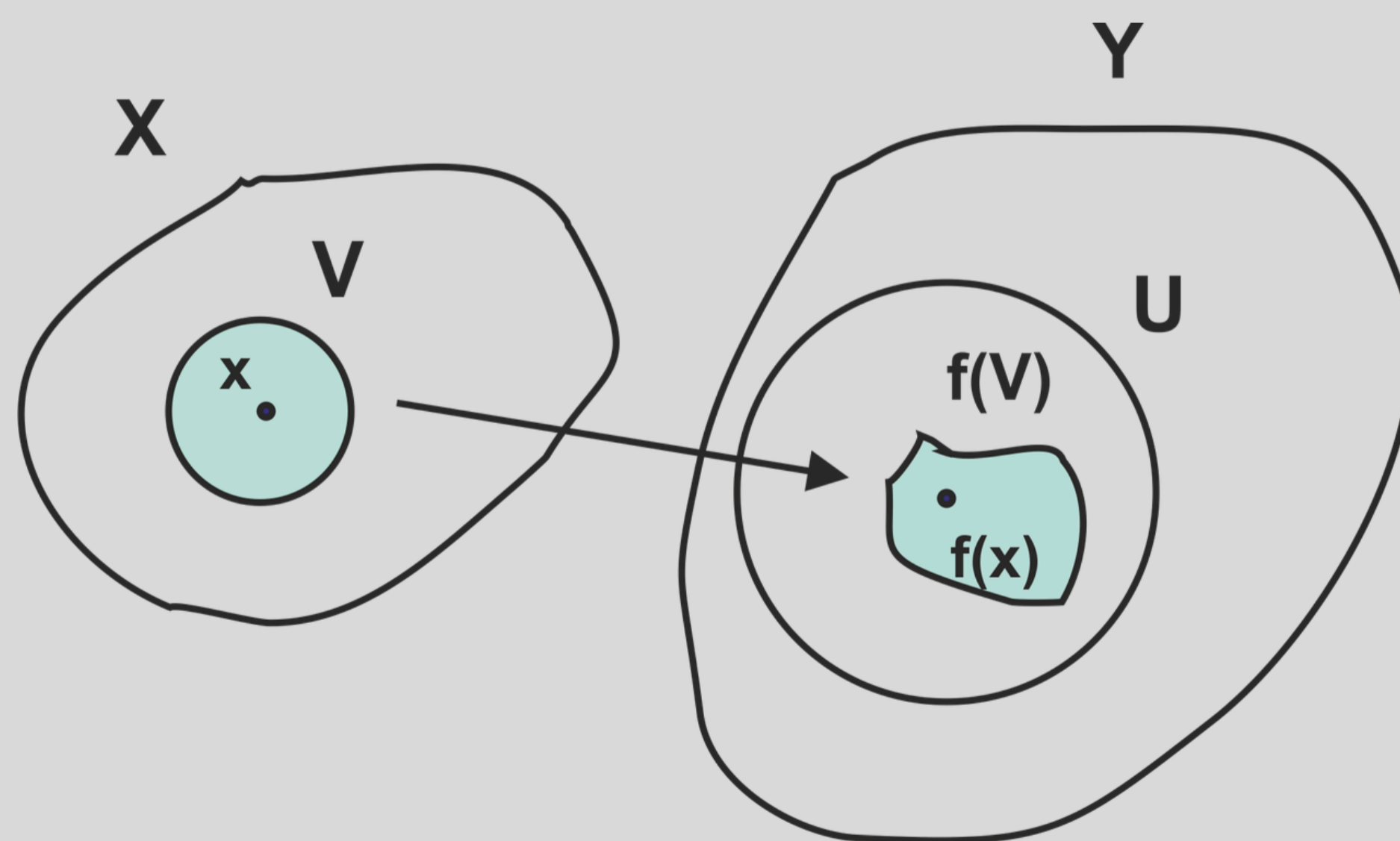


# Matemáticas y sus aplicaciones 25

Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco  
Editores



*Matemáticas y sus aplicaciones*  
*25*

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco  
Editores

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

RECTORA: MARÍA LILIA CEDILLO RAMÍREZ · SECRETARIO GENERAL:  
DANIÁN HERNÁNDEZ MÉNDEZ · VICERRECTOR DE EXTENSIÓN Y DI-  
FUSIÓN DE LA CULTURA: ROSALINDA MERINO CALDERÓN · DIRECTOR  
GENERAL DE PUBLICACIONES: MARY KRISS PARRA GÓRRIZ

PRIMERA EDICIÓN: 2026

ISBN: 978-968-9744-42-9

D.R. © BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA  
4 SUR 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE. CP. 72000  
TELÉFONO: 2222295500

[WWW.BUAP.MX](http://WWW.BUAP.MX)

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES  
2 NORTE 104, CENTRO HISTÓRICO, PUEBLA, PUE., CP.72000  
Tels.: 2222295500  
LIBROS.DGP@CORREO.BUAP.MX | [WWW.PUBLICACIONES.BUAP.MX](http://WWW.PUBLICACIONES.BUAP.MX)

DISEÑO DE PORTADA: LEONARDO RAMÍREZ APARICIO

HECHO EN MÉXICO

*MADE IN MEXICO*

# Matemáticas y sus aplicaciones 25

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en la serie  
International Conference on Mathematics and its Applications  
(CIMA), FCFM, BUAP.

## Editores

Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco

## Comité científico internacional

Florian Buck (TUC, DE), Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Félix Capulín Pérez (UAEMEX), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (UANL), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Rocío Leonel Gómez (Rosario Catellanos), Fernando Macías Romero (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Eiichi Matsushashi (SHIMADAI, JP), Daria Michalik (UKSW, PL), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Jesús Fernando Tenorio Arvide (UTM, Oax-MEX), Fernando Orozco Zitli (UAEMEX), Ambrosio Ortíz Ramírez (IPN), Nomura Yamato (SHIMADAI, JP), Cenobio Yescas Aparicio (UTM, Oax-MEX).



# Contenido

<b>Presentación</b>	1
<b>Álgebra</b>	
<b>Capítulo 1. Anillos generalizados de matrices con coeficientes en un campo</b>	5
<i>José de Jesús Sáez Macegoza, Iván Fernando Vilchis Montalvo</i>	
1	Introducción . . . . . 5
2	Anillo generalizado de matrices con coeficientes en un campo . . . . . 7
3	Anillo de endomorfismos y grupo de automorfismos en espacios vectoriales de dimensión arbitraria . . . . . 25
4	Relaciones anillos de matrices arbitrarias anillos de endomorfismos en espacios vectoriales de dimensión arbitraria . . . . . 28
5	Grupo lineal generalizado y su relación con el grupo de automorfismos en espacios de dimensión arbitraria . . . . . 35
6	Conclusiones . . . . . 42
<b>Física</b>	
<b>Capítulo 2. Schwarzschild Black Holes and their effects in a mathematical modeling framework</b>	47
<i>Jesús Alonso Arriaga Hernández, Bolivia Teresa Cuevas Otahola, María de los Ángeles Pérez Villegas, and José Jacobo Oliveros Oliveros</i>	
1	Introduction . . . . . 47
2	Formal generalities . . . . . 49
3	Elements from General Relativity . . . . . 51

4	Black Hole Model . . . . .	56
5	Conclusions . . . . .	72

## Topología

<b>Capítulo 3. Unicidad y no unicidad de hiperespacios de continuos</b>	79
---	----

*David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Leonardo Ramírez Aparicio*

1	Introducción . . . . .	79
2	Preliminares . . . . .	80
3	Clases de continuos . . . . .	85
4	El hiperespacio $2^X$ . . . . .	88
5	El $n$ -ésimo hiperespacio de $X$ , $C_n(X)$ . . . . .	88
6	El $n$ -ésimo producto simétrico de $X$ , $F_n(X)$ . . . . .	93
7	El $(n, m)$ -ésimo hiperespacio suspensión de $X$ , $HS_m^n(X)$ . . . . .	96
8	El hiperespacio $C_1^n(X)$ de un continuo $X$ . . . . .	98
9	El $n$ -ésimo producto simétrico suspensión de $X$ , $SF_n(X)$ . . . . .	98
10	Continuos $X$ con hiperespacio no único $\mathcal{H}(X)$ . . . . .	99

<b>Capítulo 4. Caracterización del conjunto de Cantor y funciones de Whitney</b>	107
--	-----

*Jose Alberto Ortega Becerril, Eiichi Matsushashi, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero*

1	Introducción . . . . .	107
2	El conjunto de Cantor . . . . .	122
3	Imágenes del conjunto del Cantor . . . . .	123
4	Caracterización del conjunto de Cantor . . . . .	126
5	Funciones de Whitney . . . . .	128

<b>Capítulo 5. Estudio de compactaciones en espacios topológicos</b>	133
--	-----

*Felipe de Jesús Aguilar Romero, Diana Cuaya Simbro, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero*

1	Introducción . . . . .	133
2	Preliminares . . . . .	134
3	Compactaciones . . . . .	137

4	Propiedades . . . . .	141
5	Compactación de Alexandroff . . . . .	149
6	La compactación de Stone-Čech . . . . .	160
<b>Capítulo 6. Sobre la medida de conmutatividad de los funtores <math>\pi_n</math> y <math>\lim</math></b>		165
<i>Raúl Juárez Flores</i>		
1	Introducción . . . . .	165
2	Límites de diagramas (límite inverso generalizado) . . .	166
3	Medida de exactitud del funtor $\lim$ para el caso clásico (sucesiones inversas de grupos abelianos) . . . . .	170
4	Medida de exactitud del funtor $\lim$ para diagramas de grupos (no necesariamente conmutativos) de tipo $T$ . . . . .	173
5	El cocilindro de una función y $\lim^1$ . . . . .	179
6	El cotelescopio y $\lim^1$ . . . . .	185
7	La aplicación: Componentes y grupos fundamentales para pull-back's (diagramas de tipo $\vee$ ) . . . . .	189
<b>Índice de autores</b>		195



# Presentación

Las «International Conferences on Mathematics and its Applications (CIMA)» han sido una tradición consolidada durante 21 años, celebrándose anualmente con gran éxito. En este evento, la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) ha colaborado activamente como organizadora, junto con sus estudiantes, para crear un espacio de intercambio académico y divulgación de conocimiento.

La participación de destacados matemáticos a nivel internacional ha sido una constante en estas conferencias, lo que ha permitido enriquecer el debate y la discusión en torno a temas relevantes en el campo de las matemáticas. La presente edición del libro que tienen en sus manos es un reflejo de este esfuerzo colectivo y representa un logro significativo en la difusión del conocimiento matemático.

La publicación de este libro es el resultado del trabajo arduo y la generosidad de muchos matemáticos que contribuyeron al Eleventh International Conference on Mathematics and its Applications (11CIMA, 2024). Este evento ha contado con la participación de destacadas figuras de diversas universidades, tanto nacionales como extranjeras, quienes han compartido sus investigaciones y experiencias en el desarrollo del 11CIMA y en la documentación escrita que se presenta en este libro.

Los capítulos de este libro están organizados en secciones temáticas, y cada uno de ellos ha pasado por un riguroso proceso de arbitraje. Queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a todos los árbitros por su amabilidad, dedicación y labor científica, que han sido fundamentales para garantizar la calidad de los contenidos.

Asimismo, deseamos agradecer profundamente a Felipe de Jesús Aguilar Romero y a Leonardo Ramírez Aparicio por su invaluable apoyo en la edición

de esta obra, así como a Kevin Águila Méndez por su asistencia técnica. Su contribución ha sido esencial para hacer posible esta publicación de la obra 25.

Esperamos que este libro sea de utilidad y consulta para la comunidad académica y para todos aquellos interesados en el campo de las matemáticas.

*Fernando Macías Romero*  
*David Herrera Carrasco*  
*Editores*

---

# Álgebra

---



## Capítulo 1

# Anillos generalizados de matrices con coeficientes en un campo

José de Jesús Sáez Macegoza, Iván Fernando Vilchis  
Montalvo  
FCFM, BUAP

### Resumen

En este capítulo, se presenta una construcción de anillos de matrices a partir de un campo y cardinales arbitrarios. De estos anillos, se construyen algunos subanillos de interés tales como matrices diagonales y matrices triangulares. Posteriormente, se construyen grupos lineales generalizados, se generaliza el concepto de matriz de cambio de base y se muestra la relación anillos de matrices-anillos de endomorfismos y grupos lineales-grupos de automorfismos; esto para espacios vectoriales de dimensión arbitraria. Es fundamental asumir el Axioma de Elección para que los resultados aquí presentados tengan sentido.

## 1 Introducción

Dentro del álgebra y, en general, de las matemáticas, es fundamental conocer las operaciones con matrices así, como sus propiedades; esto es porque son de gran utilidad para representar diversos procesos.

En este capítulo, se construyen anillos generalizados de matrices partiendo de un campo y conjuntos no vacíos arbitrarios. Se muestra que estos anillos cumplen las mismas propiedades que se conocen para anillos de matrices finitas y se muestra la relación que estos anillos tienen con los anillos de endomorfismos en un espacio vectorial. A continuación ofrecemos un panorama general de la estructura de este capítulo:

- En la Sección 2, construimos anillos de matrices a partir de un campo y un conjunto no vacío arbitrario. Posteriormente, se demuestra que los anillos de matrices construidos sobre conjuntos de la misma cardinalidad son isomorfos; esto nos permite elegir un cardinal, lo cual sabemos que, asumiendo el Axioma de Elección, se puede asignar a cualquier conjunto, por lo que el anillo de matrices sobre cada cardinal representa a los anillos de matrices sobre todos los conjuntos equipotentes a ese cardinal. En esta sección, también se demuestra que, dado un cardinal, el correspondiente anillo de matrices contiene, en cierto modo, a todos los anillos de matrices tomados sobre todos los cardinales menores a tal cardinal. Finalmente, se definen de manera generalizada las matrices diagonales y las matrices triangulares.
- En la Sección 3, se exponen de manera breve los anillos de endomorfismos y grupos de automorfismos en espacios vectoriales de dimensión arbitraria.
- En la Sección 4, se exhibe la relación que hay entre los anillos de matrices arbitrarias y los anillos de endomorfismos en espacios vectoriales de dimensión arbitraria. Para establecer esta relación, se generalizan las representaciones de las transformaciones entre espacios de la forma  $F^{(\lambda)}$ , con  $\lambda$  un cardinal; posteriormente, se establece la representación matricial para la composición de transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión arbitraria para, finalmente, establecer que los anillos  $\mathcal{M}_\kappa(F)$  y  $End_F(V, \kappa)$  son isomorfos, donde  $\kappa$  es un cardinal tal que  $dim({}_F V) = \kappa$ .
- En la Sección 5, se construye el grupo lineal sobre cualquier cardinal; se da equivalencia entre isomorfismo e invertibilidad de la matriz de representación para establecer que los grupos  $Aut_F(V, \kappa)$  y  $GL(\kappa, F)$  son isomorfos. Además, se generaliza la definición de matriz de cambio de base para espacios de dimensión arbitraria.
- Finalmente, en la Sección 6, se exponen las conclusiones del trabajo resaltando los resultados más sobresalientes del capítulo.

## 2 Anillo generalizado de matrices con coeficientes en un campo

En otro capítulo construimos un espacio de matrices con coeficientes en un campo. Vamos a hacer un pequeño recordatorio.

**Notación 2.1.** Si  $F$  es un campo y  $V$  es un espacio vectorial sobre  $F$ , escribiremos  ${}_F V$ .

**Notación 2.2.** Si  $F$  es un campo,  ${}_F V$  es un espacio vectorial y  $W \subseteq V$  es un subespacio vectorial de  ${}_F V$ , escribiremos  $W \leq V$ .

**Notación 2.3.** Si  $F$  es un campo y  $X$  es un conjunto no vacío, denotamos

$$F^X = \{f \in \mathcal{P}(X \times F) \mid f \text{ es función}\}.$$

**Definición 2.4.** Si  $F$  es un campo y  $X$  es un conjunto no vacío, el espacio vectorial  ${}_F F^X$ , con las operaciones  $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$  y  $(cf)(x) = cf(x)$ , para cada  $f, g \in F^X$  y  $c \in F$ , es llamado el **espacio de las funciones de  $X$  a  $F$** .

**Notación 2.5.** Para denotar que un conjunto  $A$  es finito, escribimos  $|A| < \infty$ .

**Definición 2.6.** Si  $F$  es un campo,  $X$  es un conjunto no vacío y  $f \in F^X$ , definimos el soporte de  $f$  como

$$\text{sop}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

Sea

$$F^{(X)} = \{f \in F^X \mid |\text{sop}(f)| < \infty\}.$$

Se cumple que  $F^{(X)} \leq_F F^X$  y cuando  $X$  es un conjunto finito, se da la igualdad. A partir de lo anterior, si  $F$  es un campo,  $I$  y  $J$  son conjuntos no vacíos arbitrarios, se tiene que  $I \times J$  es un conjunto no vacío y, por consiguiente,  ${}_F F^{I \times J}$  es un espacio vectorial.

**Notación 2.7.** Si  $A \in F^{I \times J}$ , denotamos  $A(i, j) = a_{ij}$ , con  $a_{ij} \in F$ ,  $i \in I$  y  $j \in J$ . A se denota como  $A = (a_{ij})$ , donde  $a_{ij} \in F$ , para cada  $i \in I$  y  $j \in J$ .

Si  $A \in F^{I \times J}$ , para cada  $j \in J$ , definimos la función  $A(\cdot, j) : I \rightarrow F$ , dada por  $A(i, j) = a_{ij}$ . Luego, consideramos el subconjunto de  $F^{I \times J}$ , dado por

$$\mathcal{M}_{I \times J}(F) = \{A \in F^{I \times J} \mid |\text{sop}(f)| < \infty, \text{ para cada } j \in J\}.$$

Se tiene que  $\mathcal{M}_{I \times J}(F) \leq_F F^X$ ; por consiguiente,  ${}_F\mathcal{M}_{I \times J}(F)$  es un espacio vectorial.

**Definición 2.8.** Si  $F$  es un campo,  $I$  y  $J$  son conjuntos no vacíos y  $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ , entonces:

- El espacio vectorial  ${}_F\mathcal{M}_{I \times J}(F)$  es llamado **el espacio vectorial de las matrices  $I \times J$  con coeficientes en  $F$** .
- Para  $i \in I$ , la función

$$\begin{aligned} A(i, \cdot) : J &\rightarrow F \\ j &\mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

es llamada **la  $i$ -fila de  $A$** .

- Para  $j \in J$ , la función

$$\begin{aligned} A(\cdot, j) : I &\rightarrow F \\ i &\mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

es llamada **la  $j$ -fila de  $A$** .

**Teorema 2.9.** Sean  $F$  un campo,  $I_1, I_2, J_1$  y  $J_2$  conjuntos no vacíos tales que  $|I_1| = |I_2|$  y  $|J_1| = |J_2|$ . Entonces  $\mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F) \cong \mathcal{M}_{I_2 \times J_2}(F)$  como espacios vectoriales.

*Demostración.* Como  $|I_1| = |I_2|$  y  $|J_1| = |J_2|$ , existen biyecciones  $\sigma : I_1 \rightarrow I_2$  y  $\gamma : J_1 \rightarrow J_2$  con inversas  $\theta = \sigma^{-1} : I_2 \rightarrow I_1$  y  $\mu = \gamma^{-1} : J_2 \rightarrow J_1$ , respectivamente. Luego, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \sigma \times \gamma : I_1 \times J_1 &\rightarrow I_2 \times J_2 \\ (i_1, j_1) &\mapsto (\sigma(i_1), \gamma(j_1)) \end{aligned}$$

es una biyección con inversa

$$\begin{aligned}\theta \times \mu : I_2 \times J_2 &\rightarrow I_1 \times J_1 \\ (i_2, j_2) &\mapsto (\theta(i_2), \mu(j_2)).\end{aligned}$$

Proponemos la función

$$\begin{aligned}\eta : \mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F) &\rightarrow \mathcal{M}_{I_2 \times J_2}(F) \\ A &\mapsto A \circ (\theta \times \mu)\end{aligned}$$

que claramente está bien definida. Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F)$  y  $c \in F$ , luego para cada  $i_2 \in I_2, j_2 \in J_2$  tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\eta(A + cB)(i_2, j_2) &= ((A + cB) \circ (\theta \times \mu))(i_2, j_2) \\ &= (A + cB)((\theta \times \mu)(i_2, j_2)) \\ &= (A + cB)(\theta(i_2), \mu(j_2)) \\ &= A(\theta(i_2), \mu(j_2)) + cB(\theta(i_2), \mu(j_2)) \\ &= (A \circ (\theta \times \mu))(i_2, j_2) + c(B \circ (\theta \times \mu))(i_2, j_2) \\ &= \eta(A)(i_2, j_2) + c\eta(B)(i_2, j_2)\end{aligned}$$

por lo que concluimos que  $\eta(A + cB) = \eta(A) + c\eta(B)$ , por lo que  $\eta$  es una transformación lineal. Para mostrar que es un isomorfismo, vamos a mostrar que tiene una transformación lineal inversa. Proponemos la función

$$\begin{aligned}\rho : \mathcal{M}_{I_2 \times J_2}(F) &\rightarrow \mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F) \\ A &\mapsto A \circ (\sigma \times \gamma)\end{aligned}$$

que claramente está bien definida. Mutatis mutandis lo realizado para  $\eta$ , se muestra que  $\rho$  es una transformación lineal. Vamos a mostrar que  $\rho$  es la inversa de  $\eta$ . Primero tomemos  $A \in \mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F)$ , entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\rho \circ \eta)(A) &= \rho(\eta(A)) \\ &= \rho(A \circ (\theta \times \mu)) \\ &= (A \circ (\theta \times \mu)) \circ (\sigma \times \gamma) \\ &= A \circ ((\theta \times \mu) \circ (\sigma \times \gamma)) \\ &= A \circ id_{I_1 \times J_1} \\ &= A = id_{\mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F)}(A)\end{aligned}$$

es decir,  $(\rho \circ \eta)(A) = id_{\mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F)}(A)$ , para cada  $A \in \mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F)$ , por lo que  $\rho \circ \eta = id_{\mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F)}$ . Ahora, si tomamos  $B \in \mathcal{M}_{I_2 \times J_2}(F)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (\eta \circ \rho)(B) &= \eta(\rho(B)) \\ &= \eta(B \circ (\sigma \times \gamma)) \\ &= (B \circ (\sigma \times \gamma)) \circ (\theta \times \mu) \\ &= B \circ ((\sigma \times \gamma) \circ (\theta \times \mu)) \\ &= B \circ id_{I_2 \times J_2} \\ &= B = id_{\mathcal{M}_{I_2 \times J_2}(F)}(B) \end{aligned}$$

es decir,  $(\eta \circ \rho)(B) = id_{\mathcal{M}_{I_2 \times J_2}(F)}(B)$  para cada  $B \in \mathcal{M}_{I_2 \times J_2}(F)$ , por tanto  $\eta \circ \rho = id_{\mathcal{M}_{I_2 \times J_2}(F)}$ . Así las cosas, tenemos que  $\rho$  es inversa de  $\eta$ , en consecuencia,  $\eta$  es un isomorfismo de espacios vectoriales y en consecuencia,  $\mathcal{M}_{I_1 \times J_1}(F) \cong \mathcal{M}_{I_2 \times J_2}(F)$  como espacios vectoriales.  $\square$

Del teorema anterior, se concluye que el espacio de las matrices construido a partir de dos conjuntos no vacíos, está está determinado de manera única por el espacio de matrices construido a partir de los cardinales asociados a los conjuntos(salvo isomorfismo). Recordemos que por el Axioma de Elección, a todo conjunto se le puede asignar un cardinal (consultar [4]). Así, si  $\kappa$  y  $\lambda$  son cardinales, para cualesquiera conjuntos  $I$  y  $J$  tales que  $|I| = \kappa$  y  $|J| = \lambda$ , entonces  $\mathcal{M}_{I \times J}(F) \cong \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  como espacios vectoriales.

Además de la estructura de espacio vectorial de  ${}_F\mathcal{M}_{I \times J}(F)$  con las operaciones  $(A + B)(i, j) = a_{ij} + b_{ij}$  y  $(cA)(i, j) = c_{ij}$ , para cada  $A, B \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ ,  $c \in F$ ,  $i \in I$  y  $j \in J$ , se define un producto. Si  $I, J$  y  $K$  son conjuntos no vacíos,  $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$  y  $B \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$ , entonces  $AB \in \mathcal{M}_{I \times K}(F)$  y para cada  $i \in I$  y  $k \in K$ , se tiene que

$$(AB)(i, k) = \sum_{j \in J} A(i, j)B(j, k) = \sum_{j \in J} a_{ij}b_{jk}.$$

Esta operación está bien definida. La justificación detallada de este hecho se puede consultar en [8]. En la siguiente proposición se exponen propiedades que satisface este producto.

**Proposición 2.10.** *Sean  $F$  un campo,  $I, J, K$  y  $L$  conjuntos no vacíos,  $A, B \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ ,  $C, D \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$ ,  $E \in \mathcal{M}_{K \times L}(F)$  y  $\alpha \in F$ . Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1.  $(A + B)C = AC + BC$  (*Distributividad por la izquierda*).
2.  $A(C + D) = AC + AD$  (*Distributividad por la derecha*).
3.  $A(CE) = (AC)E$  (*Asociatividad*).
4.  $(\alpha A)C = A(\alpha C) = \alpha(AC)$  (*Asociatividad de escalares*).

La demostración detallada de la proposición anterior se puede consultar en [8]. En [8], también comentamos que este producto se comporta igual que el producto para matrices finitas; de hecho, en la construcción se puede ver que los conjuntos elegidos no necesitan condiciones adicionales respecto al orden, numerabilidad, estructura algebraica o topológica, etc. De hecho, si consideramos las clases

$$\text{Mat}_F = \{\mathcal{M}_{I \times J}(F) \mid I \text{ y } J \text{ conjuntos no vacíos}\}$$

y

$$\text{Fin}(\text{Mat}_F) = \{\mathcal{M}_{m \times n}(F) \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

se tiene que  $\text{Fin}(\text{Mat}_F) \subseteq \text{Mat}_F$  y la contención es propia.

Ahora bien, por la definición de nuestro producto, podemos darnos cuenta de que no es una operación binaria en el conjunto  $\mathcal{M}_{I \times J}(F)$ . De hecho, si  $I$ ,  $J$  y  $K$  son conjuntos no vacíos, el producto que definimos lo podemos ver como una función

$$\begin{aligned} \odot : \mathcal{M}_{I \times J}(F) \times \mathcal{M}_{J \times K}(F) &\rightarrow \mathcal{M}_{I \times K}(F) \\ (A, B) &\mapsto AB. \end{aligned}$$

Sin embargo, si tenemos que  $|I| = |J|$ , existe una biyección  $\sigma : I \rightarrow J$ , por lo que en realidad  $J = \sigma(I) = \{\sigma(i) \mid i \in I\}$ , en consecuencia

$$\mathcal{M}_{I \times J}(F) = \mathcal{M}_{I \times \sigma(I)}(F)$$

y para  $A, B \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ , se tiene que

$$(AB)(i, j) = (AB)(i, \sigma(i)) = \sum_{k \in I} A(i, k)B(k, \sigma(i))$$

lo que implica que  $AB \in \mathcal{M}_{I \times \sigma(I)}(F) = \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ , así que en este caso se tiene el producto como una operación cerrada en  $\mathcal{M}_{I \times J}(F)$ . Por comodidad, en lo sucesivo supondremos que  $I = J$ ; pues de no ser así, al ser conjuntos equipotentes, uno se puede escribir en términos del otro.

**Notación 2.11.** Si  $F$  es un campo e  $I$  un conjunto no vacío, denotamos  $\mathcal{M}_{I \times I}(F) = \mathcal{M}_I(F)$ .

En este caso, el producto propuesto si se puede considerar como una operación binaria en  $\mathcal{M}_I(F)$ , digamos

$$\begin{aligned} \odot : \mathcal{M}_I(F) \times \mathcal{M}_I(F) &\rightarrow \mathcal{M}_I(F) \\ (A, B) &\mapsto AB. \end{aligned}$$

**Definición 2.12.** Si  $F$  es un campo e  $I$  es un conjunto no vacío. Definimos la *I-matriz identidad* como la matriz  $\Delta_I \in \mathcal{M}_I(F)$ , dada por

$$\Delta_I(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

para cada  $i, j \in I$ .

**Observación 2.13.** Notemos que para cada  $j \in I$ ,  $\text{sop}(\Delta_I(\cdot, j)) = \{j\}$ , por lo que  $\text{sop}(\Delta_I(\cdot, j))$  es finito para cada  $j \in I$ , en consecuencia  $\Delta_I \in \mathcal{M}_I(F)$ .

**Lema 2.14.** Sea  $F$  un campo,  $I$  y  $J$  conjuntos no vacíos y  $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ . Entonces:

- $\Delta_I A = A$ .
- $A \Delta_J = A$ .

*Demostración.*

- Como  $\Delta_I \in \mathcal{M}_I(F)$  y  $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ , entonces  $\Delta_I A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ . Ahora, para  $(i, j) \in I \times J$ , tenemos que

$$(\Delta_I A)(i, j) = \sum_{k \in I} \Delta_I(i, k) A(k, j) = \Delta_I(i, i) A(i, j) = A(i, j)$$

de donde concluimos que  $\Delta_I A = A$ .

- Dado que  $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$  y  $\Delta_J \in \mathcal{M}_J(F)$ , entonces  $A \Delta_J \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ . Ahora, para  $(i, j) \in I \times J$ , tenemos que

$$(A \Delta_J)(i, j) = \sum_{k \in J} A(i, k) \Delta_J(k, j) = A(i, j) \Delta_J(j, j) = A(i, j)$$

lo que implica que  $A \Delta_J = A$ .

□

**Teorema 2.15.** *Sea  $F$  un campo e  $I$  un conjunto no vacío. Entonces, la quinteta  $(\mathcal{M}_I(F), +, \bar{0}, \odot, \Delta_I)$  es un anillo con uno.*

*Demostración.* Como  ${}_F\mathcal{M}_I(F)$  es un espacio vectorial, tenemos que  $(\mathcal{M}_I(F); +, \bar{0})$  es un grupo abeliano. Ahora, por 3. de la Proposición 2.10 y el Lema 2.14, se tiene que  $(\mathcal{M}_I(F), \odot, \Delta_I)$  es un monoide. Además, por 1. y 2. de la Proposición 2.10, se cumplen las leyes de distribución izquierdas y derechas. En consecuencia, concluimos que la quinteta  $(\mathcal{M}_I(F), +, \bar{0}, \odot, \Delta_I)$  es un anillo con unidad. □

En lo sucesivo, solo escribiremos  $\mathcal{M}_I(F)$  para referirnos al anillo descrito en el teorema anterior, con lo cual se entenderán las operaciones y los elementos neutros aditivo y multiplicativo.

**Definición 2.16.** *Sea  $F$  un campo e  $I$  un conjunto no vacío. Al anillo  $\mathcal{M}_I(F)$  le llamaremos el **anillo de las  $I$ -matrices con coeficientes en  $F$** .*

**Observación 2.17.** *Si consideramos las clases de anillos*

$$R(\mathcal{M}(F)) = \{\mathcal{M}_I(F) \mid I \text{ es un conjunto no vacío}\}$$

y

$$\mathbf{Fin}R(\mathcal{M}(F)) = \{\mathcal{M}_n(F) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

tenemos que  $\mathbf{Fin}R(\mathcal{M}(F)) \subsetneq R(\mathcal{M}(F))$ .

**Observación 2.18.** *Es claro que  $\Delta_I \neq \bar{0}$ , por lo que el anillo  $\mathcal{M}_I(F)$  no es trivial. También, el anillo  $\mathcal{M}_I(F)$  no es conmutativo, lo cual es conocido para matrices finitas y por la observación anterior, la clase de anillos de matrices arbitrarias es una extensión de la clase de matrices finitas.*

Vamos a introducir la definición del morfismo de anillos que utilizaremos durante este capítulo.

**Definición 2.19.** *Sean  $R$  y  $S$  anillos con uno. Una función  $\phi : R \rightarrow S$  es un **morfismo de anillos**, si se satisfacen:*

1. Para cada  $a, b \in R$ ,  $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ .
2.  $\phi(1_R) = 1_S$ .

3. Para cada  $a, b \in R$ ,  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ .

Si además existe un morfismo de anillos  $\gamma : S \rightarrow R$  tal que  $\gamma \circ \phi = id_R$  y  $\phi \circ \gamma = id_S$ , diremos que  $\phi$  es un **isomorfismo de anillos** y que  $R$  y  $S$  son **isomorfos como anillos**, lo cual denotamos como  $R \cong S$ .

**Observación 2.20.** Si  $R$  y  $S$  son anillos con uno y  $\phi : R \rightarrow S$  es un morfismo de anillos, entonces  $\phi$  es un isomorfismo de anillos, si y solo si  $\phi$  es biyectivo. Además, en este caso  $\phi^{-1} : S \rightarrow R$  también es un isomorfismo de anillos.

El teorema que presentamos a continuación nos indica que el anillo de matrices construido a partir de un conjunto no vacío está determinado de manera única por el cardinal que representa al conjunto, salvo isomorfismo.

**Teorema 2.21.** Sean  $F$  un campo,  $I$  y  $L$  conjuntos no vacíos tales que  $|I| = |L|$ . Entonces,  $\mathcal{M}_I(F) \cong \mathcal{M}_L(F)$  como anillos.

*Demostración.* Como  $|I| = |L|$ , existe una biyección  $\sigma : I \rightarrow L$  con inversa  $\theta = \sigma^{-1} : L \rightarrow I$ . Adecuando la demostración del Teorema 2.9, tenemos que la función

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{M}_I(F) &\rightarrow \mathcal{M}_L(F) \\ A &\mapsto A \circ (\theta \times \theta) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales con inversa

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M}_L(F) &\rightarrow \mathcal{M}_I(F) \\ A &\mapsto A \circ (\sigma \times \sigma) \end{aligned}$$

por lo que  $\eta$  y  $\rho$  satisfacen 1. de la definición de morfismo de anillos. Vamos a demostrar que  $\eta(\Delta_I) = \Delta_L$ . Dado que  $\eta(\Delta_I), \Delta_L \in \mathcal{M}_L$ , es suficiente ver que ambas matrices coinciden en cada  $(s, t) \in L \times L$ . Tomemos  $s, t \in L$ . Si  $s \neq t$ , dado que  $\theta$  es biyección,  $\theta(s) \neq \theta(t)$ , de donde se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \eta(\Delta_I)(s, t) &= (\Delta_I \circ (\theta \times \theta))(s, t) = \Delta_I((\theta \times \theta)(s, t)) = \Delta_I(\theta(s), \theta(t)) \\ &= 0 = \Delta_L(s, t) \end{aligned}$$

es decir,  $\eta(\Delta_I)(s, t) = \Delta_L(s, t)$  cuando  $s \neq t$ . Ahora, si  $s = t$ , entonces  $\theta(s) = \theta(t)$ , por lo que se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \eta(\Delta_I)(s, t) &= (\Delta_I \circ (\theta \times \theta))(s, t) = \Delta_I((\theta \times \theta)(s, t)) = \Delta_I(\theta(s), \theta(t)) \\ &= 1 = \Delta_L(s, t) \end{aligned}$$

es decir,  $\eta(\Delta_I)(s, t) = \Delta_L(s, t)$  cuando  $s = t$ . Así las cosas, concluimos que  $\eta(\Delta_I) = \Delta_L$ . Finalmente, vamos a mostrar que  $\eta$  separa productos. Tomemos  $A, B \in \mathcal{M}_I(F)$ . Recordemos que para cada  $k \in I$ , existe un único  $u \in L$  tal que  $k = \theta(u)$ . De esta manera, tenemos que para cada  $s, t \in L$ , se cumple que

$$\begin{aligned}
 \eta(AB)(s, t) &= ((AB) \circ (\theta \times \theta))(s, t) \\
 &= (AB)(\theta(s), \theta(t)) \\
 &= \sum_{k \in I} A(\theta(s), k)B(k, \theta(t)) \\
 &= \sum_{u \in L} A(\theta(s), \theta(u))B(\theta(u), \theta(t)) \\
 &= \sum_{u \in L} (A \circ (\theta \times \theta))(s, u)(B \circ (\theta \times \theta))(u, t) \\
 &= \sum_{u \in L} \eta(A)(s, u)\eta(B)(u, t) \\
 &= (\eta(A)\eta(B))(s, t)
 \end{aligned}$$

es decir,  $\eta(AB)(s, t) = (\eta(A)\eta(B))(s, t)$ , para cada  $s, t \in L$ , de donde se sigue que  $\eta(AB) = \eta(A)\eta(B)$ . Así, hemos probado que  $\eta$  es un morfismo de anillos. Mutatis mutandis, lo realizado para  $\eta$  muestra que  $\rho$  también es un morfismo de anillos; en consecuencia,  $\eta$  es un isomorfismo de anillos. Por lo tanto,  $\mathcal{M}_I(F) \cong \mathcal{M}_L(F)$  como anillos.  $\square$

**Observación 2.22.** *Del teorema anterior se concluye que si  $\kappa$  es un cardinal, entonces para cualquier conjunto  $I$  tal que  $|I| = \kappa$ , se tiene que  $\mathcal{M}_I(F) \cong \mathcal{M}_\kappa(F)$  como anillos. Ahora bien, si definimos  $\mathcal{M}_\emptyset(F) = \{0_F\}$ , recordando que  $0 \in \mathbb{N}$  se puede identificar como  $\emptyset$ , tenemos que  $\mathcal{M}_0(F) = \mathcal{M}_\emptyset(F) = \{0_F\}$ . De esta manera, tenemos definidos nuestros anillos de matrices para cualquier conjunto.*

**Teorema 2.23.** *Sea  $F$  un campo,  $I$  un conjunto no vacío y  $J \subseteq I$ . Entonces existe un anillo  $R_J(F) \subseteq \mathcal{M}_I(F)$  tal que  $R_J(F) \cong \mathcal{M}_J(F)$ .*

*Demostración.* Si  $J = \emptyset$ , entonces  $R_J(F) = \{\bar{0}\}$  es un anillo contenido en  $\mathcal{M}_I(F)$  y es tal que  $R_J(F) \cong \mathcal{M}_\emptyset(F)$  por como se definió el anillo de matrices sobre el vacío.

Si  $J = I$ , entonces  $\mathcal{M}_I(F)$  es un anillo contenido en  $\mathcal{M}_I(F)$  y es claro que

$\mathcal{M}_I(F) \cong \mathcal{M}_I(F)$ .

A partir de este momento, suponemos que  $J \neq \emptyset$  y  $J \subsetneq I$ . Definimos

$$R_J(F) = \{A \in \mathcal{M}_I(F) \mid A(s, t) = 0 \text{ para cada } (s, t) \in (I \times I) \setminus (J \times J)\}.$$

Para demostrar que  $R_J(F)$  es un anillo, es suficiente demostrar que es cerrado bajo las operaciones y que tiene neutros aditivo y multiplicativo. Vamos a exhibir que  $R_J(F)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{M}_I(F)$ :

- Si  $A, B \in R_J(F)$ , tenemos que para  $(s, t) \in (I \times I) \setminus (J \times J)$ ,

$$(A + B)(s, t) = A(s, t) + B(s, t) = 0 + 0 = 0$$

por lo que  $A + B \in R_J(F)$ .

- Es claro que  $\bar{0} \in R_J(F)$ .
- Si  $c \in F$  y  $A \in R_J(F)$ , para  $(s, t) \in (I \times I) \setminus (J \times J)$ , se tiene que

$$(cA)(s, t) = cA(s, t) = c0 = 0$$

lo que implica que  $cA \in R_J(F)$ .

Así las cosas,  $R_J(F)$  es un subespacio vectorial de  ${}_F\mathcal{M}_I(F)$ , por consiguiente  $(R_J(F), +, \bar{0})$  es un grupo abeliano. Mostremos ahora que  $R_J(F)$  es cerrado bajo productos, para eso tomemos  $A, B \in R_J(F)$ , luego, para  $(s, t) \in (I \times I) \setminus (J \times J)$ , por definición del producto se tiene que

$$(AB)(s, t) = \sum_{u \in I} A(s, u)B(u, t).$$

Ahora bien, como  $(s, t) \notin J \times J$ , tenemos que  $s \notin J$  ó  $t \notin J$ . Si  $s \notin J$ , tenemos que  $A(s, u) = 0$  para cada  $u \in I$ , lo cual implica que  $A(s, u)B(u, t) = 0$  para cada  $u \in I$  y por consiguiente  $(AB)(s, t) = 0$ . Si  $t \notin J$ , se tiene que  $B(u, t) = 0$  para cada  $u \in I$ , por tanto  $A(s, u)B(u, t) = 0$  para cada  $u \in I$ . Así las cosas, se tiene que  $(AB)(s, t) = 0$  cuando  $(s, t) \in (I \times I) \setminus (J \times J)$ , por lo que  $AB \in R_J(F)$ . Más aún, si  $A, B \in R_J(F)$  y  $(s, t) \in J \times J$ , obsérvese que si  $u \notin J$ , entonces  $(s, u), (u, t) \notin J \times J$ , por consiguiente  $A(s, u) = B(u, t) = 0$ , así que en este caso

$$(A, B)(s, t) = \sum_{u \in J} A(s, u)B(u, t). \quad (1)$$

De lo anterior, el producto es cerrado en  $R_J(F)$ , además la asociatividad y la distributividad se heredan de las operaciones en  $\mathcal{M}_I(F)$ . Para el elemento neutro, definamos  $1_J \in \mathcal{M}_I(F)$ , dada por

$$1_J(s, t) = \begin{cases} \Delta_I(s, t) & \text{si } (s, t) \in J \times J \\ 0 & \text{si } (s, t) \in (I \times I) \setminus (J \times J). \end{cases}$$

Es claro que  $1_J \in R_J(F)$ . Veamos que  $1_J$  es el neutro multiplicativo en  $R_J(F)$ . Tomemos  $A \in R_J(F)$ , dado que  $A, 1_J \in R_J(F)$ , tenemos que  $(1_J A)(s, t) = (A 1_J)(s, t) = 0 = A(s, t)$ , cuando  $(s, t) \notin J \times J$ . Ahora, si  $(s, t) \in J \times J$ , por un lado, de (1), tenemos que

$$(1_J A)(s, t) = \sum_{u \in J} 1_J(s, u) A(u, t) = 1_J(s, s) A(s, t) = 1_F \cdot A(s, t) = A(s, t).$$

Por otro lado, también de (1), se tiene que

$$(A 1_J)(s, t) = \sum_{u \in J} A(s, u) 1_J(u, t) = A(s, t) 1_J(t, t) = A(s, t) \cdot 1_F = A(s, t).$$

Por tanto,  $1_J A = A 1_J = A$ , para cada  $A \in R_J(F)$  y por consiguiente,  $1_J$  es el neutro multiplicativo en  $R_J(F)$ . De esta manera, tenemos que  $(R_J, +, \bar{0}, \odot, 1_J)$  es un anillo con uno, además no es un anillo trivial, ya que  $1_J \neq \bar{0}$ . Finalmente, para demostrar que  $R_J(F) \cong \mathcal{M}_J(F)$ , definamos la función

$$\begin{aligned} \Phi : R_J(F) &\rightarrow \mathcal{M}_J(F) \\ A &\mapsto \Phi(A) \end{aligned}$$

donde  $\Phi(A)(s, t) = A(s, t)$ , para cada  $(s, t) \in J \times J$ . Si  $c \in F$ ,  $A, B \in R_J(F)$ , se tiene que para  $s, t \in J$ :

$$\begin{aligned} \Phi(A + cB)(s, t) &= (A + cB)(s, t) = A(s, t) + cB(s, t) \\ &= \Phi(A)(s, t) + c\Phi(B)(s, t) \end{aligned}$$

por lo que  $\Phi(A + cB) = \Phi(A) + c\Phi(B)$ , por lo que  $\Phi$  es una transformación lineal, de ahí se tiene que  $\Phi$  satisface 1. de la definición de morfismo de anillos. Es claro que  $\Phi(1_J) = \Delta_J$ . Finalmente, de (1), se tiene que  $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$ , por lo tanto  $\Phi$  es un morfismo de anillos. Para mostrar que  $\Phi$  es isomorfismo, mostraremos que es biyectivo:

- (Inyectividad): Si  $A \in \text{Ker}(\Phi)$ , tenemos que  $\Phi(A) = \bar{0}$ , por lo que  $A(s, t) = 0$  para cada  $s, t \in J$  y, como  $A \in R_J(F)$ ,  $A(s, t) = 0$  para todo  $(s, t) \in (I \times I) \setminus (J \times J)$ , por lo que  $A = \bar{0}$ .
- (Suprayectividad): Sea  $C \in \mathcal{M}_J(F)$ . Definamos  $A_C \in \mathcal{M}_I(F)$ , dada por

$$A_C(s, t) = \begin{cases} C(s, t) & \text{si } (s, t) \in J \times J \\ 0 & \text{si } (s, t) \in (I \times I) \setminus (J \times J). \end{cases}$$

Es claro que  $A_C \in R_J(F)$  y que  $C = \Phi(A_C)$ .

Así las cosas,  $\Phi$  es un morfismo biyectivo de anillos, por tanto isomorfismo y así  $R_J(F) \cong \mathcal{M}_J(F)$ .  $\square$

**Observación 2.24.** *Dado que  $R_J \cong \mathcal{M}_J(F)$ , podemos abusar y decir que  $\mathcal{M}_J(F) \subseteq \mathcal{M}_I(F)$ , cuando  $J \subseteq I$ , esto porque aunque  $R_J(F)$  no es propiamente  $\mathcal{M}_J(F)$ , si es una copia isomorfa de éste último.*

**Corolario 2.25.** *Sea  $F$  un campo e  $I$  un conjunto no vacío. Si  $X$  es un conjunto y existe una función inyectiva  $f : X \rightarrow I$ , entonces  $\mathcal{M}_X(F) \subseteq \mathcal{M}_I(F)$ .*

*Demostración.* Como  $f : X \rightarrow I$  es una función, tenemos que  $f(X) \subseteq I$ , por el teorema anterior,  $\mathcal{M}_{f(X)}(F) \subseteq \mathcal{M}_I(F)$ . pero como  $f$  es inyectiva, tenemos que  $|f(X)| = |X|$ . De acuerdo con el Teorema 2.21, se tiene que  $\mathcal{M}_X(F) \cong \mathcal{M}_{f(X)}(F)$ . Usando la observación anterior, se tiene que  $\mathcal{M}_X(F) \subseteq \mathcal{M}_I(F)$ .  $\square$

**Observación 2.26.** *El corolario anterior se puede traducir al lenguaje de los cardinales de la siguiente manera: si  $\kappa$  y  $\lambda$  son cardinales tales que  $\kappa < \lambda$ , entonces  $\mathcal{M}_\kappa(F) \subseteq \mathcal{M}_\lambda(F)$ .*

## Algunos subanillos de $\mathcal{M}_I(F)$

Antes de describir algunos subanillos de interés de  $\mathcal{M}_I(F)$ , vamos a escribir la definición del subanillo que utilizaremos en este capítulo, considerando que los anillos que describimos tienen uno.

**Definición 2.27.** *Sea  $R$  un anillo con uno y  $S$  un subconjunto no vacío de  $R$ . Diremos que  $S$  es un **subanillo de  $R$** , si se cumple lo siguiente:*

1.  $1_R \in S$ .
2.  $a, b \in S$ , implica  $a - b \in S$ .
3.  $a, b \in S$ , implica  $ab \in S$ .

**Observación 2.28.** Si  $R$  es un anillo con uno y  $S$  es un subanillo de  $R$ , entonces  $S$  es un anillo con uno con las operaciones restringidas. El hecho de que  $S$  sea un anillo contenido en  $R$  no implica que  $S$  sea un subanillo de  $R$ , lo cual exhibimos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.29.** Si  $F$  es un campo,  $I$  y  $J$  son conjuntos no vacíos tales que  $J \subsetneq I$ , se tiene que  $R_J(F)$  es un anillo contenido en  $\mathcal{M}_I(F)$ . Sin embargo, no es un subanillo, pues  $1_J \neq \Delta_I$ , así que  $\Delta_I \notin R_J(F)$ .

### Las matrices diagonales $\mathcal{D}_I(F)$

Podemos generalizar el concepto de matrices diagonales, conocido para matrices finitas, a las matrices que proponemos.

**Definición 2.30.** Sean  $I$  es un conjunto no vacío y  $F$  un campo, diremos que una matriz  $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_I(F)$  es **diagonal**, si  $d_{ij} = 0$  cuando  $i \neq j$ , para cada  $i, j \in I$ . Definimos el conjunto de las matrices diagonales como

$$\mathcal{D}_I(F) = \{D \in \mathcal{M}_I(F) \mid D \text{ es una matriz diagonal}\}.$$

Notemos que  $\mathcal{D}_I(F) \neq \emptyset$ , ya que  $\Delta_I \in \mathcal{D}_I(F)$ .

**Teorema 2.31.** Sea  $F$  un campo e  $I$  un conjunto no vacío. Entonces  $\mathcal{D}_I(F)$  es un subanillo de  $\mathcal{M}_I(F)$ .

*Demostración.* Demostraremos primero que  $\mathcal{D}_I(F)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{M}_I(F)$ :

- Si  $D, E \in \mathcal{D}_I(F)$ , entonces  $D(i, j) = 0$  y  $E(i, j) = 0$ , cuando  $i \neq j$  para cada  $i, j \in I$ . Luego, para  $i, j \in I$ , si  $i \neq j$ , entonces

$$(D + E)(i, j) = D(i, j) + E(i, j) = 0 + 0 = 0$$

lo que implica que  $D + E \in \mathcal{D}_I(F)$ .

- Notemos que  $\bar{0}(i, j) = 0$  para cada  $i, j \in I$ , en particular cuando  $i \neq j$ , por lo que  $\bar{0} \in \mathcal{D}_I(F)$ .
- Si  $c \in F$  y  $D \in \mathcal{D}_I(F)$ , entonces para  $i, j \in I$  con  $i \neq j$ , tenemos que

$$(cE)(i, j) = cD(i, j) = c0 = 0$$

por tanto  $cD \in \mathcal{D}_I(F)$ .

Así las cosas,  $\mathcal{D}_I(F)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{M}_I(F)$ . En particular,  $(\mathcal{D}_I(F), +, \bar{0})$  es un subgrupo de  $(\mathcal{M}_I(F), +, \bar{0})$ , por lo que se satisface 2. de la definición de subanillo. Ahora, es claro que  $\Delta_I \in \mathcal{D}_I(F)$ , así que se cumple 1. de la definición de subanillo. Finalmente, vamos a mostrar que se cumple 3. de la definición de subanillo. En efecto, si  $D, E \in \mathcal{D}_I(F)$ , para  $i, j \in I$  con  $i \neq j$ , tenemos que

$$(DE)(i, j) = \sum_{k \in I} D(i, k)E(k, j) = D(i, i)E(i, j) + D(i, j)E(j, j) = 0$$

por lo que se concluye que  $DE \in \mathcal{D}_I(F)$ . De esta manera, concluimos que  $\mathcal{D}_I(F)$  es un subanillo de  $\mathcal{M}_I(F)$ .  $\square$

De lo anterior, vemos que es posible construir un anillo de matrices diagonales sobre cualquier conjunto no vacío, sin la necesidad de imponerle propiedades especiales al conjunto respecto a orden, numerabilidad, convergencia, etc.

## Las matrices triangulares $\mathcal{UT}(I, F)$ y $\mathcal{LT}(I, F)$

Para definir de matrices triangulares necesitamos tener un poco de cuidado. Vamos a recordar el concepto de matriz triangular para el caso de matrices finitas. Dado  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y  $A \in \mathcal{M}_n(F)$ ,  $A$  es **triangular superior**, si  $A(i, j) = 0$  cuando  $j < i$  para cada  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , mientras que  $A$  es **triangular inferior**, si  $A(i, j) = 0$  cuando  $i < j$  para cada  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Esto nos indica que en este caso, se está utilizando el orden de los números naturales, por lo que inferimos que para definir el concepto de “matriz triangular”, necesitamos “ordenar” de alguna manera los elementos de nuestro conjunto sobre el que construimos nuestro anillo de matrices. Además, necesitamos que cualesquiera dos elementos se puedan “comparar”. Vamos a recurrir a las siguientes definiciones.

**Definición 2.32.** Sea  $(X, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que  $X$  es **totalmente ordenado** ó **linealmente ordenado por  $\leq$** , si para cada  $x, y \in X$ ,  $x \leq y$  ó  $y \leq x$ .

**Definición 2.33.** Sea  $(X, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que  $\leq$  es un **buen orden en  $X$**  o que  $X$  está bien ordenado por  $\leq$ , si todo subconjunto no vacío de  $X$  tiene un elemento menor, es decir, para cada  $Y \subseteq X$  con  $Y \neq \emptyset$ , existe  $m \in Y$  tal que  $m = \text{menor}(Y)$ .

**Observación 2.34.** Si  $(X, \leq)$  es un conjunto bien ordenado, entonces es linealmente ordenado. En efecto, si  $x, y \in X$ , como  $\{x, y\} \subseteq X$  y  $\{x, y\} \neq \emptyset$ , existe  $m \in \{x, y\}$  tal que  $m = \text{menor}(\{x, y\})$ . Si  $m = x$ , entonces  $x \leq y$ . Si  $m = y$ , entonces  $y \leq x$ .

Recordemos también que si asumimos verdadero el Axioma de Elección, éste es equivalente al Teorema de Zermelo, el cuál enunciamos a continuación y utilizaremos más adelante.

**Teorema 2.35** (Teorema de Zermelo). *Todo conjunto puede ser bien ordenado. Es decir, si  $X$  es un conjunto, existe una relación de orden parcial  $\preceq$  en  $X$ , tal que  $(X, \preceq)$  es un conjunto bien ordenado.*

Continuando con nuestras matrices, si  $(I, \leq)$  es un conjunto linealmente ordenado, podemos introducir las siguientes definiciones.

**Definición 2.36.** Sea  $F$  un campo,  $(I, \leq)$  es un conjunto linealmente ordenado y  $A \in \mathcal{M}_I(F)$ , entonces:

- Diremos que  $A$  es una **matriz triangular superior**, si  $A(i, j) = 0$ , cuando  $j < i$ , para cada  $i, j \in I$ .
- Diremos que  $A$  es una **matriz triangular inferior**, si  $A(i, j) = 0$  cuando  $i < j$ .

Definimos los conjuntos

$$\mathcal{UT}(I, F) = \{U \in \mathcal{M}_I(F) \mid U \text{ es triangular superior}\}$$

y

$$\mathcal{LT}(I, F) = \{L \in \mathcal{M}_I(F) \mid L \text{ es triangular inferior}\}.$$

**Observación 2.37.** *Los conjuntos  $\mathcal{UT}(I, F)$  y  $\mathcal{LT}(I, F)$  son no vacíos, pues  $\Delta_I \in \mathcal{UT}(I, F)$  y  $\Delta_I \in \mathcal{LT}(I, F)$ .*

Ahora bien, si  $I$  es un conjunto no vacío, por el Teorema 2.35, existe una relación de orden parcial  $\preceq$  en  $I$  tal que  $(I, \preceq)$  es un conjunto bien ordenado. Por la Observación 2.34,  $(I, \preceq)$  es un conjunto linealmente ordenado, por lo que utilizando la relación  $\preceq$  se pueden construir los conjuntos  $\mathcal{UT}(I, F)$  y  $\mathcal{LT}(I, F)$ . De esta manera, podemos concluir que por lo menos a nivel teórico, a partir de cualquier conjunto no vacío podemos construir los conjuntos de matrices triangulares, utilizando la relación de orden adecuada en  $I$ .

Ahora vamos a explorar la estructura algebraica que tienen los conjuntos  $\mathcal{UT}(I, F)$  y  $\mathcal{LT}(I, F)$ . Es claro que  $\bar{0}, \Delta_I \in \mathcal{UT}(I, F)$ . Ahora, si  $U_1, U_2 \in \mathcal{UT}(I, F)$ , tenemos que para  $i, j \in I$  con  $j < i$ , tenemos que

$$(U_1 + U_2)(i, j) = U_1(i, j) + U_2(i, j) = 0 + 0 = 0$$

de modo que  $U_1 + U_2 \in \mathcal{UT}(I, F)$ . Si  $c \in F$  y  $U \in \mathcal{UT}(I, F)$ , entonces para  $i, j \in I$  con  $j < i$  se tiene que

$$(cU)(i, j) = cU(i, j) = c0$$

lo que implica que  $cU \in \mathcal{UT}(I, F)$ . Así las cosas, tenemos que  $\mathcal{UT}(I, F)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{M}_I(F)$ . En particular,  $(\mathcal{UT}(I, F), +, \bar{0})$  es un subgrupo de  $(\mathcal{M}_I(F), +, \bar{0})$ , lo que implica que  $\mathcal{UT}(I, F)$  también es cerrado bajo diferencias. De esta manera, hasta el momento hemos probado 1. y 2. de la definición de subanillo. Vamos a ver como se comporta el producto en  $\mathcal{UT}(I, F)$ . Si  $j < i$ , recordemos que

$$(U_1U_2)(i, j) = \sum_{k \in I} U_1(i, k)U_2(k, j). \quad (2)$$

Vamos a analizar cada uno de los sumandos de (1). Dado que estamos asumiendo que  $I$  es un conjunto linealmente ordenado, podemos comparar cualesquiera dos elementos. Si  $k < i$ , tenemos que  $U_1(i, k) = 0$ , por lo que  $U_1(i, k)U_2(k, j) = 0$ . Si  $i < k$ , como  $j < i$ , tenemos que  $j < k$ ; en consecuencia,  $U_2(k, j) = 0$ ; por tanto,  $U_1(i, k)U_2(k, j) = 0$ . Finalmente, si  $i = k$ , como  $j < i$ , tenemos que  $U_2(i, j) = 0$ , por lo que  $U_1(i, i)U_2(i, j) = 0$ . Así las cosas, hemos demostrado que todos los sumandos de (1) son 0; por lo

que  $(U_1U_2)(i, j) = 0$ ; esto ocurre cuando  $j < i$ . De aquí se concluye que  $U_1U_2 \in \mathcal{UT}(I, F)$ . Por lo tanto,  $\mathcal{UT}(I, F)$  es un subanillo de  $\mathcal{M}_I(F)$ . Mutatis mutandis, lo hecho anteriormente establece que  $\mathcal{LT}(I, F)$  es un subanillo de  $\mathcal{M}_I(F)$ . De esta manera, hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 2.38.** *Sea  $F$  un campo e  $(I, \leq)$  un conjunto linealmente ordenado. Entonces,  $\mathcal{UT}(I, F)$  y  $\mathcal{LT}(I, F)$  son subespacios vectoriales de  $\mathcal{M}_I(F)$ . Más aún,  $\mathcal{UT}(I, F)$  y  $\mathcal{LT}(I, F)$  son subanillos de  $\mathcal{M}_I(F)$ .*

Notemos que, por derecho propio,  $\mathcal{UT}(I, F)$  y  $\mathcal{LT}(I, F)$  son espacios vectoriales sobre  $F$ . Más aún,  $\mathcal{UT}(I, F)$  y  $\mathcal{LT}(I, F)$  son anillos con uno.

## Las matrices numerables

**Definición 2.39.** *Al anillo  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F)$  le llamaremos el anillo de las matrices numerables.*

Recordemos que los números naturales los podemos ver como conjuntos, pues  $0 = \emptyset$  y si  $n > 0$ , entonces  $n = \{0, \dots, n-1\}$ . Además, como  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , se tiene que  $n \subseteq n+1 \subseteq \mathbb{N}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En el siguiente teorema, establecemos que, en algún sentido, el anillo de matrices numerables contiene a todos los anillos de matrices finitas.

**Teorema 2.40.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que*

$$\mathcal{M}_n(F) \subseteq \mathcal{M}_{n+1}(F).$$

*Más aún, si  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $m < n$ , entonces  $\mathcal{M}_m(F) \subseteq \mathcal{M}_n(F)$ . Además,  $\mathcal{M}_n(F) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Considerando a los número naturales como cardinales, si  $n \in \mathbb{N}$ , dado que  $n < n+1$ , el Teorema 2.23 implica que  $\mathcal{M}_n(F) \subseteq \mathcal{M}_{n+1}(F)$ . Por el mismo argumento, si  $m < n$ ,  $\mathcal{M}_m(F) \subseteq \mathcal{M}_n(F)$ . Ahora, consideremos  $\aleph_0$ , el cardinal asociado a  $\mathbb{N}$ . Sabemos que  $n < \aleph_0$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ; en consecuencia,  $\mathcal{M}_n(F) \subseteq \mathcal{M}_{\aleph_0}(F)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , con lo que se concluye lo deseado.  $\square$

El teorema anterior nos indica que el anillo de las matrices numerables contiene todos los anillos de matrices finitas. De hecho, podemos formar la cadena creciente de anillos de matrices

$$\{0\} \subseteq \mathcal{M}_1(F) \subseteq \mathcal{M}_2(F) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{M}_n(F) \subseteq \mathcal{M}_{n+1}(F) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F).$$

Ahora bien, si  $J \subseteq \mathbb{N}$ , entonces  $J$  es finito o  $J$  es infinito numerable. Si  $J$  es finito, entonces  $|J| = n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  y, por consiguiente,  $\mathcal{M}_J(F) \cong \mathcal{M}_n(F)$ . Si  $J$  es infinito numerable, entonces  $|J| = |\mathbb{N}|$  y, en este caso,  $\mathcal{M}_J(F) \cong \mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F)$ . Así las cosas, hemos establecido que los anillos de matrices contenidos en  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F)$  con respecto a los subconjuntos de  $\mathbb{N}$  son, en esencia, o anillos de matrices finitas o el anillo  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F)$ , salvo isomorfismo.

Vamos a ver que cuando  $X$  es un conjunto infinito no numerable, el anillo  $\mathcal{M}_X(F)$  contiene al anillo  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F)$ . Si  $X$  es un conjunto infinito no numerable, contiene un conjunto infinito numerable. En efecto, como  $X$  es infinito,  $X \neq \emptyset$ , luego existe  $x_0 \in X$ . Puesto que  $X$  es infinito,  $X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ , pues si  $X \setminus \{x_0\} = \emptyset$ , entonces  $X = \{x_0\}$ , lo cual es absurdo. Así, podemos elegir  $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$ . Razonemos por inducción, supongamos que para  $n > 1$ , hemos elegido  $x_n \in X$  tal que  $x_n \in X \setminus \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ ; dado que  $X$  es infinito, tenemos que  $X \setminus \{x_0, \dots, x_n\} \neq \emptyset$ , por lo que podemos elegir  $x_{n+1} \in X \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ . Así las cosas, para cada  $n \in \mathbb{N}$  es posible elegir  $x_n \in X$  tal que  $x_n \notin \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ . Obsérvese que por construcción,  $x_n \neq x_m$  cuando  $n \neq m$ , para cada  $n, m \in \mathbb{N}$ . Definiendo  $N = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , se tiene que  $N \subseteq X$  y es fácil ver que

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{N} &\rightarrow N \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

es una biyección, por lo que  $|N| = |\mathbb{N}|$ . Por el Teorema 2.23, se tiene que  $\mathcal{M}_N(F) \subseteq \mathcal{M}_X(F)$ , pero por el Teorema 2.21,  $\mathcal{M}_N(F) \cong \mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F)$ , por lo que podemos suponer que  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F) \subseteq \mathcal{M}_X(F)$ . De esta manera, tenemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 2.41.** *Si  $F$  es un campo y  $\kappa$  es un cardinal infinito no numerable,  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F) \subseteq \mathcal{M}_{\kappa}(F)$ .*

Más aún, si  $\kappa$  es un cardinal infinito, podemos construir una cadena estrictamente creciente de anillos de matrices

$$\{0\} \subsetneq \mathcal{M}_1(F) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{M}_n(F) \subsetneq \mathcal{M}_{n+1}(F) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F) \subsetneq \mathcal{M}_{\kappa}(F).$$

En conclusión,  $\mathcal{M}_{\kappa}(F)$  contiene al anillo de matrices numerables y a todos los anillos de matrices finitas. De esta manera, si consideramos la familia de anillos de matrices

$$\mathcal{F}_{\kappa}(F) = \{\mathcal{M}_n(F) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}(F)\} \cup \{\mathcal{M}_{\kappa}(F)\}$$

ordenada por inclusión  $\subseteq$  en el sentido que hemos comentado, tenemos que  $(\mathcal{F}_\kappa(F), \subseteq)$  es un conjunto linealmente ordenado.

Más en general, recordemos que, usando el Axioma de Elección, en la clase de los cardinales **Card** se puede inducir un orden lineal por la relación “ $\kappa \leq \lambda$ , si y solo si, existe una función inyectiva  $f : \kappa \rightarrow \lambda$ ”. A partir de un campo dado  $F$ , si consideramos la clase de anillos de matrices

$$\mathcal{C}(F) = \{\mathcal{M}_\kappa(F) \mid \kappa \in \mathbf{Card}\}$$

por el Corolario 2.25, en esta clase se puede introducir un orden lineal vía la “contención” de anillos.

### 3 Anillo de endomorfismos y grupo de automorfismos en espacios vectoriales de dimensión arbitraria

En lo sucesivo, consideraremos cardinales para desarrollar nuestra teoría, los cuales pueden ser finitos o infinitos. Esto se debe a que recordando que los cardinales son los representantes de los conjuntos equipotentes a éstos.

#### Anillo de endomorfismos

Recordemos que si  ${}_F V, {}_F W$  son espacios vectoriales, entonces

$$\text{Hom}_F(V, W) = \{T : {}_F V \rightarrow {}_F W \mid T \text{ es una transformación lineal}\}$$

es un espacio vectorial sobre  $F$ , con las operaciones  $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$  y  $(cT)(v) = cT(v)$  para cada  $T, S \in \text{Hom}_F(V, W)$ ,  $c \in F$  y  $v \in V$ .

**Definición 3.1.** Sean  $F$  un campo y  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ .

- Un **endomorfismo** en  ${}_F V$  es una transformación lineal  $T : {}_F V \rightarrow {}_F V$ .
- Al espacio vectorial  $\text{Hom}_F(V, V)$  le llamamos **el espacio de endomorfismos en  ${}_F V$**  y lo denotaremos por  $\text{End}_F(V, \kappa)$ , es decir,

$$\text{Hom}_F(V, V) = \text{End}_F(V, \kappa).$$

**Observación 3.2.** Aunque de inicio no usaremos el cardinal asociado a la dimensión del espacio, lo haremos más adelante para relacionar el anillo de endomorfismos con el de las matrices, por esa razón lo indicamos en nuestra notación.

Por ser  $End_F(V, \kappa)$  un espacio vectorial, en particular  $(End_F(V, \kappa), +, \bar{0})$  es un grupo abeliano. Vamos a definir un producto en  $End_F(V, \kappa)$  como sigue

$$\begin{aligned} \bullet : End_F(V, \kappa) \times End_F(V, \kappa) &\rightarrow End_F(V, \kappa) \\ (T, S) &\mapsto T \circ S. \end{aligned}$$

Por las propiedades conocidas de la composición de transformaciones lineales, tenemos que el producto es cerrado en  $End_F(V, \kappa)$  y claramente bien definido. Además se satisfacen las siguientes propiedades:

- Para cada  $T, S, U \in End_F(V, \kappa)$ ,  $T \bullet (S \bullet U) = (T \bullet S) \bullet U$ .
- La transformación lineal  $1_V :_F V \rightarrow_F V$ , definida por  $1_V(v) = v$ , para cada  $v \in V$ , es un elemento de  $End_F(V, \kappa)$  y es tal que  $1_V \bullet T = T = T \bullet 1_V$ , para cada  $T \in End_F(V, \kappa)$ .

Por lo que  $(End_F(V, \kappa), \bullet, 1_V)$  es un monoide. Ahora, tomemos  $S, T, U \in End_F(V, \kappa)$ , entonces, para cada  $v \in V$ , se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (T \bullet (S + U))(v) &= (T \circ (S + U))(v) = T((S + U)(v)) = T(S(v) + U(v)) \\ &= T(S(v)) + T(U(v)) = (T \circ S)(v) + (T \circ U)(v) \\ &= (T \bullet S)(v) + (T \bullet U)(v) \end{aligned}$$

por lo que  $T \bullet (S + U) = T \bullet S + T \bullet U$ . De manera completamente similar se exhibe que  $(S + U) \bullet T = S \bullet T + U \bullet T$ . Así las cosas, tenemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.** Sean  $F$  un campo y  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ . Entonces,

$$(End_F(V, \kappa), +, \bar{0}, \bullet, 1_V)$$

es un anillo con uno.

**Definición 3.4.** Sea  $F$  un campo y  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ . El anillo

$$(\text{End}_F(V, \kappa), +, \bar{0}, \bullet, 1_V)$$

es llamado **el anillo de endomorfismos en  ${}_F V$** . En lo sucesivo solo lo denotaremos por  $\text{End}_F(V, \kappa)$ , recordando las operaciones definidas siempre que no se indique lo contrario.

**Observación 3.5.** Dado que  $1_V \neq \bar{0}$ , el anillo  $\text{End}_F(V, \kappa)$  no es trivial, siempre que  ${}_F V \neq_F \{0\}$ .

## Grupo de automorfismos

**Definición 3.6.** Sea  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ .

- Un **automorfismo** en  ${}_F V$  es un isomorfismo de espacios vectoriales  $\varphi : {}_F V \rightarrow {}_F V$ .
- Definimos y denotamos el **conjunto de automorfismos en  ${}_F V$**  como

$$\text{Aut}_F(V, \kappa) = \{\varphi \in \text{End}_F(V, \kappa) \mid \varphi \text{ es automorfismo}\}.$$

Es fácil ver que  $1_V : {}_F V \rightarrow {}_F V$  es un automorfismo, por lo que  $1_V \in \text{Aut}_F(V, \kappa)$ , así  $\text{Aut}_F(V, \kappa) \neq \emptyset$ . Además, sabemos que la composición de isomorfismos es un isomorfismo, por lo que  $\bullet$  es cerrada en  $\text{Aut}_F(V, \kappa)$ , por lo que  $(\text{Aut}_F(V, \kappa), \bullet, 1_V)$  es un monoide. Más aún, si  $\varphi : {}_F V \rightarrow {}_F V$  es un automorfismo,  $\varphi^{-1} : {}_F V \rightarrow {}_F V$  también es un isomorfismo, además,  $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_V = \varphi \circ \varphi^{-1}$ . La asociatividad de  $\bullet$  se hereda de  $\text{End}_F(V, \kappa)$  así como la condición de que  $1_V \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ 1_V$ , para cada  $\varphi \in \text{Aut}_F(V, \kappa)$ . Así las cosas,  $(\text{Aut}_F(V, \kappa), \bullet, 1_V)$  es un grupo.

**Definición 3.7.** Sea  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ . El grupo  $(\text{Aut}_F(V, \kappa), \bullet, 1_V)$  es llamado **el grupo de automorfismos en  ${}_F V$** . En lo sucesivo denotaremos a este grupo solo por  $\text{Aut}_F(V, \kappa)$  entendiendo que es respecto a la operación  $\bullet$ .

## 4 Relaciones anillos de matrices arbitrarias anillos de endomorfismos en espacios vectoriales de dimensión arbitraria

Vamos a mostrar la relación que existe una relación entre los anillos de endomorfismos en espacios vectoriales de dimensión arbitraria y los anillos de matrices que hemos expuesto. Antes de proceder, vamos a recordar algunos conceptos que consideramos importantes para nuestro desarrollo.

**Definición 4.1.** Si  $F$  es un campo y  ${}_FV$  es un espacio vectorial, definimos la **dimensión de  $V$**  como  $|X|$ , donde  $X$  es una base de  ${}_FV$ . Si  $\kappa$  es el cardinal asociado a  $X$ , diremos que la dimensión de  ${}_FV$  es  $\kappa$  y escribiremos  $\dim({}_FV) = \kappa$ .

En [8] se demostró que la definición anterior tiene sentido.

**Definición 4.2.** Sean  $F$  un campo y  ${}_FV$  un espacio vectorial. Decimos que la terna  $\overline{B} = (B, I, \sigma)$  es una **base ordenada de  ${}_FV$** , si  $I$  es un conjunto y  $\sigma : I \rightarrow B$  es una función biyectiva.

**Observación 4.3.** Toda base se puede ordenar respecto a un conjunto, pues si  $B$  es una base de un espacio vectorial  ${}_FV$ , la función identidad en  $B$

$$\begin{aligned} id_B : B &\rightarrow B \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

es una biyección, de este modo  $\overline{B} = (B, B, id_B)$  es una base ordenada de  $B$ . En lo sucesivo, si  ${}_FV$  es un espacio vectorial y  $\dim({}_FV) = \kappa$ , supondremos que las bases de  ${}_FV$  están ordenadas respecto al cardinal  $\kappa$ , es decir, si  $B$  es una base de  ${}_FV$ , supondremos que  $B = (x_i)_{i \in \kappa}$  con  $x_i \neq x_j$  cuando  $i \neq j$ , para cada  $i, j \in \kappa$ .

**Definición 4.4.** Sea  ${}_FV$  un espacio vectorial,  $X$  un conjunto y  $\Lambda : X \rightarrow V$  una función. Diremos que la pareja  $(X, \Lambda)$  es una **base categórica de  ${}_FV$** , si satisface la siguiente propiedad universal:

- Para cada espacio vectorial  ${}_FW$  y para cada función  $f : X \rightarrow W$ , existe una única transformación lineal  $T : {}_FV \rightarrow {}_FW$  tal que  $T \circ \Lambda = f$ .

Lo anterior se puede expresar diciendo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & {}_F W \\ \Lambda \downarrow & \nearrow T & \\ {}_F V & & \end{array}$$

conmuta.

**Observación 4.5.** Si  $(X, \Lambda)$  es una base categórica de  ${}_F V$ , entonces  $\Lambda$  es una función inyectiva.

**Teorema 4.6.** [Propiedad universal de las bases] Sea  ${}_F V$  un espacio vectorial. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $(X, \Lambda)$  es una base categórica de  ${}_F V$ .
2.  $\Lambda(X)$  es una base de  ${}_F V$ .

Una versión del teorema anterior junto con su demostración se presenta en [8].

**Teorema 4.7.** Sean  ${}_F V$  y  ${}_F W$  espacios vectoriales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\dim({}_F V) = \dim({}_F W)$ .
2.  ${}_F V \cong_{{}_F} {}_F W$ .

La demostración detallada del teorema anterior se puede consultar en [8].

También es importante recordar los conceptos de representación en coordenadas y representación matricial de transformaciones lineales entre espacios de dimensión arbitraria.

**Definición 4.8.** Sea  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ ,  $B = (x_i)_{i \in \kappa}$  una base ordenada de  ${}_F V$  y el isomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi_B : {}_F V &\rightarrow {}_F F^{(\kappa)} \\ x_i &\mapsto \delta_i. \end{aligned}$$

Para  $v \in V$ ,  $\Phi_B(v)$  es llamado **la representación en coordenadas de  $v$  con respecto a la base  $B$**  y se denota por  $[v]_B$ .

La construcción detallada del isomorfismo  $\Phi_B$  se puede consultar en [8].

**Definición 4.9.** Sean  $\kappa, \lambda$  cardinales,  $F$  un campo y  $T : {}_F F^{(\lambda)} \rightarrow {}_F F^{(\kappa)}$  una transformación lineal. Definimos la matriz de  $T$  como la matriz  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  tal que para cada  $j \in \kappa$ ,  $A(\cdot, j) = T(\delta_j)$ .

**Definición 4.10.** (La matriz de una transformación lineal) Sea  $F$  un campo,  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales,  ${}_F V$  y  ${}_F W$  espacios vectoriales de dimensiones  $\lambda$  y  $\kappa$ , respectivamente, con bases ordenadas  $B = (x_j)_{j \in \lambda}$  y  $C = (y_i)_{i \in \kappa}$ , respectivamente y  $T : {}_F V \rightarrow {}_F W$  una transformación lineal. La **representación matricial de  $T$  respecto a las bases  $B$  y  $C$** , se define como la matriz de  $\Phi_C \circ T \circ \Phi_B^{-1} : {}_F F^{(\lambda)} \rightarrow {}_F F^{(\kappa)}$  en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} {}_F V & \xrightarrow{T} & {}_F W \\ \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_C \\ {}_F F^{(\lambda)} & \xrightarrow{\Phi_C \circ T \circ \Phi_B^{-1}} & {}_F F^{(\kappa)} \end{array}$$

y se denota por  $[T]_B^C$ . Cuando  ${}_F V = {}_F W$  y  $B = C$ , a  $[T]_B^C$  se la llama **la representación matricial de  $T$  en la base  $B$**  y se denota simplemente como  $[T]_B$ .

**Teorema 4.11.** Sea  $F$  un campo,  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales,  ${}_F V$  y  ${}_F W$  espacios vectoriales de dimensiones  $\lambda$  y  $\kappa$ , respectivamente. Entonces

$${}_F \text{Hom}_F(V, W) \cong_F \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F).$$

Una versión del teorema anterior junto con su demostración detallada la presentamos en [8]. Fijamos bases ordenadas  $B = (x_j)_{j \in \lambda}$  y  $C = (y_i)_{i \in \kappa}$  de  ${}_F V$  y  ${}_F W$ , respectivamente. Así, definimos

$$\begin{array}{ccc} \Psi_{B,C} : {}_F \text{Hom}_F(V, W) & \rightarrow & {}_F \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F) \\ T & \mapsto & [T]_B^C \end{array}$$

la cuál se demostró en [8] que es un isomorfismo. De hecho, sin mucho trabajo se puede demostrar que

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{B,C} : {}_F \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F) & \rightarrow & {}_F \text{Hom}_F(V, W) \\ A & \mapsto & T_A \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} T_A: {}_F V &\rightarrow {}_F W \\ x_j &\mapsto \sum_{i \in \kappa} A(i, j) y_i \end{aligned}$$

es una transformación lineal y es inversa de  $\Psi_{B,C}$ . Es evidente que ambas transformaciones lineales dependen de las bases elegidas.

Con el teorema anterior, se deduce que si  ${}_F V$  es un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ ,  ${}_F \text{End}(V, \kappa) \cong_F \mathcal{M}_\kappa(F)$  como espacios vectoriales. Para mostrar que son isomorfos como anillos, es necesario definir en el caso general la representación de la composición de transformaciones lineales.

**Definición 4.12.** Sea  $F$  un campo y  $\kappa$  un cardinal. Llamamos **base canónica de  $F^{(\kappa)}$**  a la base ordenada  $C_\kappa = (\delta_i)_{i \in \kappa}$ , donde para cada  $i \in \kappa$ ,  $\delta_i(i) = 1$  y  $\delta_i(k) = 0$  cuando  $k \neq i$ .

**Observación 4.13.** Recordemos que si  $\lambda$  es un cardinal y  $f \in F^{(\lambda)}$ , podemos ver a  $f$  como una matriz  $\lambda \times 1$ , considerando  $1 = \{\emptyset\}$  y definiendo  $f(j) = f(j, \emptyset)$  para cada  $j \in \lambda$ . Incluso podemos considerar a 1 como cualquier conjunto unitario. En este caso, si  $\kappa$  es otro cardinal y  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$ ,  $Af \in \mathcal{M}_{\kappa \times 1}(F)$  y por el mismo argumento, podemos suponer que  $Af \in F^{(\kappa)}$ .

**Definición 4.14.** Sean  $F$  un campo,  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales y  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$ . Definimos  $\mu_A$  a la única transformación lineal

$$\begin{aligned} \mu_A: F^{(\lambda)} &\rightarrow F^{(\kappa)} \\ \delta_j &\mapsto A\delta_j \end{aligned}$$

definida por el Teorema 4.6 y usando la observación anterior.

**Observación 4.15.** Sean  $F$  un campo,  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales. Consideremos las bases canónicas  $C_\lambda$  y  $C_\kappa$  de  $F^{(\lambda)}$  y  $F^{(\kappa)}$ , respectivamente,  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  y la transformación lineal  $\mu_A: F^{(\lambda)} \rightarrow F^{(\kappa)}$ . Notemos que para cada  $i \in \kappa$  y  $j \in \lambda$

$$\mu_A(\delta_j)(i) = (A\delta_j)(i) = \sum_{k \in \lambda} A(i, k)\delta_j(k) = A(i, j)\delta_j(j) = A(i, j)$$

por lo que  $\mu_A(\delta_j) = A(\ , j)$  para cada  $j \in \lambda$ . Más aún,  $[\mu_A]_{C_\lambda}^{C_\kappa} = A$ . En efecto, para cada  $(i, j) \in \kappa \times \lambda$ , tenemos que

$$[\mu_A]_{C_\lambda}^{C_\kappa}(i, j) = [\mu_A(\delta_j)]_{C_\kappa}(i) = [A\delta_j]_{C_\kappa}(i) = [A(\ , j)]_{C_\kappa}(i) = A(i, j).$$

En el siguiente teorema vamos a mostrar que todas las transformaciones lineales entre  ${}_F F^{(\lambda)}$  y  ${}_F F^{(\kappa)}$  son de la forma anterior.

**Teorema 4.16.** *Sean  $F$  un campo,  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales. Entonces  $T : {}_F F^{(\lambda)} \rightarrow {}_F F^{(\kappa)}$  es una transformación lineal, si y solo si, existe una matriz  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  tal que  $T = \mu_A$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ): Consideremos  $C_\lambda$  y  $C_\kappa$  las bases canónicas de  ${}_F F^{(\lambda)}$  y  ${}_F F^{(\kappa)}$ , respectivamente y consideremos  $A = [T]_{C_\lambda}^{C_\kappa}$ . Mostremos que  $T = \mu_A$ , en efecto, para cada  $j \in \lambda$ , por la Observación 4.15, tenemos que

$$T(\delta_j) = A(, j) = \mu_A(\delta_j)$$

de donde por el Teorema 4.6, se sigue que  $T = \mu_A$ .

( $\Leftarrow$ ): Ya está demostrado. □

**Lema 4.17.** *Sean  $F$  un campo,  $\kappa$ ,  $\lambda$  y  $\tau$  cardinales,  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  y  $B \in \mathcal{M}_{\lambda \times \tau}(F)$ . Entonces  $\mu_A \circ \mu_B = \mu_{AB}$ .*

*Demostración.* Por un lado, como  $\mu_A : {}_F F^{(\lambda)} \rightarrow {}_F F^{(\kappa)}$  y  $\mu_B : {}_F F^{(\tau)} \rightarrow {}_F F^{(\lambda)}$  son transformaciones lineales, entonces  $\mu_A \circ \mu_B : {}_F F^{(\tau)} \rightarrow {}_F F^{(\kappa)}$  es una transformación lineal. Por otro lado, como  $AB \in \mathcal{M}_{\kappa \times \tau}(F)$ , entonces  $\mu_{AB} : {}_F F^{(\tau)} \rightarrow {}_F F^{(\kappa)}$  es una transformación lineal. Consideremos la base canónica  $C_\tau$  de  ${}_F F^{(\tau)}$ , por el Teorema 4.6, es suficiente mostrar que  $\mu_{AB}$  y  $\mu_A \circ \mu_B$  conciden en la base  $C_\tau$ , en efecto, para  $k \in \tau$ , tenemos lo siguiente:

$$(\mu_A \circ \mu_B)(\delta_k) = \mu_A(\mu_B(\delta_k)) = \mu_A(B\delta_k) = A(B\delta_k) = (AB)\delta_k$$

con lo que se concluye que  $\mu_{AB} = \mu_A \circ \mu_B$ . □

Hasta el momento, hemos expuesto propiedades de las transformaciones lineales entre espacios de la forma  ${}_F F^{(\kappa)}$  con  $\kappa$  un cardinal (finito o infinito). En el siguiente teorema se relacionan transformaciones lineales entre espacios arbitrarios y transformaciones entre espacios de la forma  ${}_F F^{(\kappa)}$ .

**Teorema 4.18.** *Sean  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales (finitos o infinitos),  ${}_F V$  y  ${}_F W$  espacios vectoriales de dimensiones  $\lambda$  y  $\kappa$ , respectivamente con bases ordenadas  $B =$*

$(x_j)_{j \in \lambda}$  y  $C = (y_i)_{i \in \kappa}$ , respectivamente y  $T :_F V \rightarrow_F W$  una transformación lineal. Entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} {}_F V & \xrightarrow{T} & {}_F W \\ \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_C \\ {}_F F(\lambda) & \xrightarrow{\mu_{[T]_B^C}} & {}_F F(\kappa) \end{array}$$

es conmutativo, es decir,  $\Phi_C \circ T = \mu_{[T]_B^C} \circ \Phi_B$ .

*Demostración.* Por el Teorema 4.6, es suficiente ver la igualdad en los básicos de  $B$ . Sea  $j \in \lambda$ , entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\Phi_C \circ T)(x_j) &= \Phi_C(T(x_j)) = [T(x_j)]_C = [T]_B^C(\cdot, j) = [T]_B^C \delta_j = \mu_{[T]_B^C}(\delta_j) \\ &= \mu_{[T]_B^C}([x_j]_B) = \mu_{[T]_B^C}([x_j]_B) = \mu_{[T]_B^C}(\phi_B(x_j)) = (\mu_{[T]_B^C} \circ \Phi_B)(x_j) \end{aligned}$$

de donde se sigue que  $\Phi_C \circ T = \mu_{[T]_B^C} \circ \Phi_B$ .  $\square$

El siguiente teorema generaliza la representación matricial de composición de transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión arbitraria.

**Teorema 4.19.** Sean  $\kappa$ ,  $\lambda$  y  $\tau$  cardinales (finitos o infinitos),  ${}_F V$ ,  ${}_F W$  y  ${}_F Z$  espacios vectoriales de dimensiones  $\lambda$ ,  $\kappa$  y  $\tau$ , respectivamente con bases ordenadas  $B = (x_j)_{j \in \lambda}$ ,  $C = (y_i)_{i \in \kappa}$  y  $D = (z_k)_{k \in \tau}$ ,  $T :_F V \rightarrow_F W$  y  $S :_F W \rightarrow_F Z$  transformaciones lineales. Entonces,

$$[S \circ T]_B^D = [S]_C^D [T]_B^C.$$

*Demostración.* Por las hipótesis, el Teorema 4.18 y el Lema 4.17, tenemos el

diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{T} & W & \xrightarrow{S} & Z \\
 \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_C & & \downarrow \Phi_D \\
 F(\lambda) & \xrightarrow{\mu_{[T]_B^C}} & F(\kappa) & \xrightarrow{\mu_{[S]_C^D}} & F(\tau) \\
 \downarrow id_{F(\lambda)} & & & & \downarrow id_{F(\tau)} \\
 F(\lambda) & \xrightarrow{\mu_{[S]_C^D} \circ \mu_{[T]_B^C}} & & & F(\tau)
 \end{array} \quad (1)$$

Por otro lado, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 {}_F V & \xrightarrow{S \circ T} & {}_F W \\
 \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_D \\
 {}_F F(\lambda) & \xrightarrow{\mu_{[S \circ T]_B^D}} & {}_F F(\tau)
 \end{array} \quad (2)$$

Del Lema 4.17 y los diagramas (1) y (2), obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
 \mu_{[S \circ T]_B^D} &= \Phi_D \circ (S \circ T) \circ \Phi_B^{-1} = (\Phi_D \circ S) \circ (T \circ \Phi_B^{-1}) \\
 &= (\mu_{[S]_C^D} \circ \Phi_C) \circ (\Phi_C^{-1} \circ \mu_{[T]_B^C}) = \mu_{[S]_C^D} \circ \mu_{[T]_B^C} \\
 &= \mu_{[S]_C^D [T]_B^C}
 \end{aligned}$$

de donde por la Observación 4.15, obtenemos que  $[S \circ T]_B^D = [S]_C^D [T]_B^C$ .  $\square$

**Observación 4.20.** *Del teorema anterior se deduce que si  ${}_F V$  es un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ ,  $B = (x_j)_{j \in \kappa}$  es una base ordenada de  ${}_F V$ ,  $S, T \in \text{End}_F(V, \kappa)$ , entonces  $[S \circ T]_B = [S \circ T]_B^B = [S]_B^B [T]_B^B = [S]_B [T]_B$ . Además, es fácil ver que  $[1_V]_B = \Delta_\kappa$ .*

De la observación anterior se puede establecer el siguiente teorema.

**Teorema 4.21.** *Sea  $F$  un campo,  $\kappa$  un cardinal (finito o infinito),  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ . Entonces,*

$$\text{End}_F(V, \kappa) \cong \mathcal{M}_\kappa(F)$$

como anillos.

*Demostración.* Fijemos una base ordenada  $B = (x_j)_{j \in \kappa}$  de  ${}_F V$  y definimos la función

$$\begin{aligned} \Psi_B : \text{End}_F(V, \kappa) &\rightarrow \mathcal{M}_\kappa(F) \\ \varphi &\mapsto [\varphi]_B. \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.11,  $\Psi_B$  es un isomorfismo de espacios vectoriales. Ahora, por la Observación 4.20,  $\Psi_B(1_V) = \Delta_\kappa$  y  $\Psi_B(\varphi \circ \varrho) = \Psi_B(\varphi)\Psi_B(\varrho)$ , para cada  $\varphi, \varrho \in \text{End}_F(V, \kappa)$ , de donde se sigue que  $\Psi_B$  es también un isomorfismo de anillos y, por tanto,  $\text{End}_F(V, \kappa) \cong \mathcal{M}_\kappa(F)$  como anillos.  $\square$

Del teorema anterior, tenemos que, en particular, si  $\kappa$  es un cardinal (finito o infinito), entonces  $\text{End}_F(F^{(\kappa)}, \kappa) \cong \mathcal{M}_\kappa(F)$  (como anillos). Más aún, mediante el teorema anterior y el Teorema 2.21, tenemos que si  ${}_F V$  y  ${}_F W$  son espacios vectoriales tales que  ${}_F V \cong_F W$ , entonces  $\dim({}_F V) = \dim({}_F W) = \kappa$ , con  $\kappa$  un cardinal (finito o infinito), tenemos que  $\text{End}_F(V, \kappa) \cong \mathcal{M}_\kappa(F) \cong \text{End}_F(W, \kappa)$ , de donde, por transitividad,  $\text{End}_F(V, \kappa) \cong \text{End}_F(W, \kappa)$ . Note que  $\text{End}_F(V, \kappa) \cong \text{End}_F(F^{(\kappa)}, \kappa)$ .

## 5 Grupo lineal generalizado y su relación con el grupo de automorfismos en espacios de dimensión arbitraria

Para construir el grupo lineal generalizado a partir de un cardinal  $\kappa$ , es necesario definir lo que es una matriz invertible en el contexto general.

**Definición 5.1.** *Sean  $F$  un campo,  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales (finitos o infinitos). Diremos que una matriz  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  es **invertible**, si existe una matriz  $B \in \mathcal{M}_{\lambda \times \kappa}(F)$  tal que  $BA = \Delta_\lambda$  y  $AB = \Delta_\kappa$ .*

El siguiente teorema caracteriza la invertibilidad de una matriz en términos de la transformación lineal  $\mu_A$ .

**Teorema 5.2.** Sean  $F$  un campo,  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales (finitos o infinitos) y  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $A$  es invertible.
2.  $\mu_A :_F F^{(\lambda)} \rightarrow_F F^{(\kappa)}$  es isomorfismo.

*Demostración.* 1.  $\Rightarrow$  2.: Supongamos que  $A$  es invertible, luego existe  $B \in \mathcal{M}_{\lambda \times \kappa}(F)$  tal que  $BA = \Delta_\lambda$  y  $AB = \Delta_\kappa$ . Ahora,  $\mu_A :_F F^{(\lambda)} \rightarrow_F F^{(\kappa)}$  y  $\mu_B :_F F^{(\kappa)} \rightarrow_F F^{(\lambda)}$  son transformaciones lineales. Por el Lema 4.17, se tiene lo siguiente:

$$\mu_B \circ \mu_A = \mu_{BA} = \mu_{\Delta_\lambda} = 1_{F^{(\lambda)}}$$

es decir,  $\mu_B \circ \mu_A = 1_{F^{(\lambda)}}$ . De manera análoga se exhibe que  $\mu_A \circ \mu_B = 1_{F^{(\kappa)}}$ . En consecuencia,  $\mu_A$  es un isomorfismo.

2.  $\Rightarrow$  1.: Supongamos que  $\mu_A :_F F^{(\lambda)} \rightarrow_F F^{(\kappa)}$  es isomorfismo, luego existe una transformación lineal  $\varphi :_F F^{(\kappa)} \rightarrow_F F^{(\lambda)}$  tal que  $\varphi \circ \mu_A = 1_{F^{(\lambda)}}$  y  $\mu_A \circ \varphi = 1_{F^{(\kappa)}}$ . Por el Teorema 4.16, existe una matriz  $B \in \mathcal{M}_{\lambda \times \kappa}(F)$  tal que  $\varphi = \mu_B$ . Por el Teorema 4.17, tenemos que

$$\mu_{BA} = 1_{F^{(\lambda)}} \tag{1}$$

$$\mu_{AB} = 1_{F^{(\kappa)}}. \tag{2}$$

Aplicando en ambos lados  $\Psi_{C_\lambda}$  y  $\Psi_{C_\kappa}$  a las igualdades (1) y (2), respectivamente y usando la Observación 4.15, tenemos que  $BA = \Delta_\lambda$  y  $AB = \Delta_\kappa$ , con lo que establecemos que  $A$  es invertible.  $\square$

En el siguiente corolario se traslada el teorema anterior a un contexto más general.

**Corolario 5.3.** Sean  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales,  $F$  un campo,  ${}_F V$  y  ${}_F W$  espacios vectoriales de dimensión  $\lambda$  y  $\kappa$ , respectivamente, con bases ordenadas  $B = (x_j)_{j \in \lambda}$  y  $C = (x_i)_{i \in \kappa}$ , respectivamente y  $T :_F V \rightarrow_F W$  una transformación lineal. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $T$  es isomorfismo.
2.  $[T]_B^C$  es invertible.

*Demostración.* Recordemos que del Teorema 4.18, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 {}_F V & \xrightarrow{T} & {}_F W \\
 \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_C \\
 {}_F F^{(\lambda)} & \xrightarrow{\mu_{[T]_B^C}} & {}_F F^{(\kappa)}.
 \end{array} \tag{1}$$

Ahora procederemos a la demostración del teorema.

1.  $\Rightarrow$  2.: Supongamos que  $T$  es isomorfismo. Ahora bien, del diagrama (1), tenemos que  $\mu_{[T]_B^C} = \Phi_C \circ T \circ \Phi_B^{-1}$ , por lo que  $\mu_{[T]_B^C}$  es composición de isomorfismos, en consecuencia, isomorfismo y del Teorema 5.2,  $[T]_B^C$  es invertible.

2.  $\Rightarrow$  1.: Si  $[T]_B^C$  es invertible, por el Teorema 5.2,  $\mu_{[T]_B^C}$  es isomorfismo. Ahora bien, del diagrama (1), se tiene que  $T = \Phi_C^{-1} \circ \mu_{[T]_B^C} \circ \Phi_B$ , por tanto  $T$  es composición de isomorfismos, consecuentemente  $T$  es isomorfismo.  $\square$

**Corolario 5.4.** Sean  $F$  un campo,  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales (finitos o infinitos). Si  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  es invertible, entonces  $\kappa = \lambda$ .

*Demostración.* Como  $A$  es invertible, por el Teorema 5.2,  $\mu_A : {}_F F^{(\lambda)} \rightarrow {}_F F^{(\kappa)}$  es un isomorfismo, así,  ${}_F F^{(\kappa)} \cong {}_F F^{(\lambda)}$ , por lo que  $\dim({}_F F^{(\kappa)}) = \dim({}_F F^{(\lambda)})$ , es decir,  $\kappa = \lambda$ .  $\square$

**Observación 5.5.** Por el corolario anterior, si  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  es una matriz invertible, en realidad  $A \in \mathcal{M}_{\kappa}(F)$ . Además, la inversa de  $A$  es única, pues  $(\mathcal{M}_{\kappa}(F), \odot, \Delta_{\kappa})$  es un monoide y en un monoide, cuando existe el inverso de un elemento, éste es único. Por tanto, la inversa de  $A$  la denotaremos por  $A^{-1}$ .

Vamos a mostrar algunas propiedades de las matrices invertibles.

**Proposición 5.6.** Sean  $\kappa$  un cardinal,  $F$  un campo,  $A, B \in \mathcal{M}_{\kappa}(F)$ . Se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\Delta_{\kappa}$  es invertible y  $\Delta_{\kappa}^{-1} = \Delta_{\kappa}$ .
2. Si  $A$  es invertible, entonces  $A^{-1}$  es invertible. Más aún,  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
3. Si  $A$  y  $B$  son invertibles, entonces  $AB$  es invertible y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

*Demostración.*

1. Es claro.
2. Se sigue del hecho de que  $A^{-1}A = \Delta_\kappa = AA^{-1}$ , pues  $A$  actúa como inversa de  $A^{-1}$  y dado que la inversa es única, tenemos lo deseado.
3. Observemos que

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\Delta_\kappa B = B^{-1}B = \Delta_\kappa.$$

De manera completamente similar, se exhibe que  $AB(B^{-1}A^{-1}) = \Delta_\kappa$ . Por lo tanto,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

□

Con los resultados expuestos hasta el momento estamos en condiciones de construir el grupo lineal generalizado.

**Definición 5.7.** *Sea  $\kappa$  un cardinal y  $F$  un campo. Definimos el conjunto de matrices invertibles de  $\mathcal{M}_\kappa(F)$  como*

$$GL(\kappa, F) = \{A \in \mathcal{M}_\kappa(F) \mid A \text{ es invertible}\}.$$

Notemos que  $GL(\kappa, F) \neq \emptyset$ , pues  $\Delta_\kappa \in GL(\kappa, F)$ .

Es de utilidad recordar la siguiente definición, pues la utilizaremos para demostrar nuestro siguiente teorema.

**Definición 5.8.** *Sea  $(R, +, 0, \cdot, 1_R)$  un anillo con uno. Se definen las **unidades de  $R$**  como*

$$U(R) = \{r \in R \mid \exists s \in S : sr = 1_R = rs\}.$$

$U(R) \neq \emptyset$ , pues  $1_R \in U(R)$ . De hecho,  $(U(R), \cdot, 1_R)$  es un grupo.

**Teorema 5.9.** *Sea  $\kappa$  un cardinal y  $F$  un campo. Entonces*

$$(GL(\kappa, F), \odot, \Delta_\kappa)$$

*es un grupo.*

*Demostración.* Se sigue de que  $GL(\kappa, F) = U(\mathcal{M}_\kappa(F))$ .  $\square$

**Definición 5.10.** Sea  $F$  un campo y  $\kappa$  un cardinal (finito o infinito). El grupo  $(GL(\kappa, F), \odot, \Delta_\kappa)$  es llamado **el grupo lineal general de orden  $\kappa$  y coeficientes en  $F$** . En lo sucesivo solo lo denotaremos por  $GL(\kappa, F)$ , entendiendo que es un grupo con respecto al producto de matrices que definimos.

El siguiente teorema establece la relación entre el grupo lineal general de orden un cardinal y el grupo de automorfismos en un espacio vectorial de dimensión el mismo cardinal. Antes de proceder al enunciarlo y probarlo damos la siguiente definición que utilizaremos.

**Definición 5.11.** Sea  $M$  y  $N$  monoides con elementos neutros  $e_M$  y  $e_N$ , respectivamente. Una función  $f : M \rightarrow N$  es un **morfismo de monoides**, si se satisfacen:

- $f(ab) = f(a)f(b)$ , para cada  $a, b \in M$ .
- $f(e_M) = e_N$ .

Si además existe un morfismo de monoides  $g : N \rightarrow M$  tal que  $g \circ f = id_M$  y  $f \circ g = id_N$ , entonces  $f$  es un **isomorfismo de monoides** y  $M$  y  $N$  son isomorfos como monoides, lo cual se denota por  $M \cong N$ .

**Observación 5.12.**  $f : M \rightarrow N$  es un isomorfismo de monoides, si y solo si,  $f$  es un morfismo biyectivo de monoides. Además,  $f^{-1} : N \rightarrow M$  también es un isomorfismo de monoides.

**Teorema 5.13.** Sea  $F$  un campo,  $\kappa$  un cardinal (finito o infinito) y  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ . Entonces,

$$Aut_F(V, \kappa) \cong GL(\kappa, F)$$

como grupos.

*Demostración.* Tomemos una base  $B$  de  ${}_F V$ . De la demostración del Teorema 4.21,

$$\begin{aligned} \Psi_B : End_F(V, \kappa) &\rightarrow \mathcal{M}_\kappa(F) \\ \varphi &\mapsto [\varphi]_B \end{aligned}$$

es un isomorfismo de monoides, considerando únicamente las operaciones de composición y producto, respectivamente. Ahora bien, por el Corolario 5.3,  $\Psi_B(\text{Aut}_F(V, \kappa)) = GL(\kappa, F)$ , por lo que

$$\Psi_{B|\text{Aut}_F(V, \kappa)}^{GL(\kappa, F)} : \text{Aut}_F(V, \kappa) \rightarrow GL(\kappa, F)$$

es un isomorfismo de monoides, pero como el dominio y contradominio son grupos,  $\Psi_{B|\text{Aut}_F(V, \kappa)}^{GL(\kappa, F)}$  es un isomorfismo de grupos. Por lo tanto,  $\text{Aut}_F(V, \kappa) \cong GL(\kappa, F)$ .  $\square$

## Generalización de equivalencia y semejanza de matrices y transformaciones lineales

Para el caso de matrices arbitrarias, es posible definir la equivalencia y semejanza de matrices como sigue.

**Definición 5.14.** Sean  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales (finitos o infinitos),  $F$  un campo,  $A, B \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$ ,  $C, D \in \mathcal{M}_{\kappa}(F)$ .

- Decimos que  $A$  y  $B$  **son equivalentes**, lo cual denotamos por  $A \equiv B$ , si existen  $P \in GL(\kappa, F)$  y  $Q \in GL(\lambda, F)$  tales que  $B = PAQ^{-1}$ .
- Decimos que  $C$  y  $D$  son **semejantes**, lo cual denotamos por  $C \sim D$ , si existe  $P \in GL(\kappa, F)$  tal que  $D = PAP^{-1}$ .

**Proposición 5.15.** Sean  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales (finitos o infinitos) y  $F$  un campo. Luego  $\equiv$  y  $\sim$  son relaciones de equivalencia en  $\mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  y  $\mathcal{M}_{\kappa}(F)$ , respectivamente.

*Demostración.* Vamos a demostrarlo para  $\equiv$ , ya que para  $\sim$  se procede de manera totalmente análoga.

- **(Reflexividad):** Si  $A \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$ , es claro que  $A = PAQ^{-1}$ , donde  $P = \Delta_{\kappa} \in GL(\kappa, F)$  y  $Q = \Delta_{\lambda} \in GL(\lambda, F)$ , por lo que  $A \equiv A$ .
- **(Simetría):** Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  y supóngase que  $A \equiv B$ , luego, existen  $P \in GL(\kappa, F)$  y  $Q \in GL(\lambda, F)$  tales que  $B = PAQ^{-1}$ , entonces  $A = P'BQ'^{-1}$ , con  $P' = P^{-1} \in GL(\kappa, F)$  y  $Q' = Q^{-1} \in GL(\lambda, F)$ , de donde  $B \equiv A$ .

- **(Transitividad)**: Sean  $A, B, C \in \mathcal{M}_{\kappa \times \lambda}(F)$  y supóngase que  $A \equiv B$  y  $B \equiv C$ , luego existen  $P_1, P_2 \in GL(\kappa, F)$ ,  $Q_1, Q_2 \in GL(\lambda, F)$  tales que  $B = P_1 A Q_1^{-1}$  y  $C = P_2 B Q_2^{-1}$ . Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} C &= P_2 B Q_2^{-1} = P_2 (P_1 A Q_1^{-1}) Q_2^{-1} = (P_2 P_1) A (Q_1^{-1} Q_2^{-1}) \\ &= (P_2 P_1) A (Q_2 Q_1)^{-1} \end{aligned}$$

con  $P_2 P_1 \in GL(\kappa, F)$  y  $Q_2 Q_1 \in GL(\lambda, F)$ . Por tanto,  $A \equiv C$ .

□

## Generalización de la matriz de cambio de base

En este apartado, vamos a generalizar el concepto de matriz de cambio de base para espacios de dimensión arbitraria.

**Definición 5.16** (Matriz de cambio de base). *Sea  $\kappa$  un cardinal (finito o infinito),  ${}_F V$  un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ ,  $B$  y  $B'$  bases ordenadas de  ${}_F V$ . Definimos **la matriz de cambio de base de  $B$  a  $B'$** , como  $[1_V]_B^{B'}$ , donde  $1_V : {}_F V \rightarrow {}_F V$  es la transformación lineal identidad.*

Notemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} {}_F V & \xrightarrow{1_V} & {}_F V \\ \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_{B'} \\ {}_F F^{(\kappa)} & \xrightarrow{\mu_{[1_V]_B^{B'}}} & {}_F F^{(\kappa)} \end{array}$$

es conmutativo por el Teorema 4.18, en consecuencia, la matriz de cambio de base envía a la representación de un vector en coordenadas de la base  $B$  a sus coordenadas en la base  $B'$ . Además, observemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \Delta_\kappa &= [1_V]_B^B = [1_V]_{B'}^B [1_V]_B^{B'} \\ \Delta_\kappa &= [1_V]_{B'}^{B'} = [1_V]_B^{B'} [1_V]_B^B \end{aligned}$$

de donde se sigue que la matriz de cambio de base de  $B$  a  $B'$ ,  $[1_V]_B^{B'}$  es invertible y su inversa es  $[1_V]_{B'}^B$ , o sea, la matriz de cambio de base de  $B'$  a  $B$ . en consecuencia,  $[1_V]_B^{B'}, [1_V]_{B'}^B \in GL(\kappa, F)$ .

Ahora bien, consideremos  $\kappa$  y  $\lambda$  cardinales (finitos o infinitos),  ${}_F V$  y  ${}_F W$  espacios vectoriales de dimensiones  $\lambda$  y  $\kappa$ , respectivamente.  $B$  y  $B'$  son bases ordenadas de  ${}_F V$ ,  $C$  y  $C'$  son bases ordenadas de  ${}_F W$ . Si  $T :_F V \rightarrow_{{}_F} W$  es una transformación lineal, entonces, por el Teorema 4.19, tenemos que

$$[T]_{B'}^{C'} = [1_W \circ T \circ 1_V]_{B'}^{C'} = [1_W]_C^{C'} [T]_B^C [1_V]_{B'}^B$$

donde  $[1_W]_C^{C'} \in GL(\kappa, F)$  y  $[1_V]_{B'}^B \in GL(\lambda, F)$ , en consecuencia  $[T]_B^C \equiv [T]_{B'}^{C'}$ . Así las cosas, cualesquiera dos representaciones matriciales de  $T$  en bases ordenadas de  ${}_F V$  y  ${}_F W$ , son equivalentes.

Ahora, si  $\kappa$  es un cardinal (finito o infinito),  ${}_F V$  es un espacio vectorial de dimensión  $\kappa$ ,  $B$  y  $B'$  son bases ordenadas de  ${}_F V$  y  $T :_F V \rightarrow_{{}_F} V$  es una transformación lineal, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} [T]_{B'} &= [T]_{B'}^{B'} = [1_V \circ T \circ 1_V]_{B'}^{B'} = [1_V]_{B'}^{B'} [T]_B^B [1_V]_{B'}^B = [1_V]_B^{B'} [T]_B [1_V]_{B'}^B \\ &= P [T]_B P^{-1} \end{aligned}$$

donde  $P = [1_V]_B^{B'} \in GL(\kappa, F)$ , de donde se sigue que  $[T]_B \sim [T]_{B'}$ . En otras palabras, cualesquiera dos representaciones matriciales de  $T$  en bases ordenadas de  ${}_F V$ , son semejantes.

## 6 Conclusiones

Durante el desarrollo de este capítulo es posible obtener las siguientes conclusiones:

- Por lo menos a nivel teórico, es posible definir los anillos de matrices con coeficientes en un campo sobre cardinales arbitrarios. También, es posible definir subanillos de interés tales como matrices diagonales y matrices triangulares. Además, se observa que dado un cardinal, su anillo de matrices correspondiente contiene copias isomorfas de los anillos de matrices sobre todos los cardinales menores al cardinal correspondiente.
- Es posible representar los anillos de endomorfismos en un espacio vectorial de cualquier dimensión como anillos de matrices tomadas sobre el cardinal que representa a la dimensión.

- Es posible definir grupos lineales sobre cualquier cardinal y representarlos como grupos de automorfismos en cualquier espacio vectorial cuya dimensión sea el cardinal correspondiente. Con estos resultados, se generalizan los conceptos de equivalencia y semejanza de matrices así como las matrices de cambio de base. Así, se establece que cualesquiera dos representaciones matriciales son equivalentes.

Sería de interés estudiar si en estos anillos generalizados se pueden extender más conceptos conocidos para matrices finitas tales como nilpotencia, determinantes, etc.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por dedicar parte de su tiempo a la revisión de este capítulo. También agradecen a los editores por brindarles la oportunidad de considerar su trabajo para publicarse en esta serie.

## Referencias

- [1] Steven Roman. *Advanced Linear Algebra*, Second edition. New York, USA: Springer, 2005.
- [2] Alejandro Bravo Mojica, Hugo Rincón Mejía, Cesar Rincón Orta. *Álgebra superior*, Primera edición. México: Facultad de ciencias, UNAM, 2006.
- [3] Hugo Alberto Rincón Mejía. *Álgebra lineal*, Segunda edición. México: Facultad de ciencias, UNAM, 2006.
- [4] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de conjuntos, una introducción*, Segunda edición. México: Sociedad matemática mexicana, 2003.
- [5] Jonathan S. Golan. *The linear algebra a beginning graduate student ought to know*, Second edition. USA: Springer, 2007.
- [6] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*, Second edition. New York, USA: Springer, 2008.

- [7] José de Jesús Sáez Macegoza. *Los funtores Hom y Tensor en la categoría de espacios vectoriales*. Tesis de licenciatura. México: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2023.
- [8] José de Jesús Sáez Macegoza, Iván Fernando Vilchis Montalvo. *Una generalización del isomorfismo entre transformaciones lineales y matrices*. Capítulo en Matemáticas y sus aplicaciones 22. Editores: Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco. Dirección General de Publicaciones, Manuales y textos, BUAP, 2024.
- [9] Joseph J. Rotman. *Advanced Modern Algebra*. New York: Prentice Hall, 2003.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

sm223470379@alm.buap.mx

fvilchis@fcfm.buap.mx

---

# Física

---



## Capítulo 2

# Schwarzschild Black Holes and their effects in a mathematical modeling framework

Jesús Alonso Arriaga Hernández<sup>1</sup>, Bolivia Teresa  
Cuevas Otahola<sup>2</sup>, María de los Ángeles Pérez-Villegas<sup>3</sup>,  
and José Jacobo Oliveros Oliveros<sup>1</sup>  
FCFM-BUAP<sup>1</sup>, FCE-BUAP<sup>2</sup>, IA-UNAM<sup>3</sup>

### Abstract

In this chapter, we use basic models of Schwarzschild's and primordial Black Holes (BHs) to extend the available theory to other types of BHs, considering concepts from gravitation (central field) to Einstein's general relativity, and briefly reviewing the Gravitational Lens (GL) effect from the mathematical modeling point of view. We review the notions of central field and gravitational theory to provide definitions of metric and topology of regions in space as sets with elements subject to gravitational conditions in terms of mass, momentum, and energy. We extend the analysis, starting from classical mechanics based on functional analysis in  $\mathbb{R}^n$  and progressing through principles of general relativity, to construct the elements required for the mathematical modeling used to represent deformations of a manifold in the context of the GL as a geometrical, differential, and topological solution of the same model.

## 1 Introduction

By the time humanity tried to explain light phenomena, they also observed the stars, studying how they grouped, forming patterns and clusters. Such a beginning set a milestone for humanity in creating new theories and branches of knowledge leading to fields such as medicine and biology, as well as challenging concepts such as general relativity and quantum mechanics, where both physical mathematical modeling and abstraction play a funda-

mental role [5]. Among these theories, one is highly supported by the academic community: the inflationary model, backed by observational evidence and its capability to be a crucial ingredient in solving the Big Bang model regarding thermal anisotropies in the cosmic microwave background. Despite the existence of several inflationary models, we highlight the chaotic inflation model, which considers "inflation" as a scalar field that generates the inflation of the universe [12], assuming an initial state where all processes are driven by vacuum energy. Modeling this requires a posteriori consideration of the Planck time [11] and the inflaton [7] as the field accelerating the universe's expansion according to the classical theory (general relativity). The latter connects the structure of the universe with the primordial density and the existence of Black Holes (BHs), where a BH is defined as an object with a gravitational force that precludes the escape of light [12, 11], as predicted by general relativity. Nowadays, there is evidence of the existence of BHs provided by the radiation emitted by dark matter accreted to the BH, in addition to the effects on other objects, such as interaction with other BHs or neutron stars, called Gravitational Waves (GW), or the first image of the shadow of the BH in M87, obtained by the Event Horizon Telescope (EHT) [3, 1].

For the sake of a better understanding of BHs, we recall the Chandrasekhar limit, which is the maximum stable mass of a white dwarf (WD) (approximately 1.4 solar masses ( $M_{\odot}$ )) [13]. If a WD in a supernova exceeds such mass, this will result in the collapse of a supernova, ending as a BH or a Neutron Star. Recently, several BH mergers (primordial BHs) were detected by the Laser Interferometry Gravitational-Wave Observatory (LIGO), suggesting a relation between the BHs and supernova masses [32]. It should be recalled that large peaks in the power spectrum of primordial matter (collapsing in the radiation-dominated phase) could be related to the formation of groups of BHs merging their masses (from recombination) from tens to hundreds of  $M_{\odot}$ ; with these Massive Primordial BHs suggesting the existence of Dark Matter in the Universe [8]. Several elements of general relativity hold, such as the space-time deformation illustrated in the effects of GW [14] and Gravitational Lens (GL) [4], where the mathematical formulation of a GL is a function  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  between the lens plane (or sky) and the plane of the source, assuming that the deflecting matter is on a plane. The theory behind GLs has revealed generic and mathematical properties with the formation of images of a single source based on counting Morse theoretical images and the results of complex-algebraic results of the upper limits in the

case of planes of lenses of single and multiple sources [14, 15], highlighting the work by Petters et al. [15], whose advances allowed to relate the global number of lensed images (with the GL effect) with the minimum of the images, in addition, to analyze asymptotic equations for the probability density functions of the random time-delay of microlensing, maps of effects of random lensing and shearing, besides the use of geometric optics in the treatment of multiple images in a space-time environment. Hence, the deflection angle  $\alpha$  (allowing to visualize the rays coming from an object, considering the deflection caused by another intermediate massive one between the observer and the observed object) is simply the sum of all mass elements in the lens plane and the magnifications of the lenses depend on the number of positions of the source (up to  $10^{10}$ ) and the most probable number where the majority of lenses are found (up to  $10^6$ ).

In this chapter, we analyze the basic elements of Newton's gravitation theory and central field to explain certain notions of General Relativity from the Fitzgerald-Lorentz transformations. We aim to give a proof to several definitions by Einstein, Penrose, and Schwarzschild to build BH models, testing them with simulations of mass concentrations. Finally, among these mass concentrations, we focus on the effect of the space-time deformation for the GL effect to give an interpretation from the mathematical modeling of the micro, weak, and strong effects of a GL, considering geometry, optics, and physics of the deformation of rays, producing a multiplicity of images or the observation of caustics around certain region. We highlight the relevance of the Legacy Survey of Space and Time (LSST) that will be carried out by the Vera Rubin Observatory [16], which will allow us to solve the deep space and to have a better understanding of the GL effects by mass concentrations of dark matter, BHs, baryonic matter, galaxy clusters, etc (work in progress). LSST is key in building a strong collaboration community in Mexico and worldwide.

## 2 Formal generalities

In the context of this work, we use topologic definitions that will lead to the comprehension of concepts of classical mechanics (such as Newtonian dynamics and Central Field) and relativistic physics (which is closely related to the equations of Levi-Civita, Ricci, Christoffel, Einstein and Schwarzschild).

We start with the definition of metric

**Definition 2.1.** We denote the metric of a Vector Space  $\mathbf{E}$  as a function of the form  $d : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$  that satisfies the properties:

For all  $x, y, z$  vectors in  $\mathbf{E}$ , it follows that

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .
- Symmetry.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$  (Triangle inequality).

Hence, the pair  $(\mathbf{E}, d)$ , defines a metric space  $\mathbf{E}$  under the metric induced  $d$  [10]. From this definition, it follows straightforwardly that different metrics can define different metric spaces. Hence,  $(\mathbf{E}, d_1) \neq (\mathbf{E}, d_2)$  implies  $d_2 \neq d_1$ . For instance, we use the trivial metric  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_0 \in \mathbb{R}$  for all  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}$   $[(\mathbf{E}, d)]$ . If we define several constants  $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$  and  $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4$ , clearly,  $d_1 \neq d_2$ , and the properties in Definition 2.1 hold for both functions, implying they are different metrics that define different metric spaces.

**Definition 2.2.** Let  $\mathbf{E}$  be a vector space under  $\mathbb{R}$  (the field of real numbers); we denote the Norm  $(\|\cdot\|)$  on  $\mathbf{E}$  as a function of the form  $\|\cdot\| : \mathbf{E} \rightarrow [0, \infty)$  for each  $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$  that satisfies the properties; for all  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$  vectors in  $\mathbf{E}$  and a scalar in  $\mathbb{R}$ :

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ,
- $\|\mathbf{x}\| = 0$  implies  $\mathbf{x} = \vec{0}$ , where  $\mathbf{x}$  is the neutral vector in  $\mathbf{E}$ ,
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ ,
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ , also known as the triangle inequality of the norm.

Analogously, the pair  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  defines a normed space  $\mathbf{E}$  [10]. From this definition, it can be shown that different norms define different normed spaces. The latter motivates the following results, where every normed space is also a metric space.

**Lemma 2.3.** *Let  $\mathbf{E}$  be a normed vector space under the norm  $\|\cdot\|$ ; then  $\mathbf{E}$  is a metric vector space. The following property holds for the metric  $d$  induced by the space  $\mathbf{E}$ :*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E} \implies d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (1)$$

The proof of Lemma 2.3 has been widely reviewed by several authors; in particular, we refer to the proof by Iribarren et al. [10]. Hence, we conclude that every normed vector space is a metric space, with the metric being a function induced by the norm. Subsequently, we recall the inner product, which is related to the metric and norm.

**Definition 2.4.** *Let  $\mathbf{E}$  be a vector space with a function  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ . This function is an inner product if it satisfies the following properties for all  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  vectors in  $\mathbf{E}$  and a scalars in  $\mathbb{R}$*

- $\mathbf{x} \neq 0 \implies \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$ , i.e., the inner product is defined to be positive.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ , i.e., the inner product satisfies symmetry.
- $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + b \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ , i.e., the inner product satisfies linearity on the left.

Therefore, we will refer to all vector spaces  $\mathbf{E}$  satisfying the inner product as  $(\mathbf{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , and we will call it, hereinafter, Euclidean space. A simpler way to define the inner product is to use the image under the product of the pair  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  as  $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ . Hence, we can extend the results to  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  if and only if  $\mathbf{x} = 0$ . Thus, it is straightforward to prove that every Euclidean space is also a normed space [10] if it satisfies  $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ , and analogously, the relation for the metric in  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^{1/2}$  follows.

### 3 Elements from General Relativity

In general, the foundations of the current framework of physics are electromagnetism, gravitation, thermodynamics, and quantum mechanics, which allow for the construction of abstract theories such as Einstein's relativity. Einstein's formulation depends on tensor analysis, algebra, Riemann geometry, Levi-Civita's concepts, the point of view of Galileo's transformations,

and integro-differential analysis of variational calculus to model a problem beyond natural conception, with its solution being a topic of contemporary physics, resembling the problem that splits Newtonian physics and classical mechanics from modern physics, thus setting the foundations of quantum mechanics and relativity. Such a problem is undoubtedly the black body problem [17], which elegantly unifies all of Maxwell's electromagnetic theory, thermodynamics, and Lagrangian mechanics, theorizing from Maxwell's equations an object capable of emitting radiation in all wavelengths [17], implying the existence of systems with abundant energy and particle dynamics ensuring that particles interact with radiation at a subatomic level, requiring a relativistic and quantum point of view. These theories gave rise to different hypothesis in several problems and significant discrepancies that seemed to lack a solution. Lorentz's transformations provided a solution to some of these problems for objects with velocities close to the light velocity [17, ?], leading to the question if there exists any object capable of moving at the light velocity ( $c$ ) with mass or without mass?. If  $\Psi$  is an object with mass, we arrive to a small paradox if the velocity is close to  $c$ , endowing the object with an infinite energy. However, if  $\Psi$  does not have mass, such energy could be part of the radiation, satisfying the wave equation

$$\nabla^2\Psi = \Delta\Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

where  $\nabla$  and  $\Delta$  are the Nabla and Laplacian operators, respectively, [18, ?] and  $v$  the wave velocity  $\Psi$  (in the case of propagation in vacuum and for electromagnetic waves  $v = c$ ). In addition, the relation with the refraction index holds  $n = c/v$  (not always  $v = c$ ) and Snell's Law [9]. Analogously, from the side of quantum mechanics, we build the Schrödinger's equation

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta\Psi(r, t) + V(r, t)\Psi(r, t) = \widehat{\mathbf{H}}\Psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t), \tag{3}$$

which resembles a wave equation ( $\widehat{\mathbf{H}}\Psi(r, t) = E\Psi(r, t)$ ), which could be solved either as dependent or independent of time (a differential equation, either coupled or not, depending on whether the phenomenon allows variable separation) modified with the potential  $V(r, t)$  (under Heisenberg's and Pauli's exclusion principles and Planck energy  $E = h\nu = \hbar\omega$  with  $\hbar = h/2\pi$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ , and  $h$  the Planck constant [20]). The latter allows us to model a free particle with mass  $m$ , hydrogen and helium atoms, as well as N-body

systems through the conditions of mixed borders and complexity in the potentials. The construction and theory underlying 2-3 witnessed the birth of field theory, where particles do not directly interact; instead, they interact by means of the physical implications of the fields to which they belong.

**Definition 3.1.** *Let  $E$  be a non-empty set provided with fundamental operations, sum and product  $(+, *)$ , closed under the properties that define the elements of the set. We define a Physical Field (PF), as a set such that if for any property that perturbs any element, its complement will notice the perturbation when the perturbation is applied to it.*

Hence, PFs have the property of conservation of charge, energy, and momentum according to the properties of the elements, keeping the inertial systems (the action of the properties of the set as an additional property that prevents the elements from removing themselves from the PF, maintaining closure) under the action of mechanical, electrical, gravitational, and other forces.

**Proposition 3.2.** *The laws of physics must have the same formulation in all inertial systems. According to Definition 3.1, this extends to PFs. The proof of this proposition can be found in Narlikar et al. [19], and it can also be built by means of physical arguments in Resnick [17] and De-La-Peña [20]. However, formally, in set theory, the latter is equivalent to providing an arbitrary universe with elements and building subsets, which are studied as sets recalling the fundamental condition of the universe containing them. Hence, each subset is a field, and the universe must be built under physical conditions. Thus, the latter holds since the physical conditions of the universe are inherited by the subsets or fields.*

Proposition 3.2 implies that if a PF is governed by certain laws, then it is equivalent to a set with its restrictions, building its base and elements (as the electric force only applies to systems with charge). As proof of the aforementioned, we use Definition 3.1 and Proposition 3.2 to consider a universe with PFs, with properties that ensure the universe is equal in all PFs. Hence, the concepts of the homogeneity of space and time show the symmetry due to the invariance over translations of space-time,  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$  and  $t \rightarrow t + t_0$  for the position vector  $\mathbf{r}$  at time  $t$ . Thus;

**Definition 3.3.** *Let  $\mathbf{E}$  be a PF.  $\mathbf{E}$  is an isotropy if it satisfies the invariance of properties over elements of the same PF or space, regardless of the direction in which the property acts.*

Therefore, in a PF with elements having mass, the property that will govern such elements (the same one defining the inertial system) is gravity. Thus, such gravitational potential will also define a central field [?, 21] where the direction of the action is towards the geometric center of the PF. Hence, if we consider a ray of light and an observer, they satisfy  $c' = c \pm v$  according to the previously laid out arguments. However, by means of Maxwell's laws, light waves do not allow solutions of static fields unless they are constant, involving an observer that violates Maxwell's equations and the principles of our construction by having an element in the set outside of the premise and moving faster than  $c$ , thereby modifying the physics in the element. To solve this paradox, FitzGerald and Lorentz proposed a contraction by means of the factor  $\gamma$  ( $\gamma$  corrects the irregularities of high velocities and energies of the elements in a PF), a contraction of time (in relation to time dilation), energy, mass changes, and potential relations (in a relativistic sense). In these cases, the object with a velocity close to  $c$  requires such factor  $\gamma$  to maintain the same property of the set as indicated in Proposition 3.2 for time and space

$$t' = \gamma \left( t - x \frac{v}{c^2} \right) \quad x' = \gamma (x - vt), \quad (4)$$

where the same factor  $\gamma$  might rebuild all the expressions of density (mass and charge), energy, potential, electromagnetic field, force, etc, to keep the universe of the PF consistent and its elements satisfying Proposition 3.2, in this case relating momentum  $p$  and energy  $E$ , given by  $E^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4$  in addition to the Lorentz-Minkowski's relation by means of  $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ . Therefore, the set satisfying Minkowski's relation (inside the light cone) has the structure of a vector space under the inner product  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$ , from which  $\|s\|$  is the norm of the metric  $ds$  between an event and the origin. Hence, relativity pushes central gravitational and electromagnetic theory to the limit. However, in the case of Newtonian mechanics, there is a set with a weak and quasi-static restriction (i.e., when the space-time curvature is negligible). Thus, the velocities of elements of the PF  $v \ll c$  imply  $\beta \ll 1$ , i.e, are small velocities, assuming an absolute or preferred space-time system. Such conditions allow us to obtain the metric as a perturbation of Minkowski's space, satisfying the following relations in Einstein's equations

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon g_{\mu\nu} \quad \implies \quad g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - \epsilon g^{\mu\nu}, \quad (5)$$

the latter holds when the expansion parameter  $\epsilon$  is such that  $\epsilon \ll 1$ . Hence,

regarding Christoffel symbols  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ , in addition to the Ricci tensor  $R_{\mu\nu}$  and scalar  $R$ , Einstein's equations follow

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho \approx \frac{1}{2}\epsilon\eta^{\rho\lambda} [\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\nu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}], \quad R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\epsilon\partial^2 h_{\mu\nu} \quad \text{and} \quad R \approx \frac{1}{2}\epsilon\partial^2 h, \quad (6)$$

for  $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$  as the trace of the perturbation of metric  $ds$ , and  $\partial^2 = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$  the D'Alembertian in Minkowski space, where the degrees of freedom of  $h_{\mu\nu}$  are fixed by choosing the gage (fixing the same degrees of freedom)  $\partial^\mu h_{\mu\nu} - (1/2)\partial_\nu h = 0$ . Considering this, Einstein's equations for a gravitational field in the Newtonian limit are such that

$$\frac{1}{2}\epsilon \left[ \partial^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^2 h \right] \approx -\kappa T_{\mu\nu} \quad \text{and} \quad \frac{1}{2}\epsilon\partial^2 h_{\mu\nu} \approx -\kappa \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right], \quad (7)$$

with and without trace for  $T = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ , it is possible to determine resemblance to inhomogeneous waves of  $h_{\mu\nu}$ . Subsequently, we highlight that if all the velocities are non-relativistic, it implies that  $v \sim \epsilon \ll 1$  and the proper time  $\tau$  satisfy (Minkowski's inner product)  $d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$  (which results in  $d\tau^2 = \nu_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ), and for objects in a gravitational field (in a first approximation where  $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$ ), it is equal to the time in the reference system  $\tau \sim t$ ; i.e, an object with velocity  $v \sim \epsilon$  shifts  $dx^i$  at time  $t$  satisfying  $dx^i \sim \epsilon dt$ . Therefore, if we consider a shift function  $f(x^i, t)$  for such an object, it should follow that  $dx^i \sim \epsilon\partial_i f$ ; i.e,  $dt/df$  is one order of magnitude  $\epsilon$  larger than the gradient and negligible. From the latter, Einstein's equations reduce to the shift equation in a gravitational field (or central field) and the proportionality constant satisfies  $\kappa = 8\pi G$  (with  $G$  the Newton's gravitational constant) if, and only if the following holds

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (8)$$

the latter is Einstein's equation in the approximation of a PF with the condition of a Newtonian potential. Subsequently, the Newtonian potential is obtained from the equation (the geodesic equation, related to Einstein's' equations and considerations)  $u^\nu(\nabla_\nu u^\mu) = 0$ ; allowing for the reduction of the space components from

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{tt}^i + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \approx 0, \quad (9)$$

which holds only if  $\tau \sim t$  and if the elements are neglected at the moment of obtaining the orders  $\epsilon^2$  given that  $dx^i \sim \epsilon dt$ . Thus, following the previous results (in addition to neglecting the time derivatives prior to the gradient (application of Nabla operator) regarding 5 (before the implication), we obtain  $\Gamma_{tt}^i \approx 1/2\partial^i g_{tt}$ . Solving the geodesic equation by  $\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx (1/2)\partial^i g_{tt}$ , it is comparable with the Second Newton's Law  $d^2\vec{x}/dt^2 = \nabla\Phi$  in relation with  $\partial^i = -\nabla^i$  it follows for the component of the metric  $g_{tt}$  that it holds  $g_{tt} \approx 1 + 2\Phi$ . This validates the solution of the Einstein's equations for a massive, static and spherical object, where for mass  $m$  Schwarzschild determines the following metric [22, 23]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (10)$$

Therefore, in order to ensure the previous equations are satisfied it is necessary that  $\Phi \approx Gm/r$  which would validate the Second Newton's Law by  $\mathbf{F} = m\partial_{tt}\mathbf{x} = \partial_t\mathbf{p}$  and  $\mathbf{F} = \nabla\Phi$  for the gravitational potential  $\Phi$ , corroborating that the property of a Newtonian PF keeping the elements is a force induced by the gravitational potential  $\Phi$ , which in Einstein's considerations is an geometric element regarding the component  $\Gamma_{tt}^i$  to determine the Levi-Civita of space-time (for the elements of the PF).

## 4 Black Hole Model

### Proof of the Schwarzschild metric

Hereinafter, we give a proof of the Schwarzschild's solution for Einstein's equations, his metric proposal and the metric itself. However, since Einstein's equations are not trivial, we need to set a proper preamble to represent and solve them

Thus, we bear in mind that value  $\kappa$  is related with 7 for a PF originated by a distribution of dust with velocities  $v \ll c$  where the only component of the Energy-Momentum tensor  $T_{(mat)}^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$  is  $T^{tt} \approx \rho_0$  implying that

$T_{tt} \approx \rho_0$  and  $T \approx \rho_0$  allowing to obtain the component ( $tt$ ) in 7; where  $\rho_0$  is the density of elements without the action of the PF condition (in rest) and  $u^\mu$  is the four-velocity  $u^\mu(\tau) = dx^\mu/d\tau$ ; while the space-time is considered asymptotically flat with respect to the Minkowski space, i.e.,  $\epsilon\Delta h_{tt} \approx \kappa\rho_0$  in 7 if  $\partial_t^2 \ll \Delta = \partial_i\partial^i$ . Otherwise, if space-time is not asymptotically flat, the solution of the equations is hindered regarding the Minkowski's metric. On the other hand, if we analyze in the Minkowski space the elements  $g_{\mu\nu}$  and  $g_{tt}$  in a first approximation, we identify  $\epsilon h_{tt}$  in relation with  $2\Phi$ , then, expression  $\epsilon\Delta h_{tt}$  implies  $\Delta\Phi \approx (1/2)\kappa\rho_0$ . Comparing this result with  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho_0$  (where  $G$  considers matter density  $\rho_m$  and the universal gravitational constant), it shows that  $\kappa = 8\pi G$ . Hence, every Newtonian PF (weak PF) is subject to  $G$  and  $\Phi$ , which are equally contained in sets subject to Einstein's equations (with  $v \ll c$ ), i.e., where the curvature effects of space and effects of special relativity are negligible.

## Schwarzschild's solution to Einstein's equations

In general terms, Einstein's equations are non-trivial due to their non-linearity since the superposition of two solutions does not imply a different solution. We will refer this time to Einstein's equations, given that due to their complexity they require more than a single work to model them correctly. Physically, the non-linearity of Einstein's equations given the curvature of space-time is a function of mass and energy of the PF. Moreover, gravity is not only a function of energy, momentum, and matter, but of itself, resulting in coupled non-linear equations. It was thought that there was no exact solution, however, months later after the publication of general relativity theory (1916), Karl Schwarzschild, determined an exact solution of an static object with spherical symmetry. He received a letter from Einstein [24] <sup>1</sup>

*I have read your paper with the utmost interest. I had not expected that one could formulate the exact solution of the problem in such a simple way. I liked very much your mathematical treatment of the subject. Next Thursday I shall present the work to the Academy with a few words of explanation.*

Such solution considers the static relation of the vacuum equations (Maxwell's differential equations [17, 9, 20]) assuming spherical symmetry for PFs with gravitational actions caused by massive objects (stars and planets). Hence,

---

<sup>1</sup>"Albert Einstein to Michele Besso: Physics Today: Vol 58, No 7(opens in a new tab)"

the geodesics considered by Schwarzschild (in his metric) [22] allow to calculate calculating (considering relativity) corrections to planetary orbits and the deflection of light (important effect in GL). In the absence of energy and matter, the energy-moment tensor  $T_{\mu\nu} = 0$  and the elements without trace in Einstein's equations lead to  $R_{\mu\nu} = 0$ . Subsequently, considering Ricci tensor, we notice that the metrics satisfying the vacuum equations are such that  $T_{\mu\nu} = 0$  (also widely-known as Ricci-flat equations), with its solutions being non-flat and solving the vacuum equations. Hence, regarding the aforementioned conditions of the PF, the solution of Schwarzschild is the simplest non-trivial solution, i.e., static without time evolution implying its metric should be time-independent, and at the same time, there should not be crossed terms of the type  $g_{tt}dtdx^i$ , that would contradict the invariance  $t \rightarrow -t$ . The superposition of the spherical symmetry, i.e., the space (under such metric) has symmetry  $SO(3)$  (3D rotation group) which is invariant to orthogonal rotations [25]. Therefore, without loss of generality, we can consider angles  $\theta$  and  $\varphi$  such that if  $t = t_0$  it implies that the space sections follow

$$ds^2 = -f(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{11}$$

**Definition 4.1.** *The Minkowski space-time is a Lorentzian manifold of curvature zero and isomorphic to the pair  $(\mathbb{R}^4, g_{\mu\nu})$ ; denoted by the following expression*

$$g = -x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_2 + x_3 \otimes x_3 + x_4 \otimes x_4; \tag{12}$$

expressed in metric tensor form as

$$g_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{13}$$

We bear in mind that the metric tensor given in 12, in the context of the Einstein's equations is denoted by  $g = \sum_{\mu, \nu=1}^n g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  and in the Einstein's notation, is reduced to  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  in terms of the generating base

$\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  of the PF elements; where we refer to 13 as the unitary form of  $g$ .

**Proposition 4.2.** *The differential relation between spatial and time*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2; \quad (14)$$

*defines a metric function, and 14 is so-called Minkowski's metric.*

*Proof.* By construction, it is straightforward to set  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (ct, x, y, z)$  in Definition 4.1. Subsequently, we recall from Definition 2.1 and 2.4 that the inner product defines a metric  $d$  from the differences between distinct elements in a set, and hence, term  $ds$  is a difference. However, from the definition of the inner product of Minkowski  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$  (Sec. 3); where  $x_1 = ict, x_2 = x, x_2 = y, x_2 = z$  (combining time and space coordinates). Nevertheless, this definition contradicts relation  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle^{1/2}$  since by Definition 2.1 we will have a negative metric. Hence, to show that Definition 2.1 holds, (in Einstein's notation) we must relate  $d$  to the metric tensor  $g_{\mu\nu}$ .

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu; \quad (15)$$

however, we can ignore the invariance process, for  $\tau \rightarrow -t$  and  $\tau \rightarrow t$ , depending on the event, observer and the velocity of the event. In general, in the PF (space) of Minkowski (subject to all properties and considerations of Minkowski) the metric  $ds^2$  invariance is warranted [17], and thus 15 implies 14 and also  $d2^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ , including the time and space difference (distance) between events in

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2, \quad (16)$$

which also satisfies invariance, and thus the sign change [17, 26]. Subsequently, by the isotropy of Minkowski PF (Definition 3.3) and metric invariance, we can include Schwarzschild's conditions (at the beginning of Sec. 4), and time invariance, where it follows straightforwardly that  $\partial_{it} \rightarrow dt \rightarrow 0$  and hence  $ds^2 \rightarrow dx^2 + dy^2 + dz^2$  implying 14 is reduced to the Euclid metric. Therefore, Minkowski's metric under Schwarzschild's considerations is a metric according to Definition 2.1.  $\square$

We bear in mind that the latter is only valid under Schwarzschild's considerations, where one of its conditions leads to a static problem, implying time invariance (because it was originally not considered), which ensures that  $\partial_t t \rightarrow dt \rightarrow 0$ , and thus  $ds^2 \rightarrow dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

**Proposition 4.3.** *Let  $r > 2M$  in a Newtonian potential (where  $M = mG$ ). By Proposition 4.2 and the difference between two vectors (or events in the space-time of a PF) satisfying 14 in a PF under Schwarzschild's considerations, it is possible to propose the following Ansatz*

$$ds^2 = e^{2A(r)} dt^2 - e^{2B(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (17)$$

to obtain the Schwarzschild's metric.

*Proof.* Without loss of generality we can consider the coordinate transformation  $X, Y, Z \rightarrow \rho, \theta, \varphi$  of our PF, highlighting the relation between 14 and 17 (taking into account the inner product in Proposition 4.2). It is always possible to perform a coordinate change for the space position  $\mathbf{r}$  to a function  $f(r)$ . Hence, according to variational methods, from 17, we need to determine functions  $A(r), B(r)$ . To this aim we substitute 17 in  $R_{\mu\nu} = 0$  (the vacuum or Schwarzschild's conditions are modeled by the Ricci tensor  $R_{\mu\nu}$ ), and obtain the corresponding Christoffel symbols  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  (from the covariant derivative  $\nabla_\alpha$  of the metric tensor  $g_{\mu\nu}$ ), obtaining

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho - g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho. \quad (18)$$

Analogously to the previous conditions, 18 is obtained if  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} \rightarrow 0$  and  $\Gamma_{\mu\nu}^r = (1/2)g^{r\lambda}[\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}]$ ; denoted by

$$\Gamma_{\mu\nu}^r = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{A(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{A(r)} \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2A(r)} \frac{dB(r)}{dr} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\theta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \cot(\theta) & 0 \\ \frac{1}{r} & \cot(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

At the same time, it is possible to obtain  $\Gamma_{tt}^r = e^{2[A(r)-B(r)]}A'(r)$ ,  $\Gamma_{tr}^t = A'(r)$ ,  $\Gamma_{rr}^r = B'(r)$ ,  $\Gamma_{r\theta}^{\theta} = r^{-1}$ ,  $\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = r^{-1}$ ,  $\Gamma_{\theta\theta}^r = r^{-1}e^{-2B(r)}$ , in addition to the non-trivial elements of the Christoffel symbols given by  $\Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \cot(\theta)$ ,  $\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r\sin^2(\theta)e^{-2B(r)}$ , and subsequently,  $\Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)$ . The previous results lead to the results (complex process) corresponding to the Ricci tensor of  $R_{\varphi\varphi} = \sin^2(\theta)R_{\theta\theta}$  for  $R_{\theta\theta} = e^{-2B(r)}[rA'(r) - rB'(r) + 1] - 1$ ,  $R_{rr} = A''(r) + A'(r)^2 - A'(r)B'(r) - 2B'(r)r^{-1}$ , in addition to

$$R_{tt} = -e^{2[A(r)-B(r)]} [A''(r) + A'(r)^2 - A'(r)B'(r) + 2A'(r)r^{-1}], \quad (23)$$

and the element corresponding to the Ricci scalar

$$R = -2e^{2B(r)} \{A''(r) + A'(r)^2 - A'(r)B'(r) + \dots + 2r^{-1}[A'(r) - B'(r)] + r^{-1}\} + 2r^{-1}, \quad (24)$$

under the vacuum condition (without any problem regarding Einstein's equations), we set to zero the components of the Ricci tensor to solve the system of coupled non-linear differential equations with two unknowns, multiplying  $R_{tt}$  by  $e^{-2[A(r)-B(r)]}$ , and including  $R_{rr}$ , we obtain

$$e^{-2[A(r)-B(r)]}R_{tt} + R_{rr} = -2-2[A'(r) - B'(r)]. \quad (25)$$

Subsequently, due to the linearity of the differential operator and setting the expression to zero, we obtain  $-[A'(r) + B'(r)] = 0$ . Hence, by virtue of the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) [10, 18, ?], there exists a constant

$c_0$  such that  $B(r) = -A(r) + c_0$ , and moreover, it allows to relate the time variable through  $t' = e^{c_0}t$  where, without loss of generality  $c_0 = 0$  (this assumption is valid and follows the vacuum or Schwarzschild's conditions). Obtaining the Ricci tensor of the form  $R_{\theta\theta}$ , and substituting  $B(r) = -A(r)$  it follows that  $R_{\theta\theta}$  which satisfies  $e^{2A(r)}[2rA'(r) + 1] - 1 = 0$ , which we can re-write (using the chain rule) of the form  $d/dr[re^{2A(r)}] - 1 = 0$ , assuming an integration constant  $cte = -2M$  (by virtue of the FTC), the solution is  $e^{2A(r)} = 1 - 2M/r$ .

Therefore, 24 holds, if at the same time  $R_{\varphi\varphi}$  and  $R_{\theta\theta}$  are satisfied under the vacuum conditions. Hence, performing another combination between  $R_{tt}$  and  $R_{rr}$  for any value of  $M$ , we obtain the homogeneous differential equation  $A''(r) + 2A'(r) + (2/r)A(r) = 0$ . Considering both equations of  $A(r)$  [ $d/dr(re^{2A(r)}) - 1 = 0$ ], we can show that  $2A(r) = \ln(1 - 2M/r)$  satisfies that  $A(r) = \ln\left((1 - 2M/r)^{1/2}\right)$  (with a simple algebraic manipulation). Hence, the Schwarzschild's solution for a line element of the  $n$ -Sphere  $\mathbb{S}^n(r)$  (with  $n = 2$  and  $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ ) according to 17 is given by

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - 2\frac{M}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (26)$$

□

Previously, we showed that in the static case with low curvature  $g_{tt}$  the metric is proportional to the Newtonian potential comparing  $g_{tt} \approx 1 + 2\Phi$  with  $g_{tt}$  in 26, since it stands out that  $\Phi = -M/r$  is the gravitational potential (expected for a spherical potential according to 17) of Proposition 4.3.

**Proposition 4.4.** *26 is a metric in a PF space-time, in this case it is Schwarzschild's metric function.*

*Proof.* The proof of Proposition 4.4 is straightforward, since its proof is very similar to that of Proposition 4.2, under vacuum, static and invariance conditions (Schwarzschild). □

Einstein's equations imply that the matter-energy of a PF does not determine the geometry of space-time, yet it describes the elements deforming it according to Ricci tensor. Hence, different metrics with distinct Riemann

tensors but with equal Ricci tensor, could be solutions of the Einstein's equations, with the same energy-momentum tensor. It is possible to distinguish between metrics from its integration constants. Hence, both the Minkowski space and the solution of Schwarzschild are solutions of  $(R_{\mu\nu}) = 0$  (vacuum conditions) although (non-trivial) for the integration constant  $M$  coming from solving  $e^{2A(r)}$ . Therefore, we conclude that the integration constants come from equations of motion implying different solutions with the same boundary conditions, similar to the arguments described in Definition 2.1. In Figure 1, we observe the deformation of space-time due to the effective potential for a singularity at the mass center, with mass of  $10M_{\odot}$ , noticing the behavior of the gravitational potential resembling that of a infinite potential well [Figure 1 (b)]. We notice how an observer approaching to the center will find it harder to escape due to the deformation of space-time [Figure 1 (c)], as illustrated in the infinite well, according to the potential  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho_0$  solving for the symmetric  $g_{tt}$ .

Schwarzschild's solution considers absence of mass and energy, with a space-time interpretation with mass  $m$  in the origin, and hence, for  $r > R_0$ , 26 it corresponds to the outer part of the gravitational field caused by the object with radius  $R_0 > 2M$ . Hence, we obtain the outer solution of Schwarzschild. Another possible solution is that for the inner region  $r < R_0$ , where there could be stars, planets or black holes (in the inner region of a galaxy), for which the energy-momentum tensor  $T_{\mu\nu}$ , is an ideal fluid, concluding that both solutions are similar in  $r = R_0$ , satisfying continuity conditions [2, 27]. Hence, if  $r \gg 1$  implies  $M/r \ll 1$ , which is the same as in 26, and tends to Minkowski metric (Proposition 4.2). Therefore, the Newtonian gravitational actions falls as  $1/r^2$  (at large distances the influence of an object is negligible) and the space is reduced to a Minkowski space, which is the so-called flat asymptotic solution.

In Figure 2, we show the vector field (PF elements) in flux from the event horizon to the center of the singularity, considering  $r = 0, 2M$ , and the previously described arguments. In Figure 2 (a), we show a cut at the center of the space-time, where we show an evolution plane of the track of objects towards the center. In Figure 2 (b), we show in the space-time the deformation of the object tracks under the action of the gravitational potential for a mass of  $10M_{\odot}$  [extending the plane shown in Figure 2 (a)]; and in Figure 2 (c), we show the singularity at the center, and in color, the second region defined by  $r = 2M$ .

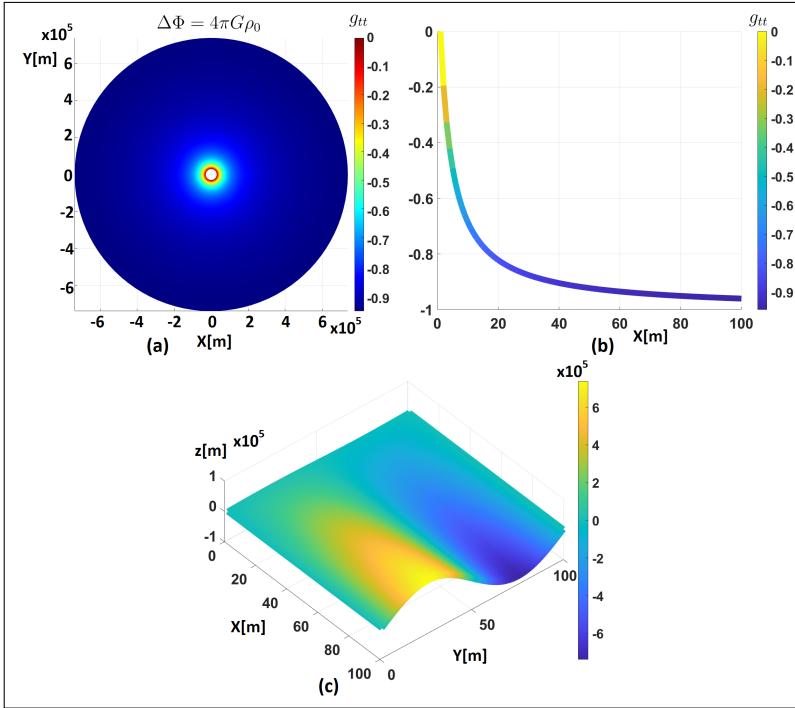


Figure 1: Deformation geodesic of the space due to the action of a gravitational potential  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho_0$  generated by  $10M_{\odot}$  at the center of the singularity, observing the space-time deformation towards the center in (a), in (b) we show the behaviour of the well and in (c), the space-time deformation.

## Schwarzschild Black Hole

We bear in mind that 17 in Proposition 4.3 defines degenerate and divergent states, from which we can obtain certain singularities (considering that it is a metric following Proposition 4.4).

Schwarzschild’s metric has a large quantity of singularities or inconsistencies as we can see in the cases  $\theta = 0, \pi$  (which would yield that Ricci tensor is such that  $R_{\varphi\varphi} \rightarrow 0$ , only in a polar space, since if we modify the coordinate system, the singularity will not exist); in addition to the cases  $r = 0, 2M$  (these cases would imply values of  $g_{tt} \rightarrow 0$ , and a singularity, in addition for  $g_{rr}$  but with the crossed cases, since if  $g_{tt}$  is singular hence  $g_{rr} \rightarrow 0$ , and if  $g_{tt} \rightarrow 0$  then  $g_{rr}$  is singular). The correct procedure to determine whether these are singularities

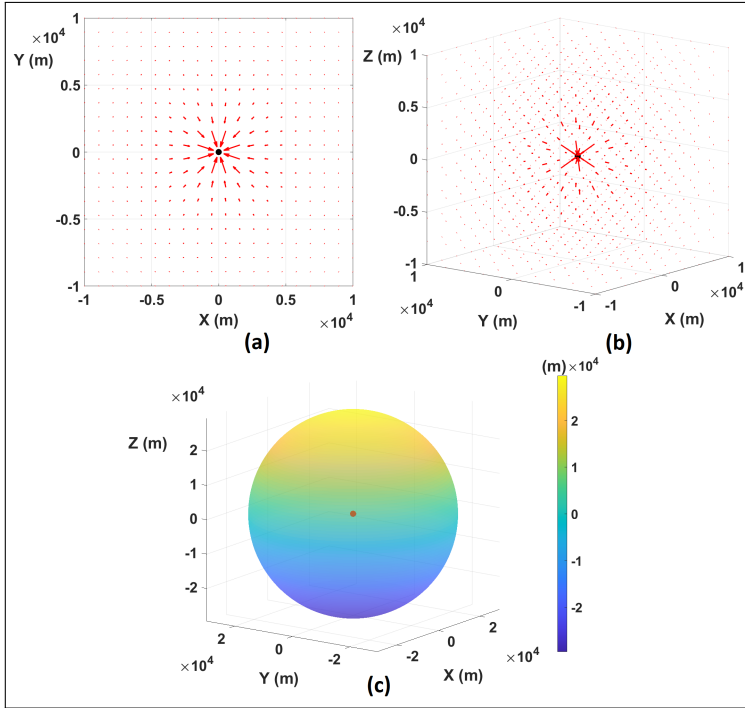


Figure 2: We show the PF elements from the horizon events to the center of the singularity, considering  $r = 0, 2M$  in (a) only a plane at the center of the space time  $3D + t$  or tetra-dimensional. In (b), we show the deformation of space  $3D + t$  with the track of PF elements under the action of the gravitational potential of a mass of  $10M_{\odot}$ . In (c), we show the singularity at the center and in color the second region defined by  $r = 0, 2M$ .

and under which conditions they are singular is under curvature invariance. However, under Propositions 4.3 and 4.4 (vacuum and Ricci-flat conditions) Ricci scalar and  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  are equal to zero. Hence, we need to use another theory, such as the Kretschmann invariant  $R_{\mu\nu\lambda}R^{\mu\nu\lambda}$ . From Proposition 4.3 it follows that  $R_{\mu\nu\lambda}R^{\mu\nu\lambda} = 48M^2/r^6$ . We notice that the invariant curvature diverges (singularity) if  $r \rightarrow 0$  and if  $r = 2M$  it follows a regular problem (with the probability of being a singularity of coordinates or caused by a coordinate change), requiring to set  $r = 2M$  as the Schwarzschild's radius (an important point observed as observed in the proof of Proposition 4.3), giving place to the Schwarzschild coordinates, (spherical coordinates adding a time variable)

$(t, r, \theta, \varphi)$ . Subsequently, a physical property that can be corroborated with astrophysical observations is the infinite redshift, in the Doppler gravitational effect under  $(t, r, \theta, \varphi)$  and  $r = 2M$ , considering two points  $r_q$  and  $r_s$  (in a static solution under 26), which follows the relationship between the distinct periods  $T$  for different signals ( $r_q$  and  $r_s$ , for the Doppler effect) from the metric tensor  $g_{\mu\nu}$  given by

$$T_s = T_q \sqrt{\frac{g_{tt}(r_s)}{g_{tt}(r_q)}} = T_q \sqrt{\frac{1 - 2\frac{M}{r_d}}{1 - 2\frac{M}{r_q}}}. \tag{27}$$

It is evident that if  $r_q \rightarrow 2M$  it follows that  $\left(1 - 2\frac{M}{r_d}\right) \rightarrow 0$ , and hence  $T_s$  diverges. Thus, at this point, we establish that  $\lim_{r_q \rightarrow 2M} T_q \rightarrow \infty$ , validating for the infinite redshift the Schwarzschild's conditions and for position values for an observer fixed at  $r = 2M$ , we obtain an infinite redshift. On the other hand, within the Minkowski's conditions in 14, Schwarzschild's empty conditions and Proposition 4.3,  $M = mG$  implies  $r = 2M$ , which we can consider as the Schwarzschild's radius, which under Minkowski's considerations and 27 it follows that  $r_{Sch} = 2M = 2mG/c^2$  for an object with mass  $m$  (which will be more evident from the solution of 28. Subsequently, if we consider the singularities of  $\theta = \pi$  or 0 then 26 is re-written as  $ds^2 = \left(1 - M\frac{1}{2}\right)dt^2 - \left(1 - M\frac{1}{2}\right)^{-1} dr^2$ . Hence, from the previous steps, we recall the reduction of 26, and we consider geodesics satisfying vacuum (Schwarzschild) conditions, which require to consider Christoffel symbols  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ . Thus, the curve describing the rays of the object in the PF in space-time (with  $d_t t = \dot{t}$ ) follows  $g_{\mu\nu} = 0$ , as well as  $g_{\mu\nu} \dot{t} \dot{r} = 0$ , and thus, we obtain

$$0 = g_{\mu\nu} \dot{t} \dot{r} = \left(1 - 2\frac{M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - 2\frac{M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2. \tag{28}$$

Subsequently, from 28 (by virtue of its equality with zero and the chain rule), we obtain  $(dt/dr)^2 = (1 - 2M/r)^{-2}$ , from which we obtain (applying the FTC), equation  $t = \pm(r + 2M \ln(r - 2M)) + c_{geo}$  (which we will refer to as the BH Geodesics Equation), where  $c_{geo}$  is an integration constant. The

positive sign corresponds to the outgoing geodesics and negative one to the incoming geodesics. Hence, for  $r \gg 2M$  ( $r \gg r_{Sch}$ ), the Schwarzschild's light cones (given previous geodesics) are similar to Minkowski's ones ( $r \rightarrow \infty$ ), as expected, since the Schwarzschild's conditions are asymptotically flat. Therefore, parameter  $r_{Sch}$  determines a BH, by defining a sphere where the singularity is at the center, and with radius  $r_{Sch}$ , matching its radius with the distance from the center to the border (Schwarzschild's metric), which we refer to as the Schwarzschild's events horizon (of a Schwarzschild's BH). Hence, for an object at a distance close to but larger than  $r_{Sch}$ , its light will find it difficult to exit the gravitational potential well. Subsequently, in the case  $r \leq r_{Sch}$ , the light cones are closed, more and more, where the light rays are, and in the inner parts, the incoming and outgoing geodesics will aim at the singularity and the cones will change its orientation, aiming towards the physical singularity at  $r = 0$ ; implying  $g_{tt}$  and  $g_{rr}$  of the metric change their signs. Thus, any object lying from position  $r = 0$  up to  $r = r_{Sch}$  will not be perceived by another object of the PF beyond  $r_{Sch}$ , since they cannot overcome the gravitational potential, i.e., they are trapped by a Schwarzschild's BH. Hence, in general, no object (with or without mass) is capable of crossing  $r_{Sch}$  from inside outwards, since every object will be always moving inside its light cone. Also, either, no massive particles, or observers are capable of entering into the zone  $r < r_{Sch}$ . Therefore, in the Schwarzschild coordinates, a particle falls towards the center and moves asymptotically to the Schwarzschild's radius, without crossing it. However, this is an erroneous conclusion since proper coordinates  $(t, r, \theta, \varphi)$  are suitable to describe the behavior close to Schwarzschild's radius since, following the previous arguments, it follows that a PF object cannot enter, exit, or even cross  $r_{Sch}$ . In 1939, Robert Oppenheimer et al. [28] observed the details where the free-fall time is significantly different, if we express it in terms of proper time  $\tau$  of the particle in free-fall (absence of action of the PF), time radial geodesics are applied along with covariant derivatives in the direction of the object track (directional derivative [10]) in the curve (following the notation  $u^\nu \partial_\nu = (d/d\tau) = d_\tau$ ) in terms of  $x^\mu(\tau)$  given by

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0; \quad (29)$$

from which we compute the time components of the time-radial geodesics given by

$$\ddot{t} + \Gamma_{tr}^t \dot{t} \dot{r} = 0; \quad (30)$$

where we correct the time derivative  $d_t$  with a derivative with respect to proper time  $d_\tau = \dot{x}$ . For the Schwarzschild's case, we simplify 30 in terms of the element  $g_{\mu\nu}\dot{t}\dot{r}$  in 28 by  $d_\tau(g_{tt}\dot{t}) = 0$ .

In Figure 3, we illustrate the application of the Schwarzschild's metric and radius  $r_{Sch}$ , described previously. We show the delimitation of the event horizon given the circumference of space-time [illustrated in a 2D cut of the  $3D + t$  space in Figure 3, (a) and (b)], extending from the center where the mass ( $10M_\odot$ ) is located, to generate the potential. In Figure 3 (a)-(b), we show a cut in the vector flux (PF elements) and how the mass density in a small region generates the singularity (b), where the event horizon is the distance at which all elements are trapped in the Schwarzschild's BH, in cuts in Figure 3 (c), which shows the revolving object in red of the vectors falling into the singularity in the  $3D + t$  space.

## Primordial Black Hole

Primordial Black Holes (PBHs), which are theorized, are black holes created during the inflation phase of the early universe, with origins different from those resulting from supernovae. In the primordial universe (during inflation), there are no stars yet. Hence, the PBHs, without loss of generality, can be considered the progenitors of black holes and supermassive black holes. From the results in previous sections, Einstein's equations in Schwarzschild's solution establish the existence of black holes as a potential well, with a space-time region delimited by  $r_{Sch}$  in the event horizon [3, 1, 32]; characterized by their mass  $\mathbf{m}$ , angular momentum  $\mathbf{J}$ , and electric charge  $\mathbf{Q}$  in the so-called no-hair theorem (we do not provide a proof of this theorem this time because it requires restructuring Schwarzschild's model and notation), which states that regardless of the mass, body, or radiation in the black hole, it will always be characterized by  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{J}$ , and/or  $\mathbf{Q}$ . Subsequently, in the case that a PBHs exists, there is a possibility of an initial state with  $\mathbf{J} = \mathbf{Q} = 0$  for any given process involving quantum emission and inflation, hence allowing for the classification of PBHs in terms of  $\mathbf{m}$  [29].  $\mathbf{m}$  constitutes a parameter for which: if  $3M_\odot \leq m_{SBH} \leq 10^2M_\odot$ , it is a scalar black hole; if  $10^2M_\odot \leq m_{IBH} \leq 10^6M_\odot$ , it is an Intermediate-mass black hole; and if  $10^6M_\odot \leq m_{SMBH} \leq 10^{10}M_\odot$ , it is a supermassive black hole. Hence, PBHs are theoretical black holes formed in perturbations of large mass densities due to fluctuations of the inflaton in the early Hawking Universe [30].

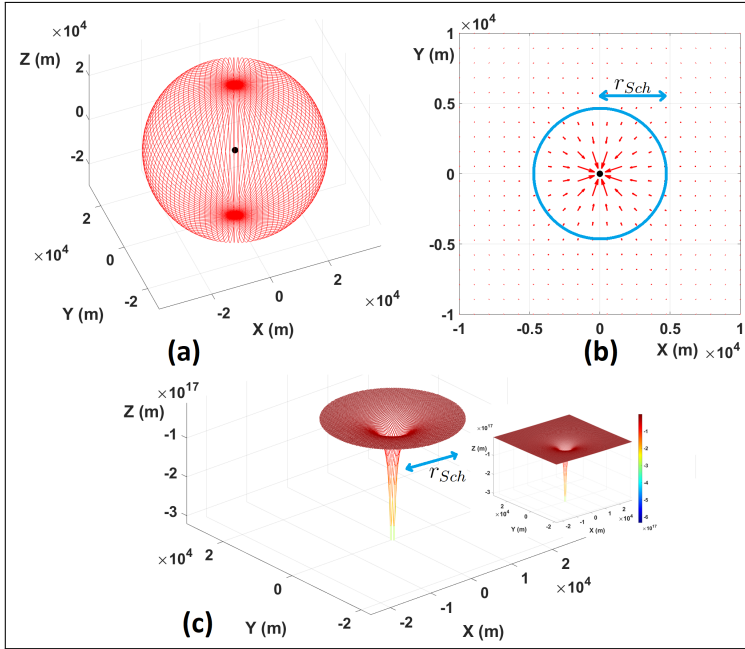


Figure 3: We show the application of all theory described regarding the Schwarzschild’s metric as a solution of Einstein’s equations. In (a), the delimitation of the events horizon given by the circumference in the  $3D + t$  space-time, extending from the center where the mass ( $10M_{\odot}$ ) is located, generating the potential up to the extreme  $r_{Sch}$ . In (b), we have the plane cuts from (a), and in (c), we show the transversal cut in (a) with an additional dimension (of the form  $2D + 1$ ). We show the location of the singularity (BH) at the center.

Considering Schwarzschild’s BH (non-rotating and static under vacuum conditions), it is possible to relate the event horizon with Schwarzschild’s radius ( $r_{Sch}$ ). The event horizon is related to the escape velocity. We recall the calculations of the escape velocity and analyze its analog in 28 in eigenvalues or energies form, studying two states: final and initial, as follows

$$E_0 = E_f \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + E_{p,0} = \frac{1}{2}mv_f^2 + G\frac{m_1m_2}{r}; \quad (31)$$

where the initial state is inside PF and is subject to all restrictions  $E_{p,0} \rightarrow 0$ , and in the escape state, it is expected that  $V_f \rightarrow 0$ , thus reaching the escape

velocity  $v_e$ . We set  $v_0 \rightarrow v_e$  and validate the escape velocity in a Newtonian potential (similar to Minkowski's conditions) such as the Earth's potential ( $m_0$  earth mass);  $v_e = \sqrt{2G(m_0/r)}$ . Hence, for the singularity in the inner region of  $r_{Sch}$ , it follows that  $v_e \rightarrow c$  since the mass density generates the potential inside  $r_{Sch}$ , and it is such that its density is equal to  $\rho_{Sch}(m) = m/r_{Sch}^3 = (3/32)c^6/(\pi G^3 m^2)$ . Thus, we can establish the relation  $\rho_{Sch}(m) = 10^{21}(M_\odot/m)^2$ . Subsequently,  $\rho_{Sch}(m)$  determines that the size of a BH is inversely proportional to its density, implying that in forming a low-mass BH (scalar BH), high energy densities are required (neutron stars or quark-gluon plasmas [8]). Therefore, the relevance of PBH gives rise to the necessity of smaller masses, considering the primordial radiation-dominated Universe, where the Universe was surrounded by a high energy density. Thus, at the end of the inflation phase, mass was close to the mass of the particles' horizon by the time of their formation [31].

## Gravitational Lens Effect

An additional effect of mass concentration is given by a single massive object or any of the mentioned singularities, such as the cores of star clusters [6] or galaxy clusters. Such an effect is the so-called Gravitational Lens (GL), for which a large quantity of mass/energy is required to deform space, causing a deflection in light rays coming from other sources. Such deformation generates a deflection angle, producing the GL effect.

To this aim, we consider several metrics that modify the traveled distances by the rays, which, despite those differences, would be in the same universe under different potentials between the source (galaxy or star), the potential generating the deformation (mass density between the source and the observer, generating the deformation of space modifying the light path from the source) and the observer, with the formation of the image depending on the observer's position (i.e., where the rays converge will not always be the place where the observer is). This problem is caused by the inability to solve these objects simply. To illustrate this, let's imagine a laboratory where we can manipulate a light source, an arrow, and a lens. In this case, we can freely shift the lens until we correctly focus the light or until we have a clear image of the arrow; even if this is not the case, we can still keep fixed or move the arrow or the lens. Moreover, in another example, we move the observer until we have a clear image or a convergence point of the rays coming from the

source, offering the liberty to permute the positions of the elements. However, in the case of astronomical or cosmological objects (BHs, galaxy clusters), it is not possible since we cannot modify the observable. At this point, international collaborations are crucial, including several facilities, observatories, missions, and surveys, such as James Webb, Hubble, etc., and nowadays, the unique opportunity that the Legacy Survey of Space and Time (LSST) offers [16]. We highlight the collaboration of the co-authors Dr. Cuevas-Otahola and Dr. Pérez-Villegas with the LSST as part of the Mexican collaboration team, having access to data and scientific developments, pushing the boundaries in Mexico, and joining efforts of several institutions such as UNAM (Dr. Pérez-Villegas and Dr. Valenzuela) and BUAP (Dr. Cuevas-Otahola).

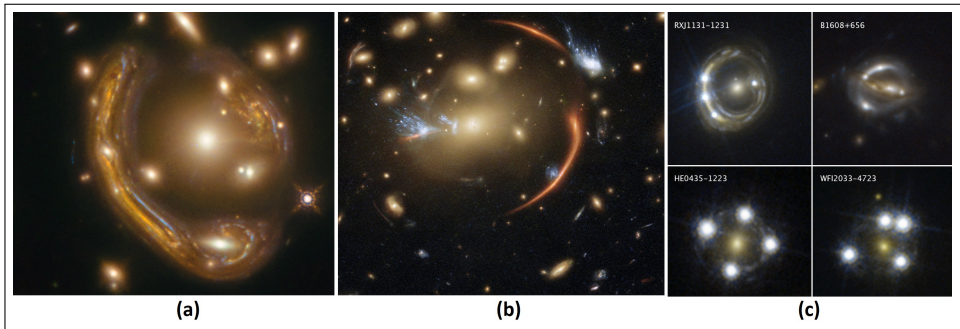


Figure 4: We show the GL effect for high mass/energy densities considering a BH, galaxy, cluster of galaxies, or neutron stars.

In Figure 4, we illustrate the effect of a gravitational lens (GL) with mass/energy in space-time. We show the observational effects captured by the James Webb and Hubble Space Telescopes, observing the deformation of light coming from several objects, resulting in different effects such as arcs, image multiplication, and shapes resembling caustics. We also notice multiplicity effects in the objects, including magnifications. The data were obtained from <https://hubblesite.org/contents/articles/gravitational-lensing>, highlighting Figure 4 (c), where we observe distortion and magnification phenomena, as well as the multiplication of objects, all caused by high mass densities between the observer and the source, explained by Schwarzschild's metric, which deforms space-time in a gravitational potential (due to mass or mass/energy density) generating the GL phenomena.

## 5 Conclusions

In this chapter, we show the basic models of Schwarzschild's Black Holes (BH), and we also review the concepts of primordial BHs and the Gravitational Lens (GL) effect to set the foundations for future works, where we will extend the theory and formalism applied to general relativity and Einstein's equations. We start with the equivalence of a PF with a set (mathematical structure of a set), where we cannot strictly use the definition of closure since it cannot be formally proved for PFs. However, it could be understood as the condition that keeps the elements subject to the PF. We analyze topological concepts to apply them in Schwarzschild's solution under ideal conditions, which also hold the required concepts for  $ds^2$  to be a metric.

We focus on showing that Schwarzschild's solution is indeed a metric while the vacuum conditions hold. Otherwise, such a solution would not define a metric, topologically speaking. The images shown in Figure 4 are real or experimental cases of our universe observed by James Webb and Hubble Space Telescopes, validating the theory of general relativity. To this aim, we extended an analysis from classical mechanics based on functional analysis in  $\mathbb{R}^n$  up to quantum mechanics principles to build elements of mathematical analysis from tensor analysis (momentum-energy, metric, Ricci, and Einstein's Curvature tensors) used to interpret the idea of deformation of the PF manifold. As part of our future work, we plan to generate models to explain the observations in greater detail, with the ability to simulate them with lower errors.

## Acknowledgments

The authors thank SECIHTI (Secretaría de Ciencias, Humanidades, Tecnología e Innovación and Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) at Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, for the support given during the course of this investigation. We also thank Francisco Sánchez Mora in the Centro de Ingeniería at INAOE for his advice on modeling with AI to produce the codes for the BH Schwarzschild metric.

## Bibliography

- [1] Akiyama K. and EHT Collaboration. *First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole*, *ApJL*, L4(**875**); L4:1–52, 2019.
- [2] Arriaga Jesús Alonso, Cuevas-Otahola B., Oliveros-Oliveros J.J. and Morin-Castillo M.M. *Fourier Series Method with Circular and Spheric Harmonics applied to physical phenomena regarding the direct problem solution* Matemáticas y sus Aplicaciones 17, Chap. 7, 161–188, BUAP ed., 2021.
- [3] Blandford R.D. and Znajek R.L. *Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes*, *MNRAS*, 3(**179**); 433–456, 1977.
- [4] Bozza V. *Gravitational lensing by black holes*, *Gen. Relativ. Gravit.*, (**42**); Gen Relativ Gravit, 2010.
- [5] Choquet-Bruhat Yvonne, *General Relativity and the Einstein Equations*, Oxford University Press, 2009.
- [6] Cuevas-Otahola Bolivia, Mayya Y.D., Arriaga-Hernández J., Puerari I. and Bruzual G. *The cluster initial mass function of the M82 disc super star clusters*, *MNRAS*, 4(**525**); 5262–5277, 2023.
- [7] De-Laurentis M., Paoella, M. and Capozziello S. *Cosmological inflation in  $F(R, \mathcal{G})$  gravity*, *Phys. Rev. D*, 8(**91**); 083531:1–9, 2015.
- [8] García-Bellido J. *Massive Primordial Black Holes as Dark Matter and their detection with Gravitational Waves*, *Phys.: Conf. Ser.*, (**840**); 012032:1–26, 2016.
- [9] Hecht E. *Optics*, Pearson, 2016.
- [10] Iribarren I.L. *Topología de espacios métricos*, Limusa-Wiley, 1973.
- [11] Liu J. and Melia F. *Gauge invariant fluctuations of the metric during inflation from a new scalar-tensor Weyl-integrable gravity model*, *Phys. Rev. D*, (**94**); 064075: 1–7, 2016.

- [12] Pucheu M. L., Romero C., Bellini M. and Madriz-Aguilar J.E. *Gauge invariant fluctuations of the metric during inflation from a new scalar-tensor Weyl-integrable gravity model*, *Phys. Rev. D*, (**94**); 064075:1–7, 2016.
- [13] Thorsett S.E. *The Gravitational Constant, the Chandrasekhar Limit, and Neutron Star Masses*, *Phy. Rev. Let.*, 8(**77**); 1432–1435, 1996.
- [14] Sachs R.K. *Gravitational waves in general relativity VIII. Waves in asymptotically flat space-time*, *Proc. R. Soc. Lond. A*, (**270**); 103–126, 1969.
- [15] Petters A.O. and Werner M.C. *Mathematics of gravitational lensing: multiple imaging and magnification*, *Gen. Relati. and Gravity*, (**42**); 2011–2046, 2010.
- [16] LSST-Legacy Survey of Space and Time (Telescope) Vera C. Rubin Observatory, <https://www.lsst.org>, 2020.
- [17] Resnick R. *Introducción a la teoría especial de la relatividad*, Limusa, 1977.
- [18] Dennemeyer R. *Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, 1968.
- [19] Narlikar J.V. and Padmanabhan T. *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology*, Reidel, 1986.
- [20] De-La-Peña L. *Introducción a la mecánica cuántica*, Fondo de Cultura Económica, 2014.
- [21] Thornton S.T. and Marion J.B. *Classical Dynamics Of Particles And Systems*, Thomson, 2004.
- [22] Vishveshwara C.V. *Stability of the Schwarzschild Metric*, *Phy. Rev. D*, 1(**10**); 2870–2879, 1970.
- [23] Paston S.A. and Sheykin A.A. *Embeddings for the Schwarzschild metric: classification and new results*, *Class. and Quan. Grav.*, (**29**); 095022:1–17, 2012.

- [24] Eisenstaedt J. *The early interpretation of the Schwarzschild solution. In Howard, D. & Stachel, J. (eds.), 213–233, Einstein and the History of General Relativity (Birkhäuser, Boston, 1989). Proceedings of the First International Conference on the History of General Relativity, North Andover, 2021.*
- [25] Gelfand I.M., Minlos R.A. and Shapiro Z. Ya. *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications*, Dover Publications, 2018.
- [26] Canbin L. and Bin Z. *Differential Geometry and General Relativity*, Springer Singapore, Vol. I, 2023.
- [27] Morin-Castillo M.M., Arriaga J.A, Cuevas-Otahola B. and Oliveros-Oliveros J.J. *Analysis of Dipolar Sources in the Solution of the Electroencephalographic Inverse Problem, Mathematics*, 10 (**11**); 10111926:1–22, 2022.
- [28] Oppenheimer J.R. and Volkoff G.M. *On Massive Neutron Cores, Phys. Rev.*, 4 (**55**); 1374–381, 1939.
- [29] Greene J.E. *Low-mass black holes as the remnants of primordial black hole formation, Nature Comm.*, 1304(**3**); ncomms2314:1–10, 2012.
- [30] Hawking S. *Gravitationally Collapsed Objects of Very Low Mass, MNRAS*, 1 (**152**); 75–78, 1971.
- [31] Carr B.J., Kohri K., Sendouda Y. and Yokoyama J. *New cosmological constraints on primordial black holes, Phys. Rev. D*, 10 (**81**); 104019:1–31, 2010.
- [32] Zu-Cheng Chen Z.C., Du S.S., Huang Q.G. and You Z.Q. *Constraints on primordial-black-hole population and cosmic expansion history from GWTC-3, JCAP*, 3(**2023**); 024:1–24, 2023.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad  
Autónoma de Puebla

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. México, C.P. 72570

Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad  
Autónoma de Puebla

Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. México C.P., 72570

Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México  
(IAUNAM-Ensenada)

Carr. Tijuana-Ensenada km 107, C.I.C.E.S.E., 22860 Ensenada, B.C.  
México, C.P. 22860

jesus.arriagahdz@correo.buap.mx

bolivia.cuevasotahola@viep.com.mx

mperez@astro.unam.mx

jose.oliveros@correo.buap.mx

---

# Topología

---



## Capítulo 3

# Unicidad y no unicidad de hiperespacios de continuos

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,  
Leonardo Ramírez Aparicio

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

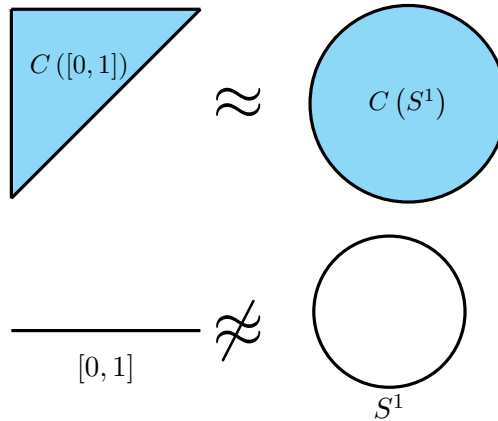
### Resumen

Esta recopilación contiene una versión actualizada del capítulo “Estatus de la unicidad de hiperespacios de continuos” del libro Matemáticas y sus Aplicaciones 16, el cual aborda la pregunta, ¿cuándo un continuo  $X$  tiene hiperespacio único? A diferencia del capítulo que mencionamos, aquí se tiene que si,  $\mathcal{H}(X)$  es un hiperespacio de un continuo  $X$ , es porque  $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X), C_n(X)/F_m(X), C_n(X)/C_1(X), C_n(X)/C_m(X), F_n(X)/F_1(X)\}$ , para los cuales su unicidad recientemente ha sido demostrada para algunas clases de continuos. Además, presentamos algunos ejemplos de continuos que no poseen hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ .

## 1 Introducción

Imaginemos que viviéramos en el mundo de los hiperespacios y nos encontráramos con dos iguales, ¿podríamos decir que provienen de dos espacios iguales?

En general, la respuesta es no. Por ejemplo, es bien conocido que un modelo para  $C([0, 1])$  y para  $C(S^1)$  es una 2-celda, véase [46, Ejemplos 5.1 y 5.2, págs. 33 y 35, respectivamente]. Sin embargo, el arco  $[0, 1]$  no es homeomorfo a la curva cerrada simple  $S^1$  como se puede observar en la figura de abajo.



Se dice que un continuo  $X$  tiene hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ , si para cada continuo  $Y$  tal que  $\mathcal{H}(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{H}(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

En contraste con lo que ocurría a finales del siglo XX, donde los investigadores se centraban en estudiar la estructura de los hiperespacios de continuos  $2^X$  y  $C(X)$ , actualmente la investigación está más dirigida a hiperespacios definidos hace poco tiempo.

## 2 Preliminares

En todo este capítulo, si  $X$  es un espacio topológico y  $A$  es un subconjunto de  $X$ , los símbolos  $\text{cl}_X(A)$  y  $\text{Bd}_X(A)$  denotan la cerradura de  $A$  y la frontera de  $A$  en el espacio  $X$ . Como es usual, los símbolos  $\mathbb{N}$  y  $\omega$ , representan el conjunto de los números naturales (enteros positivos) y el primer ordinal no numerable. También,  $\text{id}_X$  es la función identidad en  $X$ .

Los continuos son espacios métricos con más de un punto, compactos y conexos. Cuando hablamos de espacios con más de un punto, compactos y conexos pero debilitamos la condición de ser métricos por ser de Hausdorff, diremos que el continuo es de Hausdorff.

**Definición 2.1.** Sean  $X$  un continuo,  $A$  un subconjunto no vacío de  $X$  y  $\beta$  un número cardinal. Se dice que  $A$  es de **orden menor o igual** que  $\beta$

en  $X$ , denotado por  $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ , si para cualquier conjunto abierto  $V$  de  $X$  con  $A \subset V$ , existe un conjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que  $A \subset U \subset V$  y  $|\text{Bd}_X(U)| \leq \beta$ . Si  $A = \{x\}$  se escribirá que  $\text{ord}(x, X) \leq \beta$  en lugar de escribir  $\text{ord}(\{x\}, X) \leq \beta$ . Se dice también que  $A$  es de **orden**  $\beta$  en  $X$ , denotado por  $\text{ord}(A, X) = \beta$ , si  $\text{ord}(A, X) \leq \beta$  y para cualquier número cardinal  $\alpha < \beta$ , se tiene que  $\text{ord}(A, X) \not\leq \alpha$ .

Por otro lado, si tenemos un continuo  $X$ , la familia de los subconjuntos no vacíos y cerrados de  $X$  la denotamos como  $2^X$ .

A este hiperespacio se le dota de la topología de Vietoris, cuya definición es la siguiente:

**Definición 2.2.** Para un continuo  $X$ , la topología de Vietoris para  $2^X$  es la topología más pequeña,  $\tau_V$  tal que  $2^X$  tiene las siguientes propiedades: (1)  $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in \tau_V$ , para todo abierto  $U$  de  $X$  y (2)  $2^X \setminus \{A \in 2^X : A \subset B\} \in \tau_V$ , para todo cerrado  $B$  en  $X$ .

Sean  $n, r \in \mathbb{N}$  y sean  $U_1, \dots, U_r$  subconjuntos no vacíos de un continuo  $X$ . Denotamos por

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle_{2^X} = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

La familia de todos los conjuntos  $\langle U_1, \dots, U_r \rangle_{2^X}$  es una base para la topología en  $2^X$ , cuando  $U_1, \dots, U_r$  son subconjuntos abiertos de  $X$  (véase [46, Teorema 1.2]).

Dado  $X$  un continuo con métrica  $d$ , si  $p \in X$  y  $\epsilon > 0$ , denotamos por  $B_d(\epsilon, p)$ , la bola abierta con centro en  $p$  y radio  $\epsilon$ . Además, si  $A \in 2^X$ , definimos la  $\epsilon$ -**nube** de  $A$  (o la **nube con centro en  $A$  y radio  $\epsilon > 0$ ) como:**

$$N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \epsilon\}$$

y la **bola cerrada generalizada** en  $X$  de radio  $\epsilon$  alrededor de  $A$ , denotada por  $C_d(\epsilon, A)$ , como:

$$C_d(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x, A) \leq \epsilon\}. \text{ Cuando } A = \{p\}, \text{ simplemente escribimos } C(\epsilon, p) \text{ en lugar de } C(\epsilon, \{p\}).$$

**Definición 2.3.** Dado  $X$  un continuo con métrica  $d$ , se dice que su métrica es convexa si, para cada  $p, q \in X$ , existe una isometría  $\gamma: [0, d(p, q)] \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(d(p, q)) = q$ .

**Definición 2.4.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $f, g: X \rightarrow Y$  funciones continuas. Diremos que  $f$  y  $g$  son homotópicas ( $f \simeq g$ ), si existe una función continua  $H: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ . La función  $H$  es llamada homotopía.

**Definición 2.5.** Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es **contráctil** si  $id_X \simeq k$ , con  $k$  una función constante.

Como subespacios de  $2^X$  de un continuo  $X$  y cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos a

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ puntos}\} \text{ y}$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

que denotan el  $n$ -ésimo producto simétrico de  $X$  y el  $n$ -ésimo hiperespacio de  $X$ , respectivamente. Se acostumbra denotar a  $C_1(X)$  como  $C(X)$ , conocido como el hiperespacio de los subcontinuos del continuo  $X$ . Note que  $F_n(X) \subset C_n(X)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

El concepto de producto simétrico lo introdujeron K. Borsuk y S. M. Ulam en [8]. Ver [46, (0.48), pág. 23] y [62, pág. 6 y 7] para obtener más información.

Por su parte, el concepto del  $n$ -ésimo hiperespacio de  $X$ , cuando  $X$  es un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , tuvo sus inicios en 1939 con Wojdysławski en su artículo [69], *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*. Pero el nombre de este hiperespacio fue dado por Sergio Macías en el año de 2001, como se puede ver en [52].

Se sabe que para un continuo  $X$ , todos los hiperespacios  $F_n(X)$  y  $C_n(X)$  son continuos (ver [59, 2.4.2, pág. 156], y [12, Teorema 4.10, pág. 165]).

En 1979, S. B. Nadler Jr. introdujo el concepto de hiperespacio suspensión de un continuo  $X$  como el espacio cociente  $C(X)/F_1(X)$ , al identificar a  $F_1(X)$  como un conjunto de un solo punto en  $C(X)$  con la topología cociente, denotándolo como  $HS(X)$  véase [63, pág. 125]. Más tarde, en 2004, Sergio

Macías generalizó dicho hiperespacio al  $n$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo  $X$  que es definido como el espacio cociente  $C_n(X)/F_n(X)$ , el cual se obtiene al identificar a  $F_n(X)$  como un conjunto de un solo punto en  $C_n(X)$  con la topología cociente y se denota como  $HS_n(X)$ , donde  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , véase [53, pág. 127]. Para 2008, Juan Carlos Macías [48] definió el  $n$ -ésimo pseudo hiperespacio suspensión de un continuo  $X$ ,  $PHS_n(X)$ , como el espacio cociente  $C_n(X)/F_1(X)$ , al identificar  $F_1(X)$  como un conjunto de un solo punto en  $C_n(X)$  con la topología cociente. Por su parte, en 2010, F. Barragán [7] definió para un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , el  **$n$ -ésimo producto simétrico suspensión** de  $X$ , denotándolo por  $SF_n(X)$ , como el espacio cociente  $F_n(X)/F_1(X)$ , el cual es obtenido al identificar a  $F_1(X)$  como un conjunto de un solo punto en  $F_n(X)$  con la topología cociente. En 2018, J. G. Anaya, D. Maya y F. Vázquez-Juárez [5] definieron el  $(n, m)$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo  $X$  como el espacio cociente  $C_n(X)/F_m(X)$  que se obtiene al identificar a  $F_m(X)$  como un conjunto de un punto en  $C_n(X)$  con la topología cociente, donde  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $m \leq n$ , denotado por  $HS_m^n(X)$ . De acuerdo a esta notación  $HS_1^1(X) = HS(X)$  y  $HS_n^n(X) = HS_n(X)$ . Por último, en 2021, J. Camargo y S. Macías [9] han definido para un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , el espacio cociente  $C_n(X)/C_1(X)$ , denotado como  $\mathcal{C}_1^n(X)$ , el cual es obtenido al identificar a  $C_1(X)$  como un conjunto de un punto en  $C_n(X)$  con la topología cociente.

Consideremos

$$\mathcal{H}(X) \in \{F_n(X), C_n(X), \mathcal{C}_1^n(X), PHS_n(X), HS_m^n(X), SF_n(X)\}. \quad (1)$$

Sea  $f$  una función continua de un continuo  $X$  a un continuo  $Y$ . Para un hiperespacio fijo  $\mathcal{H}(X)$  como en (1), se define la  **$\mathcal{H}$ -función inducida** por  $\mathcal{H}(f) : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$  que está dada por  $\mathcal{H}(f)(A) = f(A)$ , para cada  $A \in \mathcal{H}(X)$ .

Si  $\mathcal{H}(X) = 2^X$ , entonces  $\mathcal{H}(f)$  generalmente se denota por  $2^f$ . Se sabe que para cada función  $f : X \rightarrow Y$  la función inducida  $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$  es continua (ver [46, Lema 13.3, pág. 106] y comparar [62, 5.10.1 del Teorema 5.10, pág. 170]). Dado que  $\mathcal{H}(X) \subset 2^X$  simplemente por la definición, y dado que  $\mathcal{H}(f) = 2^f|_{\mathcal{H}(X)}$ , la continuidad de  $2^f$  implica la continuidad de cada  $\mathcal{H}(f)$ . Similarmente,

$$\text{si } f \text{ es un homeomorfismo, entonces } \mathcal{H}(f) \text{ es un homeomorfismo.} \quad (2)$$

(véase [62, (0.52) y (0.53), pág. 29 y 30]).

Como consecuencia inmediata de la implicación (2) tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.6.** *Si  $X$  y  $Y$  son continuos y  $X$  es homeomorfo a  $Y$ , entonces  $2^X$  es homeomorfo a  $2^Y$  y  $C(X)$  es homeomorfo a  $C(Y)$ .*

De hecho, si  $h: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces la función inducida  $2^h: 2^X \rightarrow 2^Y$  es un homeomorfismo, y por lo tanto  $2^h|C(X) = C(h): C(X) \rightarrow C(Y)$  también es un homeomorfismo (véase [62, (0.52) y (0.53), pág. 29 y 30]).

La proposición recíproca del Teorema 2.6 no es cierta en general, como ya hemos visto desde el inicio de este capítulo.

Así, si  $\mathcal{H}(X)$  es un hiperespacio de los que aparecen en (1), tiene sentido la siguiente pregunta:

¿bajo qué condiciones un **continuo**  $X$  tiene hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ ?

Incluso, debido a que los continuos pueden tener propiedades muy variadas, una pregunta más restringida es:

¿para qué clases de continuos  $\Lambda$ , si  $X \in \Lambda$  entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ ?

Una condición que ayuda a responder esta última pregunta es saber primero si los elementos de la clase de continuos  $\Lambda$  está  $\mathcal{H}$ -determinada. La definición es la siguiente:

**Definición 2.7.** *Sea  $\Lambda$  una clase de continuos. Se dice que los elementos de  $\Lambda$  están  $\mathcal{H}$ -determinados si para  $X, Y \in \Lambda$  tales que  $\mathcal{H}(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{H}(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .*

El siguiente paso para resolver el problema de la unicidad de hiperespacios cuando tenemos una clase de continuos  $\Lambda$ , consiste en demostrar que la clase es  $\mathcal{H}$ -cerrada. La definición es como sigue:

**Definición 2.8.** *Dado un continuo  $X$ , denotamos por  $\mathcal{H}(X)$  un hiperespacio de  $X$ . Una clase de continuos  $\lambda$  es  **$\mathcal{H}$ -cerrada** si  $X \in \lambda$  y  $Y$  un continuo tal que  $\mathcal{H}(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{H}(Y)$ , entonces  $Y \in \lambda$ .*

La primer persona en demostrar la unicidad para cierto hiperespacio, fue Gerardo Acosta en [1]. Desde entonces, uno de los problemas que más ha tomado relevancia en la teoría de los hiperespacios de continuos es conocer a las clases de continuos que tienen hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ . En general, como lo muestra la nomenclatura matemática, una forma de resolver este problema ha sido probar que los miembros de dicha clase de continuos están  $\mathcal{H}$ -determinados y luego  $\mathcal{H}$ -cerrada, o bien, primero se prueba que la clase es  $\mathcal{H}$ -cerrada y luego  $\mathcal{H}$ -determinada, para finalmente obtener que la clase de continuos tiene hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ . A lo largo de este capítulo se presentarán algunas clases de continuos que, satisfacen uno o ambos conceptos, tienen hiperespacio único; además que se presentan algunas clases de continuos que no tienen hiperespacio único.

### 3 Clases de continuos

Esta sección tiene como finalidad definir todos los continuos, así como las clases que se han estudiado hasta ahora, su unicidad y no unicidad en ciertos hiperespacios.

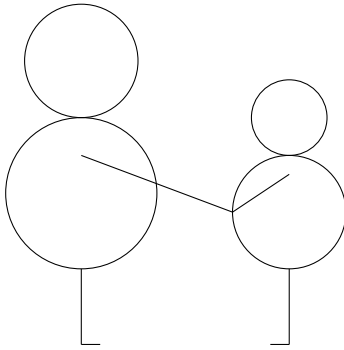
Un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

Una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano; la denotamos como  $S^1$ .

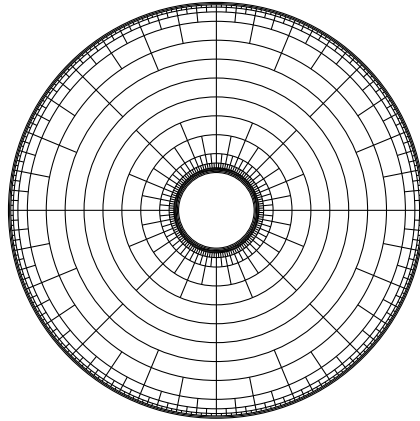
Un continuo es una **gráfica finita** si se puede escribir como la unión finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan solamente en uno o en sus dos puntos extremos.

Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

Denotemos por  $\mathfrak{D}$  a la clase de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado.



Gráfica finita



No gráfica finita

Un continuo  $X$  es una **dendrita local** si cada punto de  $X$  tiene una vecindad que es una dendrita.

Denotamos por  $\mathfrak{LD}$  la clase de las dendritas locales  $X$  tales que cada punto de  $X$  tiene una vecindad que pertenece a  $\mathfrak{D}$ .

Ahora consideraremos otra clase de dendritas muy interesantes para este capítulo. Sea  $\mathbb{N}' = (\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}) \cup \{\omega\}$ . Dado  $S$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}'$ , denotamos por  $D_S$  cualquier dendrita que satisface las siguientes dos condiciones:

- (a) si  $p \in R(D_S)$ , entonces  $\text{ord}(p, D_S) \in S$ ;
- (b) para cada  $m \in S$  y cada arco  $A$  en  $D_S$ , existe  $p \in A$  tal que  $\text{ord}(p, D_S) = m$ .

Si  $S = \{m\}$ , para alguna  $m \in \mathbb{N}$ , entonces a la dendrita  $D_{\{m\}}$  asociada a  $S$ , que denotaremos por  $D_m$ , es llamada **dendrita universal estandar de orden  $m$** .

Un **alambre** en un continuo  $X$  es un subconjunto  $\alpha$  de  $X$  tal que  $\alpha$  es homeomorfo a uno de los siguientes espacios  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$ ,  $[0, 1]$  o la circunferencia unitaria en el plano Euclidiano y  $\alpha$  es una componente de un subconjunto abierto de  $X$ .

Dado un continuo  $X$  sea

$$W(X) = \bigcup \{ \alpha \subset X : \alpha \text{ es un alambre en } X \}.$$

Un continuo  $X$  es **alambrado** si el conjunto  $W(X)$  es denso en  $X$ .

Un continuo es **indescomponible** si no se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo es **hereditariamente indescomponible** si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Un continuo indescomponible se llama **arco-continuo indescomponible** si todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.

Un continuo  $X$  es **unicoherente** si para cualesquiera dos subcontinuos  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $X = A \cup B$  se tiene que  $A \cap B$  es conexo.

Un continuo es **hereditariamente unicoherente** si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

- El intervalo  $[0, 1]$  es hereditariamente unicoherente.
- Un círculo no es unicoherente. Por tanto, si un continuo contiene una curva cerrada simple, no es hereditariamente unicoherente.

Un **abanico** es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente que contiene un sólo punto de ramificación.

Un abanico  $X$  con un punto de ramificación  $v$  es un **abanico suave** si para toda sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $X$  tal que  $x_n$  converge a  $x$  se cumple que  $vx_n$  converge a  $vx$ .

Un espacio métrico, compacto y Hausdorff  $\overline{X}$  se llama **compactación métrica** de  $X$ , si  $X$  es un subconjunto denso de  $\overline{X}$ . En tal caso, el conjunto  $R = \overline{X} \setminus X$  se llama el residuo de  $\overline{X}$ .

Para un continuo  $X$ , sean:

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X : \text{existe } M \subset X \text{ tal que}$$

$$M \text{ es una gráfica finita y } x \in \text{int}_X(M)\} \text{ y}$$

$$\mathcal{P}(X) = X \setminus \mathcal{G}(X).$$

Un continuo  $X$  es **casi enrejado** si el conjunto  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$ . Un continuo casi enrejado  $X$  es **enrejado** si  $X$  tiene una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  tal que, para cada  $U \in \mathfrak{B}$ ,  $U \setminus \mathcal{P}(X)$  es conexo.

## 4 El hiperespacio $2^X$

En 1999, S. Macías [50, Teorema en la pág. 417] probó que:

**Teorema 4.1.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles es 2-determinada.*

En 1999, S. Macías [50, Teorema en la pág. 416] probó que:

**Teorema 4.2.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único  $2^X$ .*

En 2011, A. Illanes generalizó los resultados anteriores [42, Teorema 4.4] al probar que:

**Teorema 4.3.** *Si  $X$  es un continuo de Hausdorff hereditariamente indescomponible, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $2^X$ .*

## 5 El $n$ -ésimo hiperespacio de $X$ , $C_n(X)$

En 1968, R. Duda probó [16, Teorema 9.1] que:

**Teorema 5.1.** *La clase de las gráficas finitas diferentes del arco y de la curva cerrada simple es  $C$ -determinada.*

En 1978, Nadler probó [62, (0.60)] que:

**Teorema 5.2.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles es  $C$ -determinada.*

En 1979, Carl Eberhart y Sam B. Nadler, Jr. [17, Corollario 3.3] demostraron que:

**Teorema 5.3.** *La clase de los abanicos suaves está  $C$ -determinada.*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 67, pág. 32] (véase también [2, Teorema 1, pág. 38]) probó que:

**Teorema 5.4.** *Las gráficas finitas  $X$  que no son ni un arco y ni una curva cerrada simple, tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 63, pág. 31], véase también [2, Teorema 2, pág. 38], probó que:

**Teorema 5.5.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles  $X$  tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 1997, S. Macías [49, Teorema 3] probó que:

**Teorema 5.6.** *La clase de los arco-continuos indescomponibles es  $C$ -determinada.*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 158, pág. 164] probó que:

**Teorema 5.7.** *Los arco-continuos indescomponibles  $X$  tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 154, pág. 159] probó que:

**Teorema 5.8.** *La clase de las compactaciones métricas de la recta real cuyo residuo es conexo y no degenerado es  $C$ -determinada.*

Consideremos dos números reales  $a > 0$  y  $b < 0$ , supongamos que  $[a, \infty) \cup R$  y  $(-\infty, b] \cup R$  representan dos compactaciones métricas de los semirayos ajenos  $[a, \infty)$  y  $(-\infty, b]$ , respectivamente, ambas con residuo no degenerado  $R$ . Sea  $X = [a, \infty) \cup R \cup (-\infty, b]$ . En general, consideremos  $\mathcal{F}$  la clase de todos los continuos que se pueden escribir como la unión de dos compactaciones métricas de semirayos ajenos, ambas con el mismo residuo.

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 126, pág. 106] (véase también [2, Teorema 10, pág. 48]), probó que:

**Teorema 5.9.** *La clase  $\mathcal{F}$  es  $C$ -determinada.*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 118, pág. 81] (véase también [2, Teorema 4, pág. 42]), probó que:

**Teorema 5.10.** *Las compactaciones métricas del espacio  $[0, \infty)$ , con residuo no degenerado  $X$ , tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 134, pág. 116] (véase también [2, Teorema 6, pág. 44]), probó que:

**Teorema 5.11.** *La clase de las compactaciones métricas de  $\mathbb{R}$ , cuyo residuo no es conexo y tiene exactamente dos componentes no degeneradas  $X$  tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 2000, S. Macías [51, Teorema 6.1] probó que:

**Teorema 5.12.** *Sean  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > 1$ . Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2002, G. Acosta [2, Corolario 5, pág. 44] y [2, Corolario 8, pág. 45], respectivamente, probaron que:

**Teorema 5.13.** *La clase de las compactaciones métricas del espacio  $[0, \infty)$ , con residuo no degenerado, es  $C$ -determinada.*

**Teorema 5.14.** *La clase de las compactaciones métricas de  $\mathbb{R}$ , diferentes del arco y cuyo residuo no es conexo, es  $C$ -determinada.*

En 2002, G. Acosta probó en [2, Teorema 7, pág. 45] que:

**Teorema 5.15.** *Las compactaciones métricas de  $\mathbb{R}$ , diferentes del arco y cuyo residuo no es conexo  $X$ , tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 2002, A. Illanes [38, pág. 356] demostró que:

**Teorema 5.16.** *La clase de las gráficas finitas es  $C_2$ -cerrada.*

En 2002, A. Illanes [38, Teorema 4.1] probó que:

**Teorema 5.17.** *Las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $C_2(X)$ .*

En 2003, A. Illanes [40, Teorema 3.8] probó que:

**Teorema 5.18.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . Las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2003, A. Illanes [40, Teorema 3.8, pág. 186] demostró que:

**Teorema 5.19.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . La clase de las gráficas finitas es  $C_n$ -cerrada.*

En 2007, D. Herrera-Carrasco probó que (véanse las pruebas del Teoremas 9 y 10 de [25]):

**Teorema 5.20.** *La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C$ -cerrada.*

En 2007, D. Herrera-Carrasco [25, Teorema 6] (véase también [24, Teorema 3.13]) probó que:

**Teorema 5.21.** *La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C$ -determinada.*

En 2007, David Herrera [25, Teorema 10] (véase [24, Teorema 3.22, pág. 60]) probó que:

**Teorema 5.22.** *Si  $X \in \mathfrak{D}$  entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 2008, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero [33, Teorema 4.1] probaron que:

**Teorema 5.23.** *Para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C_n$ -determinada.*

En 2008, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero probaron que (véase [33, Teoremas 4.2 y 5.1]):

**Teorema 5.24.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C_n$ -cerrada.*

En 2008, D. Herrera y F. Macías [33, Teorema 5.7] probaron que:

**Teorema 5.25.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . Los elementos de  $\mathfrak{D}$  tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2009, D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. López y F. Macías-Romero probaron que (véase [26, Teorema 13] y [41, Teorema 3.1]):

**Teorema 5.26.** *La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C_2$ -cerrada.*

En 2009, D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. López y F. Macías-Romero [26, Teorema 12] probaron que:

**Teorema 5.27.** *La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C_2$ -determinada.*

En 2009, A Illanes, D. Herrera, M. López y F. Macías [41, Teorema 3.1] y [26, Teorema 13] probaron que:

**Teorema 5.28.** *Los elementos de  $\mathfrak{D}$  tienen hiperespacio único  $C_2(X)$ .*

En 2010, G. Acosta, D. Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero [4, dentro de las demostaciones de los Teorema 3.21 y Teorema 5.1] probaron que:

**Teorema 5.29.** *La clase  $\mathfrak{LD}$  sin arcos ni curvas cerradas simples es  $C$ -determinada.*

En 2010, G. Acosta, D. Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero [4, dentro de las demostaciones de los Teorema 3.21 y Teorema 5.1] probaron que:

**Teorema 5.30.** *La clase  $\mathfrak{LD}$  sin arcos ni curvas cerradas simples es  $C$ -cerrada.*

En 2010, G. Acosta, D. Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero [4, Corolario 5.2] probaron que:

**Teorema 5.31.** *Si  $X \in \mathfrak{LD}$  y  $X$  no es un arco y no es una curva cerrada simple, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 2011, D. Herrera y F. Macías [34, Teorema 5.4] probaron que:

**Teorema 5.32.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ . Los elementos de  $\mathfrak{LD}$  tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [20, Teorema 29 y Teorema 35] probaron que:

**Teorema 5.33.** *Para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . La clase de los continuos casi enrejados y localmente conexos es  $C_n$ -determinada.*

En 2013, R. Hernández G., A. Illanes y V. Martínez de la Vega [20, Teorema 30] probaron que:

**Teorema 5.34.** *La clase de los continuos casi enrejados y localmente conexos que no son arcos es  $C$ -determinada.*

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [20, Teorema 37] probaron que:

**Teorema 5.35.** *Los continuos enrejados  $X$  que no son un arco ni curva cerrada simple, tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [20, Teorema 6] probaron que:

**Teorema 5.36.** *La clase de los continuos enrejados contiene las siguientes clases:*

- (a) *gráficas finitas;*
- (b) *clase  $\mathfrak{D}$ ;*
- (c) *clase  $\mathfrak{LD}$ .*

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [20, Teorema 37] probaron que:

**Teorema 5.37.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Los continuos enrejados tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

Observe cómo por el Teorema 5.36, el Teorema 5.37 es una generalización de los resultados que se conocían antes del año 2013 concernientes a la clase de las gráficas finitas, la clase  $\mathfrak{D}$  y la clase  $\mathfrak{LD}$ .

## 6 El $n$ -ésimo hiperespacio de $X$ , $F_n(X)$

En 2002, A. Illanes [39, Teoremas 1 y 8] probó que:

**Teorema 6.1.** *La clase de las dendritas es  $F_2$ -cerrada.*

En 2006, E. Castañeda y A. Illanes [10, Corolario 5.8] probaron que:

**Teorema 6.2.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase de las gráficas finitas es  $F_n$ -determinada.*

Estos autores también probaron (véase [10, Corolario 3.5]) que:

**Teorema 6.3.** *La clase de las gráficas finitas es  $F_n$ -cerrada, para algún  $n \in \mathbb{N}$ .*

En 2006, E. Castañeda y A. Illanes [10, Corolario 5.9] probaron que:

**Teorema 6.4.** *Si  $n \in \mathbb{N}$ . Las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2009, G. Acosta, R. Hernández y V. Martínez de la Vega [3, Teorema 5.2] probaron que:

**Teorema 6.5.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase  $\mathfrak{D}$  es  $F_n$ -cerrada.*

En 2009, D. Herrera, M. López y F. Macías [29, Teorema 3.5] probaron que:

**Teorema 6.6.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase  $\mathfrak{D}$  es  $F_n$ -determinada.*

En 2009, G. Acosta, R. Hernández, V. Martínez de la Vega, D. Herrera, M. López y F. Macías [3, Teorema 5.2] y [29, Teorema 3.7] probaron:

**Teorema 6.7.** *Si  $n \in \mathbb{N}$ . Los elementos de la clase  $\mathfrak{D}$  tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2009, A. Illanes y J. M. Martínez-Montejano [45, Teorema 3.1] probaron el siguiente resultado.

**Teorema 6.8.** *Si  $X$  es una compactación métrica del  $[0, \infty)$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_2(X)$ .*

En 2009, A. Illanes y J. M. Martínez-Montejano [45, Teorema 4.1] probaron el siguiente resultado.

**Teorema 6.9.** *Si  $X$  es una compactación métrica del  $[0, \infty)$  y  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2009, A. Illanes y J. M. Martínez-Montejano [45, Teorema 5.6] probaron el siguiente resultado.

**Teorema 6.10.** *Si  $X$  es una compactación métrica del  $[0, \infty)$  y el residuo  $R_X$  de  $X$  es un ANR, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_3(X)$ .*

En 2012, D. Herrera, F. Macías y F. Vázquez [35, Corolario 4.4] probaron que:

**Teorema 6.11.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3\}$ . Los continuos localmente conexos y casi enrejados tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2013, R. Hernández, Alejandro Illanes y V. Martínez de la Vega [22, Corolario 6] probaron que:

**Teorema 6.12.** *Si  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$ . Los continuos alambrados tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2015, L. Guerrero-Méndez, D. Herrera, M. López y F. Macías [19, Teorema 3.10] probaron que:

**Teorema 6.13.** *Para cada  $n \in \{2, 3\}$ . La clase de los continuos enrejados es  $F_n$ -cerrada.*

En 2015, L. Guerrero-Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. López y F. Macías-Romero [19, Teorema 3.11] probaron que:

**Teorema 6.14.** *Si  $n \in \{2, 3\}$ . Los continuos enrejados tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2015, L. Guerrero-Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. López y F. Macías-Romero [19, Corolario 3.12] probaron que:

**Teorema 6.15.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase de los continuos enrejados tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2016, D. Herrera-Carrasco, M. López y F. Macías-Romero [31, Teorema 4.8] probaron que:

**Teorema 6.16.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ . Los continuos localmente conexos y casi enrejados  $X$  tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2019, V. Córdova-Salazar, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero [13, Teorema 3.10] probaron que:

**Teorema 6.17.** *La clase de los continuos casi enrejados y localmente conexos  $X$  tiene hiperespacio único  $F_3(X)$ .*

En 2023, David Maya [13, Teorema 3.10] demostró que:

**Teorema 6.18.** *Para cada  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 5$ . La clase de las dendritas universales estandar  $D_m$  tienen hiperespacio único  $F_2(X)$*

## 7 El $(n, m)$ -ésimo hiperespacio suspensión de $X$ , $HS_m^n(X)$

En 2004, R. Escobedo, M. López y S. Macías [18, Teorema 8.2] probaron que:

**Teorema 7.1.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles es  $HS$ -cerrada.*

En 2004, R. Escobedo, M. López y S. Macías [18, Teorema 8.5] probaron que:

**Teorema 7.2.** *Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único  $HS(X)$ .*

En 2006, S. Macías [55, Teorema 7.1] demostró que:

**Teorema 7.3.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único  $HS_n(X)$ .*

En 2006, S. Macías y S. B. Nadler, Jr. [56, Teorema 3.2] demostraron que:

**Teorema 7.4.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase de las gráficas finitas es  $HS_n$ -cerrada.*

En 2014, D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero y F. Vázquez-Juárez [28, Teorema 3.2] probaron que:

**Teorema 7.5.** *Si  $n \in \mathbb{N}$ . Las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $HS_n(X)$ .*

En 2015, D. Herrera, M. López y F. Macías en [30, Teorema 3.4] demostraron:

**Teorema 7.6.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Los continuos enrejados tienen hiperespacio único  $HS_n(X)$ .*

En 2018, D. Herrera, M. López y F. Macías en [32, Teorema 3.6] demostraron:

**Teorema 7.7.** *Para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . La clase de los continuos localmente conexos y casi enrejados es  $HS_n$ -determinada.*

En 2018, J. G. Anaya, D. Maya y F. Vázquez-Juárez en [5, Teorema 3.3] probaron:

**Teorema 7.8.** *Para cada  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n \leq m$ . La clase de las gráficas finitas es  $HS_m^n$ -cerrada.*

En 2018, J. G. Anaya, D. Maya y F. Vázquez-Juárez en [5, Teorema 3.6] probaron:

**Teorema 7.9.** *Para cada  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$ . La clase de las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $HS_m^n(X)$ .*

Recientemente, en 2023, Gerardo Hernández-Valdez, David Herrera-Carrasco, M. López y Fernando Macías-Romero [5, Teorema 3.6] han demostrado que:

**Teorema 7.10.** *Para cada  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$ . La clase de los continuos enrejados tienen hiperespacio único  $HS_m^n(X)$ .*

Con respecto al  $n$ -ésimo pseudo hiperespacio suspensión de un continuo  $X$  denotado por  $PHS_n(X)$ . En 2018, Ulises Morales-Fuentes [61, Teorema 5.7] probó:

**Teorema 7.11.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase de las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $PHS_n(X)$ .*

Por su parte, Antonio Libreros-López, Fernando Macías-Romero y David Herrera-Carrasco [47, Teorema 4.3] probaron que:

**Teorema 7.12.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase de los continuos enrejados es  $PHS_n$ -cerrada.*

En 2022, Antonio Libreros-López, Fernando Macías-Romero y David Herrera-Carrasco [47, Teorema 4.10] probaron que:

**Teorema 7.13.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase de los continuos enrejados tienen hiperespacio único  $PHS_n(X)$ .*

## 8 El hiperespacio $\mathcal{C}_1^n(X)$ de un continuo $X$

En 2022, Sergio Macías y Ulises Morales-Fuentes [58, Teorema 5.6 y Teorema 5.14] demostraron lo siguiente:

**Teorema 8.1.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . Si  $X$  es un arco o una curva cerrada simple, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $\mathcal{C}_1^n(X)$ .*

**Teorema 8.2.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . La clase de las gráficas finitas tienen único espacio cociente  $\mathcal{C}_1^n(X)$ .*

## 9 El $n$ -ésimo producto simétrico suspensión de $X$ , $SF_n(X)$

En 2022, Germán Montero-Rodríguez, David Herrera-Carrasco, María de J. López y Fernando Macías-Romero [60, Lema 2.8, Teorema 3.1, Teorema 3.3 y Teorema 3.8] demostraron los siguientes resultados:

**Teorema 9.1.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ . La clase de los continuos casi enrejados es  $SF_n$ -cerrada.*

**Teorema 9.2.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ . La clase de las gráficas finitas es  $SF_n$ -cerrada.*

**Teorema 9.3.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . Si  $X$  es un arco o una curva cerrada simple, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $SF_n(X)$ .*

**Teorema 9.4.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 4$ . La clase de las gráficas finitas tiene hiperespacio único  $SF_n(X)$ .*

En 2024, Antonio Libreros-López, David Herrera-Carrasco, María de J. López y Fernando Macías-Romero [27, Lema 3.8 y Teorema 6.5] han demostrado que:

**Teorema 9.5.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . La clase de las gráficas finitas con algún punto de ramificación es  $SF_n$ -cerrada.*

**Teorema 9.6.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . La clase de las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $SF_n(X)$ .*

## 10 Continuos $X$ con hiperespacio no único $\mathcal{H}(X)$

Como mencionamos en un principio, para demostrar que una clase de continuos tenga hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ , debemos demostrar que la clase sea  $\mathcal{H}$ -determinada y  $\mathcal{H}$ -cerrada. La demostración de estas dos propiedades garantiza la unicidad del hiperespacio  $\mathcal{H}(X)$ . Sin embargo, si la propiedad de ser  $\mathcal{H}$ -determinada falla, podemos concluir que la clase de continuos no tienen hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ . En esta sección enunciaremos varias clases de continuos conocidas que no son  $\mathcal{H}$ -determinada.

En 1999, Alejandro Illanes [36, Teorema 2 y el Ejemplo 3] demostró que existen continuos encadenables  $X$  y  $Y$  no homeomorfos tales que sus respectivos hiperespacios de subcontinuos  $C(X)$  y  $C(Y)$  son homeomorfos. Así, demostró que la clase de los continuos encadenables no es  $C$ -determinada.

En [37] se demostró que la clase de los abanicos no es  $C$ -determinada.

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [20, Teorema 20] probaron que:

**Teorema 10.1.** *Si  $n \in \mathbb{N}$ . Los continuos localmente conexos que no son casi enrejados no tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [20, Teorema 22] probaron que:

**Teorema 10.2.** *Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $X$  un continuo localmente conexo y casi enrejado. Si existe un subconjunto cerrado  $R$  de  $\mathcal{P}(X)$  y conjuntos abierto, no vacíos, ajenos por pares  $U_1, \dots, U_{n+1}$  tales que*

(a)  $X \setminus R = U_1 \cup \dots \cup U_{n+1}$  y

(b) *para cada  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $R \subset cl_X(U_i)$ , entonces  $X$  no tiene hiperespacio único  $C_m(X)$  para cada  $m \leq n$ .*

En 2022, Antonio Libreros-López, Fernando Macías-Romero y David Herrera-Carrasco [47, Teorema 5.3 y Teorema 5.5] demostraron los siguientes resultados:

**Teorema 10.3.** *Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $X$  un continuo casi enrejado localmente conexo. Si existe un subconjunto cerrado y contráctil  $R$  de  $\mathcal{P}(X)$  y subconjuntos abiertos  $U_1, \dots, U_{n+1}$  de  $X$  ajenos dos a dos tales que*

$$(a) X \setminus R = U_1 \cup \cdots \cup U_{n+1} \text{ y}$$

$$(b) \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n+1\}, R \subset \text{cl}_X(U_i),$$

entonces para cada  $m \leq n$ ,  $X$  no tiene hiperespacio único  $PHS_m(X)$ .

**Teorema 10.4.** *Sea  $X$  un continuo localmente conexo que no es casi enrejado con métrica convexa  $d$ . Si existen  $p \in \mathcal{P}(X)$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $B_d(2\varepsilon, p) \subset \mathcal{P}(X)$  y  $C_d(\varepsilon, p)$  es contráctil, entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  no tiene hiperespacio único  $PHS_n(X)$ .*

En 2023, Gerardo Hernández-Valdez, David Herrera-Carrasco, María de J. López y Fernando Macías-Romero [21, Teorema 7.1, Teorema 7.3 y Teorema 7.4] probaron que:

**Teorema 10.5.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo contractil sin arcos libres y  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$ , entonces  $X$  no tiene hiperespacio único  $HS_m^n(X)$ .*

**Teorema 10.6.** *Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $X$  un continuo casi enrejado que es una dendrita. Si existe un subconjunto cerrado y contráctil  $R$  de  $\mathcal{P}(X)$  y subconjuntos abiertos  $U_1, \dots, U_{n+1}$  de  $X$  ajenos dos a dos tales que*

$$(a) X \setminus R = U_1 \cup \cdots \cup U_{n+1} \text{ y}$$

$$(b) \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n+1\}, R \subset \text{cl}_X(U_i),$$

entonces para cada  $m \leq l \leq n$ ,  $X$  no tiene hiperespacio único  $HS_m^l(X)$ .

**Teorema 10.7.** *Sea  $X$  una dendrita. Si  $X$  no es casi enrejado, entonces para cada  $m, n \in \mathbb{N}$ , con  $m \geq n$ ,  $X$  no tiene hiperespacio único  $HS_m^n(X)$ .*

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los arbitros el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo. Las sugerencias dieron como resultado la calidad de este material.

## Bibliografía

- [1] G. Acosta, *Continuos con hiperespacio único*, Tesis de Doctorado en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, D. F. (1999).
- [2] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace*, Lecture notes in pure and applied mathematics 230, 33–49, Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [3] G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glasnik Matemacki Ser. III 44 (2009) no. 1, 195–210.
- [4] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique hyperspace  $C(X)$* , Topology Appl. 157 (2010), 2069–2085.
- [5] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace  $HS_m^n(X)$  for a finite graph  $X$  is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.
- [6] J. Angoa, A. Contreras, M. de J. López, *Introducción a la unicidad de hiperespacios de continuos, una visión categórica*, Capítulo 4 en Topología y sus aplicaciones 6. Editores J. Angoa, R. Escobedo, M. Ibarra C., Dirección General de Publicaciones, BUAP, 2018.
- [7] F. Barragán, *On the  $n$ -fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. 157 (2010), 597–604.
- [8] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875–882.
- [9] J. Camargo, S. Macías, *Quotients of  $n$ -fold hyperspaces*, Topology Appl. 197 (2016), 154–166.
- [10] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.
- [11] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, *Inducible mappings between hyperspaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46 (1998), 5–9.
- [12] J. J. Charatonik, *Recent research in hyperspaces theory*, Extracta Mathematicae 18 (2) (2003), 235–262.

- [13] V. Córdova-Salazar, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product*, *Topology Appl.* 268 (2019), doi:<https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.106917>.
- [14] D. W. Curtis, R. M. Schori,  $2^X$  and  $C(X)$  are homeomorphic to the Hilbert cube, *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), 927–931.
- [15] D. W. Curtis, R. M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, *Fund. Math.* 101 (1978), 19–38.
- [16] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*, I, *Fund. Math.* 62 (1968), 265–286.
- [17] C. Eberhart and S. Nadler, Jr., *Hyperspaces of cones and fans*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 77 (1979), 279–288.
- [18] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, *Topology Appl.* 138 (2004), 109–124.
- [19] L. A. Guerrero-Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, *Topology Appl.* 191 (2015), 16–27.
- [20] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, *Rocky Mt. J. Math.* 43 (5) (2013), 1583–1624.
- [21] G. Hernández-Valdez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías Romero, *Uniqueness of the  $(n, m)$ -fold hyperspace suspension for continua*, *Topology Appl.* 325 (2023), 108385.
- [22] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of hyperspaces*, *Rocky Mt. J. Math.* 45 (1) (2015), 213–236.
- [23] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products*, *Topology Appl.* 160, 13 (2013), 1577–1587.
- [24] D. Herrera-Carrasco, *Hiperespacios de dendritas*, Tesis de Doctorado en matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2005.

- [25] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math. 33 (3) (2007), 795–805.
- [26] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$* , Topology Appl. 156 (2009), 549–557.
- [27] D. Herrera-Carrasco, A. Libreros-López, M. de J. López y F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique second and third symmetric product suspension*, Topology Appl., 341 (2024) 108729.
- [28] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace  $HS_n(X)$* , Topology Proc. 44 (2014), 75–95.
- [29] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique symmetric products*, Topology Proc. 34 (2009), 175–190.
- [30] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique  $n$ -fold hyperspace suspension*, Topology Appl. 196 (2015), 652–667.
- [31] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, Topology Appl. 209 (2016), 1–13.
- [32] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique  $n$ -fold hyperspace suspension*, Houston J. Math., 44 (4) (2018), 1335–1365.
- [33] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topology Proc. 32 (2008), 321–337.
- [34] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topology Appl. 158 (2011), 244–251.
- [35] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, Journal of Mathematics Research 4(4) (2012), 1–9.

- [36] A. Illanes, *Chainable continua are not  $C$ -determined*, Topology and its Applications 98 (1999) 211–216.
- [37] A. Illanes, *Fans are not  $C$ -determined*, Colloquium Mathematicum, 81(1999) 299–308
- [38] A. Illanes, *The hyperspace  $C_2(X)$  for a finite graph  $X$  is unique*, Glasnik Mat. 37 (57) (2002), 347–363.
- [39] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace  $F_2(X)$* , J. P. Geometry and Topology 2 (1) (2002), 75–96.
- [40] A. Illanes, *Finite graphs  $X$  have unique hyperspaces  $C_n(X)$* , Topology Proc., 27 (2003), 179–188.
- [41] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$ , II*, Topology Proc. 34 (2009), 77–96.
- [42] A. Illanes, *Hereditarily indecomposable Hausdorff continua have unique hyperspaces  $2^X$  and  $C_n(X)$* , Publications de L’institut Mathématique. 89 (2011), 49–56.
- [43] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces*, Questions Answers Gen. Topology 30 (2012), 21–44.
- [44] A. Illanes, *Models of hyperspaces*, Topology Proc. 41 (2013), 39–64.
- [45] A. Illanes, J. M. Martínez-Montejano, *compactification of  $[0, \infty)$  with unique hyperspace  $F_n(X)$* , Glasnik Matematički, 44(64) (2009), 457–478.
- [46] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [47] A. Libreros-López, F. Macías-Romero, D. Herrera-Carrasco, *On the uniqueness of the  $n$ -fold pseudo-hyperspace suspension for locally connected continua*, Topology Appl. 312 (2022) 108053.
- [48] J. C. Macías, *On the  $n$ -fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, Glas. Mat. 43 (2008), 439–449.

- [49] S. Macías, *On  $C$ -determined continua*, Glasnik Matemacki, 32, No. 52 (1997), 259–262.
- [50] S. Macías, *Hereditarily indecomposable continua have unique hyperspace  $2^X$* , Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 5 (1999), no. 2, 415–418.
- [51] S. Macías, *On the hyperspaces  $C_n(X)$  of a continuum  $X$ , II*, Topology Proc., 25, (2000), 255–276.
- [52] S. Macías, *On the hyperspace  $C_n(X)$  of a continuum*, Topology Appl. 109 (2001), 237–256.
- [53] S. Macías, *On the  $n$ -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138 (2004), 125–138.
- [54] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 275, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2005.
- [55] S. Macías, *On the  $n$ -fold hyperspace suspension of continua, II*, Glasnik Mat. 41(61) (2006), 335–343.
- [56] S. Macías, S. B. Nadler, Jr., *Absolute  $n$ -fold hyperspace suspensions*, Colloq. Math. 105 (2006), 221–231.
- [57] S. Macías, S. B. Nadler Jr.,  *$n$ -fold hyperspace, cones, and products*, Topology Proc. 26 (2001–2002), 255–270.
- [58] S. Macías, U. Morales-Fuentes, *Graphs have unique quotient hyperspace  $C_1^n(X)$* , Topology Appl. 308 (2022), 107996.
- [59] Michael, E., *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152–182.
- [60] G. Montero-Rodríguez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López Toriz, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique  $n$ -fold symmetric product suspension*, Houston J. Math., 47 (2021), 20 pp.
- [61] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique  $n$ -fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 2019–233.

- [62] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [63] S. B. Nadler Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math. 5 (1979), 125–132.
- [64] R. M. Schori, J. E. West,  $2^I$  is homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 402–406.
- [65] R. M. Schori, J. E. West, *Hyperspaces of graphs are Hilbert cubes*, Pacific J. Math. 53 (1974), 239–251.
- [66] R. M. Schori, J. E. West, *The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube*, Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 217–235.
- [67] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.
- [68] Wojdysławski, M., *Sur la contractilité des hyperespaces des continus localement connexes*, Fund. Math. 30 (1938), 247–252.
- [69] M. Wojdysławski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fundamenta Mathematicae, 32 (1939), 184 – 192.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

leonardo.ramirezap@alumno.buap.mx  
dherrera@fcfm.buap.mx  
fmacias@fcfm.buap.mx

## Capítulo 4

# Caracterización del conjunto de Cantor y funciones de Whitney

David Herrera Carrasco<sup>1</sup>, Fernando Macías Romero<sup>1</sup>,  
Eiichi Matsushashi<sup>2</sup>, José Alberto Ortega Becerril<sup>1</sup>,  
David Herrera Carrasco<sup>1</sup>  
FCFM-BUAP<sup>1</sup>, Shimane University<sup>2</sup>

### Resumen

Este capítulo se encargará de proporcionar una caracterización del conjunto de Cantor, entendiendo el conjunto de Cantor como subespacio del intervalo cerrado  $[0, 1]$ , además de brindar una introducción a las funciones de Whitney.

## 1 Introducción

Una de las principales metas de alguien que estudia los continuos es construir funciones continuas entre continuos. Por ello, vamos a introducir una clase especial de funciones que nos ayudarán a proporcionar una caracterización apropiada, además de las definiciones pertinentes.

**Definición 1.1.** *Un continuo es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo contenido en algún espacio métrico.*

**Definición 1.2.** *Para un espacio métrico  $(X, d)$ . Sean,*

1.  $2^X = \{A \subset X : A \text{ es un subconjunto cerrado y no vacío en } X\}$ .
2.  $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$ .

3. Para cada  $\varepsilon > 0$  y para cada  $A$  en  $2^X$ ,

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para algùn } a \in A\}.$$

Ahora, para cada  $A, B \in 2^X$ , sea  $H_d : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$H_d(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A) \}.$$

A la métrica  $H_d$  se le conoce como la métrica de Hausdorff, la demostración de que  $H_d$  es en efecto una métrica se encuentra en (4.3) de [4, p.53]. El espacio  $2^X$  con la topología obtenida de  $H_d$  es llamado hiperespacio de  $X$ .

**Proposición 1.3.** Sea  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de espacios métricos compactos tal que  $X_{n+1} \subset X_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y sea

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Si  $U$  es un subconjunto abierto de  $X_1$  tal que  $X \subset U$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq N$ ,  $X_n \subset U$ . En particular, si para cada  $X_n \neq \emptyset$ , entonces  $X \neq \emptyset$  y por tanto es un espacio métrico compacto.

*Demostración.* Supongamos que para cada  $i = 1, 2, \dots$ , existe  $x_i$  en  $X_i \setminus U$ . Como  $X_1 \setminus U$  es un espacio métrico compacto, podemos asumir que la sucesión  $\{x_i\}_{i=1}^\infty$  converge a un punto  $p$  en  $X_1 \setminus U$ . Para cada  $k$ , se tiene que  $x_i$  pertenece a  $X_k$  para todo  $i \geq k$ . Por lo tanto,  $p$  esta en  $X_k$  para cada  $k$ . Esto es,  $p$  pertenece a  $X$ , lo cual contradice nuestra suposición, pues

$$X \subset U \text{ y } p \notin U.$$

Para probar la segunda parte de nuestra proposición suponemos que  $X = \emptyset$ , podemos tomar  $U = \emptyset$ . Se puede ver directamente que usando la primera parte del teorema implica que  $X_N = \emptyset$ , lo que es una contradicción.  $\square$

**Definición 1.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $\varepsilon > 0$ . Una  $(d, \varepsilon)$  –cadena en  $X$  es un subconjunto finito no vacío de  $X$  junto con una indexación,  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , tal que

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \text{ para cada } i = 1, \dots, n - 1.$$

Decimos que una  $(d, \varepsilon)$  – cadena  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , con  $p = x_1$  y  $q = x_n$  va de  $p$  a  $q$  (cuando el orden para la indexación no es importante) o que une a  $p$  y  $q$ .

Se dice que un subconjunto  $Z$  de  $X$  está  $(d, \varepsilon)$  – encadenado (con  $\varepsilon > 0$  fijo) siempre que para cualesquiera dos puntos de  $Z$  puedan unirse mediante una  $(d, \varepsilon)$  – cadena en  $Z$ .

Un subconjunto de  $X$  que es  $(d, \varepsilon)$  – encadenado para cada  $\varepsilon > 0$  se dice que está  $d$  – bien encadenado.

**Lema 1.5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, para cualquier  $Z \subset X$  y  $\varepsilon > 0$ , definimos

$$\mathfrak{C}(Z, \varepsilon) = \{x \in X : \text{hay una } (d, \varepsilon)\text{-cadena en } X \text{ de algún punto de } Z \text{ a } x \}.$$

Entonces  $\mathfrak{C}(Z, \varepsilon)$  es un subconjunto abierto y cerrado de  $X$ .

*Demostración.* Fijemos  $\varepsilon > 0$ , sea  $x$  en  $\mathfrak{C}(Z, \varepsilon)$  entonces existe una  $(d, \varepsilon)$ –cadena en  $X$  de algún  $z$  a  $x$ , es decir existe un conjunto finito  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tal que  $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$  para  $i$  en  $\{1, \dots, n - 1\}$  y  $x_1 = x$  y  $x_n = z$ . Consideremos  $B(x, \varepsilon)$  y notemos que

$$x \in B(x, \varepsilon) \subset \mathfrak{C}(Z, \varepsilon).$$

Y esto prueba que es un subconjunto abierto. Ahora para ver que es un subcerrado tomemos  $x$  en  $\mathfrak{C}(Z, \varepsilon)$ , entonces  $B(x, \varepsilon) \cap \mathfrak{C}(Z, \varepsilon) \neq \emptyset$ , así existe  $y \in B(x, \varepsilon) \cap \mathfrak{C}(Z, \varepsilon)$ , entonces existe un conjunto finito  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tal que  $x_1 = y$  y  $x_n = z$  una cadena que une a  $y$  y  $z$ , basta considerar el conjunto  $\{x, x_1, \dots, x_n\}$  para ver que  $x$  pertenece a  $\mathfrak{C}(Z, \varepsilon)$ .  $\square$

**Definición 1.6.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto con topología  $T$ , para cada  $U \in T$ . Sean

1.  $\Gamma(U) = \{A \in 2^X : A \subset U\}$ .
2.  $\Lambda(U) = \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}$ .
3. Para cada  $U_1, \dots, U_n \in T$  con  $n < \infty$ . Sea

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}.$$

**Lema 1.7.** *Las siguientes relaciones que aparecen en (1) – (3) se cumplen entre los conjuntos descritos en 1.6, es decir;*

$$(1) \Gamma(U) = \langle U \rangle \text{ y } \Lambda(U) = \langle X, U \rangle.$$

$$(2) \langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left[ \Gamma \left( \bigcup_{i=1}^n U_i \right) \right] \cap \left[ \bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i) \right].$$

$$(3) \text{ Sean } U = \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } V = \bigcup_{i=1}^m V_i, \text{ entonces}$$

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \dots, V_m \rangle = \langle V \cap U_1, \dots, V \cap U_n, U \cap V_1, \dots, U \cap V_m \rangle.$$

*Demostración.* La demostración es clara usando la definición 1.6. □

**Teorema 1.8.** *Sea  $X$  un espacio métrico compacto con métrica  $d$  y topología  $T$ . Sean (usando la notación en 1.6):*

$$1. \mathcal{C} = \{ \langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_i \in T \text{ para cada } i = 1, \dots, n \}.$$

$$2. \mathcal{P} = \{ \Gamma(U) : U \in T \} \cup \{ \Lambda(U) : U \in T \}.$$

*Entonces:  $\mathcal{C}$  es una base para la topología  $T_{H_d}$  obtenida por la métrica de Hausdorff para  $2^X$ , y  $\mathcal{P}$  es una subbase para tal topología.*

*Demostración.* Sean  $U_1, U_2 \in \mathcal{C}$  y  $x \in U_1 \cap U_2$ , así  $U_1 = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$  con  $V_i \in T: \forall i \in \{1, \dots, m\}$ , y  $U_2 = \langle W_1, \dots, W_s \rangle$  con  $W_i \in T: \forall i \in \{1, \dots, s\}$ . Sean

$$V = \bigcup_{i=1}^m V_i \text{ y } W = \bigcup_{i=1}^s W_i.$$

Como  $x \in U_1 \cap U_2 = \langle V \cap W_1, \dots, V \cap W_s, W \cap V_1, \dots, W \cap V_m \rangle \in \mathcal{C}$  se tiene que

$$x \in U = U_1 \cap U_2 \subset U_1 \cap U_2.$$

Luego, para cada  $A \in 2^X$  existe  $V \in \mathcal{C}$  tal que  $A \in V$ , pues  $A \in 2^X = \langle X \rangle$ , así que basta considerar  $V = \langle X \rangle \in \mathcal{C}$ . Así  $\mathcal{C}$  es una base para  $T_v$  que es la topología generada por  $\mathcal{C}$ . Ahora sea

$$[\mathcal{P}] = \left\{ \bigcap \mathcal{L} : \mathcal{L} \text{ es finito y } \mathcal{L} \subset \mathcal{P} \right\}.$$

Notemos que  $\mathcal{C} \subset [\mathcal{P}]$ , pues si  $U \in \mathcal{C}$  entonces

$$U = \langle V_1, \dots, V_n \rangle = [\Gamma(\bigcup_{i=1}^n V_i)] \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(V_i)] \in [\mathcal{P}].$$

Se cumple además por 2 de 1.7 que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ , por otro lado, sea  $Y \in [\mathcal{P}]$  entonces  $Y = \bigcap \mathcal{L}$  donde  $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$  y  $\mathcal{L}$  es finito.

1. Si cada elemento de  $\mathcal{L}$  es de la forma  $\Gamma(U)$  con  $U \in T$ , entonces

$$\Gamma(U) \cap \Gamma(W) = \langle U \rangle \cap \langle W \rangle = \langle U \cap W \rangle \in \mathcal{C}.$$

2. Si cada elemento de  $\mathcal{L}$  es de la forma  $\Lambda(U)$  con  $U \in T$ , entonces

$$\Lambda(U) \cap \Lambda(W) = \langle X, U \rangle \cap \langle X, W \rangle \in \mathcal{C}.$$

3. Si cada elemento de  $\mathcal{L}$  es de la forma  $\Gamma(U)$  o  $\Lambda(W)$ , entonces

$$\Gamma(U) \cap \Lambda(W) = \langle U \rangle \cap \langle X, W \rangle \in \mathcal{C}.$$

Así en cualquiera de los casos  $Y \in \mathcal{C}$  es decir  $[\mathcal{P}] = \mathcal{C}$ . Así  $\mathcal{P}$  es una subbase para  $T_v$ . Ahora probemos que  $T_v = T_H$ . Definimos para  $A$  en  $2^X$  y  $\varepsilon > 0$

$$B_H(A, \varepsilon) = \{K \in 2^X : H_d(A, K) < \varepsilon\},$$

$$d(L, K) = \inf\{d(x, y) : x \in L \text{ y } y \in K\}.$$

Mostremos primero que  $T_v \subset T_H$ . Fijemos  $U$  en  $T$  tal que  $U \neq X$ . Sea  $A \in \Gamma(U)$  entonces definimos

$$\varepsilon = d(A, X \setminus U) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in X \setminus U\}.$$

Sea  $K \in B_H(A, \varepsilon)$  entonces  $H_d(A, K) < d(A, X \setminus U)$  y probemos que  $K \subset U$ . Sea  $k \in K$  entonces existe  $a \in A$  tal que

$$d(a, k) \leq H_d(A, K) < d(A, X \setminus U).$$

Si  $k \notin U$  entonces  $k \in X \setminus U$  así, tendríamos que

$$d(a, k) < d(A, X \setminus U) \text{ y } d(A, X \setminus U) \leq d(a, k).$$

Lo cual es una contradicción. Así  $K \subset U$  y por lo tanto  $K \in \Gamma(U)$  eso implica que  $B_H(A, \varepsilon) \subset \Gamma(U)$ . Ahora si  $A \in \Lambda(U)$  entonces  $A \cap U \neq \emptyset$ . Sea  $p \in A \cap U$  y definimos

$$\varepsilon = d(\{p\}, X \setminus U) = \inf\{d(p, b) : b \in X \setminus U\}.$$

Ahora sea  $K \in B_H(A, \varepsilon)$  y probemos que  $K \cap U \neq \emptyset$ . Probemoslo por contradicción, supongamos que  $K \subset X \setminus U$ , como  $p \in A$  entonces existe  $k \in K$  tal que

$$d(p, k) \leq H_d(A, K) < d(\{p\}, X \setminus U).$$

Pero  $p \in \{p\}$  y  $k \in X \setminus U$  entonces  $d(\{p\}, X \setminus U) \leq d(p, k)$  lo cual es una contradicción. Así  $K \cap U \neq \emptyset$  es decir  $K \in \Lambda(U)$  y por lo tanto  $B_H(A, \varepsilon) \subset \Lambda(U)$ , pero eso nos dice que  $\Gamma(U), \Lambda(U) \in T_H$  para  $U \in T$  con  $U \neq X$ , más aún  $\Gamma(X) = \Lambda(X) = 2^X$  por lo tanto  $\mathcal{P} \subset T_H$  y eso implica que  $T_v \subset T_H$ . Para la siguiente contención basta probar que dada una  $H_d$ -bola  $B_H(A, \varepsilon)$  existen  $U_1, \dots, U_n$  abiertos no vacíos tales que

$$A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset B_H(A, \varepsilon).$$

Fijemos  $A \in 2^X$  y  $\varepsilon > 0$  para  $\frac{\varepsilon}{2}$  como  $A$  es precompacto, entonces, existen  $a_1, \dots, a_n \in A$  tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_d\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Definimos  $U_i = B_d\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , se sigue que  $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$  y  $\dim(U_i) < \varepsilon$ , Así sea  $K \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ , luego, por definición

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B_d\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ y } K \cap B_d\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Notemos que  $d(a_i, K) < \frac{\varepsilon}{2}$  es decir  $a_i \in N_d\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)$ .

Si  $x \in B_d\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  entonces  $d(x, a_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ , luego

$$d(x, k) \leq d(x, a_i) + d(a_i, k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

es decir

$$B_d(a_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset N_d(\frac{\varepsilon}{2}, K).$$

Luego

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_d(a_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset N_d(\varepsilon, K)$$

y por otro lado es claro que  $K \subset N_d(\varepsilon, K)$ . Así tenemos lo deseado. □

**Lema 1.9.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto, y sea  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  una sucesión en  $2^X$  convergente a  $A$  en  $2^X$ . Si para cada  $A_i$  es  $(d, \varepsilon_i)$  – encadenado donde  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$ , entonces  $A \in C(X)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es no conexo, entonces  $A$  se puede representar como la unión de dos subconjuntos cerrados en  $A$  ajenos y no vacíos digamos  $K$  y  $L$ . Ahora como  $X$  es normal entonces existen  $U$  y  $V$  subconjuntos abiertos de  $X$  y ajenos tales que  $K \subset U$ ,  $L \subset V$  y sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$ . De aquí obtenemos que  $A \in \langle U, V \rangle$  que es un abierto en  $2^X$ .

Como la sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  converge a  $A$  en  $2^X$ , entonces existe  $N$  tal que

$$(*) \quad A_i \in \langle U, V \rangle \text{ para todo } i \geq N.$$

Ahora sea

$$\delta = \inf\{d(x, y) : x \in \bar{U}, y \in \bar{V}\}.$$

Por la compacidad de  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  tenemos que  $\delta > 0$ . Como  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$ , existe  $K \geq N$  tal que  $\varepsilon_K < \delta$ , así por  $(*)$  tenemos que  $A_K \in \langle U, V \rangle$  entonces  $A_K \cap U \neq \emptyset$ ,  $A_K \cap V \neq \emptyset$  y además  $A_K \subset U \cup V$  pero  $A_K$  es  $(d, \varepsilon_K)$ -encadenado y  $\varepsilon_K < \delta$  por lo que existe un conjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $A_K$  tales que

$$x_1 \in A_K \cap U, x_n \in A_K \cap V, \quad d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon_K \text{ para toda } i = 1, 2, \dots, n - 1$$

Así

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon_K < \delta$$

notemos que  $x_1 \in \bar{U}$  y  $x_n \in \bar{V}$  se sigue que  $\delta \leq d(x_1, x_n)$  lo que es absurdo pues  $\varepsilon_K < \delta$ . □

**Teorema 1.10.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y sean  $A$  y  $B$  subconjuntos cerrados de  $X$ . Si ningún subconjunto conexo de  $X$  interseca a  $A$  y  $B$  (de manera equivalente, ninguna componente de  $X$  lo hace), entonces  $X = X_1 \cup X_2$  donde  $X_1$  y  $X_2$  son subconjuntos cerrados ajenos de  $X$  con  $A \subset X_1$  y  $B \subset X_2$ .*

*Demostración.* Supongamos que para cada  $i$  existe una  $(d, \frac{1}{2^i})$  cadena  $K_i$  en  $X$  que une un punto  $a_i \in A$  con un punto  $b_i \in B$ . Entonces existe una subsucesión  $\{K_{i_j}\}$  de  $\{K_i\}$  convergente a  $K$  en  $2^X$ , más aún  $K \in C(X)$  por 1.9. Ahora fijemos  $\varepsilon > 0$  y notemos que existe una subsucesión  $\{a_{i(j)}\} \rightarrow a \in A$ , como  $\{K_{i(j)}\} \rightarrow K$  y  $a_{i(j)} \in K_{i(j)}$  para cada  $j$ , existe  $k_i \in K$  tal que  $d(a_{i(j)}, k_i) < \frac{\varepsilon}{2}$  entonces

$$d(a, k_j) \leq d(a, a_{i(j)}) + d(a_{i(j)}, k_j) < \varepsilon.$$

Ya que  $K$  es un subconjunto cerrado se cumple que  $a \in K \cap A$ . Para ver que  $K \cap B \neq \emptyset$  es análogo, lo cuál es una contradicción, por lo tanto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathfrak{C}(A, \varepsilon) \cap B = \emptyset$ . Haciendo  $X_1 = \mathfrak{C}(A, \varepsilon)$  y  $X_2 = X - \mathfrak{C}(A, \varepsilon)$ , vemos que, usando 1.5, tenemos que  $X_1$  y  $X_2$  tienen las propiedades deseadas.  $\square$

**Definición 1.11.** *Sea  $(S, T)$  un espacio topológico no vacío. Sea  $\mathcal{D}$  una colección de subconjuntos no vacíos de  $S$ , ajenos dos a dos, tales que  $\bigcup \mathcal{D} = S$ . A la colección  $\mathcal{D}$  se le llama una partición de  $S$ . Si cada  $D \in \mathcal{D}$  es un subconjunto cerrado, entonces diremos que  $\mathcal{D}$  es una partición cerrada.*

*Definimos*

$$T(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \bigcup \mathcal{U} \in T\}.$$

*Podemos notar que  $T(\mathcal{D})$  es una topología para  $\mathcal{D}$ , y se le conoce como la topología de descomposición. Sea  $\pi : S \rightarrow \mathcal{D}$  la proyección natural o función proyección, definida en cada  $x \in S$  por*

$$\pi(x) = \text{el único } D \in \mathcal{D} \text{ tal que } x \in D.$$

*No es difícil notar que la topología de descomposición  $T(\mathcal{D})$  sobre  $\mathcal{D}$  es la topología más grande que hace continua a  $\pi$ . Véase Proposición 2.3 de [1].*

**Definición 1.12.** *Sea  $(S, T)$  un espacio topológico. Una partición  $\mathcal{D}$  de  $S$  es semicontinua superior (usc) si para cada  $D \in \mathcal{D}$  y  $U \in T$  tal que  $D \subseteq U$ , existe  $V \in T$  con  $D \subseteq V$  tal que si  $A \in \mathcal{D}$  y  $A \cap V \neq \emptyset$ , entonces  $A \subseteq U$ .*

**Definición 1.13.** Sean  $(X, T_1)$  y  $(Y, T_2)$  espacios topológicos. Una función  $F : X \rightarrow 2^Y$  es **semicontinua superior en un punto  $p$  en  $X$**  siempre que si  $U \in T_2$  tal que  $F(p) \subset U$ , entonces existe  $V \in T_1$  tal que  $p \in V$  y  $F(x) \subset U$  para cada  $x \in V$ . Se denota  $\text{usc}$  en  $p$ . Una función  $F : X \rightarrow 2^Y$  es **semicontinua superior** y se denota por  $\text{usc}$  siempre que  $F$  sea semicontinua superior en cada punto de  $X$ .

Notemos que existe una fuerte relación entre las funciones  $\text{usc}$  y las descomposiciones  $\text{usc}$ , así que para ver esta relación, presentemos el siguiente lema.

**Lema 1.14.** Consideremos  $\mathcal{D}$  una partición cerrada de un espacio topológico  $S$  y sea  $\pi : S \rightarrow \mathcal{D}$  la función natural, entonces  $\mathcal{D}$  es una descomposición  $\text{usc}$  si y solo si  $\pi$  como una función de  $S$  en  $2^S$  es  $\text{usc}$  en el sentido de 1.13.

*Demostración.* Sea  $(S, T)$  un espacio topológico y supongamos que  $\mathcal{D}$  es una descomposición  $\text{usc}$ . Como  $\mathcal{D}$  es cerrada entonces  $\mathcal{D} \subset 2^S$  entonces podemos considerar  $\pi : S \rightarrow 2^S$ . Sean  $p$  en  $S$  y  $U$  un abierto tal que  $\pi(p) \subset U$  es decir  $\pi(p) = D$  el único  $D \in \mathcal{D}$  tal que  $p$  esta en  $D$  entonces,

$$p \in D \subset U.$$

Como  $U$  es abierto y  $\mathcal{D}$  es una descomposición  $\text{usc}$  entonces existe  $V$  un subconjunto abierto,  $D \subset V$  tal que si  $A \in \mathcal{D}$  y  $A \cap V \neq \emptyset$  entonces  $A \subset U$ . Como  $p$  esta en  $D$  entonces  $p$  esta en  $V$ . Tomemos  $x$  en  $V$  entonces

$$F(x) = D' \text{ el único } D' \text{ tal que } x \in D'$$

Como  $x \in D' \cap V$  entonces  $D' \subset U$ , entonces  $\pi(x) \subset U$ . Ahora si suponemos que  $\pi$  es  $\text{usc}$ , consideremos  $D \in \mathcal{D}$ ,  $U$  un subconjunto abierto y  $D \subset U$ . Notemos que para cada  $p \in D$  se cumple que  $\pi(p) \subset U$  y como  $\pi$  es  $\text{usc}$  existe  $V_p$  un subconjunto abierto tal que

$$p \in V_p \text{ y } \pi(x) \subset U \text{ para cada } x \in V_p.$$

Sea  $V = \bigcup V_p$  es el abierto que buscamos. □

Presentemos ahora unos resultados sobre funciones semicontinuas superior

**Proposición 1.15.** Una función  $F : X \rightarrow 2^Y$  es  $\text{usc}$  si y solo si  $\{x \in X : F(x) \subset U\}$  es abierto en  $X$  para todo  $U$  abierto en  $Y$  o equivalentemente,  $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$  es cerrado en  $X$  para todo  $C$  cerrado en  $Y$ .

*Demostración.* Supongamos que  $F$  es usc. Sea  $U$  abierto en  $Y$  y tomemos  $p$  en  $\{x \in X : F(x) \subset U\}$ , como  $F$  es usc en  $p$  y  $U$  es abierto en  $Y$  tal que  $F(p) \subset U$ , entonces existe un  $V$  abierto en  $X$  tal que  $p$  esta en  $V$  y  $F(x) \subset U$  para todo  $x$  elemento en  $V$ , entonces

$$p \in V \subset \{x \in X : F(x) \subset U\}.$$

Por lo tanto,  $\{x \in X : F(x) \subset U\}$  es abierto. Ahora supongamos que  $\{x \in X : F(x) \subset U\}$  es abierto en  $X$  para todo  $U$  abierto en  $Y$  y sean  $p$  en  $X$ ,  $U$  subconjunto abierto en  $Y$  tal que  $F(p) \subset U$  entonces  $p$  pertenece a  $\{x \in X : F(x) \subset U\}$  y por hipotesis existe  $V$  abierto en  $X$  tal que

$$p \in V \subset \{x \in X : F(x) \subset U\}.$$

Por lo tanto para todo  $x \in V$ ,  $F(x) \subset U$ , esto completa la primera parte de la prueba. Ahora notemos que si  $\{x \in X : F(x) \subset U\}$  es un subconjunto abierto en  $X$  para todo  $U$  subconjunto abierto en  $Y$ , entonces  $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$  es un subconjunto cerrado en  $X$  para todo  $C$  subconjunto cerrado en  $Y$ . Consideremos  $C$  subconjunto cerrado en  $X$ , entonces  $Y \setminus C$  es un subconjunto abierto en  $Y$  y por hipotesis se cumple que  $\{x \in X : F(x) \subset X \setminus C\}$  es un subconjunto abierto en  $X$  y por lo tanto

$$X \setminus \{x \in X : F(x) \subset X \setminus C\} = \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}.$$

Es un subconjunto cerrado en  $X$ . □

**Proposición 1.16.** *Sea  $f$  una función suprayectiva de  $X$  a  $Y$  tal que  $f^{-1}(y)$  es cerrado en  $X$  para cada  $y \in Y$ . Definimos  $F : Y \rightarrow 2^X$  por  $F(y) = f^{-1}(y)$  para cada  $y \in Y$ . Entonces  $f$  envía subconjuntos cerrados de  $X$  en subconjuntos cerrados de  $Y$  si y solo si  $F$  es usc.*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  envía subconjuntos cerrados de  $X$  en subconjuntos cerrados en  $Y$ . Sea  $C$  un conjunto cerrado en  $X$  y consideremos  $A = \{x \in Y : \overline{F(x)} \cap C \neq \emptyset\}$ , entonces para probar que  $A$  es cerrado en  $Y$  tomemos  $p$  en  $\overline{A}$  y supongamos que  $p$  no pertenece a  $A$  es decir

$$p \in Y \setminus A \text{ y esto nos dice que } F(p) \cap C = \emptyset,$$

o en otras palabras  $f^{-1}(p) \cap C = \emptyset$  y esto implica que  $p \notin f(C)$  entonces  $p \in Y \setminus f(C)$  es cuál es un subconjunto abierto por hipótesis, entonces como

$$p \in \overline{A}, \quad A \cap (Y \setminus f(C)) \neq \emptyset.$$

Así existe  $x$  en  $A \cap Y \setminus f(C)$  es decir  $F(x) \cap C \neq \emptyset$  y como  $F$  esta definida se sigue que  $f^{-1}(x) \cap C \neq \emptyset$  así existe  $z$  en  $C$  tal que  $f(z) = x$  es decir

$$x \in f(C) \qquad \qquad \qquad \text{y} \qquad \qquad \qquad x \in Y \setminus f(C).$$

Lo cuál es una contradicción, por lo tanto  $A$  es un subconjunto cerrado de  $Y$  y por 1.15  $F$  es usc. Ahora para probar la otra parte del teorema supongamos que  $F$  es usc, y consideremos  $C$  un subconjunto conjunto cerrado en  $X$  y vamos a probar que  $f(C)$  es un subconjunto cerrado en  $Y$ . Sea  $y$  en  $\overline{f(C)}$  y supongamos por contradicción que  $y \notin f(C)$ , entonces para todo  $x$  elemento de  $C$ ,  $f(x) \neq y$  y eso implica que  $f^{-1}(y) \cap C = \emptyset$ , entonces  $y \notin A$ , es decir,  $y \in Y \setminus A$  el cuál es un subconjunto abierto por hipótesis y por 1.15 y como  $y$  pertenece a  $\overline{f(C)}$  se sigue que  $f(C) \cap Y \setminus A \neq \emptyset$ , así existe  $z \in f(C) \cap Y \setminus A$ , por lo tanto, existe  $w \in C$  tal que  $f(w) = z \in Y \setminus A$ , de aquí se sigue  $w \in f^{-1}(z) \cap C$ , se concluye  $z \in A$  lo cuál es una contradicción.  $\square$

**Proposición 1.17.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos compactos y  $F : X \rightarrow 2^Y$  una función, y  $p \in X$ .  $F$  es usc en  $p$  si y solo si, para cualquier sucesión  $x_i \rightarrow p$  cuando  $i \rightarrow \infty$ ,  $\limsup F(x_i) \subset F(p)$ .

*Demostración.* Supongamos que para cualquier sucesión  $x_i \rightarrow p$  cuando  $i \rightarrow \infty$  se cumple que  $\limsup F(x_i) \subset F(p)$ . Sea  $U$  un abierto tal que  $F(p) \subset U$  y supongamos por contradicción que  $F$  no es usc en  $p$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideremos  $B(p, \frac{1}{n})$ , por hipótesis existe  $x_n$  en  $B(p, \frac{1}{n})$  tal que  $F(x_n) \not\subset U$ , notemos además que  $x_n \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$  por hipótesis tenemos que  $\limsup F(x_n) \subset F(p)$ , sin embargo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $y_n$  en  $F(x_n) \setminus U$ , es decir  $y_n$  pertenece a  $Y \setminus U$ , como  $Y$  es compacto, existe una subsucesión  $y_{n(i)} \rightarrow y$  en  $Y \setminus U$ , además notemos que

$$y \in \limsup F(x_n) \subset F(p) \subset U.$$

Lo cuál es una contradicción, por lo tanto  $F$  es usc en  $p$ . Ahora supongamos que  $F$  es usc en  $p$  y consideremos una sucesión  $x_i \rightarrow p$  cuando  $i \rightarrow \infty$  y tomemos  $y$  en  $\limsup F(x_i)$  y supongamos por contradicción que  $y \notin F(p)$ , como  $F(p)$  es un subconjunto cerrado y  $Y$  es un espacio métrico, entonces existen  $U_1$  y  $U_2$  subconjuntos abiertos tal que  $F(p) \subset U_2$ ,  $y \in U_1$  y  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , más aún, como  $F$  es usc en  $p$  existe  $V$  subconjunto abierto en  $X$  tal que  $p \in V$  y  $F(x) \subset U_2$  para cada  $x \in V$ , además como  $x_i \rightarrow p$  entonces existe  $N$  tal que para cada  $i \geq N$ ,  $x_i \in V$ , es decir  $F(x_i) \subset U_2$  para cada  $i \geq N$ , sin embargo,

$y \in \limsup F(x_i)$ , entonces,  $F(x_i) \cap U_1 \neq \emptyset$  para infinitos  $i$  y  $F(x_i) \subset U_2$  para  $i \geq N$  lo cual es una contradicción pues  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , por lo tanto  $\limsup F(x_i) \subset F(p)$ .

□

**Definición 1.18.** Sean  $(S_1, T_1)$  y  $(S_2, T_2)$  espacios topológicos, una función suprayectiva  $f$  de  $S_1$  a  $S_2$  es **una función cociente** siempre que  $T_2$  es la topología más grande para la cual  $f$  es continua.

**Proposición 1.19.** Sean  $(S, T)$  y  $(Y, T')$  espacios topológicos no vacíos,  $f$  una función suprayectiva y continua de  $S$  a  $Y$  y consideremos  $T'_f$  la topología más grande para  $Y$  que hace a  $f$  continua. Entonces, si  $f$  es una función cerrada, se cumple que  $T' = T'_f$ , es decir,  $f$  es una función cociente.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es una función cerrada. Como  $T'_f$  es la topología más grande para la cual  $f$  es continua, se cumple que  $T' \subset T'_f$ . Ahora sea  $U \in T'_f$ . Notemos que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $S$  y como  $f$  es suprayectiva, entonces  $f(f^{-1}(U)) = U$  para cada  $U \subset Y$ . Así, juntando ambos hechos tenemos que

$$Y \setminus U = f(f^{-1}(Y \setminus U)) = f(S \setminus f^{-1}(U)).$$

Pero  $S \setminus f^{-1}(U)$  es cerrado en  $S$  y como  $f$  es cerrada, se sigue que  $Y \setminus U$  es cerrado en  $Y$ . Por lo tanto,  $U \in T'$ . □

**Lema 1.20.** Sean  $(S_i, T_i)$  espacios topológicos para cada  $i = 1, 2, 3$  y sea  $f : S_1 \rightarrow S_2$  una función cociente. Sea  $g : S_1 \rightarrow S_3$  una función continua. Si  $g$  es constante en cada fibra  $f^{-1}(z)$  (es decir,  $g$  toma un único valor en cada  $f^{-1}(z)$ ), entonces la función inducida  $\bar{g} : S_2 \rightarrow S_3$  definida por  $\bar{g}(y) = g(f^{-1}(y))$  es continua.

*Demostración.* Definamos la función  $h : S_2 \rightarrow S_3$  como

$$h(y) = \text{el único valor en } g(f^{-1}(y)) \quad \text{para cada } y \in S_2.$$

Por hipótesis,  $h$  está bien definida y además satisface que  $h \circ f = g$ . Es decir, para todo  $x$  en  $S_1$ , si tomamos  $y = f(x)$ , entonces

$$h(f(x)) = h(y) = g(f^{-1}(y)) = g(x).$$

Por lo tanto,  $h = \bar{g}$ .

Consideremos la topología  $T_f = \{V \subset S_2 : f^{-1}(V) \in T_1\}$ . Como  $f$  es una función cociente, tenemos que  $T_f \subset T_2$ .

Ahora, sea  $W$  en  $T_3$ . Como  $g$  es continua, entonces  $g^{-1}(W)$  es abierto en  $S_1$ . Pero como  $g^{-1}(W) = (h \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(h^{-1}(W))$ , se tiene que  $h^{-1}(W)$  es abierto en  $T_f$  y, por lo tanto, en  $T_2$ . Así,  $h$  es continua y concluimos que  $\bar{g}$  es continua. □

**Teorema 1.21.** *Sea  $X$  un espacio métrico compacto y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y suprayectiva hacia otro espacio métrico compacto  $Y$ . Definimos la colección*

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}.$$

*Entonces,  $\mathcal{D}_f$  es una descomposición usc en  $X$  y es homeomorfa a  $Y$ . A la inversa, cualquier descomposición usc de un espacio métrico compacto  $X$  es un espacio métrico compacto y es la imagen continua de  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos por contradicción que  $\mathcal{D}_f$  no es usc. Entonces, existe  $f^{-1}(y_0)$  en  $\mathcal{D}_f$  y un subconjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $f^{-1}(y_0) \subset U$ , pero no existe un abierto  $V$  en  $Y$  que satisfaga la condición en 1.12.

Para cada  $n$ , tenemos que  $f^{-1}(y_0) \subset f^{-1}(B(y_0, 1/n)) = V_n$ . Como  $f$  es continua, cada  $V_n$  es un subconjunto abierto en  $X$ . Para cada  $n$ , tomemos  $y_n$  en  $B(y_0, 1/n)$  ( $B(y_0, \frac{1}{n}) \neq \{y_0\}$  pues  $Y$  es compacto y  $y_0$  no es aislado.) Entonces, definimos  $A_n = f^{-1}(y_n)$  y notemos que  $A_n \cap V_n \neq \emptyset$  y, por nuestra suposición,  $A_n \not\subset U$ . Así, existen sucesiones

$$\{p_n\} \subset A_n \cap V_n \qquad \text{y} \qquad \{q_n\} \subset A_n \setminus U.$$

Como  $X$  es compacto, existen subsucesiones  $\{p_{n_i}\}$  y  $\{q_{n_i}\}$  tales que  $p_{n_i} \rightarrow p \in X$  y  $q_{n_i} \rightarrow q \in X \setminus U$ , se tiene que  $f(p_{n_i}) = y_n$  y  $d(f(p_{n_i}), y_0) < 1/n$ , lo que implica que  $f(p_{n_i}) \rightarrow y_0$ , como  $f$  es continua, se cumple que  $f(p_{n_i}) \rightarrow f(p)$ , de donde se sigue que  $f(p) = y_0$ . Como  $f(q_{n_i}) = y_n = f(p_{n_i})$ , por continuidad de  $f$  tenemos que  $f(p) = f(q)$ , lo que implica que  $q \in f^{-1}(y_0) \cap (X \setminus U)$ , contradiciendo el hecho de que  $f^{-1}(y_0) \subset U$ .

Por lo tanto,  $\mathcal{D}_f$  es usc y además es un espacio de Hausdorff. Para verificar que es homeomorfo a  $Y$ , consideremos la función biyectiva  $h : Y \rightarrow \mathcal{D}_f$  dada por

$$h(y) = \pi(f^{-1}(y)), \quad \text{para cada } y \in Y.$$

La continuidad de  $h$  se sigue del Lema 1.20, ya que  $f$  es una función cociente por [[4], (3.1.12), pág. 125] y por 1.19. Esto prueba la primera parte del teorema.

Para la segunda parte, si  $\mathcal{D}$  es cualquier descomposición usc de  $X$ , entonces es un espacio métrico compacto (véase Teorema 3.7 de [1]) y la proyección  $\pi : X \rightarrow \mathcal{D}$  es una función continua, lo que implica que  $\mathcal{D}$  es la imagen continua de  $X$  y por lo tanto, compacto. □

**Lema 1.22.** *Sea  $(X, T_1)$  y  $(Y, T_2)$  espacios topológicos y sea  $F : X \rightarrow 2^Y$  una función usc. Si  $F(x)$  es un conjunto singular  $\{y_x\}$  para cada  $x \in X$ , entonces la función  $f : X \rightarrow Y$  definida como sigue  $f(x) = y_x$  para cada  $x \in X$  es continua.*

*Demostración.* Sean  $p$  en  $X$  y  $U$  en  $T_2$  tal que  $f(p)$  pertenece a  $U$ , entonces, como  $F(p) = \{f(p)\} \subset U$  y  $F$  es usc en  $p$  entonces existe  $V$  en  $T_1$  tal que

$$p \in V \quad \text{y} \quad F(x) \subset U \quad \text{para todo } x \in V.$$

Por lo tanto  $V$  esta en  $T_1$ ,  $p$  pertenece a  $V$  y para todo  $x$  elemento de  $V$ ,  $\{f(x)\} \subset U$  es decir  $f(x) \in U$  por lo tanto  $f$  es continua. □

**Lema 1.23.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos compactos no vacíos y para cada  $n = 1, 2, \dots$ , y consideremos  $F_n : X \rightarrow 2^Y$  una función usc tal que  $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$  para cada  $x \in X$ , cada  $n = 1, 2, \dots$ .*

*Para cada  $x \in X$ , sea  $G(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ . Entonces los siguientes incisos se satisfacen.*

- (1)  $G : X \rightarrow 2^Y$  y  $G$  es usc.
- (2) Si  $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$  para cada  $n = 1, 2, \dots$ , entonces,  $Y = \bigcup_{x \in X} G(x)$

*Demostración.* Para probar el primer inciso, primero notemos que por la última parte de 1.3, para cada  $x$  en  $X$ ,  $G(x) \neq \emptyset$  y por lo tanto,  $G : X \rightarrow 2^Y$  esta bien definida. Ahora, para probar que  $G$  es usc, sean  $p$  en  $X$  y  $U$  un subconjunto abierto de  $Y$  tal que  $G(p) \subset U$ , entonces por 1.3 existe  $N$  tal que  $F_N(p) \subset U$  y como  $F_N$  es usc entonces existe un subconjunto abierto  $V$  de  $X$  tal que

$$p \in V, \quad F_N(x) \subset U \quad \text{para todo } x \in V.$$

Por lo tanto, como  $G(x) \subset F_N(x)$  para todo  $x$  en  $X$ , se sigue que  $G(x) \subset U$  para todo  $x$  en  $V$ . Por lo tanto  $G$  es usc en  $p$ . Para probar (2), fijemos  $q$  en  $Y$ . Entonces, por hipótesis para cada  $n = 1, 2, \dots$  existe  $x_n$  en  $X$  tal que  $q$  pertenece a  $F_n(x_n)$ . Por la compacidad de  $X$ , existe una subsucesión  $\{x_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$  de  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\{x_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$  converge a un punto  $p$  en  $X$ . Vamos a mostrar que  $q$  pertenece a  $G(p)$ . Supongamos por contradicción que  $q \notin G(p)$ , entonces consideremos  $U = Y \setminus \{q\}$ ,  $G(p) \subset U$  y  $U$  es un subconjunto abierto de  $Y$  por lo tanto por 1.3 existe  $N$  tal que  $F_N(p) \subset U$  además,  $F_N$  es usc en  $p$  entonces existe  $V$  un subconjunto abierto de  $X$  tal que  $p \in V$  y

(a)  $F_N(x) \subset U$  para todo  $x \in V$ .

Como  $\{x_{n(i)}\}$  converge a  $p \in V$ , entonces existe  $k = n(i)$  para alguna  $i$  tal que  $N \leq k$  y  $x_k \in V$ , por (a), se sigue que

(b)  $F_N(x_k) \subset U$ .

Como  $k \geq N$ ,  $F_k(x_k) \subset F_N(x_k)$ , más aún, como  $q \in F_k(x_k)$ , entonces  $q \in F_N(x_k)$  por lo tanto, por (b) se tiene que  $q \in U = Y \setminus \{q\}$ , lo cual es imposible. Por lo tanto,  $q \in G(p)$ .

□

**Teorema 1.24.** [El teorema de la función general] Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos compactos y no vacíos, supongamos que se cumplen los siguientes incisos;

(1)  $F_n : X \rightarrow 2^Y$  es usc para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

(2)  $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

(3)  $Y = \bigcup_{x \in X} F_n(x)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \dim[F_n(x)] = 0$  para cada  $x \in X$ .

Entonces, existe una función continua  $f$  tal que  $f(X) = Y$ . De hecho, sea una función  $f$  como sigue

$$f(x) = \text{el único punto en } \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x) \text{ para cada } x \in X.$$

*Demostración.* Sea  $G(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$  para cada  $x$  en  $X$ . Entonces podemos escribir a  $f$  como

$$f(x) = \text{el \u00fanico punto en } G(x) \text{ para cada } x \in X. \quad (\#)$$

el cual esta bien definida por (2) y (4), y la segunda parte de 1.3. Por (#), (1) de 1.23 y 1.22,  $f : X \rightarrow Y$  es continua. Adem\u00e1s por (#) y (2) de 1.23 se sigue que  $f(X) = Y$ . \(\square\)

## 2 El conjunto de Cantor

**Definici\u00f3n 2.1.** *Vamos a definir el conjunto de Cantor como sigue, empezamos con  $C_0 = [0, 1]$ . Ahora dividimos al intervalo  $[0, 1]$  en tres subintervalos:*

$$I_{11} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad J_{11} = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad J_{12} = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right].$$

*Notemos que  $[0, 1] = J_{11} \cup I_{11} \cup J_{12}$ . Sea  $C_1 = [0, 1] \setminus I_{11} = J_{11} \cup J_{12}$ . Ahora, sean*

$$I_{21} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \quad I_{22} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

$$J_{21} = \left[0, \frac{1}{9}\right], \quad J_{22} = \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \quad J_{23} = \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \quad J_{24} = \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right].$$

*Sea  $C_2 = \bigcup_{k=1}^{2^2} J_{2k}$ . Podemos continuar el proceso hasta construir  $2^n$  intervalos cerrados, ajenos  $J_{n1}, \dots, J_{n2^n}$ . Notemos que cada uno de estos intervalos tienen longitud  $\frac{1}{3^n}$ . As\u00ed,  $I_{(n+1)k}$  es el intervalo abierto con el mismo centro que  $J_{nk}$  y de longitud  $\frac{1}{3^{n+1}}$ . Luego,  $J_{nk} \setminus I_{(n+1)k}$  es la uni\u00f3n de intervalos cerrados y ajenos  $J_{(n+1)(2k-1)}$  y  $J_{(n+1)2k}$  de longitud  $\frac{1}{3^{n+1}}$ . Obtenemos,*

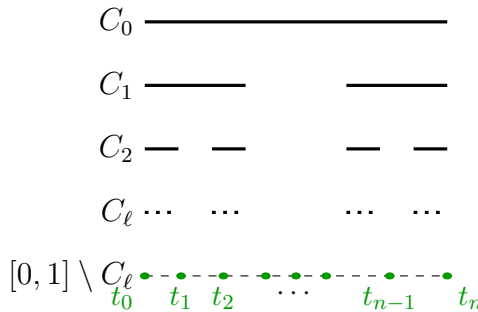
$$C_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} J_{nk} \subset C_n.$$

Al conjunto  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  le llamamos el **conjunto de Cantor del tercio medio** y es un subespacio de  $[0, 1]$ .

**Lema 2.2.** Sea  $C$  el conjunto de Cantor de tercio medio, entonces

- (1) Dado cualquier entero  $n \geq 1$ ,  $C = \bigcup_{i=1}^n D_i$  donde cada  $D_i$  es compacto y no vacío, y  $D_i \cap D_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ .
- (2) Dado cualquier entero  $m \geq 1$  y cualquier  $D_i$  en (1),  $D_i = \bigcup_{j=1}^m D_{i,j}$  donde cada  $D_{i,j}$  es compacto y no vacío, y  $D_{i,j} \cap D_{i,k} = \emptyset$  para  $j \neq k$ .

*Demostración.* Supongamos  $n > 1$ . De la construcción de la intersección anidada que usamos para definir a  $C$  podemos encontrar un  $l$  lo suficientemente grande tal que para  $C_l$  hay  $n - 1$  puntos  $t_1, \dots, t_{n-1}$  en  $[0, 1] \setminus C_l$  tal que para cualquiera dos de estos puntos están en diferentes componentes de  $X \setminus C_l$  y  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < 1 = t_n$ .



Sea  $D_i = [t_{i-1}, t_i] \cap C$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Entonces se verifica directamente que  $D_1, \dots, D_n$  satisfacen (1), para probar (2), simplemente observemos que las ideas que usamos probando (1) pueden aplicarse a cada uno de los intervalos  $[\inf D_i, \sup D_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$  para obtener los conjuntos deseados  $D_{i,1}, \dots, D_{i,m}$  en (2), esto completa la prueba. □

### 3 Imágenes del conjunto del Cantor

**Teorema 3.1.** Cada espacio métrico compacto y no vacío  $Y$  es la imagen continua del conjunto de Cantor del tercio medio.

*Demostración.* Primero por la compacidad, podemos cubrir a  $Y$  con conjuntos abiertos y no vacíos  $U_1, \dots, U_n$  cada uno con  $\dim < 1$ , entonces, sea  $A_i = \overline{U_i}$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , notemos que cada  $A_i$  es un conjunto compacto, y no vacío. Consideremos  $D_1, \dots, D_n$  como en (1) de 2.2. Definimos

$$F_1 : C \rightarrow 2^Y \text{ por } F_1(t) = A_i \text{ para cada } t \in D_i.$$

(Notemos que  $F_1$  esta bien definido en  $C$  pues los conjuntos  $D_i$  son ajenos dos a dos y cubren a  $C$ ). Veamos que  $F_1$  satisface (1) y (3) de 1.24, para (1) basta notar que cada  $D_i$  es abierto en  $C$  y  $F_1$  es constante en cada  $D_i$ . Así, tomemos  $p$  en  $C = \bigcup_{i=1}^n D_i$ , entonces, existe  $i = 1, 2, \dots, n$  tal que  $p$  pertenece a  $D_i$  y como  $D_i$  es abierto en  $C$ , existe un conjunto abierto  $V$  en  $C$  tal que

$$p \in V \subset D_i.$$

Ahora notemos que como  $p$  pertenece a  $D_i$ , entonces,  $F_1(p) = A_i \subset U$ , entonces, si tomamos  $x \in V \subset D_i$ , se sigue que  $F_1(x) = A_i \subset U$  entonces  $F_1$  es usc, más aún  $F_1$  satisface (3) de 1.24 por como se define. Ahora, para cada  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), cubrimos  $A_i$  con conjuntos no vacíos y compactos  $A_{i,1}, \dots, A_{i,m(i)}$  cada uno de diámetro  $< \frac{1}{2}$ , entonces para cada  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) consideremos  $D_{i,1}, \dots, D_{i,m(i)}$  como en (2) de 2.2, definimos,

$$F_2 : C \rightarrow 2^Y \quad \text{como} \quad F_2(t) = A_{ij} \text{ si } t \in D_{ij}.$$

Podemos notar que siguiendo el mismo modo como mostramos para  $F_1$  se sigue que  $F_2$  esta bien definida y además satisface (1) y (3) de 1.24, y claramente  $F_1$  y  $F_2$  satisfacen (2) de 1.24. Continuando con esta construcción inductiva de 2.2 podemos definir  $F_n : C \rightarrow 2^Y$  para cada  $n = 1, \dots$ , así, como (1) – (4) de 1.24 se satisfacen, por 1.24 existe una función contintinua y suprayectiva  $f$  de  $C$  a  $Y$ . □

**Corolario 3.2.** *Cada espacio métrico compacto y no vacío es una descomposición usc de el conjunto del tercio medio de Cantor  $C$  y recíprocamente. Cada descomposición usc de  $C$  es un espacio métrico compacto y no vacío.*

*Demostración.* Se sigue de 3.1 y 1.21. □

**Ejemplo 3.3** (Curva de llenado del espacio (Space-filling curve)). *Consideremos a  $Y$  como  $B^n$  para cada  $n = 1, 2, \dots$ , o el cubo de Hilbert, especialmente definido como el producto numerable del intervalo unitario  $([0, 1])$ , vamos a mostrar como usando 3.1 podemos obtener una función continua y suprayectiva de  $[0, 1]$  a  $Y$ .*

Sea  $C$  el conjunto de Cantor, y sea  $(a_i, b_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , denotan las componentes de  $[0, 1] \setminus C$ . Consideremos  $f$  la función continua y suprayectiva de  $C$  en  $Y$ , vamos a extender a  $f$  a una función continua  $g : [0, 1] \rightarrow Y$  como sigue. Si  $t \in [0, 1] \setminus C$ , entonces, existe una única  $i$  y una única  $s$  tal que  $t = (1 - s) \cdot a_i + s \cdot b_i$ ,  $0 < s < 1$  y denotemos  $\psi(t) = (1 - s) \cdot f(a_i) + s \cdot f(b_i)$ . Y ahora definimos  $g$  como

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in C \\ \psi(t) & \text{si } t \in [0, 1] \setminus C \end{cases}$$

Probemos que  $g$  es continua. Sean  $t \in [0, 1]$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $\{t_n\}_{i=1}^{\infty} \subset [0, 1]$  tal que  $t_n \rightarrow t$ , notemos que si  $t \in [0, 1] \setminus C$  entonces  $\psi(t)$  es continua pues  $\psi$  es una función lineal, por el otro lado, si  $t \in C$  buscamos probar que  $g(t_n) \rightarrow g(t)$ . Notemos que si  $t_n \in C$  para infinitos muchos  $n$ , como  $f$  es uniformemente continua entonces  $g(t_n) = f(t_n) \rightarrow f(t) = g(t)$ . Por el contrario si  $t_n \in C$  para finitos  $n$  entonces  $t_n \in [0, 1] \setminus C$  para infinitos muchos  $n$  y tenemos dos casos.

1. Existe  $N_0$  tal que si  $n \geq N_0$ ,  $t_n \in (a_i, b_i)$  para alguna  $i$ , en este caso se tiene que  $g(t_n) = (1 - s_n)f(a_i) + s_n f(b_i)$ , además como  $a_i < t_n < b_n$  se sigue que  $a_i \leq t \leq b_i$ , si suponemos que  $t = b_i$ , entonces  $s_n \rightarrow 1$  y por lo tanto,  $g(t_n) \rightarrow f(b_i) = f(t) = g(t)$ , si suponemos que  $t = a_i$  la prueba es análoga.
2.  $t_n \in (a_{i,n}, b_{i,n})$  en diferentes componentes para infinitos muchos  $n$ , es decir si  $n \neq k$  entonces  $(a_{i,k}, b_{i,k}) \neq (a_{i,n}, b_{i,n})$ , como,  $b_i - a_i \rightarrow 0$  entonces  $\lim(\text{dim}(a_{i,n}, b_{i,n})) \rightarrow 0$  y además tenemos que  $t_n = (1 - s_n)a_{i,n} + s_n b_{i,n}$ , pero por el otro lado como  $a_{i,n}, b_{i,n} \in C$  entonces  $a_{i,n} \rightarrow a \in C$  y como  $\lim(\text{dim}(a_{i,n}, b_{i,n})) \rightarrow 0$  se tiene además que  $b_{i,n} \rightarrow a$ , de hecho, como  $t_n \rightarrow t$  entonces  $a = t$  así, tenemos  $\psi(t_n) = (1 - s_n)f(a_{i,n}) + s_n f(b_{i,n})$ , entonces  $g(t_n) = \psi(t_n) \rightarrow f(t) = g(t)$ .

## 4 Caracterización del conjunto de Cantor

**Definition 4.1.** *Un espacio topológico  $S$  es **totalmente desconexo** siempre que  $S \neq \emptyset$  y ningún subconjunto conexo de  $S$  contiene mas de un punto (es decir, cada componente de  $S$  es un conjunto de un punto).*

**Lema 4.1.** *Sea  $Y$  un espacio métrico compacto totalmente desconexo, entonces, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $Y$  se puede representar como la unión de  $n$  ( $n = n(\varepsilon) < \infty$ ) subconjuntos compactos no vacíos y ajenos dos a dos  $K_1, \dots, K_n$  con  $\dim(K_i) < \varepsilon$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .*

*Demostración.* Primero probaremos el siguiente resultado: (#) *Para cada  $y$  en  $Y$ , existe un subconjunto cerrado y abierto  $M(y)$  de  $Y$  tal que  $y$  esta en  $M(y)$  y  $\dim(M(y)) < \varepsilon$ .*

Para probar (#), Sean  $y$  en  $Y$  y  $U$  un subconjunto abierto de  $Y$  tal que,

$$y \in U \qquad \text{y} \qquad \dim(U) < \varepsilon.$$

Sean  $A = \{y\}$  y  $B = Y \setminus U$ , entonces por hipótesis sobre  $Y$  podemos aplicar 1.10 y denotando por  $M(y)$  al conjunto  $X_1$  en 1.10, hemos probado (#). Ahora para probar el lema primero usemos la compacidad de  $Y$  para cubrirlo con finitos conjuntos como en (#) digamos  $M(y_1), \dots, M(y_k)$ , y ahora sea

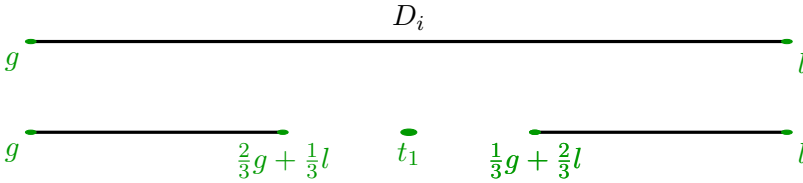
$$L_1 = M(y_1) \text{ y para } 2 \leq i \leq k, \text{ denotemos por } L_i = M(y_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} M(y_j).$$

Descartando todos los  $L_i$  los cuales son vacíos, renombrando los  $L_i$  tenemos los  $K_1, \dots, K_n$ , los conjuntos deseados. □

**Lema 4.2.** *Sean  $D_1, \dots, D_n$  tales que satisfacen (1) de 2.2. Sea  $m \geq 2$  un entero. Entonces para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , hay conjuntos  $D_{i,1}, \dots, D_{i,m}$  que satisfacen (2) de 2.2 y son tales que  $\dim(D_{i,j}) \leq (2/3) \cdot \dim(D_i)$  Para cada  $j = 1, \dots, m$ .*

*Demostración.* Fijemos  $1 \leq i \leq n$  y sean  $g = \sup D_i$  y  $l = \inf D_i$ , como  $g < l$ , existe  $t_1$  tal que

$$(2/3) \cdot g + (1/3) \cdot l < t_1 < (1/3) \cdot g + (2/3) \cdot l \qquad \text{y} \qquad t_1 \notin C.$$



Si  $m = 2$ , entonces  $D_{i,1} = [g, t_1] \cap D_i$  y  $D_{i,2} = [t_1, l] \cap D_i$  satisfacen las condiciones deseadas. Así, supongamos que  $m > 2$ , notemos que, por 2.1, existen puntos  $t < l$  arbitrariamente cerca de  $l$  tales que  $t \notin C$ , también notemos que, como  $0 < l \in D_i$  y  $D_i$  es abierto en  $C$  entonces existen puntos  $s < l$  arbitrariamente cerca de  $l$  tal que  $s \in D_i$ , usando estas dos observaciones, podemos ver que existen  $m - 2$  puntos  $t_2, t_3, \dots, t_{m-1}$  tales que

$$t_0 = g < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{m-1} < l = t_m,$$

donde  $t_j \notin C$  para todo  $j = 1, 2, \dots, m - 1$ , y  $(t_{j-1}, t_j) \cap D_i \neq \emptyset$  para cada  $j = 1, 2, \dots, m - 1$ . Definimos  $D_{i,j} = [t_{j-1}, t_j] \cap D_i$  para cada  $j = 1, 2, \dots, m$ , entonces, podemos ver que los conjuntos  $D_{i,1}, \dots, D_{i,m}$  satisfacen las propiedades que establece el lema. □

**Definición 4.3.** *Un espacio topológico  $S$  es **perfecto** siempre que cada punto de  $S$  es un punto limite de  $S$ , algunos autores usan **denso en si mismo** para describir esta condición.*

**Teorema 4.4.** *Un espacio métrico  $Y$  es un conjunto de Cantor si y solo si  $Y$  es compacto, totalmente desconexo y perfecto.*

*Demostración.* Supongamos que  $Y$  es compacto, totalmente desconexo y perfecto espacio métrico. vamos a construir un homeomorfismo suprayectivo  $f$  desde el conjunto del tercio medio de Cantor hacia  $Y$  usando 1.24. Para  $\varepsilon = 1$  sean  $K_1, \dots, K_n$  como en 4.1, entonces consideramos  $D_1, \dots, D_n$  como en (1) de 2.2. Sea

$$F_1 : C \rightarrow 2^Y \text{ dada por } F_1(t) = K_i \text{ para cada } t \in D_i.$$

Por las mismas razones dadas en la prueba de 3.1,  $F_1$  esta bien definida en  $C$  y  $F_1$  satisface las propiedades (1) y (3) de 1.24. Fijemos  $i, 1 \leq i \leq n$ . Obtenemos subconjuntos  $K_i$  y  $D_i$  como siguen. Primero notemos que como  $K_i$  es un subconjunto abierto y no vacío de  $Y$  y  $Y$  es perfecto entonces  $\dim(K_i) > 0$ ,

por lo tanto, definimos  $\varepsilon_i = (\frac{1}{2})dim(K_i)$ , tenemos que  $\varepsilon_i > 0$ , por lo tanto como  $K_i$  es compacto y totalmente desconexo entonces 4.1 nos permite escribir a  $K_i$  como la unión de  $m(i)$  de subconjuntos compactos, no vacío y ajenos dos a dos  $K_{i,1}, \dots, K_{i,m(i)}$  con  $dim(K_{i,j}) < \varepsilon_i$  para cada  $j = 1, \dots, m(i)$ . Notemos que como los conjuntos  $K_{i,j}$  cubren a  $K_i$  y son de diámetro menor a  $\varepsilon_i$  entonces  $m(i) \geq 2$ , por lo tanto, existen  $D_{i,1}, \dots, D_{i,m(i)}$  que satisfacen 4.2, así hemos definido  $K_{i,1}, \dots, K_{i,m(i)}$  y  $D_{i,1}, \dots, D_{i,m(i)}$  para cada  $i, 1 \leq i \leq n$ , definimos,

$$F_2 : C \rightarrow 2^Y \text{ como } F_2(t) = K_{i,j} \text{ para cada } t \in D_{i,j}.$$

Entonces, por las mismas razones que  $F_1, F_2$  esta bien definida en  $C$  y  $F_2$  satisface (1) y (3) de 1.24, continuando de esta manera (usando la natural inducción ) podemos definir  $F_n : C \rightarrow 2^Y$  para cada  $n = 1, 2, \dots$  que satisfacen las condiciones (1) – (4) de 1.24, por lo tanto por 1.24 existe una función continua y suprayectiva  $f$  de  $C$  en  $Y$ , más aún, asumiendo que  $f$  es la función definida por la formula en 1.24 podemos mostrar como consecuencia de la construcción de arriba que  $f$  es inyectiva. Para ver esto, sean  $s, t \in C$  tales que  $s \neq t$  y escogemos un entero positivo  $k$  lo suficientemente grande tal que  $(2/3)^{k-1} < |s - t|$  y sean  $E_1, \dots, E_l$  los subconjuntos de  $C$  que se usaron para definir  $F_2$ , como los conjuntos  $E_j$  son resultado de haber aplicado 4.2  $k - 1$  veces, tenemos que  $dim(E_j) < (2/3)^{k-1}$  para cada  $j = 1, \dots, l$ , por lo tanto  $s$  y  $t$  no pueden estar en el mismo  $E_j$  para cada  $j = 1, \dots, l$ . Así escribiendo  $K_1, \dots, K_l$  como los subconjuntos de  $Y$  que se usaron para definir  $F_k$  y recordando que estos conjuntos son ajenos dos a dos podemos ver de la forma que  $F_k$  fue definido que  $F_k(s) \cap F_k(t) = \emptyset$ , por lo tanto, como  $f(s) \in F_k(s)$  y  $f(t) \in F_k(t)$  tenemos que  $f(s) \neq f(t)$  por lo tanto  $f$  es inyectiva, concluimos que  $f$  es un homeomorfismo de  $C$  en  $Y$ . Por lo tanto  $Y$  es un conjunto de Cantor. La otra parte del teorema es inmediata. □

## 5 Funciones de Whitney

Antes de introducir el termino *Función de tamaño* o también conocidas *funciones de Whitney* vamos a primero presentar algunos resultados previos.

**Definición 5.1.** *Sea  $X$  un espacio métrico compacto, no vacío con métrica*

$d$ , la **función diámetro** con respecto a  $d$  se define como la función

$$\dim_d : 2^X \rightarrow [0, 1] \text{ tal que para cada } A \in 2^X, \\ \dim_d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

**Lema 5.2.** *Sea  $X$  un espacio métrico compacto, no vacío con métrica  $d$ , entonces la función diámetro es continua.*

*Demostración.* Sean  $\varepsilon > 0$ , y  $A, B \in 2^X$  tal que  $H_d(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$ , como  $A$  es compacto, existen  $a_1, a_2 \in A$  tal que  $\dim_d(A) = d(a_1, a_2)$ , así como  $A \subset N_d(\frac{\varepsilon}{2}, B)$ , existen  $b_1, b_2$  tal que,  $d(a_1, b_1) < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $d(a_2, b_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ , por lo tanto,

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, b_1) + d(b_1, b_2) + d(b_2, a_2) < d(b_1, b_2) + \varepsilon.$$

Por lo tanto, como  $\dim_d(A) = d(a_1, a_2)$  tenemos que

$$1) \quad \dim_d(A) < d(b_1, b_2) + \varepsilon \leq \dim_d(B) + \varepsilon.$$

De forma similar podemos obtener que

$$2) \quad \dim_d(B) < \dim_d(A) + \varepsilon.$$

Entonces por 1) y 2) se tiene que  $|\dim_d(A) - \dim_d(B)| < \varepsilon$ . □

**Lema 5.3.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos compactos y no vacíos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Definimos  $f^* : 2^X \rightarrow 2^Y$  como  $f^*(A) = f(A)$  para cada  $A \in 2^X$ , entonces  $f^*$  es continua.*

*Demostración.* Usando 1.8, consideremos  $W_1, \dots, W_n$  subconjuntos abiertos en  $Y$  y usando que  $f$  es una función cerrada tenemos que

$$(f^*)^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle) = \langle f^{-1}(W_1), \dots, f^{-1}(W_n) \rangle,$$

y como  $f$  es continua se sigue que  $f^*$  es continua. □

**Definición 5.4.** *Sea  $X$  un espacio métrico, compacto y no vacío. Una función de tamaño o también conocidas como función de Whitney es una función continua para  $2^X$ ,  $\mu : 2^X \rightarrow R$  tal que*

$$1. \text{ Para } A, B \in 2^X \text{ tal que } A \subset B \text{ y } A \neq B, \mu(A) < \mu(B).$$

2.  $\mu(\{x\}) = 0$  para todo  $x \in X$ .

**Teorema 5.5.** Si  $(X, d)$  es cualquier espacio métrico, entonces, existe una función de tamaño para  $2^X$ .

*Demostración.* Como  $X$  es un espacio métrico compacto, entonces existe  $D = \{x_i : i = 1, 2, \dots\}$  un subconjunto denso y numerable de  $X$ . Definimos

$$f_i : X \rightarrow [0, 1], \quad f_i(x) = \frac{1}{1 + d(x_i, x)}$$

y también definimos

$$\mu_i(A) = \dim f_i(A) \quad \text{para cada } A \in 2^X.$$

Entonces nuestra función de tamaño la definimos como;

$$\mu : 2^X \rightarrow [0, 1] \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mu_i(A) \quad \text{para cada } A \in 2^X$$

Notemos que  $\mu_i = \dim_d \circ f_i^*$  para cada  $i$ , por lo tanto  $\mu_i$  es continua para cada  $i$  y por lo tanto  $\mu$  es continua. Ahora para mostrar que  $\mu$  satisface las condiciones de función de tamaño, sean  $A, B \in 2^X$  tal que  $A \subset B$  y  $A \neq B$ , como  $A \subset B$  podemos ver directamente que  $f_i(A) \subset f_i(B)$  para cada  $i$ , por lo tanto  $\mu_i(A) \leq \mu_i(B)$  para cada  $i$ , así para probar que  $\mu(A) < \mu(B)$  es suficiente probando lo siguiente

$$(\#) \quad \mu_i(A) < \mu_i(B) \quad \text{para alguna } i.$$

Así para probar  $(\#)$ , sean  $p \in B \setminus A$  y  $r = \frac{1}{2}d(p, A)$ , notemos que  $r > 0$  dado que  $p \notin A$  y  $A$  es cerrado en  $X$ , y como  $p \in B(p, r)$  y  $D$  es denso en  $X$ , entonces, existe  $x_i \in D$  tal que  $d(p, x_i) < r$ , entonces  $d(p, x_i) + 1 < r + 1$ , así

$$a) \quad \frac{1}{r + 1} < \frac{1}{1 + d(x_i, p)} = f_i(p).$$

Además  $r < d(x_i, A)$ , entonces

$$b) \quad f_i(a) = \frac{1}{1 + d(x_i, a)} < \frac{1}{1 + r} \quad \text{para cada } a \in A.$$

Entonces combinando las desigualdades en a) y b) podemos ver que

$$c) \quad \sup f_i(A) \leq \frac{1}{1+r} < f_i(p).$$

De esto, como  $p \in B$ , podemos ver inmediatamente de c) que

$$d) \quad \sup f_i(A) < \sup f_i(B).$$

Además como  $A \subset B$  se sigue que  $\inf f_i(B) \leq \inf f_i(A)$ . Se sigue que  $\mu_i(A) < \mu_i(B)$ , y esto prueba (#). Finalmente para probar que  $\mu$  satisface la segunda condición. Sea  $A \in 2^X$ , primero supongamos que  $A = \{x\}$  para algún  $x \in X$ , entonces para cada  $i = 1, 2, \dots$ ,

$$\mu_i(A) = \dim(f_i(\{x\})) = 0.$$

Por lo tanto  $\mu(A) = 0$ . □

**Teorema 5.6.** *Para cualquier espacio métrico compacto  $(X, d)$  y cualquier función de tamaño  $\mu$  para  $2^X$ ,  $A_i \rightarrow A$  en  $2^X$  si y solo si dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que para  $i \geq N$ ,  $A_i \subset N_d(\varepsilon, A)$  y  $|\mu(A_i) - \mu(A)| < \varepsilon$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $A_i \rightarrow A$  en  $2^X$ , sea  $\varepsilon > 0$  entonces existe  $N$  tal que para  $i \geq N$ ,  $H_d(A_i, A) < \varepsilon$ , de ahí que  $A_i \subset N_d(\varepsilon, A)$ , y como  $\mu$  es continua se sigue que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu(A).$$

Ahora si dado  $\varepsilon > 0$  si existe  $N$  tal que para  $i \geq N$ ,  $A_i \subset N_d(\varepsilon, A)$  y  $|\mu(A_i) - \mu(A)| < \varepsilon$ . Para probar que  $A_i \rightarrow A$ , como  $2^X$  es compacto por (4.13) de [4, p.59], entonces, existe  $A_{i(j)} \rightarrow B \in 2^X$ , supongamos que  $A \neq B$ , como  $\mu$  es continua se sigue que  $\mu(A_{i(j)}) \rightarrow \mu(B)$ , vamos a probar que  $B \subset A$ , sea  $b \in B$ , entonces existe  $N'$  tal que para  $i \geq N'$ ,  $H_d(A_{i(j)}, B) < \varepsilon$  de ahí que  $B \subset N_d(\varepsilon, A_{i(j)})$ , sea  $M = \max\{N, N'\}$  entonces si  $i \geq M$  se cumple que  $A_i \subset N_d(\varepsilon, A)$  y  $B \subset N_d(\varepsilon, A_{i(j)})$  como  $b \in B$ , entonces existe  $a_{i(j)}$  tal que  $d(b, a_{i(j)}) < \varepsilon$  y además existe  $a_j \in A$  tal que  $d(a_{i(j)}, a_j) < \varepsilon$  entonces tenemos

$$d(a_j, b) \leq d(a_j, a_{i(j)}) + d(a_{i(j)}, b) < 2\varepsilon.$$

Como  $\{a_j\} \subset A, a_j \rightarrow b$  y  $A$  es cerrado, se sigue que  $b \in A$ , por hipótesis  $\mu$  es una función de tamaño, entonces  $\mu(B) < \mu(A)$  sin embargo tenemos que

$$|\mu(A_{i(j)}) - \mu(B)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |\mu(A_{i(j)}) - \mu(A)| < \varepsilon.$$

Lo que es una contradicción. □

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

## Referencias

- [1] Domínguez Málaga, D., Herrera Carrasco, D., Macías Romero, F., *Algunas técnicas para la construcción de continuos*, En Matemáticas y sus aplicaciones (Vol. 23, pp. 155–188). BUAP (2024).
- [2] K. Kuratowski, *Topology, vol. II*, Academic Press, New York, 1968
- [3] K. Kuratowski, *Topology, vol. I*, Academic Press, New York, 1966
- [4] Ryszard Engelking, *General Topology*. Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, 1977.
- [5] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New York, Basel (1992).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering  
Campus Matuse  
1060 Nishikawatsucho, Matsue, Shimane 690-8504

dherrera@fcm.buap.mx  
fmacias@fcm.buap.mx  
matsuhashi@riko.shimane-u.ac.jp  
jose.ortegabec@alumno.buap.mx

## Capítulo 5

# Estudio de compactaciones en espacios topológicos

Felipe de Jesús Aguilar Romero, Diana Cuaya Simbro,  
David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero  
FCFM, BUAP

### Resumen

Una compactación de un espacio topológico consiste en “completarlo” mediante la adición de puntos ideales o fronteras, transformándolo en un espacio compacto. Esta transformación permite aprovechar propiedades de la compacidad, como la existencia de extremos, la convergencia de redes y sucesiones, y la extensión de funciones continuas. A lo largo de este capítulo, se estudiarán algunos resultados acerca de compactaciones en topología general, con un enfoque en dos construcciones destacadas: la compactación de Alexandroff y la compactación de Stone-Čech. La primera se caracteriza por su simplicidad, ya que añade un único punto al espacio original para lograr la compacidad. Por otro lado, la compactación de Stone-Čech es más general y compleja, se construye a partir de funciones continuas con valores en intervalos cerrados.

## 1 Introducción

Las compactaciones de subconjuntos abiertos del plano fueron estudiadas por primera vez por Carathéodory en 1913, en el contexto de las funciones analíticas. Antes de este trabajo, construcciones similares ya se utilizaban en diversas teorías de los números reales. Más tarde, Tychonoff hizo importantes aportaciones al desarrollo de estos conceptos, especialmente a través de los Teoremas 3.4 y 3.6. El concepto de orden en la familia de todas las compactaciones de un espacio (véase Definición 4.6), y los Teoremas 4.17 y 5.2,

fueron demostrados por Lubbed en 1941. La existencia de una compactación máxima fue establecida previamente por M. H. Stone también en 1937 y por Čech en 1937.

El propósito de este trabajo, es desarrollar los resultados presentados en las secciones 3.5 y 3.6 del libro *General Topology* de Ryszard Engelking [2], donde se abordan los temas relacionados con las compactaciones. En la sección 3, se proporciona la definición formal de una compactación de un espacio, así como diversos ejemplos que ilustran diferentes tipos de compactaciones. Estos ejemplos permiten entender mejor cómo se lleva a cabo este proceso en espacios topológicos de diversas características y sirven como base para la posterior discusión de compactaciones más especializadas, como las de Alexandrov y Stone-Čech. La sección 4 sirve de puente para presentar diversas propiedades de las compactaciones, así como presentar una relación de equivalencia entre compactaciones y un orden parcial sobre dichas clases de equivalencia. En particular, en la sección 5, nos enfocaremos en la compactación de Alexandrov, también conocida como compactación de un punto. Esta técnica es una de las formas más simples y fundamentales de extender un espacio topológico no compacto a uno compacto. Consiste en añadir un único punto a un espacio localmente compacto, sin perder las propiedades topológicas esenciales del espacio original.

A lo largo de este capítulo, se estudiará la construcción formal de la compactación de Alexandrov, sus propiedades fundamentales y sus ejemplos concretos. Además, en la sección 6 se analizará la compactación de Stone-Čech, que es una de las más generales y complejas dentro de la topología.

## 2 Preliminares

A lo largo de este trabajo se considerará la siguiente notación. Si  $X$  es un espacio topológico y  $A$  un subconjunto de  $X$ , los símbolos  $\text{cl}_X(A)$  e  $\text{int}_X(A)$  denotan la **cerradura** de  $A$  y el **interior** de  $A$  en  $X$ , respectivamente. A su vez,  $\text{Id}_X$  denotará la función identidad de  $X$  en  $X$ . La cardinalidad de un conjunto  $A$  se representa por  $|A|$  y  $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ .

**Definición 2.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico, se define*

$$w(X) = \min\{\alpha : \text{existe una base } \beta \text{ de } X \text{ tal que } |\beta| = \alpha\}.$$

*El cardinal  $w(X)$  es llamado el **peso** del espacio topológico  $X$ .*

**Observación 2.2.** *Note que, si  $X$  y  $Y$  son homeomorfos, entonces  $w(X) = w(Y)$ .*

**Teorema 2.3.** *Si  $X$  es un espacio topológico y  $A \subset X$  entonces  $w(A) \leq w(X)$ .*

*Demostración.* Sea  $w(X) = \alpha$ , por lo que existe una base  $\beta$  de  $X$  tal que  $|\beta| = \alpha$ . Definamos la siguiente familia

$$\gamma = \{B \cap A : B \in \beta\},$$

veamos que  $\gamma$  es una base para  $A$ . Sea  $V$  un abierto en  $A$  distinto del vacío, por lo que existe un conjunto  $U$  abierto en  $X$  tal que  $V = U \cap A$ . Dado que  $\beta$  es base de  $X$  entonces existe una subfamilia  $\beta'$  de  $\beta$  tal que  $\bigcup_{B \in \beta'} B = U$ .

Observemos que

$$V = U \cap A = \left[ \bigcup_{B \in \beta'} B \right] \cap A = \bigcup_{B \in \beta'} (B \cap A).$$

Además

$$\{B \cap A : B \in \beta'\} \subset \gamma,$$

de ahí que  $V$  puede ser representado como la unión de una subfamilia de  $\gamma$ . Por lo tanto,  $\gamma$  es una base para  $A$ . Por lo anterior,  $w(A) \leq |\gamma| \leq |\beta| = \alpha = w(X)$ , es decir,  $w(A) \leq w(X)$ .  $\square$

**Definición 2.4.** *Sean  $X$  un espacio topológico y  $M$  un subespacio de  $X$ . Un **encaje** del subespacio  $M$  en el espacio  $X$  es una función  $e_M : M \rightarrow X$  tal que  $e_M(x) = x$ .*

**Definición 2.5.** *Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es llamada un **encaje homeomorfo** si es una composición de un homeomorfismo y un encaje, es decir, si existe  $Y' \subset Y$  y un homomorfismo  $h : X \rightarrow Y'$  tal que  $f(x) = (e_{Y'} \circ h)(x)$  para todo  $x \in X$ . Además, se dice que  $X$  se puede encajar (o que está encajado) en  $Y$  si existe un encaje homeomorfo de  $X$  en  $Y$ .*

*Note que  $Y' = f(X)$  y además,  $f(x) = (e_{Y'} \circ h)(x) = h(x)$  para toda  $x \in X$ . De manera que  $X$  se puede encajar en  $Y$  si existe  $Y'$  un subespacio de  $Y$  homeomorfo a  $X$ .*

Recordemos que una cubierta de un conjunto  $X$  es una familia  $\{A_s\}_{s \in S}$  de subconjuntos de  $X$  tal que  $\bigcup_{s \in S} A_s = X$  y que, si  $X$  es un espacio topológico,  $\{A_s\}_{s \in S}$  es una cubierta abierta (cerrada) de  $X$  si todos los conjuntos  $A_s$  son abiertos (cerrados).

**Definición 2.6.** *Un espacio topológico  $X$  es llamado **espacio compacto** si  $X$  es un espacio de Hausdorff y cada cubierta abierta de  $X$  tiene una subcubierta finita, es decir, si para cada cubierta abierta  $\{U_s\}_{s \in S}$  del espacio  $X$  existe un conjunto finito  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset S$  tal que  $X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \dots \cup U_{s_k}$ .*

Los siguientes Teoremas son resultados clásicos en espacios compactos. Los cuales serán de utilidad en este trabajo.

**Teorema 2.7.** *[2, Teorema 3.1.2] Sea  $X$  un espacio compacto. Si  $M$  es un subespacio cerrado de  $X$  entonces es compacto.*

**Teorema 2.8.** *[2, Teorema 3.1.8] Sean  $X$  un espacio de Hausdorff y  $A \subset X$ . Si  $A$  es compacto, entonces  $A$  es un subconjunto cerrado en  $X$ .*

**Teorema 2.9.** *[2, Teorema 3.1.9] Todo espacio compacto es un espacio normal.*

**Teorema 2.10.** *[2, Teorema 3.1.10] Sean  $X$  un espacio compacto y  $Y$  un espacio de Hausdorff. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua, entonces  $f(X)$  es un subespacio compacto de  $Y$ .*

**Teorema 2.11.** *[2, Teorema 3.1.11] Sean  $X$  un espacio compacto y  $Y$  un espacio de Hausdorff. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua, entonces para cada  $A \subset X$  se cumple que  $\text{cl}_Y(f(A)) = f(\text{cl}_X(A))$ .*

**Teorema 2.12.** *[2, Teorema 3.1.13] Sean  $X$  un espacio compacto y  $Y$  un espacio de Hausdorff. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y biyectiva, entonces  $f$  es un homeomorfismo.*

La siguiente definición es necesaria para poder definir lo que será la compactación de Alexandroff. Esta es una condición que debilita la definición de espacio compacto.

**Definición 2.13.** *Un espacio topológico  $X$  es llamado un **espacio localmente compacto en  $x$** , si existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $\text{cl}_X(U)$  es un subespacio compacto de  $X$ . Además, decimos que  $X$  es un **espacio localmente compacto** si es localmente compacto en cada  $x \in X$ .*

**Teorema 2.14.** [2, Teorema 3.3.1] *Cada espacio localmente compacto es un espacio de Tychonoff.*

Sean  $X$  un espacio topológico, una familia de espacios topológicos  $\{Y_s\}_{s \in S}$  y una familia de funciones continuas  $\{f_s\}_{s \in S}$ , donde  $f_s : X \rightarrow Y_s$ . Por [2, proposición 2.3.6], la función que asigna a cada  $x \in X$  el punto  $\{f_s(x)\}_{s \in S} \subset \prod_{s \in S} Y_s$  es continua; esta asociación es la **diagonal de las funciones**  $\{f_s(x)\}_{s \in S}$  y se denota por  $\Delta_{s \in S} f_s$ . El siguiente resultado es conocido como el Teorema de la Diagonal.

**Teorema 2.15.** [2, Teorema 2.3.20] *Sean  $X$  un espacio topológico y  $\{Y_s\}_{s \in S}$  una familia de espacios topológicos. Dada  $\mathcal{F} = \{f_s : X \rightarrow Y_s : s \in S\}$  una familia de funciones continuas, si existe un  $s \in S$  tal que  $f_s$  es un encaje homeomorfo, entonces  $\Delta_{s \in S} f_s : X \rightarrow \prod_{s \in S} Y_s$  es un encaje homeomorfo.*

### 3 Compactaciones

En esta sección se presenta la definición de la compactación de un espacio topológico y se demuestra que un espacio topológico admite una compactación si y solo si es un espacio de Tychonoff (véase el Teorema 3.4). Además, se incluyen algunos ejemplos ilustrativos de compactaciones.

Sea  $S$  un conjunto tal que  $|S| = m$ . El cubo de Tychonoff de peso  $m \geq \aleph_0$  es el producto cartesiano  $I^m = \prod_{s \in S} I_s$ , donde  $I_s = [0, 1]$  para cada  $s \in S$ . De [2, Teorema 3.2.4] se tiene que  $I^m$  es un espacio compacto. El cubo de Tychonoff  $I^{\aleph_0}$  es llamado el cubo de Hilbert. Note que si  $n \leq m$ , entonces el cubo  $I^n$  está encajado en  $I^m$ .

**Teorema 3.1.** *Un espacio topológico es un espacio de Tychonoff si y solo si está encajado en un espacio compacto.*

*Demostración.*  $[\Rightarrow]$  Sea  $X$  un espacio topológico de Tychonoff, veamos que  $X$  está encajado en un espacio compacto. Consideremos los siguientes casos:

- Si  $w(X) < \aleph_0$ , observemos que  $X$  es finito, por lo que  $X$  es compacto.

- Si  $w(X) \geq \aleph_0$ . Por [2, Teorema 3.2.4], el cubo de Tychonoff  $I^{w(X)}$  es un espacio compacto. Luego, por [2, Teorema 2.3.23], se tiene que  $I^{w(X)}$  es universal para todos los espacios de Tychonoff cuyo peso es mayor que  $\aleph_0$ .

En ambos casos es posible encajar  $X$  en un espacio compacto.

[ $\Leftarrow$ ] Sea  $X$  un espacio topológico que está encajado en un espacio compacto  $Y$ . Entonces, existe un homeomorfismo  $f : X \rightarrow M$  tal que  $f(X) = M \subset Y$ . Por el Teorema 2.9,  $Y$  es un espacio normal; por ende,  $Y$  es un espacio de Tychonoff. Así,  $M$  es un espacio de Tychonoff. Dado que  $f$  es un homeomorfismo, concluimos que  $X$  es un espacio de Tychonoff.  $\square$

**Definición 3.2.** Una *compactación* del espacio  $X$  es un par  $(Y, c)$ , donde  $Y$  es un espacio compacto y  $c : X \rightarrow Y$  es una encaje homeomorfo de  $X$  en  $Y$  tal que  $\text{cl}_Y(c(X)) = Y$ .

**Lema 3.3.** Si un espacio topológico  $X$  está encajado en un espacio compacto  $Y$ , entonces  $X$  tiene una compactación.

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio topológico encajado en un espacio compacto  $Y$ , por lo que existe un homeomorfismo  $f : X \rightarrow M$  tal que  $M = f(X) \subset Y$ . Por el Teorema 2.7 se cumple que  $\text{cl}_Y(f(X))$  es un espacio compacto. Note que el par  $(\text{cl}_Y(f(X)), e_{f(X)} \circ f)$  donde  $e_M$  denota el encaje de  $f(X)$  en  $\text{cl}_Y(f(X))$  es una compactación del espacio  $X$ .  $\square$

**Teorema 3.4.** Un espacio topológico  $X$  tiene una compactación si y solo si  $X$  es un espacio de Tychonoff.

*Demostración.* [ $\Rightarrow$ ] Supongamos que  $X$  tiene una compactación  $(Y, c)$ ; por ende,  $X$  está encajado en un espacio compacto. Así, por el Teorema 3.1,  $X$  es un espacio de Tychonoff.

[ $\Leftarrow$ ] Supongamos que  $X$  es un espacio de Tychonoff; por el Teorema 3.1,  $X$  está encajado en un espacio compacto; luego, por el Lema 3.3, concluimos que  $X$  tiene una compactación.  $\square$

**Lema 3.5.** Si  $m \geq \aleph_0$ , entonces  $w(I^m) \leq m$ .

*Demostración.* Dado que  $w(I) = \aleph_0$  entonces, considerando  $m = w(X)$  y aplicando el teorema [2, teorema 2.3.13], tenemos que  $w(I^{w(X)}) \leq w(X)$ .  $\square$

**Teorema 3.6.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $X$  es un espacio de Tychonoff, entonces existe  $(Y, c)$  una compactación de  $X$  tal que  $w(Y) = w(X)$ .*

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio de Tychonoff,

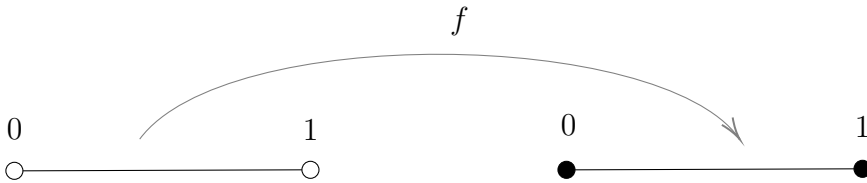
- Si  $w(X) < \aleph_0$ , entonces  $X$  es finito y, por lo tanto, compacto. Por otro lado, dado que  $X$  es un espacio de Tychonoff entonces, por el Teorema 3.4,  $X$  tiene una compactación  $(Y, c)$  donde  $Y$  es un espacio compacto, luego, por el Teorema 2.9, se deduce que  $Y$  es un espacio de Hausdorff. Por lo tanto, por el Teorema 2.8,  $c(X)$  es cerrado en  $Y$  de manera que  $c(X) = \text{cl}_Y(c(X)) = Y$ , así  $w(X) = w(c(X)) = w(Y)$ .
- Si  $w(X) \geq \aleph_0$ , entonces, por el Teorema [2, Teorema 2.3.23],  $X$  está encajado en  $I^{w(X)}$ , de ahí que existe un homeomorfismo  $f : X \rightarrow K$  donde  $K \subset I^{w(X)}$ . Sea  $Y = \text{cl}_{I^{w(X)}}(K)$ , como  $Y$  es cerrado en  $I^{w(X)}$  y sabemos, por el Teorema [2, Teorema 3.2.4], que  $I^{w(X)}$  es un espacio compacto, entonces  $Y$  es compacto. Por otro lado, del Teorema 2.3, la Observación 2.2 y el Lema 3.5, tenemos que

$$w(X) = w(K) \leq w(Y) \leq w(I^{w(X)}) \leq w(X),$$

; por lo tanto,  $w(Y) = w(X)$ . Si  $c = i \circ f$ , donde  $i$  denota el encaje de  $K$  en  $I^{w(X)}$ , entonces la pareja  $(Y, c)$  es una compactación de  $X$  tal que  $w(Y) = w(X)$ .

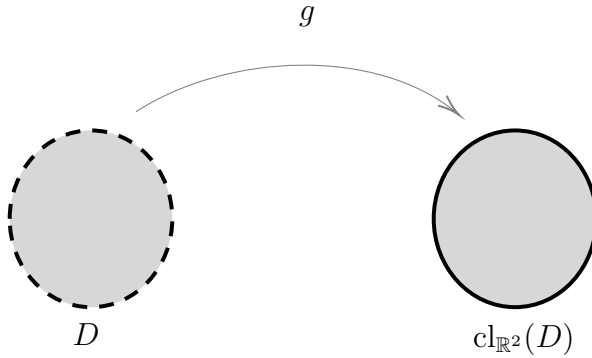
□

**Ejemplo 3.7.** *Consideremos el intervalo abierto  $(0, 1)$  en  $\mathbb{R}^2$ , con la topología euclidiana inducida. Como es bien conocido, este conjunto no es compacto. Sea  $f : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$  la función definida por  $f(x) = x$ . Note que el par  $(f, [0, 1])$  constituye una compactación de  $(0, 1)$ .*

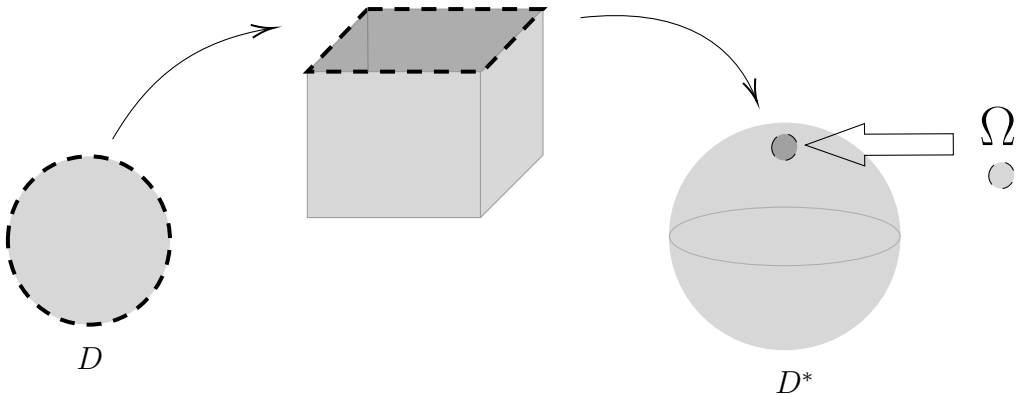


**Ejemplo 3.8.** *Sea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  el disco abierto unitario en  $\mathbb{R}^2$ , también conocido como la 2-celda. Consideramos a  $D$  con la topología*

inducida por la euclidiana de  $\mathbb{R}^2$ . Este conjunto no es compacto, ya que no es cerrado en  $\mathbb{R}^2$ . Similar al Ejemplo 3.7, podemos considerar el par  $(g, \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(D))$ , donde  $g$  es la función de  $D$  a  $\text{cl}_{\mathbb{R}^2}(D)$  definida por  $g(x, y) = (x, y)$ , el cual constituye a una compactación de  $D$ .



Sin embargo, podemos considerar otra compactación del espacio  $D$ . Sean  $\Omega \notin D$  y  $h : D \rightarrow D^*$  donde  $D^* = D \cup \{\Omega\}$ , la función definida por  $h(x, y) = (x, y)$ . El par  $(h, D^*)$  es conocido como la compactación de Alexandroff de la 2-celda, y estudiaremos propiedades de esta compactación más adelante. A diferencia de la compactación  $(g, \text{cl}_{\mathbb{R}^2}(D))$ , la compactación  $(h, D^*)$  agrega solo un punto y no todo el borde. La siguiente secuencia de diagramas, nos permitirá comprender la construcción de la compactación  $(h, D^*)$  más fácilmente.



**Ejemplo 3.9.** Sea  $T$  subconjunto del plano  $\mathbb{R}^2$  definido por

$$T = \left\{ \left( x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Este conjunto no es compacto, ya que no es cerrado en  $\mathbb{R}^2$ . Sea

$$T' = T \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

El par  $(i, T')$ , donde  $i$  es el encaje de  $T$  en  $T'$ , es una compactación de  $T$  ya que  $T$  es un subconjunto denso de  $T'$  y además  $T'$  es cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^2$ , por lo cual es compacto. El conjunto  $T'$  se conoce como **curva del topólogo**.

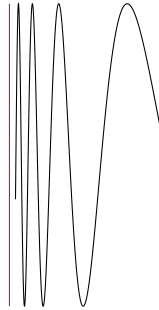


Figura 1: Curva seno del topólogo

## 4 Propiedades

En esta sección se introduce la noción de compactaciones equivalentes de un mismo espacio topológico (véase la Definición 4.3) y se demuestra que esta relación define una relación de equivalencia sobre la familia de todas las compactaciones de un espacio topológico dado (véase el Teorema 4.4). Asimismo, en el Teorema 4.9 se establece que el conjunto de clases de equivalencia inducido por esta relación admite una estructura de orden parcial. El objetivo principal de esta sección es sentar las bases necesarias para definir la compactación de Stone-Čech (véase el Teorema 4.17).

**Definición 4.1.** Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios topológicos. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y  $h : X \rightarrow Z$  un encaje homeomorfo. Decimos que  $f$  se puede extender continuamente a  $Z$ , si existe una función continua  $F : Z \rightarrow Y$  tal que  $(F \circ h)(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .

Note que si  $X \subset Z$ , es posible considerar a la función  $h$  como la función identidad.

Las compactaciones de un espacio  $X$  se denotarán por los símbolos  $cX$ ,  $c_iX$ ,  $\alpha X$ , etc., donde  $c$ ,  $c_i$  y  $\alpha$  denotan al encaje homeomorfo de  $X$  en la compactación correspondiente. Por lo tanto, al considerar una compactación como un espacio, sabremos cuál encaje homeomorfo se está utilizando. Dado que  $c : X \rightarrow cX$  no siempre es un homeomorfismo, consideramos la función  $c^r : X \rightarrow c(X)$  definida por  $c^r(x) = c(x)$  para todo  $x \in X$ , note que  $c^r$  es una función restricción de  $c$ . Así, para una compactación  $cX$  de un espacio  $X$  tenemos que

$$c : X \rightarrow cX, c^r \text{ es un homeomorfismo, y } \text{cl}_{cX}(c(X)) = cX.$$

**Definición 4.2.** Sea  $cX$  una compactación de un espacio  $X$ . El conjunto

$$cX \setminus c(X) = \{x \in cX : x \notin c(X)\}$$

es llamado el **residuo** de la compactación  $cX$ .

**Definición 4.3.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $c_1X, c_2X$  compactaciones del espacio  $X$ . Las compactaciones  $c_1X$  y  $c_2X$  son **equivalentes** si existe  $f : c_1X \rightarrow c_2X$  un homeomorfismo tal que  $(f \circ c_1)(x) = c_2(x)$  para todo  $x \in X$ . Por ende, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c_2} & c_2X \\ c_1 \downarrow & \nearrow f & \\ c_1X & & \end{array}$$

Por lo tanto, dos compactaciones son equivalentes si son homeomorfas y si el espacio  $X$  está encajado en ambas de la misma manera. Cuando  $c_1X$  y  $c_2X$  sean dos compactaciones equivalentes del espacio  $X$ , lo denotaremos por  $c_1X \cong c_2X$ .

Denotaremos por  $C(X)$  a la familia de todas las compactaciones de  $X$ . A continuación probamos que  $\cong$  es una relación de equivalencia en  $C(X)$ .

**Teorema 4.4.** *Sea  $X$  un espacio topológico. La relación  $\cong$  es de equivalencia en  $C(X)$ .*

*Demostración.* REFLEXIVA Sea  $cX \in C(X)$ , dado que:

$$(\text{Id}_{cX} \circ c)(x) = c(x) \text{ para todo } x \in X,$$

entonces  $cX \cong cX$ .

SIMÉTRICA Sean  $c_1X, c_2X \in C(X)$  tales que  $c_1X \cong c_2X$ , entonces existe un homeomorfismo  $f : c_1X \rightarrow c_2X$  tal que

$$(f \circ c_1)(x) = c_2(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Note que  $f^{-1} : c_2X \rightarrow c_1X$  es un homeomorfismo y además

$$c_1(x) = (f^{-1} \circ f \circ c_1)(x) = (f^{-1} \circ c_2)(x) \text{ para todo } x \in X,$$

por lo tanto  $c_2X \cong c_1X$ .

TRANSITIVA Sean  $c_1X, c_2X, c_3X \in C(X)$  tales que  $c_1X \cong c_2X$  y  $c_2X \cong c_3X$ , entonces existen homeomorfismos  $f : c_1X \rightarrow c_2X$  y  $g : c_2X \rightarrow c_3X$  tales que

$$(f \circ c_1)(x) = c_2(x) \text{ para todo } x \in X$$

y

$$(g \circ c_2)(x) = c_3(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Luego,  $g \circ f : c_1X \rightarrow c_3X$  es un homeomorfismo y además

$$((g \circ f) \circ c_1)(x) = (g \circ (f \circ c_1))(x) = (g \circ c_2)(x) = c_3(x) \text{ para todo } x \in X,$$

por lo tanto  $c_1X \cong c_3X$ . □

Del Teorema 4.4, para cada uno de los elementos de la familia de compactaciones de  $X$ , podemos definir su clase de equivalencia. En adelante, cada una de las clases de equivalencia se considerará como una única compactación de  $X$ , que se denotará como  $cX$ , donde  $cX$  es un representante de la clase de equivalencia a la cual pertenece  $cX$ . Denotaremos por  $\mathcal{C}(X)$  a la familia de todas las clases de equivalencia de  $C(X)$ .

**Observación 4.5.** Sean  $X$  un espacio compacto y  $cX$  es una compactación de  $X$ . Es decir,  $c : X \rightarrow cX$  es una función continua, luego por el Teorema 2.11 se cumple que  $cX = \text{cl}_{cX}(c(X)) = c(\text{cl}_X(X)) = c(X)$ , por ende  $c$  es suprayectiva, por lo que  $c$  es un homeomorfismo. Así, para cualesquiera dos compactaciones  $c_1X, c_2X$  de un espacio compacto  $X$ , la función  $c_2 \circ c_1^{-1} : c_1X \rightarrow c_2X$  es un homeomorfismo tal que  $((c_2 \circ c_1^{-1}) \circ c_1)(x) = c_2(x)$  para cada  $x \in X$ , es decir,  $c_1X \cong c_2X$ . Entonces, cualesquiera dos compactaciones de un espacio compacto son equivalentes. En particular, cualquier compactación de un espacio compacto  $X$  es equivalente a la compactación  $(X, \text{Id}_X)$ .

A continuación, definiremos una relación de orden en la familia  $\mathcal{C}(X)$ .

**Definición 4.6.** Sea  $X$  un espacio topológico. Se define la relación  $\preceq$  en la familia  $\mathcal{C}(X)$  por:  $c_2X \preceq c_1X$  si y solo si existe una función continua  $f : c_1X \rightarrow c_2X$  tal que  $(f \circ c_1)(x) = c_2(x)$  para todo  $x \in X$ , es decir,  $f(c_1(X)) = c_2(X)$ .

**Observación 4.7.** Tomando a  $f$  como en la Definición 4.6, el Teorema 2.11 implica que  $f(c_1X) = f(\text{cl}_{c_1X}(c_1(X))) = \text{cl}_{c_2X}(f(c_1(X))) = \text{cl}_{c_1X}(c_2(X)) = c_2X$ , es decir,  $f$  es suprayectiva. Por ende, la función  $f$  de la Definición 4.6 siempre es suprayectiva.

El siguiente Teorema será usado para probar que  $\preceq$ , es una relación de orden en  $\mathcal{C}(X)$ .

**Teorema 4.8.** [2, Teorema 1.5.4] Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Si  $Y$  es un espacio de Hausdorff y  $f, g : X \rightarrow Y$  son funciones continuas, entonces  $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$  es un subconjunto cerrado en  $X$ .

**Teorema 4.9.** Sea  $X$  un espacio topológico. La relación  $\preceq$  es una relación de orden en  $\mathcal{C}(X)$ .

*Demostración.* REFLEXIVA Sea  $cX \in \mathcal{C}(X)$ . Si consideramos la función  $\text{Id}_{cX}$ , entonces

$$(\text{Id}_{cX} \circ c)(x) = c(x) \text{ para todo } x \in X,$$

de ahí que  $cX \preceq cX$ .

TRANSITIVA Sean  $c_1X, c_2X \in \mathcal{C}(X)$  tales que  $c_1X \preceq c_2X$  y  $c_2X \preceq c_3X$ , entonces existen funciones continuas  $f : c_1X \rightarrow c_2X$  y  $g : c_2X \rightarrow c_3X$  tales que

$$(f \circ c_1)(x) = c_2(x) \text{ para todo } x \in X$$

y

$$(g \circ c_2)(x) = c_3(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Se cumple que  $g \circ f : c_1X \rightarrow c_3X$  es una función continua y además

$$((g \circ f) \circ c_1)(x) = (g \circ (f \circ c_1))(x) = (g \circ c_2)(x) = c_3(x) \text{ para todo } x \in X,$$

por lo tanto  $c_1X \preceq c_3X$ .

**ANTISIMÉTRICA** Sean  $c_1X, c_2X \in \mathcal{C}(X)$  tales que  $c_1X \preceq c_2X$  y  $c_2X \preceq c_1X$ . Veamos que  $c_1X$  es equivalente a  $c_2X$  de acuerdo con la Definición 4.3. Existen  $f_1 : c_1X \rightarrow c_2X$  y  $f_2 : c_2X \rightarrow c_1X$  funciones continuas, tales que  $(f_1 \circ c_1)(x) = c_2(x)$  y  $(f_2 \circ c_2)(x) = c_1(x)$ , para todo  $x \in X$ . Consideremos  $\mathcal{B} = \{x \in c_1X : (f_2 \circ f_1)(x) = \text{Id}_{c_1X}(x)\}$ . Sea  $y \in c_1(X)$ , existe un único  $x \in X$  tal que  $c_1(x) = y$ . Note que  $(f_2 \circ f_1)(y) = (f_2 \circ f_1)(c_1(x)) = ((f_2 \circ f_1) \circ c_1)(x) = (f_2 \circ c_2)(x) = c_1(x) = y$ . De tal manera que  $c_1(X) \subset \mathcal{B}$ , de esto que

$$c_1X = \text{cl}_{c_1X}(c_1(X)) \subset \text{cl}_{c_1X}(\mathcal{B}) \subset c_1X.$$

Por lo tanto,  $\text{cl}_{c_1X}(\mathcal{B}) = c_1X$ . Por el Teorema 4.8, tenemos que  $\mathcal{B} = \text{cl}_{c_X}(\mathcal{B}) = c_1X$ . Esto implica que  $f_2 \circ f_1 = \text{Id}_{c_1X}$ . Por ende,  $f_1$  es inyectiva, luego de la Observación 4.7 obtenemos que  $f_1$  es biyectiva. Finalmente por el Teorema 2.12  $f_1$  es un homeomorfismo, que además cumple que  $(f_1 \circ c_1)(x) = c_2(x)$  para todo  $x \in X$ . Concluimos que  $c_1X \cong c_2X$ .  $\square$

**Corolario 4.10.** *Dos compactaciones  $c_1X$  y  $c_2X$  de un espacio  $X$  son equivalentes si y solo si  $c_1X \preceq c_2X$  y  $c_2X \preceq c_1X$ .*

**Teorema 4.11.** *[2, Teorema 3.2.1] Sea  $A$  un subespacio denso de un espacio topológico  $X$ ,  $Y$  un espacio compacto y  $f : A \rightarrow Y$  una función continua. La función  $f$  tiene una extensión continua sobre  $X$  si y solo si para todo  $B_1, B_2$  subconjuntos cerrados y ajenos de  $Y$  se cumple que  $\text{cl}_X(f^{-1}(B_1)) \cap \text{cl}_X(f^{-1}(B_2)) = \emptyset$ .*

**Teorema 4.12.** *Las compactaciones  $c_1X$  y  $c_2X$  de un espacio  $X$  son equivalentes si y solo si para cada par  $A, B$  de subconjuntos cerrados de  $X$  se tiene que*

$$\text{cl}_{c_1X}(c_1(A)) \cap \text{cl}_{c_1X}(c_1(B)) = \emptyset \text{ si y solo si } \text{cl}_{c_2X}(c_2(A)) \cap \text{cl}_{c_2X}(c_2(B)) = \emptyset.$$

*Demostración.*  $[\Rightarrow]$  Supongamos que  $c_1X$  y  $c_2X$  son compactaciones equivalentes de  $X$ . Existe un homeomorfismo  $f : c_1X \rightarrow c_2X$  tal que  $(f \circ c_1)(x) = c_2(x)$  para todo  $x \in X$ . Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos cerrados de  $X$ . Dado que  $f$  es un homeomorfismo entonces  $f(\text{cl}_{c_1X}(c_1(A)) \cap \text{cl}_{c_1X}(c_1(B))) = f(\text{cl}_{c_1X}(c_1(A))) \cap f(\text{cl}_{c_1X}(c_1(B)))$ . Del Teorema 2.11 tenemos que

$$\begin{aligned} f(\text{cl}_{c_1X}(c_1(A))) \cap f(\text{cl}_{c_1X}(c_1(B))) &= \text{cl}_{c_2X}(f(c_1(A))) \cap \text{cl}_{c_2X}(f(c_1(B))) \\ &= \text{cl}_{c_2X}(c_2(A)) \cap \text{cl}_{c_2X}(c_2(B)). \end{aligned}$$

Por ende,  $f(\text{cl}_{c_1X}(c_1(A)) \cap \text{cl}_{c_1X}(c_1(B))) = \text{cl}_{c_2X}(c_2(A)) \cap \text{cl}_{c_2X}(c_2(B))$ , esto implica que:  $\text{cl}_{c_1X}(c_1(A)) \cap \text{cl}_{c_1X}(c_1(B)) = \emptyset$  si y solo si  $\text{cl}_{c_2X}(c_2(A)) \cap \text{cl}_{c_2X}(c_2(B)) = \emptyset$ .

$[\Leftarrow]$  Ahora supongamos que para cada par  $A, B$  de subconjuntos cerrados en  $X$  se cumple que

$$\text{cl}_{c_1X}(c_1(A)) \cap \text{cl}_{c_1X}(c_1(B)) = \emptyset \text{ si y solo si } \text{cl}_{c_2X}(c_2(A)) \cap \text{cl}_{c_2X}(c_2(B)) = \emptyset.$$

Recuerde que las funciones  $c_1^r : X \rightarrow c_1(X)$  y  $c_2^r : X \rightarrow c_2(X)$  son homeomorfismos. Definimos

$$f_1 := c_2 \circ (c_1^r)^{-1} : c_1(X) \rightarrow c_2X \quad \text{y} \quad f_2 := c_1 \circ (c_2^r)^{-1} : c_2(X) \rightarrow c_1X.$$

Luego,  $f_1$  y  $f_2$  son funciones continuas.

*Afirmación* La funciones  $f_1$  y  $f_2$  se pueden extender continuamente a  $c_1X$  y  $c_2X$ , respectivamente.

*Demostración de la afirmación.* Sean  $A, B$  subconjuntos cerrados en  $c_2X$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Veamos que  $\text{cl}_{c_1X}(f_1^{-1}(A)) \cap \text{cl}_{c_1X}(f_1^{-1}(B)) = \emptyset$ . Para ello, note que  $f_1^{-1}(A) = c_1^r(c_2^{-1}(A))$  y  $f_1^{-1}(B) = c_1^r(c_2^{-1}(B))$ . De la continuidad de  $c_2$ , se cumple que  $c_2^{-1}(A)$  y  $c_2^{-1}(B)$  son cerrados en  $X$ . Además,  $c_2(c_2^{-1}(A)) \subset A$  y  $c_2(c_2^{-1}(B)) \subset B$ , por ende,

$$\text{cl}_{c_2X}(c_2(c_2^{-1}(A))) \subset \text{cl}_{c_2X}(A) = A \text{ y } \text{cl}_{c_2X}(c_2(c_2^{-1}(B))) \subset \text{cl}_{c_2X}(B) = B.$$

Por ende,  $\text{cl}_{c_2X}(c_2(c_2^{-1}(A))) \cap \text{cl}_{c_2X}(c_2(c_2^{-1}(B))) = \emptyset$ . La hipótesis implica que  $\text{cl}_{c_1X}(c_1(c_2^{-1}(A))) \cap \text{cl}_{c_1X}(c_1(c_2^{-1}(B))) = \emptyset$ . Dado que  $c_1(c_2^{-1}(A)) =$

$c_1^r(c_2^{-1}(A))$  y  $c_1(c_2^{-1}(B)) = c_1^r(c_2^{-1}(B))$ , se tiene que  $\text{cl}_{c_1X}(f_1^{-1}(A)) \cap \text{cl}_{c_1X}(f_1^{-1}(B)) = \emptyset$ . Por el Teorema 4.11, la función  $f_1$  se pueden extender continuamente  $c_1X$ . Análogamente, se prueba que la función  $f_2$  se pueden extender continuamente  $c_2X$ .

Por lo tanto, podemos asegurar que existen:

$$C_1 : c_1X \rightarrow c_2X \quad \text{y} \quad C_2 : c_2X \rightarrow c_1X,$$

funciones continuas tales que  $C_1(y) = f_1(y)$  para todo  $y \in c_1(X)$  y  $C_2(y) = f_2(y)$  para todo  $y \in c_2(X)$ . Con esto termina la prueba de la Afirmación.

Sea  $x \in X$ , luego  $c_1(x) \in c_1(X)$  por lo que  $(C_1 \circ c_1)(x) = C_1(c_1(x)) = f_1(c_1(x)) = (c_2 \circ (c_1^r)^{-1})(c_1(x)) = c_2(x)$ . Por lo tanto  $c_2X \preceq c_1X$ . A su vez, para cada  $x \in X$ ,  $c_2(x) \in c_2(X)$  por lo que  $(C_2 \circ c_2)(x) = C_2(c_2(x)) = f_2(c_2(x)) = (c_1 \circ (c_2^r)^{-1})(c_2(x)) = c_1(x)$ . Por ende  $c_1X \preceq c_2X$ . Finalmente, por el Corolario 4.10 concluimos que  $c_1X$  y  $c_2X$  son equivalentes.  $\square$

**Lema 4.13.** *Sea  $A$  un subespacio denso de un espacio de Hausdorff  $X$  y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua de  $X$  a un espacio arbitrario  $Y$ . Si  $f|_A : A \rightarrow f(A) \subset Y$  es un homeomorfismo, entonces  $f(X \setminus A) \cap f(A) = \emptyset$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe  $y \in f(X \setminus A) \cap f(A)$ . Por ende, existen  $x \in X \setminus A$  y  $a \in A$  tales que  $f(x) = y = f(a)$ . Como  $X$  es Hausdorff y  $A$  es denso en  $X$ , entonces  $x \in \text{cl}_X(A)$ . Por [3, Teorema 11.7] existe una red  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A$  tal que  $x_\lambda \rightarrow x$ . Luego, como  $f$  es continua, por [3, Teorema 11.8] se cumple que  $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ . Note que  $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  es una red que converge a  $f(a)$  en  $f(A)$ . Dado que  $f|_A$  es un homeomorfismo, se cumple que  $(f|_A)^{-1}$  es una función continua. Así, por [3, Teorema 11.8] se cumple que  $(f|_A)^{-1}(f(x_\lambda)) \rightarrow (f|_A)^{-1}(f(a))$ , esto implica que  $x_\lambda \rightarrow a$ . Finalmente, del hecho que  $X$  es Hausdorff, por [3, Teorema 13.7] se cumple que  $x = a$ , lo cual es una contradicción. Por ende  $f(X \setminus A) \cap f(A) = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 4.14.** *Si  $c_1X$  y  $c_2X$  son compactaciones del espacio  $X$  y existe una función continua  $f : c_1X \rightarrow c_2X$  tal que  $(f \circ c_1)(x) = c_2(x)$  para todo  $x \in X$ , entonces  $f(c_1X \setminus c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X)$ .*

*Demostración.* Sea  $g : c_1(X) \rightarrow c_2(X)$  definida por  $g(y) = (c_2^r \circ (c_1^r)^{-1})(y)$ . Note que  $g$  es un homeomorfismo. Sea  $y \in c_1(X)$ , por lo que  $(c_1^r)^{-1}(y) \in X$  entonces  $g(y) = (c_2^r \circ (c_1^r)^{-1})(y) = c_2^r((c_1^r)^{-1}(y)) = (f \circ c_1)((c_1^r)^{-1}(y)) = f(y)$ .

Por hipótesis,  $f(c_1(X)) = c_2(X)$ , por lo tanto, se cumple que la función  $f|_{c_1(X)} : c_1(X) \rightarrow f(c_1(X)) \subset c_2X$  es igual a  $g$ , por lo que,  $f|_{c_1(X)}$  es un homeomorfismo. Dado que  $c_1(X)$  es un subespacio denso en  $c_1X$ , por el Lema 4.13, se cumple que  $f(c_1X \setminus c_1(X)) \cap f(c_1(X)) = \emptyset$ . Así, dado que  $f(c_1X) = f(c_1(X)) \cup f(c_1X \setminus c_1(X))$ , podemos afirmar que:  $f(c_1X) \setminus f(c_1(X)) = f(c_1X \setminus c_1(X))$ . De la Observación 4.7 y de la hipótesis, concluimos que  $c_2X \setminus c_2(X) = f(c_1X \setminus c_1(X))$ .  $\square$

**Teorema 4.15.** [2, 3.3.11] *Un espacio topológico es localmente compacto si y solo si es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto.*

**Teorema 4.16.** *Para cada espacio de Tychonoff  $X$  las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El espacio  $X$  es localmente compacto.*
2. *Para cada compactación  $cX$  de el espacio  $X$  el residuo  $cX$  es cerrado en  $X$ .*
3. *Existe una compactación  $cX$  del espacio  $X$  tal que el residuo es cerrado en  $cX$ .*

*Demostración.* [1  $\Rightarrow$  2] Sean  $X$  un espacio localmente compacto y  $cX \in \mathcal{C}(X)$ . Dado que  $c^r$  es un homeomorfismo, por [2, Teorema 3.3.15],  $c(X)$  es un espacio localmente compacto. Luego, [2, Teorema 3.3.9] implica que  $c(X)$  es abierto en  $\text{cl}_{cX}(c(X)) = cX$ . Por ende,  $cX \setminus c(X)$  es cerrado en  $cX$ .

[2  $\Rightarrow$  3] Es inmediato del Teorema 3.4.

[3  $\Rightarrow$  1] Supongamos que existe  $cX \in \mathcal{C}(X)$  tal que  $cX \setminus c(X)$  es cerrado en  $cX$ , de ahí que  $c(X)$  es abierto en  $cX$ . Dado que  $c^r$  es un homeomorfismo, tenemos que  $X$  es homeomorfo a  $C(X)$ . Luego, por el Teorema 4.15,  $X$  es localmente compacto.  $\square$

El Teorema 4.17, establece una propiedad importante de la familia  $\mathcal{C}(X)$ , la cual será importante en la sección 6.

**Teorema 4.17.** *Toda subfamilia no vacía  $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}(X)$  tiene una mínima cota superior, con respecto al orden  $\preceq$  en  $\mathcal{C}(X)$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}_0 = \{c_sX\}_{s \in S}$  y  $c_0 = \Delta_{s \in S} c_s : X \rightarrow \prod_{s \in S} c_sX$  la diagonal de  $\mathcal{C}_0$ . Por el Teorema 2.15,  $c_0$  es un encaje homeomorfo. Sea  $c_0X$  la cerradura

de  $c_0(X)$  en  $\prod_{s \in S} c_s X$ . El Teorema 2.7 y [2, Teorema 3.2.4], implican que  $c_0 X$  es un espacio compacto. Por lo que  $c_0 X \in \mathcal{C}(X)$ . Veamos que  $c_0 X$  es la mínima cota superior de la familia  $\mathcal{C}_0$ . Sea  $s \in S$  y  $p_s : \prod_{s \in S} c_s X \rightarrow c_s X$  la función proyección. Sea  $x \in X$ , entonces  $(p_s|_{c_0 X} \circ c_0)(x) = p_s|_{c_0 X}(c_0(x)) = p_s|_{c_0 X}(\{c_s(x)\}_{s \in S}) = c_s(x)$ . Dado que la restricción  $p_s|_{c_0 X}$  es una función continua, tenemos que  $c_s X \preceq c_0 X$  para cada  $s \in S$ .

Supongamos que existe  $cX \in \mathcal{C}(X)$  tal que  $c_s X \preceq cX$  para cada  $s \in S$ . Luego, para cada  $s \in S$  existe una función continua  $f_s : cX \rightarrow c_s X$  tal que  $(f_s \circ c)(x) = c_s(x)$ , para cada  $x \in X$ . Sea  $F = \Delta_{s \in S} f_s$  la diagonal de la familia  $\{f_s\}_{s \in S}$ , note que  $F$  es una función continua. Sea  $x \in X$ , entonces  $(F \circ c)(x) = F(c(x)) = \{f_s(c(x))\}_{s \in S} = \{c_s(x)\}_{s \in S} = c_0(x)$ . Por lo tanto,  $F(c(X)) = c_0(X)$ , del Teorema 2.11 se tiene que  $F(cX) = c_0 X$ . Por ende,  $F : cX \rightarrow c_0 X$  es una función continua tal que  $(F \circ c)(x) = c_0(x)$  para todo  $x \in X$ , por lo que  $c_0 X \preceq cX$ . Así, concluimos que  $c_0 X$  es la mínima cota superior de la subfamilia  $\mathcal{C}_0$ .  $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia directa de los Teoremas 3.4 y 4.17.

**Corolario 4.18.** *Si  $X$  es un espacio de Tychonoff, entonces existe en  $\mathcal{C}(X)$  un elemento maximal con respecto al orden  $\preceq$ .*

## 5 Compactación de Alexandroff

El objetivo principal de esta sección es establecer las condiciones que debe cumplir un espacio topológico  $X$  para que la familia  $\mathcal{C}(X)$  posea un elemento minimal. Esta compactación se conoce como la compactación de Alexandroff (véase el Teorema 5.1), y guarda una analogía con el Teorema 4.17. Además, el Teorema 5.2 demuestra que el Teorema 5.1 puede reformularse como una bicondicional.

**Teorema 5.1.** *TEOREMA DE COMPACTACIÓN DE ALEXANDROFF.*

*Sea  $X$  un espacio no compacto. Si  $X$  es localmente compacto, entonces existe  $\omega X \in \mathcal{C}(X)$  tal que  $|\omega X \setminus \omega(X)| = 1$ . Esta compactación es el elemento más pequeño en  $\mathcal{C}(X)$  con respecto al orden  $\preceq$ , y además  $w(X) = w(\omega X)$ .*

*Demostración.* Sean  $(X, \mathcal{O})$  un espacio localmente compacto y no compacto, y  $\Omega \notin X$ . Definamos  $\omega X = X \cup \{\Omega\}$  y

$$\mathcal{O}_\omega = \mathcal{O} \cup \{ \{\Omega\} \cup (X \setminus F) : F \text{ es un subespacio compacto de } X \}.$$

*Afirmación 1.* La familia  $\mathcal{O}_\omega$  es una topología en el conjunto  $\omega X$ .

*Demostración de la afirmación 1.* Del Teorema 2.14, tenemos que  $X$  es un espacio de Tychonoff, por ende  $X$  es de Hausdorff. Así, por el Teorema 2.8, cualquier subconjunto compacto de  $X$  es cerrado en  $X$ . Para ver que  $\mathcal{O}_\omega$  es una topología en  $\omega X$ , es suficiente demostrar las siguientes proposiciones:

- (a)  $\emptyset, \omega X \in \mathcal{O}_\omega$ .
- (b) Si  $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_\omega$  entonces  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_\omega$ .
- (c) Si  $\{U_s\}_{s \in S} \subset \mathcal{O}_\omega$  entonces  $\bigcup_{s \in S} U_s \in \mathcal{O}_\omega$ .

Para (a). Note que  $\emptyset \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\omega$ , además  $\emptyset$  es subespacio compacto de  $X$ , entonces

$$\{\Omega\} \cup X = \{\Omega\} \cup (X \setminus \emptyset) \in \mathcal{O}_\omega.$$

Para (b). Sean  $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_\omega$ . Tenemos los siguientes casos:

- Si  $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$  entonces, dado que  $\mathcal{O}$  es una topología, se tiene que  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ , de ahí que  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_\omega$ .
- Si  $U_1, U_2 \notin \mathcal{O}$  entonces existen subespacios compactos  $F_1, F_2$  de  $X$  tales que

$$U_1 = \{\Omega\} \cup (X \setminus F_1)$$

y

$$U_2 = \{\Omega\} \cup (X \setminus F_2).$$

Luego

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= [\{\Omega\} \cup (X \setminus F_1)] \cap [\{\Omega\} \cup (X \setminus F_2)] \\ &= \{\Omega\} \cup [(X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2)] \\ &= \{\Omega\} \cup [X \setminus (F_1 \cup F_2)]. \end{aligned}$$

Dado que  $F_1, F_2$  son subespacios cerrados de  $X$ , por el teorema [2, Corolario 3.1.4],  $F_1 \cup F_2$  es un subespacio compacto de  $X$ , por lo tanto  $U_1 \cap U_1 \in \mathcal{O}_\omega$ .

- Sin perder generalidad, supongamos que  $U_1 \in \mathcal{O}$  y  $U_2 \notin \mathcal{O}$ . Existe  $F$  subespacio compacto de  $X$  tal que

$$U_2 = \{\Omega\} \cup (X \setminus F).$$

Luego

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap [\{\Omega\} \cup (X \setminus F)] = U_1 \cap (X \setminus F),$$

dado que  $F$  es un subconjunto cerrado de  $X$ , se cumple que  $X \setminus F \in \mathcal{O}$ , por lo tanto  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\omega$ .

Esto concluye la prueba de la proposición (b).

Para (c). Sea  $\{U_s\}_{s \in S} \subset \mathcal{O}_\omega$ . Definamos los siguientes conjuntos:

$$S_1 = \{s \in S : U_s \in \mathcal{O}\} \text{ y } S_2 = \{s \in S : U_s \notin \mathcal{O}\}.$$

Tenemos los siguientes dos casos:

- $S_2 = \emptyset$ . Entonces  $S_1 = S$ , dado que  $\mathcal{O}$  es una topología para  $X$ , se cumple que  $\bigcup_{s \in S} U_s = \bigcup_{s \in S_1} U_s \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\omega$ .
- $S_2 \neq \emptyset$ . Entonces para cada  $j \in S_2$  existe un subespacio compacto

$F_j$  de  $X$  tal que  $U_j = \{\Omega\} \cup (X \setminus F_j)$ . Luego

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{s \in S} U_s &= \bigcup_{i \in S_1} U_i \cup \bigcup_{j \in S_2} U_j \\
 &= \bigcup_{i \in S_1} U_i \cup \left[ \{\Omega\} \cup \bigcup_{j \in S_2} (X \setminus F_j) \right] \\
 &= \{\Omega\} \cup \left[ \bigcup_{i \in S_1} U_i \cup \bigcup_{j \in S_2} (X \setminus F_j) \right] \\
 &= \{\Omega\} \cup \left[ \bigcup_{i \in S_1} U_i \cup \left( X \setminus \bigcap_{j \in S_2} F_j \right) \right] \\
 &= \{\Omega\} \cup \left[ X \setminus \left( (X \setminus \bigcup_{i \in S_1} U_i) \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j \right) \right] \\
 &= \{\Omega\} \cup \left[ X \setminus \left( \bigcap_{i \in S_1} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j \right) \right].
 \end{aligned}$$

Sea  $j_0 \in S_2$ , note que  $\bigcap_{i \in S_1} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j \subset F_{j_0}$ . Dado que  $\mathcal{O}$  es una topología de  $X$ , se cumple que  $\bigcap_{i \in S_1} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j$  es un subconjunto cerrado de  $X$ . Esto implica que  $\bigcap_{i \in S_1} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j$  es cerrado en  $F_{s_0}$ . Como  $F_{s_0}$  es compacto, por el Teorema 2.7, se tiene que  $\bigcap_{i \in S_1} (X \setminus U_i) \cap \bigcap_{j \in S_2} F_j$  es compacto en  $F_{s_0}$  y por ende compacto en  $X$ . Por lo tanto,  $\bigcup_{s \in S} U_s \in \mathcal{O}_\omega$ .

Esto concluye la demostración de la Afirmación 1.

*Afirmación 2.* El espacio topológico  $(\omega X, \mathcal{O}_\omega)$  es de Hausdorff.

*Demostración de la afirmación 2.* Sean  $x, y \in \omega X$ , consideremos los siguientes casos:

- $x, y \in X$ . Como  $X$  es un espacio localmente compacto entonces, por el Teorema 2.14,  $X$  es un espacio de Tychonoff y por ende es un espacio de Hausdorff. De ahí que existen  $U, V \in \mathcal{O}$  tales que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . De la definición de la topología  $\mathcal{O}_\omega$ , tenemos que  $U, V \in \mathcal{O}_\omega$ .
- $x \in X$  y  $y = \Omega$ . Dado que  $X$  es localmente compacto, existe una vecindad  $T$  de  $x$  tal que  $\text{cl}_X(T)$  es compacto. Como  $T$  es vecindad de  $x$ , existe  $U$  abierto de  $X$ , y por ende de  $\omega X$ , tal que  $x \in U \subset T$ . Por otro lado, consideremos  $V = \{\Omega\} \cup (X \setminus \text{cl}_X(T))$ . Se tiene que  $V$  es abierto en  $\omega X$ . Note que  $U, V \in \mathcal{O}_\omega, x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

Por lo tanto,  $(\omega X, \mathcal{O}_\omega)$  es un espacio de Hausdorff.

Definamos la siguiente función

$$\omega : X \rightarrow \omega X \quad \text{tal que} \quad \omega(x) = x.$$

*Afirmación 3.* El par  $(\omega, \omega X)$  es una compactación de  $X$ .

*Demostración de la afirmación 3.* Probaremos las siguientes proposiciones:

- (a) La función  $\omega$  es un encaje homeomorfo.
- (b)  $\omega(X)$  es denso en  $\omega X$
- (c) El espacio  $\omega X$  es compacto.

Para (a). Consideremos  $i : X \rightarrow \omega(X)$  definida por  $i(x) = x$ . La función  $i$  es biyectiva; además, de la topología de  $\omega X$ , se cumple que  $i$  es un homeomorfismo. Sea  $e_{\omega(X)}$  el encaje de  $\omega(X)$  en el espacio  $\omega X$ . Finalmente, note que  $\omega = e_{\omega(X)} \circ i$ , por lo tanto  $\omega$  es un encaje homeomorfo. Para (b). Veamos que  $\{\Omega\}$  no es abierto en  $\omega X$ . Para que  $\{\Omega\}$  sea abierto tiene que tener la forma  $\{\Omega\} = \{\Omega\} \cup X \setminus T$ , donde  $T$  es compacto. Esto si y solo si  $X \setminus T = \emptyset$ , es decir,  $T = X$ . Lo cual no es posible, ya que  $X$  no es compacto. De tal manera que  $\{\Omega\}$  no es abierto en  $\omega X$ . Por lo tanto, cualquier conjunto abierto, no vacío, de  $\omega X$  intersección con  $\omega(X)$  es distinto del vacío. Luego,  $\omega(X)$  es denso en  $\omega X$ .

Para (c). Sea  $\{U_s\}_{s \in S}$  una cubierta abierta de  $\omega X$ . Podemos suponer que existe  $s_0 \in S$  y  $F$  un subconjunto compacto de  $X$  tales que

$$\Omega \in \{\Omega\} \cup (X \setminus F) = U_{s_0}.$$

Luego

$$X \setminus U_{s_0} = X \setminus [\{\Omega\} \cup (X \setminus F)] = (X \setminus \{\Omega\}) \cap F = F.$$

De tal manera que  $X \setminus U_{s_0}$  es un subconjunto compacto de  $X$ . Dado que, para todo  $s \in S$  se cumple que  $U_s \setminus \{\Omega\}$  es abierto en  $X$ , existe un

conjunto finito  $\{s_1, \dots, s_k\} \subset S$  tal que  $X \setminus U_{s_0} \subset \bigcup_{i=1}^k U_{s_i}$ . Por ende,

$$\bigcup_{i=0}^k U_{s_i} \subset \bigcup_{s \in S} U_s = \omega X = (X \setminus U_{s_0}) \cup U_{s_0} \subset \bigcup_{i=1}^k U_{s_i} \cup U_{s_0} = \bigcup_{i=0}^k U_{s_i},$$

Así,  $\omega X = \bigcup_{i=0}^k U_{s_i}$ , por lo tanto  $\omega X$  es compacto.

Por lo tanto,  $\omega X$  es una compactación de  $X$ . Además,  $\omega X \setminus \omega(X) = \{\Omega\}$ , es decir,  $|\omega X \setminus \omega(X)| = 1$ . A continuación, demostraremos la segunda parte del Teorema.

*Afirmación 4.* Si  $cX \in \mathcal{C}(X)$  entonces  $\omega X \preccurlyeq cX$ . Además, se cumple que  $w(X) = w(\omega X)$ .

*Demostración de la afirmación 4.* Sea  $cX \in \mathcal{C}(X)$  y definamos la función  $f : cX \rightarrow \omega X$  por

$$f(z) = \begin{cases} \omega((c^r)^{-1}(x)) & \text{si } z \in c(X) \\ \Omega & \text{si } z \in cX \setminus c(X). \end{cases}$$

Sea  $x \in X$ , luego

$$(f \circ c)(x) = f(c(x)) = \omega((c^r)^{-1}(c(x))) = \omega(x).$$

Ahora veamos que  $f$  es continua. Sea  $U \in \mathcal{O}_\omega$ , tenemos los siguientes casos:

(i)  $U \in \mathcal{O}$ . Note que

$$f^{-1}(U) = (\omega \circ (c^r)^{-1})^{-1}(U) = (c^r \circ \omega^{-1})(U).$$

Como  $\omega$  es una función continua, entonces  $w^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Dado que  $c^r$  es un homeomorfismo, se cumple que  $c^r(w^{-1}(U))$  es abierto en  $c(X)$ . Así, por el Teorema 4.16,  $c(X)$  es abierto en  $cX$ , de ahí que  $f^{-1}(U) = c^r(w^{-1}(U))$  es abierto en  $cX$ .

(ii)  $U = \{\Omega\} \cup (X \setminus F)$  donde  $F$  es un subespacio compacto de  $X$ . Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}(\{\Omega\} \cup (X \setminus F)) \\ &= f^{-1}(\{\Omega\}) \cup f^{-1}(X \setminus F) \\ &= [cX \setminus c(X)] \cup [(c^r \circ \omega^{-1})(X \setminus F)] \\ &= [cX \setminus c(X)] \cup c^r(X \setminus F) \\ &= [cX \setminus c(X)] \cup [c(X) \setminus c(F)]. \end{aligned}$$

Note que  $c(F) \subset c(X)$ , por lo que  $[cX \setminus c(X)] \cup [c(X) \setminus c(F)] = cX \setminus c(F)$ . Es decir,  $f^{-1}(U) = cX \setminus c(F)$ . Dado que  $c$  es una función continua y  $F$  es un subespacio compacto de  $X$ , se cumple que  $c(F)$  es compacto en  $cX$ . El Teorema 2.8 implica que  $c(F)$  es cerrado en  $cX$ . Por lo tanto,  $cX \setminus c(F)$  es abierto en  $cX$ , es decir,  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $cX$ .

De (i) y (ii) concluimos que  $f$  es una función continua. Por lo tanto,  $\omega X \preceq cX$ . Es decir,  $\omega X$  es el elemento más pequeño en  $\mathcal{C}(X)$  con respecto al orden  $\preceq$ .

Finalmente, veamos que  $w(X) = w(\omega X)$ . Dado que  $X \subset \omega X$ , entonces  $w(X) \leq w(\omega X)$ . Note que  $w(X) \geq \aleph_0$  ya que en caso contrario,  $X$  sería compacto, pero por hipótesis sabemos que  $X$  no es compacto. Sea  $x_0 \in X$  y consideremos

$$A_1 = X \quad \text{y} \quad A_2 = \{\Omega\} \cup (X \setminus \{x_0\}).$$

Tenemos que  $A_1, A_2$  es una cubierta abierta de  $\omega X$ , aplicando [2, corolario 3.1.20], tenemos que  $w(\omega X) \leq w(X)$ . Por lo tanto,  $w(X) = w(\omega X)$ .

Esto finaliza la demostración del teorema.  $\square$

A la compactación  $\omega X$ , de un espacio  $X$  localmente compacto pero no compacto, se le conoce como la **compactación de Alexandroff** de  $X$ .

**Teorema 5.2.** *Sea  $X$  un espacio de Tychonoff no compacto. Si existe  $sX \in \mathcal{C}(X)$  el elemento más pequeño con respecto al orden  $\preceq$ , entonces  $X$  es localmente compacto y  $sX$  es equivalente a la compactación de Alexandroff  $\omega X$  de  $X$ .*

*Demostración.* Veamos primero que  $X$  es localmente compacto, para ello probaremos que el residuo de  $sX$  consta de un solo elemento. Supongamos que existen  $x_1, x_2 \in sX \setminus s(X)$  tales que  $x_1 \neq x_2$ .

Note que  $X_1 = sX \setminus \{x_1, x_2\}$  es un subconjunto abierto de  $sX$ , por el Teorema 4.15 se cumple que  $X_1$  es localmente compacto. Si  $X_1$  es compacto, se tiene que  $X_1$  es cerrado en  $sX$ , esto implica que  $\{x_1, x_2\}$  es abierto en  $sX$ , lo cual es imposible. Por ende,  $X_1$  no es compacto. Por el Teorema 5.1, podemos considerar  $\omega X_1 = \omega(X_1) \cup \{\Omega\}$  la compactación de Alexandroff de  $X_1$ .

Veamos que  $\omega X_1$  es una compactación de  $X$ . Consideremos  $w_s : X \rightarrow \omega X_1$  definida por  $w_s(x) = (\omega \circ s')(x)$ , donde  $s' : X \rightarrow X_1$  está definida por  $s'(x) = s(x)$ . Note que  $w_s$  es un encaje homeomorfo. Sea  $U$  un abierto en  $\omega X_1$ . Dado que  $\omega$  es continua, se cumple que  $\omega^{-1}(U)$  es abierto en  $X_1$ , al ser  $X_1$  abierto en  $sX$ , entonces  $\omega^{-1}(U)$  es abierto en  $sX$ , por lo que  $\omega^{-1}(U) \cap s(X) \neq \emptyset$ . Así, existe  $x \in X$  tal que  $s'(x) \in \omega^{-1}(U)$ , es decir,  $w_s(x) \in U$ . Por ende,  $U \cap w_s(X) \neq \emptyset$ , es decir,  $\omega X_1 = \text{cl}_{\omega X_1}(w_s(X))$ .

Se tiene que  $w_s X = \omega X_1$ . Luego,  $sX \preceq w_s X$ , por lo que existe  $f : w_s X \rightarrow sX$  una función continua y por la Observación 4.7 suprayectiva, tal que  $(f \circ w_s)(x) = s(x)$  para todo  $x \in X$ . Note que,  $w_s(X) = \omega(s'(X)) = \omega(s(X))$  es una copia de  $s(X)$  en  $w_s X$  y  $\omega(X_1) \subset w_s X$ , es decir,  $w_s X$  contiene una copia de  $X_1$ .

Veamos que la función  $f' : w_s(X) \rightarrow s(X)$  definida por  $f'(z) = f(z)$  es la función *identidad*. Note que  $f'$  está bien definida y es suprayectiva. Sea  $z \in w_s(X) = \omega(s'(X)) \subset \omega(X_1)$ , dado que la función  $\omega$  es la función identidad restringida a su imagen, se cumple que  $z = \omega^{-1}(z) \subset s'(X)$ . A su vez, existe  $x \in X$  tal que  $s'(x) = z$ . Luego,  $w_s(x) = z$ , por ende,  $f(z) = f(w_s(x)) = s(x) = s'(x) = z$ . Por lo tanto,  $f'$  es la *identidad*.

Definamos  $f'' : \omega(X_1) \rightarrow X_1$  por  $f''(z) = f(z)$ . Sea  $D = \{z \in \omega(X_1) : f''(z) = z\}$ . Como  $f'$  es la función *identidad* y  $w_s(X) \subset \omega(X_1)$ , se cumple que  $w_s(X) \subset D$ . Veamos que  $D = \omega(X_1)$ . Supongamos que  $D \neq \omega(X_1)$ . Por el Teorema 4.8 se cumple que  $\omega(X_1) \setminus D$  es un subconjunto abierto de  $\omega(X_1)$ . Dado que  $\omega(X_1)$  es un abierto en  $\omega X_1$ , se cumple que  $\omega(X_1) \setminus D$  es un subconjunto abierto en  $\omega X_1$ . Por ende,  $\omega^{-1}(\omega(X_1) \setminus D)$  es un subconjunto abierto, no vacío, en  $X_1$ . A su vez, dado que  $X_1$  es abierto en  $sX$ , se cumple que  $\omega^{-1}(\omega(X_1) \setminus D)$  es un subconjunto abierto en  $sX$ . Así,  $(\omega^{-1}(\omega(X_1) \setminus D)) \cap s(X) \neq \emptyset$ , esto implica que existe  $z \in s(X)$  tal que  $z = \omega(z) \in \omega(X_1) \setminus D$ . Como  $z = \omega(z) \in \omega(s(X)) = w_s(X) \subset \omega(X_1)$ , entonces  $f''(z) = f'(z) = z$ , es decir,  $z \in D$ , esto es una contradicción.

Por ende  $D = \omega(X_1)$ . Por lo tanto, podemos concluir que  $f''$  es la función *identidad*. Dado que  $w_s X = \omega(X_1) \cup \{\Omega\}$ ,  $sX = X_1 \cup \{x_1, x_2\}$  y  $f$  es una función suprayectiva, se debe cumplir que  $f(\{\Omega\}) = \{x_1, x_2\}$ , lo cual es imposible. Por lo tanto, del Teorema 4.16 se tiene que  $X$  es localmente compacto. Luego, por el Teorema 5.1 existe  $\omega X$  la compactación de Alexandroff de  $X$ . Note que se cumple que  $\omega X \preccurlyeq sX$  y  $sX \preccurlyeq \omega X$ , así por el Corolario 4.10 se tiene que  $sX$  es equivalente a la compactación de Alexandroff de  $X$ .  $\square$

Con el fin de facilitar una adecuada comprensión del Teorema 5.8, se enuncian previamente las Definiciones 5.3 y 4.8, junto con los Teoremas 5.5, 5.6 y 5.7, los cuales son esenciales para su desarrollo.

**Definición 5.3.** Una **descomposición**  $\mathcal{D}$ , de un espacio topológico  $X$  es una familia de subconjuntos no vacíos de  $X$  ajenos entre sí tales que  $\cup \mathcal{D} = X$ . Se define la **función cociente**  $q_X : X \rightarrow \mathcal{D}$  como  $q_X(x) = D$ , donde  $D$  es el único elemento en  $\mathcal{D}$  tal que  $x \in D$ .

Consideremos a la familia  $\tau(\mathcal{D}) = \{U \subset \mathcal{D} : q_X^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$ . El espacio  $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$  es conocido como el **espacio cociente** de  $X$ , y  $\tau(\mathcal{D})$  se conoce como la *topología cociente*. Se suele denotar a dicho espacio por  $X/\mathcal{D}$ .

**Definición 5.4.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{D}$  una descomposición de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{D}$  es **semi continua superior** (scs) si para cada elemento  $D \in \mathcal{D}$  y cada abierto  $U$  de  $X$  tal que  $D \subset U$ , existe  $V$  abierto de  $X$  tal que  $D \subset V$  y para cada  $W \in \mathcal{D}$  tal que  $W \cap V \neq \emptyset$  se cumple que  $W \subset U$ .

**Teorema 5.5.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $\mathcal{D}$  una partición de  $X$  y  $q_X$  la función cociente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (1)  $\mathcal{D}$  es semi continua superiormente,
- (2)  $q_X$  es una función cerrada,
- (3) si  $D \in \mathcal{D}, U \in \tau$ , y  $D \subset U$ , entonces existe  $V \in \tau$  tal que  $D \subset V \subset U$  y  $V$  es la unión de una subcolección de  $\mathcal{D}$ .

*Demostración.* Veamos que (1) implica (2). Sean  $C$  un conjunto cerrado de  $X$  y  $x \in q_X^{-1}(\mathcal{D} \setminus q_X(C))$ , note que  $q_X(x) \in \mathcal{D} \setminus q_X(C)$ . Veamos que  $q_X(x) \cap C = \emptyset$ . Supongamos por el contrario, que  $y \in q_X(x) \cap C$ , entonces  $q_X(x) \cap q_X(y) \neq \emptyset$  y así,  $q_X(x) = q_X(y)$  y por lo que  $q_X(x) \in q_X(C)$ , lo cual es una contradicción, todo esto por como esta definida  $q_X$ .

Tenemos entonces que  $q_X(x) \subset X \setminus C$ . Como  $X \setminus C$  es abierto y  $\mathcal{D}$  semi continua superiormente, existe  $V \in \tau$  con  $q_X(x) \subset V$  tal que si  $v \in V$ , entonces  $q_X(v) \subset X \setminus C$ . Supongamos que  $q_X(v) \in q_X(C)$ , entonces  $q_X(v) = q_X(y)$  para algún  $y \in C$  y así,  $y \in q_X(v) \cap C$ , entonces  $q_X(v) \not\subset X \setminus C$ , lo cual contradice la definición de  $v$ . Por lo tanto,  $q_X(V) \subset \mathcal{D} \setminus q_X(C)$ . Luego,  $x \in V \subset q_X^{-1}(\mathcal{D} \setminus q_X(C))$  y se sigue que es abierto. Por lo tanto  $\mathcal{D} \setminus q_X(C)$  es abierto. Finalmente, como  $q_X$  es la función cociente, se sigue que  $q_X(C)$  es cerrado en  $\mathcal{D}$ .

Veamos que (2) implica (3). Sean  $D \in \mathcal{D}$  y  $U \in \tau$  tal que  $D \subset U$ . Considere  $V = q_X^{-1}(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$ . Note que  $V$  es abierto puesto que  $q_X$  es cerrada y  $D \subset V \subset U$ . Veamos que  $V = \bigcup(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$ . Sea  $v \in V$ , entonces  $v \in q_X(V) \in \mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U)$  y así  $v \in \bigcup(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$ . Por otro lado, si  $v \in \bigcup(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$ , existe  $A \in \mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U)$  tal que  $v \in A$ . Luego,  $q_X(v) = A$ , es decir,  $v \in q_X^{-1}(\mathcal{D} \setminus q_X(X \setminus U))$ , y por lo tanto se cumple (3). Finalmente, se sigue de la definición que (3) implica (2).  $\square$

**Teorema 5.6.** [2, Teorema 2.4.13] Si  $M$  es un subespacio cerrado de  $X$  y  $\mathcal{E}$  es una descomposición semicontinua superior de  $M$ , entonces  $\mathcal{D} = \mathcal{E} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus M\}$  es una descomposición semicontinua superior de  $X$ .

**Teorema 5.7.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua, suprayectiva y cerrada, entonces  $D_f = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$  es una descomposición semicontinua superior de  $X$ .

*Demostración.* Sean  $f^{-1}(\{y_0\}) \in D_f$  y  $U$  un abierto en  $X$ , tal que  $f^{-1}(\{y_0\}) \subset U$  y  $U \neq X$ . Dado que  $X \setminus U$  es cerrado en  $X$ , se cumple que  $f(X \setminus U)$  es cerrado en  $Y$ . Luego,  $Y \setminus f(X \setminus U)$  es abierto en  $Y$ . Note que  $y_0 \notin f(X \setminus U)$ ;

por ende,  $y_0 \in Y \setminus f(X \setminus U)$ . Sea  $V = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U))$ . Como  $f$  es continua,  $V$  es abierto en  $X$ ; además se cumple que  $f^{-1}(\{y_0\}) \subset V$  y  $V \subset U$ . Sea  $y \in Y$  tal que  $f^{-1}(\{y\}) \cap V \neq \emptyset$ . Luego,  $f^{-1}(\{y\} \cap (Y \setminus f(X \setminus U))) \neq \emptyset$ ; es decir,  $y \in Y \setminus f(X \setminus U)$ ; por ende,  $f^{-1}(\{y\}) \subset V \subset U$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

**Teorema 5.8.** *Sean  $X$  un espacio localmente compacto y  $Y$  un espacio compacto. Si  $Y$  es la imagen continua del residuo de una compactación  $cX$  de  $X$ , entonces existe  $c'X$  una compactación de  $X$  tal que  $c'X \preccurlyeq cX$  y  $Y$  es homeomorfo a  $c'X \setminus c'(X)$ .*

*Demostración.* Podemos tomar  $f : cX \setminus c(X) \rightarrow Y$  una función continua y suprayectiva, donde  $cX \in \mathcal{C}(X)$ . Por los Teoremas 4.16 y 2.7 se cumple que  $cX \setminus c(X)$  es un subconjunto cerrado y compacto de  $cX$ . Al ser  $Y$  un espacio de Hausdorff, de [2, Teorema 3.1.12] tenemos que  $f$  es una función cerrada. Luego, por el Teorema 5.7 se cumple que  $D_f = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$  es una descomposición semicontinua superior de  $cX \setminus c(X)$ .

Como consecuencia del Teorema 5.6, tenemos que  $\mathcal{D} = D_f \cup \{\{x\} : x \in c(X)\}$  es una descomposición semicontinua superior de  $cX$ . Del Teorema 2.10 tenemos que  $cX/\mathcal{D}$  es compacto. Por el Teorema 5.5 la función cociente  $q : cX \rightarrow cX/\mathcal{D}$  es una función cerrada. Veamos que  $c'X = cX/\mathcal{D}$  es una compactación de  $X$ . Para ello consideremos  $c' : X \rightarrow c'X$  definida por  $c'(x) = (q \circ c^r)(x)$ . Note que  $c'$  es un encaje homeomorfo, ya que la función  $q$  restringida a  $c(X)$  es un homeomorfismo. Veamos que  $\text{cl}_{c'X}(c'(X)) = c'X$ . Sea  $\mathcal{U}$  un subconjunto abierto y no vacío en  $c'X$ . De la continuidad y sobreyectividad de  $q$ , se cumple que  $q^{-1}(\mathcal{U})$  es un subconjunto abierto y no vacío de  $cX$ . Por ende, se cumple que  $c(X) \cap q^{-1}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ . Así, existe  $x \in X$  tal que  $q(c^r(x)) \in \mathcal{U}$ , esto implica que  $c'(X) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ . Por lo que,  $c'(X)$  es un subconjunto denso en  $c'X$ . Luego,  $c'X$  es una compactación de  $X$ . Además,  $c'X \preccurlyeq cX$  ya que  $q$  es continua y cumple que  $(q \circ c)(x) = c'(x)$  para todo  $x \in X$ . Resta probar que  $Y$  es homeomorfo a  $c'X \setminus c'(X)$ . Note que  $c'X \setminus c'(X) = D_f$ . Consideremos  $h : Y \rightarrow c'X \setminus c'(X)$  definida por  $h(y) = q(y_0)$ , para algún  $y_0 \in f^{-1}(\{y\})$ , es decir  $h(y) = f^{-1}(\{y\}) \in D_f$ . De la definición de  $h$ , se cumple que  $h$  es una función biyectiva. Sea  $B$  un subconjunto cerrado de  $c'X \setminus c'(X)$ , por ende  $B$  es un subconjunto cerrado de  $c'X$ , como  $q$  es continua se cumple que  $q^{-1}(B)$  es un subconjunto cerrado de  $cX$ , tal que  $q^{-1}(B) \cap c(X) = \emptyset$ , por lo que  $q^{-1}(B) \subset cX \setminus c(X)$ , es decir,  $q^{-1}(B)$  es un subconjunto cerrado de  $cX \setminus c(X)$ . Como  $f$  es una función cerrada, se cumple que  $f(q^{-1}(B))$  es un subconjunto cerrado de  $Y$ . Finalmente, veamos que  $h^{-1}(B) = f(q^{-1}(B))$ .

Sea  $z \in f(q^{-1}(B))$ , por lo que existe  $x \in q^{-1}(B)$  tal que  $z = f(x)$ , por ende,  $q(x) \in B$ . Note que,  $h(f(x)) = q(x)$ , es decir,  $h(z) \in B$ , por lo que  $z \in h^{-1}(B)$ . Tomemos ahora,  $w \in h^{-1}(B)$ . Entonces  $h(w) \in B$ . Por otro lado,  $h(w) = q(w_0)$ , donde  $w_0 \in f^{-1}(\{w\})$ . Note que  $w_0 \in q^{-1}(B)$ , además,  $f(w_0) = w$ . Es decir,  $w \in f(q^{-1}(B))$ . Con esto se cumple  $h^{-1}(B) = f(q^{-1}(B))$ , por ende  $h$  es una función continua y al ser  $Y$  compacto, del Teorema 2.12 podemos concluir que  $Y$  es homeomorfo a  $c'X \setminus c'(X)$ .  $\square$

## 6 La compactación de Stone-Čech

En esta última sección se estudian algunas propiedades del elemento maximal de la familia  $\mathcal{C}(X)$ , para un espacio de Tychonoff  $X$ . Esta compactación se conoce como la compactación de Stone-Čech. Entre las propiedades que se abordan se encuentran: la posibilidad de extender de forma continua funciones definidas en  $X$  a dicha compactación, así como la caracterización de las condiciones bajo las cuales una compactación es equivalente a la de Stone-Čech. Para ello, se utilizará el resultado conocido como el Lema de Urysohn (véase el Teorema 6.2).

**Definición 6.1.** *La compactación de Stone-Čech de  $X$  o la compactación maximal de  $X$ , denotada por  $\beta X$ ; es el elemento maximal de  $\mathcal{C}(X)$ .*

*Note que, si  $X$  es un espacio de Tychonof, por el Teorema 3.4 se cumple que  $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ . Luego por el Teorema 4.17 se cumple que existe la compactación de Stone-Čech de  $X$ .*

**Teorema 6.2.** *[2, Teorema 1.5.11] Sean  $X$  un espacio normal y  $A, B \subset X$ . Si  $\text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(B) = \emptyset$ , entonces existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(\text{cl}_X(A)) = \{0\}$  y  $f(\text{cl}_X(B)) = \{1\}$ .*

**Teorema 6.3.** *Sean  $X$  un espacio de Tychonoff y  $Y$  un espacio compacto. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua, entonces  $f$  se puede extender continuamente a  $\beta X$ .*

*Además, si para una compactación  $\alpha X$  de  $X$  se cumple que, para todo espacio compacto  $Y$ , cualquier función continua  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  se puede extender continuamente a  $\alpha X$ , entonces  $\alpha X$  es equivalente a  $\beta X$ .*

*Demostración.* Sea  $c : X \rightarrow \beta X \times Y$  definida por  $c(x) = (\beta(x), f(x))$ . Dado que  $\beta$  es un encaje homeomorfo, por el Teorema 2.15 se cumple que  $c$  también

es un encaje homeomorfo. Por [2, Teorema 3.2.4], se cumple que  $\beta X \times Y$  es compacto, luego del Teorema 2.7 tenemos que  $\text{cl}_{\beta X \times Y}(c(X))$  es un subconjunto compacto de  $\beta X \times Y$ . Por ende,  $cX = \text{cl}_{\beta X \times Y}(c(X))$  es una compactación de  $X$ . Como  $\beta X$  es el elemento maximal de  $\mathcal{C}(X)$ , entonces  $cX \preceq \beta X$ , por lo que existe  $g : \beta X \rightarrow cX$  una función continua tal que  $(g \circ \beta)(x) = c(x)$  para todo  $x \in X$ . Sea  $p_Y : \beta X \times Y \rightarrow Y$  la función proyección sobre  $Y$ . Consideremos  $p'_Y : cX \rightarrow Y$  como la función definida por  $p'_Y(s, t) = p_Y(s, t)$ . Definimos  $F : \beta X \rightarrow Y$  por  $F(x) = (p'_Y \circ g)(x)$ . Como la función proyección es continua, se cumple que  $F$  es una función continua. Sea  $x \in X$ , luego  $F(\beta(x)) = p'_Y(g(\beta(x))) = p'_Y(c(x)) = p'_Y(\beta(x), f(x)) = f(x)$ . Esto implica que  $f$  se puede extender continuamente a  $\beta X$ .

Consideremos  $\alpha X$  una compactación de  $X$ , tal que para todo espacio compacto  $Y$ , cualquier función continua  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  se puede extender continuamente a  $\alpha X$ . Dado que  $\beta : X \rightarrow \beta X$  es una función continua y  $\beta X$  es compacto, entonces  $\beta$  se puede extender continuamente a  $\alpha X$ , es decir, existe  $B : \alpha X \rightarrow \beta X$  una función continua tal que  $(B \circ \alpha)(x) = \beta(x)$  para todo  $x \in X$ . Esto implica que  $\beta X \preceq \alpha X$ , de la maximalidad de  $\beta X$  se cumple que  $\alpha X \preceq \beta X$ . Del Corolario 4.10, concluimos que  $\alpha X$  es equivalente a  $\beta X$ .  $\square$

**Definición 6.4.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A, B \subset X$ . Decimos que  $A$  y  $B$  están **completamente separados** si existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(A) = \{0\}$  y  $f(B) = \{1\}$ .

**Teorema 6.5.** Sean  $X$  un espacio de Tychonoff y  $A, B \subset X$ . Si  $A, B$  están completamente separados, entonces  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(A)) \cap \text{cl}_{\beta X}(\beta(B)) = \emptyset$ .

Si una compactación  $\alpha X$  de  $X$  tiene la propiedad que, para cualesquiera  $A, B \subset X$  completamente separados se cumple que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) = \emptyset$ , entonces  $\alpha X$  es equivalente a  $\beta X$ .

*Demostración.* Sean  $A, B \subset X$  completamente separados. Por lo que existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  una función continua, tal que  $f(A) = \{0\}$  y  $f(B) = \{1\}$ . Dado que  $[0, 1]$  es compacto, por el Teorema 6.3 existe  $F : \beta X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $(F \circ \beta)(x) = f(x)$  para toda  $x \in X$ . Sea  $\beta(a) \in \beta(A)$ , donde  $a \in A$ , entonces  $F(\beta(a)) = f(a) = 0$ , esto prueba que  $\beta(A) \subset F^{-1}(\{0\})$ . Análogamente, se cumple que  $\beta(B) \subset F^{-1}(\{1\})$ . De la continuidad de  $F$ , tenemos que  $F^{-1}(\{0\})$  y  $F^{-1}(\{1\})$  son subconjuntos cerrados de  $\beta X$ . Así,  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(A)) \subset F^{-1}(\{0\})$  y  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(B)) \subset F^{-1}(\{1\})$ . Esto implica que  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(A)) \cap \text{cl}_{\beta X}(\beta(B)) = \emptyset$ .

Sea  $\alpha X$  una compactación de  $X$  con la propiedad de que, para cualesquiera  $A, B \subset X$  completamente separados se cumple que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) = \emptyset$ . Sean  $A, B$  subconjuntos cerrados de  $X$ . Supongamos que  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(A)) \cap \text{cl}_{\beta X}(\beta(B)) = \emptyset$ . Veamos que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) = \emptyset$ . Por el Teorema 2.9 se cumple que  $\beta X$  es un espacio normal. Así, por el Teorema 6.2, existe  $f : \beta X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(\text{cl}_{\beta X}(\beta(A))) = \{0\}$  y  $f(\text{cl}_{\beta X}(\beta(B))) = \{1\}$ . Consideremos  $g : X \rightarrow [0, 1]$  definida por  $g(x) = (f \circ \beta)(x)$ . Note que  $g$  es una función continua tal que  $g(A) = f(\beta(A)) \subset f(\text{cl}_{\beta X}(\beta(A))) = \{0\}$  y  $g(B) = f(\beta(B)) \subset f(\text{cl}_{\beta X}(\beta(B))) = \{1\}$ . Esto implica que  $A, B$  están completamente separados. Luego, por hipótesis se cumple que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) = \emptyset$ . Supongamos ahora que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) = \emptyset$ , de forma análoga se prueba que esto implica que  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(A)) \cap \text{cl}_{\beta X}(\beta(B)) = \emptyset$ . Por lo tanto, del Teorema 4.12 implicamos que  $\alpha X$  es equivalente a  $\beta X$ .  $\square$

**Corolario 6.6.** *Sea  $X$  un espacio de Tychonoff. Si  $f : X \rightarrow [0, 1]$  es una función continua, entonces  $f$  se puede extender continuamente a  $\beta X$ .*

*Además, si para una compactación  $\alpha X$  de  $X$  se cumple que, cualquier función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  se puede extender continuamente a  $\alpha X$ , entonces  $\alpha X$  es equivalente a  $\beta X$ .*

*Demostración.* Si  $f : X \rightarrow [0, 1]$  es una función continua, por el Teorema 6.3,  $f$  se puede extender continuamente a  $\beta X$ . Sea  $\alpha X$  una compactación de  $X$  tal que cualquier función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  se puede extender continuamente a  $\alpha X$ . Sean  $A, B \subset X$  subconjuntos completamente separados, así existe  $g : X \rightarrow [0, 1]$  una función continua tal que  $g(A) = \{0\}$  y  $g(B) = \{1\}$ . Por lo tanto,  $g$  se puede extender continuamente a  $\alpha X$ , es decir, existe  $G : \alpha X \rightarrow [0, 1]$  una función continua, tal que  $(G \circ \alpha)(x) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . Note que  $\alpha(A) \subset G^{-1}(\{0\})$  y  $\alpha(B) \subset G^{-1}(\{1\})$ , como  $G^{-1}(\{0\})$  y  $G^{-1}(\{1\})$  son subconjuntos cerrados de  $X$ , se cumple que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) = \emptyset$ . Luego, por el Teorema 6.5 concluimos que  $\alpha X$  es equivalente a  $\beta X$ .  $\square$

**Corolario 6.7.** *Sean  $X$  un espacio normal y  $A, B$  subconjuntos cerrados de  $X$ . Si  $A \cap B = \emptyset$  entonces  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(A)) \cap \text{cl}_{\beta X}(\beta(B)) = \emptyset$ .*

*Además, si una compactación  $\alpha X$  de  $X$  satisface que, para todo par  $A, B$  de subconjuntos cerrados de  $X$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ , se cumple que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) = \emptyset$ , entonces  $X$  es un espacio normal y  $\alpha X$  es equivalente a  $\beta X$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 6.2 existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  una función continua tal que  $f(A) = \{0\}$  y  $f(B) = \{1\}$ . Por el Corolario 6.6,  $f$  se puede extender continuamente a  $\beta X$ , es decir, existe  $F : \beta X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $(F \circ \beta)(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ . Dado que  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(A)) \subset F^{-1}(\{0\})$  y  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(B)) \subset F^{-1}(\{1\})$ , se cumple que  $\text{cl}_{\beta X}(\beta(A)) \cap \text{cl}_{\beta X}(\beta(B)) = \emptyset$ .

Para la segunda parte. Sean  $A, B$  de subconjuntos cerrados de  $X$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ , por hipótesis se cumple que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) = \emptyset$ . Por el Teorema 2.9  $\alpha X$  es un espacio normal. Por ende, existen  $U, V$  subconjuntos abiertos y ajenos en  $\alpha X$  tales que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \subset U$  y  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) \subset V$ . De la continuidad de  $\alpha$  tenemos que  $\alpha^{-1}(U)$  y  $\alpha^{-1}(V)$  son subconjuntos abiertos de  $X$ , que además cumplen que  $\alpha^{-1}(U) \cap \alpha^{-1}(V) = \emptyset$ ,  $A \subset \alpha^{-1}(U)$  y  $B \subset \alpha^{-1}(V)$ . Esto implica que,  $X$  es un espacio normal.

Sea  $A, B$  subconjuntos completamente separados de  $X$ . Por lo que existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  una función continua tal que  $f(A) = \{1\}$  y  $f(B) = \{0\}$ . De la continuidad de  $f$  se cumple que  $\text{cl}_X(A) \cap \text{cl}_X(B) = \emptyset$ . Luego, la hipótesis tenemos que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(\text{cl}_X(A))) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(\text{cl}_X(B))) = \emptyset$ , dado que  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \subset \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(\text{cl}_X(A)))$  y  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) \subset \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(\text{cl}_X(B)))$ , entonces  $\text{cl}_{\alpha X}(\alpha(A)) \cap \text{cl}_{\alpha X}(\alpha(B)) = \emptyset$ . Finalmente, del Teorema 6.5 concluimos que  $\alpha X$  es equivalente a  $\beta X$ .  $\square$

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

## Bibliografía

- [1] Fidel Casarrubias-Segura y Ángel Tamariz-Mascarúa. *Elementos de Topología General*. Vol. 37. Aportaciones Mat., Textos. México: Sociedad Matemática Mexicana; (2012). ISBN: 978-607-02-3000-4.
- [2] Ryszard Engelking, *General Topology*. Rev. and compl. ed. Vol. 6. Sigma Ser. Pure Math. Berlin: Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 3-88538-006-4.
- [3] S. Willard, *General Topology*. (1970) Addison- Wesley.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx

diana.cuayasi@alumno.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

## Capítulo 6

# Sobre la medida de conmutatividad de los funtores $\pi_n$ y $\lim$

Raúl Juárez Flores

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD  
CUERNAVACA UNAM

### Resumen

En este trabajo se introduce el concepto de  $\lim^1$  para cada diagrama de grupos (no necesariamente conmutativos), básicamente se resuelve el problema de la exactitud del funtor  $\lim$ , es decir, se obtiene que  $\lim^1$  se puede usar para estudiar la exactitud de  $\lim$  y como una consecuencia, en algunos casos obtener la conmutatividad de los funtores  $\pi_n$  y  $\lim$ .

## 1 Introducción

El concepto de límite (colímite) se puede definir para cada diagrama en cualquier categoría, mientras en la topología algebraica este concepto surge usualmente en consideraciones de sistemas inversos en categorías tales como **Grp** de grupos, **Ab** de grupos abelianos, **R-Mod** de  $R$ -módulos y **Top** de espacios topológicos. Se sabe que el correspondiente funtor  $\lim$  es un funtor exacto izquierdo pero no es exacto derecho. Por lo tanto, surge el problema de definir los funtores derivados del funtor  $\lim$  ( $\lim^1$ ). En las categorías abelianas tales como **Ab** y **R-Mod**, se puede resolver con éxito este problema, usando los métodos estándares del álgebra homológica.

Los funtores básicos de la topología algebraica son los funtores  $\pi_n$  de grupos homotópicos y  $H_n$  de grupos homológicos. Se sabe que el funtor  $\lim$  no conmuta con tales funtores. En realidad, la importancia del funtor  $\lim^1$  en la topología algebraica se revela en que este funtor puede indicar la *medida de*

*conmutatividad* del funtor  $\lim$  con los funtores básicos tanto como la *medida de exactitud*.

En este trabajo nos enfocamos en el aspecto homotópico, vamos a considerar diagramas (de tipo  $T$ ) en la categoría **Top** de espacios topológicos, y vamos a obtener diagramas (de tipo  $T$ ) en la categoría de Grupos **Grp**, el objetivo de este trabajo es mostrar con todo detalle las ideas que nos permiten relacionar estas categorías mediante el funtor  $\pi_n$ . Por tal motivo vamos a considerar:

- *Parte algebraica:* Definir los límites derivados de diagramas de grupos no necesariamente conmutativos. Obtener fórmulas explícitas para  $\lim^1$ .
- *Parte topológica:* Establecer una relación de  $\lim^1$  con el cotelescopio (cocilindro generalizado) y mostrar que  $\lim^1$ , en realidad, puede indicar la medida de conmutatividad de los funtores  $\lim$  y  $\pi_n$ .
- *Aplicaciones:* Para diagramas de tipo  $\vee$  (pull-back), usaremos la conmutatividad de los funtores  $\lim$  y  $\pi_n$ , así mismo también mostraremos como  $\lim^1$  nos determina los conjuntos de componentes por trayectorias para los límites de estos diagramas.

## 2 Límites de diagramas (límite inverso generalizado)

En esta sección vamos a dar algunas definiciones generales tales como el concepto de esquema de diagrama el cual es un "molde" para poder fabricar diagramas en cada categoría  $\mathcal{C}$ . Así mismo, daremos el concepto de límite para un diagrama en cualquier categoría  $\mathcal{C}$ .

**Definición 2.1.** *Un esquema de diagramas  $T$  consta de lo siguiente:*

- (a) *Un conjunto de vértices  $V = \{a, b, c, \dots\}$ .*
- (b) *Un conjunto de aristas dirigidas  $A = \{\alpha, \beta, \dots\}$ .*
- (c) *Una función  $\text{dom} : A \rightarrow V$ ,  $\alpha \mapsto \text{dom}(\alpha)$  que se llama el **dominio** de la arista  $\alpha$ .*

(d) Una función  $\text{cod} : A \rightarrow V$ ,  $\alpha \mapsto \text{cod}(\alpha)$  que se llama el **codominio** de la arista  $\alpha$ .

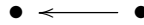
Si  $\text{dom}(\alpha) = a$  y  $\text{cod}(\alpha) = b$ , escribiremos  $\alpha : a \rightarrow b$ .

**Ejemplo 2.2.** Consideremos algunos esquemas que usaremos más adelante

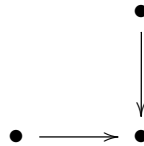
1.



2.



3.



**Definición 2.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $T$  un esquema de diagramas. Un **diagrama  $\underline{X}$  de tipo  $T$**  en  $\mathcal{C}$ , consta de dos funciones:

(a)  $\underline{X} : V \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $a \mapsto X_a \stackrel{\text{Not}}{:=} \underline{X}(a)$  para cada  $a \in V$ .

(b)  $\underline{X} : A \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C})$ ,  $a \xrightarrow{\alpha} b \mapsto f_\alpha \stackrel{\text{Not}}{:=} \underline{X}(\alpha) : X_a \rightarrow X_b$  para cada  $\alpha \in A$ .

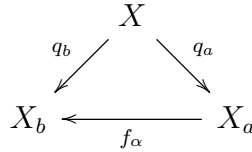
**Notación:**  $\underline{X}$  denotará un diagrama de tipo  $T$ .

El concepto de “límite inverso” se considera cuando se trabaja con el esquema de diagramas dado en el Ejemplo 2.2. 1 en la categoría **Top**. La siguiente definición nos da un panorama más general.

**Definición 2.4.** Sea  $\underline{X}$  un diagrama de tipo  $T$  en una categoría  $\mathcal{C}$ . El **límite del diagrama  $\underline{X}$**  es un par  $(X, \{q_a\}_{a \in V})$  que consta de:

(a) Un objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$ ;

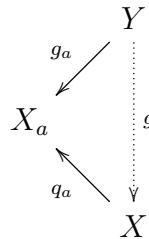
- (b) Una familia de morfismos  $\{q_a\}_{a \in V}$ , donde para cada  $a \in V$   $q_a : X \rightarrow X_a$ , llamadas **proyecciones naturales** y son tales que para cada arista  $\alpha : a \rightarrow b$ , se tiene la siguiente conmutatividad:



es decir,  $f_\alpha \circ q_a = q_b$ .

- (c) Propiedad universal: Si  $(Y, \{g_a\}_{a \in V})$  es un par donde,  $Y$  es un objeto y  $\{g_a : Y \rightarrow X_a\}_{a \in V}$  es una familia de morfismos tales que para toda arista  $\alpha : a \rightarrow b$ , se tiene:  $f_\alpha \circ g_a = g_b$ ,

entonces existe un único morfismo  $g : Y \rightarrow X$  tal que para cada  $a \in V$  se tiene la siguiente conmutatividad



es decir,  $q_a \circ g = g_a$ .

**Notación:**  $(X, \{q_a\}_{a \in V}) = \lim \underline{\mathbf{X}}$  o simplemente  $X = \lim \underline{\mathbf{X}}$ .

Estamos interesados en considerar diagramas de tipo  $T$  en las categorías **Set**, **Grp** y **Top**. La siguiente proposición nos da una descripción explícita de los límites de diagramas en éstas categorías.

**Proposición 2.5.** Sea  $\underline{\mathbf{X}}$  un diagrama de tipo  $T$  con vértices  $V$  y aristas  $A$  en la categoría **Set**. Entonces  $\lim \underline{\mathbf{X}}$  es el conjunto

$$X = \{(x_a) \in \prod_{a \in V} X_a \mid f_\alpha(x_a) = x_b \quad \forall \alpha : a \rightarrow b \in A\}, \tag{1}$$

junto con la familia de funciones  $\{q_a\}_{a \in V}$ ,  $q_a : X \rightarrow X_a$  donde  $q_a((x_a)) = x_a$ , para toda  $(x_a) \in X$ .

**Observación 2.6.** *Basta equipar con la estructura correspondiente para tener los límites en **Grp** y **Top** respectivamente.*

1. Si  $\underline{X}$  es un diagrama de tipo  $T$  en la categoría de grupos **Grp**, entonces  $\lim \underline{X}$  es el conjunto (1) junto con la estructura de grupo que hereda del grupo producto directo  $\prod_{a \in V} X_a$ .
2. Si  $\underline{X}$  es un diagrama de tipo  $T$  en la categoría de espacios topológicos **Top**, entonces  $\lim \underline{X}$  es el conjunto (1) con la topología inducida por la topología del producto directo  $\prod_{a \in V} X_a$ .

**Ejemplo 2.7.** *Vamos a considerar los esquemas de diagramas dados en el Ejemplo 2.2 para considerar los límites de diagramas en **Set** y por lo tanto en **Grp** y **Top**.*

### 1. Sucesiones inversas

$$\underline{X}: \quad X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \xleftarrow{f_2^3} X_3 \xleftarrow{\quad} \dots$$

El límite de este diagrama es el conjunto

$$X = \{(x_k) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid f_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i \forall i \in \mathbb{N}\},$$

junto con la familia de funciones  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , dadas por  $f_i((x_k)) = x_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ , y cada  $(x_k) \in X$ .

### 2. Una función

$$\underline{X}: \quad X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2$$

El límite de este diagrama es el conjunto

$$X = \{(x_1, x_2) \mid f_1^2(x_2) = x_1\},$$

junto con las funciones  $\{f_1, f_2\}$ , dadas por

$$f_1((x_1, x_2)) = x_1 \quad f_2((x_1, x_2)) = x_2$$

para cada  $(x_1, x_2) \in X$ .

### 3. Diagramas de tipo $\vee$

$$\underline{\mathbf{X}}: \quad X_1 \xrightarrow{f_0^1} X_0 \xleftarrow{f_0^2} X_2$$

El límite es el conjunto

$$X = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : f_0^1(x_1) = f_0^2(x_2)\}$$

junto con las funciones  $f_1 : X \rightarrow X_1$ ,  $f_2 : X \rightarrow X_2$  dadas por  $f_i(x_1, x_2) = x_i$ , para cada  $i = 1, 2$ .

En realidad, el límite del diagrama  $\underline{\mathbf{X}}$  se representa por el diagrama de pull-back:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0^2 \\ X_1 & \xrightarrow{f_0^1} & X_0 \end{array}$$

Al conjunto  $X$  también se llama pull-back del diagrama  $\underline{\mathbf{X}}$ .

## 3 Medida de exactitud del functor $\lim$ para el caso clásico (sucesiones inversas de grupos abelianos)

En esta sección veremos como el functor límite derivado  $\lim^1$  nos indica la medida de exactitud del functor  $\lim$ . Para ello necesitamos recordar:

**Definición 3.1.** Una *sucesión exacta corta* de grupos abelianos consta de dos homomorfismos de grupos  $i : G' \rightarrow G$ ,  $p : G \rightarrow G''$  tales que  $i$  es monomorfismo,  $p$  es epimorfismo y  $\text{im}(i) = \ker(p)$ . Se representa

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G'' \longrightarrow 0.$$

En caso de sucesiones inversas de grupos (no necesariamente abelianos) lo representamos

$$* \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G'' \longrightarrow *.$$

La siguiente proposición es rutina verificar su validez.

**Proposición 3.2.** Sea  $\underline{A}$  una sucesión inversa de grupos abelianos

$$\underline{A} : \quad A_1 \xleftarrow{f_1^2} A_2 \xleftarrow{f_2^3} A_3 \xleftarrow{f_3^4} A_4 \xleftarrow{\quad} \cdots .$$

Entonces la función

$$d : \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad (2)$$

definida por

$$d((g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)) = (g_1 - f_1^2(g_2), g_2 - f_2^3(g_3), \dots, g_n - f_n^{n+1}(g_{n+1}), \dots).$$

Es un homomorfismo de grupos abelianos.

Como una consecuencia inmediata de este hecho, tenemos

**Corolario 3.3.** El *límite* del diagrama  $\underline{A}$  es el núcleo del homomorfismo de grupos (2):

$$\lim \underline{A} = \ker d.$$

**Definición 3.4.** El *límite derivado* de  $\underline{A}$  se define como el cokernel del homomorfismo (2)

$$\lim^1 \underline{A} = \operatorname{coker}(d) = \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i / \operatorname{im}(d). \quad (3)$$

Con  $\mathbf{Ab}_{inv}$  vamos a denotar la categoría de sucesiones inversas de grupos abelianos, de manera canónica se obtienen los funtores

- Funtor límite  $\lim : \mathbf{Ab}_{inv} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .
- Funtor límite derivado  $\lim^1 : \mathbf{Ab}_{inv} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

La manera de relacionar los objetos algebraicos que hemos obtenido tanto  $\ker d = \lim \underline{\mathbf{A}}$  como  $\operatorname{coker}(d) = \lim^1 \underline{\mathbf{A}}$  es mediante el siguiente lema, conocido como Lema de la Serpiente.

**Lema 3.5.** *Sea*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{p} & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\
 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{v} & B & \xrightarrow{q} & B'' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de grupos abelianos con filas exactas (filas son sucesiones exactas cortas). Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta larga de homomorfismos

$$0 \rightarrow \ker f' \xrightarrow{u^*} \ker f \xrightarrow{p^*} \ker f'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} f' \xrightarrow{v^*} \operatorname{coker} f \xrightarrow{q^*} \operatorname{coker} f'' \rightarrow 0$$

donde  $u^*, v^*, p^*, q^*$  están inducidas por  $u, v, p, q$  y  $\delta(a'') = b' + \operatorname{im}(f')$ , con  $v(b') = f(a)$ ,  $a \in p^{-1}(a'')$ .

**Nota:** El diagrama conmutativo del lema 3.5 se puede considerar como una sucesión exacta corta de diagramas de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{A}}' \xrightarrow{\underline{u}} \underline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\underline{p}} \underline{\mathbf{A}}'' \longrightarrow 0,$$

donde  $\underline{\mathbf{A}}' : f' : A' \rightarrow B'$ ,  $\underline{\mathbf{A}} : f : A \rightarrow B$ ,  $\underline{\mathbf{A}}'' : f : A'' \rightarrow B''$ ,  $\underline{u} = (u, v)$  tales que  $v \circ f' = f \circ u$  y  $\underline{p} = (p, q)$  tales que  $q \circ f = f'' \circ p$ . Una aplicación inmediata de este resultado, nos dice que en efecto  $\lim^1$  indica la medida de exactitud del funtor  $\lim$ .

**Teorema 3.6.** *Sean  $\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}$  y  $\underline{\mathbf{C}}$  sucesiones inversas de grupos abelianos. Para la sucesión exacta corta de sucesiones inversas de grupos abelianos.*

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{\mathbf{B}} \xrightarrow{\underline{p}} \underline{\mathbf{C}} \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \lim \underline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\underline{u}} \lim \underline{\mathbf{B}} \xrightarrow{\underline{p}} \lim \underline{\mathbf{C}} \xrightarrow{\delta} \lim^1 \underline{\mathbf{A}} \xrightarrow{\underline{\bar{u}}} \lim^1 \underline{\mathbf{B}} \xrightarrow{\underline{\bar{p}}} \lim^1 \underline{\mathbf{C}} \rightarrow 0.$$

**Observación 3.7.** Para cada sucesión inversa de grupos abelianos  $\underline{A}$  siempre se tiene la sucesión:

$$\dots \subseteq \text{im}(f_i^{j+1}) \subseteq \text{im}(f_i^j) \subseteq \dots \subseteq \text{im}(f_i^{i+2}) \subseteq \text{im}(f_i^{i+1})$$

Decimos que  $\underline{A}$  satisface la condición de **Mittag-Leffler** si y sólo si, la sucesión se estabiliza.

**Proposición 3.8.** Si  $\underline{A}$  es una sucesión inversa de grupos abelianos que satisface la condición de **Mittag-Leffler**, en este caso,  $\lim^1(\underline{A}) = 0$ . Así,

$$0 \rightarrow \lim \underline{A} \xrightarrow{u} \lim \underline{B} \xrightarrow{p} \lim \underline{C} \xrightarrow{\delta} 0.$$

## 4 Medida de exactitud del functor $\lim$ para diagramas de grupos (no necesariamente conmutativos) de tipo $T$

En esta sección vamos a generalizar el concepto de límite derivado para diagramas  $\underline{G}$  en la categoría **Grp** de tipo  $T$ . Para lograr una generalización del concepto límite derivado, recordemos lo siguiente:

**Definición 4.1.** Dado un conjunto (no vacío)  $X$  y  $G$  un grupo, una acción derecha de  $G$  sobre  $X$  es una función  $*$  :  $X \times G \rightarrow X$ ,  $(x, g) \mapsto x * g$  tal que:

- (a)  $x * e = x$ , para cada  $x \in X$ ,  $e$  es el elemento neutro del grupo  $G$ .
- (b)  $(x * g) * h = x * (gh)$  para cada  $x \in X$ , y cada  $g, h \in G$ .

**Notación:** Si  $*$  es una acción derecha, entonces a la pareja  $(G, X)$  se le llama grupo de transformaciones o también llamado  $G$ -espacio, y si  $x_0 \in X$  entonces a la terna  $(X, G, x_0)$  se le llama grupo de transformaciones punteado o  $G$ -espacio punteado.

**Definición 4.2.** Sea  $(X, G)$  es un grupo de transformaciones

- (a) Para cada  $x \in X$ , la **órbita** de  $x$  es el subconjunto

$$[x] = \{x * g | g \in G\}.$$

(b) *El espacio orbital de la acción  $*$  o conjunto cociente*

$$X/G = \{[x] | x \in X\}.$$

(c) *Para cada  $x \in X$ , el subgrupo de isotropía o estabilizador de  $x$*

$$G_x = \{g \in G | x * g = x\}.$$

Cuando hablamos de  $\underline{G}$  un diagrama de tipo  $T$  en  $\mathbf{Grp}$ , es importante recordar que  $T$  consta de un conjunto de vértices  $V$  y un conjunto de aristas dirigidas  $A$ , así como también de las funciones  $dom$  y  $cod$ . Ahora estamos listos para formular la siguiente la siguiente proposición, la cual su demostración es rutina verificar.

**Proposición 4.3.** *Sean  $\underline{G}$  un diagrama de tipo  $T$  en la categoría de grupos  $\mathbf{Grp}$ ,  $G = \prod_{a \in V} G_a$ , y  $X = \prod_{\alpha \in A} G_{cod(\alpha)}$ . La función*

$$\diamond : X \times G \longrightarrow X$$

dada por

$$(x_{cod(\alpha)}) \diamond (g_a) = (g_{cod(\alpha)}^{-1} x_{cod(\alpha)} f_\alpha(g_{dom(\alpha)})) \quad (5)$$

donde  $(x_{cod(\alpha)}) \in X$  y  $(g_a) \in G$  es una acción derecha.

**Definición 4.4.** *Sean  $\underline{G}$  un diagrama de tipo  $T$  en la categoría de grupos  $\mathbf{Grp}$ . El primer límite derivado del diagrama  $\underline{G}$ , denotado por  $\lim^1 \underline{G}$  se define como el espacio orbital de la acción  $\diamond$  (5), es decir,*

$$\lim^1 \underline{G} = X/G.$$

**Observación 4.5.** *El grupo de isotropía del punto  $e = (e_{cod(\alpha)})$ , donde  $e_{cod(\alpha)}$  es el correspondiente elemento neutro del grupo  $G_{cod(\alpha)}$ , es el límite del diagrama  $\underline{G}$ :*

$$\lim \underline{G} = G_e.$$

**Observación 4.6.** *La Proposición 4.3 y la Observación 4.5, nos dice que  $(G, X, e)$  es un grupo de transformaciones punteado o también llamado  $G$ -espacio punteado ( $e \in X$ ).*

De manera natural, dado  $\underline{\mathbf{G}}$  un diagrama de tipo  $T$  en  $\mathbf{Grp}$ , se define la categoría  $\mathbf{Grp}_T$  de diagramas de tipo  $T$ . Así, de manera canónica se obtienen los funtores.

- El functor límite,  $\text{lim} : \mathbf{Grp}_T \rightarrow \mathbf{Grp}$ .
- El functor límite derivado,  $\text{lim}^1 : \mathbf{Grp}_T \rightarrow \mathbf{Set}$ .

Queremos usar las ideas que tenemos en el caso clásico, recordemos que se usó el Lema de la Serpiente (lema 3.5), necesitamos una manera de relacionar grupos de transformaciones punteados.

**Definición 4.7.** Sean  $(G, X, x_0)$ ,  $(H, Y, y_0)$  dos grupos de transformaciones punteados. La pareja  $(\alpha, f)$  se llama **función equivariante** si

- (a)  $\alpha : G \rightarrow H$  es un homomorfismo de grupos.
- (b)  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es una función tal que  $f(x_0) = y_0$  y  $f(xg) = f(x)\alpha(g)$ .

Se escribe:  $(\alpha, f) : (G, X, x_0) \rightarrow (H, Y, y_0)$ .

**Definición 4.8.** Una **sucesión exacta corta de grupos de transformaciones punteados** denotado por

$$* \rightarrow (H, Y', y'_0) \xrightarrow{(\alpha, u)} (G, Y, y_0) \xrightarrow{(\beta, v)} (F, Y'', y''_0) \rightarrow *$$

consta de

- (a) una sucesión exacta corta de grupos.

$$* \rightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} F \rightarrow *$$

- (b) Una sucesión exacta corta de conjuntos punteados

$$* \rightarrow (Y', y'_0) \xrightarrow{u} (Y, y_0) \xrightarrow{v} (Y'', y''_0) \rightarrow *$$

donde  $\text{Im}(u) = v^{-1}(y''_0) = \ker(v)$  y  $\text{Im}(v) = Y''$ .

Ahora podemos formular una versión equivariante del lema 3.5. La demostración de este hecho es rutina.

**Lema 4.9.** *Sea*

$$* \longrightarrow (H, Y', y'_0) \xrightarrow{(\alpha, u)} (G, Y, y_0) \xrightarrow{(\beta, v)} (F, Y'', y''_0) \longrightarrow * \tag{6}$$

*una sucesión exacta de grupos de transformaciones punteados. Entonces existe una sucesión exacta natural de conjuntos punteados*

$$* \rightarrow H_{y'_0} \xrightarrow{\alpha_*} G_{y_0} \xrightarrow{\beta_*} F_{y''_0} \xrightarrow{\delta} Y'/H \xrightarrow{u_*} Y/G \xrightarrow{v_*} Y''/F \rightarrow *, \tag{7}$$

*donde  $\alpha_*, \beta_*, u_*, v_*$  están inducidas de manera natural por  $(u, \alpha), (v, \beta)$  y el morfismo conector  $\delta$  está definido por  $\delta(f) = (u^{-1}(y_0g))H$  para cualquier  $g \in \beta^{-1}(f)$ .*

El siguiente resultado se obtiene aplicando directamente el Lema 4.9, que nos dice que  $\lim^1$  indica la medida de exactitud del funtor  $\lim$ .

**Teorema 4.10.** *Sean  $\underline{G}'$ ,  $\underline{G}$ , y  $\underline{G}''$  diagramas de grupos de tipo  $T$ . Para la sucesión exacta corta de diagramas de grupos de tipo  $T$ .*

$$* \longrightarrow \underline{G}' \xrightarrow{j} \underline{G} \xrightarrow{k} \underline{G}'' \longrightarrow *$$

*Existe una sucesión exacta natural*

$$* \rightarrow \lim \underline{G}' \xrightarrow{j} \lim \underline{G} \xrightarrow{k} \lim \underline{G}'' \xrightarrow{\delta} \lim^1 \underline{G}' \xrightarrow{\tilde{j}} \lim^1 \underline{G} \xrightarrow{\tilde{k}} \lim^1 \underline{G}'' \rightarrow *,$$

*donde  $j = \lim j, k = \lim k, \tilde{j} = \lim^1 j, \tilde{k} = \lim^1 k$  y la función de conexión  $\delta$  está definida por  $\delta(g''_a) = [j_{cod(\alpha)}^{-1}(h_{cod(\alpha)}^{-1}g_a(h_{dom(\alpha)}))]$  para  $(h_a) \in \prod_{a \in V} G_a$  tal que  $(k_a(h_a)) = (g''_a)$ .*

*Demostración.* Es claro que la exactitud de la sucesión de diagramas de grupos, implica la exactitud de la sucesión de grupos

$$* \longrightarrow \prod_{a \in V} G'_a \xrightarrow{(j_a)} \prod_{a \in V} G_a \xrightarrow{(k_a)} \prod_{a \in V} G''_a \longrightarrow *$$

y también de la sucesión de conjuntos

$$* \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} G'_{cod(\alpha)} \xrightarrow{(j_{cod(\alpha)})} \prod_{\alpha \in A} G_{cod(\alpha)} \xrightarrow{(k_{cod(\alpha)})} \prod_{\alpha \in A} G''_{cod(\alpha)} \longrightarrow *$$

Las funciones  $((j_a), (j_{cod(\alpha)}))$  y  $((k_a), (k_{cod(\alpha)}))$  son equivariantes respecto a la acción  $\diamond$  dada en la definición de  $\lim^1$ . En efecto, sean  $(x'_{cod(\alpha)}) \in \prod_{\alpha \in A} G'_{cod(\alpha)}$  y  $(g'_a) \in \prod_{a \in V} G'_a$ , entonces

$$\begin{aligned} (j_{cod(\alpha)})(x_{cod(\alpha)} \diamond (g'_a)) &= (j_{cod(\alpha)}(g'^{-1}_{cod(\alpha)} x'_{cod(\alpha)} q'_\alpha(g'_{dom(\alpha)}))) \\ &= ((j_{cod(\alpha)}(g'_{cod(\alpha)}))^{-1} j_{cod(\alpha)}(x'_{cod(\alpha)}) j_{cod(\alpha)} q'_\alpha(g'_{dom(\alpha)})) \\ &= ((j_{cod(\alpha)}(g'_{cod(\alpha)}))^{-1} j_{cod(\alpha)}(x'_{cod(\alpha)}) q_\alpha j_{dom(\alpha)}(g'_{dom(\alpha)})) \\ &= ((j_{cod(\alpha)})(x'_{cod(\alpha)} \diamond (j_a)(g'_a))). \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que  $((k_a)(k_{cod(\alpha)}))$  es equivariante. Aplicando el Lema 4.9 obtenemos la sucesión exacta requerida, tomando en cuenta que para la acción  $\diamond$  los grupos de isotropía de los puntos  $(e')$ ,  $(e)$  y  $(e'')$  son los límites de los diagramas y los espacios orbitales son los límites derivados.  $\square$

**Ejemplo 4.11.** *En la definición de  $\lim^1$  basta con analizar cada arista dirigida, por esta razón vale la pena considerar éstos ejemplos.*

1.  $\lim^1$  para un homomorfismo de grupos.

Sea

$$\underline{G} : \quad G_{cod(\alpha)} \xleftarrow{f_\alpha} G_{dom(\alpha)}$$

El grupo  $G = G_{dom(\alpha)} \times G_{cod(\alpha)}$  actúa sobre el conjunto  $X = G_{cod(\alpha)}$  por

$$x_{cod(\alpha)} \diamond (g_{dom(\alpha)}, g_{cod(\alpha)}) = g^{-1}_{cod(\alpha)} x_{cod(\alpha)} f_\alpha(g_{dom(\alpha)}).$$

El primer límite derivado para  $\underline{G}$ , se define como el espacio de órbitas de la acción  $\diamond$  :

$$\lim^1 \underline{G} = G_{cod(\alpha)} / G_{dom(\alpha)} \times G_{cod(\alpha)}.$$

2.  $\lim^1$  para diagramas de tipo  $\vee$

Sea

$$\underline{G} : \quad \begin{array}{ccc} & & G_2 \\ & & \downarrow f_0^2 \\ G_1 & \xrightarrow{f_0^1} & G_0 \end{array}$$

El grupo  $G = G_0 \times G_1 \times G_2$  actúa sobre el conjunto  $X = G_0 \times G_0$  por

$$(x'_0, x''_0) \diamond (g_0, g_1, g_2) = (g_0^{-1}x'_0f_0^1(g_1), g_0^{-1}x''_0f_0^2(g_2)).$$

El primer límite derivado para  $\underline{G}$ , se define como el espacio de órbitas de la acción  $\diamond$  :

$$\lim^1 \underline{G} = G_0 \times G_0 / G_0 \times G_1 \times G_2.$$

Esta descripción para  $\lim^1$  se simplifica, considerando la acción derecha derecha  $*$  del grupo  $G_1 \times G_2$  en el conjunto  $G_0$ , dada por

$$x_0 * (g_1, g_2) = f_0^2(g_2^{-1})x_0f_0^1(g_1).$$

La función  $\varphi : G_0 \times G_0 \rightarrow G_0$  definida por  $(x'_0, x''_0) \mapsto (x''_0)^{-1}x'_0$ , induce una biyección entre los correspondientes espacios de órbitas

$$G_0 \times G_0 / G_0 \times G_1 \times G_2 \rightarrow G_0 / G_1 \times G_2.$$

Así,

$$\lim^1 \underline{G} = G_0 / G_1 \times G_2.$$

Las órbitas de esta acción son de la forma  $f_0^2(G_2)x_0f_0^1(G_1)$ ,  $x_0 \in G_0$ . En particular, si  $f_0^2(G_2)$  es normal en  $G_0$ , entonces el primer límite derivado de  $\underline{G}$  es el conjunto de clases laterales del subgrupo  $H = f_0^1(G_1)f_0^2(G_2)$  en  $G_0$ :

$$\lim^1 \underline{G} = G_0 / H. \quad (8)$$

Por ejemplo, si  $\underline{G}$  consta de grupos abelianos (aditivos), entonces el primer límite derivado de  $\underline{G}$  es el grupo cociente  $G_0$  módulo el subgrupo  $N = f_0^1(G_1) + f_0^2(G_2)$ :

$$\lim^1 \underline{G} = G_0 / N.$$

## 5 El cocilindro de una función y $\text{lím}^1$

En esta sección vamos relacionar las categoría **Top** y **Grp** por medio del functor  $\pi_1$ . Tenemos la siguiente situación.

- Dado el diagrama en **Top** (función continua)

$$\underline{\mathbf{X}}: f : (X_0, x_0) \longrightarrow (X_1, x_1).$$

- Aplicando  $\pi_1$ , se obtiene el siguiente diagrama (homomorfismo de grupos) en **Grp**

$$\pi_1(\underline{\mathbf{X}}): f_{\#} = \pi_1(f) : \pi_1(X_1, x_1) \rightarrow \pi_1(X_0, x_0)$$

La cuestión es: ¿Cómo está dada esta acción natural la cual coincide con la definición (5)?

Para responder la pregunta haremos uso de algunos conceptos tales como fibraciones de Hurewicz y algunos resultados básicos que involucran tanto fibraciones de Hurewicz como el cocilindro de una función continua. En realidad, los objetos mencionados en este párrafo nos servirán como un puente para pasar de **Top** a **Grp**.

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $A \subseteq X$  un subconjunto de  $X$ , sea  $X \times I$ , donde  $I$  denota el intervalo unitario  $[0, 1]$ , y supongamos que las funciones continuas  $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$  coinciden en  $A$  (i.e.,  $f_0|_A = f_1|_A$ ). Entonces decimos que  $f_0$  es **homotópica** a  $f_1$  **relativa** a  $A$ , denotada por  $f_0 \simeq f_1 \text{ rel}(A)$ , si existe una función continua

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

tal que  $H(x, 0) = f_0(x)$ ,  $H(x, 1) = f_1(x)$  para cada  $x \in X$  y  $H(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$  para cada  $a \in A$ , y cada  $t \in I$ . A tal función se denomina **homotopía relativa** a  $A$  de  $f_0$  a  $f_1$  y se denota por  $H : f_0 \simeq f_1 \text{ rel}(A)$ . Si  $A = \emptyset$ , se omite la frase “relativa a”  $\emptyset$  y se escribe  $H : f_0 \simeq f_1$ .

**Definición 5.1.** Sea  $\mathcal{K}$  una clase de espacios topológicos, una función continua  $p : E \longrightarrow B$  tiene la **propiedad de levantamiento de homotopías**

( $p \in \mathbf{PLH}(\mathcal{K})$ ) con respecto a la clase  $\mathcal{K}$  si para cada  $X \in \mathcal{K}$  y cada diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & E \\
 \downarrow \partial_0 & \nearrow \hat{H} & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

donde  $\partial_0(x) = (x, 0)$  para cada  $x \in X$ , existe una homotopía  $\hat{H} : X \times I \rightarrow E$  tal que preserva la conmutatividad del diagrama, i.e.,  $\hat{H} \circ \partial_0 = h$  y  $p \circ \hat{H} = H$ .

**Definición 5.2.** Una función continua  $p : E \rightarrow B$  se llama **fibración de Hurewicz** si  $p$  tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a la clase de todos los espacios topológicos, i.e.,  $p \in \mathbf{PLH}(\mathbf{Top})$  (donde  $\mathbf{Top}$  es la clase de todos los espacios topológicos).

**Definición 5.3.** Una fibración de Hurewicz  $p : E \rightarrow B$  se llama **regular** si para cada diagrama conmutativo como en la Definición 5.1 en la que la homotopía  $H$  es relativa a  $A$ , la homotopía  $\hat{H}$  que preserva la conmutatividad del diagrama también es relativa a  $A$ .

**Notación:** En el transcurso de este trabajo cuando hablemos de una fibración (regular), entenderemos una fibración (regular) de Hurewicz.

En lo que resta de este capítulo  $I$  denotará el intervalo unitario  $[0, 1]$ . Dado un espacio topológico  $X$ , obtenemos un nuevo espacio topológico (equipado con la topología compacto-abierta) llamado **el espacio de trayectorias** en  $X$  denotado por  $X^I$ , i.e.,

$$X^I = \{\omega : I \rightarrow X\}.$$

**Definición 5.4.** Sea  $f : X_1 \rightarrow X_0$  una función continua. El **cocilindro** de  $f$ , denotado por  $\mathit{coCyl}(f)$ , es el límite del diagrama

$$X_1 \xrightarrow{f} X_0 \xleftarrow{p_1} X_0^I$$

donde  $p_1(\omega) = \omega(1)$ , para cada  $\omega \in X_0^I$ .

**Observación 5.5.** *El cocilindro de  $f$  es el diagrama pull-back:*

$$\begin{array}{ccc} \text{coCyl}(f) & \xrightarrow{f'} & X_0^I \\ \downarrow t & & \downarrow p_1 \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_0 \end{array}$$

*Explícitamente  $\text{coCyl}(f) = \{(\omega, x) \in X_0^I \times X_1 \mid \omega(1) = f(x)\}$ , junto con las funciones  $t$  y  $f'$  dadas por  $t(\omega, x) = x$  y  $f'(\omega, x) = \omega$ , respectivamente.*

**Proposición 5.6.** *Las funciones  $t$  y  $f'$  asociados a  $\text{coCyl}(f)$  son fibraciones.*

En realidad los conceptos de cocilindro y fibración están presentes en cada función continua, así mismo, estos conceptos están relacionados con aspectos hamotópicos como lo muestra el siguiente resultado.

**Teorema 5.7.** *Toda función  $f : X_1 \rightarrow X_0$  admite la siguiente factorización*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{s} & \text{coCyl}(f) \\ \downarrow f & \swarrow p & \\ X_0 & & \end{array}$$

donde

- (a)  $p$  es una fibración, definida por  $p((\omega, x)) = \omega(0)$ ,  $(\omega, x) \in \text{coCyl}(f)$
- (b)  $s$  está definida por  $s(x) = (c_{f(x)}, x)$ ,  $x \in X_1$ , encaja a  $X_1$  en  $\text{coCyl}(f)$  como retracto fuerte por deformación.

El siguiente Teorema nos dice que las fibraciones están asociadas con una acción (a la derecha) natural de un grupo sobre un conjunto, más precisamente:

**Teorema 5.8.** *Sea  $p : (E, e) \rightarrow (B, b)$  una fibración de Hurewicz y,  $F = p^{-1}(b)$ . Entonces el grupo fundamental  $G = \pi_1(B, b)$  actúa naturalmente a la derecha sobre  $\pi_0(F)$ , el conjunto de componentes (por trayectorias) de  $F$ , como sigue*

$$[x] * [\omega] = [\tilde{\omega}(1)],$$

donde  $\tilde{\omega}$  es un levantamiento de  $\omega$  tal que  $\tilde{\omega}(0) = x$ .

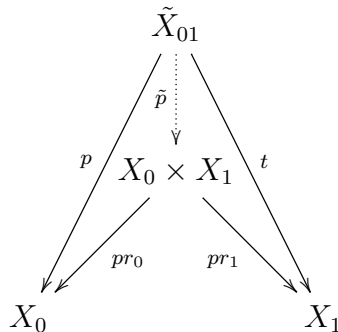
Para dicha acción natural se tiene la sucesión exacta corta de conjuntos punteados

$$* \rightarrow \pi_0(F, e)/G \xrightarrow{i_{\#}} \pi_0(E, e) \xrightarrow{p_{\#}} p_{\#}(\pi_0(E, e)) \rightarrow *$$

donde  $i_{\#}$  y  $p_{\#}$  son las aplicaciones inducidas por  $i : F \hookrightarrow E$  y  $p : E \rightarrow B$ .

**Notación:**  $\tilde{X}_{01} = coCyl(f)$ .

**Proposición 5.9.** *Dada  $f : X_1 \rightarrow X_0$  una función continua, existe una única función  $\tilde{p} : \tilde{X}_{01} \rightarrow X_0 \times X_1$  que hace conmutativo el siguiente diagrama*



i.e., la función dada por  $\tilde{p}(\tilde{x}) = (p(\tilde{x}), t(\tilde{x}))$ , es una fibración.

**Observación 5.10.** *Tenemos la correspondencia*

$$f : X_1 \rightarrow X_0 \iff \tilde{p} : \tilde{X}_{01} \rightarrow X_0 \times X_1 \tag{9}$$

Vamos a retomar el planteamiento que hicimos al inicio de esta sección

- Dado el diagrama en **Top** (función continua)

$$\underline{X} : f : (X_0, x_0) \rightarrow (X_1, x_1).$$

Aplicando  $\pi_1$

- Se obtiene el siguiente diagrama (homomorfismo de grupos) en **Grp**

$$f_{\#} = \pi_1(f) : \pi_1(X_1, x_1) \rightarrow \pi_1(X_0, x_0).$$

Ahora la pregunta

¿Cómo está dada esta acción natural la cual coincide con la definición (5)?

la responde el siguiente Teorema.

En realidad es una aplicación inmediata del Teorema 5.8 a la fibración  $\tilde{p}$ .

**Proposición 5.11.** Sea  $\tilde{p}$  la fibración descrita en la proposición anterior para  $(x_0, x_1) \in X_0 \times X_1$  tal que  $f(x_1) = x_0$  y sea

$$F = \tilde{p}^{-1}(x_0, x_1)$$

su fibra. Entonces

- (a)  $F = \Omega(X_0, x_0)$  el espacio de lazos en  $X_0$  basados  $x_0$ . Por lo tanto  $\pi_0(F) = \pi_1(X_0, x_0)$ .
- (b) La acción natural  $\diamond$  a la derecha del grupo  $G = \pi_1(X_0 \times X_1, (x_0, x_1)) \simeq \pi_1(X_0, x_0) \times \pi_1(X_1, x_1)$  sobre el conjunto  $\pi_0(F)$  (definida en el Teorema anterior) está definida por

$$[\omega_0] \diamond ([\delta_0], [\delta_1]) = [\delta_0]^{-1} [\omega_0] f_{\#}([\delta_1]),$$

donde  $f_{\#} = \pi_1(f) : \pi_1(X_1, x_1) \rightarrow \pi_1(X_0, x_0)$  es el homomorfismo.

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} F &= \{(\omega, x) \in \tilde{X}_{01} | \tilde{p}(\omega, x) = (x_0, x_1)\} \\ &= \{(\omega, x) \in X_0^I \times X_1 | \omega(0) = x_0, \omega(1) = f(x), x = x_1\} \\ &= \{(\omega, x) \in X_0^I \times X_1 | \omega(0) = \omega(1) = x_0, x = x_1\} \\ &= \Omega(X_0, x_0) \times \{x_1\} \simeq \Omega(X_0, x_0). \end{aligned}$$

Así  $F = \pi_1(X_0, x_0)$ . La acción a la que nos referimos, es la acción canónica descrita en la Teorema 5.8. Para ello sea  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1) \in \Omega(X_0, x_0) \times \Omega(X_1, x_1)$  y  $(\omega_0, x_1) \in F$ . Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \{*\} \times \{0\} & \xrightarrow{g} & \tilde{X}_{01} \\
 \downarrow \partial_0 & \nearrow \tilde{\sigma} & \downarrow \tilde{p} \\
 \{*\} \times I & \xrightarrow{\sigma} & X_0 \times X_1
 \end{array}$$

donde  $g(*, 0) = (\omega_0, x_1)$ . Como  $\tilde{p}$  es una fibración, sabemos que existe  $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \tilde{X}_{01}$  para  $\sigma$ . Buscamos  $\tilde{\sigma}$  un levantamiento tal que

(i)  $\tilde{p} \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ .

(ii)  $\tilde{\sigma}(0) = (\omega_0, x_1)$ .

Para cada  $t \in I$   $\tilde{\sigma}(t) = (\eta_t, y_t)$ , donde  $(\eta_t, y_t) \in \tilde{X}_{01}$ , i.e.,  $\eta_t : I \rightarrow X_0$ ,  $y_t \in X_1$  y  $\eta_t(1) = f(y_t)$ . Luego las condiciones (i) y (ii) nos dicen que para cada  $t \in I$ ,  $\eta_t$  debe ser tal que:

$$\eta_t(0) = \sigma_0(t), \quad \eta_t(1) = f \circ \sigma_1(t), \quad \eta_0 = \omega_0.$$

Así que para cada  $t \in I$ , basta definir  $\eta_t$  que cumpla las tres condiciones anteriores. Sea

$$\eta_t(s) = \begin{cases} \sigma_0(t - 3s) & \text{si } 0 \leq s \leq t/3; \\ \omega_0((3s - t)/(3 - 2t)) & \text{si } t/3 \leq s \leq 1 - t/3; \\ f(\sigma_1(3s + t - 3)) & \text{si } 1 - t/3 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Sea  $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \tilde{X}_{01}$ , definida por  $\tilde{\sigma}(t) = (\eta_t, y_t)$ , donde  $y_t = \sigma_1(t)$ . Notemos que esta función definida así, satisface:

(i)  $\tilde{\sigma}(0) = (\omega_0, x_0)$ .

(ii)  $\tilde{p} \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ .

(iii)  $\tilde{\sigma}(1) = (\eta_1, \sigma_1(1)) = (\sigma_0^{-1} * \omega_0 * f \circ \sigma_1, x_1)$ .

Por lo tanto, si definimos

$$[\omega_0] \diamond ([\sigma_0], [\sigma_1]) = [\sigma_0]^{-1}[\omega_0]f_{\#}[\sigma_1]$$

entonces por el Teorema 5.8, se tiene que  $\diamond$  es una acción. □

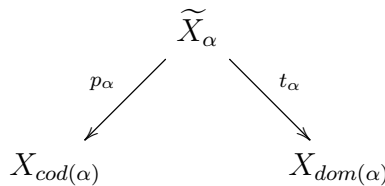
**Nota:** En esta sección hemos estudiado el functor  $\lim$  y el functor  $\lim^1$ , este último como functor derivado (derecho) del functor  $\lim$ . En el caso de sucesiones inversas de grupos abelianos, en [8] se demuestra que para  $n \geq 2$ ,  $\lim^n$  son triviales, es decir para cada sucesión inversa de grupos abelianos  $\underline{A}$ ,  $\lim^n \underline{A} = 0$ . Por tal razón, el caso que tiene sentido considerar es el caso  $n = 1$ ,  $\lim^1$ .

## 6 El cotelescopio y $\lim^1$

Sea  $\underline{X}$  un diagrama de tipo  $T$  en la categoría **Top** (con conjunto de vértices  $V$  y aristas dirigidas  $A$ ), nuevamente, la meta es pasar al diagrama  $\pi_1(\underline{X})$  de tipo  $T$  en la categoría **Grp**. Vamos a aplicar la Proposición 5.11 a cada función continua en el diagrama  $\underline{X}$  (la cual está asociada a cada arista dirigida).

La construcción conocida como *construcción cotelescopica* se realiza de la siguiente manera:

1. Para cada arista  $\alpha \in A$ , la función  $f_{\alpha} : X_{dom(\alpha)} \rightarrow X_{cod(\alpha)}$  se le asigna un par de fibraciones asignadas al cocilindro, como se muestra en el siguiente diagrama



donde  $\widetilde{X}_{\alpha} = coCyl(f_{\alpha})$  denota al cocilindro de  $f_{\alpha}$ .

2. Se obtiene un nuevo diagrama  $\widetilde{\underline{X}}$  de tipo  $K$ , es decir,  $K$  es un esquema de diagramas que tiene vértices  $\widetilde{V} = V \cup A$  y como aristas  $\widetilde{A} = \{\alpha \rightarrow cod(\alpha), \alpha \rightarrow dom(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ .

3. Al límite del diagrama  $\widetilde{\mathbf{X}}$  se llama **cotelescopio** del diagrama  $\mathbf{X}$  y se denota por  $coTel(\underline{\mathbf{X}})$ :

$$coTel(\underline{\mathbf{X}}) = \lim \widetilde{\mathbf{X}}.$$

Según la construcción general de los límites la descripción explícita del cotelescopio está dado por:

$$coTel(\underline{\mathbf{X}}) = \{((y_\alpha), (\omega_\alpha, y_{dom(\alpha)})) \mid \omega_\alpha(0) = y_{cod(\alpha)}, \omega_\alpha(1) = f_\alpha(y_{dom(\alpha)}) \quad \forall \alpha \in A\}$$

donde

- (a)  $(y_\alpha) \in \prod_{a \in V} X_a$
- (b)  $(\omega_\alpha, y_{dom(\alpha)}) \in \prod_{\alpha \in A} (X_{cod(\alpha)}^I \times X_{dom(\alpha)})$ .

**Observación 6.1.** Si el diagrama  $\underline{\mathbf{X}}$  es una función continua  $f : X_1 \rightarrow X_0$ , entonces  $coTel(\underline{\mathbf{X}}) = \widetilde{X}_{01}$

La construcción la podemos formular como sigue:

**Proposición 6.2.** Dado un diagrama  $\underline{\mathbf{X}}$  en **Top**, obtenemos el espacio  $coTel(\underline{\mathbf{X}})$  junto con la familia de proyecciones naturales  $\{\tilde{q}_k : coTel(\underline{\mathbf{X}}) \rightarrow X_k\}_{k \in \widetilde{V}}$  cada una de cuales es una fibración.

**Proposición 6.3.** La subfamilia de fibraciones asociadas al  $coTel(\underline{\mathbf{X}})$

$$\{\tilde{q}_a : coTel(\underline{\mathbf{X}}) \rightarrow X_a\}_{a \in V}$$

induce una única función continua

$$\tilde{q} : coTel(\underline{\mathbf{X}}) \rightarrow \prod_{a \in V} X_a$$

dada por  $\tilde{q}(\tilde{x}) = (\tilde{q}_a(\tilde{x}))$  para cada  $\tilde{x} \in coTel(\underline{\mathbf{X}})$ . Para la cual

- (a)  $\tilde{q}$  es una fibración de Hurewicz.
- (b) La acción natural del grupo  $G = \pi_1(\prod_{a \in V} X_a) = \prod_{a \in V} \pi_1(X_a)$  sobre  $\pi_0(F) = \prod_{\alpha \in A} \pi_1(X_{cod(\alpha)}, x_{cod(\alpha)})$ , donde

$$F = \tilde{q}^{-1}(x) \simeq \prod_{\alpha \in A} \Omega(X_{cod(\alpha)}, x_{cod(\alpha)})$$

está dada por

$$([\sigma_a]) \diamond ([\omega_\alpha]) = ([\sigma_{cod(\alpha)}]^{-1}[\omega_\alpha](f_\alpha) \# ([\sigma_{dom(\alpha)}]))$$

la cual coincide con la acción que aparece en (5). Así,

$$\pi_0(F)/G = \lim^1 \pi_1(\underline{\mathbf{X}}).$$

Además:  $\tilde{q}_{\#}\pi_0(\text{coTel}(\underline{\mathbf{X}})) = \lim \pi_0(\underline{\mathbf{X}}).$

*Demostración.* (a) La fórmula dada para  $F$  se obtiene de la descripción explícita de  $\text{coTel}$ .

(b) Sea  $(\sigma_a) \in \prod_{a \in V} \Omega(X_a, x_a)$  y sea  $(\omega_\alpha, x_{\text{dom}(\alpha)}) \in F$ . Para cada  $\alpha \in A$  queremos hallar  $\tilde{\sigma}_\alpha : I \rightarrow \tilde{X}_\alpha$  tal que:

$$(i) \quad \tilde{\sigma}(0) = (\omega_\alpha, x_{\text{dom}(\alpha)}) \text{ y } (p_\alpha, t_\alpha) \circ \tilde{\sigma} = (\sigma_{\text{cod}(\alpha)}, \sigma_{\text{dom}(\alpha)}).$$

$$(ii) \quad \tilde{\sigma}_\alpha(1) = (\sigma_{\text{cod}(\alpha)}^{-1} * \omega_\alpha * (q_\alpha \circ \sigma_{\text{dom}(\alpha)}), x_{\text{dom}(\alpha)}).$$

Como en la prueba de la Proposición 5.11, sea  $\tilde{\sigma}_a = \sigma_a$  para cada  $a \in V$ , obtenemos una familia de trayectorias  $\{\tilde{\sigma}_k\}_{k \in \tilde{V}}$ , esta familia induce una trayectoria  $\tilde{\sigma} : I \rightarrow \text{coTel}(\underline{\mathbf{X}})$  que satisface las condiciones  $\tilde{\sigma}(0) = (\omega_\alpha, x_{\text{dom}(\alpha)})$  y  $\tilde{q} \circ \tilde{\sigma} = (\sigma_{\text{cod}(\alpha)})$ . Reconsiderando las componentes por trayectorias de  $F$  que contienen a  $\tilde{\sigma}(1)$  como elemento de  $\pi_0(F) = \prod_{\alpha \in A} \pi_1(X_{\text{cod}(\alpha)}, x_{\text{cod}(\alpha)})$ , obtenemos la siguiente representación

$$([\sigma_{\text{cod}(\alpha)}]^{-1}[\omega_\alpha](f_\alpha)_{\#}([\sigma_{\text{dom}(\alpha)}])).$$

Por lo tanto

$$\pi_0(F)/G = \lim^1 \pi_1(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x}).$$

□

La proposición anterior muestra que los cotelescopios y los límites derivados están relacionados de manera natural, ya que se recupera la acción que define  $\lim^1$ . Además se tiene una versión generalizada del Teorema 5.8.

**Teorema 6.4.** *Sea  $(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x})$  un diagrama de tipo  $T$  en la categoría **Top.** de espacios topológicos punteados, entonces hay una sucesión exacta:*

$$* \rightarrow \lim^1 \pi_{n+1}(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x}) \rightarrow \pi_n(\text{coTel}(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x})) \rightarrow \lim \pi_n(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x}) \rightarrow *$$

para toda  $n \geq 0$ .

*Demostracion* Primero probaremos el teorema para el caso  $n = 0$ . Recordemos que para cada fibración  $p : (E, e) \rightarrow (B, b)$  y su fibra  $F = p^{-1}(b)$ , existe una sucesión exacta corta

$$* \rightarrow \pi_0(F, e) / \pi_1(B, b) \xrightarrow{i\#} \pi_0(E, e) \xrightarrow{p\#} p\#(\pi_0(E, e)) \rightarrow *$$

donde  $\pi_0(F, e) / \pi_1(B, b)$  es el espacio de órbitas de la acción canónica del grupo  $\pi_1(B, b)$  sobre el conjunto  $\pi_0(F)$ , y,  $i\#, p\#$  son las aplicaciones inducidas por  $i : F \hookrightarrow E$  y  $p : E \rightarrow B$ , respectivamente. Aplicando este hecho a la fibración  $\tilde{q} : coTel(\underline{\mathbf{X}}) \rightarrow \prod_{a \in V} X_a$ , obtenemos la sucesión exacta corta deseada

$$* \rightarrow \lim^1 \pi_1(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x}) \rightarrow \pi_0(coTel(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x})) \rightarrow \lim \pi_0(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x}) \rightarrow *$$

Usando la Proposición 6.3, y observando que  $(y_\alpha) \in Im(\tilde{q})$ , si y sólo si, para cada  $\alpha \in A$ , existe una trayectoria  $\omega_\alpha : I \rightarrow X_{cod(\alpha)}$  tal que  $\omega_\alpha(0) = y_{cod(\alpha)}$  y  $\omega_\alpha(1) = q_\alpha(y_{dom(\alpha)})$ . Luego

$$\begin{aligned} \tilde{q}\#(\pi_0(coTel(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x}))) &= \{([y_\alpha]) \in \prod_{a \in V} \pi_0(X_a, x_a) \mid \pi_0(q_\alpha)([y_{dom(\alpha)}]) = [y_{cod(\alpha)}]\} \\ &= \lim \pi_0(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Para probar que el teorema es válido para  $n > 0$ , notemos que los funtores  $\Omega$  y  $\lim$  conmutan: Además, también los funtores  $\Omega$  y  $coTel$  conmutan, i.e.,  $\Omega(coTel(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x})) = coTel(\Omega(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x}))$  y por lo tanto  $\pi_n(coTel(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x})) = \pi_{n-1}(coTel(\Omega(\underline{\mathbf{X}}, \mathbf{x})))$ . La conmutatividad de  $\Omega$  y  $coTel$  es una consecuencia de la conmutatividad de los funtores  $\Omega$  y  $-I$ , el cual está establecido, usando que para cada espacio topológico  $B$  el homeomorfismo  $\chi_B : \Omega(B^I) \rightarrow (\Omega(B))^I$ ,  $\chi_B : \sigma \mapsto \hat{\sigma}$ , definido por  $\sigma(s)(t) = \hat{\sigma}(t)(s)$ . Ahora, notemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Omega(B^I) & \xrightarrow{\chi_B} & (\Omega(B))^I \\ & \searrow \Omega(p) & \swarrow \hat{p} \\ & \Omega(B) \times \Omega(B) & \end{array}$$

donde  $p(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$ ,  $\hat{p}(\hat{\sigma}) = (\hat{\sigma}(0), \hat{\sigma}(1))$ . Esto implica que los funtores  $\Omega$  y  $coCyl$  conmutan y por lo tanto  $\Omega$  y  $coTel$  conmutan. □

El siguiente corolario importante se obtiene de manera inmediata

**Corolario 6.5.** *Sea  $(\underline{X}, \mathbf{x})$  un diagrama de tipo  $T$  en la categoría  $\mathbf{Top}^\bullet$ . Si para cada  $a \in V$ ,  $X_a$  son conexos por trayectorias, entonces*

$$\pi_0(\text{coTel}(\underline{X}, \mathbf{x})) \cong \lim^1 \pi_1(\underline{X}, \mathbf{x}).$$

## 7 La aplicación: Componentes y grupos fundamentales para pull-back's (diagramas de tipo $\vee$ )

Las aplicaciones están motivadas por la siguiente situación: Si  $\mathbf{X}$  es un diagrama de tipo  $\vee$  en  $\mathbf{Top}$  que consta de espacios conexos, entonces la pregunta natural que surge es si el pull-back del diagrama  $\mathbf{X}$  es conexo o no. Uno esperaría que este espacio fuera conexo. Sin embargo, esto no siempre es así, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Consideremos el siguiente diagrama de tipo  $\vee$ :  $\mathbf{X} : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{p} \mathbb{S}^1$ , donde  $p(z) = z^2$  para cada  $z \in \mathbb{S}^1$ , el límite de dicho diagrama es el diagrama pull-back:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

donde  $X = \{(z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \mid z^2 = w^2\} = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{S}^1\} \cup \{(z, -z) \mid z \in \mathbb{S}^1\}$ , y  $f, g$  se definen de manera natural. La descripción del pull-back del diagrama nos dice que éste consta de dos componentes, cada una homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ , es decir,  $X = \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ .

Dado  $\mathbf{X}$  un diagrama de tipo  $T$  en  $\mathbf{Top}$ , se puede obtener otro diagrama  $\mathbf{X}'$  de tipo  $K$ , de la siguiente manera: para cada  $\alpha \in A$ ,  $f_\alpha : X_{\text{dom}(\alpha)} \rightarrow X_{\text{cod}(\alpha)}$  se le cambia por las funciones

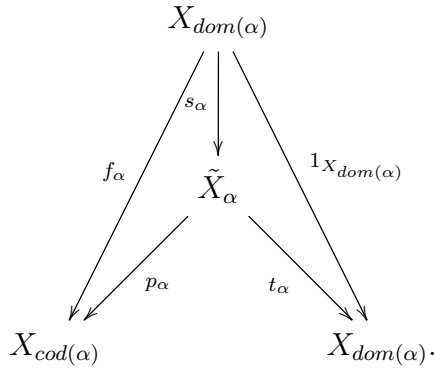
$$f_\alpha : X_{\text{dom}(\alpha)} \rightarrow X_{\text{cod}(\alpha)} \quad \text{y} \quad 1_{X_{\text{dom}(\alpha)}} : X_{\text{dom}(\alpha)} \rightarrow X_{\text{dom}(\alpha)}$$

como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X_{\text{dom}(\alpha)} & \\ f_\alpha \swarrow & & \searrow 1_{X_{\text{dom}(\alpha)}} \\ X_{\text{cod}(\alpha)} & & X_{\text{dom}(\alpha)}. \end{array}$$

Además, se tiene  $\text{lim } \mathbf{X}' = \text{lim } \mathbf{X}$ .

Así, podemos construir un morfismo  $\underline{s} : \mathbf{X}' \rightarrow \tilde{\mathbf{X}}$  de diagramas definido por medio de la familia de funciones continuas  $\{1_{X_{\text{cod}(\alpha)}}, s_\alpha, 1_{X_{\text{dom}(\alpha)}}\}_{\alpha \in A}$ , que es tal que, para cada  $\alpha \in A$ , se tiene el siguiente diagrama conmutativo:



Luego el morfismo  $\underline{s}$  induce el encaje natural.

$$s : \text{lim } \mathbf{X} \hookrightarrow \text{coTel}(\mathbf{X}). \tag{10}$$

**Teorema 7.1** ([5], Teorema 5.1.1 ). *Si en el siguiente diagrama de espacios topológicos y funciones continuas (diagrama de tipo  $\vee$ )*

$$\mathbf{X} : \quad X_2 \xrightarrow{p_2} X_0 \xleftarrow{p_1} X_1.$$

$p_1, p_2$  son fibraciones regulares de Hurewicz, entonces  $\mathbf{s} : \text{lim } \mathbf{X} \hookrightarrow \text{coTel} \mathbf{X}$  es SDR-mapeo.

Inmediatamente se tienen los siguientes resultados

**Corolario 7.2** ([5], Corolario 5.1.2). *Bajo las condiciones del teorema anterior, se tiene que*

$$\pi_n(\text{lim } \mathbf{X}) \cong \pi_n(\text{coTel}(\mathbf{X})).$$

para toda  $n \geq 0$ .

Como una consecuencia inmediata, obtenemos:

**Teorema 7.3.** *Si  $(\mathbf{X}, \mathbf{x})$  es un diagrama (punteado) de tipo  $\vee$  tal que las funciones involucradas son fibraciones regulares de Hurewicz, entonces se tiene la siguiente sucesión exacta corta*

$$* \rightarrow \lim^1 \pi_{n+1}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \rightarrow \pi_n(\lim(\mathbf{X}, \mathbf{x})) \rightarrow \lim \pi_n(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \rightarrow *$$

para toda  $n \geq 0$ .

El siguiente resultado nos dice que  $\lim^1$  caracteriza el conjunto de componentes por trayectorias de  $\lim$ .

**Corolario 7.4** ([5], Corolario 5.1.4). *Sea  $(\mathbf{X}, \mathbf{x})$  es un diagrama de tipo  $\vee$ . Si este diagrama consta de fibraciones regulares de Hurewicz y de espacios conexos por trayectorias, entonces se tiene la equivalencia natural de conjuntos*

$$\pi_0(\lim(\mathbf{X}, \mathbf{x})) \cong \lim^1 \pi_1(\mathbf{X}, \mathbf{x}).$$

El siguiente resultado que nos dice que los funtores  $\lim$  y  $\pi_n$ , límite y  $n$ -ésimo grupo de homotopías, respectivamente conmutan para el caso de diagramas de tipo  $\vee$ , cuando las funciones son aplicaciones cubrientes.

**Teorema 7.5** ([5], Teorema 5.1.12). *Sea  $(\mathbf{X}, \mathbf{x})$  un diagrama de tipo  $\vee$ . Si en  $(\mathbf{X}, \mathbf{x})$  las funciones son aplicaciones cubrientes, entonces se tiene que los siguientes grupos son isomorfos*

$$\pi_n(\lim(\mathbf{X}, \mathbf{x})) \cong \lim \pi_n(\mathbf{X}, \mathbf{x})$$

para toda  $n \geq 1$ .

## Componentes y grupos fundamentales de pull-back's

Vamos a ver como funcionan, el Corolario 7.4 y el Teorema 7.5 para algunos casos concretos.

**Ejemplo 7.6.** *Sea el siguiente diagrama pull-back*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

donde  $p(z) = z^2$  para cada  $z \in \mathbb{S}^1$ ,  $X = \{(z, z) | z \in \mathbb{S}^1\} \cup \{(z, -z) | z \in \mathbb{S}^1\}$  y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ , están definidas de manera natural. Este diagrama es el límite del siguiente diagrama de tipo  $\vee$ :

$$\mathbf{X}: \quad \mathbb{S}^1 \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{p} \mathbb{S}^1.$$

Aplicando el funtor  $\pi_1$  al diagrama  $\mathbf{X}$ , obtenemos el siguiente diagrama de grupos de tipo  $\vee$ :

$$\pi_1(\mathbf{X}): \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{p\#} \mathbb{Z} \xleftarrow{p\#} \mathbb{Z} \tag{11}$$

donde para cada  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $p\#(k) = 2k$ .

Componentes del espacio  $X$ .

De los resultados obtenidos, tenemos que

$$\pi_0(X) = \lim^1 \pi_1(\mathbf{X}) = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Por lo tanto  $|\pi_0(X)| = 2$ , es decir,  $X$  tiene 2 componentes.

Grupo fundamental del espacio  $X$ .

Para este caso, tenemos:

$$\pi_1(X) = \lim \pi_1(\mathbf{X}) = \{(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 2k = 2l\} = \Delta \cong \mathbb{Z}.$$

**Ejemplo 7.7.** Consideremos el siguiente diagrama pull-back

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ g \downarrow & & \downarrow q \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

donde  $p(z) = z^n$  y  $q(z) = z^m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $X = \{(z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 | z^n = w^m\}$  y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ , están dadas por  $f(z, w) = z$  y  $g(z, w) = w$ , respectivamente. Este diagrama es límite del siguiente diagrama

$$\mathbf{X}: \quad \mathbb{S}^1 \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{q} \mathbb{S}^1.$$

Aplicando el funtor  $\pi_1$  al diagrama  $\mathbf{X}$ , se tiene el siguiente diagrama de grupos

$$\pi_1(\mathbf{X}): \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{p\#} \mathbb{Z} \xleftarrow{q\#} \mathbb{Z}, \tag{12}$$

donde  $p\#(k) = nk$  y  $q\#(k) = mk$ .

Componentes del espacio  $X$ .

Para este caso se tiene:

$$\pi_0(X) = \text{lím}^1 \pi_1(\mathbf{X}) = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_d.$$

Por lo tanto  $|\pi_0(X)| = d$ , es decir,  $X$  tiene  $d$  componentes, donde  $d = \text{m.c.d}(n, m)$ . En particular si  $\text{m.c.d}(n, m) = 1$ , entonces  $X$  es conexo.

Grupo fundamental del espacio  $X$ .

Para este caso se tiene:

$$\pi_1(X) = \text{lím} \pi_1(\mathbf{X}) = \langle (m', n') \rangle,$$

donde  $m' = m/d$ ,  $n' = n/d$  y  $d = \text{mcd}(m, n)$ .

**Ejemplo 7.8.** Sea el siguiente diagrama pull-back

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ g \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{q} & \mathbb{S}^1, \end{array}$$

donde  $q(z) = z^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y  $\text{exp}(t) = e^{2\pi it}$ ,  $X = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \mid z^m = e^{2\pi it}\}$  y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ , están dadas de manera natural. Este diagrama es el límite del siguiente diagrama:

$$\mathbf{X}: \quad \mathbb{S}^1 \xrightarrow{q} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{\text{exp}} \mathbb{R}.$$

Aplicando el funtor  $\pi_1$  al diagrama  $\mathbf{X}$ , se tiene el siguiente diagrama de grupos

$$\pi_1(\mathbf{X}): \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{q\#} \mathbb{Z} \leftarrow 0, \tag{13}$$

donde  $q\#(k) = mk$ .

Componentes del espacio  $X$ .

Para este caso se tiene:

$$\pi_0(X) = \text{lím}^1 \pi_1(\mathbf{X}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m.$$

Luego  $X$  tiene  $m$  componentes.

Grupo fundamental del espacio  $X$ .

Para este caso se tiene:

$$\pi_1(X) = \text{lím} \pi_1(\mathbf{X}) = \{(0, k) \mid mk = 0\} \cong \ker(q\#) = 0.$$

## Agradecimientos

Agradezco encarecidamente a los árbitros su revisión exhaustiva del trabajo. Sus sugerencias y comentarios permitieron mejorar sustancialmente y así mejorar el capítulo.

## Bibliografía

- [1] A. K. Bousfield, D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Math., vol. 304, Springer, Berlin, 1972.
- [2] A. Bykov and B. Morales *Coteriescopes and derived limits*. *Topology and its Applications*, 153: 327–336, 2005.
- [3] F. Cathey, *Strong shape theory*, in: *Shape Theory and Geometric Topology*, Lecture Notes Math., Springer, Berlin, 1981, pp. 216–239.
- [4] D. A. Edwards, H. M. Hastings, *Čech and Steenrod Homotopy Theories with applications to Geometric Topology*, SLNM 542, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [5] Raúl Juárez Flores. *Límites derivados de diagramas finitos*, , Tesis de Maestría FCFM, 2009.
- [6] Gabriel P. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. *Ergebnisse der Mathematik* 35. Springer, Berlin-Heidenberg-New York 1967.
- [7] Serge Lang *Algebra*.
- [8] S. Mardešić *Strong shape and Homology*, Springer-Verlag 2000. Springer Verlag 2002.
- [9] E. H. Spanier *Algebraic Topology*. Mc Graw-Hill Book Company 1966.

Instituto de Matemáticas Unidad Cuernavaca UNAM

correo

raul.juarez@im.unam.mx

# Índice de autores

- Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 133  
Arriaga Hernández, Jesús Alonso, 47
- Cuaya Simbro, Diana, 133  
Cuevas Otahola, Bolivia Teresa, 47
- Herrera Carrasco, David, 79, 107, 133
- Juárez Flores, Raúl, 165
- Macías Romero, Fernando, 79, 107, 133  
Matsuhashi, Eiichi, 107
- Oliveros Oliveros, José Jacobo, 47  
Ortega Becerril, José Alberto, 107
- Pérez Villegas, María de los Ángeles, 47
- Ramírez Aparicio, Leonardo, 79
- Sáez Macegoza, José de Jesús, 5
- Vilchis Montalvo, Iván Fernando, 5

Matemáticas y sus aplicaciones 25  
Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco  
10 de febrero de 2026  
pdf  
6 MB

# Matemáticas y sus aplicaciones 25

**Fernando Macías Romero**

**David Herrera Carrasco**

**Editores**

La serie Matemáticas y sus aplicaciones llega a su volumen 25 consolidándose como uno de los referentes editoriales más importantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Esta obra colectiva reúne investigaciones de vanguardia que reflejan la vitalidad y el rigor de la comunidad matemática contemporánea.

A través de sus capítulos, el lector encontrará un recorrido profundo por diversas áreas del conocimiento:

- **Fundamentos y Estructura:** Avances en topología de continuos y teoría de hiperespacios.
- **Herramientas Analíticas:** Desarrollos en análisis, probabilidad y geometría.
- **Impacto y Sociedad:** Aplicaciones prácticas en modelación matemática y propuestas innovadoras para la enseñanza de la disciplina.

Cada trabajo incluido en este volumen ha superado un estricto proceso de arbitraje por pares, asegurando que los contenidos cumplan con los más altos estándares de calidad y relevancia científica. Más que una compilación de artículos, este libro es un testimonio del intercambio intelectual generado a causa de las conferencias internacionales CIMA y un recurso indispensable para investigadores, académicos y estudiantes de licenciatura y de posgrado que buscan comprender y expandir las fronteras de las ciencias matemáticas.

