida se presenta un ejemplo de aplicación.

Ejemplo 2.2. Sea x la tasa de rendimiento con composición continua de un bono cupón cero que paga \$1 al tiempo T . Suponga que x sigue el proceso:

$$dx = a(x_0 - x)dt + sx dz,$$

donde a, x y s son constantes positivas y dz es un movimiento browniano. Aplique el Lema de Itô para determinar el proceso seguido por el precio del bono dado por: $B = e^{-x(T-t)}$.

Solución. Véase el apéndice (5).

Sea un portafolio con S_t y B_t que replique el comportamiento del derivado. En cada instante de tiempo t , sean proporciones ω_1 de la acción y ω_2 del bono, el valor del portafolio es $\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 B_t$. Se deben elegir ω_1 y ω_2 tales que Π_t replique el valor del derivado $f(S_t, t)$. El rendimiento instantáneo en valor de este portafolio debido sólo a cambios en precios de los activos que lo componen está dado por:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \omega_1 dS_t + \omega_2 dB_t \\ &= \omega_1 (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \omega_2 r B_t dt \\ &= (\omega_1 \mu S_t + \omega_2 r B_t) dt + \omega_1 \sigma S_t dW_t \end{aligned} \quad (5)$$

El objetivo es que el rendimiento del portafolio Π_t replique el rendimiento de f , para ello se hace la analogía con coeficientes deterministas asociados dt y estocásticos asociados a dW_t en (5) con los de (4). En primer lugar, con el coeficiente de dW_t en estas dos ecuaciones y se obtiene:

$$\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial S_t}.$$

Ahora, como $\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 B_t$:

$$\omega_2 = \frac{1}{B_t} (\Pi_t - \omega_1 S_t).$$

Dado que $\Pi_t = f$, entonces:

$$\omega_2 = \frac{1}{B_t} \left(f(S_t, t) - \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t \right),$$

al sustituir esta expresión en (5) y al coincidir los coeficientes de dt en (4), se obtiene :

$$\frac{\partial f}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{B_t} \left(f(S_t, t) - \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t \right) r B_t = \frac{\partial f}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = r f.$$

□

OBSERVACIONES.

1. Si $f(S_t, t) = S_t$, entonces $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial S_t} = 1$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = 0$ y la ecuación (3) se reduce a $r S_t = r S_t$, por lo que $f(S_t, t) = S$ es una solución a (3).
2. Sea la función: $f(S_t, t) = e^{rt}$, que es un derivado simple de S_t se puede verificar que f satisface (3).
3. En general (3) proporciona una forma de calcular el precio de cualquier derivado mediante el uso de condiciones de frontera adecuadas. Considere

una opción de compra con precio de ejercicio K y vencimiento en T . Denote el precio como $C(S_t, t)$ y debe satisfacer que:

$$\begin{aligned} C(0, t) &= 0 \\ C(S_t, T) &= \max(S_T - K, 0). \end{aligned}$$

Análogamente, las condiciones de frontera para una opción de venta $P(S_t, t)$ son:

$$\begin{aligned} P(0, t) &= 0 \\ P(S_t, T) &= \max(K - S_T, 0). \end{aligned}$$

Otros derivados pueden tener diferentes condiciones de frontera. Por ejemplo, una opción tipo *knock-out* se desactiva si el activo subyacente toca una barrera preestablecida al nivel H , además de las condiciones anteriores, se tiene una condición de frontera extra

$$f(S = H, t) = 0.$$

4. Con las condiciones de frontera, se puede tratar de resolver la función f a partir de (3). Un problema es que se trata de una ecuación diferencial parcial y no hay garantía de que se llegue a una solución analítica, excepto en el caso simple de una opción europea, no se puede encontrar una fórmula analítica para la función f . En la práctica, se usa simulación Monte Carlo [5, 10] o métodos numéricos [30] para encontrar una solución aproximada.
5. Otra manera para obtener la ecuación (3) es como sigue. Considere un portafolio formado por una posición corta en el derivado $-f$, y una posición larga en una acción de $\frac{\partial f}{\partial S_t}$. Sea Π_t el valor del portafolio al tiempo t y $f(S_t, t)$ el precio del derivado. Entonces:

$$\Pi_t = -f + \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t. \quad (6)$$

El cambio $\Delta\Pi_t$ del portafolio en el intervalo de tiempo Δt está dado por:

$$\Delta\Pi_t = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S_t} \Delta S_t. \quad (7)$$

Hay que recordar que S_t es conducido por un movimiento geométrico browniano, de modo que:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t,$$

además, de (4), la versión en tiempo discreto de df es

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma S_t \Delta W_t.$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (7) y simplificar se obtiene:

$$\Delta \Pi_t = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t. \quad (8)$$

Observe que el componente estocástico ΔW_t se ha eliminado. Debido a que esta ecuación no incluye a ΔW_t , este portafolio debe ganar la tasa libre de riesgo durante el tiempo t . De esta manera:

$$\Delta \Pi_t = r \Pi_t \Delta t,$$

donde r es la tasa libre de riesgo. De (8) y (6), se obtiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t \right) \Delta t.$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = r f.$$

Es importante señalar que el portafolio utilizado para obtener (3) no es libre de riesgo de manera indefinida. Es libre de riesgo sólo en un período de tiempo infinitesimalmente pequeño. Conforme S_t cambien y t transcurra, $\frac{\partial f}{\partial S_t}$ también cambia. Para mantener el portafolio libre de riesgo, se tienen que cambiar continuamente las proporciones del derivado y de la acción en el portafolio.

Ejemplo 2.3. Sea f el precio de un contrato a plazo (forward) sobre una acción que no paga dividendos, con precio de entrega K y vencimiento en T . Su precio al tiempo t está dado por:

$$f(S_t, t) = S_t - K e^{-r(T-t)}. \quad (9)$$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \frac{\partial f}{\partial S_t} = 1, \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = 0.$$

Al sustituir las derivadas anteriores en (3) se obtiene:

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS_t = rf.$$

Así, la fórmula de precio para f dada por (9) es una solución a la EDP en (3), por lo tanto, la fórmula del precio del contrato a plazo es correcta.

Ejemplo 2.4. Sea L el precio de un contrato que paga al vencimiento el logaritmo natural del precio del activo subyacente. El precio Black-Scholes del contrato esta dado por:

$$L(S, r, \sigma, \tau) = e^{-r\tau} \left[\ln S + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right]. \quad (10)$$

donde S : precio de la acción (subyacente), r : tasa de interés libre de riesgo (constante), σ : volatilidad del subyacente (constante), τ : plazo al vencimiento.

(a) Verifique que L satisface la condición de frontera, es decir:

$$L(S, r, \sigma, 0) = \ln S.$$

(b) Verifique que L satisface la EDP modificada:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \\ - rL(S, r, \sigma, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Solución. Véase el apéndice (5).

La EDP tiene implícitos dos aspectos importantes. El primero es el concepto de valuación neutral al riesgo, puesto que la EDP no incluye la tendencia del precio del activo subyacente μ , la fórmula de valuación debe ser independiente de la tendencia. Por lo tanto, las preferencias individuales hacia el rendimiento o la tendencia del precio de un activo determinado, no afectan el precio actual de la opción sobre ese activo. El segundo es que se puede obtener una función del precio de una opción a partir de la ecuación. Lo anterior se resume en el siguiente teorema¹.

¹En lo que sigue se omite el subíndice t en S y en dW .

Teorema 2.5. *Sea una opción europea con función de pago $F(S)$ y fecha de vencimiento T . Suponga que la tasa de interés con composición continuamente es r . Entonces, el precio de una opción europea está dado por:*

$$f(S, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}^* [F(S_T)], \quad (11)$$

donde \mathbb{E}^* representa la esperanza bajo una probabilidad neutral al riesgo, que se deriva del proceso neutral al riesgo dado por

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dW. \quad (12)$$

Demostración. Observe que el precio actual de la opción de $f(S, 0)$ y del precio del activo S es una función determinista en $t = 0$. Considere un proceso estocástico $\{X_t\}$ que satisface

$$X_0 = S \quad \text{y} \quad \frac{dX_t}{X_t} = rdt + \sigma dW_t.$$

Entonces, $f(S, 0) = f(X, 0)$. Considere a $f(X, t)$. Por el Lema de Itô [6], la diferencial de f es

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + rX \frac{\partial f}{\partial X} + \sigma^2 X^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \right) dt + \sigma X \frac{\partial f}{\partial X} dW.$$

La EDP muestra que el coeficiente de dt es igual al término rf (véase el Teorema 2.1). La diferencial total de la función se reduce a

$$df = rfdt + \sigma X \frac{\partial f}{\partial X} dW,$$

de donde:

$$df - rfdt = \sigma X \frac{\partial f}{\partial X} dW.$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior se combina con la regla del producto, y se obtiene que:

$$e^{rt} d [e^{-rt} f(X, t)] = \sigma X \frac{\partial f}{\partial X} dW.$$

Al integrar ambos lados:

$$e^{-rT} f(X_T, t) - f(X, 0) = \sigma \int_0^T e^{-rt} X \frac{\partial f}{\partial X} dW.$$

El lado derecho es una suma de procesos normales, por lo que al calcular la esperanza en ambos lados:

$$\mathbb{E}^* [e^{-rT} f(X_T, T) - f(X, 0)] = 0$$

lo cual implica que:

$$f(X, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}^* [f(X_T, T)].$$

Por la condición final especificada en la EDP de BS, $f(X, T) = F(X_T)$, es decir, la función de pago de la opción. Por lo tanto:

$$f(S, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}^* [f(X_T)],$$

donde la esperanza con respecto a la variable aleatoria X_T se denomina esperanza neutral al riesgo y el proceso $\{X_t\}$ se denomina como dinámica neutral al riesgo del activo. Para evitar confusiones, en finanzas matemáticas se utiliza el término “el proceso del precio del activo en un mundo neutral al riesgo” para representar a X_t en el desarrollo de esta demostración, lo que establece (11) y (12) y demuestra lo propuesto. \square

3 Fórmula de Black y Scholes

Considerando los resultados anteriores, a continuación, se enuncia la fórmula del precio de una opción de compra de de estilo europeo. En primer lugar, se enuncia un hecho fundamental sobre una variable aleatoria lognormal.

Lema 3.1. *Sea una variable aleatoria con distribución normal $\ln S \sim \mathcal{N}(m, \nu^2)$ y sea K una constante dada. Entonces*

$$\mathbb{E}(\max\{S - K, 0\}) = \mathbb{E}(S)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \quad (13)$$

donde $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución acumulada de una v. a. normal estándar y

$$d_1 = \frac{1}{\nu} (-\ln K + m + \nu^2) = \frac{1}{\nu} \ln \left(\mathbb{E} \left(\frac{S}{K} \right) + \frac{\nu^2}{2} \right),$$

$$d_2 = \frac{-\ln K + m}{\nu} = \frac{1}{\nu} \ln \left(\mathbb{E} \left(\frac{S}{K} \right) + \frac{\nu^2}{2} \right).$$

Demostración. Sea $g(S)$ la función de densidad de una variable aleatoria S . Entonces

$$\mathbb{E}(\max(S - K, 0)) = \int_0^\infty \max(s - K, 0)g(s)ds = \int_K^\infty (s - K, 0)g(s)ds.$$

Por definición $\ln S \sim \mathcal{N}(m, \nu^2)$ y

$$\mathbb{E}(S) = e^{(m+\frac{1}{2}\nu^2)}, \text{ entonces, } \ln \mathbb{E}(S) = m + \frac{1}{2}\nu^2.$$

Sea la variable Θ :

$$\Theta = \frac{\ln S - m}{\nu}, \text{ entonces } \Theta \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

La función de densidad de Θ está dada por $\phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\theta^2}{2}}$, es decir, es la función de densidad de una normal estándar, ya que $\theta = \frac{\ln s - m}{\nu}$; $s = e^{m+\theta\nu}$, entonces $d\theta = \frac{ds}{\nu s}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\max(S - K, 0)) &= \int_K^\infty (s - K, 0)g(s)ds \\ &= \int_{\frac{1}{\nu}(\ln K - m)}^\infty (e^{m+\theta\nu} - K) g(e^{m+\theta\nu})\nu s d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{\nu}(\ln K - m)}^\infty (e^{m+\theta\nu} - K) \phi(\theta)d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{\nu}(\ln K - m)}^\infty e^{m+\theta\nu} \phi(\theta)d\theta - K \int_{\frac{1}{\nu}(\ln K - m)}^\infty \phi(\theta)d\theta \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Observe que la tercera igualdad proviene del hecho de que la función de densidad de una variable aleatoria lognormal S es de la forma

$$g(s) = \phi\left(\frac{\ln s - m}{\nu}\right) \frac{1}{\nu s}, \text{ entonces } g(e^{m+\theta\nu})\nu s = \phi(\theta). \tag{15}$$

Al analizar cada uno de los términos de I_1 e I_2 en (14), se tiene que para la

primera integral:

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{m+\frac{\nu^2}{2}} \int_{\frac{1}{\nu}(\ln K - m) - \nu}^{\infty} \phi(\theta - \nu) d(\theta - \nu) \\ &= e^{m+\frac{\nu^2}{2}} \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln K - m}{\nu} - \nu \right) \right) \\ &= e^{m+\frac{\nu^2}{2}} \Phi \left(\frac{-\ln K + m}{\nu} + \nu \right). \end{aligned}$$

Para la segunda integral:

$$I_2 = K \int_{\frac{1}{\nu}(\ln K - m)}^{\infty} \phi(\theta) d(\theta) = K \Phi \left(\frac{-\ln K + m}{\nu} \right).$$

Al sustituir estas dos expresiones en (14) se tiene que:

$$\mathbb{E}(\max(S - K, 0)) = e^{m+\frac{\nu^2}{2}} \Phi \left(\frac{-\ln K + m}{\nu} + \nu \right) - K \Phi \left(\frac{-\ln K + m}{\nu} \right).$$

Observe que $\ln \mathbb{E}\left(\frac{S}{K}\right) = -\ln K + m + \frac{\nu^2}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{-\ln K + m}{\nu} + \nu &= \frac{-\ln K + m + \nu^2}{\nu} \\ &= \frac{1}{\nu} \left(\ln \mathbb{E}\left(\frac{S}{K}\right) + \frac{\nu^2}{2} \right) \\ &= d_1. \end{aligned}$$

De la misma manera:

$$d_2 = \frac{-\ln K + m}{\nu}.$$

□

Enseguida, con el Lema anterior se enuncia la fórmula de Black y Scholes.

Teorema 3.2. *Sea una opción de compra europea con precio de ejercicio K y que expira en T . Si el subyacente no paga dividendos durante el tiempo $[0, T]$, existe una tasa libre de riesgo con capitalización continua r , entonces el precio de este contrato al tiempo 0 , $f(S, 0) = C(S, 0)$, está dado por*

$$C(S, 0) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2), \quad (16)$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de una v.a. normal estándar evaluada en el punto x , con

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right],$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Demostración. La demostración de este teorema se basa en el concepto de valuación neutral al riesgo. Por el Teorema (2.5) se tiene que:

$$C(S) = e^{-rT} \mathbb{E}^* (\max \{S_T - K, 0.\}) \quad (17)$$

donde S_T denota el precio de la acción al tiempo T , \mathbb{E}^* la esperanza neutral al riesgo, y

$$dS = rSdt + \sigma Sd\widetilde{W}, \quad (18)$$

en este caso se tiene que:

$$\mathbb{E}^*(S_T) = S_0 e^{rT}. \quad (19)$$

Por el Lema anterior:

$$\mathbb{E}^* (\max \{S_T - K, 0\}) = \mathbb{E}^*(S_T)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2).$$

Ahora solo resta identificar d_1, d_2 y $\mathbb{E}^*(S_T)$. Por construcción $\mathbb{E}^*(S_T) = S_0 e^{rT}$, de (18) y por el Lema de Itô se deduce que:

$$d(\ln S_t) = \gamma dt + \sigma d\widetilde{W}, \text{ con } \gamma = r - \frac{1}{2}\sigma^2. \quad (20)$$

Por consiguiente:

$$m = \mathbb{E}^*(S_T) = \ln S_0 + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T,$$

$$\nu^2 = \text{Var}(\ln S_T) = \sigma^2 T.$$

De acuerdo con el lema:

$$d_1 = \frac{-\ln K + m + \nu^2}{\nu}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[-\ln K + \ln S_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma^2 T \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right].$$

Análogamente para d_2 :

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{-\ln K + m}{\nu} \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[-\ln K + \ln S_0 + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T \right] \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right] \\
 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}.
 \end{aligned}$$

□

Condición de paridad put-call

Para el precio de una opción de venta europea se usa la condición de paridad *put-call*, la cual establece que:

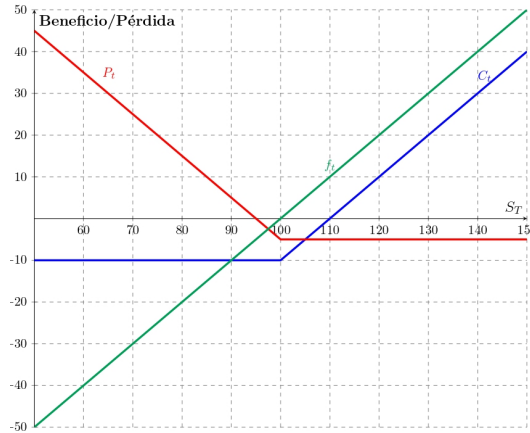
$$P + S_0 = C + Ke^{-rT}, \quad (21)$$

o se puede sustituir (16) en (21):

$$P = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1). \quad (22)$$

con d_1 y d_2 definidas previamente. La relación anterior es una herramienta esencial en la teoría de valoración de opciones. Establece que el precio de una opción de venta es igual al precio de una opción de compra menos el precio de un contrato *forward* sobre el mismo activo subyacente, es decir, $P = C - (S - Ke^{-rT})$. Esta igualdad se desprende de la ley de un solo precio y refleja el hecho de que un portafolio compuesto por una posición larga en una opción de compra y una posición corta en un contrato *forward* tiene el mismo pago al vencimiento que una opción de venta. La utilidad de esta relación es simplificando el proceso de valuación al calcular el precio de la opción de venta a partir del precio de la opción de compra.

Figura 1: Generación de un forward sintético.



Fuente: elaboración propia.

- Opción de compra (*call*): La línea azul muestra que la ganancia de una opción de compra aumenta a medida que el precio del activo subyacente supera el precio de ejercicio.
- Opción de venta (*put*): La línea roja muestra que la ganancia de una opción de venta aumenta a medida que el precio del activo subyacente cae por debajo del precio de ejercicio.
- Contrato *forward*: La línea verde muestra que la ganancia o pérdida de un contrato forward es directamente proporcional a la diferencia entre el precio del activo subyacente al vencimiento y el precio de ejercicio.

La gráfica (1) muestra claramente que la relación entre las opciones y el contrato *forward* está determinada por el precio de ejercicio. La opción de compra y la opción de venta tienen ganancias máximas en extremos opuestos del rango de precios, mientras que el contrato *forward* tiene una relación lineal con el precio del activo subyacente.

OBSERVACIONES.

1. Observe que la fórmula de BS se obtiene por valuación neutral al riesgo. De otra manera, para un derivado en particular como una opción de compra europea, se puede resolver la EDP en (3) con las condiciones

de frontera dadas en la observación 3 de la sección (2). Ésta fue la idea original de los autores en [3], la cual se conoce como el enfoque de EDP². Es importante mencionar que mediante cambios de variable en (3) conduce a una variante de la ecuación diferencial del calor, de la cual, en ese tiempo ya se conocía la solución y conduce al mismo resultado en (13). No obstante, el argumento de valuación neutral al riesgo ofrece un enfoque más intuitivo basado en el argumento de no arbitraje.

2. Interpretación de la fórmula de Black-Scholes ante variaciones de d_1 y d_2 . Si $T \rightarrow 0$. Si $S_0 > K$, ambos tienden a ∞ , entonces $\Phi(d_1) = \Phi(d_2) = 1$ y $\Phi(-d_1) = \Phi(-d_2) = 0$, esto significa que:

$$C = S_0 - K, \text{ y } P = 0.$$

Por otro lado, si $S_0 < K$, entonces d_1 y d_2 tienden a $-\infty$ cuando $T \rightarrow 0$, entonces:

$$C = 0, \text{ y } P = K - S_0.$$

¿Es razonable lo anterior?. Cuando $S_0 > K$ y $T = 0$, la opción de compra debe valer $S_0 - K$ y la opción de venta cero. Por otro lado, si $S_0 < K$ y $T = 0$, la opción de venta debe valer $K - S_0$ la opción de compra cero. Por lo tanto, la fórmula de BS es consistente con la condiciones de frontera.

3. ¿Qué ocurre cuando $T \rightarrow \infty$?. En este caso, $d_1 = d_2 = \infty$ y $C = S_0, P = 0$. Esto es conocido como una opción de compra perpetua. Si se tiene una opción de compra por un tiempo indefinido y el precio de la acción aumenta hasta que el precio de ejercicio K no influya. Por lo tanto, si se tiene la opción podría obtener la acción a un precio mucho menor un tiempo después, duplicando la posición si inicialmente se hubiera comprado la acción. Por lo tanto, $C = S_0$.
4. La fórmula de BS se deduce para una opción de compra europea sobre un acción que no paga dividendos. Si la acción o el subyacente paga dividendos en un tiempo específico durante la vigencia de la opción, se puede deducir una fórmula similar para el precio de la opción, véase por ejemplo [16, 26] para más detalles.

²Consultar [26] para mayor detalle sobre el enfoque de EDP.

5. Para una opción americana, no hay una fórmula analítica exacta para el precio de la opción, sin embargo, se pueden deducir un rango de posibles valores, véase por ejemplo [9].
6. Un enfoque diferente al de BS es la valuación de opciones europeas, americanas y exóticas mediante árboles binomiales, como en [8].
7. Para aplicar la fórmula de BS, se requiere un valor de σ , la volatilidad y de la tasa libre de riesgo. Una manera es estimar σ a partir de un conjunto de datos históricos y calcular el precio de la opción. Dicha estimación se conoce como volatilidad histórica. Por otro lado, también se puede usar la fórmula de BS para obtener el valor de σ , que se conoce como volatilidad implícita. En este método, se sustituye el precio observado de la opción en el mercado con el precio que se obtiene con la fórmula de BS, luego, mediante algún algoritmo de cálculo de ceros de funciones, se obtiene la σ_{vi} que es la volatilidad implícita [20]. Esta cantidad puede usarse como una expectativa del mercado sobre la volatilidad de una acción en particular. Usualmente, los analistas calculan volatilidades implícitas de opciones que se negocian activamente sobre cierta acción y las usan para calcular el precio de opciones menos negociadas sobre la misma acción.
8. El análisis de las sensibilidades de la fórmula de BS se conocen como “letras griegas”, las cuales son las derivadas parciales de un parámetro de la fórmula manteniendo los demás sin cambio, véanse por ejemplo los capítulos 22 de [26] y 19 de [16] para profundizar sobre este tema.

4 Conclusiones

La EDP de Black-Scholes ha revolucionado la práctica de la valoración de opciones financieras en tiempo continuo. Se ha deducido la EDP parcial que satisface el precio de una opción europea con condiciones de frontera asociadas a la función de pago de una opción de compra o de venta. En la deducción, se considera un portafolio compuesto por una acción y un bono libre de riesgo que replica la dinámica de una opción de compra o de venta de tipo europeo. De esta manera, es posible determinar un único precio de la opción, con supuestos teóricos robustos evitando la subjetividad en su

valuación. Se discutieron varias observaciones que surgen de la interpretación de sus componentes desde un punto de vista analítico.

En el presente trabajo se han presentado supuestos fundamentales de la fórmula de BS: la distribución lognormal de los rendimientos del activo subyacente y la inexistencia de oportunidades de arbitraje. También se ha explicado la importancia de la tasa libre de riesgo asociada a un bono cupón cero y su papel en la valuación de opciones. Otro aspecto importante es su aplicación en la cobertura con opciones, en la que un agente puede protegerse contra el riesgo de una pérdida. Asimismo, se ha mostrado de manera intuitiva el concepto de valuación neutral al riesgo y su uso para la deducción de la fórmula de Black-Scholes, así como el concepto de paridad *put-call*, que permite calcular el precio de la opción de venta a partir del precio de la opción de compra. En resumen, la fórmula de Black-Scholes proporciona una herramienta objetiva y precisa para la valuación de opciones en tiempo continuo. Es importante mencionar que tanto el método de EDP y el de valuación neutral al riesgo conducen al mismo resultado. Aunque existen limitaciones en sus supuestos, su marco teórico y su aplicación puede ser de gran utilidad para el lector interesado en introducirse de manera objetiva en la teoría de valoración de opciones y sus extensiones.

Posibles extensiones en cuanto al supuesto de volatilidad constante, existen investigaciones en las que se plantea que la volatilidad del subyacente es conducida por un proceso estocástico, para lo cual se tiene ahora un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (véase [19]) con correlación como en [13] en la que la volatilidad de la varianza es conducida por un proceso de reversión a la media del tipo C.I.R. [7]; sin correlación en [15], sin correlación y con la volatilidad es conducida por un proceso de Ornstein–Uhlenbeck como en [25]; con un proceso de difusión con saltos como en [2]; una extensión el modelo de Heston con saltos en la volatilidad con una intensidad [4], sólo por mencionar algunos. Para los supuestos de tasa de interés constante, ausencia de costos de transacción también existen artículos que extienden tales limitaciones.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación: “*Métricas de riesgo para opciones asiáticas sobre el precio del barril de petróleo*” con clave SIP-20242236 de la Escuela Superior de Economía del Instituto

Politécnico Nacional. Asimismo, los autores agradecen a los árbitros sus acertadas observaciones.

5 Apéndice

En este apéndice se muestra el desarrollo completo de algunos ejemplos presentados en el desarrollo de este trabajo.

1. Sea x la tasa de rendimiento con composición continua de un bono cupón cero que paga \$1 al tiempo T . Suponga que x sigue el proceso:

$$dx = a(x_0 - x)dt + sx dz,$$

donde a, x y s son constantes positivas y dz es un movimiento browniano. Aplique el Lema de Itô para determinar el proceso seguido por el precio del bono dado por: $B = e^{-x(T-t)}$.

Solución. Un desarrollo de la serie de Taylor de primer orden a $B = e^{-x(T-t)}$:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} (dx)(dt) + \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} (dt)^2 \right] + \dots$$

Sea $dx = a(x_0 - x)dt + sx dz$, entonces:

$$(dx)^2 = a^2(x_0 - x)^2(dt)^2 + 2a(x_0 - x)sx dt dz + s^2 x^2 (dz)^2.$$

Sea la regla heurística:

	dt	dz
dt	0	0
dz	0	dt

al aplicar la regla se tiene:

$$(dx)^2 = a^2(x_0 - x)^2(0) + 2a(x_0 - x)sx(0) + s^2 x^2 (dt)$$

y

$$(dx)^2 = s^2 x^2 dt.$$

Al sustituir lo anterior en la serie de Taylor:

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\partial B}{\partial x} [a(x_0 - x)dt + sxdz] + \frac{\partial B}{\partial t} dt \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} (s^2 x^2 dt) + 2(0) + \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} (0) \right] + \dots \\ &= \frac{\partial B}{\partial x} [a(x_0 - x)dt + sxdz] + \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} (s^2 x^2 dt) \end{aligned}$$

Al desarrollar y organizando términos:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial x} a(x_0 - x)dt + \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} (s^2 x^2)dt + \frac{\partial B}{\partial x} sxdz$$

al agrupar términos semejantes:

$$dB = \left[\frac{\partial B}{\partial x} a(x_0 - x) + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} s^2 x^2 \right] dt + \frac{\partial B}{\partial x} sxdz. \quad (\text{A.23})$$

Dado que $B = e^{-x\tau}$, se calculan las derivadas parciales indicadas:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = e^{-x\tau}(-\tau) = -\tau e^{-x\tau} \quad (\text{A.24})$$

para la segunda derivada parcial:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -\tau \frac{\partial B}{\partial x} e^{-x\tau} = -\tau(-\tau e^{-x\tau}) = \tau^2 e^{-x\tau} \quad (\text{A.25})$$

Por último, para obtener el valor de $\frac{\partial B}{\partial t}$ se tiene que $\tau = T - t$, entonces:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} e^{-x(T-t)}$$

Sea $u = -x(T - t) = -xT + xt$, se sigue que $\frac{du}{dt} = x$:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} e^u = e^u \frac{\partial}{\partial t} u = e^u x = x e^{-x(T-t)}$$

Entonces:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = xe^{-x\tau} \quad (\text{A.26})$$

Al sustituir (A.24), (A.25) y (A.26) en (A.23):

$$\begin{aligned} dB &= \left[(-\tau e^{-x\tau})a(x_0 - x) + xe^{-x\tau} + \frac{1}{2}(\tau^2 e^{-x\tau})s^2 x^2 \right] dt + (-\tau e^{-x\tau})sxdz \\ &= \left[\frac{1}{2}\tau^2 e^{-x\tau} s^2 x^2 - \tau e^{-x\tau} a(x_0 - x) + xe^{-x\tau} \right] dt - \tau e^{-x\tau} sxdz \\ &= \left[\frac{1}{2}\tau^2 s^2 x^2 + x - \tau a(x_0 - x) \right] e^{-x\tau} dt - \tau e^{-x\tau} sxdz \\ &= e^{-x\tau} \left[\frac{1}{2}\tau^2 s^2 x^2 + x - \tau a(x_0 - x) \right] dt - \tau sxdz. \end{aligned}$$

2. Sea L el precio de un contrato que paga al vencimiento el logaritmo natural del precio del activo subyacente. El precio Black-Scholes del contrato esta dado por:

$$L(S, r, \sigma, \tau) = e^{-r\tau} \left[\ln S + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right]. \quad (\text{A.27})$$

donde S : precio de la acción (subyacente), r : tasa de interés libre de riesgo (constante), σ : volatilidad del subyacente (constante), τ : plazo al vencimiento.

- (a) Verifique que L satisface la condición de frontera, es decir:

$$L(S, r, \sigma, 0) = \ln S.$$

- (b) Verifique que L resuelve la EDP modificada:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \\ - rL(S, r, \sigma, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Solución. Para el inciso (a). Al sustituir $\tau = 0$ en (A.27):

$$L(S, r, \sigma, 0) = e^{r \cdot 0} \left[\ln S + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \cdot 0 \right]$$

$$L(S, r, \sigma, 0) = e^0[\ln S]$$

$$L(S, r, \sigma, 0) = \ln S.$$

Para el inciso (b). Verifique que L resuelve la EDP modificada de BSM:

$$-\frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rL(S, r, \sigma, \tau) = 0 \quad (\text{A.28})$$

Solución. Para simplificar el proceso, primero calcular las derivadas parciales indicadas, para posteriormente sustituirlas en (A.28). Para la primera derivada parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{-r\tau} \left[\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right] \right) \\ &= e^{-r\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) + \left(\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-r\tau} \\ &= e^{-r\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} (\ln S) + e^{-r\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) + \left(\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-r\tau} \\ &= e^{-r\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} (\ln S) + e^{-r\tau} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \left(\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-r\tau} \\ &= e^{-r\tau} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \left(\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) e^{-r\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} [-r\tau] \\ &= e^{-r\tau} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \left(\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) e^{-r\tau} [-r] \end{aligned}$$

Factorizando término común:

$$\frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial \tau} = e^{-r\tau} \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) - r \left(\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) \right]. \quad (\text{A.29})$$

Ahora, al calcular la otra derivada parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(e^{-r\tau} \left[\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right] \right) \\ &= e^{-r\tau} \frac{\partial}{\partial S} \left(\ln S + \tau \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) \\ &= e^{-r\tau} \frac{\partial}{\partial S} (\ln S) \\ &= e^{-r\tau} \frac{1}{S}; \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{\partial L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S} = \frac{1}{e^{r\tau} S}. \quad (\text{A.30})$$

Para la segunda derivada parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S^2} &= \frac{\partial^2}{\partial S^2} \frac{1}{e^{r\tau} S} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial S^2} e^{-r\tau} S^{-1} \\ &= e^{-r\tau} \frac{\partial^2}{\partial S^2} S^{-1} \\ &= e^{-r\tau} (-1) S^{-2} \\ &= -\frac{1}{e^{r\tau} S^2}. \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{\partial^2 L(S, r, \sigma, \tau)}{\partial S^2} = -\frac{1}{e^{r\tau} S^2} \quad (\text{A.31})$$

Por último, al sustituir (A.29), (A.30) y (A.31) en (A.28) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 & -e^{-r\tau} \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) - r(\ln S + \tau(r - \frac{1}{2}\sigma^2)) \right] + \frac{1}{e^{r\tau}S} rS - \frac{1}{2} \frac{1}{e^{r\tau}S^2} \sigma^2 S^2 \\
 & - rL(S, r, \sigma, \tau) = 0 \\
 & -e^{-r\tau} \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) - r(\ln S + \tau(r - \frac{1}{2}\sigma^2)) \right] + \frac{1}{e^{r\tau}} r - \frac{1}{2} \frac{1}{e^{r\tau}} \sigma^2 \\
 & - rL(S, r, \sigma, \tau) = 0 \\
 & -e^{-r\tau} \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) - r(\ln S + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau) \right] + re^{-r\tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-r\tau} \\
 & - re^{-r\tau} \left[\ln S + \tau(r - \frac{1}{2}\sigma^2) \right] = 0 \\
 & -e^{-r\tau} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + e^{-r\tau} r(\ln S - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau) + re^{-r\tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-r\tau} \\
 & - re^{-r\tau} \left[\ln S + \tau(r - \frac{1}{2}\sigma^2) \right] = 0 \\
 & -e^{-r\tau} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + e^{-r\tau} r(\ln S - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau) + e^{-r\tau} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \\
 & - re^{-r\tau} \left[\ln S + \tau(r - \frac{1}{2}\sigma^2) \right] = 0
 \end{aligned}$$

Por último:

$$re^{-r\tau}(\ln S - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau) - re^{-r\tau}[\ln S + \tau(r - \frac{1}{2}\sigma^2)] = 0.$$

Con esto se concluye que el precio del contrato dado por L es la función de pago de un derivado que satisface la E.D.P. dada por (A.28).

Bibliografía

- [1] Bachelier, L. (1900). Théorie de la Spéculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **3**(17), 21–86
- [2] Bates, D. (1996). Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche mark options. *Review of Financial Studies*, **9**(1), 69–107. <https://doi.org/10.1093/rfs/9.1.69>

- [3] Black, F. y M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**(3), 637–654. <http://www.jstor.org/stable/1831029>
- [4] Bondi, A., Pulido, S., y Scotti, S. (2024). The rough Hawkes Heston stochastic volatility model, *Mathematical Finance*, **34**, 1197–1241. <https://doi.org/10.1111/mafi.12432>
- [5] Boyle, P., Broadie, M., y Glasserman, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of economic dynamics and control*, **21**(8-9), 1267–1321.
- [6] Capiński M., Kopp E. y Traple J. (2012). Stochastic Calculus for Finance. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO978113901736
- [7] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., y Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**(2), 385-407. doi:10.2307/19112
- [8] Cox, J. C., Ross, S. A. y Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics*, **7**(3), 229–263. doi:10.1016/0304-405X(79)90015-1.
- [9] Duffy, D. J.(2006). Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach, Wiley, first edition.
- [10] Glasserman, P. (2003). Monte Carlo methods in financial engineering, Springer-Verlag, doi:10.1007/978-0-387-21617-1.
- [11] Hafner, W., y Zimmermann, H. (Eds.). (2009). Vinzenz Bronzin’s option pricing models: Exposition and appraisal. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-85711-2>
- [12] Haug, E.G. (2009). The History of Option Pricing and Hedging. En: Hafner, W., Zimmermann, H. (eds) Vinzenz Bronzin’s Option Pricing Models. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-85711-2_23

- [13] Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options, *Rev. of Financial Studies*, **6**(2), 327-343. doi:10.1093/rfs/6.2.327
- [14] Higham, D.J. y Kloeden, P.E. (2021). An Introduction to the Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. SIAM. <https://doi.org/10.1137/1.9781611976434>
- [15] Hull, J. y A. White (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility, *The Journal of Finance*, **42**, 281–300.
- [16] Hull, J.C. (2022). Options Futures and Other Derivatives, Pearson. Onceava edición.
- [17] Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics*, **4**(1), 141–183. <https://doi.org/10.2307/3003143>
- [18] Metodología Heston.
http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/metodologia_heston
- [19] Øksendal, B. (2003) Stochastic Differential Equations. Springer Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6>
- [20] Orlando G, Tagliatela G.(2017). A review on implied volatility calculation, *Journal Of Computational And Applied Mathematics*, 320:202-220. doi:10.1016/j.cam.2017.02.002
- [21] Ornstein, G. E. y L. S. Uhlenbeck (1930). On the theory of the Brownian motion, *Physical Review*, **36**(5), 823–841. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.36.823>
- [22] Riveroll, N. E.. (2004). Lecciones del Pasado en Administración de Riesgos, Boletín técnico, IMEF, 50, 1–12.
- [23] Samuelson, P. (1965). Rational theory of warrant pricing, *Industrial Management Review*, **6**(2), 13–39.

- [24] Shreve, S.E., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, USA (2004).
- [25] Stein, E.M. and Stein, J.C. (1991). Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach, *The Review of Financial Studies*, **4**(4), pp.727–752.
- [26] Venegas-Martínez, F., *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición, Cengage, México (2008).
- [27] Veritasium en español. La ecuación del billón de dólares. YouTube. Published online 15 de marzo de 2024. <https://www.youtube.com/watch?v=0eBgGMuUDQg>
- [28] WILMOTT Magazine May 2023 - Black-Scholes 50th Anniversary Issue Part 1. WILMOTT Magazine. 2023;125:1-96. <https://wilmott.com/product/wilmott-magazine-may-2023-black-scholes-50th-anniversary-issue/>
- [29] WILMOTT Magazine: July 2023 issue - 50th Anniversary of Black-Scholes-Merton Part 2. WILMOTT Magazine. 2023;2023(126):1-108. <https://wilmott.com/wilmott-magazine-july-2023-issue-50th-anniversary-of-black-scholes-merton-part-2/>
- [30] Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, Second Edition, John Wiley & Sons, England.

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Alcaldía Miguel
Hidalgo
Ciudad de México, C.P. 11340

amortiz@ipn.mx
aparadar@ipn.mx

Topología

Capítulo 3

Continuos homeomorfos a una esfera

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,
Leonardo Ramírez Aparicio

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

Este capítulo consiste en estudiar, completar y presentar de forma detallada algunos resultados del artículo, *Spheres, symmetric products, and quotient of hyperspaces of continua*, realizado por Enrique Castañeda Alvarado y Javier Sánchez Martínez en 2014. Teniendo esto en cuenta, estudiamos los continuos tales que sus n -ésimos productos simétricos suspensión e hiperespacios suspensión son homeomorfos. Además, presentamos algunas condiciones para saber cuándo el n -ésimo producto simétrico y el n -ésimo producto simétrico suspensión de un continuo son homeomorfos a alguna esfera.

1 Introducción

Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo. En 1931, K. Borsuk y S. M. Ulam introducen el hiperespacio $F_n(X)$ conocido como el n -ésimo producto simétrico de X (ver [2]). Ellos probaron que si $n \in \mathbb{N}$, entonces: si $n = 1, 2, 3$, $F_n(I)$ es homeomorfo a I^n , si $n \geq 4$, $F_n(I)$ no es homeomorfo a cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n y si $n = 2$, $F_n(S^1)$ es homeomorfo a la banda de Möbius. En [22], R. Molski demostró que $F_2(I^2)$ es homeomorfo a una 4-celda y para cada $n \geq 3$, $F_n(I^2)$ y $F_2(I^n)$ no son homeomorfos a cualquier subconjunto de \mathbb{R}^{2n} . En [4], R. Bott corrigió la afirmación de que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a $S^1 \times S^2$ dicha por Borsuk en [3], demostrando que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 .

Otro hiperespacio que tuvo sus inicios en 1939 con Wojdysławski fue $C_n(X)$ (ver [27]). Sergio Macías reconsideró este hiperespacio $C_n(X)$ en el año 2001 y lo llamó el n -ésimo hiperespacio de X .

Por otro lado, en 1979, S. B. Nadler, Jr. inicia el estudio de los espacios cocientes en hiperespacios al introducir el concepto de hiperespacio suspensión de un continuo X , el cual es el espacio cociente $C(X)/F_1(X)$, denotado como $HS(X)$, que resulta al identificar a $F_1(X)$ como un conjunto de un solo punto en $C(X)$ y considerarlo con la topología cociente (véase [25, pág. 125]). En 2010, Franco Barragán introduce, el n -ésimo producto simétrico suspensión de un continuo X , para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, considerando el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, denotado como $SF_n(X)$, que se obtiene de $F_n(X)$ al identificar $F_1(X)$ a un conjunto de un punto (véase [1]). Más tarde, en 2013, Castañeda-Alvarado y Sánchez-Martínez, generalizaron este espacio cociente al (n, m) -ésimo producto simétrico suspensión de un continuo X , para cada $m, n \in \mathbb{N}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $m < n$, al considerar el espacio cociente $F_n(X)/F_m(X)$, denotado como $SF_m^n(X)$, que se obtiene de $F_n(X)$ al identificar $F_m(X)$ a un conjunto de un punto (véase [7]).

Es conocido que $C(I)/F_1(I)$ y $SF^2(I)$ son homeomorfos a una 2-celda (véase [19, en la prueba del Corolario 3.10] y [7, Ejemplo 3.1], respectivamente), $C(S^1)/F_1(S^1)$ es homeomorfo a S^2 (véase [19, En la prueba del Corolario 3.10]), pero $SF_2(S^1)$ es el plano proyectivo real (véase [7, Ejemplo 3.1]). De acuerdo con esto, si $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y X es un continuo, es natural preguntar:

¿bajo qué condiciones los espacios cocientes $C_1(X)/F_1(X)$ y $SF_n(X)$ son homeomorfos?

En este capítulo se presentan algunos resultados relacionados con esta pregunta.

2 Definiciones

En todo este capítulo, si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X , los símbolos $\text{cl}_X(A)$, $\text{int}_X(A)$ y $\text{Bd}_X(A)$ denotan la cerradura de A , el interior de A y la frontera de A en el espacio X . Como es usual, los símbolos \mathbb{N} , \mathbb{R} y ω , representan el conjunto de los números naturales (enteros positivos), el conjunto de los números reales y el primer ordinal no numerable. El símbolo $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A y $\text{Cono}(Z)$ denota el

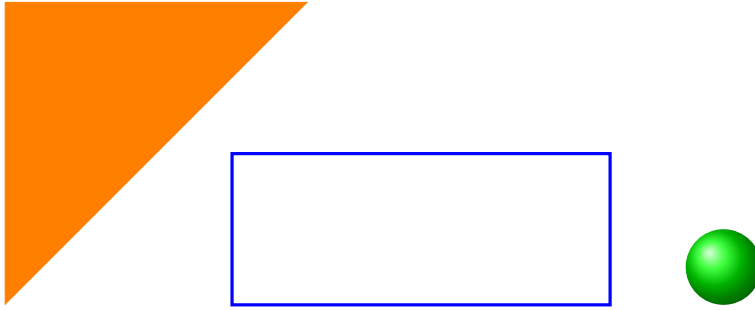


Figura 1: Ejemplos de continuos.

espacio cociente $Z \times [0, 1]/Z \times \{1\}$. También denotamos como \mathbb{R}^n al espacio euclideo n -dimensional y para cada punto $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ su norma como:

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Un continuo es un espacio métrico X con más de un punto, compacto y conexo. Un subconjunto Y de X es un subcontinuo de X si Y es un continuo o Y es un conjunto de un punto.

Los hiperespacios de un continuo X son espacios cuyos elementos son subconjuntos de X que cumplen ciertas condiciones específicas.

Si tenemos un continuo X , la familia de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X la denotamos como 2^X .

A este hiperespacio se le dota de la topología de Vietoris, cuya definición es la siguiente:

Definición 2.1. *Para un continuo X , la topología de Vietoris para 2^X es la topología más pequeña, τ_V tal que 2^X tiene las siguientes propiedades: (1) $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in \tau_V$, para todo abierto U de X y (2) $2^X \setminus \{A \in 2^X : A \subset B\} \in \tau_V$, para todo cerrado B en X .*

Dados $n, m \in \mathbb{N}$ y una colección finita, U_1, \dots, U_m de subconjuntos de X , $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$, denota el siguiente subconjunto de $F_n(X)$:

$$\{A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Cuando cada U_i es un subconjunto abierto de X , la familia de todos los subconjuntos de $\langle U_1, \dots, U_n \rangle_n$ es una base para la topología de $F_n(X)$, llamada **topología de Vietoris** (véase [23, Teorema 0.11, p. 9]).

Otro de los hiperespacios que mencionaremos en este capítulo y que son subespacios de 2^X cuando X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, son los siguientes:

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ puntos}\} \text{ y}$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Estos hiperespacios denotan el n -ésimo *producto simétrico de X* y el n -ésimo *hiperespacio de X* , respectivamente. Se acostumbra escribir a $C_1(X)$ como $C(X)$, conocido como el *hiperespacio de los subcontinuos* del continuo X .

Sean un continuo X y $A, B \subset X$. La distancia entre A y B que denotamos como $d(A, B)$, está dada de la siguiente manera:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Si X es un continuo con métrica d , $p \in X$ y $\epsilon > 0$, denotamos por $B_d(\epsilon, p)$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ . Además, si $A \in 2^X$, definimos la ϵ -**nube** de A (o la **nube con centro en A y radio $\epsilon > 0$**) como:

$$N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \epsilon\}.$$

Consideremos la función $H_d: 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$, que está dada para cada $A, B \in 2^X$ por

$$H_d(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\}.$$

Respecto a esta función, sabemos lo siguiente.

Teorema 2.2. [15, Teorema 2.2] *Si X es un espacio métrico con métrica acotada d , entonces la función H_d es una métrica para 2^X .*

La métrica H_d se le conoce como la **métrica de Hausdorff inducida por d** o simplemente **métrica de Hausdorff**. De ahora en adelante, siempre que consideraremos a 2^X , lo haremos con esta métrica. También, al ser los demás hiperespacios, $F_n(X)$, $C(X)$ y $C_n(X)$ subconjuntos de 2^X , se les considera dotados con la restricción correspondiente de la métrica de Hausdorff H_d . En la actualidad se sabe que, para cualquier continuo X , los hiperespacios 2^X , $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son continuos con la métrica de Hausdorff.

Teorema 2.3. [23, Teorema 0.13] *Si X es un espacio métrico acotado, una base de abiertos para la topología inducida por la métrica de Hausdorff de 2^X viene dada por:*

$$\{ \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle : U_i \text{ es un abierto de } X, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \}.$$

Definición 2.4. *Un espacio topológico X es **localmente conexo en un punto** $x \in X$ si para cada vecindad V de x en X , existe U un conjunto abierto y conexo de X tal que $x \in U \subset V$. Cuando X es **localmente conexo** en cada uno de sus puntos, decimos que es **localmente conexo**.*

Cuando hablemos de un **continuo localmente conexo**, nos referiremos a un continuo que además es localmente conexo.

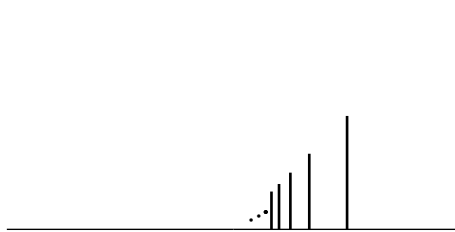


Figura 2: Un continuo localmente conexo

Definición 2.5. *Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología euclídeana. Sea $h: [0, 1] \rightarrow \alpha$ un homeomorfismo, decimos que $h(0)$ y $h(1)$ son los puntos extremos del arco α .*



Figura 3: Un arco

Definición 2.6. *Una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano, la denotamos como S^1 .*

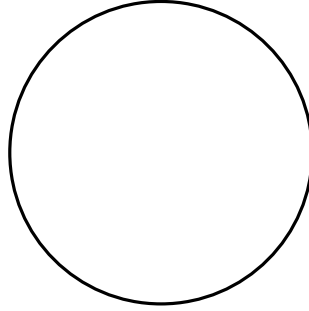


Figura 4: Una curva cerrada simple

Definición 2.7. Un **arco libre** de un continuo X es un arco $\alpha \subset X$ tal que $\text{int}_X(\alpha) \neq \emptyset$.

Definición 2.8. Dado $n \in \mathbb{N}$. Una **n -celda** es un espacio homomorfo al producto cartesiano de n veces el intervalo cerrado $[0, 1]$.

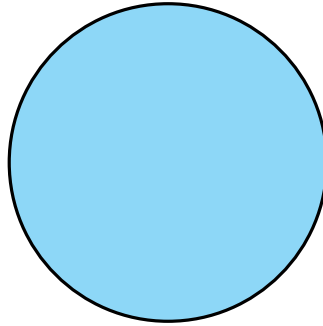


Figura 5: Una 2-celda

Definición 2.9. Una **n -esfera** es un espacio que es homeomorfo a la esfera n -dimensional S^n en \mathbb{R}^{n+1} , donde $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, con $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.10. Un continuo X es **arco conexo**, si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existe un arco α en X con extremos x y y .

Definición 2.11. Un **n -odo simple** es un continuo X que es la unión de n arcos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, con $n \in \mathbb{N}$ tal que existe $p \in X$ con la propiedad de que $\alpha_i \cap \alpha_j = \{p\}$, cuando $i \neq j$, y p es un punto extremo de cada uno de los arcos α_i .

Definición 2.12. Un continuo X es **unicoherente** si para cualquier par de subcontinuos H y K tales que $X = H \cup K$, se tiene que $H \cap K$ es un continuo.

Definición 2.13. Sean X un continuo, A un subconjunto no vacío de X y β un número cardinal. Se dice que A es de **orden menor o igual** que β en X , denotado por $\text{ord}(A, X) \leq \beta$, si para cualquier conjunto abierto V de X con $A \subset V$, existe un conjunto abierto U de X tal que $A \subset U \subset V$ y $|\text{Bd}_X(U)| \leq \beta$. Si $A = \{x\}$ se escribirá que $\text{ord}(x, X) \leq \beta$ en lugar de escribir $\text{ord}(\{x\}, X) \leq \beta$. Se dice también que A es de **orden** β en X , denotado por $\text{ord}(A, X) = \beta$, si $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, se tiene que $\text{ord}(A, X) \not\leq \alpha$.

Definición 2.14. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos la **dimensión** de X , recursivamente, que denotamos como $\dim(X) \in \{-1, 0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$, de la siguiente manera:

- (a) $\dim(X) = -1$ si y solo si $X = \emptyset$;
- (b) supongamos que hemos definido cuándo un espacio topológico Y tiene **dimensión** $\dim(Y) \leq n - 1$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, decimos que la **dimensión** de X en x es menor o igual a n , denotada por $\dim(x, X) \leq n$, si y solo si X tiene una base local de vecindades de x cuyas fronteras tienen **dimensión** menor o igual a $n - 1$. Si para cada $x \in X$, se cumple que $\dim(x, X) \leq n$, entonces escribimos que $\dim(X) \leq n$;
- (c) la **dimensión** de X es igual a n , denotada por $\dim(X) = n$, si y solo si $\dim(X) \leq n$ y es falso que $\dim(X) \leq n - 1$;
- (d) la **dimensión** de X en x es igual a n , denotada por $\dim(x, X) = n$, si y solo si $\dim(x, X) \leq n$ y es falso que $\dim(x, X) \leq n - 1$;
- (e) decimos que la **dimensión** de X es ∞ , denotada por $\dim(X) = \infty$, si y solo si es falso que $\dim(X) \leq n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$;
- (f) decimos que la **dimensión** de X en x es ∞ , denotada por $\dim(x, X) = \infty$, si y solo si $\dim(x, X) > n$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.

Si $\dim(X) \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, escribiremos $\dim(X) < \infty$, en otro caso $\dim(X) = \infty$. Por [13, p. 20], para cada continuo X , $\dim(X) \geq 1$.

Proposición 2.15. [8, Proposición 9,5] *Si X es un continuo, entonces $\text{ord}(x, X) \leq 2$, para cada $x \in X$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Teorema 2.16. [18, Teorema 11] *Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo arco conexo que no contiene m -odos, para cada $m \leq n$, entonces X contiene un arco libre.*

Teorema 2.17. [15, Teorema 70.1] *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Entonces, $C(X)$ contiene n -celdas si y sólo si X contiene n -odos.*

Corolario 2.18. [6, Corolario 5.9] *Sean $n \in \mathbb{N}$, X una gráfica finita y Y un continuo. Si $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .*

Teorema 2.19. [8, Proposición 8.23] *Todo continuo localmente conexo es arco conexo.*

Lema 2.20. *Si X es un continuo y $f: X \rightarrow F_1(X)$ está dada por $f(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap F_1(X) : U_i \text{ es un abierto de } X, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$. Por el Teorema 2.3, \mathcal{B} es una base de $F_1(X)$. Sean $x \in X$ y $f(x) = \{x\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap F_1(X)$. Consideremos

$V = \bigcap_{i=1}^n U_i$, entonces V es un subconjunto abierto de X tal que $x \in V$. Dado

$y \in V$, tenemos que $y \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Por lo que, $f(y) = \{y\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap F_1(X)$.

Así, $f(V) \subset \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap F_1(X)$. Esto muestra que f es continua.

Ahora, sea U un subconjunto abierto de X . Veamos que $f(U) = \langle U \rangle \cap F_1(X)$. Sea $x \in U$, entonces $f(x) = \{x\} \in \langle U \rangle \cap F_1(X)$. Así, $f(U) \subset \langle U \rangle \cap F_1(X)$. Dado $\{y\} \in \langle U \rangle \cap F_1(X)$, tenemos que $y \in U$ y por ende, $f(y) = \{y\} \in f(U)$. Luego, $\langle U \rangle \cap F_1(X) \subset f(U)$. Por lo tanto, como f es una función biyectiva, continua y abierta, se sigue que f es un homeomorfismo. \square

Lema 2.21. *Sea X un espacio topológico. Si A y Y son subconjuntos de X , entonces:*

- (a) $\text{Bd}_Y(A \cap Y) \subset \text{Bd}_X(A)$;
- (b) si $\text{cl}_X(A) \subset \text{int}_X(Y)$, entonces $\text{Bd}_X(A) = \text{Bd}_Y(A)$.

Demostración. Para probar (a) observemos que

$$\begin{aligned} \text{Bd}_Y(A \cap Y) &= \text{cl}_Y(A \cap Y) \cap \text{cl}_Y(Y - A), \\ &\subset \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) \\ &= \text{Bd}_X(A), \end{aligned}$$

es decir, $\text{Bd}_Y(A \cap Y) \subset \text{Bd}_X(A)$.

Ahora, para mostrar (b) notemos primero que como $A \subset Y$, entonces $X - A = (X - Y) \cup (Y - A)$. Así,

$$\begin{aligned} \text{Bd}_X(A) &= \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(X - A) \\ &= \text{cl}_X(A) \cap (\text{cl}_X(X - Y) \cup \text{cl}_X(Y - A)) \\ &= \text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(Y - A) \\ &= \text{cl}_X(A) \cap Y \cap \text{cl}_X(Y - A) \\ &= \text{cl}_Y(A) \cap \text{cl}_Y(Y - A) \\ &= \text{Bd}_Y(A), \end{aligned}$$

es decir, $\text{Bd}_X(A) = \text{Bd}_Y(A)$.

□

Teorema 2.22. *Si X es un espacio topológico, A un subespacio de X y $x \in A$, entonces se cumple lo siguiente:*

- (a) $\dim(A) \leq \dim(X)$;
- (b) $\dim(x, A) \leq \dim(x, X)$;
- (c) *si X es un espacio topológico regular tal que $x \in \text{int}_X(A)$, entonces $\dim(x, A) = \dim(x, X)$.*

Demostración. Para demostrar (a) podemos suponer que $\dim(X) < \infty$ ya que si $\dim(X) = \infty$, la afirmación es clara. Haremos la prueba por inducción sobre una cota superior de la dimensión de X . Claramente la desigualdad se cumple si $\dim(X) = -1$. Supongamos que (a) se cumple para X cuya dimensión no excede $n - 1 \geq -1$ con $n \geq 0$. Sean X un espacio topológico con $\dim(X) \leq n$ y A un subespacio de X . Veamos que $\dim(x, A) \leq \dim(X)$, para cada $x \in A$. Sean $x \in A$ y U una vecindad de x en A , entonces existe

V una vecindad de x en X tal que $U = A \cap V$. Como $\dim(X)$ es finita, $\dim(X) \leq \dim(X)$ y $x \in U$, tenemos que existe W una vecindad de x en X tal que $x \in W \subset V$ y $\dim(\text{Bd}_X(W)) \leq \dim(X) - 1$. Notemos que $W \cap A \subset U$ es una vecindad de A que contiene a x . Además, por el Lema 2.21 (a), $\text{Bd}_A(W \cap A) \subset \text{Bd}_X(W)$, así, $\text{Bd}_A(W \cap A)$ es un subespacio de $\text{Bd}_X(W)$. Por hipótesis de inducción, se sigue que $\dim(\text{Bd}_A(W \cap A)) \leq \dim(\text{Bd}_X(W)) \leq \dim(X) - 1$. Así, $\dim(x, A) \leq \dim(X)$. Como $x \in A$ es arbitrario, se sigue que $\dim(A) \leq \dim(X)$, concluyendo lo requerido.

Para probar (b), observemos que si $\dim(x, X) = \infty$, la desigualdad es cierta. Supongamos que $\dim(X) < \infty$. Si $\dim(x, X) = -1$, entonces por vacuidad, la desigualdad es cierta. En otro caso, sea U una vecindad de x en A , razonando análogamente como en (a), existen vecindades V y W de x en X tales que $U = A \cap V$, $p \in W \subset V$ y $\dim(\text{Bd}_X(A)) \leq \dim(x, X) - 1$. Por el Lema 2.21 (a), como $\text{Bd}_A(W \cap A) \subset \text{Bd}_X(W)$, se sigue que $\dim(\text{Bd}_A(W \cap A)) \leq \dim(\text{Bd}_X(W)) \leq \dim(x, X) - 1$. Ya que $W \cap A$ es una vecindad de x en A que está contenida en U , se sigue que $\dim(x, A) \leq \dim(x, X)$, concluyendo lo requerido.

Por último, para probar (c), por el inciso (b), es suficiente mostrar que $\dim(x, X) \leq \dim(x, A)$. Para esto, podemos suponer que $\dim(x, A) < \infty$. Sea U una vecindad abierta de x en X que está contenida en A , entonces U también es una vecindad abierta de x en A . Por lo que, existe V una vecindad de x en A tal que $V \subset U$ y $\dim(\text{Bd}_A(V)) \leq \dim(x, A) - 1$. Ahora, notemos que V también es una vecindad de x en X . En efecto, como V es una vecindad de x en A tal que $V \subset U$, existe un abierto O_A en A tal que $x \in O_A \subset V \subset U$. Además, ya que U es un abierto en X que contiene a x y está contenido en A , entonces $U \subset \text{int}_X(A) \subset A$. Así, $O_A \subset \text{int}_X(A) \subset A$. De modo que O_A es abierto en $\text{int}_X(A)$ y por ende, en X . Debido a esto, V es una vecindad de x en X . Por otra parte, como por hipótesis, X es regular y $x \in \text{int}_X(A)$, podemos suponer que $\text{cl}_X(V) \subset \text{int}_X(A)$. Así, por el Lema 2.21 (b), $\text{Bd}_A(V) = \text{Bd}_X(V)$. De aquí, $\dim(x, \text{Bd}_X(V)) \leq \dim(x, A) - 1$. Por lo tanto, $\dim(x, X) \leq \dim(x, A)$ y así concluye la prueba. \square

Teorema 2.23. [13, Corolario 1] *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $X = Y \cup Z$, Y es un cerrado de X , $\dim(Y) \leq n$ y $\dim(Z) \leq n$, entonces $\dim(X) \leq n$.*

Corolario 2.24. *Si $n \in \mathbb{N}$, X es un continuo, Y es un subcontinuo de X , $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) < n$, entonces $\dim(X \setminus Y) = n$.*

Demostración. Por el Teorema 2.22 (a), $\dim(X \setminus Y) \leq n$. Si $\dim(X \setminus Y) < n$, entonces $\dim(X \setminus Y) \leq n - 1$. Por el Teorema 2.23, $\dim(X) \leq n - 1$, esto es una contradicción. Así, $\dim(X) = n$. \square

Teorema 2.25. Sean X, Y dos espacios topológicos homeomorfos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\dim(X) = n$ si y solo si $\dim(Y) = n$.

Demostración. Demostramos la primera implicación, ya que el recíproco es similar. La prueba se hace por inducción sobre la dimensión de X . Si $\dim(X) = -1$, entonces $X = \emptyset$. Como X es homeomorfo a Y , entonces $Y = \emptyset$. Así, $\dim(Y) = -1$. Supongamos que si $\dim(X) = n - 1$, entonces $\dim(Y) = n - 1$. Ahora veamos que si $\dim(X) = n$, entonces $\dim(Y) = n$. Para esto, demostraremos que para cada $x \in X$, si $\dim(x, X) = n$, entonces $\dim(h(x), Y) = n$. Supongamos que $\dim(x, X) = n$. Sea U una vecindad de un punto $h(x)$ en Y , entonces como h es continua en x , se tiene que $h^{-1}(U)$ es una vecindad de x en X . Como $\dim(x, X)$ es finita, existe W una vecindad de x en X tal que $x \in W \subset h^{-1}(U)$ y $\dim(\text{Bd}_X(W)) \leq n - 1$. Como h es un homeomorfismo entre X e Y , entonces $h \upharpoonright_{\text{Bd}_X(W)}: \text{Bd}_X(W) \rightarrow h(\text{Bd}_X(W))$ es también un homeomorfismo. Como los homeomorfismos conservan frontentas, es decir, si $A \subset X$, entonces $h(\text{Bd}_X(A)) = \text{Bd}_Y(h(A))$, por hipótesis de inducción, se cumple que $\dim(\text{Bd}_X(W)) = \dim(h(\text{Bd}_X(W))) = \dim(\text{Bd}_Y(h(W))) \leq n - 1$. De esto, se sigue que $h(W)$ es una vecindad de $h(x)$ contenida en U tal que, $\dim(\text{Bd}_Y(h(W))) \leq n - 1$. Así, $\dim(h(x), Y) \leq n$.

Resta probar que $\dim(h(x), Y) > n - 1$. Supongamos que $\dim(h(x), Y) \leq n - 1$, luego, por hipótesis de inducción, $\dim(x, X) \leq n - 1$, lo que es una contradicción, ya que $\dim(x, X) = n$. Así, $\dim(h(x), Y) > n - 1$ y por lo tanto, $\dim(h(x), Y) = n$. Así, como x fue elegida arbitrariamente en X , si $\dim(X) = n$, entonces $\dim(Y) = n$. \square

Lema 2.26. Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y un continuo X , entonces $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es denso en $F_n(X)$.

Demostración. Sean $A \in F_n(X)$ y \mathcal{U} un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, con $m \leq n$. Si $|A| = n$, entonces $A \in \mathcal{U} \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$. Supongamos que $|A| < n$. Como \mathcal{U} es un subconjunto abierto de $F_n(X)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Además, $B_X(a_1, \epsilon)$ es un conjunto infinito, entonces existen $a_{m+1}, \dots, a_n \in B_X(a_1, \epsilon) \setminus A$. Sea $B = \{a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$, entonces $B \in B_{F_n(X)}(A, \epsilon)$

$\cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$. Luego, $\mathcal{U} \cap (F_n(X) \setminus F_1(X)) \neq \emptyset$. Esto concluye la prueba. □

Lema 2.27. [2, Lema 6.1] *Sea X un espacio compacto de Hausdorff, $n, r \in \mathbb{N}$, con $r \leq n$, y sea $A = \{a_1, \dots, a_r\} \in F_n(X)$, donde a_1, \dots, a_r son diferentes. Sea U_1, \dots, U_r subconjuntos abiertos ajenos por pares de X tales que $a_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ y $\mathcal{C} \subset \langle U_1, \dots, U_r \rangle_n$ tal que $A \in \mathcal{C}$. Entonces las siguientes implicaciones se cumplen:*

- (a) *si \mathcal{C} es un abierto de $F_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un abierto de X .*
- (b) *si \mathcal{C} es conexo, entonces $(\bigcup \mathcal{C}) \cap U_i$ es conexo para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.*

Teorema 2.28. [12, Teorema 2.5] *Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo localmente conexo. Si $A \in F_n(X)$ y \mathcal{U} es una vecindad de A en $F_n(X)$, entonces existen $U_1, \dots, U_{|A|}$ subconjuntos abiertos, conexos y ajenos por pares de X tales que $A \in \langle U_1, \dots, U_{|A|} \rangle_n \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$.*

Lema 2.29. [21, Lema 1] *Sean X un continuo y $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$. Si C_1, \dots, C_m son subconjuntos conexos de X , entonces $\langle C_1, \dots, C_m \rangle_n$ es un subconjunto conexo de $F_n(X)$.*

Lema 2.30. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo. Entonces, X es localmente conexo si y sólo si $F_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sea $A \in F_n(X)$ y \mathcal{U} un abierto de $F_n(X)$. Supongamos que $A = \{x_1, \dots, x_r\}$, para algún $r \leq n$. Por el Teorema 2.28, existen U_1, \dots, U_r subconjuntos abiertos, conexos y ajenos por pares de X tales que $A \in \langle U_1, \dots, U_r \rangle_n \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$. Por el Lema 2.29, $\langle U_1, \dots, U_r \rangle_n$ es conexo. Además, $\langle U_1, \dots, U_r \rangle_n$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Así, $F_n(X)$ es localmente conexo.

Ahora, supongamos que $F_n(X)$ es localmente conexo. Sean $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Como $\{x\} \in \langle U \rangle_n$, por la conexidad local de $F_n(X)$, existe un abierto y conexo \mathcal{U} de $F_n(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U} \subset \langle U \rangle_n$. Como $x \in \bigcup \mathcal{U} \cap U \subset U$ y por el Lema 2.27, $\bigcup \mathcal{U} \cap U$ es un subconjunto abierto y conexo de X , se sigue que X es localmente conexo. □

Corolario 2.31. [8, Corolario 8.17] *La imagen de cualquier continuo localmente conexo es un continuo localmente conexo.*

Lema 2.32. [21, Lema 2] *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$. Sea X un continuo, y sean U, V subconjuntos no vacíos, propios y abiertos de X y sean x, y puntos de X tales que $x \neq y$. Entonces el siguiente subconjunto de $F_n(X)$ es conexo:*

$$\langle \text{cl}_X(U), \text{cl}_X(V), X \rangle_n \cup \langle \text{Fr}_X(U), \text{Fr}_X(V), X \rangle_n \\ \cup \langle \text{Fr}_X(U), \{b_1\}, X \rangle_n \cup \langle \{b_1\}, \{b_2\}, X \rangle_n.$$

Lema 2.33. *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si X es un continuo, entonces $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es conexo.*

Demostración. La prueba se divide en dos casos:

Caso 1. Supongamos que $n = 2$:

subcaso 1.1. Si X es un arco, por [1, Ejemplo 3.1], $F_2(X) \setminus F_1(X)$ es conexo.

subcaso 1.2. Si X no es un arco, por [16, Teorema 2], $F_2(X) \setminus F_1(X)$ es conexo.

Caso 2. Supongamos que $n \geq 3$. Veamos que para cada $A, B \in F_n(X) \setminus F_1(X)$ tales que $A \neq B$, existe un subconjunto conexo de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ que los contiene. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe un punto $b_1 \in B \setminus \{b_1\}$. Fijemos $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \neq a_2$. Sean U y V subconjuntos abiertos de X tales que $a_1 \in U$, $a_2 \in V$, $\text{cl}_X(U) \cap \text{cl}_X(V) = \emptyset$, $A \subset U \cup V$ y $b_1 \notin \text{cl}_X(U)$. Denotemos por \mathcal{C} el siguiente subconjunto de $F_n(X)$:

$$\langle \text{cl}_X(U), \text{cl}_X(V), X \rangle_n \cup \langle \text{Fr}_X(U), \text{Fr}_X(V), X \rangle_n \\ \cup \langle \text{Fr}_X(U), \{b_1\}, X \rangle_n \cup \langle \{b_1\}, \{b_2\}, X \rangle_n.$$

Por el Lema 2.32, \mathcal{C} es un subconjunto conexo. Notemos que $\mathcal{C} \subset F_n(X) \setminus F_1(X)$, $A \in \langle \text{cl}_X(U), \text{cl}_X(V), X \rangle_n$ y $B \in \langle \{b_1\}, \{b_2\}, X \rangle_n$. Por lo tanto, \mathcal{C} es un subconjunto conexo de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A, B \in \mathcal{C}$. Esto prueba el Caso 2, y el Lema está demostrado. \square

Lema 2.34. [5, Corolario 8.24] *Cualquier subespacio abierto de un espacio localmente conexo es localmente conexo.*

3 Espacios cocientes

Presentaremos la manera de construir un espacio Y a partir de identificar topológicamente conjuntos de puntos de un espacio X .

Definición 3.1. Una *partición* de un conjunto X es una colección de conjuntos no vacíos, ajenos entre sí, cuya unión es X .

Definición 3.2. Sea \mathcal{P} una partición de un espacio métrico X . El *espacio cociente*, denotado como X/\mathcal{P} , es el conjunto cuyos puntos son los elementos de la partición \mathcal{P} .

Definición 3.3. La función $q: X \rightarrow X/\mathcal{P}$ que envía a cada punto x de X al único elemento de la partición \mathcal{P} que lo contiene, es llamada *función cociente*.

Teorema 3.4. [5, 3.1] Si X es un espacio topológico y \mathcal{P} es una partición de X , entonces

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}) = \{U \subset X/\mathcal{P} : q^{-1}(U) \text{ es un conjunto abierto de } X\}$$

es una topología para X/\mathcal{P}

La topología $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ es llamada topología cociente para X/\mathcal{P} .

Es conocido que un espacio cociente no necesariamente es métrico (ver [8, pág. 37]). Sin embargo, existen condiciones adicionales sobre la descomposición para que el espacio cociente resulte ser un espacio métrico. La siguiente es una de éstas.

Definición 3.5. Sea un espacio topológico X . Una partición \mathcal{P} de X es *semicontinua superiormente* si para cada $P \in \mathcal{P}$ y para cada abierto U de X con $P \subset U$, existe un abierto V de X con $P \subset V$, tal que si $A \in \mathcal{P}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Teorema 3.6. [20, Teorema 1.2.22] Sean X un espacio métrico compacto y \mathcal{P} una descomposición de X . Si \mathcal{P} es semicontinua superiormente, entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ es un espacio métrico.

Teorema 3.7. [8, 3.14] Si X es un espacio topológico, A un subconjunto cerrado no vacío de X y $\mathcal{P} = \{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{A\}$, entonces \mathcal{P} es una descomposición semicontinua superiormente de X .

Al espacio cociente $(X/\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ también se le conoce como espacio de descomposición o espacio de identificación, se le denota como X/A . El espacio cociente X/A es obtenido a partir de identificar el conjunto A con un punto en X .

Teorema 3.8. [20, Teorema 1.7.3] *Sea X un continuo y \mathcal{P} una descomposición semicontinua superiormente de X , entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{P}, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ es un continuo.*

Definición 3.9. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. El n -ésimo producto simétrico suspensión del continuo X , denotado por $SF_n(X)$, es el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, con la topología cociente.*

Definición 3.10. *Sean un continuo X y $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y $m < n$. El (n, m) -ésimo producto simétrico suspensión del continuo X , denotado por $SF_m^n(X)$, es el espacio cociente $F_n(X)/F_m(X)$, con la topología cociente.*

Definición 3.11. *Sean un continuo X . El hiperespacio suspensión del continuo X , denotado por $HS(X)$, es el espacio cociente $C(X)/F_1(X)$, con la topología cociente.*

Como $F_1(X)$, $F_m(X)$ son subconjuntos cerrados no vacíos de $F_n(X)$, y $F_1(X)$ es un subconjunto cerrado no vacío de $C(X)$, por el Teorema 3.7 y el Teorema 3.8, tenemos que $SF_n(X)$, $SF_m^n(X)$ y $HS(X)$ son continuos.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, $m < n$ y X un continuo. Si consideremos el n -ésimo producto simétrico suspensión $SF_n(X)$ y el (n, m) -ésimo producto simétrico suspensión $SF_m^n(X)$, sus respectivas funciones cocientes, las denotamos por $q_X: F_n(X) \rightarrow SF_n(X)$ y $q_X^{(n,m)}: F_n(X) \rightarrow SF_m^n(X)$, respectivamente. Al elemento $F_1(X)$ de $SF_n(X)$ y $F_m(X)$ de $SF_m^n(X)$, los denotamos por F_X y F_X^m , respectivamente. Así, $q_X(F_1(X)) = \{F_X\}$ y $q_X^{(n,m)}(F_m(X)) = \{F_X^m\}$.

Observación 3.12. *Como las funciones $q_X|_{F_n(X) \setminus F_1(X)}: F_n(X) \setminus F_1(X) \rightarrow SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ y $q_X^{(n,m)}|_{F_n(X) \setminus F_m(X)}: F_n(X) \setminus F_m(X) \rightarrow SF_m^n(X) \setminus \{F_X^m\}$ son biyectivas, continuas y abiertas, son homeomorfismos.*

A continuación presentamos algunos ejemplos de modelos geométricos del n -ésimo producto simétrico suspensión de un continuo dado, en los cuales se puede apreciar algunas características interesantes.

Ejemplo 3.13. *Sea $X = [0, 1]$. En [14, pág. 51] se demuestra que un modelo geométrico para el hiperespacio $F_2(X)$ es el triángulo en el plano con vértices en $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$, es decir, $F_2(X)$ es homeomorfo a una 2-celda, donde $F_1(X)$ es homeomorfo a el segmento que une el punto $(0, 0)$ con el punto $(1, 1)$. Si identificamos $F_1(X)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a este triángulo. Así, el hiperespacio $SF_2(X)$, también es una 2-celda. La Figura 6 ilustra es hecho.*

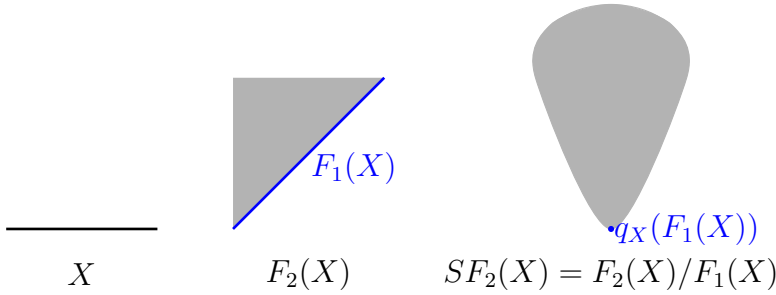


Figura 6: El segundo producto simétrico suspensión del arco.

Ejemplo 3.14. Sea T el triodo simple. En [14, pág. 55] se demuestra que un modelo geométrico para el hiperespacio $F_2(T)$ es el espacio que se muestra en la Figura 7, el cual es una 2-celda D_0 que contiene tres 2-celdas, D_1, D_2 y D_3 , pegadas de tal manera que $D_0 \cap D_i$ es un arco para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y la intersección $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ es un punto p . Además $F_1(T)$ está contenido en la frontera como variedad de D_1, D_2, D_3 y $F_1(T) \cap D_0 = \{p\}$. Así, al identificar $F_1(T)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a $F_2(T)$. Por tanto, $SF_2(T)$ es homeomorfo a $F_2(T)$. En la Figura 7 podemos observar un bosquejo de cómo se llega al espacio $SF_2(T)$.

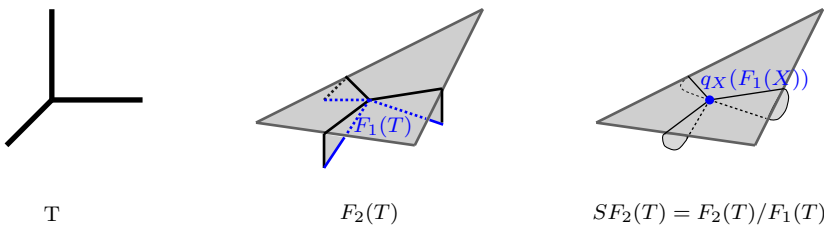


Figura 7: Segundo producto simétrico suspensión del triodo simple.

Ejemplo 3.15. Sea S^1 la circunferencia unitaria en el plano centrada en el origen. En [14, pág. 23] se demuestra que un modelo para $F_2(S^1)$ es el espacio conocido como la Banda de Möbius, donde $F_1(S^1)$ es homeomorfo a la frontera como variedad de la Banda de Möbius. Así, al identificar $F_1(S^1)$ a un punto, obtenemos el plano proyectivo real. Así, $SF_2(S^1)$ es homeomorfo

al plano proyectivo real. El espacio S^1 es un continuo no unicoherente tal que $F_2(S^1)$ no es unicoherente. Por [26, pág. 197], tenemos que $SF_2(S^1)$ es unicoherente. Por tanto, $F_2(S^1)$ no es homeomorfo a $SF_2(S^1)$.

Como se puede ver en el Ejemplo 3.13 y el Ejemplo 3.14, existen continuos tales que sus respectivos segundo producto simétrico y segundo producto simétrico suspensión son homeomorfos, así como continuos tales que su segundo producto simétrico y segundo producto simétrico suspensión no son homeomorfos, como en el Ejemplo 3.15.

Teorema 3.16. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Sea $\delta > 0$ tal que $x \in B_d(x, \delta) \subset U$. Como $\{x\}$ es un subcontinuo propio de X y $B_d(x, \delta)$ es un abierto de X , existe K un subcontinuo de X tal que $\{x\} \subsetneq K \subset B_d(x, \delta)$. Sea $y \in K$ tal que $x \neq y$. Sea $\epsilon' > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon') \cap B_d(y, \epsilon') = \emptyset$. Sean $A = \{x, y\}$ y $\epsilon < \min\{\delta, \epsilon'\}$. Sean $U_1 = B_d(x, \epsilon)$ y $U_2 = B_d(y, \epsilon)$. Entonces, $\langle U_1, U_2 \rangle_n \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$ es un abierto no vacío de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A \in \langle U_1, U_2 \rangle_n \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$. Como $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo, existe un abierto y conexo \mathcal{C} de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A \in \mathcal{C} \subset \langle U_1, U_2 \rangle_n \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$. Por el Lema 2.27, $\bigcup \mathcal{C}$ es un subconjunto abierto de X y $(\bigcup \mathcal{C}) \cap U_1$ es un subconjunto conexo. Esto implica que, $(\bigcup \mathcal{C}) \cap U_1$ es un subconjunto abierto y conexo de X tal que $x \in (\bigcup \mathcal{C}) \cap U_1 \subset U$. Por lo tanto, X es localmente conexo. \square

Teorema 3.17. *Sean un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $SF_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo localmente conexo, por el Lema 2.30, $F_n(X)$ es localmente conexo. Como $q_X(F_n(X)) = SF_n(X)$, por el Corolario 2.31, $SF_n(X)$ es localmente conexo.

Ahora, supongamos que $SF_n(X)$ es localmente conexo, Como $SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$, por el Lema 2.34, $SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ es localmente conexo. Por la Observación 3.12, $SF_n(X) \setminus \{F_X\}$ es homeomorfo a $F_n(X) \setminus F_1(X)$, entonces $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo. Así, por el Teorema 3.16, X es localmente conexo. \square

4 Hiperespacios $SF_n(X)$ homeomorfos a $C_1(X)/F_1(X)$

Proposición 4.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo de dimensión finita, entonces $F_n(X)$ y $SF_m^n(X)$ son continuos de dimensión finita.*

Demostración. Por [13, prueba del Lema 3.1], $\dim(F_n(X)) \leq n \cdot \dim(X)$. Luego, $F_n(X)$ es un continuo de dimensión finita. Por otra parte, por el Teorema 2.22 (a), $\dim(F_n(X) \setminus F_m(X)) \leq \dim(F_n(X))$. Por la Observación 3.12, $F_n(X) \setminus F_m(X)$ es homeomorfo a $SF_m^n(X) \setminus \{F_X^m\}$. Entonces, por el Teorema 2.25, $\dim(SF_m^n(X) \setminus \{F_m^n(X)\}) \leq n \cdot \dim(X)$. Así, por el Corolario 2.24, $\dim(SF_m^n(X))$ es finita. \square

Proposición 4.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si X es un continuo de dimensión finita uno, entonces $\dim(F_n(X)) = \dim(SF_n(X))$ y además, $\dim(C_1(X)) = \dim(C_1(X)/F_1(X))$.*

Demostración. Por el Lema 2.20, X es homeomorfo a $F_1(X)$. Por el Teorema 2.25, $\dim(F_1(X)) = 1$. Por el Teorema 2.22 (a), $\dim(F_n(X)/F_1(X)) \leq \dim(F_n(X))$.

Caso 1. $\dim(F_1(X)) = \dim(F_n(X))$. Por el Lema 2.33, $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es un continuo. Entonces, $\dim(F_n(X)) = \dim(F_n(X) \setminus F_1(X))$.

Caso 2. $\dim(F_1(X)) < \dim(F_n(X))$. Por el Teorema 4.1, $\dim(F_n(X))$ es finita. Luego, por el Corolario 2.24, $\dim(F_n(X)) = \dim(F_n(X) \setminus F_1(X))$.

Por el Caso 1 y el Caso 2, $\dim(F_n(X)) = \dim(F_n(X)/F_1(X))$. Así, como $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es homeomorfo a $SF_n(X) \setminus \{F_X\}$, por el Teorema 2.25, $\dim(SF_n(X) \setminus \{F_X\}) = \dim(F_n(X))$. Por el Teorema 2.23, $\dim(SF_n(X)) = \dim(F_n(X))$. Similarmente tenemos que $\dim(C_1(X)) = \dim(C_1(X)/F_1(X))$. Esto concluye la prueba de la proposición. \square

Lema 4.3. *Si un continuo arco conexo X tiene hiperespacio $C(X)$ de dimensión a lo más dos, entonces X es homeomorfo a S^1 o I .*

Demostración. Como $C(X)$ no contiene 3-celdas, por el Teorema 2.17, X no contiene triodos simples. Luego, $\text{ord}(x, X) \leq 2$, para cada $x \in X$, porque X es arco conexo. Por la Proposición 2.15, X es un arco o una curva cerrada simple. \square

Teorema 4.4. *Sea X un continuo arco conexo de dimensión finita. Entonces $C(X)/F_1(X)$ es homeomorfo a $SF_2(X)$ si y sólo si X es homeomorfo a $[0, 1]$.*

Demostración. Si X es un arco, por [15, Ejemplo 5.1] y [1, Ejemplo 3.1], $C(X)/F_1(X)$ y $SF_2(X)$ son 2-celdas.

Ahora supongamos que $C(X)/F_1(X)$ y $SF_2(X)$ son homeomorfos. Por la Proposición 4.1, $\dim(SF_2(X)) < \infty$. Por el Teorema 2.25, $\dim(C(X)/F_1(X)) = \dim(SF_2(X))$. Así, $\dim(C(X)/F_1(X)) < \infty$. Luego, $\dim(C(X)) < \infty$. Por [17, Teorema 2.1], $\dim(X) = 1$. Así, $\dim(SF_2(X)) \leq 2$ y $\dim(C(X)) \leq 2$. Por el Lema 4.3, X es un arco o una curva cerrada simple. Pero, $C(S^1)/F_1(S^1)$ es una 2-esfera y $SF_2(S^1)$ es homeomorfo al plano proyectivo real. Por lo tanto, X es un arco. \square

Lema 4.5. *Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ y X un continuo. Entonces $F_n(X)$ y $SF_n(X)$ no contienen subconjuntos de dimensión 2 con interior no vacío.*

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto \mathcal{D} de $F_n(X)$ con dimensión 2 e interior no vacío. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_n \rangle_n$ un subconjunto de $F_n(X)$ tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$. Por el Lema 2.26, $\{A \in F_n(X) : |A| = n\}$ es denso en $F_n(X)$. Así, existe $A \in (F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$. Como $|A| = n$, podemos asumir que $U_i \cap U_j = \emptyset$ and $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Luego, existen C_1, C_2, \dots, C_n subcontinuos no degenerados de X tales que $C_i \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Notemos que $\langle C_1, \dots, C_n \rangle_n$ es homeomorfo a $C_1 \times \dots \times C_n$. Así que, \mathcal{U} contiene un subconjunto homeomorfo a $C_1 \times \dots \times C_n$. Luego, $\dim(\mathcal{U}) \geq 3$, una contradicción. Esto prueba el Lema. \square

Teorema 4.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Si X es un continuo arco conexo, entonces $C(X)/F_1(X)$ no es homeomorfo a $SF_n(Y)$, para cada continuo Y de dimensión finita.*

Demostración. Supongamos que existe un continuo Y de dimensión finita tal que $C(X)/F_1(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$. Luego, por la Proposición 4.1, $\dim(SF_n(Y)) < \infty$. Por el Teorema 2.25, $\dim(C(X)/F_1(X)) < \infty$. Así, $\dim(C(X)) < \infty$. Por [17, Teorema 2.1], $\dim(X) = 1$. Sea $m = \dim(C(X))$. Por el Teorema 2.17, y usando la arco conexidad de X , este continuo no contiene $(m + 1)$ -odos simples. Por el Teorema 2.16, X contiene un arco libre, esto implica que $C(X)/F_1(X)$ contiene un subconjunto de dimensión dos con interior no vacío. Por el Lema 4.5, esto es una contradicción. Esto prueba el teorema. \square

5 Productos simétricos $F_n(X)$ homeomorfos a $SF_n(X)$ que son n -esferas

Teorema 5.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si X es un continuo, ni $F_n(X)$ ni $SF_n(X)$ son homeomorfos a S^2 .*

Demostración. Sea X un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a S^2 , para algún $n \geq 2$. Como la conexidad local es un invariante topológico, entonces $F_n(X)$ es localmente conexo. Por el Lema 2.30, X es localmente conexo. Como $\dim(S^2) = 2$, entonces $\dim(X) = 1$ y $n = 2$. Por [7, Lema 5.9], X no contiene m -odos simples, para cada $m \geq 3$. Por lo tanto, por la Proposición 2.15, X es un arco o una curva cerrada simple. Pero, $F_2(I)$ es una 2-celda y $F_2(S^1)$ es una banda de Möbius, esto contradice que $F_n(X)$ es homeomorfo a S^2 .

Ahora probemos el caso para $SF_n(X)$. Sea X un continuo y supongamos que $SF_n(X)$ es homeomorfo a S^2 . Así, X es localmente conexo. $C(S^1)/F_1(S^1)$ es homeomorfo a S^2 (ver [19, en la prueba del Corolario 3.10]), por el Teorema 4.6, $n = 2$. Es claro que $\dim(X) = 1$. Por [7, Ejemplo 3.3, Lema 5.9], X no contiene m -odos simples, para cada $m \geq 3$. Así, por la Proposición 2.15, X es un arco o una curva cerrada simple. Por [7, Ejemplo 3.1], $SF_2(I)$ es homeomorfo a una 2-celda y $SF_2(S^1)$ es homeomorfo al plano proyectivo real, esto contradice que $SF_2(X)$ es homeomorfo a S^2 . Esto concluye la prueba del teorema. □

Teorema 5.2. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo. Si $n \geq 2$ y $n \neq 3$, entonces $F_n(X)$ y $SF_n(X)$ no son homeomorfos a S^m , para cada $2 \leq m \leq n$.*

Demostración. El resultado para $n = 2$, es por el Teorema 5.1.

Supongamos que $n > 3$ y $F_n(X)$ (o $SF_n(X)$) es homeomorfo a S^m , para algún $2 \leq m \leq n$. Entonces, $F_n(X)$ es localmente conexo. Por el Lema 2.30, X es localmente conexo. Así, por el Teorema 2.19, X es un continuo arco conexo. Sea α un arco en X y $x, y \in \alpha$ tales que $x \neq y$. Luego, existe una base de vecindades γ de $\{x, y\}$ en $F_n(X)$ (de $q_X(\{x, y\})$ en $SF_n(X)$, respectivamente) tal que para cada $V \in \gamma$, V no puede encajarse en \mathbb{R}^n (ver [2]). Pero, cada punto en S^m tiene una base de vecindades, cada una de las cuales se puede encajar en \mathbb{R}^n , esto es una contradicción. Esto prueba el teorema. □

Teorema 5.3. *Sea X un continuo. Los siguientes enunciados se cumplen:*

- (a) si $n = 1$, entonces $F_n(X)$ es homeomorfo a S^m si y sólo si X es homeomorfo a S^m ;
- (b) $F_n(X)$ es homeomorfo a S^m para algún $m \geq n$ si y sólo si o bien $n = 3$ o $n = 1$, y $X = S^1$.

Demostración. Por el Lema 2.20, X es homeomorfo a $F_1(X)$. Así, el inciso (a) se cumple.

Para probar (b), supongamos que $F_n(X)$ es homeomorfo a S^m , para algún $m \leq n$. Por el Teorema 5.2, $n = 1$ o $n = 3$. Si $n = 1$, entonces X es homeomorfo a S^1 . Si $n = 3$, por el Corolario 2.18, X es homeomorfo a S^1 .

Ahora supongamos que o bien $n = 3$ o $n = 1$, y $X = S^1$. Si $n = 1$, por (a), $F_1(X)$ es homeomorfo a S^1 . Si $n = 3$, por [4], $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 . Esto demuestra el teorema. \square

Teorema 5.4. [8, Lema 4.5] *Si T es un triodo simple, entonces $F_3(T)$ y $SF_3(T)$ no pueden ser encajados en \mathbb{R}^3 .*

De hecho, un resultado más general que se conoce actualmente es el siguiente:

Lema 5.5. [11, Lema 3.1] *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si T es un triodo simple, entonces $SF_n(T)$ no se puede encajar en \mathbb{R}^n .*

Teorema 5.6. [8, Lema 4.6] *Si X es homeomorfo a I o a S^1 , entonces $F_3(X)$ y $SF_3(X)$ no son homeomorfos.*

Teorema 5.7. *Si X es un continuo, entonces $SF_3(X)$ no es homeomorfo a S^3 .*

Demostración. Sea X un continuo y supongamos que $SF_3(X)$ es homeomorfo a S^3 . Como $SF_3(X)$ es localmente conexo, por el Teorema 3.17, X es localmente conexo. Por el Lema 5.5, X no contiene triodos simples, ya que cada punto en S^3 tiene una base de vecindades, γ , tal que para cada $V \in \gamma$, V se puede encajar en \mathbb{R}^3 . Así, X es un arco o una curva cerrada simple. Por el Lema 5.6, esto es una contradicción. \square

Corolario 5.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si X es un continuo, entonces $SF_n(X)$ no es homeomorfo a S^m , para cada $2 \leq m \leq n$.*

Demostración. Por el Teorema 5.2 y el Teorema 5.7, el corolario está demostrado. \square

6 Preguntas

Culminamos este capítulo enunciando algunas de las preguntas, sin responder, en el artículo *Spheres, symmetric products, and quotient of hyperspaces of continua*, véase [8], que los autores del mismo mencionan.

Pregunta 6.1. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. ¿Existe un continuo X y $n \geq 2$ tales que $F_n(X)$ es homeomorfo a S^m , para algún $m \geq 4$?

Pregunta 6.2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. ¿Existe un continuo X y $n, m \geq 2$ tales que $SF_m^n(X)$ es homeomorfo a S^m , para algún $m \in \mathbb{N}$?

Agradecimientos

Los autores agradecen a los arbitros su valioso tiempo dedicado a la revisión de este trabajo. Sus sugerencias dieron como resultado la culminación de este material.

Bibliografía

- [1] F. Barragán, *On the n -fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. 157 (2010), 597–604.
- [2] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875–882.
- [3] K. Borsuk, *On the third symmetric potency on the circumference*, Fund. Math. 36 (1949), 235—244..
- [4] R. Bott, *On the third symmetric potency of S^1* , Fund. Math. 39 (1952), 364–368.
- [5] Fidel Casarrubias-Segura y Ángel Tamariz-Mascarúa, *Elementos de topología general*, 2015.
- [6] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.

- [7] Castañeda-Alvarado E. and Sánchez-Martínez, J., “On the unicoherence of $F_n(X)$ and $SF_m^n(X)$ of continua”, *Topology Proc.*, 42 (2013), 309–326.
- [8] Castañeda-Alvarado E. and Sánchez-Martínez, J., “Spheres, symmetric products, and quotient of hyperspaces of continua”, *Tsukuba J. Math.*, 38 (2014), 75–84.
- [9] J. J. Charatonik, A. Illanes, “Local connectedness in hyperspaces”, *Rocky Mountain J. Math.*, 36 (2006), 811–856.
- [10] D. W. Curtis, N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to \mathfrak{N}_0 -dimensional linear metric spaces*, *Topology Appl.* 19 (1985), 251–260.
- [11] D. Herrera-Carrasco, A. Libreros-López, M. de J. López y F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique second and third symmetric product suspension*, *Topology Appl.*, 341 (2024) 108729.
- [12] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, *Journal of Mathematics Research* 4(4) (2012), 1–9.
- [13] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, 1948.
- [14] A. Illanes, *Models of hyperspaces*, *Topology Proc.* 41 (2013), 39–64.
- [15] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [16] H. Katsuura, *Characterization of arcs by products diagonals*, *Topology Proc.*, 62 (2024), 1–4.
- [17] M. Levin, Y. Sternfeld, *The space of subcontinua of a 2-dimensional continuum is infinitely dimensional*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125 (1997), 2771–2775.
- [18] S. Macías, *On symmetric products of continua*, *Topology Appl.* 92 (1999), 173–182.

- [19] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, *Topology Appl.* 138 (2004), 125–138.
- [20] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 275, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2005.
- [21] J. M. Martínez-Montejano, “Mutual Aposyndesis of Symmetric Products”, *Topology Proc.*, 24 (1999), 203–213
- [22] R. Molski, *On symmetric products*, *Fund. Math.*, 44 (1957), 165–170.
- [23] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [24] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [25] S. B. Nadler Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, *Houston J. Math.* 5 (1979), 125–132.
- [26] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.
- [27] M. Wojdysławski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, *Fundamenta Mathematicae*, 32 (1939), 184 – 192.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

leonardo.ramirezap@alumno.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

Capítulo 4

La propiedad de Kelley en el hiperespacio $C(X)$ y en niveles de Whitney pequeños

José Gerardo Ahuatzí Reyes, Norberto Ordoñez Ramírez,
Aurora Ríos Medina

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE
MÉXICO

Resumen

En este capítulo analizamos un ejemplo descrito por J. J. Charatonik y por W. J. Charatonik en [2], el cual tiene la propiedad de Kelley, y que muestra que la propiedad de Kelley no se induce al hiperespacio de subcontinuos ni a los niveles de Whitney pequeños de dicho hiperespacio.

1 Introducción

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Un hiperespacio de un continuo X es una colección específica de subconjuntos cerrados de X provista con la métrica de Hausdorff, que se denota por H .

Existen diversos hiperespacios que se han estudiado de forma exhaustiva, ya que su estructura aparece recurrentemente en los tópicos de la teoría de continuos. Entre ellos podemos mencionar al hiperespacio de subconjuntos cerrados y al hiperespacio de subcontinuos, los cuales son denotados por 2^X y $C(X)$, respectivamente.

En [6, Propiedad 3.2], se introduce lo que actualmente se conoce como la propiedad de Kelley. Este concepto, en sus inicios, era conocido como la Propiedad 3.2 y fue descrito por J. L. Kelley como sigue.

Definición 1.1. *Sea X un continuo con métrica d . Decimos que X tiene la propiedad de Kelley si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $a, b \in X$,*

$d(a, b) < \delta(\varepsilon)$ y A es un subcontinuo cualquiera de X con $a \in A$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$.

Desde su formulación, esta propiedad ha demostrado ser una herramienta valiosa, especialmente en el estudio de la contractilidad de espacios, como se aprecia en [6]. Con el paso del tiempo, una gran cantidad de autores ha mostrado interés por este concepto.

Por otra parte, un problema bastante recurrente e interesante en la topología general resulta de preguntarse si una propiedad topológica se induce o es inducida a los factores en el producto de espacios topológicos. En este sentido, en [9] se demuestra que si el producto de dos continuos posee la propiedad de Kelley, entonces cada espacio factor también tiene la propiedad de Kelley. Al contrario de lo que posiblemente la intuición nos sugeriría, el recíproco de esta proposición no es válido. De hecho, en el mismo artículo, se presenta un espacio con el que se prueba que esta implicación inversa es falsa. Dicho contraejemplo respondió de forma negativa a la primera de las siguientes dos preguntas y, de forma natural, motivó la segunda.

- (1) Si X es un continuo que tiene la propiedad de Kelley y Y es un continuo localmente conexo, entonces ¿el producto $X \times Y$ tiene la propiedad de Kelley? (véase [5, Pregunta 1]).
- (2) Si X es un continuo que tiene la propiedad de Kelley, entonces ¿el producto $X \times [0, 1]$ tiene la propiedad de Kelley? (véase [4, Problema 3.4]).

Así como estas dos, surgieron otras preguntas que están fuertemente relacionadas con esta línea de investigación, por ejemplo:

- (3) Si un continuo X tiene la propiedad de Kelley, ¿el hiperespacio de subcontinuos $C(X)$ necesariamente tiene la propiedad de Kelley? (véase [8, Preguntas 16.37]).
- (4) Si un continuo X tiene la propiedad de Kelley, ¿los niveles de Whitney para $C(X)$ tienen la propiedad de Kelley? (véase comentarios previos a [9, Sección IV]).

Respecto a estas últimas tres preguntas, en [2] se construye un espacio que las responde de forma negativa.

El propósito de este capítulo es analizar el ejemplo dado en [2] para comprobar que la propiedad de Kelley no se preserva en el hiperespacio de subcontinuos ni en los niveles de Whitney pequeños.

Es importante señalar que en este trabajo se justifican con detalle algunos argumentos que, siguiendo las demostraciones contenidas en el artículo en el que se publicaron originalmente, pueden resultar difíciles de realizar si no se cuenta con la experiencia suficiente en el tema. Por esta razón, este escrito puede ser de utilidad tanto para estudiantes como para investigadores, incluso para expertos en el área, considerando adicionalmente el gran interés que existe actualmente en torno a la propiedad de Kelley.

2 Preliminares

En esta sección mencionaremos conceptos y resultados básicos de la teoría de continuos e hiperespacios que utilizaremos durante el desarrollo de este trabajo. Algunos de estos resultados no los demostraremos, ya que se encuentran fuera del propósito de este escrito.

Definición 2.1. *Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto A de un continuo X es un **subcontinuo** de X si A es conexo, compacto y no vacío.*

A partir de ahora, cuando no haya posibilidad de confusión, la letra d denotará la métrica del continuo X , a menos que se indique lo contrario.

Dado un continuo X , los hiperespacios que serán de interés para este trabajo son los siguientes.

- (1) El **hiperespacio de subconjuntos cerrados** de X es

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

- (2) El **hiperespacio de subcontinuos** de X es

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

- (3) El **hiperespacio de los unipuntuales** de X es

$$F_1(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene un único elemento}\}.$$

Note que $F_1(X) \subset C(X) \subset 2^X$. De manera general, si Y es un subconjunto de X , denotamos por $C(Y)$ a la colección de subcontinuos de X contenidos en Y . La topología de estos hiperespacios es la inducida por la métrica de Hausdorff, la cual se define para 2^X como sigue.

Sea X un continuo. Para ε un número positivo y p un elemento de X , definimos la **bola de radio ε centrada en p** como

$$B(\varepsilon, p) = \{q \in X : d(p, q) < \varepsilon\}.$$

Adicionalmente, para $A \in 2^X$, definimos la **nube de radio ε centrada en A respecto a la métrica d** como

$$N_d(\varepsilon, A) = \{q \in X : \text{existe } x \in A \text{ tal que } d(x, q) < \varepsilon\}.$$

Cuando no haya posibilidad de confusión, escribiremos simplemente $N(\varepsilon, A)$ en lugar de $N_d(\varepsilon, A)$.

Teorema 2.2 ([3, Teorema 2.2]). *Sea X un continuo. Entonces, la función $H : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida para cualesquiera dos elementos A y B en 2^X como*

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\},$$

es una métrica para el hiperespacio 2^X , la cual es conocida como la métrica de Hausdorff.

El siguiente resultado nos proporciona un método para decidir cuándo dos subconjuntos cerrados de X son “cercaños”. Observe que la necesidad de la equivalencia del teorema es fácil de obtener y la suficiencia se puede consultar en [3, Ejercicio 2.9].

Teorema 2.3. *Sean X un continuo, A y B subconjuntos cerrados de X y $\varepsilon > 0$. Entonces, $H(A, B) < \varepsilon$ si y solo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

La propiedad de Kelley

Existen propiedades particulares que cumplen los continuos y que permiten estudiar su estructura topológica. Una de estas es la propiedad de Kelley, la cual fue introducida en 1942 por J. L. Kelley y originalmente se llamó

Propiedad 3.2. En la Definición 1.1, se menciona dicho concepto como aparece en [6, Propiedad 3.2]. Como podemos observar, esta definición es una condición que no depende de la elección del punto sobre el cual se aplica la propiedad. Al respecto, en 1977, R. Wardle introduce una definición de manera puntual de la propiedad de Kelley como se enuncia a continuación (véase el comienzo de la Sección II de [9]).

Definición 2.4. *Un continuo X tiene la propiedad de Kelley en $a \in X$ siempre que, para cada $\varepsilon > 0$, exista $\delta(a, \varepsilon) > 0$ tal que si $b \in X$, $d(a, b) < \delta(a, \varepsilon)$ y A es un subcontinuo cualquiera de X con $a \in A$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$.*

En términos de la Definición 2.4, un continuo X tiene la propiedad de Kelley si X tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos. En este sentido, el siguiente teorema nos proporciona una manera alternativa de enunciar la propiedad de Kelley de manera puntual (véase [3, Ejercicio 50.9]).

Teorema 2.5. *Sean X un continuo y a un elemento de X . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (i) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(a, \varepsilon) > 0$ tal que si $b \in X$, $d(a, b) < \delta(a, \varepsilon)$ y $A \in \mathcal{A}_a$ con A un subcontinuo de X , entonces existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$.*
- (ii) *Para cada subcontinuo K de X tal que $a \in K$ y cada sucesión de puntos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $\lim a_n = a$, existe una sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de X tal que $\lim K_n = K$ y $a_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

En ciertas ocasiones es bastante útil trabajar con la siguiente versión puntual de la propiedad de Kelley, la cual se tiene gracias al Teorema 2.5.

Definición 2.6. *Un continuo X tiene la propiedad de Kelley en $x \in X$ si, para cada subcontinuo K de X que contiene a x y cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en X que converge a x , existe una sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de X que convergen al continuo K y cumplen que $x_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

A lo largo del trabajo estaremos utilizando la Definición 2.4 o la Definición 2.6, según nos convenga.

Por [8, Ejemplo 16.11], sabemos que todo continuo localmente conexo tiene la propiedad de Kelley. El recíproco de esta afirmación no es verdadero; para esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n el segmento convexo en \mathbb{R}^2 que une al punto $(0, 0)$ con el punto $(1, \frac{1}{n})$ y sea $A = [0, 1] \times \{0\}$. Definimos el **abanico armónico** como (véase Figura 1)

$$X = A \cup \left(\bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \right).$$

No es difícil convencerse de que el abanico armónico es un continuo no localmente conexo que tiene la propiedad de Kelley.

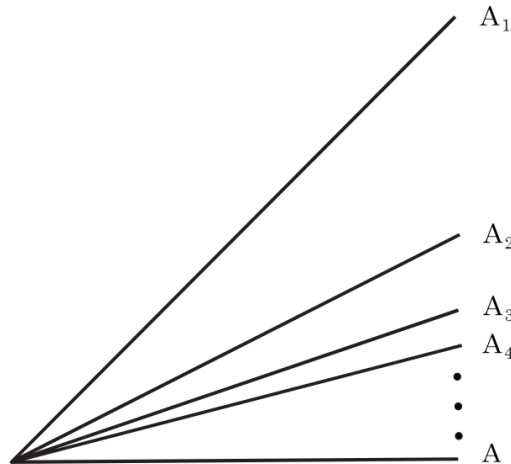


Figura 1: Abanico armónico.

Ejemplo 2.8. El **abanico armónico alargado** se define como el siguiente continuo en \mathbb{R}^2

$$Y = X \cup \{[1, 2] \times \{0\}\}$$

donde X es el abanico armónico definido en el Ejemplo 2.7 (véase Figura 2).

Observe que el abanico armónico alargado no cumple la propiedad de Kelley, pues para el punto $(1, 0)$, la sucesión $\{(1, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ y el subcontinuo $B = [1, 2] \times \{0\}$, es imposible encontrar una sucesión $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de Y tales que $(1, \frac{1}{n}) \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim B_n = B$.

Para finalizar esta subsección, mencionaremos un teorema que motiva uno de los resultados importantes de este capítulo. Su prueba se puede consultar en [9, Teorema 2.8].

Teorema 2.9. Sea X un continuo. Si $C(X)$ tiene la propiedad de Kelley, entonces X tiene la propiedad de Kelley.

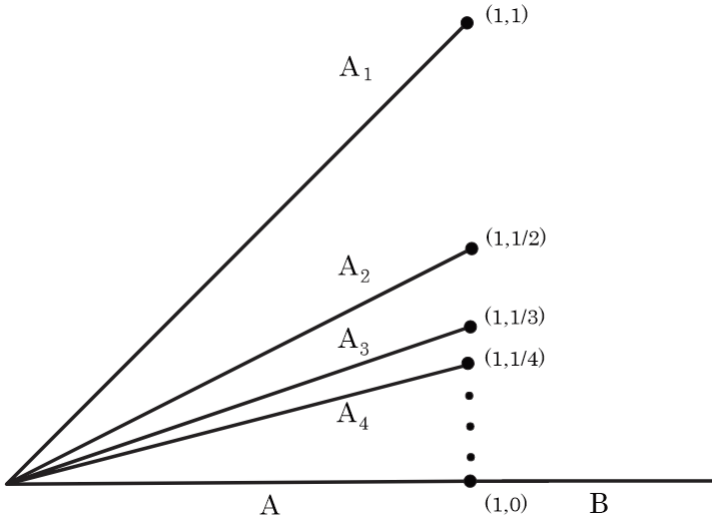


Figura 2: El continuo Y .

Niveles de Whitney

Las funciones de Whitney son una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X . Las necesitamos para definir los niveles de Whitney.

Definición 2.10. *Sea X un continuo. Una **función de Whitney** es una función continua $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

- $\mu(\{p\}) = 0$ para cada $p \in X$,
- $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$ con $A, B \in 2^X$.

El siguiente resultado garantiza la existencia de funciones de Whitney. La prueba se puede consultar en [3, Teorema 13.4].

Teorema 2.11. *Para cualquier continuo X , el hiperespacio 2^X admite funciones de Whitney.*

Una función de Whitney μ para $C(X)$ es la restricción a $C(X)$ de una función de Whitney ω para 2^X , es decir, $\mu = \omega|_{C(X)}$. Como $C(X)$ es compacto, podemos asumir que $\mu(X) = 1$. Con estas observaciones, a partir de este momento, vamos a considerar que las funciones de Whitney para $C(X)$ tienen como imagen el intervalo $[0, 1]$, con $\mu(X) = 1$.

Definición 2.12. Sea X un continuo. Un **nivel de Whitney** es cualquier conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$, donde $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney y $t \in [0, 1]$.

Podemos pensar a los niveles de Whitney como una manera de agrupar a los subcontinuos de un continuo X que tienen el mismo tamaño. Extendiendo esta idea, dado un subconjunto Y de X , un nivel de Whitney para $C(Y)$ es cualquier subespacio de $C(X)$ de la forma $C(Y) \cap \mu^{-1}(t)$.

Para las demostraciones de los Teoremas 4.1 y 5.1, construiremos algunas funciones con ayuda del siguiente concepto.

Definición 2.13. Sean X un continuo y $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$. Diremos que una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ es un **arco ordenado** de A a B en $C(X)$ si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ siempre que $0 \leq s < t \leq 1$.

El siguiente resultado garantiza la existencia de arcos ordenados y su prueba se puede consultar en [3, Teorema 14.6].

Teorema 2.14. Sea X un continuo. Si $A, B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.

Modelos de hiperespacios

Para finalizar los preliminares, obtendremos modelos para el hiperespacio de subcontinuos del rayo y para los niveles de Whitney del rayo. Usaremos esto en las pruebas de los Teoremas 4.1 y 5.1.

Para motivar las construcciones que necesitamos, recordemos que un modelo para $C([0, 1])$ es la región representada en la Figura 3, es decir, es el subespacio de \mathbb{R}^2 dado por

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Una prueba detallada de esto se puede ver en [3, Ejemplo 5.1].

Considere una compactación X del rayo $R = [0, \infty)$ cuyo residuo es S . Sean $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney y $t \in (0, 1)$.

Definimos las funciones $f : C(R) \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $m : \mu^{-1}(t) \cap C(R) \rightarrow [0, \infty)$ como

$$f([a, b]) = (a, b) \quad \text{y} \quad m([a, b]) = \frac{a+b}{2}.$$

Usando argumentos similares a los de las pruebas de [3, Ejemplo 5.1] y [8, Teorema 14.6], se sigue que f es un encaje y que m es un homeomorfismo. Note que la imagen de f es

$$T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b\}.$$

Observe que T es la región representada en la Figura 4.

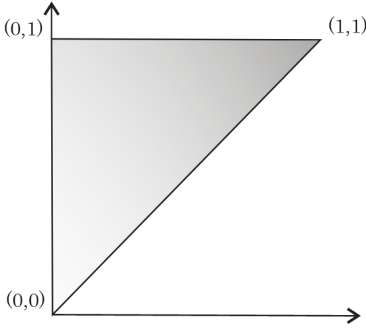


Figura 3: El hiperespacio $C([0, 1])$.

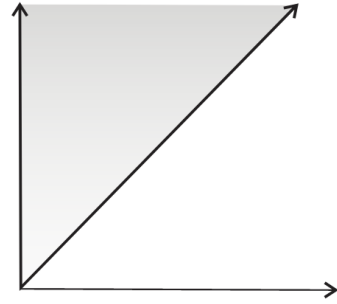


Figura 4: El hiperespacio $C([0, \infty))$.

Dados $z_0, w_0 \in [0, \infty)$ con $w_0 > z_0$, considere los conjuntos

$$\mathcal{H} = \{[z_0, q] \subset [0, \infty) : z_0 \leq q \leq w_0\} \text{ y}$$

$$\mathcal{I} = \{[p, w_0] \subset [0, \infty) : 0 \leq p \leq z_0\}.$$

Note que

$$f(\mathcal{H}) = \{(z_0, q) \in T : z_0 \leq q \leq w_0\} \text{ y}$$

$$f(\mathcal{I}) = \{(p, w_0) \in T : 0 \leq p \leq z_0\}.$$

En la Figura 5, se muestra una representación geométrica de estos conjuntos como subespacios de $C([0, 1])$. Esto se usará en la prueba del Teorema 4.1 (compare con la Figura 27).

3 Un ejemplo de W. J. Charatonik

En esta sección introducimos el continuo que se definió en [2] y que sirve para responder las preguntas (3) y (4) mencionadas en la introducción de este

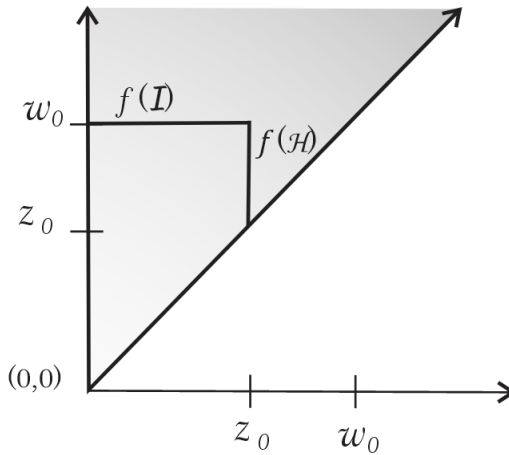


Figura 5: $f(\mathcal{H})$ y $f(\mathcal{I})$ como subespacios de $C([0, 1])$.

trabajo. En dicho artículo, J. J. Charatonik reconoce que la idea del ejemplo se debe completamente a W. J. Charatonik.

Consideremos la pareja ordenada (r, φ) en coordenadas polares. Sea S el círculo unitario, es decir, $S = \{(r, \varphi) : r = 1\}$. Sea $S_n = \left\{ (r, \varphi) : r = 1 + \frac{1}{2\pi n} \right\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por último, definimos las espirales

$$\Sigma_1 = \left\{ (r, \varphi) : r = 1 + \frac{1}{\varphi} \text{ con } \varphi \in [1, \infty) \right\} \quad \text{y}$$

$$\Sigma_2 = \left\{ (r, \varphi) : r = 1 - \frac{1}{\varphi} \text{ con } \varphi \in [1, \infty) \right\}.$$

Observe que Σ_1 y Σ_2 se acercan al círculo unitario S en sentido positivo, Σ_1 desde afuera y Σ_2 desde adentro, con respecto de la región delimitada por S .

Definimos el continuo Θ que nos interesa (véase Figura 6) como

$$\Theta = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup S \cup \bigcup \{S_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Denotemos por $\rho : \Theta \rightarrow S$ la proyección central definida por $\rho((r, \varphi)) = (1, \varphi)$ (véase Figura 7). Observe que ρ es continua.

Definición 3.1. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Definimos el diámetro de A como

$$\text{diám } A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

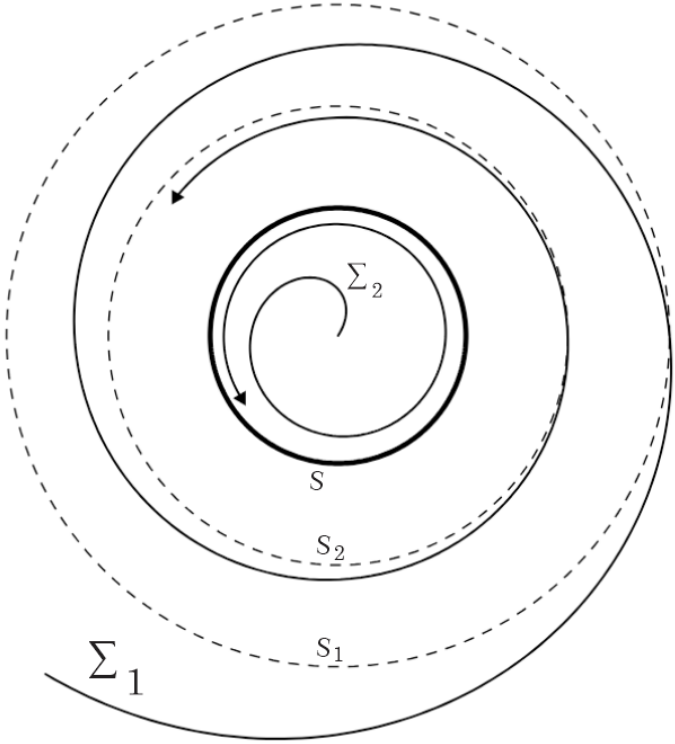


Figura 6: El continuo Θ .

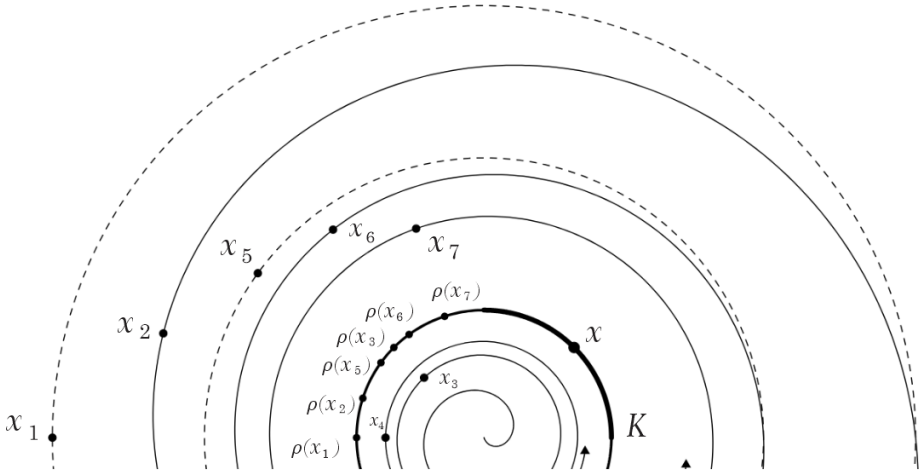


Figura 7: Proyección central de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposición 3.2. *El continuo Θ tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sea $x \in \Theta$. Veamos que Θ tiene la propiedad de Kelley en x . Como Θ es localmente conexo en cada punto de $\Theta \setminus S$, sabemos que Θ tiene la propiedad de Kelley en cada punto de $\Theta \setminus S$ (véase, por ejemplo, comentarios previos a [1, Teorema 3.2]). Así, podemos suponer que $x \in S$.

Consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en Θ tal que $\lim x_n = x$ y K un subcontinuo de Θ con $x \in K$. Veamos que existe una sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de Θ tal que $\lim K_n = K$ y $x_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que si $x_n \notin S$ solo para una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$, entonces los subcontinuos K_n existen porque S es localmente conexo. Podemos suponer entonces que existe una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \notin S$. Analizaremos dos casos.

Caso I. $K \subsetneq S$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\rho(x_n) \notin K$, considere P_n el arco de menor longitud en S con puntos extremos $\rho(x_n)$ y algún punto extremo q_n de K de tal forma que $P_n \cap K = \{q_n\}$ (véase Figura 8). Observe que solo puede existir una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales es posible elegir el arco P_n en más de una forma.

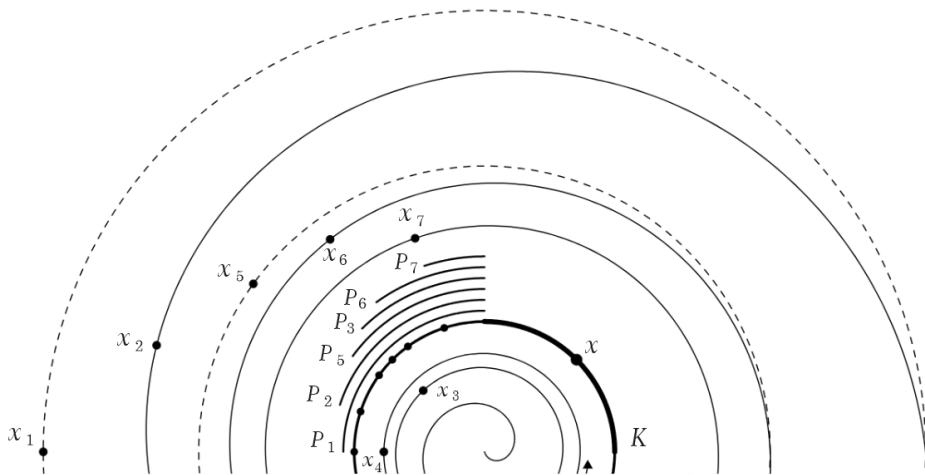


Figura 8: Arcos P_n en S que van de $\rho(x_n)$ a K .

Si $\rho(x_n) \in K$, considere $P_n = \{\rho(x_n)\}$. Como $\lim \rho(x_n) = \rho(x)$ y $\rho(x) = x \in K$, se tiene que $\lim \text{diám}(P_n) = 0$. Sea K_n la componente de $\rho^{-1}(K \cup P_n)$

que contiene a x_n . Note que si $x_n \in S$, entonces $K_n = K \cup P_n$. Además, $\lim \rho(K_n) = \lim K \cup P_n = K$. Sea $x_n = (r_n, \varphi_n)$. Luego, si $x_n \notin S$, existe $j_n \in \mathbb{N}$ tal que $1 + \frac{1}{2\pi(j_n+1)} < r_n \leq 1 + \frac{1}{2\pi j_n}$ o bien $1 - \frac{1}{2\pi(j_n+1)} > r_n \geq 1 - \frac{1}{2\pi j_n}$. Observe que $\rho(K_n) \not\subseteq S$. Así, para n suficientemente grande, se sigue que $K_n \subset N\left(\frac{1}{2\pi(j_n-1)}, S\right)$ si $x_n \notin S$, y que $K_n \subset S$ si $x_n \in S$. Como $\lim x_n = x$, se tiene que $\lim j_n = \infty$. Así, $\limsup K_n \subset S$.

Mostraremos que cualquier subsucesión convergente de $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a K . Considere una subsucesión $\{K_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la cual es convergente. Supongamos que $\lim K_{n_m} = \hat{K}$. Por el párrafo anterior, tenemos que $\hat{K} \subset S$. Así,

$$\hat{K} = \rho(\hat{K}) = \lim \rho(K_{n_m}) = \lim K \cup P_{n_m} = K.$$

Esto muestra que $\lim K_{n_m} = K$. Por lo tanto, $\lim K_n = K$ (véase Figura 9).

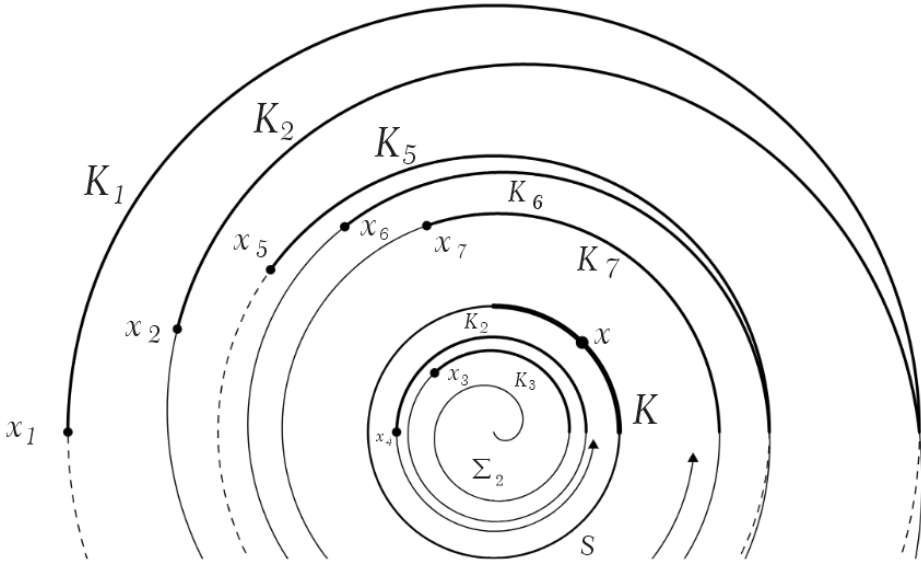


Figura 9: La sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde $\lim K_n = K$.

Caso II. $S \subset K$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $x_n \in S$, considere $K_n = K$. Por otro lado, si $x_n \notin S$, entonces existe una espiral Σ'_n que tiene a x_n como punto inicial y se aproxima a S . Observe que x_n puede estar en Σ_1, Σ_2 o en alguna circunferencia S_n , pero en cualquier caso existe dicha espiral (véase Figura 10).

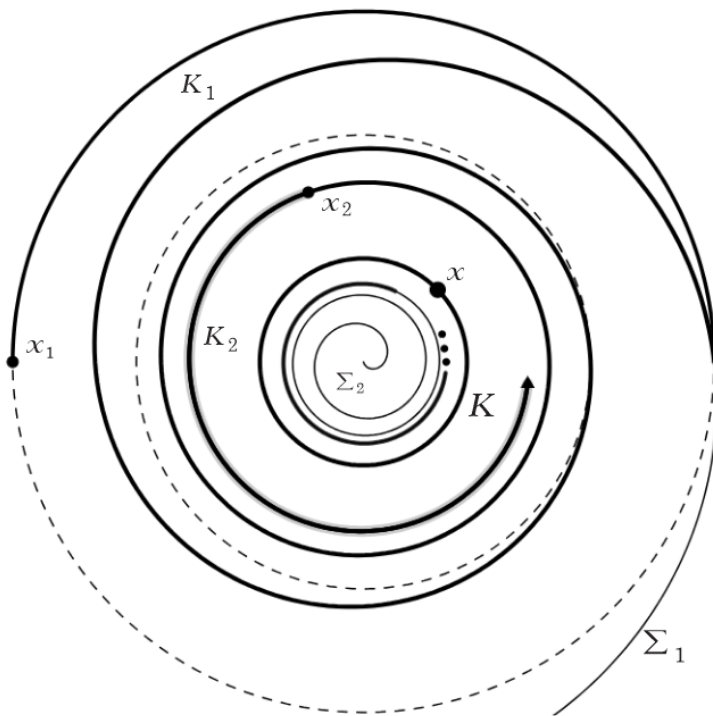


Figura 10: Ilustración cuando $x_1 \in S_1$ y cuando $x_2 \in \Sigma_1$.

Así, considere $K_n = K \cup \Sigma'_n$. Por la elección de los elementos de la sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos que $\lim K_n = K$.

Por los Casos I y II, podemos concluir que Θ tiene la propiedad de Kelley en x . Esto finaliza la prueba de esta proposición. \square

4 La propiedad de Kelley no se induce a $C(X)$

En esta sección vamos a mostrar que el hiperespacio $C(\Theta)$ no tiene la propiedad de Kelley, lo cual responde de forma negativa a la Pregunta (3) planteada en la introducción de este trabajo.

Teorema 4.1. *El hiperespacio $C(\Theta)$ no tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, sea

$$D_\alpha = \{(1, \varphi) \in \Theta : \varphi \in [\alpha, \alpha + \pi]\}.$$

Sea

$$\mathcal{A} = \{D_\alpha : \alpha \in [0, \pi]\}.$$

Note que D_α es un arco en el círculo S y \mathcal{A} es un arco en el hiperespacio $C(S)$ (véase Figura 11), puesto que la función que asigna a cada $D_\alpha \in \mathcal{A}$ el número α es un homeomorfismo de \mathcal{A} en $[0, \pi]$. Definimos

$$\mathcal{K} = \{Q \in C(\Theta \setminus \Sigma_2) : \rho(Q) \in \mathcal{A}\}.$$

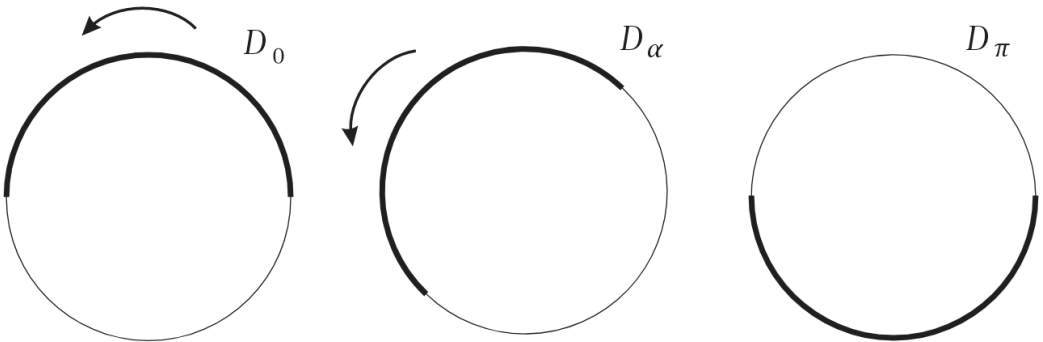


Figura 11: El arco \mathcal{A} en el hiperespacio $C(S)$, representado por algunos de sus elementos.

Observando la representación de los elementos de \mathcal{K} que se aprecia de la Figura 12 hasta la Figura 22, no es difícil convencerse de que \mathcal{K} es la unión del arco \mathcal{A} y un rayo contenido en $C(\Theta \setminus (\Sigma_2 \cup S))$ que se aproxima a \mathcal{A} .

Veamos que $C(\Theta)$ no tiene la propiedad de Kelley en ningún punto de \mathcal{A} . Sean $D_0 \in \mathcal{A}$ y $\{D'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subcontinuos de Θ contenidos en la espiral interna Σ_2 tal que $\lim D'_n = D_0$.

Mostraremos que no existe una sucesión $\{\mathcal{K}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de $C(\Theta)$ tal que su límite es \mathcal{K} y $D'_n \in \mathcal{K}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos, por el contrario, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subcontinuo \mathcal{K}_n de $C(\Theta)$ tal que $D'_n \in \mathcal{K}_n$ y de tal forma que $\lim \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$. Sea Q un punto en el rayo $\mathcal{K} - \mathcal{A}$. Note que $Q \cap (\Sigma_2 \cup S) = \emptyset$.

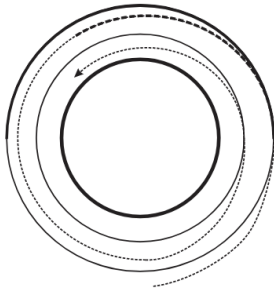


Figura 12: Ejemplo de un arco que pertenece a \mathcal{K} .

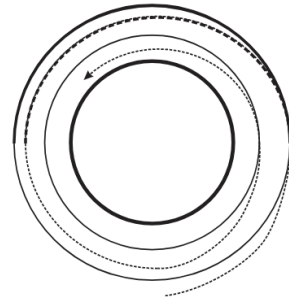


Figura 13: Crecemos sobre la espiral mientras la proyección sea D_0 .

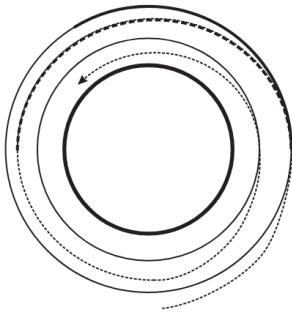


Figura 14: Decrecemos sobre el círculo manteniendo la proyección igual a D_0 .

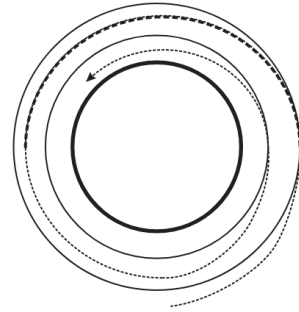


Figura 15: Decrecemos hasta obtener un arco en la espiral.

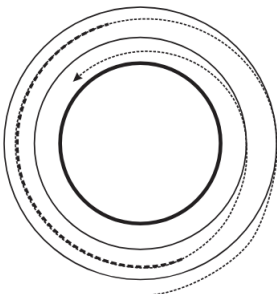


Figura 16: Rotamos sobre la espiral hasta que la proyección del arco sea D_π .

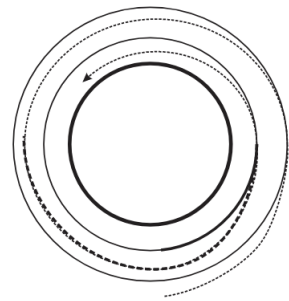


Figura 17: Crecemos sobre el círculo por el punto de intersección.

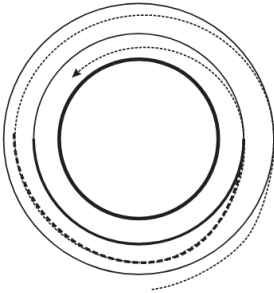


Figura 18: Crecemos sobre el círculo mientras la proyección sea D_π .

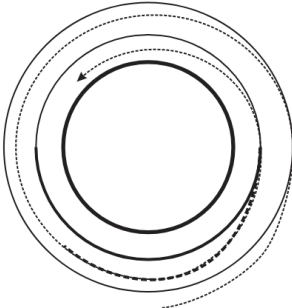


Figura 19: Decrecemos sobre la espiral manteniendo la proyección igual a D_π .

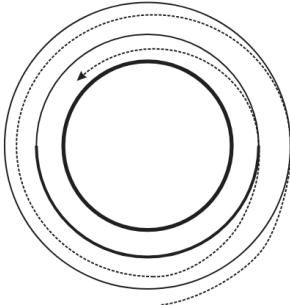


Figura 20: Decrecemos hasta obtener un arco en el círculo.

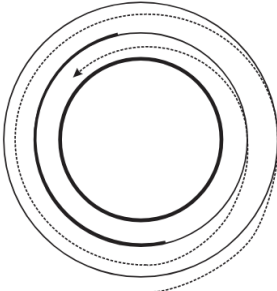


Figura 21: Rotamos sobre el círculo hasta que la proyección del arco sea D_0 .

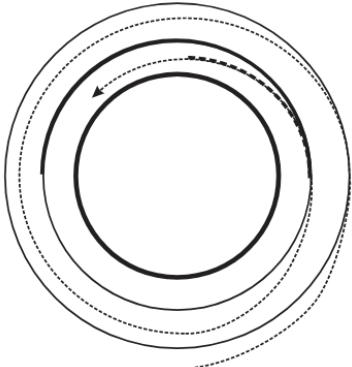


Figura 22: Seguimos el proceso anterior.

Considere la función inducida $\hat{\rho} : C(\Theta) \rightarrow C(S)$, dada por $\hat{\rho}(R) = \rho(R)$. Se sabe que $\hat{\rho}$ es continua (véase [3, Lema 13.3]). Como $\lim \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$ y $\lim \hat{\rho}(\mathcal{K}_n) = \hat{\rho}(\mathcal{K})$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$H_2(\mathcal{K}, \mathcal{K}_N) < \frac{1}{2} \text{dist}_H(Q, \mathcal{A}) \quad \text{y} \quad H_2(\hat{\rho}(\mathcal{K}), \hat{\rho}(\mathcal{K}_N)) < \frac{1}{2},$$

en donde H_2 es la métrica de Hausdorff para $C(C(\Theta))$ y $\text{dist}_H(Q, \mathcal{A}) = \inf \{H(Q, W) : W \in \mathcal{A}\}$.

Puesto que $\hat{\rho}(\mathcal{K}) = \mathcal{A}$, se tiene que $H_2(\mathcal{A}, \hat{\rho}(\mathcal{K}_N)) < \frac{1}{2}$. De esta forma, por el Teorema 2.3, $\hat{\rho}(\mathcal{K}_N) \subset N_H(\frac{1}{2}, \mathcal{A})$, es decir,

$$\mathcal{K}_N \subset \hat{\rho}^{-1}(N_H(\frac{1}{2}, \mathcal{A})).$$

Vamos a mostrar que $\mathcal{K}_N \cap (C(\Theta) - C(\Sigma_2)) \neq \emptyset$. Como $H_2(\mathcal{K}, \mathcal{K}_N) < \frac{1}{2} \text{dist}_H(Q, \mathcal{A})$, se tiene que $\mathcal{K} \subset N_H(\frac{1}{2} \text{dist}_H(Q, \mathcal{A}), \mathcal{K}_N)$; es decir, existe $Q' \in \mathcal{K}_N$ tal que $H(Q, Q') < \frac{1}{2} \text{dist}_H(Q, \mathcal{A})$. Sea $P \in \mathcal{A}$ tal que $H(Q, P) = \text{dist}_H(Q, \mathcal{A})$. Luego, $H(Q, Q') < \frac{1}{2}H(Q, P)$. Por el Teorema 2.3, se sigue que $Q \subset N(\frac{1}{2}H(Q, P), Q')$. Luego, dado cualquier $x \in Q$, existe $y_x \in Q'$ tal que $d(x, y_x) < \frac{1}{2}H(Q, P)$ y, por consiguiente, $2d(x, y_x) < H(Q, P)$.

Supongamos que $y_x \in \Sigma_2$ para cada $x \in Q$. Note que $d(x, \rho(x)) = \text{dist}_d(x, S)$. Además, como $x \notin S \cup \Sigma_2$, se sigue que $\text{dist}_d(x, S) < d(x, y_x)$. Así, $2d(x, \rho(x)) < H(Q, P) \leq H(Q, \hat{\rho}(Q))$. Por lo tanto, para toda $x \in Q$ se tiene que $d(x, \rho(x)) < r$, en donde $r = \frac{1}{2}H(Q, \hat{\rho}(Q)) > 0$. Por consiguiente, $Q \subset N(r, \hat{\rho}(Q))$ y $\hat{\rho}(Q) \subset N(r, Q)$; es decir, $H(Q, \hat{\rho}(Q)) \leq r$, lo cual es una contradicción.

El párrafo anterior muestra que existe $x \in Q$ tal que $y_x \notin \Sigma_2$. Como $y_x \in Q'$ y $Q' \in \mathcal{K}_N$ podemos concluir que

$$\mathcal{K}_N \cap (C(\Theta) - C(\Sigma_2)) \neq \emptyset.$$

En lo que resta de la demostración, comprobaremos que existe un conjunto \mathcal{L}_{z_0} que desconecta a $C(\Theta)$ y cuyo complemento contiene a \mathcal{K}_N .

Considere a Σ_2 con el orden inducido por $[0, \infty)$, en donde identificamos como 0 al extremo de Σ_2 . De esta forma, cualquier subcontinuo de Σ_2 se puede expresar como un intervalo $[a, b]$.

Dado $z \in \Sigma_2$, definimos el punto $z + 2\pi \in \Sigma_2$ como el primer punto que es mayor que z y es tal que $\rho(z) = \rho(z + 2\pi)$. Sea $\mathcal{L}_z = \mathcal{H}_z \cup \mathcal{I}_z$, en donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_z &= \{[z, z'] \subset \Sigma_2 : z \leq z' \leq z + 2\pi\} \text{ y} \\ \mathcal{I}_z &= \{[z', z + 2\pi] \subset \Sigma_2 : 0 \leq z' \leq z\}. \end{aligned}$$

Considere $z_0 \in \rho^{-1}\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que $z_0 > \max D'_N$. Veamos que la intersección de $\hat{\rho}(\mathcal{L}_{z_0})$ y $N_H\left(\frac{1}{2}, \mathcal{A}\right)$ es vacía. Sean $T \in \hat{\rho}(\mathcal{L}_{z_0})$ y $\alpha \in [0, \pi]$. Luego, $T = \hat{\rho}(E)$, para algún $E \in \mathcal{H}_{z_0} \cup \mathcal{I}_{z_0}$.

Vamos a probar que $H(T, D_\alpha) > \frac{1}{2}$ en todos los casos posibles.

Caso I. $E \in \mathcal{H}_{z_0}$.

En este caso $E = [z_0, z']$, para algún $z_0 \leq z' < z_0 + 2\pi$, y $\hat{\rho}(E) = \left[\left(1, \frac{3\pi}{2}\right), \rho(z')\right]$. Este último intervalo representa al arco en S que va de $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ a $\rho(z')$ en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Note que $(1, \pi) \in D_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, \pi]$. Supongamos que la longitud de arco de $\hat{\rho}(E)$ es menor o igual que π . Entonces, $\hat{\rho}(E) \subset \left[\left(1, \frac{3\pi}{2}\right), \left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Así, el punto más cercano a $(1, \pi)$ de $\hat{\rho}(E)$ es $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$. Dado que $d\left(\left(1, \pi\right), \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}$ se tiene que $H(\hat{\rho}(E), D_\alpha) \geq \sqrt{2} > \frac{1}{2}$ (véase Figura 23).

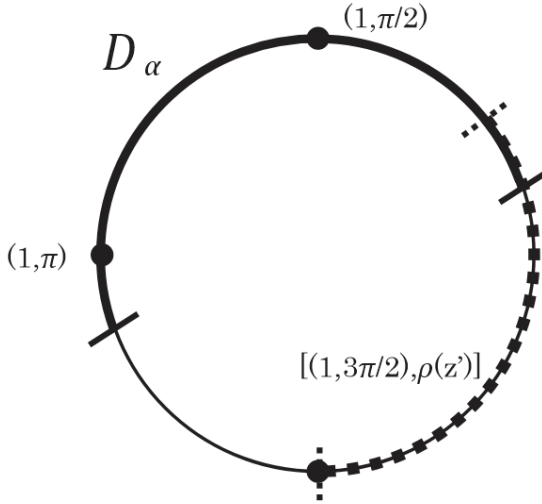


Figura 23: La longitud de $\hat{\rho}(E)$ es menor que π .

Supongamos que la longitud de arco $\hat{\rho}(E)$ es mayor que π . Si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, entonces $\left[\left(1, \frac{3\pi}{2}\right), (1, 0)\right] \cap D_\alpha \subset \left\{\left(1, \frac{3\pi}{2}\right), (1, 0)\right\}$ y, por tanto,

$$d\left(\left(1, \frac{7\pi}{4}\right), x\right) \geq d\left(\left(1, \frac{7\pi}{4}\right), \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$$

para cualquier $x \in D_\alpha$. Similarmente, si $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, entonces $\left[(1, 0), \left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right] \cap$

$D_\alpha \subset \left\{ \left(1, \frac{3\pi}{2}\right), (1, 0) \right\}$ y, por tanto,

$$d\left(\left(1, \frac{\pi}{4}\right), x\right) \geq d\left(\left(1, \frac{\pi}{4}\right), \left(1, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$$

para cualquier $x \in D_\alpha$. De esta manera, como $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(1, \frac{7\pi}{4}\right)$ son elementos de $\hat{\rho}(E)$, se sigue de lo anterior que $H(\hat{\rho}(E), D_\alpha) > \frac{1}{2}$ (véase Figuras 24 y 25).

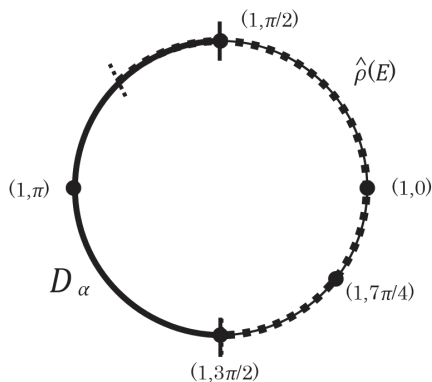


Figura 24: La longitud de $\hat{\rho}(E)$ es mayor que π y con $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

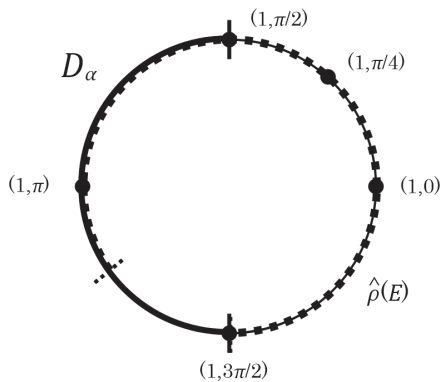


Figura 25: La longitud de $\hat{\rho}(E)$ es mayor que π y con $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Caso II. $E \in \mathcal{I}_{z_0}$.

Como $[z_0, z_0 + 2\pi] \subset E$ se tiene que $\hat{\rho}(E) = S$. Observe que $\left(1, \alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$ es el punto medio del arco complementario a D_α en S y, así $d\left(\left(1, \alpha + \frac{3\pi}{2}\right), x\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ para todo $x \in D_\alpha$. Dado que $\left(1, \alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \in \hat{\rho}(E)$, esto implica que $H(\hat{\rho}(E), D_\alpha) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$ (véase Figura 26).

Por lo tanto, de los Casos I y II, concluimos que la intersección de $\hat{\rho}(\mathcal{L}_{z_0})$ y $N_H\left(\frac{1}{2}, \mathcal{A}\right)$ es vacía. Así, \mathcal{L}_{z_0} y $\hat{\rho}^{-1}\left(N_H\left(\frac{1}{2}, \mathcal{A}\right)\right)$ son ajenos. En particular,

$$\mathcal{K}_N \cap \mathcal{L}_{z_0} = \emptyset.$$

Por otro lado, considere los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{[a, b] \subset \Sigma_2 : a \leq b < z_0 + 2\pi, a < z_0\} \text{ y} \\ \mathcal{V} &= \{[a, b] \subset \Sigma_2 : z_0 < a \leq b \text{ o } z_0 + 2\pi < b\} \cup (C(\Theta) - C(\Sigma_2)) \end{aligned}$$

Observe que $C(\Theta) - \mathcal{L}_{z_0} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Del modelo de $C([0, 1])$ descrito en la subsección Modelos de hiperespacios, se sigue que $\text{cl}_{C(\Theta)} \mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \mathcal{L}_{z_0}$ y

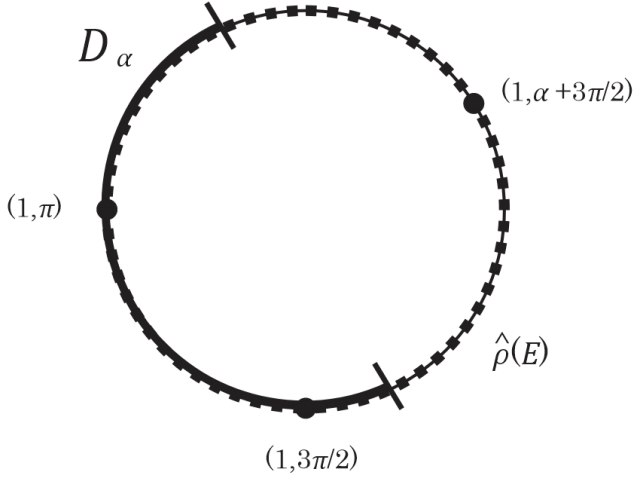


Figura 26: $E \in \mathcal{I}$.

$\text{cl}_{C(\Theta)} \mathcal{V} = \mathcal{V} \cup \mathcal{L}_{z_0}$. Luego, $\mathcal{U} = C(\Theta) - \text{cl}_{C(\Theta)} \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} = C(\Theta) - \text{cl}_{C(\Theta)} \mathcal{U}$. Por lo tanto, \mathcal{U} y \mathcal{V} son abiertos en $C(\Theta)$ y ajenos (véase Figura 27).

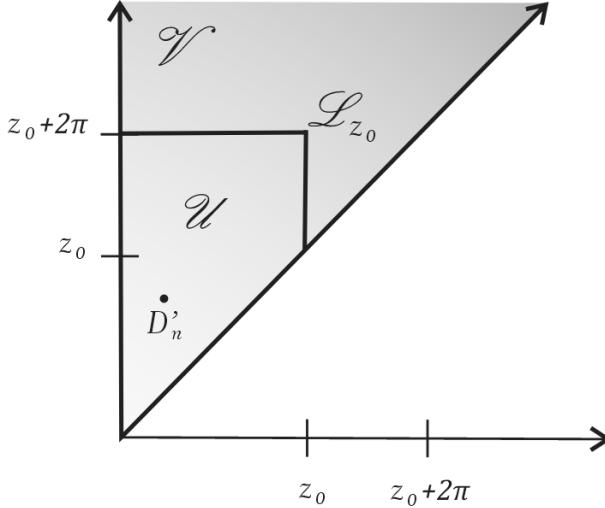


Figura 27: Representación de \mathcal{L}_{z_0} , \mathcal{U} y parte de \mathcal{V} .

Como $D'_N \in \mathcal{U} \cap \mathcal{K}_N$ y $\emptyset \neq \mathcal{K}_N \cap (C(\Theta) - C(\Sigma_2)) \subset \mathcal{K}_N \cap \mathcal{V}$ se tiene que \mathcal{K}_N es disconexo, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $C(\Theta)$ no tiene la propiedad de Kelley. \square

Del Teorema 4.1 se tiene de forma inmediata el siguiente corolario, el cual responde en forma negativa a la Pregunta (3).

Corolario 4.2. *Si un continuo Y tiene la propiedad de Kelley, entonces el hiperespacio $C(Y)$ no necesariamente tiene la propiedad de Kelley.*

5 La propiedad de Kelley no se preserva a los niveles de Whitney

En esta sección vamos a mostrar que los niveles de Whitney pequeños de $C(\Theta)$ no tienen la propiedad de Kelley, lo cual responde de forma negativa a la Pregunta (4) planteada en la introducción de este trabajo.

Teorema 5.1. *Para cada función de Whitney $\mu : C(\Theta) \rightarrow [0, \infty)$ y cada $t \in (0, \mu(S))$, el nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ no tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$, considere el conjunto

$$D_\alpha^\beta = \{(1, \theta) \in \Theta : \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Recordemos que en la prueba del Teorema 4.1 se definió, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$D_\alpha = \{(1, \varphi) \in \Theta : \varphi \in [\alpha, \alpha + \pi]\}.$$

Note que tanto D_α^β como D_α son subcontinuos de S .

Sea $\mu : C(\Theta) \rightarrow [0, \infty)$ una función de Whitney. Fijemos $t \in (0, \mu(S))$. Vamos a demostrar que $\mu^{-1}(t)$ no tiene la propiedad de Kelley; para esto, desarrollaremos ideas similares a las de la prueba del Teorema 4.1. Para este propósito, considere

$$\mathcal{A} = \{B \in \mu^{-1}(t) \cap C(S) : B = D_\alpha^\beta \text{ para algunos } \alpha \text{ y } \beta \text{ con } 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi\}.$$

Note que \mathcal{A} es un arco, puesto que la función que asigna a cada $D_\alpha^\beta \in \mathcal{A}$ el número α es un encaje de \mathcal{A} en $[0, 2\pi]$. Además, cada elemento de \mathcal{A} es un arco contenido en S .

Sea γ_0 el único elemento de $(0, \pi)$ que cumple que el conjunto $B_0 = D_{2\pi-\gamma_0}^{2\pi+\gamma_0}$ es elemento de $\mu^{-1}(t) \cap C(S)$. Sea

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \text{dist}_H(B_0, \mathcal{A}).$$

Puesto que $B_0 \notin \mathcal{A}$, se tiene que $\varepsilon_1 > 0$. Además, dado cualquier $A \in C(\Theta - \Sigma_2)$, consideremos

$$\text{rad}(A) = \text{máx}\{r : (r, \theta) \in A \text{ para algún } \theta\}.$$

Usaremos también la función inducida $\hat{\rho}$ y la función dist descritas en la prueba del Teorema 4.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{R}_n = \left\{ A \in \mu^{-1}(t) \cap C(\Theta - \Sigma_2) : \text{rad}(A) \leq 1 + \frac{1}{2\pi n} \text{ y } \rho(A) = D_\alpha^\beta \right. \\ \left. \text{para algunos } \alpha \text{ y } \beta \text{ con } 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi \right\}.$$

Observe que \mathcal{R}_n es una compactación del rayo con residuo \mathcal{A} para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim \mathcal{R}_n = \mathcal{A}$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{R}_{n_0} \subset N_H(\varepsilon_1, \mathcal{A})$. Renombremos $\mathcal{K} = \mathcal{R}_{n_0}$. Sea $\varepsilon_2 > 0$ tal que $N_H(\varepsilon_2, \mathcal{K}) \subset N_H(\varepsilon_1, \mathcal{A})$.

Sea β el único elemento de $(0, 2\pi)$ tal que el conjunto $D_0 = D_0^\beta$ es elemento de \mathcal{A} . Sea $\{D'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mu^{-1}(t) \cap C(\Sigma_2)$ tal que $\lim D'_n = D_0$.

Supongamos que existe una sucesión $\{\mathcal{K}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de $\mu^{-1}(t)$ tal que $\lim \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$ y $D'_n \in \mathcal{K}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea Q un punto en el rayo $\mathcal{K} - \mathcal{A}$. Como $\lim \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$H_2(\mathcal{K}_N, \mathcal{K}) < \frac{1}{2} \text{mín}\{\text{dist}_H(Q, \mathcal{A}), \varepsilon_2\}.$$

Aplicando argumentos similares a los usados en la prueba del Teorema 4.1, se puede probar que

$$\mathcal{K}_N \cap (C(\Theta) - C(\Sigma_2)) \neq \emptyset.$$

Por otro lado,

$$\mathcal{K}_N \subset N_H(\varepsilon_2, \mathcal{K}) \subset N_H(\varepsilon_1, \mathcal{A}).$$

En lo que sigue, mostraremos que existe un subcontinuo L_m de Θ que desconecta a $\mu^{-1}(t)$ y que cumple que el complemento de $\{L_m\}$ en $\mu^{-1}(t)$ contiene a \mathcal{K}_N .

Considere a Σ_2 con el orden inducido por $[0, \infty)$, en donde identificamos como 0 al extremo de Σ_2 . De esta manera, cualquier subcontinuo de Σ_2 se puede expresar como un intervalo $[a, b]$.

Definamos $z_n = (1 - \frac{1}{2\pi n}, 2\pi n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. Observe que $z_n \in \Sigma_2$ y $\rho(z_n) = (1, 0)$. Sea γ_n el único número positivo tal que el arco de Σ_2 dado por

$$L_n = \left[\left(1 - \frac{1}{2\pi n - \gamma_n}, 2\pi n - \gamma_n \right), \left(1 - \frac{1}{2\pi n + \gamma_n}, 2\pi n + \gamma_n \right) \right]$$

cumple que $\mu(L_n) = t$. Note que $\lim L_n = B_0$ y $z_n \in L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $z_m > \max D'_N$ y $H(L_m, B_0) < \varepsilon_1$. Supongamos que $L_m \in N_H(\varepsilon_1, \mathcal{A})$. Entonces, $H(L_m, B) < \varepsilon_1$ para algún $B \in \mathcal{A}$ y, así, $H(B_0, B) \leq H(L_m, B_0) + H(L_m, B) < 2\varepsilon_1$. Por tanto, $\text{dist}_H(B_0, \mathcal{A}) < 2\varepsilon_1$. Como esto contradice la elección de ε_1 , concluimos que $L_m \notin N_H(\varepsilon_1, \mathcal{A})$.

Por otro lado, considere los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \left\{ A \in \mu^{-1}(t) \cap C(\Sigma_2) : A = \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}, \alpha \right), \left(1 - \frac{1}{\beta}, \beta \right) \right] \text{ para algunos} \right. \\ \left. \alpha \text{ y } \beta \text{ con } \alpha < 2\pi m - \gamma_m \right\} \text{ y} \\ \mathcal{V} = \left\{ A \in \mu^{-1}(t) \cap C(\Sigma_2) : A = \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}, \alpha \right), \left(1 - \frac{1}{\beta}, \beta \right) \right] \text{ para algunos} \right. \\ \left. \alpha \text{ y } \beta \text{ con } 2\pi m - \gamma_m < \alpha \right\} \cup (\mu^{-1}(t) \cap (C(\Theta) - C(\Sigma_2))). \end{aligned}$$

Observe que $\mu^{-1}(t) - \{L_m\} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Del modelo de los niveles de Whitney de $C([0, 1])$ descrito en la subsección Modelos de hiperespacios, se sigue que $\text{cl}_{\mu^{-1}(t)} \mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \{L_m\}$ y $\text{cl}_{\mu^{-1}(t)} \mathcal{V} = \mathcal{V} \cup \{L_m\}$. Luego, $\mathcal{U} = \mu^{-1}(t) - \text{cl}_{\mu^{-1}(t)} \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} = \mu^{-1}(t) - \text{cl}_{\mu^{-1}(t)} \mathcal{U}$. Por lo tanto, \mathcal{U} y \mathcal{V} son abiertos en $\mu^{-1}(t)$ y ajenos. Como $D'_N \in \mathcal{U} \cap \mathcal{K}_N$ y $\emptyset \neq \mathcal{K}_N \cap (C(\Theta) - C(\Sigma_2)) \subset \mathcal{K}_N \cap \mathcal{V}$, se sigue que \mathcal{K}_N es disconexo, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ no tiene la propiedad de Kelley. □

Como una observación adicional al Teorema 5.1, dada cualquier función de Whitney $\mu : C(\Theta) \rightarrow [0, \infty)$, no es difícil convencerse de que el nivel $\mu^{-1}(t)$ es localmente conexo para cualquier $t \in [\mu(S), 1]$. Por tanto, por [8, Ejemplo 16.11], $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad de Kelley para cualquier $t \in [\mu(S), 1]$.

Del Teorema 5.1 se tiene el siguiente corolario, el cual responde en forma negativa a la Pregunta (4).

Corolario 5.2. *Si un continuo Y tiene la propiedad de Kelley, entonces los niveles de Whitney de $C(Y)$ no necesariamente tienen la propiedad de Kelley.*

Para finalizar este capítulo, y considerando las características del contraejemplo analizado, proponemos la siguiente pregunta.

Pregunta. ¿Existen un continuo X y una función de Whitney $\mu : C(X) \rightarrow [0, 1]$ tales que X tiene la propiedad de Kelley, pero para cada $t \in (0, 1)$ se cumple que $\mu^{-1}(t)$ no tiene la propiedad de Kelley?

Bibliografía

- [1] G. Acosta y A. Aguilar-Martínez, A note on the paper “Smoothness and the property of Kelley”. *Comment. Math. Univ. Carol.*, 48(4): 669-676, 2007.
- [2] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, Property of Kelley for the cartesian products and hyperspaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 136(1): 341-346, 2008.
- [3] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, M. Dekker, New York and Basel, 1999.
- [4] H. Kato, A note on continuous mappings and the property of J. L. Kelley, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 112(4): 1143-1148, 1991.
- [5] H. Kato, On the property of Kelley in the hyperspace and Whitney continua, *Topology Appl.*, 30(2): 165-174, 1988.
- [6] J. L. Kelley, Hyperspaces of a continuum, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 52(1): 22-36, 1942.
- [7] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, M. Dekker, New York and Basel, 1992.
- [8] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, M. Dekker, New York and Basel, 1978.
- [9] R. W. Wardle, On a property of J. L. Kelley, *Houston J. Math.*, 3: 291-299, 1977.

Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México,
Instituto Literario No. 100, Colonia Centro,
Toluca, Estado de México, C.P. 50000.

jgahuatzi@gmail.com

nordonezr@uaemex.mx

ariosm005@alumno.uaemex.mx

Capítulo 5

Embedding theorem

David Herrera Carrasco¹, Fernando Macías Romero¹,
Eiichi Matsushashi², and José Alberto Ortega Becerril¹
FCFM-BUAP¹, Shimane University²

Resumen

This chapter covers the basic concepts of Continuum Theory, Nested Intersections, Inverse Limits, and the Embedding Theorem. However, we emphasize the conditions for the embeddability of an inverse limit in \mathbb{R}^{2n} . The results are from R. Isbell [2].

1 Introduction

We denote the real line by \mathbb{R} and we consider the metric space as a non-empty set X equipped with a metric d . A *continuum* is a nonempty, connected compact metric space. A *subcontinuum* is a continuum that is a subset of a space. We will always consider our continua to be nondegenerate; the term means the space consists of more than one point. We shall introduce the term nested intersection for our goal. Then, we first need to establish the following two results.

Definition 1.1. *A continuum X is said to be decomposable if X can be written as the union of two proper subcontinua. A continuum that cannot be decomposed is called indecomposable.*

Proposition 1.2. *Let $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a sequence of compact metric spaces such that $X_{i+1} \subset X_i$ for each $i = 1, 2, \dots$, and let*

$$X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

If U is a open subset of X_1 such that $X \subset U$, then there exists N such that

$$X_i \subset U \text{ for all } i \geq N$$

In particular: If each $X_i \neq \emptyset$, then $X \neq \emptyset$ (and, clearly, compact metric).

Demostración. Suppose that for each $i = 1, 2, \dots$, there exists $x_i \in X_i \setminus U$; note that $x_i \in X_1$ by hypothesis. Since $X_1 \setminus U$ is a compact metric space, we may assume that the sequence $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ converges to some point $p \in X_1 \setminus U$. For each k , $x_i \in X_k$ for all $i \geq k$. Hence, $p \in X_k$ for each k . Thus, $p \in X$, which, since $p \notin U$, contradicts our assumption that $X \subset U$. This proves the first assumption. Now, suppose that $X = \emptyset$. we can consider $U = \emptyset$; then for the first part, there is N such that $X_i \subset U$ for each $i \geq N$, but this fact implies that $X_N = \emptyset$, which contradicts the hypothesis. \square

Theorem 1.3. Let $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ be a sequence of continua such that $X_{i+1} \subset X_i$ for each $i = 1, 2, \dots$, and let

$$X = \bigcap_{i=1}^\infty X_i$$

Then, X is a continuum.

Demostración. By 1.2, X is a nonempty, compact metric space. Now suppose X is not connected. Then $X = A \cup B$ where A and B are closed of X , nonempty, disjoint sets. Since X_1 is a nonempty metric space, then X_1 is a normal space, there are disjoint open sets V and W of X_1 such that $A \subset V$ and $B \subset W$. Let $U = V \cup W$, Then, by 1.2, $X_N \subset U$ for some N , hence

$$X_N = (X_N \cap V) \cup (X_N \cap W)$$

But $X = A \cup B$ and $X \subset X_N$, and since $A \neq \emptyset$ and $B \neq \emptyset$ then $X_N \cap V \neq \emptyset$ and $X_N \cap W \neq \emptyset$. However, this fact contradicts that X_N is connected \square

Now we shall discuss the inverse limit. We note that inverse limits may be a special case of nested intersections. First, we will define Cartesian products, since inverse limits are defined as subsets of Cartesian products. For the purpose, we are concerned with finite and countable cartesian products. The *Cartesian Product* of spaces $X_i, i = 1, 2, \dots$, or $1 \leq i \leq n < \infty$ is the space of

all sequences $(x_i)_{i=1}^\infty$ or, respectively, finite sequences $(x_i)_{i=1}^n$, where $x_i \in X_i$ for each i , with the *product topology* denoted by

$$\prod_{i=1}^\infty X_i \text{ or, respectively, by } \prod_{i=1}^n X_i$$

we always assume a Cartesian product has the product topology unless otherwise stated. We also assume the Axiom of Choice. Note the following theorem

Theorem 1.4. *The finite or countable Cartesian product of continua, or of nonempty compact metric spaces, is a continuum or a nonempty compact metric space, respectively.*

Demostración. The product space is compact by Theorem 4 of [[4], p. 17], connected by Theorem 11 of [[4], p. 137], and metrizable by [[3], p. 212-213]. In the finite case, it is nonempty and, in the countably finite case, it is nonempty by the Countable Axiom of Choice [[6], p. 20]. □

2 Inverse limits

Definition 2.1. *An inverse sequence is a double sequence $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ of spaces X_i , called coordinate spaces, and continuous functions $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$, called bonding functions. If $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ is an inverse sequence, then the inverse limit is*

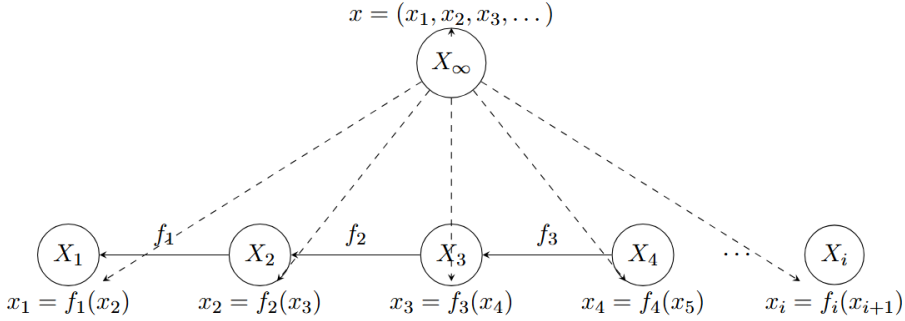
$$\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty := \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ for each } i \right\} = X_\infty.$$

Proposition 2.2. *Let $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ be an inverse sequence of continua. For each $n = 1, 2, \dots$, define*

$$Q_n(X_i, f_i) := \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ for all } i \leq n \right\}.$$

Then (1)-(3) hold:

- (1) $Q_{n+1}(X_i, f_i) \subset Q_n(X_i, f_i)$ for each $n = 1, 2, \dots$,



(2) $Q_n(X_i, f_i)$ is homeomorphic to $\prod_{i=n+1}^\infty X_i$ for each $n = 1, 2, \dots$,

(3) $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty = \bigcap_{n=1}^\infty Q_n(X_i, f_i)$.

Demostración. One can convince themselves that (1) and (3) are immediate, so we will only prove (2). Fix $n \in \mathbb{N}$ and define

$$h : Q_n(X_i, f_i) \rightarrow \prod_{i=n+1}^\infty X_i \quad \text{as} \quad h((x_i)_{i=1}^\infty) = (x_i)_{i=n+1}^\infty$$

for each $(x_i)_{i=1}^\infty \in Q_n(X_i, f_i)$.

First, let us show that the function is injective. Let $x, y \in Q_n(X_i, f_i)$ such that $x \neq y$. Since $x = (x_i)_{i=1}^\infty$ and $y = (y_i)_{i=1}^\infty$, there exists i_0 such that $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Then

$$h((x_i)_{i=1}^\infty) = (x_i)_{i=n+1}^\infty \quad \text{and} \quad h((y_i)_{i=1}^\infty) = (y_i)_{i=n+1}^\infty.$$

Thus, we have two cases:

1. Suppose $i_0 \geq n$. In this case, it is immediate that $(x_i)_{i=n+1}^\infty \neq (y_i)_{i=n+1}^\infty$, and therefore $h(x) \neq h(y)$.
2. Suppose $i_0 < n$. Recall that $x, y \in Q_n(X_i, f_i)$, so

$$x_{i_0} = f_{i_0}(x_{i_0+1}) \quad \text{and} \quad y_{i_0} = f_{i_0}(y_{i_0+1}).$$

Without loss of generality, assume $i_0 + 1 = n$. If $(x_i)_{i=n+1}^\infty = (y_i)_{i=n+1}^\infty$, then $x_i = y_i$ for all $i > n$, so

$$x_n = f_n(x_{n+1}) = f_n(y_{n+1}) = y_n,$$

or equivalently, $x_{i_0+1} = y_{i_0+1}$. But this implies

$$x_{i_0} = f_{i_0}(x_{i_0+1}) = f_{i_0}(y_{i_0+1}) = y_{i_0},$$

which is a contradiction. Thus, $h(x) \neq h(y)$.

For surjectivity, let $x \in \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$, that is, $x = (x_i)_{i=n+1}^{\infty}$. We want to show that there exists $y \in Q_n(X_i, f_i)$ such that $h(y) = x$. Define

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{if } i \geq n+1, \\ f_n(x_{n+1}) & \text{if } i = n, \\ f_i(y_{i+1}) & \text{if } i < n. \end{cases}$$

Then $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i)$, and moreover, $h(y) = x$.

For continuity, let $x \in Q_n$ and U be an open set in $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ such that $h(x) \in U$. Then there exist open sets $U_{n+1}, U_{n+2}, \dots, U_{n+k}$ in X_{n+i} for $i = 1, 2, \dots, k$ such that

$$h(x) \in U_{n+1} \times U_{n+2} \times \dots \times U_{n+k} \times \prod_{i=n+k+1}^{\infty} X_i \subset U.$$

Let

$$V = Q_n(X_i, f_i) \cap X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \times U_{n+1} \times U_{n+2} \times \dots \times U_{n+k} \times \prod_{i=n+k+1}^{\infty} X_i.$$

Note that $x \in V$ and $h(V) \subset U$. Thus, h is continuous. Finally, note that $Q_n(X_i, f_i)$ is compact by Theorem 1.5.4 of [[1], p. 38]), so h is a homeomorphism. \square

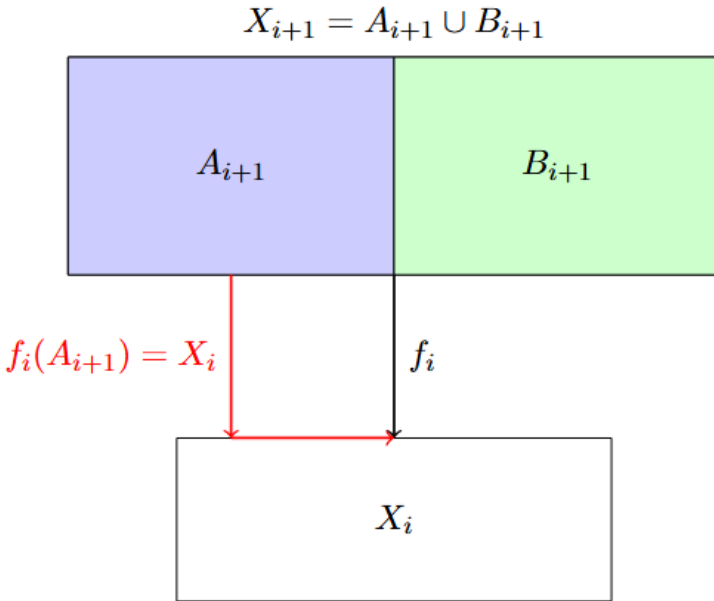
From this result, the following theorem is a consequence of a previous result.

Theorem 2.3. *An inverse limit of continua is a continuum.*

Demostración. Using item (2) of 2.2 and 1.4, and applying item (3) of 2.2 together with Theorem 1.3, we conclude the proof. \square

3 Indecomposable Continua of Inverse Limits

Definition 3.1. An inverse sequence $\{X_i, f_i\}$, where each X_i is a continuum, is called an **indecomposable inverse sequence** if for each $i = 1, 2, \dots$, and for any subcontinua A_{i+1} and B_{i+1} of X_{i+1} such that $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$, it holds that $X_i = f_i(A_{i+1})$ or $f_i(B_{i+1}) = X_i$.



Lemma 3.2. Let $\{X_i, f_i\}$ be an inverse sequence of metric spaces with inverse limit $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$. For each $i = 1, 2, \dots$, let $\pi_i : X_\infty \rightarrow X_i$ be the i -th projection. Let A be a compact subset of X_∞ . Then $\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^\infty$ is an inverse sequence with onto bonding functions, and

$$(1) \quad \varprojlim \{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^\infty = A = \left[\prod_{i=1}^\infty \pi_i(A) \right] \cap X_\infty.$$

Demostración. First, note that $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$ for all $i = 1, 2, \dots$. Therefore, $\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^\infty$ is an inverse sequence. Also, observe that

$$\varprojlim \{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^\infty = \left[\prod_{i=1}^\infty \pi_i(A) \right] \cap X_\infty \text{ and } A \subset \left[\prod_{i=1}^\infty \pi_i(A) \right] \cap X_\infty.$$

Thus, to prove (1), it suffices to show that

$$\left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty} \subset A$$

Let $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}$. For each $j = 1, 2, \dots$, define

$$K_j = A \cap \pi_j^{-1}(y_j).$$

Directly we can see that each $K_j \neq \emptyset$. Moreover, by the continuity of the projections and the compactness of A , each K_j is compact. Finally, note that $K_{j+1} \subset K_j$. Let $x \in \pi_{j+1}^{-1}(y_{j+1})$. Then $\pi_{j+1}(x) = y_{j+1}$, so

$$f_j(\pi_{j+1}(x)) = f_j(y_{j+1}) = y_j.$$

On the other hand, $f_j(\pi_{j+1}(x)) = \pi_j(x)$. Therefore, $x \in \pi_j^{-1}(y_j)$. By these properties of the sets K_j , we have

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset.$$

Let $p \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$. Then, $p \in A$, and the j -th coordinate of p must be y_j for all $j = 1, 2, \dots$. Thus, $p = y$, which implies $y \in A$. □

Proposition 3.3. *If $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ is an inverse sequence of non-empty spaces with onto bonding functions, then the projections π_i map X_{∞} continuously onto each X_i . Therefore, if each X_i is nondegenerate, then X_{∞} is nondegenerate.*

Demostración. Let $\{X_i, f_i\}$ be an inverse sequence. To prove that $\pi_i(X_{\infty}) = X_i$, first note that $\pi_i(X_{\infty}) \subset X_i$. Now, let $y_i \in X_i$. Since each f_i is surjective, there exists $y_{i+1} \in X_{i+1}$ such that $f_i(y_{i+1}) = y_i$. Define

$$(y_j)_{j=1}^{\infty} = \begin{cases} y_j & \text{if } j \geq i \\ f_j(y_{j+1}) & \text{if } j < i \end{cases}$$

Then $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in X_{\infty}$ and $\pi_i((y_j)_{j=1}^{\infty}) = y_i$. Therefore, $\pi_i(X_{\infty}) = X_i$. Moreover, if each X_i is non-degenerate, then for each $y_i \in X_i$, there exists a $y \in X_{\infty}$. Thus, X_{∞} is non-degenerate. □

Theorem 3.4. *If $\{X_i, f_i\}$ is an indecomposable inverse sequence with limit X_∞ , then X_∞ is an indecomposable continuum.*

Demostración. We have previously seen that X_∞ is a continuum. Thus, it remains to show that it is indecomposable. Let A and B be subcontinua of X_∞ such that $A \cup B = X_\infty$. We will show that $A = X_\infty$ or $B = X_\infty$. By Proposition 3.3, we have $X_{i+1} = \pi_{i+1}(A) \cup \pi_{i+1}(B)$. By definition, $f_i(\pi_{i+1}(A)) = X_i$ or $f_i(\pi_{i+1}(B)) = X_i$. Moreover, $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$, so $\pi_i(A) = X_i$ or $\pi_i(B) = X_i$ for all i . Without loss of generality, assume that $\pi_i(A) = X_i$ for infinitely many i . Then, using the surjectivity of the bonding functions, we have

$$f_j \circ \cdots \circ f_k \circ \pi_{k+1} = \pi_j \text{ for } i \leq j < k.$$

We have seen that $\pi_i(A) = X_i$ for $i = 1, 2, \dots$. Using Lemma 3.2, we have $A = X_\infty$. □

4 Embedding theorem

We possess the necessary knowledge to present the first result regarding embedding theorems

Theorem 4.1. *Let (S, d) be a compact metric space and $\{X_i, f_i\}$ an inverse sequence where each X_i is a non-empty compact subset of S and each f_i is an onto function on X_i . Define*

$$f_{ij} = f_i \circ \cdots \circ f_{j-1} : X_j \rightarrow X_i \quad \text{if } j > i + 1 \text{ and } f_{ii+1} = f_i.$$

Suppose (1) and (2) hold as follows:

(1) For every $\varepsilon > 0$, there exists k such that for all $p \in X_k$,

$$\text{diam} \left[\bigcup_{j>k} f_{kj}^{-1}(p) \right] < \varepsilon.$$

(2) For every i and every $\delta > 0$, there exists $\delta' > 0$ such that for any $j > i$ and $p, q \in X_j$, if $d(f_{ij}(p), f_{ij}(q)) > \delta$, then $d(p, q) > \delta'$.

Then $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ is homeomorphic to $\bigcap_{i=1}^\infty \left(\overline{\bigcup_{m \geq i} X_m}\right)$. In particular, if $X_i \subset X_{i+1}$ for each i , then $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ is homeomorphic to $\overline{\bigcup_{i=1}^\infty X_i}$. This theorem is known as the **Anderson-Choquet Embedding Theorem**.

Demostración. Let $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$. We will show that if $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in X_\infty$, then $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ is a Cauchy sequence. Let $\varepsilon > 0$. By condition (1), there exists k such that

$$\text{diam} \left[\bigcup_{j>k} f_{kj}^{-1}(p) \right] < \varepsilon.$$

Note that if $n \geq k$, then $n + m > k$ for $m \geq 1$. Also,

$$\begin{aligned} f_{k(n+m)}(x_{n+m}) &= f_k \circ \cdots \circ f_{n+m-1}(x_{n+m}) \\ &= f_k \circ \cdots \circ f_{n+m-2}(x_{n+m-1}) \\ &\quad \vdots \\ &= f_k \circ \cdots \circ f_{n-1}(x_n) = f_{kn}(x_n). \end{aligned}$$

Since $\text{diam} \left[\bigcup_{j>k} f_{kj}^{-1}(p) \right] < \varepsilon$, it follows that $d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$, and thus $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ is a Cauchy sequence in S . Since S is compact, $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ converges to a point $h(x) \in S$. Thus, we have defined a function h from X_∞ to S . We now show that h satisfies the following conditions (a) – (c):

- (a) h is continuous.
- (b) h is injective.
- (c) $h(X_\infty) = \bigcap_{i=1}^\infty \left(\overline{\bigcup_{m \geq i} X_m}\right)$.

To prove (a), let $x = (x_i) \in X_\infty$ and $\varepsilon > 0$. Consider

$$B = \{z \in S : d(z, h(x)) < \varepsilon\}.$$

Choose k as guaranteed by condition (1) and let $l = k + 1$. Define $V = \pi_l^{-1}(B \cap X_l)$, where π_l is the l -th projection. Since $x \in X_\infty$ and k satisfies (1), it follows directly from the definition of h that $d(x_l, h(x)) < \varepsilon$, and thus $x_l \in B \cap X_l$. Therefore, $x \in V$. Observe that since $B \cap X_l$ is open in X_l , V is

open in X_∞ . Now, let $y = (y_i) \in V$. By the same reasoning as for x , it follows that $d(y_l, h(y)) < \varepsilon$. Since $y \in V$, it follows that $y_l \in B$, and thus

$$d(h(y), h(x)) \leq d(h(y), y_l) + d(y_l, h(x)) < 2\varepsilon.$$

Therefore, (a) holds. To prove (b), let $x = (x_i)_{i=1}^\infty, y = (y_i)_{i=1}^\infty \in X_\infty$ such that $x \neq y$. Then there exists i_0 such that $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Let $\delta = \frac{d(x_{i_0}, y_{i_0})}{2}$. By (2), there exists δ' such that for any $j > i_0$,

$$d(f_{i_0j}(x_j), f_{i_0j}(y_j)) = d(x_{i_0}, y_{i_0}) = 2\delta > \delta,$$

which implies $d(x_j, y_j) > \delta'$. Therefore, $h(x) \neq h(y)$. Finally, to prove (c), let

$$Z = \bigcap_{i=1}^\infty \left(\overline{\bigcup_{m \geq i} X_m} \right).$$

It is clear from the definition of h that $h(X_\infty) \subset Z$. It remains to show that $Z = h(X_\infty)$. To this end, we will prove that $h(X_\infty)$ is dense in Z . Let $z \in Z$ and $\varepsilon > 0$. By condition (1), there exists k such that for all $p \in X_k$,

$$\text{diam} \left[\bigcup_{j > k} f_{kj}^{-1}(p) \right] < \varepsilon.$$

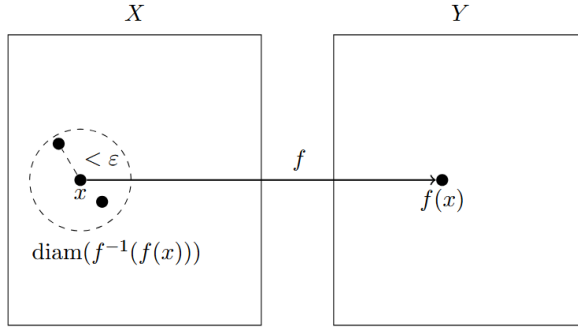
Since $z \in Z$, there exists $m \geq k$ such that $d(z, p) < \varepsilon$ for some $p \in X_m$. By (3.3), there exists $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in X_\infty$ such that $x_m = p$. Moreover, since $m \geq k$, replacing k with m still satisfies (1), and thus $d(x_j, x_m) < \varepsilon$ for any $j > m$. Additionally, $d(x_m, h(x)) < \varepsilon$. Therefore,

$$d(z, h(x)) \leq d(z, x_m) + d(x_m, h(x)) < 2\varepsilon.$$

This proves that $h(X_\infty)$ is dense in Z , and thus $h(X_\infty) = Z$. Since X_∞ is compact and h is continuous, h is a homeomorphism. \square

Definition 4.2. Let X and Y be metric spaces, and let $f : X \rightarrow Y$. Then f is an ε -**map** if f is continuous and $\text{diam}(f^{-1}(f(x))) < \varepsilon$ for every $x \in X$.

Definition 4.3. Let X be a compact metric space, and let \mathcal{P} be a collection of compact metric spaces. Then X is of \mathcal{P} -**Like** if for every $\varepsilon > 0$, there exists an ε -map f_ε and X is the continuous image of some member Y_ε of \mathcal{P} .



Theorem 4.4. *If X is a continuum and \mathcal{P} is a collection of compact, connected spaces, then the coordinate spaces used in the inverse limit representation of X (with onto bonding maps) may all be chosen from \mathcal{P} if and only if X is \mathcal{P} -like*

Demostración. Assume $X = \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ where each X_i is a nonempty compact metric spaces with metric d_i and each f_i maps onto X_i . Let $\mathcal{P} = \{X_i : i = 1, 2, \dots\}$. Let d be a metric en X defined by

$$d((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty 2^{-i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$$

for each $(x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty \in X$. Then, the i th projection map $\pi_i : X \rightarrow X_i$ is a 2^{-i} -map for each i . To see this fact, we need to show that for any $y \in X_i$, $\text{diam}(\pi_i^{-1}(y)) < 2^{-i}$. Let $(x_n), (z_n) \in \pi_i^{-1}(y)$ by definition, $x_i = y = z_i$ then the i th term in the sum is

$$2^{-i} \frac{d_i(x_i, z_i)}{1 + d_i(x_i, z_i)} = 0$$

then $d((x_n), (z_n)) = \sum_{n \neq i} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, z_n)}{1 + d_n(x_n, z_n)}$

Note if $n < i$ since $(x_n), (z_n) \in X$ then $f(x_{n+1}) = x_n$ for each n by hypothesis $x_i = z_i$, entonces

$$f_i(x_{i+1}) = x_i = y_i = f_i(z_{i+1})$$

then $x_{i-1} = f_{i-1}(x_i) = f_{i-1}(y_i) = y_{i-1}$

Following this fashion we can say that for each $n < i$, $x_n = z_n$, then the sum

$$\begin{aligned} d((x_n), (z_n)) &= \sum_{n \neq i} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, z_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \\ &= \sum_{n < i} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, z_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} + \sum_{n > i} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, z_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \\ &= 0 + \sum_{n > i} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, z_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \end{aligned}$$

Now we note that for $n > i$, the first term of the sum $\sum_{n=i+1}^{\infty} 2^{-n}$ is $2^{-(i+1)}$ and the sum has ratio $\frac{1}{2}$ then

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, z_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} < \sum_{n=i+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-i}$$

Therefore $d((x_n), (y_n)) < 2^{-i}$, we conclude that $diam(\pi^{-1}(y)) < 2^{-i}$. Hence X is \mathcal{P} -like. \square

Finally, for our main problem, we will approach it by dividing it into the following results from R. Isbell ([2], p. 73)

Theorem 4.5. *Let $X = \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ where each X_i is a nonempty compact metric space with metric d_i . Let*

$$f_{ij} = f_i \circ \dots \circ f_{j-1} : X_j \rightarrow X_i \text{ if } j > i + 1 \text{ and } f_{ii+1} = f_i$$

Let (Y, ρ) be a complete metric space. Then, there is a sequence $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon_i > 0$, such that if there are embeddings h_i of X_i in Y satisfying

$$\rho(h_j(x), h_i \circ f_{ij}(x)) < \frac{\delta_i}{3} \text{ for each } x \in X_j \text{ and } j > i$$

Where $\delta_i < \frac{1}{2}$ and $\delta_i < \rho(h_i(y), h_i(z))$ whenever $d_i(x, y) > \varepsilon_i$, then X is emdeable in Y

Demostración. Let d and π_i as in 4.4. We prove that for each i , there exists $\eta_i > 0$ such that.

$$d_i(\pi_i(x), \pi_i(y)) \geq \eta_i \text{ whenever } d(x, y) > 2^{-i}$$

We prove this by contradiction, then there is i_0 such that, there exists $x_n, y_n \in X$ such that

$$d(x_n, y_n) > 2^{-i_0} \text{ but } d_{i_0}(\pi_{i_0}(x_n), \pi_{i_0}(y_n)) < \frac{1}{n} \text{ for each } n$$

Since X is compact, there are subsequence of $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ such that

$$x_{n,i} \rightarrow x \in X \qquad y_{n,i} \rightarrow y \in X$$

Moreover since $d(x_{n,i}, y_{n,i}) > 2^{-i_0}$ then $d(x, y) \geq 2^{-i_0}$. On the other hand π_{i_0} is continuous then

$$\pi_{i_0}(x_{n,i}) \rightarrow \pi_{i_0}(x) \qquad \text{and} \qquad \pi_{i_0}(y_{n,i}) \rightarrow \pi_{i_0}(y)$$

However $d_{i_0}(\pi_{i_0}(x_{n,k}), \pi_{i_0}(y_{n,k})) < \frac{1}{n}$, this implies that $\pi_{i_0}(x) = \pi_{i_0}(y)$ and this contradicts the fact $d(x, y) \geq 2^{-i}$ (π_{i_0} is a 2^{-i} -map). Then there is η_i such that

$$d_i(\pi_i(x), \pi_i(y)) \geq \eta_i \text{ whenever } d(x, y) > 2^{-i}.$$

Let $\varepsilon_i = \min\{\eta_i, \frac{1}{i}\}$ for each i . Now, assume that for these numbers ε_i there are embeddings h_i satisfying the conditions above, then for each $x \in X$, we prove that $\{h_i \circ \pi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ is a Cauchy sequence in Y . Let $\varepsilon > 0$, fix $x \in X$ and $i, j \in \mathbb{N}$, then

$$\begin{aligned} \rho(h_i \circ \pi_i(x), h_j \circ \pi_j(x)) &= \rho(h_i \circ (f_{ij} \circ \pi_j)(x), h_j \circ \pi_j(x)) \\ &= \rho(h_i \circ f_{ij}(x_j), h_j(x_j)) < \frac{\delta_i}{3} < \frac{\frac{1}{i}}{3} = \frac{1}{3i} \rightarrow 0 \text{ as } i \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Then we choose i sufficiently large and for $j > i$ we have

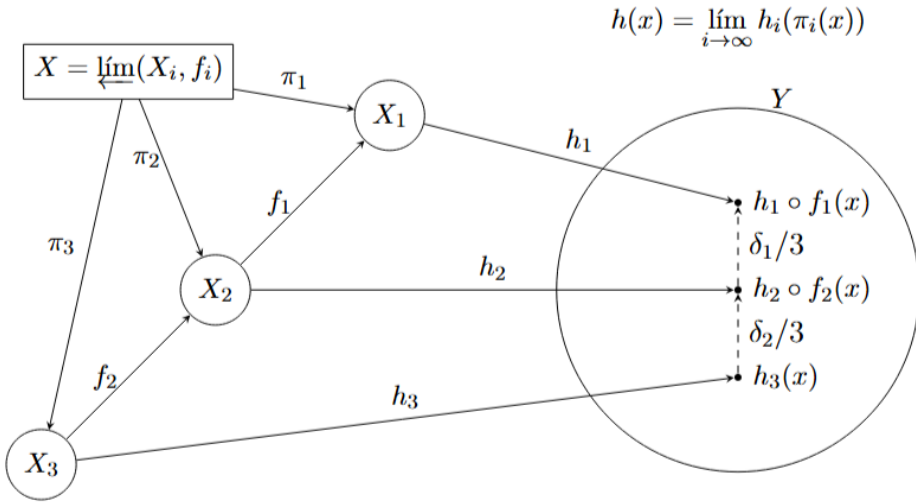
$$\rho(h_i \circ \pi_i(x), h_j \circ \pi_j(x)) < \varepsilon$$

Since Y is a complete metric space we can define $h : X \rightarrow Y$ by letting

$$h(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_i \circ \pi_i(x) \qquad \text{for each } x \in X$$

Then we shall to prove that h is an injective map, for this. Let $x, x' \in X$ such that $x \neq x'$, then, there is $l \in \mathbb{N}$ such that

$$x_l \neq x'_l \qquad \text{and} \qquad \pi_l(x) \neq \pi_l(x')$$



It follows that there exists ε_l such that $d_l(\pi_l(x), \pi_l(x')) > \varepsilon_l$, then, by hypothesis

$$\rho(h_j(x), h_i \circ f_{ij}(x)) < \frac{\delta_l}{3} \text{ for each } x \in X_j \text{ and } j > l$$

where $\delta_l < \frac{1}{l}$ and $\delta_l < \rho(h_l(\pi_l(x)), h_l(\pi_l(x')))$.

Since

$$h(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_i \circ \pi_i(x) \qquad h(x') = \lim_{i \rightarrow \infty} h_i \circ \pi_i(x')$$

we have that

$$\rho(h(x), h_l \circ \pi_l(x)) < \frac{\delta_l}{3} \qquad \rho(h(x'), h_l \circ \pi_l(x')) < \frac{\delta_l}{3}$$

And note that if $\rho(h(x), h(x')) \leq \frac{\delta_l}{3}$ then

$$\delta_l < \rho(h_l(\pi_l(x)), h_l(\pi_l(x'))) \leq \rho(h_l(\pi_l(x)), h(x)) + \rho(h(x), h(x')) + \rho(h(x'), h_l(\pi_l(x'))) < \delta_l$$

Therefore $\rho(h(x), h(x')) > \frac{\delta_l}{3}$, we conclude that h is injective. □

Definition 4.6. Regard \mathbb{R}^{2n} as $\mathbb{R}_1^n \times \mathbb{R}_2^n$ where \mathbb{R}_1^n and \mathbb{R}_2^n are copies of \mathbb{R}^n . Then, a subset F of \mathbb{R}^{2n} is said to be flat provided that there is a homeomorphism h of \mathbb{R}^{2n} onto \mathbb{R}^{2n} such that $h(F) \subset \mathbb{R}_1^n \times \{\theta\}$ where θ denotes a point of \mathbb{R}_2^n

Proposition 4.7. 1. If S is a closed of \mathbb{R}_1^n and $f : S \rightarrow \mathbb{R}_2^n$ is any continuous function, then the graph $G(f)$ of f is flat where

$$G(f) = \{(s, f(s)) \in \mathbb{R}^{2n} : s \in S\}$$

2. If $F \subset \mathbb{R}^{2n}$ is flat and k is any homeomorphism of \mathbb{R}^{2n} onto \mathbb{R}^{2n} then $k(F)$ is flat
3. If S is compact and embeddable in \mathbb{R}^n and if $f : S \rightarrow F$ is any continuous function from S into a flat subset F of \mathbb{R}^{2n} , then f can be arbitrarily closely approximated by embeddings of S into flat subsets of \mathbb{R}^{2n}

Demostración. 1. Since S is a closed subset in \mathbb{R}_1^n , using [3, p.127] there exists a continuous function f^* from \mathbb{R}_1^n to \mathbb{R}_2^n such that $f^*|_S = f$. Let $h : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ such that $h((x, y)) = (x, y - f^*(x))$ then h is clearly homeomorphism and to see that $h(G(f)) \subset \mathbb{R}_1^n \times \{\theta\}$ where θ is a point of \mathbb{R}_2^n , let $(s, f(s)) \in G(f)$, since $s \in S$ then $f(s) = f^*(s)$ therefore

$$h((s, f(s))) = (s, f(s) - f^*(s)) = (s, \theta) \in \mathbb{R}_1^n \times \{\theta\}$$

and we conclude $h(G(f)) \subset \mathbb{R}_1^n \times \{\theta\}$

2. Since F is flat, there is homeomorphism h such that $h(F) \subset \mathbb{R}_1^n \times \{\theta\}$ where θ denotes a point of \mathbb{R}_2^n , define $g = h \circ k^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, we note that since h and k are homeomorphism, then, g is homeomorphism, on the other hand

$$g(k(F)) = h \circ k^{-1}(k(F)) = h(F) \subset \mathbb{R}_1^n \times \{\theta\}$$

then $k(F)$ is flat

3. Let d be the product metric for $\mathbb{R}_1^n \times \mathbb{R}_2^n$. Since S is compact and f is continuous, $f(S)$ is compact in F , moreover F is a flat subset of \mathbb{R}^{2n} , then, there exists $h : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ a homeomorphism, such that $h(F) \subset \mathbb{R}_1^n \times \{\theta\}$, $\theta \in \mathbb{R}_2^n$, Since h is homeomorphism, then $h(f(S))$ is

compact in \mathbb{R}^{2n} , and, since \mathbb{R}^{2n} is locally compact in \mathbb{R}^{2n} , hence, $h(f(S))$ has a compact neighborhoods. Let T to be a compact neighborhood of $h(f(S))$, For each ε , there exists $\delta > 0$ such that, if $z \in \mathbb{R}^{2n}$ and $s \in S$ with $d(z, h(f(s))) < \delta$, then $d(h^{-1}(z), f(s)) < \varepsilon$, We prove this claim by contradiction. There exists ε_0 such that for each $l \in \mathbb{N}$ there are $z_l \in \mathbb{R}^{2n}$ and $s_l \in S$, $h(f(s_l)) \in h(f(S))$ such that:

$$d(z_l, h(f(s_l))) < \frac{1}{l} \quad \text{but} \quad d(h^{-1}(z_l), f(s_l)) \geq \varepsilon_0$$

Since $h(f(S)) \subset T$ and T is compact in \mathbb{R}^{2n} and $d(z_l, h(f(s_l))) < \frac{1}{l}$, hence, for sufficiently large l we have that $z_l \in T$, moreover there exists a subsequence of $h(f(s_l))$ such that:

$$h(f(s_{l,i})) \rightarrow x \in T \quad \text{as} \quad i \rightarrow \infty$$

Since h is homeomorphism, h^{-1} is continuous, then, for $\frac{\varepsilon_0}{2}$, there exists $\delta_1 > 0$ such that, for any $y \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\text{If } d(x, y) < \delta_1 \quad \text{then} \quad d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

We can notice that $z_{l,i} \rightarrow x$ as $i \rightarrow \infty$, now for δ_1 there is N_1 such that if $i \geq N_1$, $d(z_{l,i}, x) < \delta_1$ and there is N_2 such that if $i \geq N_2$, $d(h(f(s_{l,i})), x) < \delta_1$, Then let $N = \max\{N_1, N_2\}$, then if $i \geq N$

$$d(z_{l,i}, x) < \delta_1 \quad \text{and} \quad d(h(f(s_{l,i})), x) < \delta_1$$

Therefore we have:

$$\begin{aligned} d(h^{-1}(z_{l,i}), f(s_{l,i})) &= d(h^{-1}(z_{l,i}), h^{-1}(h(f(s_{l,i})))) \\ &\leq d(h^{-1}(z_{l,i}), h^{-1}(x)) + d(h^{-1}(x), h^{-1}(h(f(s_{l,i})))) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

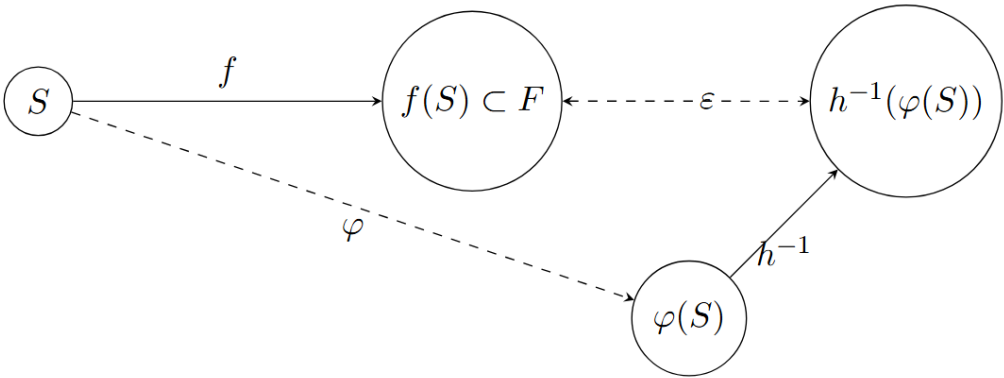
And this is a contradiction. Then, for each ε there exists $\delta > 0$ such that, if $z \in \mathbb{R}^{2n}$ and $s \in S$ with $d(z, h(f(s))) < \delta$, then, $d(h^{-1}(z), f(s)) < \varepsilon$. Let $U = \{x \in \mathbb{R}_2^n : d(\theta, x) < \delta\}$ to be the δ -ball about θ in \mathbb{R}_2^n . Let g be an embedding of S in U . We can consider that g since S is embeddable in \mathbb{R}^n and \mathbb{R}_2^n is a copy of \mathbb{R}^n , then there is $\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}_2^n$ an embedding,

we can consider $\psi(s) = \frac{\alpha(s)}{\|\alpha(s)\|}$, then let $g : S \rightarrow \mathbb{R}_2^n$, $g(s) = \theta + \delta\psi(s)$ is such that $g(S) \subset U$. Then letting

$$\pi_1(x, \theta) = x \quad \text{for all} \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}_1^n \times \{\theta\}$$

Then define:

$$\begin{aligned} \varphi : S &\rightarrow R^{2n} \\ \varphi(s) &= (\pi_1(h(f(s))), g(s)) \quad \text{for each} \quad s \in S \end{aligned}$$



Therefore $h^{-1} \circ \varphi$ is an embedding of S into R^{2n} within ε of f , to prove this, first note, since $h(f(S)) \subset h(S) \subset \mathbb{R}_1^n \times \{\theta\}$, then, for each $s \in S$, $f(s) \in h(f(S))$, there exists $x' \in \mathbb{R}_1^n$ such that $h(f(s)) = (x', \theta)$, then

$$\begin{aligned} (h^{-1} \circ \varphi)(s) &= h^{-1}(\pi_1(h(f(s))), g(s)) \\ &= h^{-1}(\pi_1(x', \theta), g(s)) \in R^{2n} \end{aligned}$$

Since g is an embedding, then g is injective, and this implies that $h^{-1} \circ \varphi$ is injective. Now, since $g(s) \in U$ then, $d(\theta, g(s)) < \delta$, moreover

$$\begin{aligned} d(\varphi(s), h(f(s))) &= d((\pi_1(h(f(s))), g(s)), (x', \theta)) \\ &= d((x', g(s)), (x', \theta)) < \delta \end{aligned}$$

Thus $d(h^{-1}((x', g(s))), f(s)) = d((h^{-1} \circ \varphi)(s), f(s)) < \varepsilon$ Since $k = \pi_1 \circ h \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}_1^n$, $k(S)$ is compact, then we can define

$$\begin{aligned} w : k(S) &\rightarrow g(S) \subset \mathbb{R}_2^n \\ \pi_1 \circ h \circ f(s) &\mapsto g(s) \end{aligned}$$

Since $\varphi(S) = \{\varphi(s) \in \mathbb{R}^{2n} : s \in S\} = \{((\pi_1 \circ h \circ f)(s), g(s)) : s \in S\}$ we can regard $\varphi(S)$ as the graph for w , by (1) of 4.7, $\varphi(S)$ is a flat, and since h^{-1} is homeomorphism then $h^{-1}(\varphi(S)) = (h^{-1} \circ \varphi)(S)$ is a flat for (2) of 4.7

□

Theorem 4.8. *If $X = \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ where each X_i is compact and embedable in \mathbb{R}^n (n fixed), then X is embedded in \mathbb{R}^{2n}*

Demostración. First, we note that \mathbb{R}^{2n} is a complete metric space, then by 4.5, there is a sequence $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$, $\varepsilon_i > 0$ such that if there are embeddings h_i of X_i in \mathbb{R}^{2n} satisfying $\rho(h_j(x), h_i \circ f_{ij}(x)) < \frac{\delta_i}{3}$ for each $x \in X_j$ and $j > i$ where $\delta_i < \frac{1}{i}$ and $\delta_i < \rho(h_i(y), h_i(z))$ whenever $d_i(y, z) > \varepsilon_i$, then X is embedded in \mathbb{R}^{2n} , then we construct these embeddings. Since X_1 is compact, and by hypothesis X_1 is embedded in \mathbb{R}^n , then there is $f : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ a continuous function, we define $h_1 : X_1 \rightarrow G(f) \subset \mathbb{R}^{2n}$, $h_1(x) = (x, f(x))$ then by (1) of 4.7, $G(f)$ is a flat subset of \mathbb{R}^{2n} , then h_1 is an embedding of X_1 in a flat subset of \mathbb{R}^{2n} . We prove that it is possible to choose $\delta_1 < 1$, such that if $d_1(y, z) > \varepsilon_1$, (d_1 is the metric for X_1), then, $\|h_1(y) - h_1(x)\| > \delta_1$, we assume by contradiction that for each $n \in \mathbb{N}$, there exists $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ and $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ sequence in X_1 such that

$$d_1(y_n, z_n) > \varepsilon_1 \quad \text{but} \quad \|h_1(y_n) - h_1(z_n)\| < \frac{1}{n}$$

Since X_1 is compact metric space there exist subsequences of $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ and $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ such that

$$y_{n,i} \rightarrow y_0 \in X_1 \quad \text{and} \quad z_{n,i} \rightarrow z_0 \in X_1$$

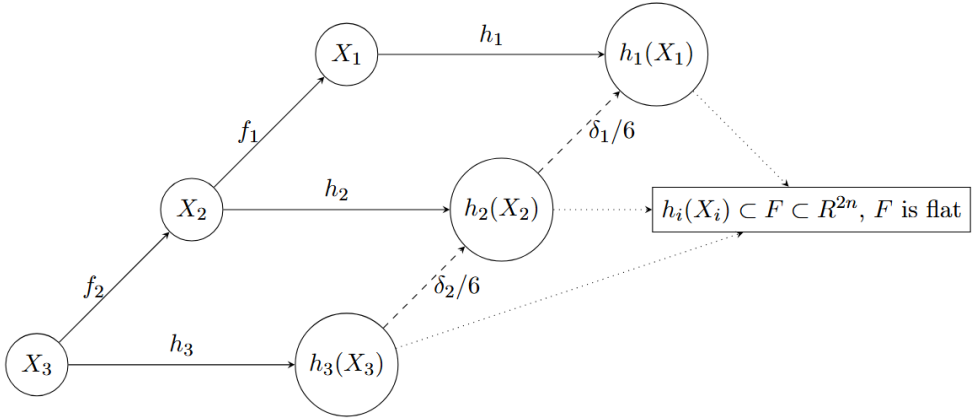
as $i \rightarrow \infty$

Since $d_1(y_{n,i}, z_{n,i}) > \varepsilon_1$ this implies that $d(y_0, z_0) \geq \varepsilon_1$ and

$$\begin{aligned} h_1(y_0) &= h_1(\lim_{i \rightarrow \infty} y_{n,i}) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} h_1(y_{n,i}) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} h_1(z_{n,i}) \\ &= h_1(\lim_{i \rightarrow \infty} z_{n,i}) \\ &= h_1(z_0). \end{aligned}$$

Since, h is one-to-one, therefore $y_0 = z_0$ but this contradicts the fact that $d(y_0, z_0) \geq \varepsilon_1$. Now since $f_1 : X_2 \rightarrow X_1$ is continuous and X_2 is embedable in \mathbb{R}^n , then $h_1 \circ f_1$ is a continuous function from X_2 into a flat subset of \mathbb{R}^{2n} , then by (3) of 4.7, there is an embedding h_2 of X_2 in a flat subset of \mathbb{R}^{2n} such that

$$\|h_2(x) - h_1 \circ f_1(x)\| < \frac{\delta_1}{6} \quad \text{for all } x \in X_2$$



Continue the induction, let $\delta_i < 1$ such that, if $d_i(y, z) > \varepsilon_i$, then $\delta_i < \rho(h_i(y), h_i(z))$, so that h_j is chosen within

$$\min\left\{\left(\frac{\delta_i}{3}\right)2^{i-j} : i = 1, \dots, j - 1\right\} \text{ of } h_{j-1} \circ f_{j-1}$$

Then h_j is within $\frac{\delta_i}{3}$ of $h_i \circ f_{ij}$ whenever $i < j$, to see this, let $x \in X_j$,

$$\begin{aligned} \|h_j(x) - h_i \circ f_{ij}(x)\| &\leq \|h_j(x) - h_{j-1} \circ f_{(j-1)j}(x)\| \\ &\leq \|h_{j-1} \circ f_{(j-1)j}(x) - h_{j-2} \circ f_{(j-2)j}(x)\| \\ &\leq \dots \\ &\leq \|h_{i+1} \circ f_{(i+1)j}(x) - h_i \circ f_{ij}(x)\| \\ &< \frac{\delta_i}{3} \left(\frac{1}{2^{(j-1)j}}\right) + \frac{\delta_i}{3} \left(\frac{1}{2^{(j-2)j}}\right) + \dots + \frac{\delta_i}{3} \left(\frac{1}{2^{i-j}}\right) \\ &= \frac{\delta_i}{3} \sum_{n=1}^{i-j} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta_i}{3} \end{aligned}$$



Acknowledgements

This material was covered in the seminar given by Mr. Nomura Yamato at Shimane University. The authors thank the referees for the time dedicated to the review; their suggestions and corrections helped improve the chapter.

Referencias

- [1] Ryszard Engelking, *General Topology*. Warsaw: PWN—Polish Scientific Publishers, 1977.
- [2] J. R. Isbell, *Embeddings of inverse limits*, Ann. of Math., 70(1959), 73-84.
- [3] K. Kuratowski, *Topology, vol. I*, Academic Press, New York, 1966.
- [4] K. Kuratowski, *Topology, vol. II*, Academic Press, New York, 1968.
- [5] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New York, Basel, 1992.
- [6] Thomas J. Jech, *The Axiom of Choice*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, Holland, 1973.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering
Campus Matuse
1060 Nishikawatsucho, Matsue, Shimane 690-8504

dherrera@fcm.buap.mx
fmacias@fcm.buap.mx
matsuhashi@riko.shimane-u.ac.jp
jose.ortegabec@alumno.buap.mx

Capítulo 6

Sobre la pseudo-contractibilidad y los conjuntos rígidos en continuos

Félix Capulín Pérez, Roberto Souza Carranza, Fernando
Orozco Zitli

Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado
de México

Resumen

Sean X y Y espacios topológicos y $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Diremos que f es pseudo-homotópica a g si existen un continuo C , dos puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : X \times C \rightarrow Y$ tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$. Un espacio topológico X es llamado pseudo-contráctil si su función identidad I_X es pseudo-homotópica a una función constante en X . Este capítulo expositivo está enfocado en mostrar resultados básicos relacionados con la pseudo-contractibilidad, así como ciertos “conjuntos rígidos” bajo (pseudo-)homotopías que no permiten que un continuo sea (pseudo-)contráctil.

1 Introducción

Sean X y Y espacios topológicos y $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Diremos que f es pseudo-homotópica a g si existen un continuo C , dos puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : X \times C \rightarrow Y$ tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$. La función H es llamada una pseudo-homotopía entre f y g , y el continuo C es llamado espacio factor. Se dice que un espacio topológico X es pseudo-contráctil si la función identidad I_X es pseudo-homotópica a una función constante en X . Claramente, estos conceptos generalizan los conceptos de homotopía y contractibilidad dados en la

topología general.

Históricamente, R. H. Bing introdujo la noción de pseudo-contractibilidad; sin embargo, fue W. Kuperberg el primer matemático que probó que las nociones de pseudo-contractibilidad y contractibilidad son diferentes (véase [32, Sección 4, Ejemplo 1]). En la Sección 4, se presentará un continuo pseudo-contráctil no contráctil. Por la naturaleza del ejemplo que W. Kuperberg dió, el cual, en apariencia, es más complejo de escribir y similar a la curva del topólogo, preguntó lo siguiente: ¿Será la curva del topólogo pseudo-contráctil? En relación a esta pregunta, H. Katsuura probó en [18] que la curva del topólogo no es pseudo-contráctil con espacio factor el mismo. Adicionalmente, probó que si Y es un continuo indescomponible no degenerado tal que cada una de sus componentes es arco-conexa y X es continuo que tiene arco-componentes densas, entonces X no es pseudo-contráctil con espacio factor Y .

Posteriormente W. Debski probó en [1] que la curva del topólogo no es pseudo-contráctil. Ya en 2007, M. Sobolewsky se encargó de dar un resultado más general en [31], mostrando que el único continuo encadenable pseudo-contráctil es el arco. Este resultado, obviamente, abarca la curva del topólogo y el pseudo-arco, entre otros continuos; este último también se ignoraba si podría ser pseudo-contráctil.

Otros trabajos previos relacionados con el tema se pueden consultar en [3], [9] y [17].

Las propiedades de contractibilidad y pseudo-contractibilidad nos permiten determinar cuando un espacio no presenta cierto tipo de “agujeros”, por lo que es importante en topología determinar que tipo de espacios presentan “agujeros” o no. Sin embargo, la propiedad de no contener agujeros no es suficiente para determinar la (pseudo-)contractibilidad de un espacio. Por lo que un problema natural es determinar qué tipo de propiedades o qué tipos de conjuntos en los espacios impiden que estos sean (pseudo-)contráctiles.

Existen conjuntos que llamaremos conjuntos rígidos bajo homotopías, los cuales hacen que un continuo no sea (pseudo-)contráctil. Aquí nos enfocaremos principalmente en los llamados R^i -continuos $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y R^i -conjuntos $i \in \{1, 2, 3\}$, los cuales tienen la cualidad de mantenerse “fijos” bajo homotopías. Posteriormente, en la Sección 6 explicaremos qué significa esto.

Este capítulo expositivo tiene la finalidad de mostrar algunos resultados básicos relacionados con la pseudo-contractibilidad y de presentar, con un enfoque histórico, el desarrollo de ciertos conjuntos rígidos y su relación con la (pseudo-)contractibilidad.

2 Preliminares

Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto de un espacio topológico X que es un continuo se llama un *subcontinuo* de X . Un espacio topológico se llama *conexo por continuos* si, para cualesquiera dos puntos, estos están contenidos en un subcontinuo del espacio. A lo largo de este trabajo, el intervalo unitario cerrado $[0, 1]$ se denota por I . Un *arco* se entiende como la imagen homeomorfa de I . Si para cualesquiera dos puntos de un espacio, estos pueden ser unidos por un arco en el espacio, entonces el espacio se llama *arco-conexo*.

Sean X, Y espacios topológicos, definimos el conjunto $C(X, Y)$ como el conjunto de todas las funciones continuas que van de X a Y ; es decir, $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ es continua}\}$. A este conjunto se le denota comúnmente de la *topología compacto-abierta*. Se sabe que si Y es métrico y X es compacto, entonces esta topología coincide con la topología de la convergencia uniforme (o la topología generada por la métrica del supremo).

Por cada $y \in Y$ denotaremos por c_y a la función constante de X a Y con único valor y .

Sea X un continuo, un *hiperespacio* de X ; es una colección de subconjuntos cerrados de X . Estos son algunos de los hiperespacios más comunes:

- $2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado}\}$ se conoce como el hiperespacio de subconjuntos cerrados de X ,
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$ es conocido como el hiperespacio de subcontinuos de X ,
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$, con $n \in \mathbb{N}$,

- $C_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene una cantidad finita de componentes}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(X)$,
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : |A| \leq n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, llamado el n -ésimo producto simétrico de X .

El siguiente resultado muestra algunos conjuntos abiertos y cerrados en 2^X que son muy utilizados en la teoría de hiperespacios.

Teorema 2.1. *Sea A un subconjunto de X , consideremos las familias:*

$$\begin{aligned}\Gamma(A) &= \{B \in 2^X : B \subset A\}, \\ D(A) &= \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\} \text{ y} \\ \phi(A) &= \{B \in 2^X : A \subset B\}.\end{aligned}$$

1. Si A es abierto, entonces $\Gamma(A)$ y $D(A)$ son abiertos en 2^X ,
2. Si A es cerrado, entonces $\Gamma(A)$, $D(A)$ y $\phi(A)$ son cerrados en 2^X .

3 Pseudo-homotopías

Una de las respuestas más comunes que se suele dar cuando le preguntan a un topólogo ¿qué es la topología? ¿Qué estudia un topólogo? Se basa casi siempre en la idea intuitiva de “deformar” objetos y uno comienza explicando con un ejemplo que, para nosotros, una taza y una dona son “iguales” y explicamos en qué sentido son “iguales”. Les decimos que se imaginen que ambos objetos están hechos de plastilina o de algún material que sea moldeable. Entonces comentamos que los objetos serán “iguales” si podemos deformar uno en el otro; en nuestro ejemplo, deformar la dona hasta obtener la taza, bajo la restricción de que no podemos romper el material y después pegarlo. Si podemos hacer esto, entonces los consideramos como el “mismo”. Si bien nos va, los convencemos y vivimos felices. Claro, esta no es la única forma de describir o decir cuando dos objetos, de cierta manera, son “iguales”. La formalización de lo aquí escrito, se centra en el concepto de homotopía o algunas variantes como la de pseudo-homotopía (en esta última está basada nuestro trabajo). Comencemos entonces con nuestro estudio de lo que a nuestro parecer es básico sobre el tema.

Lo siguiente es la definición tradicional de homotopía.

Definición 3.1. Sean X y Y espacios topológicos y $f, g \in C(X, Y)$. Se dice que f es *homotópica* a g o que f y g son *homotópicas*, si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Esto se denota como $f \simeq g$. La función H es llamada una *homotopía* entre f y g .

Definición 3.2. Sean X y Y espacios topológicos y $f, g \in C(X, Y)$. Se dice que f es *pseudo-homotópica* a g (o que f y g son *pseudo-homotópicas*) si existen un continuo C , puntos $a, b \in C$ y una función $H : X \times C \rightarrow Y$ continua, tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$. Esto se denota como $f \simeq_C g$. La función H es llamada una *pseudo-homotopía* entre f y g con *espacio factor* C .

De las Definiciones 3.1 y 3.2 es fácil ver que si dos funciones son homotópicas, entonces son pseudo-homotópicas. En la sección 4 se presenta un ejemplo en el que la proposición inversa no siempre es cierta.

De manera natural, se puede plantear la siguiente pregunta.

Pregunta 3.3. ¿Bajo qué condiciones sobre el espacio factor o sobre los espacios soporte en donde están definidas funciones pseudo-homotópicas, estas resultan ser homotópicas?

Existen algunas respuestas parciales a esta pregunta. Por ejemplo, si $f, g \in C(X, Y)$ y estas son pseudo-homotópicas con espacio factor arco-conexo, no importando como sean X y Y , se tiene que f y g son homotópicas.

Para ello, se puede ver que si $H : X \times C \rightarrow Y$ es una pseudo-homotopía tal que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$, para toda $x \in X$, y para algún continuo C conteniendo a los puntos a, b , entonces por ser C arco-conexo existe un arco $\alpha : I \rightarrow C$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. Definiendo una función $H' : X \times I \rightarrow Y$ como $H'(x, t) = H(x, \alpha(t))$ se tiene que H' es una homotopía entre f y g . Por lo que f y g resultan ser homotópicas.

En general podemos dar el siguiente resultado.

Teorema 3.4. Sean $f, g \in C(X, Y)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Las funciones f y g son homotópicas,
2. Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con cualquier continuo como espacio factor,
3. Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con cualquier continuo localmente conexo como espacio factor,
4. Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con cualquier continuo arco-conexo como espacio factor,
5. Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con algún continuo C arco-conexo como espacio factor,
6. Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con algún espacio factor C tal que a, b pueden ser unidos por un arco en C (donde a y b son como en la definición de pseudo-homotopía).

Aunque tener factor arco-conexo es importante para tener que ambos conceptos son equivalentes, realmente, respuestas más interesantes a la pregunta 3.3, es cuando se dan condiciones a alguno de los espacios soporte X y Y . Por ejemplo, si Y es un espacio ANR y X es un espacio métrico compacto, entonces cualesquiera dos funciones pseudo-homotópicas $f, g \in C(X, Y)$ resultan ser homotópicas. La prueba se basa, entre otras cosas, en el hecho de que el espacio $C(X, Y)$ es ANR si y sólo si Y es ANR .

Otro ejemplo en donde cualesquiera dos funciones pseudo-homotópicas resultan ser homotópicas se da en la Sección 5. Por otra parte, una respuesta implícita relacionada a esta pregunta fue dada en [31]. En este capítulo se prueba que el único continuo encadenable, en donde la función identidad es pseudo-homotópica a una función constante, es el arco. El estudio de espacios en los que la función identidad es pseudo-homotópica a una función constante se reservará para la siguiente sección.

Es importante destacar que aún queda trabajo por realizar en torno a esta pregunta. De lo dicho anteriormente, se puede plantear lo siguiente:

Pregunta 3.5. Si X y Y son dendroides, ¿será cierto que si $f, g \in C(X, Y)$ son pseudo-homotópicas entonces son homotópicas?

Pregunta 3.6. Dados dos espacios topológicos X y Y , ¿qué tipo de funciones continuas resultan ser (pseudo-)homotópicas? Por ejemplo, si las abiertas lo hacen, las monótonas, etc.

Otro problema importante es determinar espacios específicos y funciones continuas, también específicas entre ellos, de tal forma que estas resulten ser pseudo-homotópicas o que al ser pseudo-homotópicas estas tengan una propiedad adicional. En este sentido, en [3], se prueba la existencia de una función continua del conjunto de Cantor sobre el pseudo-arco que es pseudo-homotópica a una constante. Más aún, en [19], se muestra que toda función continua del conjunto de Cantor al pseudo-arco es pseudo-homotópica a una función constante con espacio factor el mismo pseudo-arco y en [17], se muestra que si X es el pseudo-arco y $f, g \in C(X, X)$ son pseudo-homotópicas y f es uno a uno, entonces $f = g$.

Con base a esto último podemos formular la siguiente pregunta.

Pregunta 3.7. ¿Bajo qué condiciones sobre los espacios topológicos X y Y , dos funciones continuas entre ellos resultan ser (pseudo-)homotópicas?

Prosiguiendo con el estudio, se puede definir en $C(X, Y)$ una relación, que denotaremos por \simeq_* , dada de la siguiente manera: si $f, g \in C(X, Y)$, diremos que f está relacionada con g , y que escribiremos por $f \simeq_* g$, si f y g son pseudo-homotópicas. No es difícil convencerse que la relación \simeq_* es de equivalencia. Cada clase es llamada clase de pseudo-homotopía. En [9] se prueba que si X es un espacio compacto y de Hausdorff, Y es de Hausdorff, y $f, g \in C(X, Y)$ entonces $f \simeq_* g$ si y sólo si existe un continuo en $C(X, Y)$ que contiene a f y g . De esta manera, con las mismas condiciones, mencionadas anteriormente, para X y Y , cada par de elementos $f, g \in C(X, Y)$ son pseudo-homotópicas si y sólo si $C(X, Y)$ es conexo por continuos. Esto implica que $C(X, Y)$ tendría una sola clase de pseudo-homotopía, a saber, $C(X, Y)$.

Los siguientes resultados tienen sus análogos para homotopías y no son difíciles de probar, (véase [21]).

Teorema 3.8. Sean X, Y, Z y W espacios topológicos, $f, g \in C(X, Y)$, $h \in C(Y, Z)$ y $k \in C(W, X)$. Si $f \simeq_* g$, entonces $h \circ f \simeq_* h \circ g$ y $f \circ k \simeq_* g \circ k$.

Teorema 3.9. Sean X, Y y Z espacios topológicos, $f, f' \in C(X, Y)$ y $g, g' \in C(Y, Z)$. Si $f \simeq_* f'$ y $g \simeq_* g'$, entonces $g \circ f \simeq_* g' \circ f'$.

Teorema 3.10. Sean $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos y $f, g \in C\left(X, \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right)$. Las funciones f, g son pseudo-homotópicas si y sólo si $\pi_j \circ f$ es pseudo-homotópica a $\pi_j \circ g$, para cada $j \in \mathbb{N}$, donde π_j representa cada función proyección $\pi_j : \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n \rightarrow Y_j$.

Cabe señalar que si la familia de espacios topológicos $\{Y_j\}_{j \in J}$ es no numerable, siempre se cumple que si $f, g \in C\left(X, \prod_{j \in J} Y_j\right)$ son pseudo-homotópicas entonces $\pi_j \circ f$ es pseudo-homotópica a $\pi_j \circ g$, para cada $j \in J$.

4 Pseudo-contractibilidad

El concepto de contractibilidad, desde su definición ha inquietado a diversos sectores de la matemática y ha contribuido al desarrollo de algunas áreas de ella; de tal manera que ha sido incluido en la mayoría de los libros de topología y se han escrito un número considerable de artículos relacionados a este concepto. Uno de los objetivos de este capítulo expositivo tiene la finalidad de mostrar una variante de la contractibilidad, llamada pseudo-contractibilidad y probar algunos resultados relacionados a este último y la relación que guarda con otras estructuras y propiedades topológicas. Comencemos entonces con la definición usual de espacio contráctil.

Definición 4.1. Se dice que un espacio topológico X es *contráctil* si la función identidad $Id_X : X \rightarrow X$ es homotópica a una función constante c_{x_0} para algún $x_0 \in X$ y para todo $x \in X$. A veces se abusa del lenguaje y de la notación y se usa el valor constante x_0 en lugar de la función constante c_{x_0} .

Definición 4.2. Se dice que un espacio topológico X es *pseudo-contráctil* si la función identidad Id_X es pseudo-homotópica a una función constante c_x .

Como se comentó al comienzo, Bing fue el primer matemático en proponer la definición de pseudo-contractibilidad, aunque W. Kuperberg fue el primero que dió un ejemplo para mostrar que las nociones de pseudo-homotopía y homotopía son diferentes. Por cierto este ejemplo nunca fue publicado por él. Comencemos diciendo que el ejemplo aquí presentado es una modificación al dado por W. Kuperberg. Al final daremos una explicación en donde radica el

cambio. Prosigamos entonces, dando la descripción del ejemplo para después explicar de manera breve sus características. Veremos que el continuo no es conexo por trayectorias, lo que lo hará no contráctil, pues es sabido que todo espacio contráctil es conexo por trayectorias. Finalmente se mostrará que este es pseudo-contráctil.

Ejemplo 4.3 (W. Kuperberg). *Un continuo pseudo-contráctil no contráctil.*

Demostración. Descripción del continuo: Sean \mathbb{C} en plano complejo, $X_0 = \left\{ \frac{t+2}{t+1} e^{it} : t \in [0, \infty) \right\}$ una espiral que se aproxima al círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Definamos $X = X_0 \cup D^2$ (véase Figura 1).

Afirmación: X no es conexo por trayectorias. En efecto, veamos que no podemos tener una trayectoria con punto inicial $(0, 1) \in D^2$ punto final $\omega \in X_0$. Veamos que si $\alpha : I \rightarrow X$ es una trayectoria tal que $\alpha(0) = (0, 1)$, entonces $\alpha^{-1}(D^2) = I$. Para esto, notemos primero que D^2 es cerrado de X y como α es continua, entonces $\alpha^{-1}(D^2)$ es cerrado de I , y es no vacío ya que $0 \in \alpha^{-1}(D^2)$. Probaremos ahora que $\alpha^{-1}(D^2)$ es abierto de I . Sean $t_0 \in I$ tal que $\alpha(t_0) = (x_0, y_0) \in D^2$. La familia $\mathcal{U}_{t_0} = \{B(\alpha(t_0), \delta) \cap X : \delta > 0\}$ es una base local de vecindades para $\alpha(t_0)$ en X y $\mathcal{V}_{t_0} = \{B(t_0, \delta), \varepsilon) \cap I : \varepsilon > 0\}$ es una base local de vecindades para t_0 en I . Sea $U \in \mathcal{U}_{t_0}$, de la continuidad de α y de la definición de V_{t_0} existe $V \in \mathcal{V}_{t_0}$ tal que V es conexo y $\alpha(V) \subset U$. Nótese que las componentes de U pueden intersectar a X_0 y a D^2 como se muestra en la Figura 2. Ahora, como V es conexo en I , entonces $\alpha(V)$ es un conexo en X que contiene a $\alpha(t_0)$. Lo cual implica que $\alpha(V) \subset D^2$. De aquí, $t_0 \in V \subset \alpha^{-1}(D^2)$. Por lo tanto, $\alpha^{-1}(D^2)$ es abierto en I . De la conexidad de I , los únicos abiertos y cerrados de I son él mismo y el vacío. Lo cual implica que $\alpha^{-1}(D^2) = I$. Lo que lleva a que no es posible unir un punto de D^2 con un punto de la espiral X_0 por medio de una trayectoria. Por lo tanto, X no es conexo por trayectorias, lo que implica que X no es contráctil.

Finalmente mostraremos que el espacio X es pseudo-contráctil. Para esto tenemos que encontrar un continuo C , puntos $a, b \in C$, un punto $z_0 \in X$ y una función continuo $H : X \times C \rightarrow X$, $H(z, a) = z$ y $H(z, b) = z_0$ para todo $z \in X$.

Construyamos el continuo C . Sea $C = X_0 \cup S^1 \cup X_1$, donde $X_1 = \{z \in$

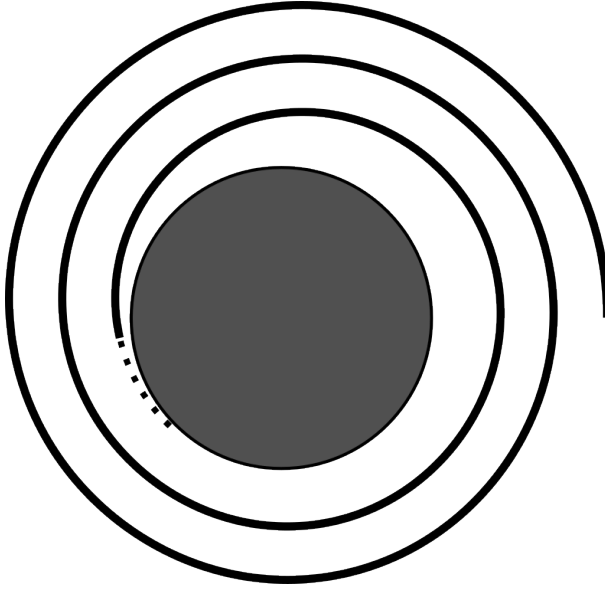


Figura 1: Continuo pseudo-contráctil, no contráctil propuesto por W. Kuperberg.

$\mathbb{C} : Im(z) = 0$ y $0 \leq Re(z) \leq 1$ }. Definamos la homotopía $H : X \times C \rightarrow X$ como sigue:

1. $H\left(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, \frac{t'+2}{t'+1}e^{it'}\right) = \frac{t+t'+2}{t+t'+1}e^{i(t+t')}$ si $t, t' \in [0, \infty)$,
2. $H\left(x, \frac{t+2}{t+1}e^{it}\right) = xe^{it}$ si $|x| \leq 1$ y $t \in [0, \infty)$,
3. $H(x, x') = xx'$ si $|x| \leq 1$ y $|x| = 1$ o $x' \in X_1$,
4. $H\left(\frac{t+1}{t+2}e^{it}, x\right)$ si $t \in [0, \infty)$, $|x| = 1$ o $x \in X_1$.

No es difícil ver que H es continua y satisface que $H(x, (2, 0)) = x$ y $H(x, (0, 0)) = (0, 0)$ para toda $x \in X$. De donde se concluye que X es pseudo-contráctil. En resumen X es un continuo pseudo-contráctil no contráctil. Cabe añadir que el espacio factor que W. Kuperberg usó no es el que aparece en esta descripción el que él utilizó era exactamente el mismo continuo X . Notemos que el espacio factor C es un subcontinuo de X , más aún C es un continuo irreducible en X entre $(0, 0)$ y $(0, 2)$.

□

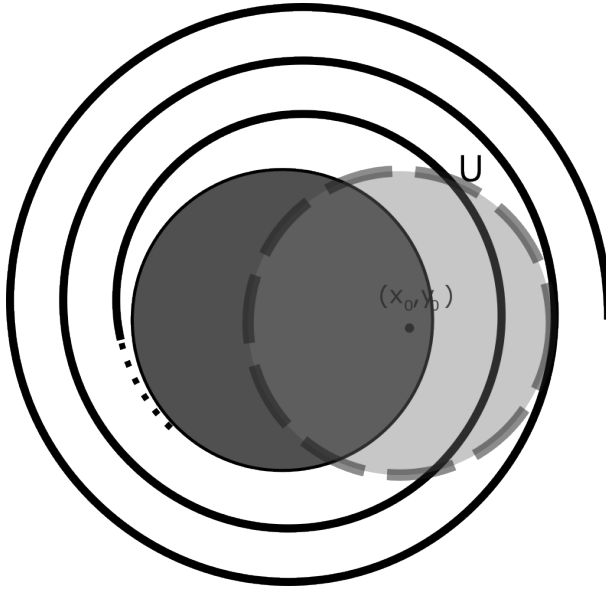


Figura 2: Continuo X , con un abierto U que contiene a (x_0, y_0)

Esto último nos hace ver que el espacio factor usado en la homotopía no tiene porque ser único. De hecho, se puede observar que si C es un espacio factor que funciona para la pseudo-contractibilidad, entonces cualquier subcontinuo $K \subseteq C$ tal que $a, b \in K$ funciona como espacio factor. Incluso si hay un continuo C que funcione para la pseudo-contractibilidad y hay un continuo K , y una función $f : K \rightarrow C$ continua tal que $a, b \in f(K)$, entonces K funciona como espacio factor. De hecho esta última propiedad es la que hace que si un espacio es pseudo-contráctil con espacio factor arco-conexo, entonces este es contráctil.

Veamos que al igual que la contractibilidad, la pseudo-contractibilidad es una propiedad topológica, es un invariante pseudo-homotópico y se preserva bajo retracciones. Recordemos que una propiedad P es una *propiedad topológica* o *topológicamente invariante* si siempre que un espacio topológico X tiene dicha propiedad, cualquier espacio homeomorfo a X también la tiene.

Teorema 4.4. *La pseudo-contractibilidad es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos y $\phi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces $Id_X \cong_* c_k$. Por el

Teorema 3.8, tenemos que

$$\begin{aligned}
 Id_X &\cong_* c_k \\
 \iff \phi \circ Id_X \circ \phi^{-1} &\cong \phi \circ c_k \circ \phi^{-1} \\
 \iff \phi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \phi^{-1} &\cong \phi \circ c_k \circ \phi^{-1} \\
 \iff Id_Y &\cong_* \phi \circ c_k \circ \phi^{-1},
 \end{aligned}$$

y como, $\phi \circ c_k \circ \phi^{-1}$ es una función constante en $C(Y, Y)$, tenemos que Y es pseudo-contráctil. \square

Definición 4.5. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que X y Y son *pseudo-homotópicamente equivalentes* (o tiene el mismo tipo de *pseudo-homotopía*), si existen dos funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ y dos continuos C y K tales que $f \circ g \cong_C Id_Y$ y $g \circ f \cong_K Id_X$.

Diremos que una propiedad P es un *invariante pseudo-homotópico* o *pseudo-homotópicamente invariante* si para cualquier continuo X que tiene dicha propiedad, cualquier espacio no degenerado pseudo-homotópico a X también la tiene.

Teorema 4.6. *La pseudo-contractibilidad es un invariante pseudo-homotópico.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos pseudo-homotópicamente equivalentes. Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces $Id_X \cong_* c_{x_0}$, con $x_0 \in X$. Por el Teorema 3.8, tenemos que

$$\begin{aligned}
 Id_X &\cong_* c_{x_0} \\
 \iff f \circ Id_X \circ g &\cong f \circ c_{x_0} \circ g \\
 \iff f \circ (g \circ f) \circ g &\cong f \circ c_{x_0} \circ g \\
 \iff (f \circ g) \circ (f \circ g) &\cong f \circ c_{x_0} \circ g \\
 \iff Id_Y &\cong_* f \circ c_{x_0} \circ g
 \end{aligned}$$

Y como, $f \circ c_{x_0} \circ g$ es una función constante en $C(Y, Y)$, se tiene que Y es pseudo-contráctil. \square

Sean X un espacio topológico y A un subespacio cerrado no vacío de X . Decimos que A es un *retracto* de X si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$.

Teorema 4.7. *Sean X un espacio topológico y A un espacio subconjunto cerrado de X . Si X es pseudo-contráctil y A es un retracto de X , entonces A es pseudo-contráctil.*

Demostración. Sea $r : X \rightarrow A$ una retracción. Por el Teorema 3.8, $r \circ Id_X \cong_* r \circ c_{a_0}$, con $a_0 \in A$. Así, $Id_A \cong_* c_{a_0}$, lo que implica que A es pseudo-contráctil. \square

Por otra parte, es sabido que si un espacio topológico es contráctil, entonces es conexo por trayectorias. Algo semejante ocurre cuando el espacio es pseudo-contráctil. En efecto, si X es un espacio compacto de Hausdorff y pseudo-contráctil, entonces X es conexo por continuos. Algunas otras propiedades interesantes que comparten los continuos pseudo-contráctiles con los contráctiles es que estos que también tienen forma trivial, tienen la Propiedad b y por lo tanto son uncoherentes.

Finalicemos esta sección con las siguientes preguntas.

Pregunta 4.8. ¿Bajo qué condiciones la pseudo-contractibilidad de espacios topológicos implica la contractibilidad?

Algunas respuestas parciales se tienen cuando el espacio factor es arco-conexo, o el espacio es un espacio métrico compacto ANR y se sabe que el único continuo encadenable que es pseudo-contráctil es el intervalo, en tal caso, es sabido que el intervalo es contráctil. En la siguiente sección mostraremos otro tipo de espacio, llamado hiperespacio de g-crecimiento en donde ambos conceptos coinciden.

De manera más particular se plantea lo siguiente.

Pregunta 4.9. [13, Pregunta 4.10] ¿Cada dendroide pseudo-contráctil, será contráctil?

Aunque lo primero que uno se debería de preguntarse es, ¿existen dendroides pseudo-contráctiles?

Pregunta 4.10. [32, Problema 118] ¿Existen curvas pseudo-contráctiles no contráctiles?

Pregunta 4.11. [28, Pregunta 19] ¿Existen continuos no degenerados (hereditariamente) indecomponibles que sean pseudo-contráctiles?

5 Hiperespacios de g -crecimiento

En esta sección definimos una clase especial de hiperespacios, en los cuales los conceptos de contractibilidad y pseudo-contractibilidad coinciden. Los espacios de g -crecimiento fueron introducidos en [6] por David Maya et al. Comencemos entonces esta sección con su definición.

Definición 5.1. Sea X un continuo y $\mathcal{H} \in 2^X$ no vacío, decimos que \mathcal{H} es un **hiperespacio de g -crecimiento** de X si siempre que $\mathcal{A} \in C(2^X)$ satisface que $\mathcal{A} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, se tiene que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{H}$.

Se sigue de la definición que si \mathcal{H} es un hiperespacio de g -crecimiento, $X \in \mathcal{H}$ y la intersección de una familia arbitraria de hiperespacios de g -crecimiento es también un hiperespacio de g -crecimiento.

Teorema 5.2. *El hiperespacio 2^X es un hiperespacio de g -crecimiento.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap 2^X \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, se tiene que $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$ (Véase [25, 1.48, pág. 100]). Por lo tanto, 2^X es un hiperespacio de g -crecimiento. \square

Teorema 5.3. *El hiperespacio $C(X)$ es un hiperespacio de g -crecimiento.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. Demostraremos que $\bigcup \mathcal{A}$ es compacto. Como \mathcal{A} es un subcontinuo de 2^X , entonces $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$. Por [25, 1.48, pág. 100] la función $\mathcal{U} : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ es una función continua, lo que implica que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto compacto de X . Ahora probaremos que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de X . Supongamos que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto desconexo de X . Dado que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado de X , existen H y K conjuntos cerrados de X , ajenos y no vacíos tales que $\bigcup \mathcal{A} = H \cup K$. Sea $A \in \mathcal{A} \cap C(X)$. Como A es conexo en X y dado que $\bigcup \mathcal{A} = H \cup K$, entonces $A \subseteq H$ o $A \subseteq K$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \subseteq H$. Definamos $\mathcal{A}_1 = \{L \in \mathcal{A} : L \subseteq H\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{L \in \mathcal{A} : L \cap K \neq \emptyset\}$. Ya que $A \in \mathcal{A}$ y $A \in H$, $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. Dado que $K \neq \emptyset$ y $K \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Por el Teorema 2.1, \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son subconjuntos cerrados de 2^X . Como H y K son ajenos, \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son ajenos y dado que $\bigcup \mathcal{A} = H \cup K$ se tiene que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Así, \mathcal{A} es desconexo en 2^X , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de X . \square

Proposición 5.4. *El hiperespacio $C_n(X)$ es un hiperespacio de g -crecimiento.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Si suponemos que $\bigcup \mathcal{A} \notin C_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ tiene al menos $n + 1$ componentes distintas, digamos B_1, \dots, B_{n+1} las cuales son conjuntos no vacíos cerrados ajenos cuya unión es \mathcal{A} . Sea $L \in \mathcal{A} \cap C_n(X)$, entonces existe $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ tal que $L \cap B_i = \emptyset$. Sean $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} : A \cap B_i \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : A \cap B_i = \emptyset\}$, por el Teorema 2.1, \mathcal{A}_0 y \mathcal{A}_1 son cerrados ajenos no vacíos en 2^X y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{A} \in C_n(X)$. \square

Usando las mismas ideas de la demostración del resultado anterior se puede probar que el hiperespacio $C_\infty(X)$ es un hiperespacio de g -crecimiento.

Teorema 5.5. Sean X un continuo, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Los hiperespacios $2_p^X = \{A \in 2^X : p \in A\}$, $C(X, p) = \{A \in C(X) : p \in A\}$ y $C_n(X, p) = \{A \in C_n(X) : p \in A\}$ son hiperespacios de g -crecimiento.

Demostración. Mostraremos primero que 2_p^X es un hiperespacio de g -crecimiento. Sea $\mathcal{A} \in C(2_p^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap 2_p^X \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{A} \cap 2_p^X$, entonces $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ y $p \in A$. Lo que implica que $p \in \bigcup \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in 2_p^X$. Para mostrar que $C(X, p)$ es un hiperespacio de g -crecimiento, sea $\mathcal{A} \in C(2_p^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C(X, p) \neq \emptyset$. Consideremos $B \in \mathcal{A} \cap C(X, p)$, entonces $B \in C(X)$ y $p \in B$, esto implica que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. Así, $\bigcup \mathcal{A} \in C(X)$. Ahora como $B \in \mathcal{A}$, se tiene que $B \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, por lo tanto $p \in \bigcup \mathcal{A}$. Así, $\bigcup \mathcal{A} \in C(X, p)$. Se deja al lector que demuestre que $C_n(X, p)$ es un hiperespacio de g -crecimiento. \square

No es complicado mostrar que si $\varepsilon > 0$, el hiperespacio $\mathcal{D} = \{B \in 2^X : H(X, B) \leq \varepsilon\}$ es de g -crecimiento.

Definición 5.6. Si X es un continuo. Una **función de Whitney** para 2^X , es una función continua $\mu : 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$,
2. Para $A, B \in 2^X$, si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Se sabe por [16, Teorema 13.4] que siempre existen las funciones de Whitney y $\mu|_{C(X)}$ es una función de Whitney para $C(X)$. No es complicado mostrar que para una función de Whitney de 2^X se tiene que $\mu^{-1}([t, 1])$ con $t \in [0, 1]$ es un hiperespacio de g -crecimiento.

Proposición 5.7. *Sea X un continuo y \mathcal{H} un hiperespacio de g -crecimiento de X . Si μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0, 1]$, entonces $\mu^{-1}(t) \subseteq \mathcal{H}$ si y sólo si $\mu^{-1}([t, 1]) \subseteq \mathcal{H}$.*

Demostración. Supongamos que $\mu^{-1}(t) \subseteq \mathcal{H}$ y sea $A \in \mu^{-1}([0, 1])$. Nótese que $\mu|_{C(A)}$ es una función de Whitney para $C(A)$ y $(\mu|_{C(A)})^{-1}(t) = \mu^{-1}(t) \cap C(A) = \{B \in \mu^{-1}(t) : B \subseteq A\} \in C(2^X)$. Si $\mathcal{H} \cap \{B \in \mu^{-1}(t) : B \subseteq A\} \neq \emptyset$ y dado que $A = \bigcup \{B \in \mu^{-1}(t) : B \subseteq A\}$, obtenemos que $A \in \mathcal{H}$ por definición de hiperespacio de g -crecimiento. Por lo tanto, $\mu^{-1}([t, 1]) \subseteq \mathcal{H}$. La otra implicación es inmediata. \square

Como corolario al resultado anterior se puede ver si que X es un continuo y \mathcal{H} es un hiperespacio de g -crecimiento, entonces $F_1(X) \subseteq \mathcal{H}$ si y sólo si $C(X) \subseteq \mathcal{H}$

Definición 5.8. Dados $A, B \in 2^X$ con $A \subset B$, diremos que una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ es un *arco ordenado* de A a B en $C(X)$, si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, cuando $0 \leq s < t \leq 1$.

Teorema 5.9. [25, Teorema 1.8, pág. 59] Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subseteq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y sólo si toda componente de B intersecta a A .

Proposición 5.10. *Todo hiperespacio de g -crecimiento de un continuo es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea X un continuo y \mathcal{H} un hiperespacio de g -crecimiento de X . Para demostrar que \mathcal{H} es arco-conexo, es suficiente demostrar que la imagen de todo arco ordenado de cualquier elemento de \mathcal{H} a X está contenido en \mathcal{H} . Sea $G \in \mathcal{H}$, por el Teorema 5.9, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ de G a X . Ahora, si $t \in [0, 1]$, entonces $\alpha([0, t]) \in C(2^X)$ y satisface que $G \in \mathcal{H} \cap \alpha([0, t])$ y $\alpha(t) = \bigcup \alpha([0, t])$. Dado que \mathcal{H} es un hiperespacio de g -crecimiento, $\alpha(t) \in \mathcal{H}$; es decir, $\alpha([0, 1]) \subset \mathcal{H}$, para toda $t \in [0, 1]$. Así, \mathcal{H} es conexo por trayectorias. \square

Teorema 5.11. *Sean X, Y y K continuos, y sea \mathcal{H} un hiperespacio de g -crecimiento de Y . Si $G : X \times K \rightarrow \mathcal{H}$ es una función continua, entonces la función $\hat{G} : X \times C(K) \rightarrow \mathcal{H}$ definida por $\hat{G}(x, B) = \bigcup G(\{x\} \times B)$ satisface las siguientes condiciones:*

1. \hat{G} está bien definida y es continua,
2. $\hat{G}(x, \{t\}) = G(x, t)$ para cada $(x, t) \in X \times K$,
3. Si $t \in T \in C(K)$ y $G(x, t) \in \mathcal{H}'$ para algún hiperespacio de g -crecimiento \mathcal{H}' de Y contenido en \mathcal{H} , entonces $\hat{G}(x, T) \in \mathcal{H}'$.

Demostración. De la continuidad de G junto con [25, Lema 1.48] y la definición de hiperespacio de g -crecimiento obtenemos 1. La condición 2 es inmediata a partir de la definición de \hat{G} . La condición 3 se sigue de la definición de hiperespacio de g -crecimiento. \square

El siguiente resultado muestra que dos funciones pseudo-homotópicas son homotópicas cuando el contradominio es un hiperespacio de g -crecimiento.

Teorema 5.12. *Sean X y Y continuos, sea \mathcal{H} un hiperespacio de g -crecimiento de Y y sean $f, g : X \rightarrow \mathcal{H}$ funciones continuas. Entonces f y g son pseudo-homotópicas si y sólo si f y g son homotópicas.*

Demostración. Supongamos que f y g son pseudo-homotópicas. Entonces existen un continuo K , puntos $a, b \in K$ y una función continua $G : X \times K \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $G(x, a) = f(x)$ y $G(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$. Así, por el Teorema 5.11, la función $\hat{G} : X \times C(K) \rightarrow \mathcal{H}$ satisface $\hat{G}(x, \{a\}) = f(x)$ y $\hat{G}(x, \{b\}) = g(x)$ para cada $x \in X$. Dado que $C(K)$ es arco-conexo, se sigue que f y g son homotópicas. La implicación inversa es inmediata. \square

Corolario 5.13. *Sea X un continuo y sea \mathcal{H} un hiperespacio de g -crecimiento de X . Entonces \mathcal{H} es pseudo-contráctil si y sólo si \mathcal{H} es contráctil.*

Se dice que un subespacio Y de X es (pseudo-)contráctil en X si la función inclusión de Y en X es (pseudo-)homotópica a una función constante en X .

Es fácil ver que si X es pseudo-contráctil, entonces cualquier subespacio Y de X es pseudo-contráctil en X . En [20, Lema 3.1, pág. 25] se muestra cuando 2^X y $C(X)$ son contráctiles, asumiendo sólo la contractibilidad de $F_1(X)$ en 2^X o en $C(X)$, de hecho se prueba la equivalencia entre ellas.

El siguiente resultado generaliza [20, Lema 3.1, pág. 25].

Teorema 5.14. *Sea X un continuo y sea \mathcal{H} un hiperespacio de g -crecimiento de X que contiene a $F_1(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. 2^X es contráctil,
2. $F_1(X)$ es contráctil en 2^X ,
3. \mathcal{H} es contráctil,
4. $F_1(X)$ es contráctil en \mathcal{H} ,
5. \mathcal{H} es pseudo-contráctil,
6. $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en \mathcal{H} .

Demostración. Por [20, Lema 3.1, pág. 25] las condiciones 1 y 2 son equivalentes. La equivalencia entre 3 y 5 es consecuencia del Teorema 5.13. Las condiciones 4 y 6 se siguen de 3 y 5 respectivamente. Ahora, supongamos que \mathcal{H} es contráctil. Como $F_1(X)$ es un subespacio de $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, $F_1(X)$ es contráctil en 2^X . Por lo tanto, 3 implica 2.

Supongamos que 2^X es contráctil. Entonces, existe una función continua $L : 2^X \times [0, 1] \rightarrow 2^X$ tal que $L(A, 0) = A$ y $L(A, 1) = X$ para cada $A \in 2^X$. Definimos $M : \mathcal{H} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $M(A, t) = \bigcup L(\{A\} \times [0, t])$ para cada $(A, t) \in \mathcal{H} \times [0, 1]$. Probaremos que M está bien definida. Sea $(A, t) \in \mathcal{H} \times [0, 1]$. La continuidad de L implica que $L(\{A\} \times [0, t]) \in C(2^X)$. Dado que $A \in L(\{A\} \times [0, t]) \cap \mathcal{H}$ y \mathcal{H} es un hiperespacio de g -crecimiento de X se tiene que $\bigcup L(\{A\} \times [0, t]) = M(A, t) \in \mathcal{H}$. La continuidad de M se sigue de la continuidad de L y el Teorema [25, lema 1.49]. Notemos que $M(A, 0) = A$ y $M(A, 1) = X$ para cada $A \in \mathcal{H}$. Por lo que \mathcal{H} es contráctil. Por lo tanto, 1 implica 3.

Si $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en \mathcal{H} . Sea $i : F_1(X) \rightarrow \mathcal{H}$ la función inclusión, entonces i es pseudo-homotópica a una función constante en \mathcal{H} . Por el Teorema 5.12, tenemos que i es homotópica a una función constante. Por lo que $F_1(X)$ es contráctil en \mathcal{H} . Por lo tanto 6 implica 4.

Es inmediato que 4 implica 6. Finalmente, si suponemos 4, entonces $F_1(X)$ es contráctil en 2^X . Por lo tanto, 4 implica 2.

□

Notemos que la condición de que $F_1(X)$ sea subconjunto de un hiperespacio de g -crecimiento es esencial para que la condición de contractibilidad de \mathcal{H} implique la contractibilidad de 2^X .

Por ejemplo, dado un continuo X y $p \in X$ se sabe que $C(X, p)$ es un hiperespacio de g -crecimiento y que siempre es contráctil y además $F_1(X) \not\subseteq C(X, p)$. Por otra parte se sabe de la existencia de un continuo X cuyo hiperespacio 2^X no es contráctil (Véase [6]). De esta manera existe un continuo X tal que 2^X no es contráctil, sin embargo el hiperespacio de g -crecimiento $C(X, p)$ si lo es.

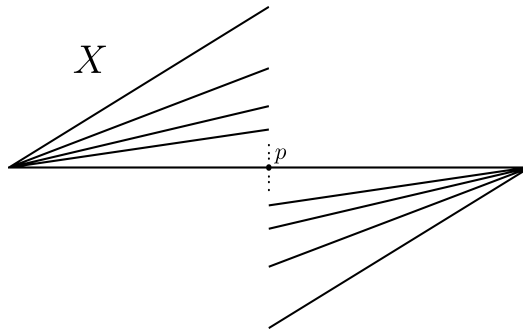


Figura 3: Ejemplo de un continuo cuyo hiperespacio 2^X no es contráctil.

Otro ejemplo del hecho anterior es el continuo de la Figura 3. Este cumple que $\mathcal{H} = C(X) \setminus \{\{p\}\}$ es un hiperespacio de g -crecimiento contráctil y $F_1(X) \not\subseteq \mathcal{H}$, pero $C(X)$ no es contráctil, lo que hace que 2^X tampoco lo sea (Para la prueba de esto se puede consultar [7, Ejemplo 4.3, pág. 9]).

6 Conjuntos rígidos y pseudo-contractibilidad

A continuación daremos una breve bosquejo histórico de como ha evolucionado el concepto de ciertos conjuntos “rígidos” y la relación que guarda con la (pseudo-)contractibilidad.

Uno de los primeros resultados que muestran que la rigidez bajo homotopías de ciertos conjuntos no permiten la contractibilidad de continuos se debe a J. J. Charatonik y Z. Grabowski; ellos en 1976, probaron en [10] el siguiente resultado para mostrar la no contractibilidad de dendroides.

Proposición 6.1. [10, Proposición 1, pág. 230] Si un espacio topológico X contiene 2 conjuntos A, B tales que $A \neq \emptyset$ y $B \neq X$, y para cada deformación $H : X \times I \rightarrow X$ se tiene que $H(A \times I) \subseteq B$, entonces X no es contráctil.

Demostración. Supongamos que existe una contracción $H : X \times I \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = z$, para algún $z \in X$ y para toda $x \in X$ y además $H(A \times I) \subseteq B$. Dado que X es contráctil, entonces es arcoconexo, esto nos permite elegir el punto de contracción z de tal manera que $z \in X \setminus B$. Por otra parte, si $x \in A$, tenemos que $H(x, 1) = z \notin B$, pero esto contradice el hecho de que $H(A \times I) \subseteq B$. Por lo tanto, X no es contráctil. \square

Si un conjunto A satisface las hipótesis de la proposición anterior, con $A = B$, se dice que A es *homotópicamente fijo*. Por lo tanto, haciendo uso de la proposición anterior y de esta definición, se tiene que si un espacio contiene un conjunto homotópicamente fijo, entonces no es contráctil. En este mismo artículo introducen el concepto de R -arco, [10, Definición 4, pág. 230], y muestran que si un dendroide contiene un R -arco, entonces el R -arco es homotópicamente fijo y, por lo tanto, el dendroide no es contráctil (Véase [10, Teorema 5, pág. 231] y [11, Corolario 6, pág. 232]). La letra R se debe a la palabra en el idioma inglés “Rigid”.

Posteriormente, en 1978, S. T. Czuba en [14] define los R -continuos, generalizando con ello la noción de R -arco y dando seguimiento al estudio de determinar la no contractibilidad de los dendroides; mostrando que todo R -continuo es homotópicamente fijo [14, Teorema 3, pág. 300], y como consecuencia, todo dendroide con un R -continuo es no contráctil ([14, Corolario 4 pág. 302]). Adicionalmente, Czuba muestra un dendroide con un R -continuo que no es R -arco, mostrando de esta manera que estos conceptos son diferentes.

Ya en 1980, Czuba introduce en [15, Definición 1.1-1.3, pág. 75] tres tipos especiales de subconjuntos en dendroides llamados R^i -continuos ($i \in \{1, 2, 3\}$). Cada uno de ellos generaliza el concepto de R -continuo dado por él mismo. Cabe notar que los conceptos de R -continuo y R^1 -continuo coinciden.

Definiremos estos conjuntos para los fines de este trabajo.

Definición 6.2. Sea X un espacio y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X , definimos el *límite inferior* de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y el *límite superior*

de $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, respectivamente, como los conjuntos:

$$\text{Li}(A_n) = \left\{ \begin{array}{l} x \in X : \text{para todo abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U, \\ \text{existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo } n \geq N \end{array} \right\}$$

y,

$$\text{Ls}(A_n) = \left\{ \begin{array}{l} x \in X : \text{para todo abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U, \text{ existe} \\ J \subset \mathbb{N} \text{ infinito tal que } U \cap A_j \neq \emptyset \text{ para todo } j \in J \end{array} \right\}$$

Definición 6.3. Si existe $A \subseteq X$ tal que $\text{Li}(A_n) = A = \text{Ls}(A_n)$, entonces A es llamado el *límite* de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ y se denota por:

$$\text{lím}(A_n).$$

Procedamos a definir lo que es un R^i -continuo.

Definición 6.4. Sea $K \in CX) \setminus \{X\}$. Diremos que K es:

1. Un R^1 -continuo si existe un abierto U de X que contiene a K y 2 sucesiones $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de U tales que $\text{Li}(C_n^1) \cap \text{Ls}(C_n^2) = K$,
2. Un R^2 -continuo si existe un abierto U de X que contiene a K y 2 sucesiones $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de U tal que $\text{lím } C_n^1 \cap \text{lím } C_n^2 = K$,
3. Un R^3 -continuo si existe un abierto U de X que contiene a K y una sucesión $\{C_n\}$ de componentes de U tal que $\text{Li}(C_n) = K$.

En [15, Proposición 5, pág. 71], se prueba que cada R^2 continuo es ambos un R^1 y un R^3 continuo. En [15, Proposición 10, pág. 78] se demuestra que un R^1 continuo contiene un R^2 y en [15, Corolario 11, pág. 78] se muestra cada R^1 continuo contiene un R^3 continuo y si un R^1 continuo es un conjunto unipuntual, entonces es ambos un R^2 y un R^3 continuo.

Es de notar que W. J. Charatonik en un afán por generalizar los resultados anteriores a espacios más generales, afirma que lo anterior se cumple si intercambiamos a los dendroides por continuos en general. Sin embargo, en 1994, C. J. Rhee et al., se dan cuenta que la prueba en [12, Proposición 1, pág.

208] no es correcta. Dan entonces en [29, Ejemplo 6, pág. 112] un ejemplo para mostrar la falsedad. Desafortunadamente, este ejemplo es incorrecto y P. Pellicer en [27] muestra que [30, Ejemplo C, pág. 112] no es correcto, para finalmente mostrar con un ejemplo ([27, Ejemplo 4.14, pág. 17]) la falsedad de [12, Proposición 1, pág. 208].

Posteriormente en 1997, B. S. Baik et al, definieron en [2] a los un R^i -conjuntos, generalizando de esta manera las nociones de los R^i -continuos de Czuba. Aquí, en lugar de considerar en la definición de R^i -continuos un continuo K , lo sustituyen por un subconjunto cerrado cumpliendo las mismas condiciones que satisfacen los R^i -continuos.

Algunos resultados importantes en relación a los R^i -conjuntos son los siguientes:

1. Cada R^2 -conjunto es ambos: un R^i -conjunto y un R^3 -conjunto ([2, Teorema 2.3, pág. 310]),
2. Cada R^1 -conjunto contiene un R^2 -conjunto y como consecuencia, cada R^1 -conjunto contiene un R^3 -conjunto ([2, Teorema 2.4, pág. 310] y [2, Corolario 2.5, pág. 310]),
3. Existe un continuo con un R^1 -conjunto conexo que no es un R^3 -conjunto y existe un continuo con un R^3 -conjunto no conexo que no es un R^1 -conjunto (Véase [2, Ejemplo A, pág. 310] y [2, Ejemplo B, pág. 311]),
4. Existe un continuo con un conjunto cerrado no conexo que es ambos: un R^1 -conjunto y R^3 -conjunto, pero no es un R^2 -conjunto ([2, Ejemplo C, pág. 312]).

Una vez analizadas estas propiedades, P. Pellicer, junto con uno de sus estudiantes, hicieron notar en [27] que los ejemplos mostrados en el numeral 3, arriba citado, no son correctos, pues no satisfacen las propiedades requeridas. A pesar de ser erróneos estos ejemplos, es correcta la afirmación dada por J. Rhe. P. Pellicer muestra en [27, Ejemplo 4.1, pág. 13 y Ejemplo 4.6, pág. 14] ejemplos correctos que cumplen 3.

Con respecto a la contractibilidad, en [2] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 6.5. [2, Teorema 3.2, pág. 315] Si un continuo X contiene un R^i -conjunto K , entonces K es homotópicamente fijo.

Como consecuencia de ello, un continuo que contiene un R^i -conjunto es no contráctil (Véase [2, Corolario 3.3, pág. 317]). En 2018, F. Capulín et al, generalizan este resultado para pseudo-contractibilidad; prueban que si un continuo contiene un R^i -conjunto, entonces el continuo no es pseudo-contráctil (Véase [5, Teorema 4.3, pág. 366]). Finalmente, en [8], David Maya et al, introducen el concepto de R^4 -continuo, mostrando, entre otras cosas, la relación que se tiene con los R^i -conjuntos y con la pseudo-contractibilidad.

Veamos con un poco más detenimiento este nuevo concepto y algunas de sus relaciones con otros “personajes topológicos”.

Primero presentaremos algunas definiciones y notaciones previas para definir lo que es un R^4 -continuo.

Sea $p \in X$, un elemento $A \in C(p, X)$ es *admisibile* en p , si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cada $y \in B(\delta, p)$ está en algún subcontinuo B de X con $H(A, B) < \varepsilon$.

Para cada $x \in X$, $a(x)$ denotará la colección

$$\{A \in C(x, X) : A \text{ es admisible en } x\}.$$

Esta familia se llama la fibra *admisibile* en x .

Para un subcontinuo R , un punto $p \in R$ y $\varepsilon > 0$, definimos el siguiente conjunto.

$$\Delta(p, R, \varepsilon) = \left\{ \delta > 0 : \begin{array}{l} \text{cada } q \in B(\delta, p) \text{ está en algún } M \in a(q) \\ \text{que cumple que } H(R, M) < \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Es de notarse que si $\delta \in \Delta(p, R, \varepsilon)$, entonces $(0, \delta) \subseteq \Delta(p, R, \varepsilon)$ y que $\Delta(p, \{p\}, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Ahora consideremos un subconjunto abierto U de X y $p \in U$. Definimos

$$\mathcal{A}(p, U) = \{R \in C(p, X) : R \subseteq U \text{ y } \Delta(p, R, \varepsilon) \neq \emptyset \text{ para cada } \varepsilon > 0\}.$$

El siguiente resultado muestra una manera de determinar cuando un elemento pertenece a $\mathcal{A}(p, U)$

Teorema 6.6. [8, Teorema 3.1, pág. 3] Sean U un abierto de X y $p \in U$. Sea $B \in C(p, X)$ tal que $B \subseteq U$. Entonces $B \in \mathcal{A}(p, U)$ si y sólo si para cada sucesión (q_n) que converge a p , existe una sucesión creciente $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ y una sucesión $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C(X)$ tal que $B_k \subseteq a(q_{n_k})$ y $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a B .

Lema 6.7. [8, Lema 3.2, pág. 3] Sean U un subconjunto abierto de X y $p \in X$. Sea $K \in 2^X$ tal que $K \subseteq U$. Si cada $D \in \mathcal{A}(p, U)$ satisface que $D \subseteq K$, entonces $\mathcal{A}(p, U)$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$.

A continuación definiremos lo que es un R^4 -continuo.

Definición 6.8. Un subcontinuo K de X es llamado R^4 -continuo si existen un abierto $U \subset X$ y $p \in U$ tal que $p \in K \subseteq U$ y K es un elemento maximal en el conjunto ordenado $(\mathcal{A}(p, U), \subseteq)$.

En [8] se muestra que existe un continuo con un R^4 -continuo que no es un R^3 -conjunto ni tiene R^i -conjuntos (Véase [8, Ejemplo 3.12, p.5] y ??).

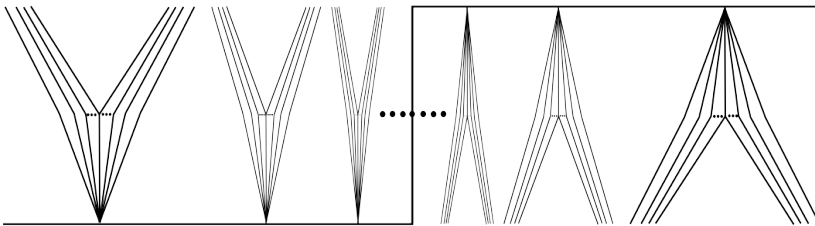


Figura 4: Ejemplo de un continuo con un R^4 -continuo que no es un R^3 -conjunto.

En [8, Ejemplo 3.13, p.7], se muestra un ejemplo de un continuo que contiene un R^3 -conjunto que no es R^4 -continuo.

El siguiente resultado muestra una relación entre los R^3 -conjuntos y los R^4 -continuos

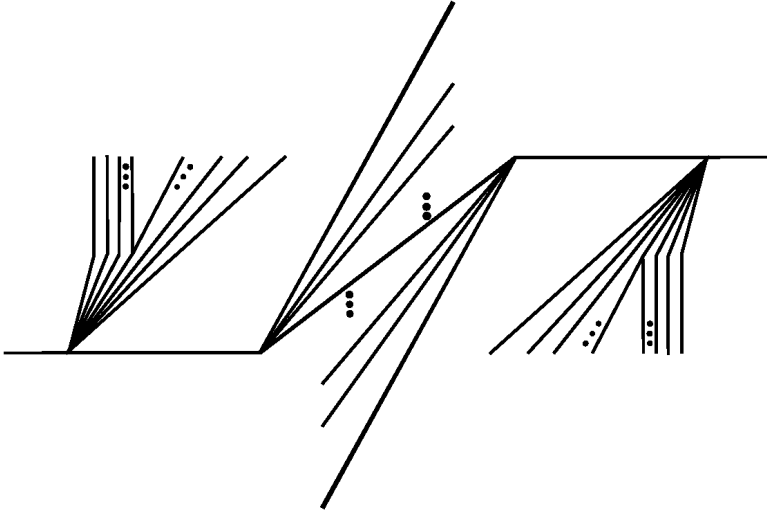


Figura 5: Ejemplo de un continuo con un R^3 -conjunto que no es un R^4 -continuo.

Teorema 6.9. [8, Teorema 3.9, p.4] Si K es un R^3 -conjunto, entonces K contiene un R^4 -continuo de X .

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X y sea $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de componentes de U tal que $K = \text{Li}(C_n)$ y $K \subseteq U$. Tomemos $p \in K$ y $L \in \mathcal{A}(p, U)$. Demostremos que $L \subseteq K$. Sea $z \in L$ y W un subconjunto abierto de X tal que $z \in W$. Dado que $L \subseteq U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, L) \subseteq U$ y $B(\varepsilon, z) \subseteq W$. El hecho de que $L \in \mathcal{A}(p, U)$ implica la existencia de $\delta \in \Delta(p, L, \varepsilon)$. Por otra parte, como $p \in \text{Li}C_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(\delta, p) \cap C_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Tomemos $m \geq N$ y $y \in B(\delta, p) \cap C_m$. Sea $B \in a(y)$ tal que $H(B, L) < \varepsilon$; esto es, $B \subseteq N(\varepsilon, L)$ y $L \subset N(\varepsilon, B)$. Dado que $B \subseteq N(\varepsilon, L)$ y $N(\varepsilon, L) \subseteq U$, se tiene que B es un subconjunto conexo de U , y como B intersecciona a C_m y C_m en una componente de U , B debe estar contenido en C_m . Ahora bien, las condiciones $z \in L$ y $L \subseteq N(\varepsilon, B)$ implican conjuntamente que $B(\varepsilon, z) \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto, $W \cap C_m$ no es vacío y dado que $m \geq N$, entonces $z \in K$. Por [8, Lema 3.2, p.3], obtenemos que $\mathcal{A}(p, U)$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$. Aplicando [16, Teorema del Máximo-Mínimo, pág. 110] para concluir que existe un elemento máximo de $\mathcal{A}(p, U)$. Por lo tanto, X contiene un R^4 -continuo contenido en K .

□

Como consecuencia inmediata se tiene que si K es un R^3 -conjunto degenerado, entonces K es un R^4 -continuo ([8, Corolario 3.10, pág. 4] y si X contiene un R^i -conjunto, $i \in \{1, 2, 3\}$) entonces X contiene un R^4 -continuo ([8, Corolario 3.11, pág. 4]).

De lo anterior, se pueden formular las siguientes preguntas.

Pregunta 6.10. ¿Existirá un abanico con un R^3 -conjunto conexo que no sea un R^4 -continuo?

Pregunta 6.11. ¿Existirá un abanico con un R^4 -continuo sin R^i -conjuntos?

Esto equivale a las siguientes preguntas.

Pregunta 6.12. ([8, Question 3.14, pág. 7]) ¿Cada R^4 -continuo en un abanico es un R^3 -conjunto?

Pregunta 6.13. ([8, Question 3.15, pág. 7]) ¿Cada R^3 -continuo en un abanico es un R^4 -continuo?

Lema 6.14. [8, Lema 4.2, pág. 8] Sean T un continuo, $a \in T$, $k \in C(X)$ y sea $M \in C(a, T)$. Si $h : X \times T \rightarrow X$ en una función continua tal que $h(x, a) = x$ para cada $x \in X$, entonces la función $G : X \rightarrow C(X)$ definida por $G(x) = h(\{x\} \times M)$ es una función continua tal que $G(x) \in a(x)$ para cada $x \in X$.

Demostración. Por [16, Lema 13.3, pág. 106] la función h induce la función $C(h) : C(X \times T) \rightarrow C(X)$ definida por $C(h)(L) = h(L)$. Definamos ahora la función $f : X \rightarrow C(X \times T)$ dada por $f(x) = \{x\} \times M$. No es difícil conversearse de que f es continua. De esta manera, $G = C(h) \circ f$ resulta ser continua.

Por otra parte, observemos que como $h(x, a) = x$ y $a \in M$, entonces $G(x) \in C(x, X)$ para cada $x \in X$. De la continuidad de G , se tiene que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $q \in B(\delta, x)$, entonces $H(G(q), G(x)) < \varepsilon$, lo que prueba que $G(x) \in a(x)$ para cada $x \in X$. □

Ahora probaremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 6.15. [8, Teorema 4.3, pág. 9] Si un continuo X contiene un R^4 -continuo, entonces X no es pseudo-contráctil.

Demostración. Sean K un R^4 -continuo de X , U un subcontinuo abierto de X y $p \in U$ tales que $p \in K \subseteq U$ y K es el elemento máximo del conjunto ordenado $(\mathcal{A}(p, U), \subseteq)$.

Para la prueba procedamos por contradicción. Supongamos que X es pseudo-contráctil y que el punto z al cual X se pseudo-contrae está en $X \setminus K$. De aquí, existe un continuo T , puntos $a, b \in T$ y una función continua $h : X \times T \rightarrow X$ tal que $h(x, a) = x$ y $h(x, b) = z$ para toda $x \in X$.

Definamos el conjunto $\mathcal{B} = \{B \in C(a, T) : h(\{p\} \times B) \subseteq K\}$. Observemos que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues $h(\{p\} \times \{a\}) \subseteq K$. Mostraremos primero que \mathcal{B} es abierto y cerrado de $C(a, T)$. Para mostrar que \mathcal{B} es cerrado en $C(a, T)$, sea $\{B_n\}$ una sucesión en \mathcal{B} que converge a $L \in C(X)$. Como cada $B_n \in \mathcal{B}$, entonces $a \in L$ y $h(\{p\} \times B_n) \subseteq K$. Aplicando [21, Fórmula 2, pág. 339] se sigue que $h(\{p\} \times L) \subseteq K$. De donde, \mathcal{B} es cerrado. Para probar que \mathcal{B} es abierto, tomemos $B \in \mathcal{B}$. Esto implica que $\{p\} \times B \subseteq h^{-1}(U)$. Por el Lema del Tubo [24, Lema 26.8, pág. 191], existe un abierto V de T tal que $B \subseteq V$ y $\{p\} \times V \subseteq h^{-1}(U)$. Así, existe $r > 0$ tal que $N(r, B) \subseteq V$. Sea $M \in B_H(r, B) \cap (a, T)$. Tomemos una función $G : X \rightarrow C(X)$ definida por $G(x) = h(\{x\} \times M)$. Mostraremos que $G(p) \in \mathcal{A}(p, U)$. Notemos primero que $G(p) \subseteq U$. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 6.14, existe $\delta > 0$ tal que si $q \in B_\delta(p)$, entonces $G(q) \in a(q)$ y es tal que $H(G(p), G(q)) < \varepsilon$. De esta manera, $G(p) \in \mathcal{A}(p, U)$.

Del hecho de que K es el máximo de $\mathcal{A}(p, U)$, se sigue que $G(p) \subseteq K$. Por lo que \mathcal{B} es un conjunto abierto de $C(a, T)$. Por la conexidad de $C(a, T)$, tenemos que $C(a, T) = \mathcal{B}$. De esta manera, $h(\{p\} \times T) \subseteq K$. Así, $Z = h(p, b) \in K$, lo cual contradice la elección de Z . Por lo que estuvo mal suponer que X es pseudo-contráctil. Por lo tanto, X no es pseudo-contráctil.

□

Como corolario tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.16. [8, Corolario 4.5, p.120] *Cada continuo que contiene un R^i -conjunto ($i = 1, 2, 3$) no es pseudo-contráctil.*

7 Conjuntos rígidos, hiperespacios y pseudocontractibilidad

Desde la aparición de los hiperespacios es muy común determinar si siempre que el espacio base X tiene una propiedad específica, alguno de sus hiperespacios la hereda y viceversa. Por mencionar una de las más comunes pero no menos importante es que si X es un continuo, entonces los hiperespacios 2^X , $C(X)$, $F_n(X)$, $C_n(X)$ (con $n \in \mathbb{N}$) son continuos.

En esta sección veremos que la propiedad de tener R^i conjuntos (continuos) es preservada a alguno de los hiperespacios de X . Daremos un bosquejo cronológico de resultados relacionados con los R^i -continuos, R^i -conjuntos, (pseudo-)contractibilidad e hiperespacios.

En 1986, W. J. Charatonik prueba en [12] que si un continuo X contiene un R^i -continuo para algún $i = 1, 2, 3$, entonces los hiperespacios 2^X y $C(X)$ contienen un R^i -continuo. De hecho prueba que si K es un R^i continuo, entonces 2^K es un R^i -continuo en 2^X ; aunque $C(K)$ no necesariamente es un R^i -continuo de $C(X)$ (Véase [12, Teorema 3, pág. 209]).

Como consecuencia de esto, 2^X y $C(X)$ no son contráctiles (Véase [12, Corolario 4, pág. 4]). Sin embargo, C. J. Rhee muestra bajo un ejemplo en [29] que la prueba de [12, Teorema 6, pág. 211] no es correcta. El ejemplo señalado es el mismo que aparece en [14, Ejemplo 4].

Por otra parte, C. J. Rhee *et. al.* muestran en [29] que si $K = \lim C_n^1 \cap C_n^2 \subseteq U$ es un R^2 -continuo de un continuo X tal que la sucesión $\{C_n^i\}_{n=1}^\infty$ ($i = 1, 2$) converge ω -regularmente, entonces $C(K)$ es un R^2 -continuo en $C(X)$ (Véase [29, Teorema 3.3, pág. 110]).

Para la definición de convergencia ω -regular, véase [29, Definición 2.6].

Los resultados más destacados en [29] son los siguientes:

Teorema 7.1. [29, Teorema 3.4, pág. 111] Si $K = LsC_n^1 \cap LsC_n^2$ es un R^1 -continuo en un continuo X teniendo la propiedad de que cada subsucesión convergente de $\{C_n^i\}_{n=1}^\infty$ ($i = 1, 2$) converge ω -regularmente, entonces $K = LsC(C_n^1) \cap LsC(C_n^2)$ es un R^1 -continuo de $C(X)$.

Teorema 7.2. [29, Teorema 3.5, pág. 111] Si $K = LiC_n \subseteq U$ es un R^3 -continuo de un continuo X con la propiedad de que cada subsucesión con-

vergente de $\{C_n^i\}_{n=1}^\infty$ converge ω -regularmente, entonces $\mathcal{K} = LiC(C_n)$ es un R^3 -continuo de $C(X)$.

En 1994, A. Illanes prueba, entre otras cosas, en [16], que las siguientes proposiciones son equivalentes cuando el continuo es hereditariamente unicoherente.

1. X contiene un R^3 -continuo;
2. 2^X contiene un R^3 -continuo;
3. $C(X)$ contiene un R^3 -continuo.

Muestra también, bajo un ejemplo que 3 no implica 2 cuando X no es hereditariamente unicoherente 3 no implica 2 (Véase [16, Ejemplo 2.1, pág. 533]). Por otra parte, una vez que se definieron los R^i -conjuntos, Baik et al prueban en [2] que si un continuo X contiene un R^i -conjunto ($i = 1, 2, 3$), entonces 2^X contiene un R^i -conjunto ($i = 1, 2, 3$), (Véase [2, Teorema 3.6, pág. 317]) y en [2, Teorema 3.7, pág. 318] se prueba que si un continuo X contiene un R^i -conjunto entonces $C(X)$ contiene un R^i -conjunto y como claro corolario se tiene que ambos hiperespacios no son contráctiles (Véase [2, Corolario 3.8 pág. 318]).

Finalmente mostraremos aquí que si un continuo X contiene un R^4 -continuo, entonces cierta clase de hiperespacios tienen un R^4 -continuo y como consecuencia resultan no contráctiles.

Mencionaremos y desarrollaremos algunos resultados para este fin.

Lema 7.3. [8, Lema 3.2, pág. 3] Sean U un subconjunto propio de X , $p \in U$, y $K \in 2^X$ tal que $p \in K \subseteq U$. Si cada $D \in \mathcal{A}(p, U)$ satisface que $D \subseteq K$, entonces $\mathcal{A}(p, U)$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$.

Lema 7.4. [8, Lema 5.2, pág. 9] Sean \mathcal{H} un hiperespacio de 2^X que contiene a $F_1(X)$, \mathcal{Z} un subconjunto cerrado de 2^X y $q \in X$. Si $\mathcal{Z} \in a_{\mathcal{H}}(\{q\})$, entonces $\bigcup \mathcal{Z} \in a_X(q)$.

Lema 7.5. [8, Lema 5.3, pág. 9] Sean \mathcal{H} un subconjunto de 2^X que contiene a $F_1(X)$, U un abierto de X y $p \in U$. Si $\mathcal{D} \in \mathcal{A}(\{p\}, 2^U \cap \mathcal{H})$, entonces $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{A}(p, U)$.

Lema 7.6. [8, Lema 5.4, pág. 9] Sea K un subcontinuo de X y sea U un subcontinuo de X y $p \in U$. Si $K \in \mathcal{A}(p, U)$, entonces $2^K \in \mathcal{A}(\{p\}, 2^U)$.

Demostración. Observemos primero que $\{p\} \in 2^K \subseteq 2^U$. Sea $\varepsilon > 0$, por definición de δ existe $\delta \in \Delta(p, K, \frac{\varepsilon}{2})$ tal que $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $F \in B_H(\delta, \{p\})$, elijamos $x \in F$. Esto implica que $x \in B(\delta, p)$, de la elección de p , existe $T \in a_X(x)$ tal que $H(K, T) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por el Lema 7.3, deducimos que $\mathcal{L}(F, T) \in a_{2^X}(F)$. Mostraremos ahora que $H(\mathcal{L}(F, T), 2^K) < \varepsilon$ probando que $\mathcal{L}(F, T) \subseteq N_{2^K}(\varepsilon, 2^K)$ y que $2^K \subseteq N_{2^X}(\varepsilon, \mathcal{L}(F, T))$. Sea $L \in 2^T$. Del hecho de que $H(K, T) < \frac{\varepsilon}{2}$, no es complicado probar que $H_2(2^K, 2^T) < \varepsilon$. De esta manera, existe $R \in 2^K$ tal que $H(R, L) < \varepsilon$. De [30, Lema 1.4 pág. 305], obtenemos que $H(F \cup L, R \cup \{p\}) \leq \max\{H(F, \{p\}), H(R, L)\} < \max\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\} = \varepsilon$. Esto prueba que $\mathcal{L}(F, T) \subseteq N_{2^X}(\varepsilon, 2^K)$. En forma similar si $B \in 2^K$, y dado que $A_2(2^K, 2^K) < \varepsilon$ tenemos que existe $s \in 2^T$ tal que $H(B, S) < \varepsilon$. Aplicando [30, Lema 1.4, pág. 305], tenemos que $H(B \cup F, S \cup \{p\}) \leq \max\{H(F, p), H(B, S)\} < \max\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\} = \varepsilon$. Esto prueba que $2^K \subseteq N_{2^X}(\varepsilon, \mathcal{L}(F, T))$. Por lo tanto, $2^K \in \mathcal{A}(\{p\}, 2^U)$. \square

Teorema 7.7. [8, Teorema 5.5, pág. 10] Sea \mathcal{H} un subcontinuo de 2^X que contiene a $F_1(X)$ y sea K un subcontinuo de X . Si K es un R^4 -continuo de X , entonces \mathcal{H} contiene un R^4 -continuo contenido en $2^K \cap \mathcal{H}$.

Demostración. Consideremos un R^4 -continuo K de X ; esto es, existe un conjunto propio y abierto U de X y $p \in U$ tal que $p \in K \subseteq U$ y K es el elemento maximal del conjunto ordenado $(\mathcal{A}(p, U), \subseteq)$. Notemos que como U es abierto, entonces $2^U \cap \mathcal{H}$ es un conjunto abierto de \mathcal{H} . Mostraremos que $\mathcal{A}(\{p\}, 2^U \cap \mathcal{H})$ tiene un elemento maximal, lo que implicará que \mathcal{H} tiene un R^4 -continuo. Observe primero que $\{p\} \in \mathcal{A}(\{p\}, 2^U \cap \mathcal{H})$.

Consideremos ahora $\mathcal{D} \in \mathcal{A}(\{p\}, 2^U \cap \mathcal{H})$. Probaremos que $\mathcal{D} \subset 2^K \cap \mathcal{H}$. Del Lema 7.5 tenemos que $\bigcup \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}(p, U)$. Como K es el elemento máximo de $\mathcal{A}(p, U)$, tenemos que $\bigcup \mathcal{D} \subseteq K$. De esta manera, si $D \in \mathcal{D}$ entonces $D \subseteq K$. Lo que implica que $\mathcal{D} \subseteq 2^K \cap \mathcal{H}$. Se sigue entonces del Lema 7.3 y del hecho de que $2^K \cap \mathcal{H}$ es un conjunto cerrado de \mathcal{H} que $\mathcal{A}(\{p\}, 2^U \cap \mathcal{H})$ es un subconjunto cerrado de \mathcal{H} . Así, por [29, Principio Máximo-mínimo, pág. 110], se tiene que $\mathcal{A}(\{p\}, 2^U \cap \mathcal{H})$ tiene un elemento maximal. Con lo que concluimos que \mathcal{H} contiene un R^4 -continuo en $2^K \cap \mathcal{H}$. \square

Podemos observar que por el Lema 7.6 y Teorema 7.7 se tiene que si K es un R^4 -continuo de X , entonces 2^K es un R^4 -continuo de 2^X . Como corolario tenemos el siguiente resultado.

Corolario 7.8. [8, Lema 5.7, pág. 10] *Si X contiene un R^4 -continuo, entonces cada subespacio \mathcal{H} de 2^X conexo que contiene a $F_1(X)$ resulta no ser pseudo-contráctil.*

Demostración. Si suponemos que \mathcal{H} es pseudo-contráctil, entonces $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en \mathcal{H} . Esto implica que $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X . Como 2^X es un hiperespacio de g -crecimiento, entonces, por el Teorema 5.14 tenemos que 2^X es contráctil. De este modo, por [8, Teorema 4.3, pág. 8], 2^X no contiene un R^4 -continuo. Esto contradice el Teorema 7.7, pues por hipótesis X contiene un R^4 -continuo. \square

Finalizamos este breve estudio, sin antes decir que aún hay mucho más material relacionado a los conceptos involucrados aquí, pero que ya no fue posible añadir.

Bibliografía

- [1] W. Debski, *Pseudo-contractibility of the $\sin(1/x)$ curve*, Houston J. Math., vol. 20(2), págs. 965–367, 1994.
- [2] B. S. Baik, K. Hur, and Ch. J. Rhee, *R^i -sets and contractibility*, J. Korean Math. Soc., vol. 34, no. 2, págs. 309–319, 1997.
- [3] D. P. Bellamy, *A null pseudo-homotopic map onto a pseudo-arc*, Topol. Proc., vol. 11, págs. 1–5, 1986.
- [4] F. Capulín, L. Juárez-Villa y F. Orozco-Zitli, *General properties of pseudo-contractibility*, Topol. Appl., vol. 247, págs. 57–71, 2018.
- [5] F. Capulín, L. Juárez-Villa y F. Orozco-Zitli, *Ri-sets, pseudo-contractibility and weak contractibility on hyperspaces of continua*, Glas. Mat., 2018.
- [6] F. Capulín, E. Castañeda-Alvarado, Leonardo Juárez-Villa y D. Maya, *Pseudo-homotopies between maps on g -growth hyperspaces of continua*, Colloq. Mat., 2022.

- [7] F. Capulín, L. Juárez-Villa, F. Orozco-Zitli and A. C. Sierra-Cuevas, *Pseudo-deformations on topological spaces and on hyperspaces*, Preprint, 2023.
- [8] F. Capulín, M. Flores-González, D. Maya y F. Orozco-Zitli, *R^4 -continua and pseudo-contractibility*, Topol. Appl. vol. 334, 2023.
- [9] F. Capulín, D. Maya, F. Orozco-Zitli, *Connectedness of $C(X, Y)$ and its interrelation with the pseudo-contractibility*, Preprint, 2024.
- [10] J. J. Charatonik y Z. Grabowski, *Homotopically fixed arcs and the contractibility of dendroids*, Fund. Math., vol. 100, 1976, págs. 229–237.
- [11] J. J. Charatonik, *The set function T and homotopies*, Colloq. Math., vol. 39, no. 2, 1978, págs. 271–274.
- [12] W. J. Charatonik, *R^i -continua and hyperspaces*, Topol. Appl., vol. 23, no. 3, 1986, págs. 207–216.
- [13] J. J. Charatonik, *Selected problems in continuum theory*, Topol. Proc., vol. 27, no. 1, 2003, págs. 51–78.
- [14] S. T. Czuba, *R -continua and contractibility of dendroids*, Polska Akademia Nauk., Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Varsovie, vol. 27, no. 3-4, 1979, págs. 299–302.
- [15] S. T. Czuba, *R^i -continua and contractibility*, Proc. Inter. Conf. on Geo. Topol., 1980, págs. 75–79.
- [16] A. Illanes, S. B. Naddler, *Hyperspaces: Fundamentals an Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc., 1999.
- [17] A. Illanes, *Pseudo-homotopies of the pseudo-arc*, Comm. Math. Univ. Carol., vol. 53, no. 4, 2012, págs. 629–635.
- [18] H. Katsuura, *Pseudocontraction and homotopy of the $\sin(1/x)$ curve*, 1992.
- [19] K. Kawamura, *Each map from the Cantor set to the pseudo-arc is null pseudo-homotopic*, Topol. Proc., vol. 14, 1987, págs. 239–247.

- [20] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc, 1942.
- [21] K. Kuratowski, *Topology: Volume I (Vol. 1)*, Elsevier, 2014.
- [22] S. Macías, “Topics on continua,” 2005.
- [23] S. Macías, *Una introducción a los retracts absolutos y a los retratos de vecindad absolutos*, Revista Integración, vol. 31, no. 2, 2013. págs. 153–164, 2013.
- [24] J. R. Munkres, *Topology, vol.2*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
- [25] S. B. Nadler, *Hyperspaces of sets*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 49, Dekker, New York, 1978.
- [26] S. B. Nadler, *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, Madison Avenue, New York, USA, 1992.
- [27] P. Pellicer-Covarrubias, C. Solís-Said, P. Vázquez-Cárdenas, *Examples and corrections concerning R^i -sets*, Topol. Appl., vol. 338, 2023.
- [28] E. M. Pearl, *Open Problems in Topology II*, Elsevier, 2011.
- [29] C. J. Rhee, I. S. Kim and R. S. Kim, *W-regular convergence of R^i -continua*, Bull. Korean Math. Soc. 31, 1994, págs. 105–113.
- [30] C. J. Rhee, *Admissible fibers and T-admissibility in hyperspaces*, Topol. Appl., vol. 64, no. 1, 1995, págs. 75–83, 1995.
- [31] M. Sobolewski, *Pseudo-contractibility of chainable continua*, Topol. Appl., 2007, págs. 2983–2987.
- [32] W. Lewis, *Continuum theory problems, Proceedings of the 1983 topology conference*, Topol. Proc., vol. 8(2), págs. 361–394.

Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México,

Instituto Literario No. 100, Colonia Centro,

Toluca, Estado de México, C.P. 50000.

fcapulin@gmail.com

fc@uaemex.mx

forozco@uaemex.mx

Índice de autores

- Ahuatzi Reyes, José Gerardo, 89
Arriaga Hernández, Jesús Alonso, 5
- Capulín Pérez, Félix, 135
Cuevas Otahola, Bolivia Teresa, 5
- Herrera Carrasco, David, 65, 115
- López López, Cristina Monzerrat, 5
- Macías Romero, Fernando, 65, 115
Matsuhashi, Eiichi, 115
Morín Castillo, María Monserrat, 5
- Ordoñez Ramirez, Norberto, 89
Orozco Zitli, Fernando, 135
Ortega Becerril, José Alberto, 115
Ortiz Ramírez, Ambrosio, 33
- Parada Rojas, Ana Cecilia, 33
Pérez Villegas, María de los Ángeles, 5
- Ramírez Aparicio, Leonardo, 65
Ríos Medina, Aurora , 89
- Souza Carranza, Roberto, 135

Matemáticas y sus aplicaciones 26
Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco
6 abril de 2026
pdf
6 MB

Matemáticas y sus aplicaciones 26

Fernando Macías Romero

David Herrera Carrasco

Editores

La serie Matemáticas y sus aplicaciones llega a su volumen 26 consolidándose como uno de los referentes editoriales más importantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Esta obra colectiva reúne investigaciones de vanguardia que reflejan la vitalidad y el rigor de la comunidad matemática contemporánea.

A través de sus capítulos, el lector encontrará un recorrido profundo por diversas áreas del conocimiento:

- **Fundamentos y Estructura:** Avances en topología de continuos y teoría de hiperespacios.
- **Herramientas Analíticas:** Desarrollos en análisis, probabilidad y geometría.
- **Impacto y Sociedad:** Aplicaciones prácticas en modelación matemática y propuestas innovadoras para la enseñanza de la disciplina.

Cada trabajo incluido en este volumen ha superado un estricto proceso de arbitraje por pares, asegurando que los contenidos cumplan con los más altos estándares de calidad y relevancia científica. Más que una compilación de artículos, este libro es un testimonio del intercambio intelectual generado a causa de las conferencias internacionales CIMA y un recurso indispensable para investigadores, académicos y estudiantes de licenciatura y de posgrado que buscan comprender y expandir las fronteras de las ciencias matemáticas.

