Fernando Macías Romero

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchingo, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas de proyectos de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 40 tesis de licenciatura, 10 de maestría y 8 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI I.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conferences on Mathematics and its Aplications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los de Matemáticas y sus aplicaciones.

Los capítulos del presente libro 21 están creados con la más intensa pasión, se agrupan por las diferentes áreas de la matemática, a la que pertenecen los temas, cuyos frutos beneficiarán a las Internacional Conferences on Mathematics and its Applications (CIMA) que a su vez emanan por la fortuna de contar con el mejor comité editorial que ha seleccionado la Gran Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Aquí se encuentran los resultados que promueven la riqueza matemática, en este libro están los trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorable jueces al ser autorizados después de sabios arbitrajes sumamente rigurosos.

FCFM BUAP

BUAP ediciones

9 786078 957101

Matemáticas y sus aplicaciones 21

Matemáticas y sus aplicaciones 21

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Editores

David Herrera Carrasco

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Univesidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemerita Universidad Autónoma de Puebla. Ha sido miembro organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado varios artículos, en revistas internacionales. Es autor de varions libros (como coautor, con otros profesores de la FCFM); es editor de algunos libros. Además, ha concluido la dirección de tesis: 5 de doctorado, 8 de maestría y más de 30 de Licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis de licenciatura y del posgrado.

Matemáticas y sus aplicaciones 21

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Rectora: Ma. Lilia Cedillo Ramírez
Secretaria General: José Manuel Alonso Orozco
Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura: José Carlos Bernal Suárez
Dirección General de Publicaciones: Luis Antonio Lucio Venegas

Primera edición: 2023
978-607-8957-10-1

4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 222 229 55 00
www.buap.mx

2 Norte 104, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP 72000
Tels.: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00, ext. 5768
www.dgp.buap.mx | libros.dgp@correo.buap.mx
www.publicaciones.buap.mx

Diseño de portada:

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 21

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el
International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Contenido

Presentación 1

Álgebra

Capítulo 1. La categoría de semigrupos $\mathcal{SGRP}$, la categoría $\mathcal{MCC}$ y el grupo conmutativo de Grothendieck 5

Luis Antonio Huerta- Sánchez, Carlos Alberto López-Andrade

Lógica

Capítulo 2. El arte de la lógica I (paradojas y tolerancia) 51

Agustín Contreras Carreto, Carlos Guillén Galván

Modelación matemática

Capítulo 3. Arrow's impossibility Theorem and the Gibbard-Satterthwaite's manipulability theorem equivalence 67

Bolivia Cuevas Otahola, Jesús Alonso Arriaga Hernández, Ramón Pino Pérez, María Monserrat Morín Castillo and José Jacobo Oliveros Oliveros

Probabilidad y Estadística

Capítulo 4. Modelo de Vasicek: teoría y generación de curvas de rendimiento con CETES 99
María Teresa Verónica Martínez Palacios, Ambrosio Ortiz Ramírez, Juan Martín Segovia Aldape

Topología

Capítulo 5. Sobre la unicidad del n-ésimo hiperespacio para continuos enrejados 129
David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Leonardo Ramírez Aparicio

Capítulo 6. Unicidad de conos sobre curvas localmente conexas 159
Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero

Capítulo 7. El n-ésimo producto simétrico suspensión 171
Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

Capítulo 8. Contractibilidad en los hiperespacios 2^X y $C(X)$ 195
Luis Antonio Guevara Martínez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

Capítulo 9. El punto fijo en las dendritas 215
David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, David Rodríguez Hernández

Índice de autores 237

Presentación

Las International Conferences On Mathematics and its Applications (CIMA) llevan ya 19 años realizándose, año tras año. Aquí participa como organizadora la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) en compañía de sus estudiantes. Contamos con la participación de matemáticos de nivel internacional en estos CIMA. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Nineth International Conference on Mathematics ant its Applications* (9CIMA, 2023), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 9CIMA, 2022 como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la FCFM de la BUAP. Es por el amor a la matemática que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Agradecemos infinitamente a Leonardo Ramírez Aparicio por su apoyo en la edición de esta obra 21.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Álgebra

Matemáticas y sus aplicaciones 21, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-10-1

Capítulo 1

La categoría de semigrupos $\mathcal{SGRP}$, la categoría $\mathcal{MCC}$ y el grupo conmutativo de Grothendieck

Luis Antonio Huerta-Sánchez, Carlos Alberto López-Andrade
FCFM, BUAP

Resumen

Los semigrupos y monoides son de las estructuras más básicas del álgebra en el sentido de que éstos solo son conjuntos equipados de una operación binaria asociativa, y en el mejor de los casos, también de un elemento neutro. A pesar de las carencias, los semigrupos y monoides resultan tener propiedades interesantes además de que proporcionan atractivas construcciones. En el presente capítulo de libro se exponen algunos resultados básicos dentro de la Teoría de Semigrupos, en particular y entre otras cosas, se exhibe cómo se puede construir un grupo a partir de un monoide conmutativo y cancelable.

1 Introducción

Este capítulo de libro está basado en la tesis de licenciatura "Semigrupos" (cf. [3]), escrita por el primer autor y bajo la dirección del segundo, inspirada en la lectura parcial del primer capítulo del libro *Monoids, Acts and Categories* de M. Kilp, U. Knauer y A. V. Mikhalev ([4]). El propósito del mismo se limita a presentar algunas características de la categoría de semigrupos $\mathcal{SGRP}$, ya que el alcance de la tesis mencionada es mucho más amplio, en particular, se exhiben el producto y coproducto en $\mathcal{SGRP}$, se caracterizan los monomorfismos en $\mathcal{SGRP}$ y se establece que no todo epimorfismo en $\mathcal{SGRP}$ es sobreyectivo aunque todo morfismo sobreyectivo en $\mathcal{SGRP}$ es un epimorfismo. Se define la categoría de monoides conmutativos y cancelables $\mathcal{MCC}$ y se describe la construcción del grupo conmutativo de Grothendieck (cf. [5]) de un monoide conmutativo y cancelable, se exhibe que todo monoide conmutativo y cancelable puede sumergirse en su grupo conmutativo de Grothendieck y también se establece que el grupo conmutativo de Grothendieck del monoide conmutativo y cancelable $(\mathbb{N}^*, +)$ es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}, +)$.

Para que el manuscrito sea autocontenido se incluye una sección de preliminares que abarca conceptos de relaciones, relaciones de equivalencia, funciones, kernel de una función y un "Teorema de homomorfismo para funciones", una sección que aborda los conceptos básicos de las estructuras algebraicas conocidas como: semigrupos, monoides y grupos, también se introducen los conceptos de congruencia sobre un semigrupo y semigrupo cociente (cf. [4]) que dan lugar a un Teorema de homomorfismo para semigrupos y finalmente una sección sobre conceptos y resultados de la teoría de categorías (cf. [1],[2] y [4]) que se utilizan fuertemente en los temas más importantes que son el objeto de estudio de este capítulo de libro, descritos en el párrafo anterior.

2 Preliminares

El contenido de esta sección es bastante conocido, sin embargo, constituye la "caja de herramientas" matemáticas necesarias para la mejor comprensión del presente capítulo de libro y con el fin de hacer de éste lo más ameno posible se omiten las demostraciones de los resultados que son ampliamente conocidos, sin embargo se invita al lector interesado a consultar [3] para un estudio detallado del material de ésta sección. Cabe señalar que toda la información aquí presentada se usará en las secciones posteriores.

Sean A y B dos conjuntos, el **producto cartesiano** de A por B denotado por $A \times B$ es $A \times B := \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$. Más generalmente, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y A_1, A_2, . . . ,A_n son n conjuntos, entonces

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, ..., a_n) \,|\, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

es llamado el **producto cartesiano** de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Ademas, para cada $(a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$,

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n) \text{ sí y sólo si } a_i = b_i \text{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

El **conjunto potencia** de A denotado por $\mathcal{P}(A)$ es $\mathcal{P}(A) := \{X \,|\, X \subseteq A\}$.
Sean A y B dos conjuntos. Una **relación** de A en B es cualquier subconjunto

de $A \times B$. Si $A = B$, a cualquier relación de A en A se le llamará **relación binaria** en A o simplemente **relación** en A. Si $R \subseteq A \times B$, suele usarse la notación aRb para indicar que $(a, b) \in R$ y al conjunto $\mathcal{P}(A \times A)$ se le denotará usando el símbolo $\mathcal{B}(A)$, que es **el conjunto de todas las relaciones binarias** en A. Sea $R \subseteq A \times B$, el **dominio** de la relación R, denotado $Dom(R)$, es $Dom(R) := \{a \in A \,|\, (a, b) \in R \text{ para algún } b \in B\}$ y el **rango o imagen** de la relación R, denotado $Ran(R)$ ó $Im(R)$ es $Im(R) := \{b \in B \,|\, (a, b) \in R \text{ para algún } a \in A\}$. Sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$, se define la relación $S \circ R$, llamada **composición** de R seguida de S, como sigue: $S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \,|\, (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S \text{ para algún } b \in B\}$. De la definición se observa que $S \circ R$ es una relación de A en C. Si A es un conjunto, a la relación $\Delta_A := \{(a, a) \,|\, a \in A\}$ se le llama la **diagonal** en A. Sean $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ y $T \subseteq C \times D$, la siguiente igualdad se cumple:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

Si A es un conjunto, se dice que $R \in \mathcal{B}(A)$ es: **reflexiva**, si $(a, a) \in R$ para cada $a \in A$, **simétrica**, si para cada $a, b \in A$ se verifica que $(a, b) \in R$ implica que $(b, a) \in R$ y **transitiva**, si para cada $a, b, c \in A$ se verifica que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ implica que $(a, c) \in R$ y se dice que R es **relación de equivalencia** sobre A o simplemente una **equivalencia** sobre A si R es a la vez reflexiva, simétrica y transitiva. A la colección de todas las equivalencias sobre A se le denota usando el símbolo $\mathcal{E}(A)$. Si $a \in A$, la **clase de equivalencia** de a con respecto de $R \in \mathcal{E}(A)$, denotada $[a]_R$, es el conjunto $[a]_R := \{x \in A \,|\, (x, a) \in R\}$. A cualquier $b \in [a]_R$ se le llama **representante** de la clase $[a]_R$ y el **conjunto cociente** A sobre R, denotado $\frac{A}{R}$, es definido por $\frac{A}{R} := \{\, [a]_R \,|\, a \in A\}$. Sean $A \neq \emptyset$, $R \in \mathcal{E}(A)$ y $a, b \in A$, entonces se verifica lo siguiente: $[a]_R = [b]_R$ sí y sólo si $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ sí y sólo si aRb.

Sean A y B conjuntos y f una relación de A en B. Se dice que f es una **función** de A en B si para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Se escribe $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A en B. Además, si $a \in A$, al único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$ se le denota escribiendo $b = f(a)$ y se dice que b es la imagen de a bajo f. Las funciones $f, g : A \to B$ serán iguales si y solo si para cada $a \in A$, $f(a) = g(a)$. Para cada conjunto A, la diagonal en A, Δ_A, es una función de A en A. Δ_A es llamada la función **identidad** en A y se la denota escribiendo id_A, esto es $id_A := \Delta_A$. Si A y B son conjuntos, se define $B^A := \{f \subseteq A \times B \,|\, f \text{ es función}\}$. Dados A, B y

C conjuntos, siempre se verifica lo siguiente: si $f \in B^A$ y $g \in C^B$, entonces $g \circ f \in C^A$ y además, para cada $f \in B^A$, $f \circ id_A = f$ y $id_B \circ f = f$. Se dice que una función $f : A \to B$ es **inyectiva** si para cada $a_1, a_2 \in A$ y $b \in B$ tales que $(a_1, b) \in f$ y $(a_2, b) \in f$ se implica que $a_1 = a_2$, o lo que es lo mismo, $f(a_1) = f(a_2)$ implica que $a_1 = a_2$, y se dice que una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si ocurre que $Im(f) = B$, o equivalentemente, si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Pueden caracterizarse a las funciones inyectivas y a las funciones sobreyectivas por medio del siguiente par de teoremas.

Teorema 2.1. *Sea $f : A \to B$ una función con $A \neq \emptyset$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es inyectiva.*
2. *Existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$.*
3. *Para cada conjunto C y funciones $\alpha, \beta : C \to A$, si $f \circ \alpha = f \circ \beta$, entonces $\alpha = \beta$.*

Teorema 2.2. *Sea $f : A \to B$ una función con $A \neq \emptyset$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es sobreyectiva.*
2. *Existe una función $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$.*
3. *Para cada conjunto C y funciones $\alpha, \beta : B \to C$, si $\alpha \circ f = \beta \circ f$, entonces $\alpha = \beta$.*

Es importante mencionar que la demostración del Teorema 2.2 requiere hacer uso del llamado Axioma de Elección. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones, si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva y si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva. Ahora bien, si $f : A \to B$ y $g : B \to A$ son funciones se dice que g es una **inversa izquierda** de f si $g \circ f = id_A$, y en el caso en que $f \circ g = id_B$ se dice entonces que g es una **inversa derecha** de f. Si g es a la vez una inveresa izquierda y una inversa derecha para f se dice entonces que g es una **inversa** de f. De acuerdo con el Teorema 2.1 las funciones inyectivas son aquellas que poseen al menos una inversa izquierda y por el Teorema 2.2 las funciones sobreyectivas son aquellas que poseen al menos una inversa derecha. Se dice que una función $f : A \to B$ es una función **biyectiva** si f tiene al menos una función inversa, de hecho, toda función biyectiva posee exactamente una función inversa. Más aún, por lo anterior, se tiene la siguiente caracterización: toda función $f : A \to B$, es biyectiva sí y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva. Además, si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ también es biyectiva. Si $f : A \to B$ es una función , $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$, a los conjuntos $f^{-1}(Y) := \{a \in A \,|\, f(a) \in Y\}$ y $f(X) := \{f(a) \,|\, a \in X\}$ se les llama **imagen inversa de** Y **bajo** f e **imagen directa de** X **bajo** f, respectivamente.

Una vez que ya se han discutido los conceptos de relación de equivalencia y el de función podemos relacionar a ambos conceptos mediante la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Toda función induce una relación de equivalencia sobre su dominio.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ una función y considere la siguiente relación en A: $Ker(f) := \{(a_1, a_2) \in A \times A \,|\, f(a_1) = f(a_2)\}$. $Ker(f)$ es reflexiva pues para cada $a \in A$, $f(a) = f(a)$, $Ker(f)$ es simétrica pues si $(a_1, a_2) \in Ker(f)$, entonces $f(a_1) = f(a_2)$, de ahí que $f(a_2) = f(a_1)$, de donde $(a_2, a_1) \in Ker(f)$, y $Ker(f)$ es transitiva, pues si $(a_1, a_2) \in Ker(f)$ y $(a_2, a_3) \in Ker(f)$, entonces $f(a_1) = f(a_2)$ y $f(a_2) = f(a_3)$, luego $f(a_1) = f(a_3)$ y así $(a_1, a_3) \in Ker(f)$. Por lo tanto, $Ker(f)$ es una equivalencia en A. $\square$

Si $f : A \to B$ es una función, al conjunto:

$$Ker(f) := \{(a_1, a_2) \in A \times A \,|\, f(a_1) = f(a_2)\}$$

se le llama **kernel** de f. Sea A un conjunto y $\rho \subseteq A \times A$ una equivalencia sobre A. A la función $\pi_\rho : A \to \frac{A}{\rho}$ definida por $\pi_\rho(a) := [a]_\rho$ se le llama la **proyección canónica** con respecto de ρ. La proyección canónica $\pi_\rho : A \to \frac{A}{\rho}$ es una función sobreyectiva.

Proposición 2.4. *Sea $f : A \to B$ una función. Entonces f es inyectiva sí y sólo si $Ker(f) = \Delta_A$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Suponga que f es inyectiva. Como $Ker(f)$ es una equivalencia en A, entonces $\Delta_A \subseteq Ker(f)$. Sea $(a_1, a_2) \in Ker(f)$, luego $f(a_1) = f(a_2)$, así que de la inyectividad de f se sigue que $a_1 = a_2$ y por consiguiente

$(a_1, a_2) \in \Delta_A$. De ahí que $Ker(f) \subseteq \Delta_A$ y por lo tanto $Ker(f) = \Delta_A$. $\Longleftarrow)$ Suponga que $Ker(f) = \Delta_A$ y sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Entonces $(a_1, a_2) \in Ker(f) = \Delta_A$, de donde $a_1 = a_2$ y por consiguiente f es inyectiva. $\square$

A continuación se enuncia un resultado que relaciona el concepto de función, el de relación de equivalencia, el de kernel de una función y el de proyección canónica.

Teorema 2.5. *Teorema de homomorfismo para funciones. Sean $f : A \to B$ una función y $\rho \subseteq A \times A$ una equivalencia sobre A tal que $\rho \subseteq Ker(f)$. Entonces existe una única función $\bar{f} : \frac{A}{\rho} \to B$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi_\rho$. Más aún, si $\rho = Ker(f)$, entonces $\bar{f}$ es inyectiva, y si f es sobreyectiva, entonces $\bar{f}$ también es sobreyectiva.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & B \\ & \frac{A}{\rho} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Considerar la función $\bar{f} : \frac{A}{\rho} \to B$ definida por $\bar{f}([a]_\rho) := f(a)$. Observar que los elementos del dominio de $\bar{f}$ son clases de equivalencia, y como una clase de equivalencia puede tener, en general, varios representantes, se debe verificar entonces que el valor de $\bar{f}$ en cualquier clase de equivalencia no depende del representante que se tome. Usualmente, al hacer esto suele decirse que hay que verificar que $\bar{f}$ está bien definida. Supongase que $[a]_\rho = [b]_\rho$, entonces $(a, b) \in \rho \subseteq Ker(f)$, así que $(a, b) \in Ker(f)$ y $f(a) = f(b)$. Por lo tanto $\bar{f}([a]_\rho) = \bar{f}([b]_\rho)$ y $\bar{f}$ está bien definida. Para cada $a \in A$, se tiene lo siguiente:

$$\bar{f}(\pi_\rho(a)) = \bar{f}([a]_\rho) = f(a).$$

Se sigue entonces que $f = \bar{f} \circ \pi_\rho$. Suponga ahora que la función $g : \frac{A}{\rho} \to B$ es tal que $f = g \circ \pi_\rho$. Entonces:

$$\begin{aligned} g([a]_\rho) &= g(\pi_\rho(a)) \\ &= f(a) \\ &= \bar{f}(\pi_\rho(a)) \\ &= \bar{f}([a]_\rho). \end{aligned}$$

De ahí que $\bar{f} = g$. Ahora bien, en el caso en que $\rho = Ker(f)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{f}([a]_\rho) = \bar{f}([b]_\rho) &\Longrightarrow f(a) = f(b)\\ &\Longrightarrow (a,b) \in Ker(f) = \rho\\ &\Longrightarrow [a]_\rho = [b]_\rho.\end{aligned}$$

Así, $\bar{f}$ es inyectiva. Si f es sobreyectiva, y $b \in B$, entonces $b = f(a)$ para algún $a \in A$. Además, $b = f(a) = \bar{f}([a]_\rho)$, de donde $\bar{f}$ es sobreyectiva. □

Corolario 2.6. *Toda función es la composición de una función sobreyectiva seguida de una inyectiva.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ una función y sea $\rho = Ker(f)$. Del Teorema 2.5 se tiene que $f = \bar{f} \circ \pi_\rho$ con $\bar{f}$ inyectiva. Ahora bien, del hecho de que la proyección canónica π_ρ sea sobreyectiva se sigue lo pedido. □

3 Semigrupos, Monoides y Grupos

En ésta sección los objetos principales de estudio son las estructuras algebraicas de **semigrupo**, **monoide** y **grupo**. Se revisan algunas definiciones y resultados básicos sobre tales estructuras, se introducen los conceptos de congruencia sobre un semigrupo y semigrupo cociente (cf. [4]), además se exhibe un teorema de homomorfismos para semigrupos como los que existen para los grupos y los anillos.

Definición 3.1. Si $X \neq \emptyset$ es un conjunto, una **operación binaria sobre** X es simplemente una función $\circ : X \times X \to X$.

Observación 3.2. Si $\circ$ es una operación binaria sobre el conjunto $X \neq \emptyset$, para cada $a, b \in X$ al elemento $\circ((a,b)) \in X$ se le denota escribiendo $a \circ b$, y cuando no hay peligro de confusión la notación se simplifica más y se escribe simplemente ab i,e, $\circ((a,b)) := a \circ b := ab$.

Se distinguen los siguientes tipos de operaciones binarias:

Definición 3.3. Una operación binaria $\circ$ sobre $X \neq \emptyset$ se dice que es:

- **asociativa**, si para cada $a, b, c \in X$ se verifica que $a(bc) = (ab)c$.

- **conmutativa**, si para cada $a, b \in X$ se verifica que $ab = ba$.

Con estos conceptos en mente, lo que sigue es definir el concepto de semigrupo.

Definición 3.4. (Grupoide y Semigrupo)

- Un **grupoide** es un par ordenado $(X, \circ)$ donde X es un conjunto no vacío y $\circ$ es una operación binaria sobre X.
- Un **semigrupo** es un grupoide $(S, \circ)$ donde $\circ$ es una operación binaria asociativa.

Observación 3.5.

- Como se puede apreciar en la definición anterior, un grupoide es un par ordenado cuya primera componente es un conjunto no vacío y cuya segunda componente es una operación binaria sobre el conjunto de la primera componente. Así, de la igualdad entre parejas ordenadas se sigue que dos grupoides $(X, \circ)$ y $(X', \circ')$ serán iguales si y solo si $X = X'$ y $\circ = \circ'$.
- A X se le llama **conjunto subyacente** del grupoide $(X, \circ)$.
- En la práctica, un grupoide es denotado a través de su conjunto subyacente, así, la frase "Sea X un grupoide" significa que hay una operación binaria sobre X, digamos $\circ$, de tal manera que $(X, \circ)$ es un grupoide.
- Un **grupoide conmutativo** es un grupoide $(X, \circ)$ en el que $\circ$ es una operación binaria conmutativa.

Si $\cdot$ denota el producto usual de números enteros, entonces $(\mathbb{Z}, \cdot)$ es un grupoide. Más aún, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ es un semigrupo. Nuestra experiencia con este semigrupo nos indica que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $1 \cdot n = n = n \cdot 1$ i,e, multiplicar por 1 no produce cambios. Este fenómeno motiva la siguiente definición.

Definición 3.6. Sea $(X, \circ)$ un grupoide. Decimos que $e \in X$ es:

1. **neutro izquierdo (o identidad izquierda)** si para cada $x \in X$ ocurre que $e \circ x = x$.
2. **neutro derecho (o identidad derecha)** si para cada $x \in X$ ocurre que $x \circ e = x$.

3. **neutro (o identidad)** si para cada $x \in X$ ocurre que $e \circ x = x = x \circ e$.

Proposición 3.7. *Sea* $(X, \circ)$ *un grupoide y suponga que* $e \in X$ *es neutro izquierdo y que* $e' \in X$ *es neutro derecho. Entonces* $e = e'$.

Demostración. Como e es neutro izquierdo, entonces $ee' = e'$. Por otra parte, como e' es neutro derecho, entonces $ee' = e$. De ahí que $e = e'$. □

Corolario 3.8. *Si un grupoide tiene elemento neutro, entonces éste debe ser único.*

Demostración. Directa de la Proposición 3.7. □

Definición 3.9. Un **monoide** es un semigrupo $(M, \circ)$ que tiene elemento neutro.

Cuando un grupoide tiene elemento neutro, tiene sentido preguntarse por aquellos elementos que tienen un *inverso* con respecto del neutro. Más precisamente, se tienen el siguiente par de definiciones:

Definición 3.10. Sea $(X, \circ)$ un grupoide con elemento identidad $e \in X$ y sean $x, t \in X$. Se dice que t es :

1. **inverso izquierdo de** x, si $tx = e$.

2. **inverso derecho de** x, si $xt = e$.

3. **inverso de** x, si $tx = e = xt$.

Definición 3.11. Sea $(X, \circ)$ un grupoide con elemento identidad $e \in X$. Se dice que $x \in X$ es:

1. **invertible por la izquierda**, si x tiene al menos un inverso izquierdo.

2. **invertible por la derecha**, si x tiene al menos un inverso derecho.

3. **invertible**, si x tiene al menos un inverso.

El Corolario 3.8 indica que en caso de que un grupoide tenga elemento neutro entonces este es único i,e, se garantiza la unicidad del neutro. Ahora bien, en caso de que un elemento de un grupoide con identidad tenga inverso ¿puede garantizarse la unicidad de éste?

Ejemplo 3.12. Considerar el conjunto de tres elementos $X = \{e, a, b\}$ y considerar también a la operación binaria $\circ$ definida a través de la siguiente tabla:

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	e

De la tabla se aprecia que e es neutro del grupoide $(X, \circ)$. Más aún, también se tiene que $a \circ b = e = b \circ a$ y $b \circ b = e$. De ahí que a y b son ambos inversos de b i,e, b tiene más de un inverso. Observe que $\circ$ no es una operación binaria asociativa, pues $(a \circ a) \circ b = b \circ b = e$ mientras que $a \circ (a \circ b) = a \circ e = a$.

¿Bajo qué condiciones si puede garantizarse la unicidad de un inverso?

Proposición 3.13. *Sea $(X, \circ)$ un grupoide con elemento neutro $e \in X$. Suponga que $\circ$ es una operación binaria asociativa. Entonces todo elemento de X tiene a lo más un inverso.*

Demostración. Suponga que $u, v \in X$ son ambos inversos de $x \in X$. Entonces $u = ue = u(xv) = (ux)v = ev = v$, i.e. , $u = v$. $\square$

Observación 3.14. Si M es un monoide y $a \in M$ es invertible, entonces se denota a su inverso por a^{-1}.

La siguiente estructura algebraica es de suma importancia para las matemáticas, física, química y otras ciencias.

Definición 3.15. Un **grupo** es un monoide $(G, \circ)$ en el que cada elemento es invertible.

Proposición 3.16. *Sea $(G, \circ)$ un semigrupo y sea $e \in G$ un neutro izquierdo. Suponga que para cada $g \in G$ existe $x_g \in G$ tal que $x_g g = e$. Entonces $(G, \circ)$ es un grupo.*

Demostración. Veamos que para cada $g, x, y \in G$, $gx = gy$ implica que $x = y$. Como

$$\begin{aligned} gx = gy &\Longrightarrow x_g(gx) = x_g(gy) \\ &\Longrightarrow (x_g g)x = (x_g g)y \\ &\Longrightarrow ex = ey \\ &\Longrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Si $g \in G$ es arbitrario, entonces ocurre que $x_g(ge) = (x_g g)e = ee = e = x_g g$. Por lo tanto $x_g(ge) = x_g g$ y en consecuencia $ge = g$. De ahí que e es también neutro derecho y por consiguiente elemento neutro. De lo anterior se sigue que $(G, \circ)$ es un monoide con elemento neutro e. De nuevo, si $g \in G$ es arbitrario, entonces se tiene que $x_g(gx_g) = (x_g g)x_g = ex_g = x_g = x_g e$. Por lo tanto $x_g(gx_g) = x_g e$ y por consiguiente $gx_g = e$. Esto último aunado a que $x_g g = e$ permite concluir que x_g es un inverso para g. Por lo tanto todo elemento de $(G, \circ)$ es invertible y por consiguiente $(G, \circ)$ es un grupo. □

Definición 3.17. Subsemigrupo, submonoide y subgrupo.

- Sean S un semigrupo y $\emptyset \neq H \subseteq S$. Se dice que H es un **subsemigrupo** de S si para cada $a, b \in H$ se verifica que $ab \in H$.
- Sean M un monoide con elemento neutro e y $\emptyset \neq H \subseteq M$. Se dice que H es un **submonoide** de M si H es un subsemigrupo de M y si además $e \in H$.
- Sean G un grupo con elemento neutro e y $\emptyset \neq H \subseteq G$. Se dice que H es un **subgrupo** de G si H es un submonoide de G y si además $h \in H$ implica que $h^{-1} \in H$.

De la definición anterior se deduce que todo subsemigrupo (submonoide, subgrupo) de un semigrupo (monoide, grupo) es por sí mismo un semigrupo (monoide, grupo).

Un morfismo de semigrupos será una función entre dos semigrupos que respete la estructura de estos.

Definición 3.18. Morfismo de semigrupos (monoides, grupos)

- Sean S y T semigrupos. Un **morfismo de semigrupos** de S en T es una función $f : S \to T$ tal que para cada $x, y \in S$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

- Si S y T son monoides con neutros e_S y e_T respectivamente, una función $f : S \to T$ es un **morfismo de monoides** si f es un morfismo de semigrupos y $f(e_S) = e_T$.

- Si G y H son grupos, una función $f : G \to H$ es un **morfismo de grupos** si f es un morfismo de semigrupos.

Proposición 3.19. *Sean M y N monoides con neutros e_M y e_N respectivamente, y sea $f : M \to N$ un morfismo sobreyectivo de semigrupos. Entonces $f(e_M) = e_N$.*

Demostración. Sea $n \in N$ arbitrario, como f es sobreyectiva puede escribirse $n = f(m)$ para algún $m \in M$. Así, $nf(e_M) = f(m)f(e_M) = f(me_M) = f(m) = n$, y también $f(e_M)n = f(e_M)f(m) = f(e_Mm) = f(m) = n$. Por lo tanto $f(e_M)$ es neutro de N, de manera que $f(e_M) = e_N$. □

Definición 3.20. Un **isomorfismo de semigrupos (monoides, grupos)** es un morfismo de semigrupos (monoides, grupos) $f : S \to T$ para el cual existe un morfismo de semigrupos (monoides, grupos) $g : T \to S$ tal que $g \circ f = id_S$ y $f \circ g = id_T$. Se escribe $S \cong T$ para indicar que existe un isomorfismo de semigrupos (monoides, grupos) de S en T, y en ese caso se dice que S es **isomorfo** a T.

La composición entre dos morfismos de semigrupos (ó monoides ó grupos) también es un morfismo de semigrupos (monoides, grupos). Más aún, la composición entre dos morfismos inyectivos (sobreyectivos) de semigrupos (monoides, grupos) también es un morfismo inyectivo (sobreyectivo) de semigrupos (monoides, grupos). Además la composición entre dos isomorfismos de semigrupos (monoides, grupos) también es un isomorfismo de semigrupos (monoides, grupos).

Definición 3.21. Sea S un semigrupo y sea ρ una equivalencia sobre S. Decimos que ρ es una

- **congruencia izquierda**, si para cada $c \in S$ se verifica que $a\rho b$ implica que $ca\rho cb$.

- **congruencia derecha**, si para cada $c \in S$ se verifica que $a\rho b$ implica que $ac\rho bc$.

- **congruencia**, si ρ es a la vez una congruencia izquierda y una congruencia derecha.

Todo morfismo de semigrupos induce una congruencia sobre su dominio como se establece a continuación.

Proposición 3.22. *Sea $f : S \to T$ un morfismo de semigrupos (monoides). Entonces*

- *$Im(f) = f(S)$ es un subsemigrupo (submonoide) de T.*

- *$Ker(f)$ es una congruencia sobre S.*

Demostración. Sean $x, y \in Im(f)$. Luego $x = f(a)$ y $y = f(b)$ para algunos $a, b \in S$. Así, $xy = f(a)f(b) = f(ab) \in Im(f)$, y por consiguiente $Im(f)$ es subsemigrupo de T. Si S y T son monoides con neutros e_S y e_T respectivamente y f es un morfismo de monoides, entonces $e_T = f(e_S) \in Im(f)$ y por lo tanto $Im(f)$ es un submonoide de T. Ahora bien, de la Proposición 2.3 se sigue que $Ker(f)$ es una equivalencia sobre S. Además, si $aKer(f)b$ y $cKer(f)d$, entonces $f(a) = f(b)$ y $f(c) = f(d)$, de donde $f(a)f(c) = f(b)f(d)$ y por tanto $f(ac) = f(bd)$. Así, $acKer(f)bd$ y por consiguiente $Ker(f)$ es una congruencia sobre S. □

Proposición 3.23. *Sea S un semigrupo y sea ρ una equivalencia sobre S. Entonces ρ es una congruencia sí y sólo si $a\rho b$ y $c\rho d$ implica que $ac\rho bd$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Suponga que ρ es una congruencia y que $a\rho b$ y $c\rho d$. Entonces $ac\rho bc$ y $bc\rho bd$. Luego, de la transitividad de ρ se sigue lo pedido.
$\Longleftarrow$) Sea $c \in S$ y suponga que $a\rho b$. Como $c\rho c$, de la hipótesis se sigue que $ca\rho cb$ y $ac\rho bc$. Así, ρ es a la vez una congruencia izquierda y derecha. □

Para los semigrupos, será a partir de una congruencia como se construirá un semigrupo cociente.

Proposición 3.24. *Sea S un semigrupo y sea ρ una congruencia sobre S. Considere el conjunto cociente $\frac{S}{\rho} := \{[a]_\rho \,|\, a \in S\}$ y también la siguiente operación entre clases de equivalencia:*

$$[a]_\rho[b]_\rho := [ab]_\rho.$$

Se tiene entonces que dicha operación está bien definida y $\frac{S}{\rho}$ *es un semigrupo bajo este producto de clases de equivalencia.*

Demostración. Veamos primero que este producto de clases es una operación bien definida:

$$\begin{aligned}[a]_\rho = [x]_\rho \quad \text{y} \quad [b]_\rho = [y]_\rho &\Longrightarrow a\rho x \quad \text{y} \quad b\rho y \\ &\Longrightarrow ab\rho xy \\ &\Longrightarrow [ab]_\rho = [xy]_\rho \\ &\Longrightarrow [a]_\rho[b]_\rho = [x]_\rho[y]_\rho.\end{aligned}$$

Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned}[a]_\rho([b]_\rho[c]_\rho) &= [a]_\rho[bc]_\rho \\ &= [a(bc)]_\rho \\ &= [(ab)c]_\rho \\ &= [ab]_\rho[c]_\rho \\ &= ([a]_\rho[b]_\rho)[c]_\rho.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\frac{S}{\rho}$ es un semigrupo bajo este producto de clases de equivalencia. Más aún, si S es un monoide con neutro e entonces $\frac{S}{\rho}$ es un monoide con neutro $[e]_\rho$ pues, $[a]_\rho[e]_\rho = [ae]_\rho = [a]_\rho = [ea]_\rho = [e]_\rho[a]_\rho$. $\square$

Definición 3.25. Sea S un semigrupo y sea ρ una congruencia sobre S. Al semigrupo $\frac{S}{\rho}$ se le llama **semigrupo cociente o semigrupo factor** de S sobre ρ.

Lema 3.26. *Sea* ρ *una congruencia sobre el semigrupo* S. *Entonces la proyección canónica* $\pi_\rho : S \to \frac{S}{\rho}$ *es un morfismo de semigrupos y* $Ker(\pi_\rho) = \rho$.

Demostración. Sean $a, b \in S$, $\pi_\rho(ab) = [ab]_\rho = [a]_\rho[b]_\rho = \pi_\rho(a)\pi_\rho(b)$, así π_ρ es un morfismo de semigrupos. Además

$$\begin{aligned}Ker(\pi_\rho) :&= \{(a,b) \in S \times S \mid \pi_\rho(a) = \pi_\rho(b)\} \\ &= \{(a,b) \in S \times S \mid [a]_\rho = [b]_\rho\} \\ &= \{(a,b) \in S \times S \mid a\rho b\} \\ &= \rho,\end{aligned}$$

por consiguiente, $Ker(\pi_\rho) = \rho$. $\square$

La siguiente proposición es la versión para los semigrupos del teorema de homomorfismo que existe para otras estructuras como los grupos y anillos.

Teorema 3.27. *Teorema de homomorfismo para semigrupos. Sea $f : S \to T$ un morfismo de semigrupos y ρ una congruencia sobre S tal que $\rho \subseteq Ker(f)$. Entonces, existe un único morfismo de semigrupos $\bar{f} : \frac{S}{\rho} \to T$ tal que el siguiente triángulo conmuta:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & T \\ & \frac{S}{\rho} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. De acuerdo con el Teorema 2.5, existe una única función $\bar{f} : \frac{S}{\rho} \to T$ que hace al siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & T \\ & \frac{S}{\rho} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Tal función está dada por $\bar{f}([a]_\rho) := f(a)$. Más aún, $\bar{f}$ es un morfismo de semigrupos, ya que para cada $[a]_\rho, [b]_\rho \in \frac{S}{\rho}$, $\bar{f}([a]_\rho[b]_\rho) = \bar{f}([ab]_\rho) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}([a]_\rho)\bar{f}([b]_\rho)$, así $\bar{f}$ es un morfismo de semigrupos. $\square$

Corolario 3.28. *Sea $f : S \to T$ un morfismo de semigrupos. Entonces $\frac{S}{Ker(f)} \cong Im(f)$.*

Demostración. Sea $f : S \to T$ un morfismo de semigrupos y considere a la función $F : S \to Im(f)$ definida por $F(x) := f(x)$. Es claro que F es una función sobreyectiva. Además, como F tiene la misma regla de correspondencia de f, se sigue entonces que F es un morfismo de semigrupos. Más aún, observe que

$$\begin{aligned} Ker(F) &= \{(a,b) \in S \times S \mid F(a) = F(b)\} \\ &= \{(a,b) \in S \times S \mid f(a) = f(b)\} \\ &= Ker(f). \end{aligned}$$

El Teorema 3.27 garantiza la existencia de un morfismo de semigrupos $\bar{F} : \frac{S}{Ker(F)} \to Im(f)$ tal que $F = \bar{F} \circ \pi_{Ker(F)}$. En particular, del Teorema 2.5 se deduce que $\bar{F}$ es biyectiva y por lo tanto un isomorfismo de semigrupos. Luego $\frac{S}{Ker(f)} = \frac{S}{Ker(F)} \cong Im(f)$, por consiguiente $\frac{S}{Ker(f)} =\cong Im(f)$. □

Lema 3.29. *Si S es un semigrupo, entonces $\frac{S}{\Delta_S} \cong S$.*

Demostración. Sea S un semigrupo., está claro que Δ_S, la diagonal en S, es una congruencia sobre S. Así, $\frac{S}{\Delta_S}$ es un semigrupo. Para el morfismo de semigrupos $id_S : S \to S$ se tiene que

$$\begin{aligned} Ker(id_S) &= \{(a,b) \in S \times S \,|\, id_S(a) = id_S(b)\} \\ &= \{(a,b) \in S \times S \,|\, a = b\} \\ &= \Delta_S \end{aligned}$$

Como id_S es sobreyectiva, del Corolario 3.28 se concluye que $\frac{S}{\Delta_S} \cong S$. □

Proposición 3.30. *Si $f : S \to T$ es un morfismo inyectivo de semigrupos, entonces $S \cong Im(f)$ i,e, S es isomorfo a un subsemigrupo de T.*

Demostración. Como f es inyectiva, entonces $Ker(f) = \Delta_S$. Así, del Corolario 3.28 se sigue que $\frac{S}{\Delta_S} = \frac{S}{Ker(f)} \cong Im(f)$, pero $S \cong \frac{S}{\Delta_S}$, luego $S \cong Im(f)$. □

4 Categorías

En ésta sección se revisan algunas definiciones, conceptos y resultados de la teoría de categorías (cf [1]) y en particular se introduce la categoría de semigrupos $\mathcal{SGRP}$.

Definición 4.1. Una **categoría** $\mathcal{A}$ es un objeto matemático compuesto por:

1. Una clase $\mathcal{O}$.

2. Para cada $A, B \in \mathcal{O}$, un conjunto $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$.

3. Para cada $A, B, C \in \mathcal{O}$, una función (llamada ley de composición)

$$\circ : Hom_{\mathcal{A}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{A}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{A}}(A, C)$$

con $\circ(f, g) := g \circ f$.

4. Para cada $A \in \mathcal{O}$, un elemento $id_A \in Hom_{\mathcal{A}}(A, A)$.

Además, todo lo anterior debe estar sujeto a lo siguiente:

C1: Para cada $A, B, C, D \in \mathcal{O}$ y cada $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{A}}(B, C)$ y $h \in Hom_{\mathcal{A}}(C, D)$:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

C2: Para cada $A, B \in \mathcal{O}$ y cada $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$:

$$id_B \circ f = f \quad \text{y} \quad f \circ id_A = f.$$

Observación 4.2. En el contexto de la Definición 4.1:

- La clase $\mathcal{O}$ es denotada por $Ob(\mathcal{A})$ y a sus elementos se les llama **objetos** de $\mathcal{A}$.
- La clase de morfismos de $\mathcal{A}$, denotada por $Mor(\mathcal{A})$, se define como sigue:

$$Mor(\mathcal{A}) := \bigcup_{(A,B) \in Ob(\mathcal{A}) \times Ob(\mathcal{A})} Hom_{\mathcal{A}}(A, B) \ .$$

- Si $A, B \in Ob(\mathcal{A})$, a cualquier elemento de $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ se le llama **morfismo (o flecha)** de A en B. Además, se escribe $f : A \to B$ para indicar que $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$.
- Escribir $f : A \to B$ puede significar entonces que f es una función del conjunto A en el conjunto B o que $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ para alguna categoría $\mathcal{A}$ y algunos $A, B \in Ob(\mathcal{A})$. Sin embargo, no todo morfismo entre dos objetos de una categoría tiene que ser necesariamente una función (ver Ejemplo 4.4). Así, debe tenerse claro el contexto en el cuál se usa la notación $f : A \to B$.
- Si $A \in Ob(\mathcal{A})$, al morfismo $id_A \in Hom_{\mathcal{A}}(A, A)$ se le llama **morfismo identidad** en A.

Suponga que $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : D \to C$ e $i : A \to D$ son morfismos de una categoría $\mathcal{A}$. Entonces, suele representarse esta situación dibujando un diagrama de objetos y morfismos como el siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

Un diagrama como el de arriba se dice que es **conmutativo (o que conmuta)** si $g \circ f = h \circ i$.

Más generalmente, dada una categoría $\mathcal{A}$, se dice que un diagrama de objetos y morfismos de ésta es **conmutativo (o conmuta)** si siempre que existan dos caminos entre dos objetos, digamos A y B del diagrama, el morfismo resultante de componer los morfismos del primer camino coincide con el morfismo resultante de componer los morfismos del segundo camino. Por ejemplo, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

será conmutativo si $f = g \circ h$.

A continuación exhibimos algunos ejemplos de categorías.

Ejemplo 4.3. Las categorías $\mathcal{SET}$, $\mathcal{GRP}$ y $\mathcal{VEC}_{\mathbb{F}}$.

1. Sea X la clase de todos los conjuntos. Definimos:
   - $\mathcal{O} := X$.
   - Para cada $A, B \in \mathcal{O}$, $Hom(A, B) := B^A$.
   - $\circ$ la composición entre funciones.
   - Para cada $A \in \mathcal{O}$, $id_A \in A^A$ la función identidad.

Ahora bien, si $A, B, C \in \mathcal{O}$, $f \in B^A$ y $g \in C^B$, entonces $g \circ f \in C^A$ y dado que la composición de funciones es asociativa, $f \circ id_A = f$ y $id_B \circ f = f$, para cada $f \in B^A$, todo lo anterior da lugar a una categoría llamada la **categoría de conjuntos** que es denotada por $\mathcal{SET}$.

2. Sea Y la clase de todos los grupos. Definimos:

   - $\mathcal{O} := Y$.
   - Para cada $G, H \in \mathcal{O}$,
   $$Hom(G, H) := \{f : G \to H \,|\, f \text{ es morfismo de grupos}\}.$$
   - $\circ$ la composición entre funciones.
   - Para cada $G \in \mathcal{O}$, id_G la función identidad.

   Como la composición entre dos morfismos de grupos es también un morfismo de grupos, de que id_G es un morfismo de grupos y dado que la composición de funciones es asociativa, $f \circ id_G = f$ y $id_H \circ f = f$, para cada $f \in Hom(G, H)$ se ve que todo lo anterior forma una categoría llamada la **categoría de grupos** que es denotada por $\mathcal{GRP}$.

3. Sea $\mathbb{F}$ un campo. Definimos:

   - $\mathcal{O}$ la clase de todos los $\mathbb{F}-$espacios vectoriales de dimensión finita.
   - Para cada $V, W \in \mathcal{O}$,
   $$Hom(V, W) := \{T : V \to W \,|\, T \text{ es transformación lineal}\}$$
   - $\circ$ la composición entre funciones.
   - Para cada $V \in \mathcal{O}$, id_V la función identidad.

   De que la composición entre dos transformaciones lineales es también una transformación lineal, de que id_V es una transformación lineal y dado que la composición de funciones es asociativa, $T \circ id_V = T$ y $id_W \circ T = T$ para cada $T \in Hom(V, W)$ se ve que todo lo anterior forma una categoría llamada la **categoría de $\mathbb{F}-$ espacios vectoriales de dimensión finita** que es denotada por $\mathcal{VEC}_{\mathbb{F}}$.

Ejemplo 4.4. Sea M un monoide con elemento neutro $e \in M$. Definimos:

- $\mathcal{O} := \{M\}$.
- $Hom(M, M) := M$.
- $\circ$ la operación en el monoide M.
- $id_M := e$.

De que la operación en el monoide M sea cerrada y asociativa y de las propiedades de $e \in M$ se sigue que todo lo anterior da lugar a una categoría denotada por $C(M)$. Observar que esta es una categoría con un solo objeto, y además, los morfismos de ella son los elementos del monoide M.

Si en el ejemplo anterior reemplazamos al monoide M con elemento neutro e por el grupo G con elemento neutro e, obtenemos la categoría $C(G)$.

Ejemplo 4.5. La categoría de semigrupos $\mathcal{SGRP}$.

Sea $\mathcal{S}$ la clase de todos los semigrupos. Definimos:

- $\mathcal{O} := \mathcal{S}$.
- Para cada $S, T \in \mathcal{O}$,

$$Hom(S, T) := \{f : S \to T \mid f \text{ es morfismo de semigrupos}\}$$

- $\circ$ la composición entre funciones.
- Para cada $S \in \mathcal{O}$, id_S la función identidad.

De que la composición entre dos morfismos de semigrupos sea de nuevo un morfismo de semigrupos, de que la función identidad sea un morfismo de semigrupos y dado que la composición de funciones es asociativa, $f \circ id_S = f$ y $id_T \circ f = f$ para cada $f \in Hom(S, T)$ se deduce que todo lo anterior da lugar a una categoría, cuyos objetos son los semigrupos y cuyos morfismos son los morfismos de semigrupos. Denotamos a ésta categoría por $\mathcal{SGRP}$ y la llamamos **categoría de semigrupos**.

A continuación definimos el concepto de subcategoría de una categoría y exhibimos algunos ejemplos.

Definición 4.6. Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Una **subcategoría** $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ consiste de:

- Una subclase $Ob(\mathcal{B})$ de la clase $Ob(\mathcal{A})$.
- Para cada $X, Y \in Ob(\mathcal{B})$, un conjunto $Hom_{\mathcal{B}}(X, Y)$.

Además, para cada $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{B})$ se ha de verificar que

1. $Hom_{\mathcal{B}}(X, Y) \subseteq Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$.
2. $id_X \in Hom_{\mathcal{B}}(X, X)$.
3. Si $f \in Hom_{\mathcal{B}}(X, Y)$ y $g \in Hom_{\mathcal{B}}(Y, Z)$ entonces $g \circ f \in Hom_{\mathcal{B}}(X, Z)$

Si en adición ocurre que $Hom_{\mathcal{B}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ para cada $X, Y \in Ob(\mathcal{B})$, entonces se dice que $\mathcal{B}$ es una **subcategoría plena** de $\mathcal{A}$.

De la definición anterior se deduce que toda subcategoría de una categoría es por sí misma una categoría bajo la misma ley de composición.

Ejemplo 4.7. Las subcategorías $\mathcal{GRP}$ y $\mathcal{MON}$ de la categoría $\mathcal{SGRP}$ y la subcategoría $\mathcal{AB}$ de la categoría $\mathcal{GRP}$.

1. La categoría de grupos $\mathcal{GRP}$ (ver Ejemplo 4.3) es una subcategoría plena de la categoría $\mathcal{SGRP}$.

2. Sea $\mathcal{M}$ la clase de todos los monoides y para cada $M, N \in \mathcal{M}$ sea $Hom := \{f : M \to N \mid f \text{ es morfismo de monoides}\}$. De que la función identidad sea un morfismo de monoides aunado a que la composición entre morfismos de monoides es de nuevo un morfismo de monoides, se sigue que lo anterior forma una subcategoría de $\mathcal{SGRP}$. Se denota a esta subcategoría por $\mathcal{MON}$ y se le llama la **categoría de monoides**.

3. Sea $\mathcal{A}$ la clase de todos los grupos abelianos (conmutativos) y para cada $A, B \in \mathcal{A}$ sea $Hom(A, B) := \{f : A \to B \mid f \text{ es morfismo de grupos}\}$. De que la función identidad sea un morfismo de grupos aunado a que la composición entre morfismos de grupos abelianos es de nuevo un morfismo de grupos abelianos se sigue que lo anterior forma una subcategoría de $\mathcal{GRP}$. Se denota a esta subcategoría por $\mathcal{AB}$ y se le llama la **categoría de grupos abelianos**.

Definición 4.8. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$. Se dice que f es una:

1. **sección**, si existe $g \in Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "id_A"] \arrow[dr, "f"'] & & A \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

2. **retracción**, si existe $g \in Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "id_B"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.9. Ejemplos de secciones y retracciones en las categorías $\mathcal{SET}$ y $C(G)$

- A partir de los Teoremas 2.1 y 2.2, en la categoría SET las funciones inyectivas son las secciones y las sobreyectivas las retracciones.

- Si G es un grupo, entonces puesto que cualquier elemento de G tiene un inverso, se sigue que cualquier morfismo de la categoría $C(G)$ es una sección y una retracción.

A los morfismos que son a la vez secciones y retracciones se les da un nombre especial.

Definición 4.10. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$. Se dice que f es un **$\mathcal{A}$-isomorfismo (o simplemente isomorfismo)** si f es a la vez una sección y una retracción. Si entre los objetos A y B existe al menos un isomorfismo de A en B, entonces se dice que A es **isomorfo** a B y se denota $A \cong B$.

Puede caracterizarse a los isomorfismos de una categoría por medio de la siguiente proposición, cuya demostración y la del corolario que le sigue se omiten por su sencillez.

Proposición 4.11. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es un isomorfismo.*

2. *Existe $g \in Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "id_B"'] \arrow[ur, "g"] & B \end{tikzcd}$$

A partir de la proposición anterior se sigue el corolario.

Corolario 4.12. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ un isomorfismo. Entonces existe un único $g \in Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ que hace conmutativo al siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "id_B"'] \arrow[ur, "g"] & B \end{tikzcd} .$$

Ejemplo 4.13. Ejemplos de isomorfismos en categorías.

- En la categoría $\mathcal{SET}$ las funciones biyectivas son los isomorfismos.
- En la categoría $\mathcal{SET}$ dos conjuntos A y B son isomorfos si y solo si son equipotentes.
- Si G es un grupo, entonces cualquier morfismo de la categoría $C(G)$ es una sección y una retracción y por lo tanto un isomorfismo.
- Si A es un objeto de la categoría $\mathcal{A}$, entonces id_A es un isomorfismo, ya que $id_A \circ id_A = id_A$.

Proposición 4.14. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos morfismos de una categoría $\mathcal{A}$.*

1. *Si f y g son secciones, entonces $g \circ f$ es sección.*

2. *Si f y g son retracciones, entonces $g \circ f$ es retracción.*

3. *Si f y g son isomorfismos, entonces $g \circ f$ es isomorfismo.*

La composición entre dos secciones (retracciones, isomorfismos) de una categoría $\mathcal{A}$ también es una sección (retracción, isomorfismo).

Definición 4.15. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$. Se dice que f es un:

1. **Monomorfismo** si para cada $C \in Ob(\mathcal{A})$ y morfismos $\alpha, \beta : C \to A$ se verifica lo siguiente: Si el diagrama
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$
conmuta, entonces $\alpha = \beta$. O lo que es lo mismo, $f \circ \alpha = f \circ \beta$ implica que $\alpha = \beta$.

2. **Epimorfismo** si para cada $C \in Ob(\mathcal{A})$ y morfismos $\alpha, \beta : B \to C$ se verifica lo siguiente: Si el diagrama
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$
conmuta, entonces $\alpha = \beta$. O lo que es lo mismo, $\alpha \circ f = \beta \circ f$ implica que $\alpha = \beta$.

La composición entre dos monomorfismos (epimorfismos) de una categoría $\mathcal{A}$ también es un monomorfismo (epimorfismo).

Proposición 4.16. *En cualquier categoría toda sección es un monomorfismo y toda retracción es un epimorfismo.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un morfismo de la categoría $\mathcal{A}$. Supóngase que f es una sección y sean $C \in Ob(\mathcal{A})$ y $\alpha, \beta : C \to A$ tales que $f \circ \alpha = f \circ \beta$.

Como f es una sección entonces existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$, de manera que se tiene lo siguiente:

$$
\begin{array}{cc}
 & f \circ \alpha = f \circ \beta \\
\Longrightarrow & g \circ (f \circ \alpha) = g \circ (f \circ \beta) \\
\Longrightarrow & (g \circ f) \circ \alpha = (g \circ f) \circ \beta \\
\Longrightarrow & id_A \circ \alpha = id_A \circ \beta \\
\Longrightarrow & \alpha = \beta.
\end{array}
$$

De ahí que f es un monomorfismo. La prueba para retracciones es similar y se omite. $\square$

Observación 4.17. En general, no todo monomorfismo (epimorfismo) de una categoría $\mathcal{A}$ es una sección (retracción). En efecto, considerar al monoide $\mathbb{Z} - \{0\}$ con operación el producto usual entre números enteros. A partir de esto considerar a la categoría $C(\mathbb{Z} - \{0\})$. Se tiene que $2 \in Hom(\mathbb{Z} - \{0\}, \mathbb{Z} - \{0\})$ es un monomorfismo, pues para cada $m, n \in Hom(\mathbb{Z} - \{0\}, \mathbb{Z} - \{0\})$, $2n = 2m$ implica que $n = m$. Sin embargo, $2 \in Hom(\mathbb{Z} - \{0\}, \mathbb{Z} - \{0\})$ no es una sección, pues no existe $k \in Hom(\mathbb{Z} - \{0\}, \mathbb{Z} - \{0\})$ tal que $2k = 1$.

Ejemplo 4.18. Caracterización de monomorfismos y epimorfismos en $\mathcal{SET}$. Con base en los Teoremas 2.1 y 2.2 se deduce que los siguientes enunciados son equivalentes para cada función $f : A \to B$ con $A \neq \emptyset$:

1. f es inyectiva (sobreyectiva).
2. f es sección (retracción) en $\mathcal{SET}$.
3. f es monomorfismo (epimorfismo) en $\mathcal{SET}$.

Ejemplo 4.19. Caracterización de monomorfismos e isomorfismos en $\mathcal{VEC}_{\mathcal{F}}$. En la categoría $\mathcal{VEC}_{\mathcal{F}}$, $T \in Hom_{\mathcal{VEC}_{\mathcal{F}}}(V, W)$ es un monomorfismo (isomorfismo) sí y sólo si T es una función inyectiva (T es una función biyectiva) (cf. [3], págs. 40-41).

Ejemplo 4.20. Caracterización de epimorfismo en $\mathcal{GRP}$. En la categoría, $\mathcal{GRP}$, $f \in Hom_{\mathcal{GRP}}(G, H)$ es un epimorfismo sí y sólo si f es una función sobreyectiva (cf. [3], págs. 41-44).

Observación 4.21. En las categorías $\mathcal{SET}$ y $\mathcal{VEC}_{\mathbb{F}}$ ocurre lo siguiente:

- Sean $A, B \in Ob(\mathcal{SET})$. Si existe un monomorfismo de A en B y un monomorfismo de B en A, entonces $A \cong B$.

- Sean $V, W \in Ob(\mathcal{VEC}_{\mathbb{F}})$. Si existe un monomorfismo de V en W y un monomorfismo de W en V, entonces $V \cong W$.

Sin embargo, la categoría $\mathcal{SGRP}$ no cuenta con tal atributo (cf. [3], págs. 107-108).

5 La categoría de semigrupos $\mathcal{SGRP}$

En ésta sección se describen algunas características de la categoría de semigrupos $\mathcal{SGRP}$, en particular, se exhiben el producto y coproducto, se caracterizan los monomorfismos y se establece que no todo epimorfismo es sobreyectivo aunque todo morfismo sobreyectivo es un epimorfismo.

Definición 5.1. Producto cartesiano y la función i-ésima proyección

- Sea $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos indexada por el conjunto I. Se define el **producto cartesiano** de la familia $\mathcal{F}$, denotado $\prod_{i \in I} A_i$, como sigue:

$$\prod_{i \in I} A_i := \{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ para cada } \ i \in I\}.$$

- Para cada $i \in I$ a la función

$$\pi_i : \prod_{i \in I} A_i \to A_i$$

definida por $\pi_i(f) := f(i)$ se le llama la **i-ésima proyección**.

El producto cartesiano de una familia de conjuntos junto con las proyecciones tienen la siguiente propiedad:

Proposición 5.2. *Sea $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos y $\prod_{i \in I} A_i$ su producto cartesiano. Entonces para cada conjunto P y cada familia de funciones $\{f_i : P \to A_i\}_{i \in I}$, existe una única función $\Phi : P \to \prod_{i \in I} A_i$ con la siguiente propiedad:*

Para cada $i \in I$ el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & A_i \\ & \prod_{i\in I} A_i \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $p \in P$ e $i \in I$ arbitrarios. Como cada función f_i va de P en el conjunto A_i, entonces $f_i(p) \in A_i$. Tiene sentido así considerar a la función $\phi_p : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ definida por $\phi_p(i) := f_i(p)$. Ahora bien, como para cada $i \in I$ se tiene que $f_i(p) \in A_i$, se sigue que $\phi_p \in \prod_{i\in I} A_i$. De acuerdo con esto, es prudente considerar a la función $\Phi : P \to \prod_{i\in I} A_i$ definida por $\Phi(p) := \phi_p$.

Veamos que para cada $i \in I$, $f_i = \pi_i \circ \Phi$. En efecto, si $p \in P$ e $i \in I$, entonces

$$\pi_i(\Phi(p)) = \pi_i(\phi_p) = \phi_p(i) = f_i(p).$$

De ahí que $f_i = \pi_i \circ \Phi$. Supongase ahora que la función $\psi : P \to \prod_{i\in I} A_i$ es tal que para cada $i \in I$, $\quad f_i = \pi_i \circ \psi$. Sea $p \in P$ arbitrario. Entonces para cada $i \in I$:

$$\begin{aligned} \psi(p)(i) &= \pi_i(\psi(p)) \\ &= f_i(p) \\ &= \pi_i(\Phi(p)) \\ &= \Phi(p)(i). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi(p) = \Phi(p)$ para cada $p \in P$ y $\psi = \Phi$. □

Ahora recordaremos la definición de producto y coproducto en una categoría.

Definición 5.3. Sean $\mathcal{A}$ una categoría y $(A_i)_{i\in I} \subseteq Ob(\mathcal{A})$ una familia de objetos indexada por el conjunto I.

- Un **producto** para la familia $(A_i)_{i\in I}$ es un objeto $P \in Ob(\mathcal{A})$ junto con una familia de morfismos $\{\pi_i : P \to A_i\}_{i\in I}$ con la siguiente propiedad:

  Para cada $P' \in Ob(\mathcal{A})$ y cada familia de morfismos $\{f_i : P' \to A_i\}_{i\in I}$ existe un único morfismo $\phi : P' \to P$ tal que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & A_i \\ & P \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd}$$

- Un **coproducto** para la familia $(A_i)_{i\in I}$ es un objeto $Q \in Ob(\mathcal{A})$ junto con una familia de morfismos $\{\sigma_i : A_i \to Q\}_{i\in I}$ con la siguiente propiedad:

  Para cada $Q' \in Ob(\mathcal{A})$ y cada familia de morfismos $\{f_i : A_i \to Q'\}_{i\in I}$ existe un único morfismo $\psi : Q \to Q'$ tal que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\sigma_i"'] & & Q' \\ & Q \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} .$$

Teorema 5.4. *Toda familia no vacía de objetos de $\mathcal{SGRP}$ tiene un producto.*

Demostración. Sea $(S_i)_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{SGRP}$ indexada por el conjunto $I \neq \emptyset$ y sea $\prod\limits_{i\in I} S_i$ el producto cartesiano de la familia $(S_i)_{i\in I}$ (véase Definición 5.1). Tómense $f, g \in \prod\limits_{i\in I} S_i$ e $i \in I$ arbitrarios. Entonces debe ocurrir que $f(i), g(i) \in S_i$ y por consiguiente también $f(i)g(i) \in S_i$. Tiene sentido así considerar a la función $fg : I \to \bigcup\limits_{i\in I} S_i$ definida por $(fg)(i) := f(i)g(i)$. Observe que $fg \in \prod\limits_{i\in I} S_i$. Más aún, si se toman $f, g, h \in \prod\limits_{i\in I} S_i$, entonces

$$\begin{aligned} [(fg)h](i) &= (fg)(i)h(i) \\ &= [f(i)g(i)]h(i) \\ &= f(i)[g(i)h(i)] \\ &= f(i)(gh)(i) \\ &= [f(gh)](i) \end{aligned}$$

Por consiguiente $(fg)h = f(gh)$, de manera que $\prod\limits_{i\in I} S_i$ es un semigrupo bajo esta operación binaria y por lo tanto un objeto de $\mathcal{SGRP}$. Si además cada S_i es un monoide con neutro e_i, entonces de la definición de fg se sigue que $\prod_{i\in I} S_i$ es un monoide con neutro la función $\hat{e} : I \to \bigcup_{i\in I} S_i$ definida por $\hat{e}(i) := e_i$. Recordar ahora que la $i-$ésima función proyección $\pi_i : \prod_{i\in I} S_i \to S_i$ está definida por $\pi_i(f) := f(i)$. De acuerdo a esto se tiene que

$$\pi_i(fg) = (fg)(i) = f(i)g(i) = \pi_i(f)\pi_i(g).$$

Por lo tanto cada función proyección π_i es un morfismo de semigrupos y en consecuencia, un morfismo de la categoría $\mathcal{SGRP}$. Veamos que el objeto $\prod_{i\in I} S_i$ junto con los morfismos proyección $\{\pi_i : \prod_{i\in I} S_i \to S_i\}_{i\in I}$ son un producto en $\mathcal{SGRP}$ para la familia $(S_i)_{i\in I}$ (ver Definición 5.3). En efecto, sean T un semigrupo y $\{f_i : T \to S_i\}_{i\in I}$ una familia de morfismos de semigrupos. De la Proposición 5.2 se sigue que existe una única función $\Phi : T \to \prod_{i\in I} S_i$ tal que para cada $i \in I$ el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & S_i \\
& \prod_{i\in I} S_i \arrow[ur, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Más aún, la función Φ está dada por $\Phi(t) := \phi_t$ donde $\phi_t : I \to \bigcup_{i\in I} S_i$ es definida como $\phi_t(i) := f_i(t)$. Por otro lado, si $a, b \in T$, entonces $\Phi(ab) := \phi_{ab}$ y para cada $i \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\Phi(ab)(i) &= \phi_{ab}(i) \\
&= f_i(ab) \\
&= f_i(a)f_i(b) \\
&= \phi_a(i)\phi_b(i) \\
&= \Phi(a)(i)\Phi(b)(i) \\
&= [\Phi(a)\Phi(b)](i)
\end{aligned}$$

Por consiguiente $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ y Φ es un morfismo de semigrupos. Suponga que $\Psi : T \to \prod_{i\in I} S_i$ es un morfismo de semigrupos tal que para cada

$i \in I$ se verifica que $f_i = \pi_i \circ \Psi$. Como todo morfismo de semigrupos es en particular una función, de la unicidad de Φ se concluye que $\Phi = \Psi$ y el resultado se sigue. $\square$

Teorema 5.5. *Toda familia no vacía de objetos de $\mathcal{SGRP}$ tiene un coproducto.*

Demostración. Sea $(S_i)_{i \in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{SGRP}$ indexada por el conjunto $I \neq \emptyset$ y sea Q la colección de todos los símbolos de la forma

$$(a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $i_k \in I$, $a_k \in S_{i_k}$ e $i_k \neq i_{k+1}$ para cada $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

Si $\hat{a} := (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)$ y $\hat{b} := (b_1, j_1)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)$ se define

$$\hat{a} * \hat{b} := \begin{cases} (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m) & si \quad i_n \neq j_1. \\ (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n b_1, i_n)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m) & si \quad i_n = j_1. \end{cases}$$

Observe que cuando el índice que aparece en el último par ordenado de $\hat{a}$ difiere del índice que aparece en el primer par ordenado de $\hat{b}$, entonces los pares ordenados de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ se concatenan. En caso contrario, cuando el índice que aparece en el último par ordenado de $\hat{a}$ coincide con el índice que aparece en el primer par ordenado de $\hat{b}$ entonces los pares ordenados de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ se concatenan, y luego se reemplaza a $(a_n, i_n)(b_1, j_1)$ por $(a_n b_1, i_n)$. Esto puede llevarse a cabo, puesto que como $i_n = j_1$ entonces a_n y b_1 son ambos elementos del semigrupo S_{i_n}. Veamos que la operación $*$ es asociativa. En efecto, sean $\hat{a} := (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)$, $\hat{b} := (b_1, j_1)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)$ y $\hat{c} := (c_1, k_1)(c_2, k_2) \cdots (c_r, k_r)$ elementos de Q. Para establecer la aseveración se ha de verificar que en todos los casos que a continuación se enuncian resulta que $\hat{a} * (\hat{b} * \hat{c}) = (\hat{a} * \hat{b}) * \hat{c}$:

1. Los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_1\}$, $\{j_m\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
2. $i_n = j_1$ y los conjuntos $\{j_1\}$, $\{j_m\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
3. $i_n = j_m$ y los conjuntos $\{j_1\}$, $\{j_m\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
4. $i_n = k_1$ y los conjuntos $\{j_1\}$, $\{j_m\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
5. $i_n = k_1$ y los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_1\}$ y $\{j_m\}$ son disjuntos por pares.

6. $j_1 = k_1$ y los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_1\}$ y $\{j_m\}$ son disjuntos por pares.
7. $j_m = k_1$ y los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_1\}$ y $\{j_m\}$ son disjuntos por pares.
8. $j_1 = j_m$ y los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_1\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
9. $j_m = k_1$ y los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_1\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
10. $j_m = i_n$ y los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_1\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
11. $j_1 = i_n$ y los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_m\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
12. $j_1 = j_m$ y los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_m\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
13. $j_1 = k_1$ y los conjuntos $\{i_n\}$, $\{j_m\}$ y $\{k_1\}$ son disjuntos por pares.
14. $i_n = j_1$, $j_1 \neq j_m$ y $j_m = k_1$.
15. $i_n = j_m$, $j_m \neq j_1$ y $j_1 = k_1$.
16. $i_n = k_1$, $k_1 \neq j_1$ y $j_1 = j_m$.
17. $i_n = j_1 = j_m \neq k_1$
18. $i_n = j_1 = k_1 \neq j_m$
19. $i_n = j_m = k_1 \neq j_1$
20. $j_1 = j_m = k_1 \neq i_n$
21. $i_n = j_i = j_m = k_1$.

Caso 1. Aquí se tiene que $\hat{a} * \hat{b} = (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2) \cdot \cdot \cdot (b_m, j_m)$ y $\hat{b} * \hat{c} = (b_1, j_1)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2) \cdots (c_r, k_r)$. Por consiguiente $(\hat{a} * \hat{b}) * \hat{c} = (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2) \cdots (c_r, k_r)$ y $\hat{a} * (\hat{b} * \hat{c}) = (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2) \cdot \cdot \cdot (b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2) \cdots (c_r, k_r)$.

Caso 2. En este caso $\hat{a} * \hat{b} = (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n b_1, i_n)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)$ y $\hat{b} * \hat{c} = (b_1, j_1)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2) \cdots (c_r, k_r)$. Por consiguiente $(\hat{a} * \hat{b}) * \hat{c} = (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n b_1, i_n)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2) \cdots (c_r, k_r)$ y $\hat{a} * (\hat{b} * \hat{c}) = (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n b_1, i_n)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2) \cdots (c_r, k_r)$.

Caso 5. En este caso $\hat{a}*\hat{b} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)$ y $\hat{b}*\hat{c} = (b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$. Por consiguiente $(\hat{a}*\hat{b})*\hat{c} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$ y $\hat{a}*(\hat{b}*\hat{c}) = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$.

Caso 7. En este caso $\hat{a}*\hat{b} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)$ y $\hat{b}*\hat{c} = (b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_mc_1, j_m)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$. Por consiguiente $(\hat{a}*\hat{b})*\hat{c} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_mc_1, j_m)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$ y $\hat{a}*(\hat{b}*\hat{c}) = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_mc_1, j_m)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$.

Caso 11. En este caso $\hat{a}*\hat{b} = (a_1, i_1)\cdots(a_nb_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)$ y $\hat{b}*\hat{c} = (b_1, j_1)\cdots(b_m, j_m)(c_1, k_1)\cdots(c_r, k_r)$. Por lo tanto $(\hat{a}*\hat{b})*\hat{c} = (a_1, i_1)\cdots(a_nb_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)(c_1, k_1)\cdots(c_r, k_r)$ y $\hat{a}*(\hat{b}*\hat{c}) = (a_1, i_1)\cdots(a_nb_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)(c_1, k_1)\cdots(c_r, k_r)$

Caso 14. En este caso $\hat{a}*\hat{b} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_nb_1, i_n)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)$ y $\hat{b}*\hat{c} = (b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_mc_1, j_m)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$. Por consiguiente $(\hat{a}*\hat{b})*\hat{c} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_nb_1, i_n)(b_2, j_2)\cdots(b_mc_1, j_m)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$ y $\hat{a}*(\hat{b}*\hat{c}) = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_nb_1, i_n)(b_2, j_2)\cdots(b_mc_1, j_m)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$.

Caso 17. En este caso $\hat{a}*\hat{b} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_nb_1, i_n)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)$ y $\hat{b}*\hat{c} = (b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$. Por consiguiente $(\hat{a}*\hat{b})*\hat{c} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_nb_1, i_n)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$ y $\hat{a}*(\hat{b}*\hat{c}) = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_nb_1, i_n)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)(c_1, k_1)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$.

Caso 20. En este caso $\hat{a}*\hat{b} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)$ y $\hat{b}*\hat{c} = (b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_mc_1, k_1)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$. Por lo tanto $(\hat{a}*\hat{b})*\hat{c} = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_mc_1, k_1)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$ y $\hat{a}*(\hat{b}*\hat{c}) = (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_mc_1, k_1)(c_2, k_2)\cdots(c_r, k_r)$.

Los casos restantes se verifican de manera análoga a los anteriores y por eso se omiten. Se concluye así que $*$ es una operación asociativa. Por consiguiente $(Q, *)$ es un semigrupo. Ahora bien, para cada $i \in I$ sea $\sigma_i : S_i \to Q$ la función definida por $\sigma_i(a) := (a, i)$. Si $a, b \in S_i$ entonces $\sigma_i(ab) := (ab, i) = (a, i) * (b, i) = \sigma_i(a) * \sigma_i(b)$ y por lo tanto cada función σ_i es un morfismo de semigrupos. Sea T un semigrupo arbitrario y $\{f_i : S_i \to T\}_{i \in I}$ una familia de morfismos de semigrupos. Considere ahora a la función $\Psi : Q \to T$ definida por $\Psi[(a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)] := f_{i_1}(a_1)f_{i_2}(a_2)\cdots f_{i_n}(a_n)$. Veamos que Ψ es un morfismo de semigrupos: si $\hat{a} := (a_1, i_1)(a_2, i_2)\cdots(a_n, i_n)$ y $\hat{b} := (b_1, j_1)(b_2, j_2)\cdots(b_m, j_m)$, entonces se tienen los siguientes dos casos

Caso (a) $i_n \neq j_1$. En esta situación se tiene que

$$\begin{aligned}
\Psi(\hat{a} * \hat{b}) &= \Psi[(a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)(b_1, j_1)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)] \\
&= f_{i_1}(a_1) f_{i_2}(a_2) \cdots f_{i_n}(a_n) f_{j_1}(b_1) f_{j_2}(b_2) \cdots f_{j_m}(b_m) \\
&= [f_{i_1}(a_1) f_{i_2}(a_2) \cdots f_{i_n}(a_n)][f_{j_1}(b_1) f_{j_2}(b_2) \cdots f_{j_m}(b_m)] \\
&= \Psi(\hat{a})\Psi(\hat{b})
\end{aligned}$$

Caso (b) $i_n = j_1$**.** En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
\Psi(\hat{a} * \hat{b}) &= \Psi[(a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n b_1, i_n)(b_2, j_2) \cdots (b_m, j_m)] \\
&= f_{i_1}(a_1) f_{i_2}(a_2) \cdots f_{i_n}(a_n b_1) f_{j_2}(b_2) \cdots f_{j_m}(b_m) \\
&= f_{i_1}(a_1) f_{i_2}(a_2) \cdots f_{i_n}(a_n) f_{j_1}(b_1) f_{j_2}(b_2) \cdots f_{j_m}(b_m) \\
&= [f_{i_1}(a_1) f_{i_2}(a_2) \cdots f_{i_n}(a_n)][f_{j_1}(b_1) f_{j_2}(b_2) \cdots f_{j_m}(b_m)] \\
&= \Psi(\hat{a})\Psi(\hat{b})
\end{aligned}$$

De lo anterior puede concluirse que Ψ es un morfismo de semigrupos. Más aún, si $i \in I$ y $a \in S_i$, entonces $\Psi(\sigma_i(a)) = \Psi(a, i) = f_i(a)$. Por lo tanto $f_i = \Psi \circ \sigma_i$ y para cada $i \in I$ el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\sigma_i"'] & & T \\
& Q \arrow[ur, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Suponga ahora que $\Psi' : Q \to T$ es un morfismo de semigrupos tal que $f_i = \Psi' \circ \sigma_i$ para cada $i \in I$. Si $\hat{a} := (a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n) \in Q$ entonces

$$\begin{aligned}
\Psi'(\hat{a}) &= \Psi'[(a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)] \\
&= \Psi'[(a_1, i_1) * (a_2, i_2) * \cdots * (a_n, i_n)] \\
&= \Psi'(a_1, i_1)\Psi'(a_2, i_2) \cdots \Psi'(a_n, i_n) \\
&= \Psi'(\sigma_{i_1}(a_1))\Psi'(\sigma_{i_2}(a_2)) \cdots \Psi'(\sigma_{i_n}(a_n)) \\
&= f_{i_1}(a_1) f_{i_2}(a_2) \cdots f_{i_n}(a_n) \\
&= \Psi[(a_1, i_1)(a_2, i_2) \cdots (a_n, i_n)] \\
&= \Psi(\hat{a})
\end{aligned}$$

De donde $\Psi' = \Psi$. Así, de acuerdo con la Definición 5.3 se sigue que Q junto con la familia de morfismos de semigrupos $\{\sigma_i : S_i \to Q\}_{i\in I}$ son un coproducto en $\mathcal{SGRP}$ para la familia $(S_i)_{i\in I}$. □

Definición 5.6. Sean $S_1, S_2, ..., S_n$ n semigrupos. Sobre el conjunto $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ se define la siguiente operación binaria

$$(a_1, a_2, ..., a_n)(b_1, b_2, ..., b_n) := (a_1b_1, a_2b_2, ..., a_nb_n)$$

De la asociatividad de cada S_i se sigue que esta operación entre n-adas es asociativa y por lo tanto $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ es un semigrupo. Cuando cada S_i es un monoide con neutro e_i entonces $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ es un monoide con neutro la n-ada $(e_1, e_2, ..., e_n)$. Llamamos a este semigrupo (monoide) el **producto directo** de los semigrupos (monoides) $S_1, S_2, ..., S_n$

Lema 5.7. *Si $f : S \to T$ es un morfismo de semigrupos, entonces $Ker(f)$ es un subsemigrupo de $S \times S$.*

Demostración. Tómense $(a, b), (c, d) \in Ker(f)$. Entonces

$$\begin{array}{lc} & f(a) = f(b) \quad \text{y} \quad f(c) = f(d) \\ \Longrightarrow & f(a)f(c) = f(b)f(d) \\ \Longrightarrow & f(ac) = f(bd) \\ \Longrightarrow & (a, b)(c, d) = (ac, bd) \in Ker(f) \end{array}$$

□

En el Ejemplo 4.19 se afirma que los monomorfismos en la categoría $\mathcal{VEC}_{\mathcal{F}}$ son precisamente las transformaciones lineales inyectivas, en la categoría de semigrupos $\mathcal{SGRP}$ ocurre algo similar.

Teorema 5.8. *Monomorfismos en la categoría $\mathcal{SGRP}$. El morfismo de semigrupos $f : S \to T$ es un monomorfismo en la categoría $\mathcal{SGRP}$ sí y sólo si f es una función inyectiva.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Suponga que $f : S \to T$ es un monomorfismo en $\mathcal{SGRP}$. De acuerdo con el lema 5.7 $Ker(f)$ es subsemigrupo de $S \times S$ y por lo tanto

$Ker(f)$ es un semigrupo. Considere a las funciones $\alpha, \beta : Ker(f) \to S$ definidas por $\alpha(x, y) := x$ y $\beta(x, y) := y$. Observe que para cada $(x, y), (w, z) \in Ker(f)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha[(x, y)(w, z)] &= \alpha(xw, yz)\\ &= xw\\ &= \alpha(x, y)\alpha(w, z)\end{aligned}$$

De ahí que α es un morfismo de semigrupos. De manera análoga se exhibe que β es un morfismo de semigrupos. Más aún, para cada $(x, y) \in Ker(f)$ se tiene que $f[\alpha(x, y)] = f(x) = f(y) = f[\beta(x, y)]$ y por consiguiente $f \circ \alpha = f \circ \beta$. Ahora bien, como f es, por hipótesis, monomorfismo en $SGRP$ se sigue entonces que $\alpha = \beta$. Así, para cada $(x, y) \in Ker(f)$ se verifica que $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$, de donde $x = y$ y por tanto $(x, y) \in \Delta_S$. De ahí que $Ker(f) \subseteq \Delta_S$ y por consiguiente $Ker(f) = \Delta_S$. De la Proposición 2.4 se concluye que f debe ser inyectiva.
$\Longleftarrow$) Suponga que f es inyectiva y sean R un semigrupo y $\alpha, \beta : R \to S$ morfismos de semigrupos tales que $f \circ \alpha = f \circ \beta$. Como en particular R, S y T son conjuntos y α, β y f son funciones, entonces del Teorema 2.1 se sigue que $\alpha = \beta$ y por consiguiente f debe ser un monomorfismo en $\mathcal{SGRP}$. $\square$

Por otro lado, el Ejemplo 4.20 afirma que los epimorfismos de la categoría de grupos $\mathcal{GRP}$ son precisamente los morfismos sobreyectivos de grupos. Sin embargo, en la categoría de semigrupos no todo epimorfismo es un morfismo sobreyectivo.

Ejemplo 5.9. Defínase $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{0\}$ y considere a los semigrupos $(\mathbb{N}^*, +)$ y $(\mathbb{Z}, +)$. Sea $\iota : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ la función inclusión. Es claro que ι es un morfismo de semigrupos. Además, observe que ι no es una función sobreyectiva. Ahora bien, sean S un semigrupo y $\alpha, \beta : \mathbb{Z} \to S$ morfismos de semigrupos tales que $\alpha \circ \iota = \beta \circ \iota$. Veamos que $\alpha(\mathbb{Z})$ es un monoide con neutro $\alpha(0)$. En efecto, puesto que α es un morfismo de semigrupos, de la Proposición 3.22 se deduce que $\alpha(\mathbb{Z})$ es un subsemigrupo de S. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\alpha(n)\alpha(0) = \alpha(n + 0) = \alpha(n)$ y también $\alpha(0)\alpha(n) = \alpha(0 + n) = \alpha(n)$. Por consiguiente $\alpha(n)\alpha(0) = \alpha(n) = \alpha(0)\alpha(n)$ y $\alpha(\mathbb{Z})$ es un monoide con neutro $\alpha(0)$. De manera análoga se deduce que $\beta(\mathbb{Z})$ es un monoide con neutro $\beta(0)$.

Observese que, como $\alpha \circ \iota = \beta \circ \iota$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= \alpha(\iota(n)) \\ &= \beta(\iota(n)) \\ &= \beta(n) \end{aligned}$$

En particular tenemos que $\alpha(0) = \beta(0)$. Ahora veamos que $\alpha = \beta$. En efecto, en virtud de la observación anterior, para exhibir que $\alpha = \beta$ solo resta mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n < 0$ se tiene que $\alpha(n) = \beta(n)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $-n < 0$ y se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \alpha(-n) &= \alpha(-n)\alpha(0) \\ &= \alpha(-n)\beta(0) \\ &= \alpha(-n)\beta(n + (-n)) \\ &= \alpha(-n)[\beta(n)\beta(-n)] \\ &= \alpha(-n)[\alpha(n)\beta(-n)] \\ &= [\alpha(-n)\alpha(n)]\beta(-n) \\ &= \alpha(-n + n)\beta(-n) \\ &= \alpha(0)\beta(-n) \\ &= \beta(0)\beta(-n) \\ &= \beta(-n) \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que, en definitiva, $\alpha = \beta$. Esto último permite concluir que $\iota : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ es un epimorfismo en $\mathcal{SGRP}$ que no es sobreyectivo.

Sin embargo, si se cumple la siguiente proposición.

Proposición 5.10. *Todo morfismo sobreyectivo de semigrupos es un epimorfismo en la categoría $\mathcal{SGRP}$.*

Demostración. Sea $f : S \to T$ un morfismo sobreyectivo de semigrupos. Tómense un semigrupo arbitrario, digamos R, y un par de morfismos de semigrupos $\alpha, \beta : T \to R$ tales que $\alpha \circ f = \beta \circ f$. Si $t \in T$, de la sobreyectividad de f puede escribirse $t = f(s)$ para algún $s \in S$. Así, $\alpha(t) = \alpha(f(s)) = \beta(f(s)) = \beta(t)$ y por consiguiente $\alpha = \beta$. En consecuencia, f es un epimorfismo en $\mathcal{SGRP}$. $\square$

6 La categoría de monoides conmutativos cancelables $\mathcal{MCC}$ y el grupo de Grothendieck

En ésta sección se define la categoría de monoides conmutativos y cancelables $\mathcal{MCC}$ y se describe la construcción del grupo de Grothendieck (cf. [5]) de un monoide conmutativo cancelable. Se exhibe que todo monoide conmutativo y cancelable puede sumergirse en su grupo conmutativo de Grothendieck y también se establece que el grupo conmutativo de Grothendieck del monoide $(\mathbb{N}^*, +)$ es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}, +)$.

Definición 6.1. Sea S un semigrupo. Se dice que $a \in S$ es:

1. **cancelable a la izquierda** si para cada $x, y \in S$ se verifica que $ax = ay$ implica que $x = y$.

2. **cancelable a la derecha** si para cada $x, y \in S$ se verifica que $xa = ya$ implica que $x = y$.

3. **cancelable** si a es a la vez cancelable a la izquierda y a la derecha.

Definición 6.2. Se dice que el semigrupo S es:

1. **cancelable a la izquierda** si todo elemento de S es cancelable a la izquierda.

2. **cancelable a la derecha** si todo elemento de S es cancelable a la derecha.

3. **cancelable** si todo elemento de S es cancelable.

Ejemplo 6.3. Semigrupos cancelables.

- Todo grupo es cancelable.

- El monoide $(\mathbb{N}^*, +)$ es cancelable.

En lo que sigue, $\mathcal{O}$ denotará a la clase de todos los monoides conmutativos y cancelables. Para cada $M, N \in \mathcal{O}$ se define

$$Hom(M, N) := \{f : M \to N \,|\, f \text{ es morfismo de monoides}\}.$$

No es difícil ver que lo anterior forma una subcategoría de $\mathcal{SGRP}$ a la que se denotará por $\mathcal{MCC}$. Tómese $M \in \mathcal{O}$. Sobre el monoide producto $M \times M$ se define la siguiente relación:

$$(a,b)\rho(c,d) \Longleftrightarrow ad = bc$$

Veamos que ρ es una equivalencia sobre $M \times M$. En efecto, como M es conmutativo, entonces para cada $(a,b) \in M \times M$ se tiene que $ab = ba$. Luego $(a,b)\rho(a,b)$ y ρ es reflexiva. Suponga ahora que $(a,b)\rho(c,d)$. Entonces $ad = bc$, o lo que es lo mismo $cb = da$. De ahí que $(c,d)\rho(a,b)$ y por consiguiente ρ es simétrica. Finalmente, suponga que $(a,b)\rho(c,d)$ y $(c,d)\rho(e,f)$. Entonces $ad = bc$ y $cf = de$, o lo que es lo mismo $ad = bc$ y $de = fc$. De la igualdad $ad = bc$ se obtiene que $ade = bce$, y puesto que $de = fc$ se obtiene así que $afc = bce = bec$. De esta última igualdad y de que M es cancelable se sigue que $af = be$. Por lo tanto $(a,b)\rho(e,f)$ y ρ es transitiva. Por consiguiente ρ es una equivalencia sobre $M \times M$. Ahora veamos que ρ es una congruencia sobre $M \times M$. En primer lugar, observar que de la conmutatividad de M y de que la operación en el monoide producto se lleva a cabo entrada a entrada se sigue que $M \times M$ es también conmutativo. Debido a esto, solo bastará mostrar que ρ es una congruencia izquierda. Suponga que $(a,b)\rho(c,d)$ y sea $(x,y) \in M \times M$ arbitrario. Entonces $ad = bc$, de donde $xyad = xybc$. Así, asociando y conmutando convenientemente se llega a que $xayd = ybxc$. De ahí que $(x,y)(a,b)\rho(x,y)(c,d)$ y por consiguiente ρ es una congruencia sobre $M \times M$. Así que $\frac{M \times M}{\rho}$ es, de acuerdo a la Proposición 3.24, un monoide con neutro $[(e_M, e_M)]_\rho$, siempre que e_M sea el elemento neutro de M.

El monoide $\frac{M \times M}{\rho}$ con neutro $[(e_M, e_M)]_\rho$ tiene las propiedades enunciadas en el siguiente lema.

Lema 6.4. *Propiedades del monoide* $\frac{M \times M}{\rho}$.

1. $\frac{M \times M}{\rho}$ *es un monoide conmutativo.*

2. *Para cada* $a \in M$ *se verifica que* $(a,a)\rho(e_M, e_M)$ *y por tanto* $[(a,a)]_\rho = [(e_M, e_M)]_\rho$.

3. $[(a,b)]_\rho[(b,a)]_\rho = [(e_M, e_M)]_\rho$

Demostración. La primera propiedad se deduce de la conmutatividad de $M \times M$. La segunda, se sigue de notar que siempre se verifica la identidad $ae_M = ae_M$. Ahora bien, para cada $(a,b) \in M \times M$ se tiene que:

$$[(a,b)]_\rho[(b,a)]_\rho = [(a,b)(b,a)]_\rho = [(ab,ba)]_\rho = [(ab,ab)]_\rho = [(e_M,e_M)]_\rho,$$

por lo que la última propiedad se sigue. $\square$

Observese que de las propiedades 1 y 3 del lema anterior se concluye que $\frac{M\times M}{\rho}$ es un grupo conmutativo. Se denotará a este grupo por $\mathcal{G}(M)$.

Definición 6.5. Al grupo $\mathcal{G}(M)$ se le llamará **grupo conmutativo de Grothendieck** del monoide M.

Proposición 6.6. *Todo monoide conmutativo y cancelable se sumerge en su grupo conmutativo de Grothendieck.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{O}$ y considérese a la función $\eta_M : M \to \mathcal{G}(\mathcal{M})$ definida por $\eta_M(a) := [(a,e_M)]_\rho$. Es claro que η_M mapea al neutro en el neutro. Además, si $a,b \in M$ son tales que $\eta_M(a) = \eta_M(b)$ entonces $[(a,e_M)]_\rho = [(b,e_M)]_\rho$ de donde $(a,e_M)\rho(b,e_M)$. Luego $ae_M = e_M b$ y así $a = b$. Por consiguiente η_M es una función inyectiva. Más aún, observe que

$$\begin{aligned}\eta_M(ab) :&= [(ab,e_M)]_\rho \\ &= [(a,e_M)(b,e_M)]_\rho \\ &= [(a,e_M)]_\rho[(b,e_M)]_\rho \\ &= \eta_M(a)\eta_M(b)\end{aligned}$$

De donde η_M es un morfismo inyectivo de monoides, así por la Proposición 3.30 se sigue que M es isomorfo a un submonoide de $\mathcal{G}(M)$. Llamaremos al morfismo η_M la **inmersión de M en $\mathcal{G}(M)$**. $\square$

Teorema 6.7. *Para cada grupo conmutativo A y cada morfismo de monoides $f : M \to A$ con $M \in \mathcal{O}$ existe un único morfismo de grupos $F : \mathcal{G}(M) \to A$ que hace conmutar al siguiente triángulo*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_M"'] & & A \\ & \mathcal{G}(M) \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sean A un grupo conmutativo y $f : M \to A$ un morfismo de monoides. Se define a $F : \mathcal{G}(M) \to A$ como $F([(a,b)]_\rho) := f(a)f(b)^{-1}$. Veamos que F está bien definida:

$$\begin{array}{rc} & [(a,b)]_\rho = [(c,d)]_\rho \\ \Longrightarrow & (a,b)\rho(c,d) \\ \Longrightarrow & ad = bc \\ \Longrightarrow & f(ad) = f(bc) \\ \Longrightarrow & f(a)f(d) = f(b)f(c) \\ \Longrightarrow & f(a)f(b)^{-1} = f(c)f(d)^{-1} \\ \Longrightarrow & F([(a,b)]_\rho) = F([(c,d)]_\rho) \end{array}$$

Ahora, veamos que F es un morfismo de grupos:

$$\begin{aligned} F([(a,b)]_\rho[(c,d)]_\rho) &= F([(ac,bd)]_\rho) \\ &= f(ac)f(bd)^{-1} \\ &= f(a)f(c)f(b)^{-1}f(d)^{-1} \\ &= (f(a)f(b)^{-1})(f(c)f(d)^{-1}) \\ &= F([(a,b)]_\rho)F([(c,d)]_\rho) \end{aligned}$$

Más aún, para cada $a \in M$ se tiene que

$$F(\eta_M(a)) = F([(a,e_M)]_\rho) = f(a)f(e_M)^{-1} = f(a)e_A = f(a).$$

Por consiguiente $f = F \circ \eta_M$. Suponga ahora que $F' : \mathcal{G}(M) \to A$ es un morfismo de grupos para el cual $f = F' \circ \eta_M$. Entonces

$$\begin{aligned} F'([(a,b)]_\rho) &= F'([(a,e_M)(e_M,b)]_\rho) \\ &= F'([(a,e_M)]_\rho[(e_M,b)]_\rho) \\ &= F'([(a,e_M)]_\rho)F'([(e_M,b)]_\rho) \\ &= F'([(a,e_M)]_\rho)F'([(b,e_M)]_\rho^{-1}) \\ &= F'([(a,e_M)]_\rho)F'([(b,e_M)]_\rho)^{-1} \\ &= F'(\eta_M(a))F'(\eta_M(b))^{-1} \\ &= f(a)f(b)^{-1} \\ &= F([(a,b)]_\rho) \end{aligned}$$

Se concluye de esto último que $F' = F$ y el resultado se sigue. $\square$

Corolario 6.8. *Sea $M \in \mathcal{O}$ y suponga que para el grupo abeliano G existe un morfismo de monoides $\iota : M \to G$ con la siguiente propiedad:*

Para cada grupo abeliano A y cada morfismo de monoides $f : M \to A$ existe un único morfismo de grupos $F : G \to A$ que hace conmutar al siguiente triángulo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & & A \\ & G \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces $\mathcal{G}(M) \cong G$.

Demostración. De la Proposición 6.7 y de la hipótesis se sigue que existen morfismos de grupos (que además deben ser únicos) $\phi : G \to \mathcal{G}(M)$ y $\psi : \mathcal{G}(M) \to G$ que hacen conmutativos a los siguientes triángulos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\eta_M"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{G}(M) \\ & G \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\eta_M"'] & & G \\ & \mathcal{G}(M) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

O lo que es lo mismo, $\phi \circ \iota = \eta_M$ y $\psi \circ \eta_M = \iota$. De estas igualdades se desprende que $(\phi \circ \psi) \circ \eta_M = \eta_M$ y $(\psi \circ \phi) \circ \iota = \iota$, por lo que tenemos entonces que el siguiente par de triángulos es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\eta_M"] \arrow[dr, "\eta_M"'] & & \mathcal{G}(M) \\ & \mathcal{G}(M) \arrow[ur, "\phi\circ\psi"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & G \\ & G \arrow[ur, "\psi\circ\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, es claro que los triángulos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\eta_M"] \arrow[dr, "\eta_M"'] & & \mathcal{G}(M) \\ & \mathcal{G}(M) \arrow[ur, "id_{\mathcal{G}(M)}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & G \\ & G \arrow[ur, "id_G"'] & \end{tikzcd}$$

también son conmutativos. De las hipótesis de unicidad debe ocurrir que $\phi \circ \psi = id_{\mathcal{G}(M)}$ y $\psi \circ \phi = id_G$. Por consiguiente $\psi : \mathcal{G}(M) \to G$ es un isomorfismo de grupos y con ello $\mathcal{G}(M) \cong G$. $\square$

Ejemplo 6.9. Considere al monoide $(\mathbb{N}^*, +)$, al grupo abeliano $(\mathbb{Z}, +)$ y a la función inclusión $\iota : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$. Sea $f : \mathbb{N}^* \to A$ un morfismo de monoides con A un grupo abeliano. No es difícil probar (usando inducción) que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = f(1)^n$. Ahora bien, puesto que $f(1) \in A$, y en A si tiene sentido considerar potencias negativas, podemos considerar a la función $f : \mathbb{Z} \to A$ dada para cada $n \in \mathbb{Z}$ por $F(n) := f(1)^n$. De las leyes de los exponentes en un grupo se sigue fácilmente que F es un morfismo de grupos, y además, claramente, $F \circ \iota = f$. Si $L : \mathbb{Z} \to A$ es otro morfismo de grupos tal que $L \circ \iota = f$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $L(n) = f(n) = f(1)^n = F(n)$. Sea $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$, entonces $-n > 0$ y así $L(-n) = F(-n)$. Tenemos la siguiente cadena de igualdades: $F(n)F(-n) = F(0) = L(0) = L(n)L(-n)$, de donde $F(n)F(-n) = L(n)L(-n)$ con $F(-n) = L(-n)$. De esto último, $F(n) = L(n)$ para $n < 0$. Por consiguiente para cada $n \in \mathbb{Z}$, $F(n) = L(n)$ y en consecuencia $F = L$. De todo lo anterior, $(\mathbb{Z}, +)$ junto con la inclusión cumplen todas las condiciones del Corolario 6.8 y por consiguiente $\mathcal{G}(\mathbb{N}^*) \cong \mathbb{Z}$.

Para concluir el presente capítulo de libro se menciona que el grupo de Grothendieck de un monoide conmutativo y cancelable puede emplearse para establecer el siguiente resultado:

Proposición 6.10. *(cf. [3] págs. 102-105.) Epimorfismos en $\mathcal{MCC}$. Sea $f : M \to N$ un morfismo de $\mathcal{MCC}$. Entonces, f es un epimorfismo en $\mathcal{MCC}$ sí y sólo si para cada $n \in N$ existen $a, b \in M$ tales que $nf(b) = f(a)$.*

7 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haberse tomado el tiempo en la revisión de este trabajo.

Bibliografía

[1] J. Adámek, H. Herrlich y G.E Strecker. *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. Dover Books on Mathematics, 1990.

[2] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra. Volume 1: Basic Category Theory.* Cambridge University Press, 1994.

[3] L. A. Huerta Sánchez. *Semigrupos.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2023

[4] M. Kilp, U. Knauer y A. Mikhalev. *Monoids, Acts and Categories.* Walter de Gruyter, 2000.

[5] S. Lang. *Algebra.* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 211, 2002.

carlos.lopezandrade@correo.buap.mx
luis.huertasan@alumno.buap.mx

Lógica

Matemáticas y sus aplicaciones 21, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-10-1

Capítulo 2

El arte de la lógica I (paradojas y tolerancia)

Agustín Contreras Carreto, Carlos Guillén Galván
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP

Resumen

En enero de 2023 los autores de este capítulo presentaron el libro *El arte de la lógica*, [2], escrito por Eugenia Cheng, cuyo objetivo es, grosso modo, mostrar que la lógica es una poderosa herramienta para argumentar no sólo en las ciencias, sino también para entender a los demás, para comprender el origen de los desacuerdos y conocerse a uno mismo. Queremos mostrar sólo un botón de este valioso libro.

1 ¿Qué son las paradojas?

En las matemáticas se presentan a veces teoremas que parecen extraños e increíbles, pero que son lógicamente inatacables; tal es el caso del Teorema de Banach-Tarski, más conocido como "Paradoja de Banach-Tarski", que en forma casi inconcebible, asegura que cualquier esfera compacta se puede dividir en un número finito de pedazos (por lo menos 5) de manera tal que al volver a pegarlos resulten, no una, sino dos esferas también compactas e idénticas en tamaño a la original [10]; es una pena que la prueba del teorema no diga cómo realizar tan asombrosa operación, mediante la cual, según Kasner y Newman en su libro "Matemáticas e imaginación", [11], "podríamos redistribuir las partes de un guisante de modo que, sin expansión ni distorsión, y sin que dos partes tengan algún punto en común, llene rápidamente el universo entero y no quede ningún espacio vacante, ni en el interior del guisante, ni en el universo". Verdaderamente este teorema trasciende la intuición y la imaginación, pero de ninguna manera debemos imponerle el título de paradoja, a menos que tomemos el significado de paradoja en un sentido amplio, capaz de contener toda situación que, por contraria a la intuición y al sentido común, alcanza a provocar de inmediato un sentimiento de sorpresa. Siendo así, las paradojas pueden ser de 4 tipos:

(1) Afirmaciones que parecen falsas, aunque en realidad son verdaderas, como la Paradoja de Banach-Tarski mencionada arriba.

(2) Afirmaciones que parecen verdaderas, pero en realidad son falsas, como la creencia de los pitagóricos de que cualesquiera dos segmentos son conmensurables.

(3) Cadenas de razonamientos aparentemente impecables pero que conducen a contradicciones lógicas (este tipo de paradoja suele llamarse falacia), como las paradojas de Zenón, acerca de la imposibilidad del movimiento.

(4) Proposiciones cuya veracidad o falsedad es indecidible.

Como ejemplo de este último tipo de paradojas está la proposición *Esta frase es falsa*, a la que llamaremos p. La paradoja aparece cuando preguntamos si p es verdadera o es falsa. Si suponemos que es verdadera, entonces lo que dice p es verdadero y, por lo tanto, p es falsa; pero, si p es falsa, entonces lo que dice es falso y p sería verdadera. Esta paradoja es una de tantas versiones de la así llamada paradoja de Epiménides el mentiroso. Epiménides fue un legendario poeta griego que vivió en Creta hacia el siglo VI a. de C. La frase que se le atribuye es “Todos los cretenses son mentirosos”, la cual da pie a una contradicción lógica si se admite que los mentirosos *siempre* mienten, mientras que las personas que no son mentirosas, los *veraces*, dicen *siempre* la verdad. Con esta declaración, la frase de Epiménides no puede ser verdadera porque si lo fuera, entonces Epiménides sería mentiroso y, por tanto, lo que dice es falso. Pero entonces se deduciría que los cretenses son veraces y, por ende, lo que Epiménides dice sería verdadero.

Esta paradoja ha fascinado a filósofos, científicos, pintores, escritores, etc., desde que Epiménides la inventó. Jorge Luis Borges y Adolfo Bioy Casares, en una de sus antologías de literatura fantástica, nos presentan esta versión:

“En Sumatra, alguien quiere doctorarse de adivino; el brujo examinador le pregunta si será reprobado o si pasará. El candidato responde que será reprobado...”

Léase también una de las cuestiones sometidas al juicio de Sancho Panza, como gobernador de la Ínsula de Barataria en el Quijote, parte II, capítulo LI.

¿Recuerdan al barbero del pueblo (el que afeita sólo a aquél habitante del pueblo que no se afeita a sí mismo)?. ¿Quién afeita al barbero? La paradoja de Berry consiste en que “el menor entero no nombrable con menos de veinte sílabas” ha sido expresado con 19 sílabas, y la de Grelling surge al considerar el adjetivo “heterológico”: un adjetivo se llama heterológico si la propiedad que expresa no se aplica a sí mismo; por ejemplo, “polisilábico” no es heterológico, pero...“heterológico” ¿es heterológico?

Para presentar de manera más divertida el conocimiento de estas paradojas y, aprovechando que Kurt Gödel es el más reconocido lógico matemático del siglo XX y que desde niño siempre hacía muchas preguntas, tanto que su familia lo llamaba *Herr Warum* (el señor por qué), en [3] hicimos que este niño les platicara, a su mamá y a su papá (y con ello, a nosotros), las paradojas del Quijote, la de Grelling, la forma simplificada de la paradoja de Epiménides, así como otras similares que dan lugar al fenómeno de regresión infinita y al de bucle extraño, autorreferencia o regresión infinita en un número finito de pasos, como las que aparecen en cánones de Juan Sebastián Bach y en algunos magníficos cuadros del pintor neerlandés Maurits Cornelius Escher, aquél en donde pinta una mano dibujando a otra mano que a su vez dibuja a la primera y así, en un proceso interminable de regreso al punto de partida en dos pasos; o como ese otro cuadro en donde unos monjes suben y suben aparentemente, por la escalera de una torre, pero regresan siempre al mismo sitio.

En su extraordinario libro, *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle*, [9], Douglas R. Hofstadter analiza magistralmente el fenómeno de bucle extraño y explica no sólo el teorema de incompletitud de Gödel, sino también todo tipo de conexiones fascinantes entre las estructuras lógicas y las estructuras abstractas en la música de Bach y los grabados de Escher, cuyas obras son profundamente matemáticas, a la vez que muy satisfactorias en términos artísticos.

Antes del teorema de Gödel, muchos matemáticos, entre ellos Hilbert (ver la sección 2), pensaban que, a diferencia del mundo real, el de las matemáticas era un mundo perfectamente lógico, en el que todo era demostrable. Gödel les arrojó un balde de agua fría con su teorema. En esencia, lo que hizo fue codificar formalmente la proposición *este enunciado no es demostrable.* De entrada podemos determinar que este enunciado es verdadero: si fuera falso, significaría que es demostrable, pero esto lo convertiría en verdadero y llegaríamos a una contradicción. Sin embargo, el hecho de que sea verdadero significa que no es demostrable, porque esto es lo que el enunciado afirma. Gödel mostró que es posible construir este enunciado usando el lenguaje de la aritmética, mostrando así que cualquier sistema axiomático que incluya la aritmética de los números enteros, es incompleto, es decir, hay proposiciones escritas en el lenguaje de tal sistema, que no se pueden demostrar en él.

La paradoja de Gödel es una paradoja verídica, es decir, no hay nada malo con la lógica; aún así, algunos matemáticos se enfadaron tanto con su conclusión, que se negaron a creer en ella, aunque no encontraron ningún problema en la demostración. La paradoja nos advierte que deberíamos limitar nuestras expectativas sobre lo que las matemáticas pueden hacer.

2 Importancia de las paradojas en la historia de la Matemática

Como el lector seguramente ha percibido, aunque algunas paradojas puedan parecer simples amenidades, otras han llevado a la matemática a crisis y a nociones muy profundas.

Los pitagóricos del siglo VI a. de C. pensaban que cualesquiera dos segmentos son conmensurables, es decir, que se puede usar cualquiera de los dos como unidad para medir el otro. Esto equivale a decir, en lenguaje más moderno, que el cociente de las longitudes de los dos segmentos siempre es un número racional. Como el proceso para medir uno de los segmentos, usando como unidad el otro, era análogo al de hallar el máximo común divisor de dos números naturales mediante el denominado posteriormente algoritmo de Euclides, y este algoritmo siempre termina en un número finito de pasos, pensaban los griegos de entonces que con los segmentos igual ocurría y así siempre podían encontrar un segmento que cabía un número entero de veces en cada uno de los dos segmentos dados, y que entonces el cociente de sus longitudes era un cociente de enteros, es decir, un número racional. La paradoja comenzó, y con ella el desconcierto y la crisis de la Escuela Pitagórica, cuando uno de los miembros de la secta, Hipaso de Metaponto, probó que la diagonal y el lado de un pentágono regular no son segmentos conmensurables. Como el cociente de sus longitudes (la diagonal entre el lado) es el número áureo, éste resultó ser el primer número irracional descubierto en la historia de la matemática. ([4], [12]). Los historiadores coinciden en considerar el descubrimiento de la inconmensurabilidad como el inicio de la decadencia de la escuela pitagórica y el inicio de la preponderancia de la geometría sobre el álgebra y la aritmética hasta entonces desarrolladas. Números tan consentidos por los pitagóricos, como la raíz cuadrada de 2 (la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado) o el número áureo (la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular), ya no eran números como antes los concebían (cocientes de enteros). Afortunadamente son construibles con regla y compás. A los números construibles con regla y compás se les puede sumar, restar, multiplicar, dividir entre sí, y sacarles raíz cuadrada, sin salirse de dicho conjunto de números. Ahora la geometría era la reina, y los números construibles con regla y compás, el nuevo campo de números con los que trabajar. Ver [5].

Las paradojas de Zenón de Elea acerca de la imposibilidad del movimiento, también produjeron la prudencia de los filósofos griegos en cuanto al uso del infinito, lo que se refleja, por ejemplo, en el tratamiento que le da Euclides al concepto de recta, viéndola más como un "segmento que puede prolongarse hacia ambos lados todo lo que se necesite" (infinito potencial), que como una recta "dada en toda su extensión" (infinito actual).

La mayor parte de las paradojas del tipo 4, aquéllas cuya veracidad es indecidible, se refieren a afirmaciones de "todos los miembros de una cierta clase de cosas, y que, o bien las afirmaciones o las cosas a las que esas afirmaciones se refieren, pertenecen a esas clases. Como vieron Poincaré y Russell, en todas estas paradojas, que llamaremos semánticas, hay una definición que contiene lo definido, y los conceptos lógicos o matemáticos están encubiertos por palabras. No ocurre lo mismo con las que dieron origen a la "crisis de los fundamentos": las paradojas lógicas. Veamos algunos ejemplos:

Cesari Burali-Forti descubrió, en 1897, que la suposición de que, en una teoría de conjuntos, la totalidad de los números ordinales forma un conjunto, lleva a una contradicción en dicha teoría. Entre las primeras paradojas lógicas figura la de Georg Cantor (1845-1918), el creador de la teoría de conjuntos. Él observó que no se puede hablar del "conjunto de todos los conjuntos", pues hacerlo llevaría a contradecir el llamado Teorema de Cantor: Dado un conjunto A de α elementos, con α un cardinal finito o infinito, el conjunto de todos los subconjuntos de A (llamado conjunto potencia de A y denotado por $\mathcal{P}(U)$) tiene un número de elementos (cardinalidad) mayor estrictamente que α (en efecto: sean U el conjunto de todos los conjuntos y $\mathcal{P}(U)$ su conjunto potencia. Si U fuera conjunto, por el Teorema de Cantor se tendría que la cardinalidad de U es menor que la de $\mathcal{P}(U)$; pero $\mathcal{P}(U)$ es un subconjunto de U, así que su cardinalidad es menor o igual que la de U, lo cual es una contradicción.)

Probablemente la más famosa de todas las paradojas es la de Bertrand Russell, publicada en 1902. Las dificultades que encierra esta paradoja son semejantes a las que encontramos en la paradoja de Grelling. Téngase en cuenta que hay colecciones de conjuntos que pueden pertencerse a sí mismos, como la colección de todos los conjuntos, que es un elemento de sí mismo. De una manera análoga, si colocamos en un armario un catálogo con tapas azules de todos los libros del armario que tengan tapas azules, el catálogo se catalogará a sí mismo. Russell propuso su paradoja del barbero para explicar su paradoja sobre los conjuntos que tendrían que ser miembros de sí mismos, la cual describimos a continuación:

Sea A el conjunto de aquellos conjuntos que no son elementos de sí mismos, esto es:

$$A = \{B \mid B \text{ es un conjunto y } B \notin B\}$$

La pregunta es: ¿$A \in A$? Si $A \in A$, entonces $A \notin A$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $A \notin A$; pero entonces $A \in A$, por definición de A, y nuevamente esto es una contradicción.

Esta paradoja produjo uno de los momentos más dramáticos en la historia de la lógica: el eminente lógico alemán Gottlob Frege acababa de concluir el segundo volumen de la obra a la que había dedicado su vida, *Los fundamentos de la aritmética*, donde creía haber desarrollado una teoría de conjuntos coherente, capaz de ser cimiento de toda la matemática. En 1902, estando el volumen en prensa, Frege recibió una carta de Russell en donde le habló de su paradoja. La teoría de conjuntos de Frege permitía la formación del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, que, como ya vimos, aunque tiene apariencia de conjunto bien formado, es contradictorio. Frege tuvo el tiempo justo de insertar un breve apéndice que comenzaba así: "Difícilmente puede un científico tener que afrontar nada más indeseable que ver hundirse los cimientos justamente cuando da fin a su obra. Tal es la situación en que me encuentro tras la carta de Mr. Bertrand Russell" [7].

Para la fundamentación de las matemáticas las paradojas semánticas no son peligrosas. De hecho quedaron explicadas cuando Bertrand Russell distinguió entre lenguaje y metalenguaje (ver la sección 3). Hemos querido dedicarles algunos renglones, porque prepararon el camino de las otras paradojas. Para estas últimas, las lógicas, las soluciones no han sido nada triviales; produjeron una oleada de discusiones entre los matemáticos, que culminó hacia 1930, y en la que se perfilaron tres tendencias: logicista, formalista e intuicionista.

El logicismo debió su nombre al hecho de pretender que los conceptos básicos de la matemática podían definirse mediante recursos puramente lógicos, con lo cual la matemática se convertía en una parte de la lógica. El caudillo de este grupo fue Bertrand Russell quien, para eliminar las paradojas, formuló y admitió el siguiente principio de exclusión de círculo vicioso: "Un elemento cuya definición implica la totalidad de los elementos de un conjunto, no puede pertenecer a este conjunto".

Puede verse el punto de partida del formalismo en los *Fundamentos de geometría* de Hilbert, que ofreció el modelo de una disciplina matemática construída según el método axiomático, "método que no sólo era perfectamente adecuado al carácter formal de la matemática, sino que eliminaba de los fundamentos matemáticos la intuición, con sus hábitos mentales y sus moldes tradicionales" [1].

El grupo intuicionista, cuyo adalid fue el holandés L. E. J. Brouwer, mantiene que ningún concepto matemático es admisible, a menos que se pueda construir. Dicho grupo no acepta el Axioma de Elección, una de cuyas consecuencias es la Paradoja de Banach-Tarski, con la que comenzamos nuestro escrito. Para los intuicionistas, se ha depositado demasiada confianza en la demostración por contradicción. Para ellos, las proposiciones no (no p) y p son diferentes (no necesariamente son lógicamente equivalentes).

3 Tolerancia

La matemática, pianista, pintora y cocinera Eugenia Cheng, en su libro "El arte de la lógica" reflexiona acerca de la tolerancia y la amplitud de criterio. Como ella señala, "es bueno aspirar a ser una persona tolerante y de criterio amplio, pero ¿significa esto que debes tolerar las opiniones intolerantes y llenas de odio? ¿Significa que tienes que mantener amplio tu criterio hacia los comportamientos más estrechos de criterio? Yo sostengo que no". Se trata quizá de una versión sutil de la paradoja de Russell, como veremos, pues para que se produzca esta paradoja, están involucradas las propiedades de la negación lógica y de la doble negación. Como en la paradoja de Russell, se puede resolver el problema de la tolerancia reduciendo el alcance de nuestro cuantificador. En lugar de pensar que tolerante significa "tolerante con todas las cosas", debería significar "tolerante con todas las cosas que no dañan a otra gente", o alguna restricción parecida.

En matemáticas hay una estructura algebraica muy importante, que es la estructura de grupo; consta de un conjunto G con una operación binaria asociativa (es decir, una función $+$ que, a cada dos elementos a y b de G, le asocia otro elemento de G, denotado por $a + b$ y tal que, para cualesquiera elementos a, b y c de G, se cumple que $a + (b + c) = (a + b) + c$)), con un elemento neutro o identidad bajo la operación $+$, denotado por 0 (es decir, para todo elemento a de G, $a + 0 = 0 + a = a$) y, para cada elemento $a \in G$ hay un inverso de a, también en G, $(-a)$ (que cumple $a + (-a) = (-a) + a = 0$). Hay muchos ejemplos de grupos; el más sencillo es el *grupo trivial*, que consta de un solo elemento, $G = \{0\}$, con la operación $+$ tal que $0 + 0 = 0$. También hay grupos muy grandes,como el conjunto de números reales con la suma usual, y grupos más sofisticados, como el grupo de isometrías del plano euclidiano (traslaciones, rotaciones, reflexiones y composiciones de todas ellas en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con la composición de funciones como operación binaria). Después del grupo trivial, quizá el grupo más sencillo sea el grupo $(\mathbb{Z}_2, +)$, formado por los enteros módulo 2 (los únicos residuos posibles al dividir los enteros entre 2, es decir, el conjunto $\{0, 1\}$), con la suma módulo 2, que se define mediante la siguiente tabla:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Esta estructura matemática aparece en muchos sitios. Por ejemplo, como la doble negación produce una afirmación ("no no tengo sed" equivale a la proposición "tengo sed"), si sumamos los "no", vemos que un "no" más otro no" da como resultado ningún "no", y obtenemos la misma tabla que la anterior, en donde 0 se sustituye por "no negar" y 1 por negar "negar", y la operación $+$ es aplicar una operación lógica (negar o no negar) tras otra. Es un "grupo isomorfo" a $(\mathbb{Z}_2, +)$:

+	no negar	negar
no negar	no negar	negar
negar	negar	no negar

De nuevo hallamos esta estructura si pensamos en la suma de números pares e impares:

+	par	impar
par	par	impar
impar	impar	par

o si pensamos en la multiplicación de números positivos y negativos:

x	positivo	negativo
positivo	positivo	negativo
negativo	negativo	positivo

¿Podría aparecer esta misma estructura de grupo si la aplicamos a la tolerancia y a la intolerancia? Como quedamos,:

- si eres tolerante con la tolerancia, entonces eres tolerante;
- si eres intolerante con la tolerancia, entonces eres intolerante;
- si eres tolerante con la intolerancia, entonces eres intolerante;
- si eres intolerante con la intolerancia, entonces eres tolerante

De nuevo esto encaja en una cuadrícula como la de $(\mathbb{Z}_2, +)$, de la siguiente manera:

x	tolerante	intolerante
tolerante	tolerante	intolerante
intolerante	intolerante	tolerante

Esto significa que no tiene uno que sentirse obligado a ser tolerante con la gente llena de odio, de prejuicios, de fanatismo, o que hiere a los demás. “Es más -dice Eugenia Cheng- creo en la necesidad de confrontarlos y hacerles ver que su comportamiento es inaceptable”.

Como hemos dicho en párrafos anteriores, las paradojas semánticas quedaron explicadas cuando Bertran Russell distinguió entre lenguaje y metalenguaje. La noción de metalenguaje fue ideada y desarrollada por el matemático polaco Alfred Tarski. Para comprenderla, analicemos por ejemplo la expresión: “esta frase es falsa”; ¿es o no falsa?. Esta forma de preguntar carece de sentido, puesto que nos lleva a una contradicción. Profundizando un poco nos damos cuenta de que lo que realmente hubiéramos querido decir es: «“esta frase es falsa” es una frase falsa», lo cual es muy distinto. Los dos adjetivos “falsa” que aparecen en la expresión, no se refieren ni significan lo mismo. Está claro que si la expresión «Esta frase es falsa» está escrita en un determinado lenguaje, la expresión «“esta frase es falsa” es una frase falsa» lo está en un lenguaje distinto: en un lenguaje que hace referencia al anterior, es decir, en un *metalenguaje*.

Eugenia Cheng también aprovecha la forma en que los matemáticos resolvieron las paradojas semánticas y la de Russell. Inventaron varios niveles:

(1) Colecciones de objetos, definidas con cuidado (mediante proposiciones lógicas, es decir, proposiciones cuyo valor de verdad sí es decidible); se les llama conjuntos.

(2) Colecciones de conjuntos; a veces se les llama conjuntos grandes o clases.

(3) Colecciones de conjuntos grandes, a los que podemos llamar conjuntos súper grandes o conglomerados.

(4) Colecciones de conjuntos súper grande, a los que podemos llamarles conjuntos súper súper grandes o carteles.

(5) ...y así sucesivamente.

En este caso, podríamos decidir que vamos a ser tolerantes con las ideas de la gente, pero no necesariamente con sus metaideas. Su intolerancia hacia las ideas de otra gente contaría como metaidea y no se requiere que la toleremos. Es importante ser consciente de que separar conceptos en niveles también se nos puede girar en contra; por ejemplo, en el caso del conocimiento compartido. Podemos establecer los niveles así:

(1) Las cosas;

(2) el conocimiento sobre las cosas;

(3) el conocimiento sobre el conocimiento sobre las cosas; podemos llamarlo metaconocimiento;

(4) el conocimiento sobre el metaconocimiento; podemos llamarlo metametaconocimiento;

(5) ...y así sucesivamente.

Supongamos por ejemplo que surgen acusaciones de abusos sexuales contra una persona famosa. Por desgracia, a veces sucede que la gente que la rodeaba reconoce que, durante años, "todo el mundo lo sabía"; pero...¿sabía todo el mundo que todo el mundo lo sabía? Esto se encuentra en el nivel del metaconocimiento. A veces hace falta metametaconocimiento, antes de que las víctimas se puedan unir para afrontar al victimario. Ésta es una de las razones por la que los agresores intentan evitar que las víctimas se comuniquen, con amenazas y abusos de poder, o incluso con un acuerdo judicial y una cláusula que obliga a guardar silencio, u otro tipo de pagos. El conocimiento compartido, y el metaconocimiento en todos los niveles, son herramientas inportantes contra este tipo de manipulación. ¿No acaso se manipula de esta manera cuando se inventa una mentira o se crea un montaje para desacreditar a un gobierno y se repite y repite en todos los medios que están en "nado sincronizado" con el medio que creó la mentira para crearle artificialmente entre la población una aparente certeza, es decir, generar una opinión a nivel de metaconocimiento? o al revés, ¿no hubo acaso un pacto de silencio entre la clase política y los medios, durante los gobiernos neoliberales para ocultar, lo más posible, toda la violencia que existía?

Eugenia Cheng concluye con esta interesante idea: “Quizá te sorprenda que pensar sobre paradojas lógicas y matemáticas puede llevar a discusiones que en apariencia están alejadas de las matemáticas, como la tolerancia y la amplitud de criterio. Pero para mí, esto es sólo parte del hecho de que el pensamiento lógico nos ayuda en todos los aspectos de la vida, incluso en nuestras interacciones personales con los seres humanos ilógicos.”

4 Agradecimientos

Los autores agradecemos al Dr. Arturo Fernández Téllez, director general de Divulgación Científica de la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) de la BUAP, por invitarnos a presentar el libro *El arte de la lógica* y darnos así la oprtunidad de disfrutarlo.

Bibliografía

[1] J. Babini. *Historia de las ideas modernas en matemáticas*, The Pan American Union, 1967.

[2] E. Cheng. *El arte de la lógica*, Libros grano de sal, SA de CV, Cdmx, México, 2019.

[3] A. Contreras, D. Herrera. *Paradojas I. Autorreferencia*, Spinor (revista de la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado), año 13, número 46, págs. 36-38

[4] A. Contreras, R. Macías, E. de Gante. *El descubrimiento de la inconmensurabilidad por Hipaso de Metaponto*, Matemáticas y sus aplicaciones 7, Fomento Editorial BUAP, 2016

[5] R. Courant, H.Robbins *¿Qué es la Matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*, Aguilar, España, 1979.

[6] J. Fresán. *El sueño de la razón*, Colección El mundo es matemático, RBA, España, 2011.

[7] M. Gardner. *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*, Biblioteca Desafíos Matemáticos, RBA, España, 2007.

[8] E. Gracián. *Un descubrimiento sin fin. El infinito matemático*, Colección El mundo es matemático, RBA, España, 2011.

[9] D. R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y Grácil bucle*, Barcelona, Tusquets, 1987.

[10] C. Ivorra. *La paradoja de Banach-Tarski*, http://www.uv.es/=ivorra

[11] E. Kasner and J. R. Newman *Mathematics and the Imagination*, Simon and Schuster, New York, 1940.

[12] B. Luque, J. Calero. *Números irracionales. Un escándalo en el corazón de las matemáticas*, colección Grandes ideas de las matemáticas, EMSE EDAPP, S.L. 2019.

[13] G. E. Piñeiro. *La esfera que quería ser infinita. Las paradojas de la medida*, Colección El mundo es matemático, RBA, España, 2014.

acontri@fcfm.buap.mx

Modelación matemática

Matemáticas y sus aplicaciones 21, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-10-1

Capítulo 3

Arrow's impossibility Theorem and the Gibbard-Satterthwaite's manipulability theorem equivalence

Bolivia Cuevas Otahola[1], Jesús Alonso Arriaga Hernández[2], Ramón Pino Pérez[3], María Monserrat Morín Castillo[1] and José Jacobo Oliveros Oliveros[2]
FCE-BUAP[1], FCFM-BUAP[2], Université d'Artois[3]

Abstract

In this work we aim to formalize the equivalence between the Arrow´s Imposibility Theorem and the Gibbard-Satterhwaite Manipulability Theorem. To demonstrate such equivalence, we delve into the proof techniques of the imposibility and manipulability theorems analyzing several versions of those theorems according to different functions, namely, social choice, social welfare functions and voting rules. Subsequently, we study the possible equivalences to set the basic notation and the corresponding Arrow's theorem version and its interrelations. On the other hand, we proceed analogously for the manipulability theorem focusing on the results obtained by D. Makinson. Finally, we demonstrate the equivalence between the impossibility and the manipulability theorems.

1 Introduction

The Social Choice Theory's subject matter is the procedures to choose candidates given the voters' preferences. Such procedures are analyzed and classified according to features, considered rational. Kelly et al. [1] present an introductory approach to this theory, which started in 1951 with the doctoral dissertation by Arrow, entitled "Social choice and individual values" [2], where the electoral procedures are standardized, transforming the voters' preferences into a social preference, which is later considering the best candidates from such social preferences, having, as a result, those candidates. Arrow [2] used the term social welfare function to refer to the relation transforming each set of individual's total pre-orders into a total preorder (voting global preferences), concluding that there does not exist any social welfare function with a minimum number of rational properties unless it is a dictatorship (in the voting context, the dictator imposes its preferences). On the other hand, there is an important aspect to take into account, regarding the voters, which Arrow did not consider, which are the manipulability situations for electoral processes, where a voter can lie to obtain a more convenient result than the one obtained instead of voting honestly. In this line of thought, the Gibbard-Satterthwaite's manipulability theorem, established that all choice functions satisfying a set of desirable properties are necessarily manipulable. We bear in mind that the proofs of both theorems display striking similarities in the demonstration techniques. For this reason, several authors disregard its equivalence, without offering any proof. Hence, in this work, we focus on determining and formalizing the equivalence between both theorems. To this aim, we need to delve into several proofs, in addition to the different versions of the Impossibility and Manipulability Theorems, according to several electoral procedures: social choice and social welfare functions and voting rules. Subsequently, we will revisit the possible equivalences. This chapter is constituted by several sections, in the following order: in the first place, we introduce the Arrow´s theorem versions to analyze its interrelations and classic proof, subsequently, we introduce different versions of the manipulability theorem and we present a classic proof of it, highlighting those carried out by Makinson et al. [3].

From the latter, we show the equivalences between the impossibility and the manipulability theorems, from the techniques shown in the preceding sections [4], with the aim to thoroughly show the equivalence between the Arrow's impossibility theorem and the Gibbard-Satterthwaite's manipulability theorem.

2 Elemental definitions

The social choice theory studies thoroughly the preferences of an individual's set over a set of determined alternatives, to provide a global preference or the best alternatives, where the main goal is to establish which choice systems are fair or appropriate, satisfying the society as a set, expressing the preferences as total pre-orders. Hence, we introduce the following definition

Definition 2.1. *A binary relation $\succcurlyeq$ over a set X is a total pre-order if:*

- $\succcurlyeq$ *is transitive* $\forall a, b, c \in X$ *if* $a \succcurlyeq b$ *and* $b \succcurlyeq c$ *then* $a \succcurlyeq c$.
- $\succcurlyeq$ *is total if* $\forall\ a, b \in X$, *holds* $a \succcurlyeq b$ *or* $b \succcurlyeq a$.

Definition 2.2. *A binary relation $\succcurlyeq$ over a set X is a linear order if:*

- $\succcurlyeq$ *is total.*
- $\succcurlyeq$ *is transitive.*
- $\succcurlyeq$ *is anti-symmetric* $\forall a, b \in X$ *if it holds* $a \succcurlyeq b$ *and* $b \succcurlyeq a$, *then* $a = b$.

Definition 2.3. *Relations associated to a total pre-order $\succcurlyeq$:*

- $a \sim b$ *if* $a \succcurlyeq b \wedge b \succcurlyeq a$.
- $a \succcurlyeq b$ *if* $a \succcurlyeq b \wedge b \not\succcurlyeq a$.

It is straightforward to notice that in Definition 2.1, the reflexivity is not included since it is derived immediately from the totality of the relation. From such result we deduce Definition 2.2, as well as Definition 2.3 which is necessary. From the latter we are able to establish the following notation: $a \sim b$ denotes that a is "indifferent to" b. We use $a \succ b$, to denote that a is "less strict than" b, and $a \succcurlyeq b$, denotes that a "is as good as" b. Likewise, PT denotes the total pre-orders set and OL the set of linear orders. We will refer to the subject study individuals set as N, the set of alternatives X, and $\mathscr{P}^*(X)$ to denote the set of alternatives (where * is used by convention to stand for the non-empty power set of X), V denotes the collection of subsets of $\mathscr{P}^*(X)$ (which we will call "agenda"), and to denote the set of the best alternatives in V according to the preferences in u, we use $f(u, V)$ where $f_u(V)$ and $f(u, V)$ are equivalent (the latter to avoid confusing considering the literature).

In Social Choice Theory, to enunciate and demonstrate the Arrow's Imposibility Theorem and the Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem, it is necessary to define social choice functions, social welfare functions, and voting rules.

Definition 2.4. *Let X denote a set of alternatives. A social choice function f is a function of the form*

$$f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X) \text{ such as } f(u,V) \subset V.$$

We establish some choice rules for the social choice functions:

Simple Majority Rule: Let $X = \{x,y\}$, $N = \{1,...,n\}$ and consider the pairs of the form (u,V) with $u \in PT^n$. We define:

$$f_u(V) = \begin{cases} \{x\}, & \text{if } |i \in N : x \succ_i y| > |i \in N : y \succ_i x|. \\ \{y\}, & \text{if } |i \in N : y \succ_i x| > |i \in N : x \succ_i y|. \\ \{x,y\}, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{1}$$

Absolute Majority Rule: Proceeding analogously as in the simple majority rule. We define:

$$f_u(V) = \begin{cases} \{x\}, & \text{if } |i \in N : x \succ_i y| > \frac{n}{2}. \\ \{y\}, & \text{if } |i \in N : y \succ_i x| > \frac{n}{2}. \\ \{x,y\}, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{2}$$

Projection Rule: Let i denote an individual, u a profile and V an agenda. Hence, without loss of generality, we define:

$$f_u(V) = max(V, \succcurlyeq_i) \tag{3}$$

Borda Rule: Let $u = \{\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \succcurlyeq_3, ..., \succcurlyeq_n\}$, for each $x \in X$, x is associated with a natural number $r_i(x)$, corresponding to the position of x in the total pre-order $\succcurlyeq_i$ where $r_i(x) m \Leftrightarrow m$ is the largest integer such as there exists $x_1, x_2, ..., x_m \in X$ with $x_j \succ_i x_{j+1}$ and $x_1 = x$. We define:

$$r_u(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x), \tag{4}$$

$$f_u^B(V) = \{x \in V : r_u(x) \geq r_u(y) \ \forall \ y \in V\}. \tag{5}$$

In addition to the previous rules, we need to provide some properties to the social choice function.

Definition 2.5. *An individual i is a dictator-fes if for all u, and for all agenda $V \in \mathscr{P}^*(X)$ and for any $x, y \in X$, with $x \succ_i y$ and for $x \in V$, then $y \notin f_u(V)$.*

Definition 2.6. *A social choice function is a dictatorship-fes if there exists and individual i which is a dictator-fes.*

Definition 2.7. *A social choice function $f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfies standard domain if:*

- *There are at least three elements in X.*
- *f is defined for all the possible pairs in $PT^n \times \mathscr{P}^*(X)$.*

Definition 2.8. *We denote by $\succcurlyeq_i \restriction_V$ the pre-order corresponding to the individual restricted to the agenda V, and $u \restriction_V$ the profile u restricted to the agenda V.*

Definition 2.9. *A social choice function $f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfies Irrelevant Alternatives Independence ($AIA - fes$) if for any profiles u, u' and every agenda $V \in \mathscr{P}^*(X)$ such as $u \restriction_V = u' \restriction_V$, it holds $f_u(V) = f_{u'}(V)$.*

Definition 2.10. *A social choice function $f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfies Transitive Explanations if for every profile u there exists a total preorder $\succcurlyeq_u$ such as for every agenda $V \in \mathscr{P}^*(X)$ it holds $f_u(V) = max(V, \succcurlyeq_u)$.*

Definition 2.11. *A social choice function $f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfies Pareto if for every profile u, every agenda $V \in \mathscr{P}^*(X)$, and for any alternatives x, y satisfying $x \in V$, if $\forall\ i \in N\ x \succ_i y$, then $y \notin f_u(V)$.*

Definition 2.12. *A social choice function $f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ is Deterministic if for every profile u and every agenda V it holds $|f_u(V)| = 1$.*

From the previous definition, we are able to introduce the notion of manipulability, which essentially manifests that an individual i which we will refer to as manipulator, obtains better results by lying over telling the truth.

Definition 2.13. *A deterministic social choice function is manipulable-fes, if there exists an individual i (manipulator), an agenda V, a profile u and a pre-order $\succcurlyeq^*$ such as $f_{u[\succcurlyeq^*/i]}(V) \succ_i f_u(V)$.*

Definition 2.14. *A social choice function is non-impositive for pairs if for any $x, y \in X$ there exists u such as $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$*

Definition 2.15. *A social choice function is optimistically manipulable if there exists an individual i (optimistic manipulator), an agenda V, a profile u and an order $\succ^*$ such as there exists $x \in f_{u[\succ^*/i]}(V)$ satisfying $x \succ_i y$ for every $y \in f_u(V)$.*

From an interpretation of Definition 2.15, we can notice straightforwardly that individual i is indeed a manipulator, and obtains a set with at least a better element than the best element in the true preferences set. Analogous to this definition, we enunciate the manipulability in a pessimistic fashion.

Definition 2.16. *A social choice function is manipulable in a pessimistic sense if there exists an individual i (pessimistic manipulator), an agenda V, a profile u and an order $\succ^*$ such as there exists $y \in f_u(V)$ satisfying $x \succ_i y$ for every $f_{u[\succ^*/i]}(V)$.*

In this case, Definition 2.16, states that the manipulator obtains a set in which the worst element of the set represents the lie, which is better than the worst element representing the true preferences. In this context, and from the definitions shown up to Definition 2.16, we need to define the Social Welfare Functions:

Definition 2.17. *A Social Welfare Function f is a function satisfying $f : PT^n \longrightarrow PT$.*

It can be easily noticed that in the social welfare functions, the input is a profile and the output the individuals' global preferences. The transition between social choice and social welfare functions is given by assigning a pre-order to the winning alternatives in the social choice function, i.e.

$$f_u(V) = \succcurlyeq_u . \tag{6}$$

Definition 2.18. *We define the top of an individual i as a pre-order as follows $top_i(\succcurlyeq) = max_i(X, \succcurlyeq)$.*

The whole path from the beginning of the chapter to Definition 2.18 sets the foundations to define social welfare functions. Hereafter, we remain to enunciate several rules and properties for social welfare functions, which are equivalent to the rules and properties enunciated for social choice functions, both in the construction, structure, and notation (nomenclature). Hence, we do not enunciate such rules and properties for social welfare functions. However, in the deterministic case, we modify the notation as follows:

Definition 2.19. *A social welfare function $f : OL^n \longrightarrow OL$ is deterministic if $f(u) = \succcurlyeq$, where $\succcurlyeq$ is a linear order.*

Definition 2.20. *A deterministic social welfare function is manipulable-fbs if there exists an individual i, a profile u and an order $\succ^*$ satisfying: $f(u) = \{x_1, x_2, ..., x_p, a, ...\}^T$, $f(u[\succ^*/i]) = \{x_1, x_2, ..., x_p, b, ...\}^T$, and $b \succ_i a$.*

Definition 2.21. *A social welfare function is non-impositive-fbs if for every $\succcurlyeq \in OL$ there exists a profile u such as $f(u) = \succcurlyeq$.*

We proceed at this point to focus on Voting Rules (highlighting that a voting rule assigns the best alternatives to a profile), for which, the definitions and construction are analogous, to those corresponding to social choice theory, giving place to the corresponding Simple Majority rule, Absolute Majority Rule and Borda Rules for voting rules. Considering in the case of voting rules since there exists a transition between them and the social welfare functions, we have that the winner for the Borda rule is given by the pre-order top which is the image of the social welfare function. Moreover, and in a similar way as in social welfare and social choice functions, we define the properties for the individual i considered as dictator-rv, voting rules-f, dictatorial voting rules-rv, and Pareto-rv.

Definition 2.22. *A voting rule f is a function satisfying $f : PT^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$.*

Definition 2.23. *A voting rule $f : PT^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfies non-imposition-rv if for every $x \in X$ there exists u such as $f(u) = \{x\}$.*

Definition 2.24. *An individual i is an inclusive dictator if for every $u \in PT^n$ holds $top_i(u) \subseteqq f(u)$.*

Definition 2.25. *A voting rule f is inclusively dictactorial if there exists and individual i which is an inclusive dictator.*

Definition 2.26. *An individual i is a weak inclusive dictator if for every profile $u \in PT^n$ it holds $top_i(u) \cap f(u) \neq \emptyset$.*

Definition 2.27. *A voting rule f is weakly inclusive dictatorial if there exists an individual i which is a weak inclusive dictator.*

Definition 2.28. *A voting rule is optimistically manipulable if there exists an individual i, a profile u, and an order $\succcurlyeq^*$ with $x \in f(u[\succ^*/i])$ such as for every $y \in f(u)$ holds $x \succ_i y$.*

3 Arrow's Imposibility Theorem

Theorem 3.1. *Let $f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ a social choice function, satisfying standard domain, transitive explanations, $IIA - fes$, and Pareto. Then f is dictatorial.*

With the aim of providing a proof of this theorem, we will enun ciate several definitions and previous results, necessary to demonstrate the Arrow's Imposibility Theorem in its version for social choice functions (Theorem 3.1). We essentially follow the technique in Salcedo et al. [5] (a similar technique is found in Kelly et al. [1]).

Definition 3.2. *A non-empty subset S of N is locally decisive for x against y, if for every profile $u = (\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, ..., \succcurlyeq_n)$ and every agenda V holds $x \succ_i y$ for every $i \in S$; $y \succ_k x$ for every $k \in N \backslash S$; with $x \in V$. Then $y \in f_u(V)$.*

In order to denote that S is locally decisive for x against y, we use xD_sy. From Definition 3.2, it can be noticed that if f satisfies Pareto, then N is locally decisive.

Definition 3.3. *A non-empty subset S of N is globally decisive for x against y if for every profile $u = (\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, ..., \succcurlyeq_n)$ and every agenda V holds $x \succ_i y$ for every $i \in S$; and $x \in V$. Then $y \notin f_u(V)$.*

To denote that S is globally decisive for x against y, we use xD^*_Sy. If xD^*_Sy for any pair of alternatives x, y, we will simply refer to S as decisive. It is straightforward to deduce that if f satisfies Pareto, then N is globally decisive.

Lemma 3.4. *Let f be a social choice function satisfying transitive explanations, IIA and Pareto then $x \succcurlyeq_u y$ if and only if $x \in f_u(\{x, y\})$.*

Proof. Since f satisfies Transitive Explanations it follows:

$$f_u(\{x,y\}) = max(\{x,y\}, \succcurlyeq_u).$$

Hence, $x \succcurlyeq_u y$ if and only if $x \in f_u(\{x,y\})$. □

Lemma 3.5. *First contagion result.* *Let f be a social choice function satisfying Standard Domain, Transitive Explanations, IIA and Pareto. Then, if $xD_Sy \Rightarrow xD^*_Sz$ for every $z \in X$ with $z \neq x$ and $z \neq y$.*

Proof. Let $S \subseteq N, S \neq \emptyset$, with $x, y \in X$, satisfying $x \neq y$ such as xD_Sy. Then, since f satisfies Standard Domain, we can consider $z \in Z$ such as $z \neq x$ and $z \neq y$.

On the other hand, we want to obtain xD^*_Sz, thus, we consider a profile u and an agenda $V \in \mathscr{P}^*(X)$ such as $x \succ_i z$ for every $i \in S$ for $x \in V$. Hence,

$$u\restriction_{\{x,z\}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}}_{S} & \underbrace{\qquad}_{N\backslash S} \end{pmatrix} \tag{7}$$

In order to show that $z \in f_u(V)$, we consider $u' = (\succcurlyeq'_1, \succcurlyeq'_2, ..., \succcurlyeq'_n)$ such as it simultaneously holds that $u\restriction_{\{x,y\}} = u'\restriction_{\{x,y\}}$; $x \succ_i^{'} y \succ_i^{'} z$ for every $i \in S$, and $y \succ_k^{'} z \wedge y \succ_k^{'} x$ for each $k \in N\backslash S$. Thus,

$$u\restriction \{x,y,z\} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \wedge z \\ \underbrace{z}_{S} & \underbrace{\text{as in } u}_{N\backslash S} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Then, from Pareto $z \notin f_{u'}(\{y,z\})$, and from Transitive Explanations we have $y \succ_{u'} z$. Since xD_Sy it holds that $y \notin f_{u'}(\{x,y\})$ (from Transitive Explanations), and $x \succ_{u'} y$, hence, by transitivity $z \succ_{u'} z$ is equivalent to $z \notin f_{u'}(\{x,z\})$. Then, since $u\restriction_{\{x,y\}} = u'\restriction_{\{x,y\}}$ and since f satisfies IIA, we have $f_u(\{y,z\}) = f_{u'}(\{y,z\})$. Therefore, it follows that $z \notin f_u(\{x,z\})$, i.e. $x \succ_u z$. From the latter it can be deduced straightforwardly that $z \notin max(V, \succcurlyeq_u)$, thus $z \notin f_u(V)$. □

Lemma 3.6. ***Second contagion result.*** *Let f be a social choice function satisfying Standard Domain, Transitive Explanations, IIA and Pareto. If it holds xD_Sy, then wD^*_Sy for any $w{\in}X$ with $w{\neq}x$ and $w{\neq}y$.*

Proof. Let $S{\subseteq}N, S{\neq}\emptyset$ with $x, y{\in}X$ satisfying $x{\neq}y$ such as xD_Sy. We consider $w{\in}X$ such as $w{\neq}x$ and $w{\neq}y$, to show wD^*_Sy. We consider a profile u and an agenda $V{\in}\mathscr{P}^*(X)$ such as $w \succ_i y$ for every $i{\in}S$ and $w{\in}V$ to obtain,

$$u\restriction_{\{y,w\}} = \left(\begin{array}{cc} w & \\ \underbrace{y}_{S} & \underbrace{\quad}_{N\setminus S} \end{array} \right). \tag{9}$$

In order to show that $y{\notin}f_u(V)$, we consider $u' = (\succcurlyeq'_1, \succcurlyeq'_2, ..., \succcurlyeq'_n)$ such as $u\restriction_{\{y,w\}} = u'\restriction_{\{y,w\}}$ and $w \succ^{'}_i x \succ^{'}_i y$ for every $i{\in}S$, and $y \succ^{'}_k x \wedge w \succ^{'}_k x$ for every $k{\in}N\setminus S$. Hence,

$$u\restriction\{x,y,z\} = \left(\begin{array}{cc} w & y{\wedge}w \\ x & \text{as in u} \\ \underbrace{y}_{S} & \underbrace{x}_{N\setminus S} \end{array} \right). \tag{10}$$

Subsequently, by Pareto $x{\notin}f_{u'}(\{x,w\})$ and $w \succ_{u'} x$. Since xD_Sy then $y{\notin}f_{u'}(\{x,y\})$. Therefore $x \succ_{u'} y$. By virtue of Transitive Explanations we have $w \succ_{u'} y$, hence $y{\notin}f_{u'}(\{y,w\})$. Then, since $f_u(\{y,w\}) = f_{u'}(\{y,w\})$ it follows straightforwardly that $y{\notin}max(V, \succcurlyeq_u)$ and, in consequence, we obtain the desired result $y{\notin}f_u(V)$. □

Lemma 3.7. ***General Contagion Theorem.*** *Let f be a social choice function satisfying Standard Domain, Transitive Explanations, IIA and Pareto. Hence, if it satisfies xD_Sy for given $x, y{\in}X$, then wD^*_Sz for any pair w, z with $w{\neq}z$, which means S is decisive.*

Proof. Let $S{\subseteq}N, S{\neq}\emptyset$ with $x, y{\in}X$ satisfying $x{\neq}y$ such as xD_Sy. Assumption 1: wD^*_Sz for any $w, z \in \{x, y, t\}$ and for any $t{\in}X$ with $t{\neq}x \ \wedge \ t{\neq}y$, without loss of generality we can consider $t{\in}X$ such as $t{\neq}x \ \wedge \ t{\neq}y$. Subsequently, we analyze the agenda $\{x, y, t\} \subseteq X$. Thus by virtue of Lemma 3.5 it follows that xD^*_St, yD^*_Sx and tD^*_Sy, whereas by virtue of Lemma 3.6 we have yD^*_St, tD^*_Sx and xD^*_Sy, which proves the previous assumption.

If we consider $w, x{\in}X$ with $w{\neq}z$ and $\{w, z\} \bigcap \{x, y\} = \emptyset$, since $xD_S z$ and applying Assumption 1 to the set $\{x, z, w\}$ we finally obtain $wD^*_S z$. $\square$

From the latter results we are able to prove Theorem 3.1; hence, we have:
Proof of the Arrow's Impossibility Theorem (Theorem 3.1)

Proof. Following the hypothesis and since f satisfies Pareto, we have that N is decisive. Thus, we consider the set $\mathscr{I} := \{M{\subseteq}N : M \textit{ is decisive}\}$, where it can be noticed straighforwardly that $\mathscr{I}{\neq}\emptyset$ since $N{\in}\mathscr{I}$. Subsequently, we can consider $S{\in}\mathscr{I}$ such as $|S|{\leq}|M|$ for every $M{\in}\mathscr{I}$, i.e. S has a minimal size. Hence, if $|S| = 1$, then $S = \{i\}$ for a given individual $i{\in}N$, a dictator. Now, we aim to show that indeed there exists a dictator for which we can proceed by contradiction. Hence, $|S|{\geq}2$, and without loss of generality we can consider $i{\in}S$ and $S\backslash\{i\} \subseteq N$. Subsequently, given that $|S|{\geq}2$ and using the hypothesis $S\backslash\{i\}{\neq}\emptyset$. Since f satisfies Standard Domain, we can consider the agenda $V = \{x, y, z\}$ and the profile u such as,

$$u{\restriction}\{x, y, z\} = \left(\begin{array}{ccc} x & y & z \\ y & z & x \\ \underbrace{z}_{\{i\}} & \underbrace{x}_{S\backslash\{i\}} & \underbrace{y}_{N\backslash S} \end{array} \right). \tag{11}$$

Subsequently, we focus on $f_u(\{y, z\})$ and consider the following: since S is decisive, then $z{\neq}f_u(\{y, z\})$, it follows that $y \succ_u z$. Moreover, focusing on $x \succcurlyeq_u y$, by contradiction, we can assume that it holds that $y \succ_u x$, i.e. $x{\neq}f_u(\{y, z\})$ and we notice that:

$$u{\restriction}\{x, y\} = \left(\begin{array}{ccc} x & y & x \\ \underbrace{y}_{\{i\}} & \underbrace{x}_{S\backslash\{i\}} & \underbrace{y}_{N\backslash S} \end{array} \right). \tag{12}$$

Since f satisfies Transitive Explanations, it follows that if $x{\neq}f_u(\{x, y\})$, then $x{\neq}f_u(V)$ for every agenda V such as $y{\in}V$. Indeed, $y \succ_u x$, and similarly, by Transitive Explanations $f_u\,(V) = max(V, \succcurlyeq_u)$, from which it follows that if $y{\in}V$ then $x{\neq}f_u(V)$. Hence, since $x \succ_k y$ for every $k{\in}\,(N\backslash S) \cup \{i\}\ \wedge y \succ_k x$ (for every $j{\in}\ S\backslash\ \{i\}$). On the other hand, by the hypothesis it holds $x{\neq}f_u(\{x, y\})$, and by Transitive Explanations it follows that for every agenda with $x{\in}V$ and $x{\neq}max(V, \succcurlyeq_u)$, then $yD_{\ S\backslash\{i\}}y$.

By Lemma 3.7 it follows that $S\setminus\{i\}$ is decisive, which contradicts the minimal size of S, i.e. $|S|\leq|M|$ for every $M\in\mathscr{I}$, thus $x \not\succ_u y$. On the other hand, since $y \succ_u z \wedge x \not\succ_u y$ then $x \succ_u z$, which means that $z\neq f_u(\{x,z\})$, and noticing that:

$$u\restriction\{x,z\} = \left(\underbrace{\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}}_{\{i\}} \quad \underbrace{\begin{matrix} z \\ x \end{matrix}}_{S\setminus\{i\}} \quad \underbrace{\begin{matrix} z \\ x \end{matrix}}_{N\setminus S} \right). \tag{13}$$

Since $z \succ_k x$ for every $k\in N\setminus\{i\} \wedge x \succ_i z$ $z\neq f_u(\{x,z\})$, then $xD_{\{i\}}z$. By virtue of Lemma 3.7 it follows that $\{i\}$ is decisive, which contradicts the minimality of S. Hence, $|S| = 1$, which means there exists a dictator. □

Moreover, we bear in mind that Theorem 3.8 is a version of the Arrow's Imposibility Theorem (Theorem 3.1) for Social Welfare Functions.

Theorem 3.8. ***Version for social welfare functions.*** *Let f be a social welfare functions of the form $f : PT^n \to PT$ which satisfies simultaneously Pareto-fbs and Independence of Irrelevant Alternatives IIA-fbs. Hence, f is dictatorial-fbs.*

As a consequence of Theorem 3.8, it is possible to build an equivalence between Theorem 3.1 for social choice functions and social welfare functions. Hence, hereinafter, we present several results to show the equivalence between these versions of the Arrow's Theorem.

Definition 3.9. *A social choice function $f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfies Independence of Irrelevant Alternatives by pairs, if for any profiles u, u' and any pair $x, y\in X$ with $u\restriction_{\{x,y\}} = u'\restriction_{\{x,y\}}$ where $y\notin f_u(\{x,y\})$ then $y\notin f_{u'}(\{x,y\})$.*

Lemma 3.10. *Under the hypothesis of Transitive Explanations it follows that Independence of Irrelevance Alternatives for social choice functions is equivalent to Independence of Irrelevance Alternatives by pairs.*

Proof. We proceed to prove such equivalence.
($\Rightarrow$) Since f satisfies IIA-fes for any profiles u and u' and for every agenda V with $u\restriction_V = u'\restriction_V$ where $y\notin f_{u'}(V)$. In particular, for agendas of the form $V = \{x,y\}$, if $y\notin f_u(\{x,y\})$ then $y\notin f_{u'}(\{x,y\})$.

($\Leftarrow$) Without loss of generality, we can assume that $u\restriction_V = u'\restriction_V$. Hence, by virtue of IIA by pairs, if $x \in f_u(V)$ then $x \in f_{u'}(V)$. Thus, proceeding by contradiction, we assume that $x \notin f_{u'}(V)$. Since f satisfies Transitive Explanations, by definition it follows that $x \in max(V, \succsim_u)$. Moreover, since $x \notin f_{u'}(V)$, implying that $x \notin max(V, \succsim_{u'})$ which means there exists $y \in V$ such as $y \succ_{u'} x$. Therefore, by IIA by pairs, it follows that, if $x \notin f_{u'}(\{x,y\})$ then $x \notin f_u(\{x,y\})$. However, by hypothesis $x \in f_u(V)$ for every agenda V, which is a contradiction. □

Lemma 3.11. *Let $f : PT^n \to PT$ be a social welfare function and $g_f : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ a social choice function associated with f through the relation $g_f(u,V) = max(V, \succsim_u)$ where $f(u) = \succsim_u$. If f satisfies Pareto-fbs and IIA-fbs then g_f satisfies Transitive Explanations, IIA-fes and Pareto-fes.*

Proof. By definition g_f satisfies Transitive Explanations. We will show that g_f satisfies Pareto-fes, for which we consider a profile u such as $x \succ_i y$ for every i, where it follows that $x \succ_u y$ by virtue of f satisfying Pareto-fbs. Hence, for every agenda V with $x \in V$ it follows that $y \notin g_f(u,V)$ which shows that g_f satisfies Pareto-fes. Finally, as an immediate consequence of Lemma 3.10 g_f satisfies IIA-fes. □

Corollary 3.12. *g_f is Dictatorial-fes.*

Proof. Since g_f satisfies the hypothesis of the Theorem 3.1 (Arrow) it follows that g_f is Dictatorial-fes. □

Lemma 3.13. *If g_f is dictatorial-fes then f is dictatorial-fbs.*

Proof. In the first place, we consider a dictator for g_f, i.e. an individual i such as $x \succ_i y$ then $y \notin f_u(\{x,y\})$ and, since $f_u(\{x,y\}) \subset \{x,y\}$ it follows that $x \in f_u(\{x,y\})$.

Hence, by Lemma 3.4 since $x \in f_u(\{x,y\})$, it follows that $x \succ_i y$. Thus, f is Dictatorial-fbs. □

Lemma 3.14. *Let $g : PT^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a social choice function and $f_g : PT^n \longrightarrow PT$ a social welfare function associated with g by means of the relation $f_g(u) = \succsim_u$, where $\succsim_u$ is such as $g_u(V) = max(v, \succsim_u)$. If g satisfies Pareto-fes, IIA-fes, and Transitive Explanations, then f_g satisfies IIA-fbs and Pareto-fbs.*

Proof. In order to show that f_g saisfies Pareto-fbs, we consider a profile u such as $x \succ_i y$ for every i. Hence, since g satisfies Pareto-fes, it follows that $y \notin max(\{x, y\}, \succcurlyeq_u)$ matches $y \notin g_u(V)$ and it follows that $x \in max(\{x, y\}, \succcurlyeq_u)$. In consequence $x \succ_u y$. Hence, there remains only to show that f_g satisfies IIA-fbs. To this aim, we consider u and u' two profiles such as $u\restriction_{\{x,y\}} = u'\restriction_{\{x,y\}}$ and we consider $f_g(u) = \succcurlyeq_u$ and $f_g(u') = \succcurlyeq_{u'}$, since we aim to show that $x \succ_u y$ if and only if $x \succ_{u'} y$.
Since g by hypothesis satisfies IIA-fes, it follows that $g_u(\{x, y\}) = g_{u'}(\{x, y\})$. Thus, if $x \in g_u(\{x, y\})$ then $x \succ_u y$ by virtue of Lemma 3.4 and furthermore, if $x \in g_{u'}(\{x, y\})$ then $x \succ_{u'} y$. Hence, it follows that $x \succ_u y$ if and only if $x \succ_{u'} y$. □

Corollary 3.15. *f_G is Dictatorial-fbs.*

Proof. Since f_g satisfies the hypothesis in Theorem 3.1 (Arrow) it follows that f_g is Dictatorial-fbs. □

Lemma 3.16. *If f_g is Dictatorial-fbs then g is Dictatorial-fes.*

Proof. We consider a dictator for f_g, i.e. an individual such as $x \succ_i y$ then $x \succ_u y$. By virtue of Lemma 3.4 it follows that $y \notin max(\{x, y\}, \succcurlyeq_u)$, where $y \notin g_u(\{x, y\})$. Hence g is Dictatorial-fes. □

By virtue of the previous results and without loss of generality, we can build a version of the Arrow's Impossibility Theorem (Theorem 3.1) for voting rules, as we will see hereinafter.

Definition 3.17. ***(MIIA for deterministic voting rules).*** *For any profiles $u, u' \in OL^n$ and $a, b \in X$ with $a \neq b$, $a = f(u)$ and $b = f(u')$, there exists $i \in N$ such as $a \succ_i b$ and $a \succ'_i b$.*

Theorem 3.18. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic voting rule satisfying MIIA and Pareto-rv, then f is Dictatorial-rv.*

At this point, we focus on proving the Gibbard-Sattertwaite's Manipulabity Theorem. Hence

Theorem 3.19. ***(Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow X$ be a deterministic voting rule satisfying non-manipulability and Pareto-rv, then f is a voting rule Dictatorial-rv.*

In order to prove Theorem 3.19 we need several tools we will define hereinafter. Hence, in the following we will assume that f is a deterministic voting rules along with linear orders, and will denote them by $f : OL^n \longrightarrow X$ where OL is a lineal order and X is a set of alternatives.

Definition 3.20. *Let $a, b \in X$ for $a \neq b$ and $S \subseteq N$. We define that S can use a to block b, denoting it by aSb, if for every profile u in which $a \succ_i b$ for every $i \in S$ it follows that $f(u) \neq b$. Thus, the set S is an oligarchy if aSb for any $a, b \in X$.*

We bear in mind that an oligarchy of a single element corresponds to the notion of a dictator. We also notice that this notion is similar to the definition of decisive set in the proof of Theorem 3.1 (Arrow's Theorem).

Definition 3.21. *Let $x, y \in X$, it follows that $x \gg y$ if and only if $x \succ y$ and there does not exist z such as $x \succ z$ and $z \succ y$.*

Definition 3.22. *Let $\succcurlyeq$ be a linear order. If $b \gg c$, we define $\succcurlyeq^{b,c}$ such as $x \succ^{b,c} y \Leftrightarrow x \succ y$ if $\{x, y\} \neq \{a, b\}$, and $c \succ^{b,c} b$. The only difference between the orders $\succ$ and $\succ^{b,c}$ is the relation between b and c. Moreover, the order $\succ^{b,c}$ is obtained from $\succ$ by means of a flip between b and c.*

Definition 3.23. ***(Downward monotonicity for deterministic voting rules).*** *For each profile $u \in OL^n$ with $f(u) = a$, $b \gg_i c$ and $b \neq a$ it follows that $f\big(u\big[\succcurlyeq^{b,c}/i\big]\big) = a$.*

In other words (regarding Definition 3.23) downward monotonicity is interpreted as a loosing alternative moving downwards in the order or given individual i, without affecting the result.

Definition 3.24. *A voting rule $f : OL^n \longrightarrow X$ is manipulable if there exists a profile u, an individual i and a linear order $\succ^*$ such as $u' = u[\succ^*/i]$ and it follows that $f(u') \succ_i f(u)$.*

Lemma 3.25. *Every non-manipulable deterministic voting rule satisfies downward monotonicity.*

Proof. We will suppose that downward monotonicity fails. Hence, there exist a profile u, alternatives $x, y, v, w \in X$ and an individual i such as $y \neq W$, $v \neq W$,

$y \gg_i x$ with $f(u) = w$ and $f(u') = v$ for $u' = u[\succcurlyeq_i^{y,x}/i]$ and $u = u'[\succcurlyeq_i'^{y,x}/i]$. We will proceed by cases:

Case 1: $v \succ_i w$ in the profile u. We bear in mind that by hypothesis $f(u) = w$, and $f(u') = v$, and since $v \succ_i w$ in u, which represents clearly a manipulation situation since the individual i obtains better results lying than telling the truth.

Case 2: $w \succ_i' v$ in profile u'. We consider $a \succcurlyeq_i'$ as the true preferences of i. By hypothesis it follows that $f(u') = v$ and $f(u'[\succcurlyeq_i'^{y,x}/i]) = w$, and since $w \succ_i' v$ in u', which represents a manipulation situation since the individual i obtains better results lying.

Case 3: $w \succ_i v$ in profile u' and $v \succ_i' w$ in profile u'. We notice in the first place that it is necessary that $v = x$ and $w = y$ hold, which contradicts the hypothesis $y \neq w$.

Hence, every voting rule that is not manipulable satisfies downward monotonicity. □

Given the importance of the obtained result in Lemma 3.25, we will use $u[\downarrow_c]$ to denote the profile in which c is placed at the bottom in each individual's preference, i.e., $u|_{\{x,y\}} = u[\downarrow_c]|_{\{x,y\}}$ if $c \notin \{x, y\}$ and for every $x \neq c$ it follows that $x \succ_i c$ for every individual i.

Lemma 3.26. *Let $f : OL^n \longrightarrow X$ be a voting rule satisfying downward monotonicity such as $f(u) = x$. Hence, for any individual $i \in N$ and any linear order $\succcurlyeq$ such as $x \succ x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_{m-2}$ it follows that $f(u[\succcurlyeq/i]) = x$.*

Proof. By virtue of downward monotonicity it follows that if x_{m-2} is not located at the bottom, then it can move downwards without affecting the result. Hence, iterating this process, the order $\succcurlyeq_i$ can be changed until x_{m-1} reaches the bottom, without affecting the result. We apply such a procedure to move in this case x_{m-2} to the penultimate place without affecting the result. Thus, iterating the process as described, we obtain the result we aim to show. □

Lemma 3.27. *Let $f : OL^n \longrightarrow X$ be a voting rule satisfying downward monotonicity such as $f(u) = x$, then for any individual $i \in N$ for which the linear order $y \succ_i x$ and any linear order $\succcurlyeq$ such as $y \succ x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_{m-2}$ it follows that $f(u[\succcurlyeq/i]) = x$. (Its proof follows from Lemma 3.27).*

Proof. The proof is similar to that in 3.26. □

Lemma 3.28. *Let $f : OL^n \longrightarrow X$ be a deterministic voting rule satisfying downward monotonicity, and Pareto, $S \subseteq N$ where $a, b \in X$ and $a \neq b$. Hence aSb if there exists a profile u such as $a \succ_i b$ for every $i \in S$, $b \succ_j a$ for every $j \in N \backslash S$, and $f(u) = a$.*

Proof. In order to prove this theorem, we need to consider a profile u' such as aSb fails, i.e., for every $i \in S$, $a \succ_i' b$ and $f(u') = b$. Hence, for u' it follows that $a \succ_j' b$ for some $j \in N \backslash S$.
Without loss of generality we can build $I = \left\{ j \in N \backslash S \ : \ a \succ_j' b \right\}$. Thus, we define a profile u'' for $i \in N \backslash I$ such as $\succcurlyeq_i'' = \succcurlyeq_i'$ and for every $j \in I$, $\succcurlyeq_i'' = \succcurlyeq_i'^{a,b}$. Since f satisfies downward monotonicity and by virtue of Lemma 3.27 it can be verified that $f(u'') = f\Big(u'\Big[\succcurlyeq_i'^{a,b}/i\Big]\Big) = b$ for every $j \in I$. We bear in mind that $u'' = u$ where it follows that $f(u) = f(u'') = a$, and as a consequence $a = f(u') = b$. However, $a \neq b$, which contradicts that f is a deterministic voting rule. Thus, aSb. □

Lemma 3.29. *Let $f : OL^n \longrightarrow X$ be a deterministic voting rule satisfying downward monotonicity and Pareto, $S \subseteq N$ with $a, b, c \in X$ two by two different alternatives. If aSb and $S = T \cup U$ for $T \cap U = \emptyset$, then aTc or cUb.*

Proof. We will consider a profile u such as $a \succ_i b \succ_i c$ for every $i \in T$, $c \succ_j a \succ_j b$ for every $j \in U$, and $b \succ_i c \succ_i a$ for every $k \in N \backslash S$. Hence, u is as follows,

$$u \restriction \{x, y\} = \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ b & c & a \\ c & b & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{\quad}_{T} & \underbrace{\quad}_{U} & \underbrace{\quad}_{N \backslash S} \end{array} \right). \tag{14}$$

On the other hand, since $a \succ_i x$, $b \succ_i x$ and $c \succ_i x$ for every $i \in N$ and for every $x \in X \backslash \{a, b, c\}$, and by Pareto it follows that $f(u) \notin X \backslash \{a, b, c\}$, implying that $f(u) \in \{a, b, c\}$. By hypothesis, we have that aSb, implying straightforwardly that $f(u) \neq b$, giving place to the possibilities $f(u) = a$ or $f(u) = c$.
Thus, if $f(u) = a$, by Lemma 3.28 (Existence Lemma) it follows that aTc since for every $i \in T$ it follows that $a \succ_i c$ and for every $j \in N \backslash T$ we have that $c \succ_i a$. Similarly, if $f(u) = c$, by Lemma 3.28 it follows that cUb since for every $j \in U$ implying that $c \succ_i b$ and for every $i \in N \backslash U$ it follows that $b \succ_i c$. □

Definition 3.30. *A voting rule $f : PT^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfies unanimity if for every profile u and $i \in N$ with $top_i(u) = \{x\}$, then $f(u) = \{x\}$.*

Proposition 3.31. *Every voting rule $f : PT^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfying Pareto satisfies Unanimity [6, 7, 8, 9].*

Lemma 3.32. *Let $S \subseteq N$, for none $a, b \in X$ it follows that $a\emptyset b$ if Pareto holds [1, 10].*

Lemma 3.33. *Let $S \subseteq N$ and $a, b, c \in X$ two by two different alternatives. If aSb, then aSc and cSb [1, 11].*

Lemma 3.34. *Let $S \subseteq N$ such as aSb for a given pair $a, b \in X$, then S is an Oligarchy [1, 11, 12].*

Lemma 3.35. *If $S \subseteq N$ is an Oligarchy and $S = T \cup U$ for $T \cap U = \emptyset$, then T or U is an Oligarchy [1, 13].*

Lemma 3.36. *Let $f : OL^n \longrightarrow X$ be a deterministic voting rule satisfying Pareto. If S is an Oligarchy, then there exists $i \in S$ such as $\{i\}$ is an Oligarchy. In particular, since N is an Oligarchy (by Pareto), then there exists a voter which is a dictator for f [1, 14, 15].*

Hence, from the previous results, it follows that Theorem 3.19 (Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem) is a corollary of Lemma 3.36. Therefore, these results also allow us to enunciate another version of Theorem 3.19, for example, in the following results, we will provide a version for voting rules.

Theorem 3.37. *A voting rule $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ is non-Manipulable, non-Impositive and deterministic if and only if it is Dictatorial.*

Proof. ($\Leftarrow$) We will show that if f is Dictatorial then f is non-Manipulable, deterministic and non-Impositive. In the first place we will show that f is deterministic. By hypothesis f is dictatorial, hence, we assume that i is a dictator. By definition it follows that $f(u) = top_i(u)$ and since the domain of f is constituted by linear orders, it follows that $|top_i(u)| = 1$ where $|f(u)| = 1$, thus f is deterministic.

To show that f is non-manipulable, we consider a dictator i and we assume that f is manipulable with j a manipulator and $\succcurlyeq^*$ manipulation situation, where we can highlight to possibilities $j = i$ and $j \neq i$. Hence, if

$j = i$, since i is a dictator it follows that $f(u[\succcurlyeq^*/j]) \succ_j f(u)$ which is a contradiction given that, clearly $f(u[\succcurlyeq^*/j]) = top_i(u)$. For $j \neq i$, we notice that $f(u[\succcurlyeq^*/j]) = max(X, \succcurlyeq^*)$ and $f(u) = max(X, \succcurlyeq_i)$. Hence, assuming that $f(u[\succcurlyeq^*/i]) = b$, given the existence of a manipulation situation, it follows that $f(u[\succcurlyeq^*/i]) = \succ_i f(u)$ or similarly $b \succ_i max(X, \succcurlyeq_i)$ which is a contradiction, and as consequence f is non-manipulable.
On the other hand, by hypothesis, it follows that f is Dictatorial. Hence, we can assume that i is a Dictator. By definition $f(u) = top_i(u)$ and since the domain of f is constituted by linear orders, it follows that $f(u) = \{x\}$ with $x \in X$. Thus, we set $f(u) = top_i(u)$ for each alternative in X, there are different profiles for each winning alternative. The latter implies that, for each $x \in X$, there exists a profile u such as $f(u) = \{x\}$. Therefore, f is non-impositive.
($\Rightarrow$) In this case, we will show that if f is non-manipulable, non-impositive, and deterministic, then f is dictatorial. To this aim, we will prove Pareto, to be able to apply Theorem 3.19.
By hypothesis, f is non-impositive, which implies we can assume by contradiction that Pareto does not hold, i.e., there exists a profile u such as $a \succ_i b$ for every $i \in N$. However, $f(u) = b$. Furthermore, since f is non-impositive, there exists a profile u' such as $f(u') = a$. Hence, by virtue of Lemma 3.26, and from u' we obtain a profile u'' of the form,

$$u \restriction \{x, y\} = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ b & b & \cdots & b \\ x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & x_{n-2} & x_{n-2} & x_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

where $f(u'') = a$. Applying another part of Lemma 3.27, from u we obtain a profile u''' equal to u'' but with $f(u''') = b$, which contradicts the hypothesis that f is deterministic, since a profile can only have one image. Therefore, by Theorem 3.19 it follows that f is Dictatorial. □

Proposition 3.38. *Every voting rule $f : PT^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfying unanimity also satisfies non-imposition.*

Theorem 3.39. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule satisfying non-manipulability and non-imposition, then f is a dictatorial voting rule.*

By virtue of the previous results, we have the required tools to obtain the following result, enunciated and proved by Jhon Duggan and Thomas Schwartz in 1993 and formally published in 2000 [16].

Theorem 3.40. ***(Version for non-deterministic voting rules and non-linear orders).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule satisfying non-manipulability either in a pessimistic or optimistic way, and non-imposition. Then f is a dictatorial weakly inclusive voting rule.*

Theorem 3.40 is very important. Indeed, other versions of such theorem are obtained from Theorem 3.40. We mention some of the most relevant versions hereinafter.

Theorem 3.41. ***(Version of Theorem 3.19 for social welfare functions).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow PT$ be a deterministic social welfare function satisfying non-manipulability-fbs and non-imposition by pairs, then f is dictatorial-fbs [16].*

Theorem 3.42. ***(Version of Theorem 3.19 for deterministic social choice functions and non-linear orders).*** *Let $f : OL^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic social choice function satisfying non-manipulability-fes and non-imposition by pairs, then f is dictatorial-fes [4, 17].*

Theorem 3.43. ***(Version of Theorem 3.19 for non-deterministic social choice functions and and non-linear orders).*** *Let $f : OL^n \times \mathscr{P}^*(X) \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a non-deterministic social choice function satisfying non-manipulability-fes either in a optimistic or pessimistic way, and non-impositive by pairs, then f is dictatorial-fes [4, 17, 18].*

4 Equivalence between Theorem 3.1 and Theorem 3.19.

In this section, we accomplish the main goal of this chapter, proving the equivalence between Theorem 3.1 (Arrow's Impossibility Theorem) and Theorem 3.19 (Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem). As a first step, we will enunciate special versions of the theorems by means of the previous results, as well as other useful results to reach our goal.

Theorem 4.1. ***(Arrow's Special Theorem, Theorem 3.1).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic voting rule satisfying Pareto and MIIA, then f has a dictator [2, 19].*

Theorem 4.2. ***(Gibbard-Satterthwaite's Special Theorem, Theorem 3.19).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic non-impositive and non-manipulable voting rule, then f has a dictator [20, 18].*

By means of Theorems 4.1 and 4.2 we obtain the following version of Theorem 3.1:

Theorem 4.3. ***(Second Arrow's Special Theorem, Theorem 3.1).*** *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule satisfying Pareto, IIA and downward monotonicity, then f has a dictator [21].*

Since the conclusion is the same in both Theorems 4.2 and 4.3, it will suffice to show that the premises are equivalent. In order to achieve this, we will enunciate the following results:

Lemma 4.4. *Every voting rule $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfying IIA and Pareto is deterministic [4, 5].*

We will see that in the deterministic case, the definition of MIIA is equivalent to IIA along with downward monotonicity (both hold).

Proposition 4.5. *Let f be a deterministic voting rule satisfying MIIA, then f satisfies downward monotonicity.*

Proof. Proceeding by contradiction, we notice that it is possible to assume that MIIA holds, but downward monotonicity does not hold. Hence, it follows that $f(u) = a$ with $b{\neq}a$, $b{\gg_i}c$, furthermore, $f(u') = d$ with $d{\neq}a$ and $u' = u\left[\succ_i^{b,c}/i\right]$. Thus, since f satisfies MIIA, it follows that there is an individual k such as $a{\succ_k}d$ and $d{\succ'_k}a$.
Subsequently, the only one individual for which the preferences change is individual i. Moreover, the only one change in the linear orders $\succ_i$ and $\succ_i^{b,c}$ is the flip between b and c. Hence, since $a{\neq}b$, if $a{\succ_i}d$, it necessarily follows that $a{\succ_i^{b,c}}d$. Thus, MIIA cannot hold, which is a contradiction. □

Proposition 4.6. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic voting rule satisfying Pareto, then MIIA is equivalent to IIA with downward monotonicity.*

Proof. We will show in the first place that MIIA implies IIA and downward monotonicity. Hence, let us suppose that f satisfies MIIA. By Proposition 4.5 f satisfies downward monotonicity. For the IIA case, we will assume that $u|_{\{x,y\}} = u'|_{\{x,y\}}$, $f(u) = \{a\}$. Hence, by contradiction, if f is deterministic it follows that $f(u') = \{b\}$ and by MIIA implies that there exists i such as $a \succ_i b$ and $a \succ_i' b$, which is a contradiction.
In the case that downward monotonicity and IIA implies MIIA, we will suppose that IIA and downward monotonicity hold, and assume that $f(u) = \{a\}$ and $f(u') = \{b\}$ with $a \neq b$. Hence, proceeding by contradiction, let $A = \{k : a \succ_k b\}$ and $B = \left\{k : b \succ_k' a\right\}$. By Pareto and given that the preferences are linear, we have that A and B are non-empty sets, and by construction $A \cap B = \emptyset$ and thus $B \subseteq N \backslash A$.
However, if $B = N \backslash A$ it follows that $u|_{\{x,y\}} = u'|_{\{x,y\}}$ and by IIA $b \notin f(u')$ which contradicts the hypothesis of $f(u') = \{b\}$. If $B \nsubseteq N \backslash A$, then $N \backslash A = B \cup A'$, where for every $j \in A'$ it follows that $a \succ_i' b$. Hence, by downward monotonicity the individuals' preferences in A' can be changed by placing b over a, forming profile u'' such as $f(u'') = b$. However, by construction $u|_{\{x,y\}} = u''|_{\{x,y\}}$, which by IIA follows that $b \notin f(u'')$, which is a contradiction.

□

Theorem 4.7. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule satisfying Pareto, then the following are equivalents: (i) f is deterministic and non-manipulable, (ii) f is deterministic and satisfies MIIA, and (iii) f satisfies IIA and downward monotonicity [1, 2, 5, 22].*

Recalling our main objective, we need to prove that the premises in Theorems 3.1 and 3.19 are equivalent. To prove such equivalence, we will establish a series of definitions, propositions and lemmas, hereinafter:

Proposition 4.8. *Every voting rule $f : PT^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ satisfying Pareto, also satisfies Unanimity.*

Proof. Let u be a profile such as $top(u) = \{x\}$, hence, proceeding by contradiction, we can assume that $top(u) = \{x\}$. Thus, since f is a total function, it follows that $f(u) \neq \emptyset$.
Moreover, by hypothesis, there exists $y \in X$ with $y \neq x$ such as $y \in f(u)$. Furthermore, by hypothesis, it follows that $top_i(u) = x$, which implies that $x \succ_i y$

for every i , and thus, by Pareto, it follows that $y \neq f(u)$, which contradicts the previous assumption where $y = f(u)$. Therefore, $f(u) = \{x\}$, thus f satisfies unanimity.

$\square$

Corollary 4.9. *Every voting rule satisfying Pareto, also satisfies non-imposition.*

Lemma 4.10. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a deterministic non-manipulable and non-impositive voting rule, then f satisfies Pareto.*

Proof. In order to show that f satisfies Pareto, we need to see that for a profile u, if $x \succ_i y$ for every i, then $y \neq f(u)$.
Proceeding by contradiction, we will assume that $f(y) = y$. Hence, since f is deterministic and non-manipulable, by Lemma 3.25 f satisfies downward monotonicity. By Lemma 3.27, we are able to assume that all preferences in u are of the form $x \succ y \succ x_2 \succ \cdots \succ x_{k-2}$ (for k the number of alternatives).
Since f is non-impositive, we can consider a profile u' such as $f(u') = x$. By virtue of Lemma 3.26, we can assume that all preferences in u' are of the form $x \succ y \succ x_2 \succ \cdots \succ x_{k-2}$. Thus, $u = u'$, however, $f(u) \neq f(u')$, which is a contradiction. Therefore, f satisfies Pareto. $\square$

From the previous results in Lemma 4.10, Corollary 4.9, and Proposition 4.8 (along with all the previous results from Definition 2.1 up to Theorem 3.43), we can prove the equivalence, enunciated in the following theorem:

Theorem 4.11. *Let $f : OL^n \longrightarrow \mathscr{P}^*(X)$ be a voting rule, then the following are equivalent:*

(i) f satisfies Pareto, IIA and downward monotonicity.

(ii) f is deterministic, satisfies Pareto and MIIA.

(iii) f is deterministic, non-impostitive and non-manipulable.

Proof. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Is a consequence of applying Theorem 4.7.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Since f satisfies Pareto, by Corollary 4.9 it follows that f is non-impositive. Moreover, by Theorem 4.7, it follows that f is non-manipulable. Hence, f is non-impositive and non-manipulable.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) On the other hand, since f is deterministic, non-impositive and non-manipulable, by virtue of Lemma 4.10 it follows that f satisfies Pareto.

Hence, since f satisfies Pareto, it is also deterministic and non-manipulable, and by Theorem 4.7 f satisfies MIIA. Thus, f is deterministic, satisfies Pareto and MIIA. □

As a Corollary of Theorem 4.11, we have the equivalence between the Arrow's Impossibility Theorem (Theorem 3.1) and the Gibbard-Satterthwaite's Manipulability Theorem for voting rules (Theorem 3.37).

Finally, as a corollary of this equivalence and by Theorem 3.37, we have proved Theorem 3.18, which its proof has been postponed in Section 3.

5 Conclusions

After going through several versions of two of the major theorems in Social Choice Theory, namely, the impossibility Theorem and manipulability Theorem, we were able to establish a narrow bridge between a version of the impossibility theorem and the manipulability theorem, constituted by versions for voting rules. We think we have clarified the picture of the different Arrow's theorem versions and its relations, as well as the outlook of different versions of the manipulability theorem.

So far, we do not know if more complex manipulability versions for social choice functions are equivalent to any version of the Arrow's theorem, which constitutes an interesting work to carry out.

Acknowledgments

The authors also thank CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México) and Vicerrectoria de Investigación y Estudios de Postgrado (VIEP) at Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, for the support given during the course of this investigation.

Bibliography

[1] Jerry S. Kelly, *Social Choice Theory: An Introduction*, Springer-Verlag, 1988.

[2] Kenneth J. Arrow, *Social choice and indiviual values*, Yale University Press, 1963.

[3] David Makinson, Combinatorial versus decision-theoretic components of impossibility theorems, (Springer) *Theory and Decision* **40** (1996) 181-190.

[4] Alan D. Taylor, *Social choice and the mathematics of manipulation*, Cambridge University Press, 2005.

[5] Dubraska Salcedo, *Teorema de Arrow para perfiles estructurados*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes (ULA-Venezuela), presentada en el 2008.

[6] Bhaskar Dutta, Matthew O. Jackson and Michel Le Breton. *Strategic Candidacy and Voting Procedures. Econometrica*, 9(3):1013-1037, 2002.

[7] Leobardo Plata Pérez. *Bases de medición e hipótesis de comparación en decisiones colectivas y multicriterio. Denarius*, 33(10):33–62, 2005.

[8] Graciela Chichilnisky. *The topological equivalence of the pareto condition and the existence of a dictator. J. of Math. Econo.*, 9(3):223-233, 1982.

[9] Leobardo Plata Pérez. *Amartya Sen y La Economía Del Bienestar. Est. Econó.*, 14(1):3–32, 1989.

[10] David Makinson . *Combinatorial versus decision-theoretic components of impossibility theorems. Theor. Decis.*, 40:181–189, 1996.

[11] Pirlot Marc and Ph. Vincke, *Semiorders: Properties, representations, applications (Vol. 36)*, Springer Science & Business Media, 1997.

[12] Michael B. Gibilisco, Annie M. Gowen, Karen E. Albert, John N. Mordeson, Mark J. Wierman and Terry D. Clark. *Fuzzy social choice theory (Vol. 315)*, Dordrecht: Springer, 2014.

[13] Elena B. Yanovskaya. *Correspondence between social choice functions and solutions of cooperative games. Math. Soc. Sci.*, 27(2):217-234, 1994.

[14] Fuad T. Aleskerov. *Arrovian Aggregation Models*, Springer Science & Business Media, 2013.

[15] Norman Schofield. *Collective Decision-Making: Social Choice and Political Economy*, Springer Dordrecht, 1996.

[16] John Duggan and Thomas Schwartz. *Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard-Satterthwaite generalized. Soc. Choice Welfare*, 17:85–93, 2000.

[17] Alan D. Taylor. *The Manipulability of Voting Systems. The Ame. Math. Monthly*, 109(4):321–337, 2002.

[18] Alain Marciano and Giovanni B. Ramello. *Encyclopedia of Law and Economics*, Springer New York, Chapter: Gibbard-Satterthwaite Theorem:1-7, 2020.

[19] John Geanakoplos. *Three brief proofs of Arrow's Impossibility Theorem. Econo. Theo.*, 26(1):211–215, 2005.

[20] Arunava Sen. *Another direct proof of the Gibbard–Satterthwaite Theorem. Econo. Leters*, 70(3):381-385, 2001.

[21] Michael Morreau. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2019 Edition)*, Stanford, Edward N. Zalta (ed.), Chapter: Arrow's Theorem, 2019.

[22] Donald E. Campbell and Jerry S. Kelly. *Social Welfare Functions That Satisfy Pareto, Anonymity, and Neutrality, but Not Independence of Irrelevant Alternatives. Soc. Choice Welfare*, 29(1):69–82, 2007.

Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
Faculté des Sciences, Université d'Artois
UMR 8188, Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL), Lens,
F-62300, France

bolivia.cuevasotahola@viep.com.mx
jesus.arriagahdz@correo.buap.mx
ramon.pinoperez@univ-artois.fr
maria.morin@correo.buap.mx
oliveros@fcfm.buap.mx

Probabilidad y Estadística

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional

Matemáticas y sus aplicaciones 21, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-10-1

Capítulo 4

Modelo de Vasicek: teoría y generación de curvas de rendimiento con CETES

María Teresa Verónica Martínez Palacios, Ambrosio Ortiz Ramírez, Juan Martín Segovia Aldape

Resumen

En este trabajo se presenta la solución a la ecuación diferencial estocástica (EDE) que conduce la dinámica de la tasa corta, la estructura de plazos y el precio del bono cupón cero del modelo de Vasicek [15]. Con información del portal de Banxico se extrae una muestra de tasas de rendimientos del Vector de precios de títulos gubernamentales de CETES a plazos de 28, 91, 182, 364 días y se estiman los parámetros del modelo por máxima verosimilitud, además, se genera la estructura de plazos y los precios de los bonos cupón cero a los plazos considerados. Al ejecutar la prueba de normalidad resulta que rechaza tal supuesto para los plazos propuestos, asimismo, los resultados muestran que para los tres primeros plazos se observa una curva ligeramente invertida y decreciente, que se interpreta que habrá un aumento en la tasa de largo plazo, por lo tanto, aumentará la demanda de largo plazo, en consecuencia, los bonos aumentan de precio y el rendimiento disminuye. Para el plazo de 364 días la curva de rendimiento arroja resultados inconsistentes.

1 Introducción

Actualmente la tasa de descuento de bonos cupón cero la establece el Banco de México (Banxico) en el mercado primario por medio de subastas en las cuales las instituciones permitidas de participar presentan sus posturas por el monto que desean adquirir y la tasa de descuento que están dispuestas a pagar, el problema radica en que una vez conocida la tasa de descuento a la que se negociaron los títulos, posteriormente dicha tasa es incierta, su valor se determina en el mercado secundario e influyen en él una serie de aspectos económicos, políticos, sociales, del entorno; a su vez, las entidades que negocian estos instrumentos en el mercado secundario utilizan diferentes métodos de interpolación ya sea paramétricos o de mercado como el *bootstrapping* para aproximar la tasa de interés, estimar la curva de rendimiento a diferentes plazos y de esta forma poder negociar los bonos. La estimación de la tasa de interés no solamente es importante para los agentes financieros, por los efectos que generan los cambios en la tasa de interés, conocer o formarse expectativas de su comportamiento es importante para todos los agentes económicos, por ejemplo un incremento en las tasas de interés afecta a los hogares porque encarece los créditos, disminuye el consumo; para las empresas un incremento en las tasas de interés encarece los créditos, encarece las deudas, disminuye los dividendos para los accionistas; un incremento en las tasas de interés hace más atractivas las inversiones en renta fija en detrimento de las inversiones en renta variable [12].

En [16] se proporciona un planteamiento teórico-técnico de los modelos de estructura de plazos de tasas de interés y se revisan las tendencias, perspectivas y futuras líneas de investigación sobre este tópico, señalan la capacidad de los modelos de tasa corta para describir y explicar la existencia de tasas de interés negativas como se ha observado en Europa y Asia. En [13] se investigan las propiedades asintóticas de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de tendencia en el modelo fraccional de Vasicek impulsado por un movimiento browniano subfraccional.

Dado lo anterior se pretende estimar la Estructura Temporal de Tasas de Interés (ETTI) o Curva de rendimiento con la que se valúan los bonos cupón cero (CETES) a partir de tasas históricas con el modelo de tasa de interés estocástica con reversión a la media de Vasicek mediante máxima verosimilitud, para cumplir con este objetivo inicialmente se estimarán los parámetros del modelo de Vasicek a partir de la series de tasas de interés históricas de CETES a diferentes plazos considerando los cambios en postura de Política Monetaria (PM), posteriormente se generará la estructura de plazos, por último, se generará la curva de precios de bonos a diferentes plazos.

Este trabajo está organizado como sigue, en la siguiente subsección se presentan algunas definiciones y conceptos básicos que ayudarán al lector a entender la valuación de bonos cupón cero. En la sección 2 se describe una clasificación de los modelos de tasa corta y la EDE general que conduce el modelo afín de reversión a la media. En la sección 3 se describen: la EDE que conduce la dinámica de la tasa corta del modelo de Vasicek y su solución, la distribución de la tasa corta con su esperanza y varianza, asimismo, se presentan el método para la estimación de parámetros por máxima verosimiltud. En el transcurso de la sección 4 se presenta el análisis de resultados de la aplicación de la metodología propuesta, comenzando con un análisis de estadística descriptiva sobre la serie de CETES a plazos de 28, 91, 182 y 364 días, además se presentan los resultados de la estimación de parámetros, las estructuras de plazos generadas y los precios de los bonos cupón cero en forma de superficie, según corresponda. Por último, en la sección 5 se presentan las conclusiones del presente trabajo junto con algunas extensiones por explorar en la agenda futura de investigación.

Conceptos básicos

Definición 1.1. Estructura Temporal de Tasas de Interés (ETTI) o Curva de rendimiento. Es la relación funcional determinada por tasas de rendimiento de bonos cupón cero a diversos plazos.

Definición 1.2. Tasa corta: tasa instantánea o Spot. Se refiere a aquella tasa asociada al instrumento de plazo más corto plazo disponible en el mercado. Se refiere a la tasa de bonos cupón cero, a los modelos basados en tales tasas, se les conoce como modelos de tasa *spot*, tasa corta o tasa instantánea.

Si la tasa spot o de contado a T años es aquella tasa de interés de una inversión efectuada en t y que termina en T años; si en dicha inversión el interés y el principal serán pagados en T, dicha tasa se denota como $R(t,T)$. En este enfoque solo hay dos flujos: uno en el periodo t y otro al final T. Si un bono cupón cero se coloca en el plazo t y al vencimiento T paga un valor nominal V de una unidad monetaria con tasa de interés $R(t,T)$ tal que $B(t,T) = 1$, su precio está dado por

$$B\left(t,T\right) = \frac{V}{\left(1 + R\left(t,T\right)\right)^{(T-t)}}$$

por lo tanto, si la composición es en tiempo continuo el precio del bono está dado por:

$$B\left(t,T\right) = Ve^{-R(t,T)(T-t)}$$

donde $R(t,T)$ es la tasa spot de t a T con composición continua, también se interpreta como la tasa de interés promedio del tiempo t al tiempo T y se expresa como:

$$R\left(t,T\right)=-\frac{1}{\left(T-t\right)}\ln B\left(t,T\right),t\leq T$$

en otras palabras, si $B(t,T)=1$ y una tasa de rendimiento al vencimiento por unidad de tiempo $L(t,T)$, el precio del bono es:

$$B\left(t,T\right)=\frac{1}{1+L\left(t,T\right)\left(T-t\right)},\ t\leq T$$

donde $L(t,T)$ corresponde a la tasa anualizada de interés al plazo $T-t$ asociada a $B(t,T)$ y $T-t$ corresponde a la proporción de año a la que se aplica la tasa anualizada $L(t,T)$.

Si el bono se negocia a tasa anualizada de descuento $D(t,T)$, el precio del bono se expresa como

$$B\left(t,T\right)=1-D(t,T)(T-t).$$

entonces, sí se conoce la tasa de descuento puede obtenerse la tasa de rendimiento o viceversa.

2 Modelos de tasa corta

En general, los modelos de tasa corta se clasifican como endógenos o afines. En los modelos endógenos la variable utilizada para explicar la ETTI es el precio de un bono cupón cero libre de riesgo de crédito, este precio a su vez depende del vencimiento y de uno o más factores[1]. Los modelos endógenos se clasifican en dos grupos: modelos de equilibrio parcial o de no arbitraje y los modelos de equilibrio general, en los dos enfoques se modela el rendimiento de un bono cupón cero mediante una ecuación diferencial estocástica y a partir de allí mediante cálculo estocástico con el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje se obtiene una ecuación que contiene derivadas parciales, cuya solución caracteriza el precio del bono cupón cero. Para profundizar sobre los modelos afines generalizados se sugiere consultar [5].

[1] Para modelar la ETTI es necesario especificar un proceso estocástico para cada uno de los factores que conduce su dinámica, v.g. en el modelo de Vasicek la dinámica es conducida por la tasa de interés instantánea o de plazo más corto disponible en el mercado.

Los modelos de tasa corta también se clasifican en función del número de factores o variables de estado que determinan la pendiente de la curva de rendimientos, en este caso los modelos pueden ser unifactoriales o multifactoriales, ¿Cuántos factores deben considerarse?, de acuerdo con [7] una variable explica entre el 80 % y el 90 % de la varianza total de la curva de rendimiento, dos variables explican entre el 95 % y el 99 % de la misma, el problema está en la implementación del modelo y la capacidad de ajustarse a los datos del mercado. En los modelos de un factor la variable usualmente utilizada es la tasa de interés de más corto plazo disponible en el mercado perteneciente a bonos cupón cero emitidos por el gobierno y por ende libres de riesgo de crédito, una justificación desde el punto de vista matemático de por qué utilizar la tasa corta puede consultarse en [9].

En cuanto a la forma de estudio, los modelos de tasa corta pueden estudiarse desde el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales o desde el enfoque probabilista, en el primer enfoque se caracteriza el precio del bono como solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden, en el segundo se consideran las propiedades de la distribución de la tasa corta [17].

En [17] se menciona que muchos de los modelos utilizados para valuar bonos cupón cero se enfocan en la tasa de interés instantánea, el objetivo de estos modelos no es elaborar pronósticos precisos, es más bien explicar en términos estadísticos tales como tendencia, reversión a la media, sesgo, curtosis, colas, intervalos de confianza, probabilidades de ocurrencia y precios promedio el comportamiento de la tasa en el mercado, dicho comportamiento es impredecible, depende de la oferta y demanda por títulos de deuda al plazo más corto disponible en el mercado, aspectos sociales, económicos, políticos, tanto del entorno nacional como internacional, las expectativas que tengan los agentes del mercado, entre otros; es por ello que dicho comportamiento se modela por medio de un proceso estocástico, en los modelos de equilibrio parcial la dinámica estocástica de la tasa corta denotada por r_t se supone es conducida por una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t$$

donde $\mu(r_t, t), \sigma(r_t, t)$ son procesos adaptados a una filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$ que representa la información del mercado y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ modela el riesgo de mercado. En los modelos de un factor se considera que la tasa de interés instantánea r_t es la única variable de estado subyacente en la economía, el proceso de difusión que modela la evolución de r_t es

$$dr_t = a\left(b - r_t^{\alpha}\right) dt + \sigma r_t^{\beta} dW_t$$

donde a, b y σ , son constantes positivas, a y b representan la velocidad de reversión a la media y el nivel de largo plazo respectivamente, r_t es la tasa corta, $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano (MB) estándar que modela el riesgo de mercado y está definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ junto con su filtración aumentada $\mathcal{F} = \{F_t\}_{t\geq 0}$. A partir de los diferentes valores que pueden tomar α y β se presentan diferentes modelos de tasa corta. Por ejemplo, con $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ se tiene el modelo de Vasicek [15], con $\alpha = 1$ y $\beta = 1/2$ se tiene el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (CIR)[3].

Uno de los primeros modelos de tasa de interés en tiempo continuo fundamentado en el MB, propuesto para explicar la dinámica estocástica de la tasa de interés instantánea es presentado por el Premio Nobel de Economía Robert C. Merton [10] en la nota al pie 44, dicho modelo parte del comportamiento promedio de la tasa corta para calcular los factores de descuento utilizados al valuar un bono cupón cero a diferentes plazos, entre los inconvenientes de este modelo están: existe una probabilidad positiva de que la tasa corta tome valores negativos, la tasa corta no presenta reversión a la media (no tiene una variable que obligue a la tasa corta a regresar a su valor de largo plazo con el paso del tiempo), la esperanza y la varianza condicionales de la tasa corta crecen indefinidamente, la curva de rendimiento y la tasa *forward* decrecen sin límite con el paso del tiempo.

En [15] se propone un modelo de equilibrio para determinar la estructura de plazos de la tasa de interés bajo los siguientes supuestos: la tasa instantánea de interés sigue un proceso de difusión, el precio del bono cupón cero depende de la tasa corta y de su vigencia, no hay costos de transacción, no hay asimetría en la información, los agentes son racionales, el mercado está en equilibrio, no hay oportunidades de arbitraje, el precio del riesgo de mercado se supone que es constante, al final de su artículo propone un ejemplo en el que obtiene el precio de un bono cupón cero utilizando ecuaciones diferenciales parciales, presenta la dinámica estocástica de una tasa de interés instantánea con reversión a la media y utiliza el MB para modelar el riesgo de mercado.

Al inicio de este apartado se mencionó otra clasificación de los modelos como afines, este grupo de modelos se caracterizan porque el precio del bono está determinado por:

$$B(t,T) = e^{A(t,T)-r_t D(t,T)}$$

el supuesto anterior facilita el tratamiento analítico de los modelos Vasicek [15] y CIR [3]. Los modelos afines a su vez pueden ser homogéneos y no homogéneos, en los modelos homogéneos los coeficientes dependen del periodo de vencimiento, en los modelos no homogéneos los coeficientes dependen del tiempo t, así, los modelos Vasicek y CIR son modelos afines homogéneos.

3 Modelo de Vasicek

El modelo de Vasicek describe la dinámica de la tasa corta que presenta reversión a la media[2] como

$$dr_t = a\left(b - r_t\right)dt + \sigma dW_t \tag{1}$$

donde $\{W\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso de Wiener definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde $\mathcal{F} = \{F_t\}_{t\geq 0}$ es su filtración aumentada que representa la información del mercado disponible hasta el tiempo t, a, b y σ son constantes positivas, a es la velocidad de convergencia con la que la tasa r_t tiende a la tasa de largo plazo b, σ es la volatilidad, el término de tendencia es $a\left(b - r_t\right)$ y σdW_t es el componente estocástico.

La ecuación (1) presenta algunas desventajas como son:

- Es un modelo de un solo factor de riesgo.
- La volatilidad y los parámetros constantes.
- El supuesto de normalidad en el MB.

[2]teóricamente la formalización del concepto de reversión a la media sigue una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa corta similar a un proceso Ornstein-Uhlenbeck [11] con $b = 0$, el cual es un proceso estocástico utilizado en física y otras ciencias para modelar la velocidad de una partícula bajo los efectos de la fricción provocada por un movimiento Browniano, es el único proceso que satisface las condiciones de ser estacionario, Gaussiano y Markoviano.

De acuerdo con [4] las observaciones anteriores son algunas de las desventajas del modelo, dado que en realidad es poco probable que una serie de rendimientos o precios del mercado tengan distribución normal y volatilidad constante, es más, necesariamente las tasas de interés de un día se explican por las tasas del día anterior y tampoco la pendiente de la curva de rendimiento se explica solamente por la tasa de interés, después de todo lo que se busca es formar expectativas, describir algunas propiedades estadísticas de la serie en estudio.

El modelo presenta reversión a la media porque si la tasa de interés r_t está por encima de la media de largo plazo b la tendencia se vuelve negativa para que a una velocidad a la tasa de interés se acerque en promedio a la tasa de largo plazo, en caso contrario la tendencia se vuelve positiva para que a largo plazo a una velocidad a la tasa de interés se acerque a la media b, tal comportamiento está acorde con el fenómeno económico según el cual las tasas de interés parecen tender a un nivel de largo plazo [1]. Así, por ejemplo, cuando las tasas de interés se incrementan, por lo general en el mercado se observa un encarecimiento en los créditos, disminuye la inversión, disminuye el empleo, disminuye el consumo, hay desaceleración económica, hay menos demanda por préstamos y una tendencia de las tasas de interés a regresar a un nivel más bajo; en el caso de la inversión en renta fija al incrementarse la tasa de interés los agentes económicos tenderán a incrementar más la demanda por estos instrumentos, al incrementarse la demanda empieza a incrementarse el precio, la tasa de interés empieza a disminuir de tal forma que a largo plazo alcanza un nivel de equilibrio.

Para resolver (1) sea $Y_t = e^{at} r_t$ y su desarrollo en serie de Taylor y aplicando el lema de Itô [2] se tiene que:

$$\begin{aligned} d\left(e^{at} r_t\right) &= a e^{at} r_t dt + e^{at} dr_t + \frac{1}{2} a^2 e^{at} r_t (dt)^2 + \ldots \\ &= a e^{at} r_t dt + e^{at}\left(a\left(b - r_t\right) dt + \sigma dW_t\right) \\ &= a e^{at} r_t dt + e^{at}\left[(ab - a r_t) dt + \sigma dW_t\right] \\ &= a e^{at} r_t dt + ab e^{at} dt - a e^{at} r_t dt + \sigma e^{at} dW_t \\ &= ab e^{at} dt + \sigma e^{at} dW_t \end{aligned}$$

Al integrar la expresión anterior

$$\int_t^T d\left(e^{at} r_s\right) = \int_t^T ab e^{as} ds + \int_t^T \sigma e^{as} dW_s$$

de donde:

$$r_T = r_t e^{-a(T-t)} + b\left[1 - e^{-a(T-t)}\right] + \int_t^T \sigma e^{-a(T-s)} dW_s. \tag{2}$$

Equivalentemente

$$r_T = b(r_t - b)e^{-a(T-t)} + \int_t^T \sigma e^{-a(T-s)} dW_s. \tag{3}$$

Dado el hecho de que

$$E\left(\int_t^T \sigma e^{-a(T-s)} dW_s\right) = 0$$

y

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_t^T \sigma e^{-a(T-s)} dW_s\right)^2\right] &= E\left(\int_t^T \sigma^2 e^{-2a(T-s)} ds\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2a}\left[1 - e^{-2a(T-t)}\right] \end{aligned}$$

la esperanza y la varianza de r_T , dado $r_t = r$ son:

$$\begin{aligned} E\left(r_T \mid r_t = r\right) &= E\left[r_t e^{-a(T-t)} + b\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) + \int_t^T \sigma e^{-a(T-s)} dW_s\right] \\ &= r e^{-a(T-t)} + b\left[1 - e^{-a(T-t)}\right] \end{aligned}$$

y la varianza

$$\operatorname{Var}\left(r_T \mid r_t = r\right) = \frac{\sigma^2}{2a}\left[1 - e^{-2a(T-t)}\right].$$

Como $\int_t^T \sigma e^{-a(T-s)} dW_s$ se puede escribir en la forma:

$$\int_t^T \sigma e^{-a(T-s)} dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma e^{-a(T-t_i)}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$$

donde $t_i = t + i(T-t)/n, t = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T, n \in \mathbb{N}$, luego, debido a la propiedad de incrementos estacionarios de un proceso de Wiener estándar, se observa que cada término de

$$W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{T-t}{n}\right)$$

se distribuye normal multiplicado por un término exponencial determinista. De esta manera, el producto es normal y dado que la suma de las variables aleatorias normales también es normal se deduce que

$$r_T \sim \mathcal{N}\left(re^{-a(T-t)} + b\left[1 - e^{-a(T-t)}\right], \frac{\sigma^2}{2a}\left[1 - e^{-2a(T-t)}\right]\right)$$

El supuesto de normalidad implica que se pueden obtener tasas negativas, lo que no necesariamente sea una desventaja, puesto que en el pasado reciente se han observado tasas negativas y el modelo de Vasicek puede capturar ese hecho atípico. Para exhibir analíticamente que existe una probabilidad de que se generen tasas negativas hay que discretizar (1) como

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a\left(b - r_t\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon$$

donde $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$. De esta manera

$$\begin{aligned} P(r_{t+\Delta t} \leq 0) &= P\left[r_t + a\left(b - r_t\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon \leq 0\right] \\ &= P\left[\varepsilon \leq -\left(\frac{r_t + a\left(b - r_t\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)\right] \\ &= \Phi\left(-\frac{r_t + a\left(b - r_t\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) \end{aligned}$$

por lo anterior, existe una probabilidad positiva de que se obtengan tasas negativas.

Por otra parte, según [17] bajo los supuestos de equilibrio general y tasa corta neutral al riesgo, el precio de un bono cupón cero que colocado en t y al vencimiento T paga una unidad monetaria $B = B\left(t,T\right) = 1$, satisface la siguiente ecuación diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + a(b - r_t)\frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \tag{4}$$

La condición final corresponde al pago en el vencimiento del bono, $B(t,T) = 1$. Las condiciones de frontera dependen de a, b, σ y por supuesto de r_t.

Dado que la ecuación no cuenta con derivadas parciales cruzadas, se supone una solución en variables separables de la siguiente forma

$$B(t,T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)}. \tag{5}$$

Observe que en la fecha de vencimiento, necesariamente, $A(T,T) = 0$ y $D(T,T) = 0$, ya que el precio del bono $B(T,T) = 1$.

Las derivadas parciales de B con respecto de t y r_t, así como la segunda derivada parcial con respecto de r_t están dadas por:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t}\right) B, \frac{\partial B}{\partial r_t} = -DB, \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = D^2 B.$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (4), se tiene que

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - a(b - r_t)D - r_t = 0$$

que se reescribe como

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD + r_t \left(-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1\right) = 0. \tag{6}$$

Si se deriva con respecto a r_t se obtiene

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 = 0$$

ó

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1. \tag{7}$$

La ecuación diferencial anterior es ordinaria y el uso de derivadas parciales es un abuso de notación. La solución de la ecuación diferencial anterior con condición final $D(T,T) = 0$ está dada por:

$$\begin{aligned} D(t,T) &= D(T,T)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= -e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}. \end{aligned}$$

por lo que

$$D(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \tag{8}$$

Al sustituir (8) en (6)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = abD - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2$$

donde

$$\frac{\partial A}{\partial t} = ab\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)^2 \tag{9}$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria anterior con condición de frontera $A(T,T) = 0$ está dada por:

$$A\left(t,T\right) = \frac{1}{a^2}\left(D\left(t,T\right) - T + t\right)\left(a^2 b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \frac{\sigma^2 D^2\left(t,T\right)}{4a} \tag{10}$$

donde a, b y σ son coeficientes por estimar a partir de una serie histórica de datos de mercado.

Curva de rendimiento

A partir de los precios de los bonos para diferentes vencimientos $B(t,T)$ con $T \geq t$ se genera la estructura de plazos de la tasa de interés con la expresión

$$R(t,T) = -\frac{1}{(T-t)}\ln B(t,T) \tag{11}$$

Al aplicar logaritmo natural a (5) se tiene que

$$\ln B(t,T) = A(t,T) - r_t D(t,T)$$

Por lo que $R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left(r_t D(t,T) - A(t,T)\right)$. De esta manera al sustituir (8) y (10) en (11)

$$\begin{aligned}
R(t,T) &= \frac{1}{(T-t)}\left[r_t D(t,T) - (D(t,T) - T + t)\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) + \frac{a^2 D^2(t,T)}{4a}\right] \\
&= r_t \frac{D(t,T)}{(T-t)} - \left(\frac{D(t,T)}{(T-t)} - 1\right)\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) + \frac{a^2 D^2(t,T)}{4a} \\
&= r_t\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a(T-t)}\right) - \left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - 1\right)\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) \\
&+ \frac{a^2\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2}{4a^3(T-t)}.
\end{aligned}$$

Al considerar la tasa de interés de plazo más largo disponible en el mercado, que se denomina como tasa larga, que se obtiene cuando $T \to \infty$ y que se denota por $R(t,\infty)$ se tiene

$$R(t,\infty) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} R(t,T) = R(t,\infty) + (r_t - R(t,\infty)) \left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) \\ + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} \left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Precio del bono cupón cero

Al expresar el precio de un bono cupón cero en términos de $r_t, R(t,\infty), D(t,T)$ y considerando

$$B\,(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

Dada la ecuación (12) el precio de un bono cupón cero $B(t,T) = 1$ asociado al modelo de Vasicek de tasa corta, se expresa como

$$B(t,T) = \exp \left\{ -R(t,\infty)(T-t) - [r_t - R(t,\infty)]\, D(t,T) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t,T) \right\}. \tag{13}$$

A continuación se describe el comportamiento de la tasa adelantada (forward) en este modelo. La tasa forward instantánea se define como

$$f\,(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B\,(t,T) = r_t \frac{\partial D}{\partial T} - \frac{\partial A}{\partial T} \tag{14}$$

Al calcular las derivadas indicadas se obtiene

$$\frac{\partial D}{\partial T} = e^{-\alpha(T-t)} \tag{15}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T} &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{a^2} e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} e^{-2a(T-t)} \\ &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} \right) \\ &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Al sustituir las derivadas parciales indicadas en (14)

$$
\begin{aligned}
f\left(t,T\right) &= r_t e^{-a(T-t)} + b - be^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2 \\
&= b-(b-r_t)e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2}D^2(t,T)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

En el límite $f(t,\infty) \equiv \lim\limits_{T\to\infty} f(t,T) = b - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}$.

Estimación de parámetros por máxima verosimilitud

Básicamente hay dos enfoques de estimación de los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica del modelo de Vasicek, el paramétrico y el no paramétrico. Desde el enfoque paramétrico, los parámetros del modelo Vasicek pueden estimarse utilizando Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) con el supuesto de errores normales no correlacionados [8] o utilizando un proceso autorregresivo de orden uno AR (1) con tendencia descrito por una ecuación estocástica en diferencias como en [4]. En lo que se refiere al enfoque no paramétrico se encuentra la aplicación de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales como en [6].

De acuerdo con [14] el método de máxima verosimilitud (MMV) es un método para estimar los parámetros desconocidos en cualquier distribución de probabilidad. Suponga que se tiene una muestra x con n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), entonces el MMV maximiza la probabilidad de obtener la misma muestra de nuevo. Sea $x = \{x_1,\ldots,x_n\}$ una muestra de tamaño n y por $\theta = \{\theta_1,\theta_2\ldots,\theta_n\}$ los m parámetros diferentes en la función de densidad de probabilidad $f(x;\theta)$. Bajo el supuesto de que las variables aleatorias son i.i.d., la distribución de probabilidad conjunta $f_{(X_1,\ldots X_n;\theta)}(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ se puede expresar como

$$
\begin{aligned}
f_{(X_1,\ldots X_n;\theta)}(x_1,\ldots,x_n;\theta) &= \mathrm{P}\left(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \ldots \cap X_n = x_n\right) \\
&= f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n;\theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

El objetivo es determinar los parámetros θ que maximizan la función de verosimilitud definida en (18). Esto se puede hacer de forma numérica o analítica.

En forma analítica el primer paso es simplificar al aplicar el logaritmo a la función de verosimilitud y así obtener la función logarítmica de verosimilitud denotada por $L(\theta)$. Dado que el logaritmo es una función monótona, los valores que maximizan $L(\theta)$ también maximizan la función de verosimilitud (i.e., $f_{(X_1,\ldots X_n;\theta)}(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ para una muestra dada x) [14]). De este manera se define $L(\theta)$

$$L(\theta) = \ln \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta) \tag{19}$$

Dado que es más fácil diferenciar una suma que un producto, esto facilita el siguiente paso del procedimiento, que es diferenciar e igualar a cero

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{20}$$

Por lo tanto, cada θ_i en el vector gradiente $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$. que representa esta condición de igual forma representa la media de cada parámetro estimado. Posteriormente hay que maximizar $\theta_i = \arg\max_{\theta_i \in \theta} L(\theta)$.

Para el modelo de Vasicek la distribución de $r_{t+\Delta t}$ está dada por

$$f(r_{t+\Delta t}|r_t,a,b,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp - \frac{\left[r_{t+\Delta t} - (r_t + a(b-r_t)\Delta t)\right]^2}{2\sigma^2\Delta t} \tag{21}$$

la función de verosimilitud

$$\begin{aligned} L &= \ln \prod_{i=1}^{n} f(r_i|r_{i-1},a,b,\sigma) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln f(r_i|r_{i-1},a,b,\sigma) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp - \frac{\left[r_i - (r_{i-1} + a(b-r_{i-1})\Delta t)\right]^2}{2\sigma^2\Delta t}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}}\right] - \frac{\left[r_i - (r_{i-1} + a(b-r_{i-1})\Delta t)\right]^2}{2\sigma^2\Delta t} \\ &= \ln \left[\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}\right]^{-n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[r_i - (r_{i-1} + a(b-r_{i-1})\Delta t)\right]^2}{2\sigma^2\Delta t} \end{aligned} \tag{22}$$

al simplificar se obtiene

$$L = -\frac{n}{2}\ln\left[2\pi\sigma^2\Delta t\right] - \sum_{i=1}^{n}\frac{\left[r_i - (r_{i-1} + a(b - r_{i-1})\Delta t)\right]^2}{2\sigma^2\Delta t}. \tag{23}$$

Para determinar los parámetros máximo verosímil $\theta = \{a, b, \sigma\}$ hay que derivar L respecto a cada parámetro e igualar a cero como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b} &= \sum_{i=1}^{n} -\frac{2\left[r_i - (r_{i-1} + a(b - r_{i-1})\Delta t)\right] ab\Delta t}{2\sigma^2\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\frac{\left[r_i - (r_{i-1}(1 - a\Delta t) + ab\Delta t)\right] ab}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{24}$$

al igualar a cero y simplificar

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n}\left[r_i - (r_{i-1}(1 - a\Delta t) + ab\Delta t)\right] \\ \sum_{i=1}^{n} ab\Delta t &= \sum_{i=1}^{n}\left[r_i - r_{i-1}(1 - a\Delta t)\right] \\ nab\Delta t &= \sum_{i=1}^{n}\left[r_i - r_{i-1}(1 - a\Delta t)\right] \end{aligned}$$

entonces

$$\widehat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{r_i - r_{i-1}(1 - a\Delta t)}{a\Delta t}\right]. \tag{25}$$

Para a

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{n} -\frac{\left[r_i - (r_{i-1} + a(b - r_{i-1})\Delta t)\right](b - r_{i-1})\Delta t}{\sigma^2\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\frac{\left[r_i - (r_{i-1} + a(b - r_{i-1})\Delta t)\right](b - r_{i-1})}{\sigma^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\frac{\left[(r_i - r_{i-1})(b - r_{i-1}) - a(b - r_{i-1})^2\Delta t\right]}{\sigma^2} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(r_i - r_{i-1})(b - r_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} a(b - r_{i-1})^2\Delta t \end{aligned} \tag{26}$$

por lo tanto

$$\widehat{a} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i - r_{i-1})(b - r_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} (b - r_{i-1})^2}. \tag{27}$$

Por último, para σ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{4\pi\sigma^2\Delta t}(4\pi\sigma\Delta t) - \sum_{i=1}^{n} -2\frac{[r_i - (r_{i-1} + a(b - r_{i-1})\Delta t)]^2}{2\sigma^3\Delta t} \\
&= -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{[r_i - (r_{i-1} + a(b - r_{i-1})\Delta t)]^2}{\sigma^3\Delta t} = 0 \qquad (28)\\
\frac{n}{\sigma} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{[r_i - (r_{i-1} + a(b - r_{i-1})\Delta t)]^2}{\sigma^3\Delta t}
\end{aligned}$$

por lo tanto

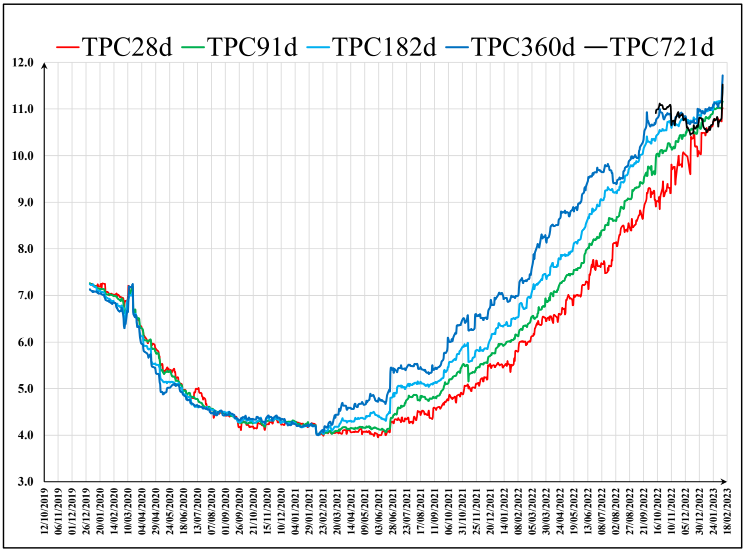
$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{[r_i - (r_{i-1} + a(b - r_{i-1})\Delta t)]^2}{\Delta t}. \tag{29}$$

4 Análisis y discusión de resultados

En seguida con información del portal de Banxico se extraen series del Vector de precios de títulos gubernamentales (*on the run*) y se muestra la tasa diaria de los rendimientos de CETES a 28 días (SF4570), CETES a 91 días (SF45471), CETES a 182 días (SF45472) y CETES a 364 días (SF45473), del periodo 02/01/2020 al 10/02/2023 con un total de 786 observaciones. Se observa en la gráfica tasas de CETES a plazo de 721 días, que se emitieron a partir del 13/10/2022 con 83 observaciones, esta serie se excluye de la estimación que se ejecuta en una sección posterior.

En la figura (1) se muestra la evolución de las tasas de rendimiento de CETES los cuatro plazos mencionados, como se puede notar existe un cambio de tendencia de disminución de tasa hacia un aumento que comienza a partir del 24/06/2021, en esa fecha comenzó el incremento de 25 puntos base a la tasa objetivo en este caso relacionada a la tasa de interés interbancaria de equilibrio (TIIE) que publica Banxico en su portal. Tales incrementos se han seguido aplicando como parte de la política monetaria para disminuir los altos niveles de inflación que se han observado en los últimos dos años.

Figura 1: Series históricas de tasas de rendimiento de CETES: 28, 91, 182 y 364 días.



Fuente: elaboración propia.

El cuadro (1) muestra la estadística descriptiva de las tasas de rendimiento a los cuatro plazos considerados. Se observa un promedio positivo para CETES a 28 días de 6 %, mientras que para los demás plazos aumenta en aproximadamente 25 puntos base cada uno. El coeficiente de variación indica que las tasas de rendimiento tuvieron una dispersión moderada, lo que se confirma con la desviación estándar (diaria) y la curtosis. Respecto al coeficiente de asimetría tiene un valor positivo, lo que indica que su distribución es sesgada hacia la derecha en los cuatro plazos considerados.

Cuadro 1: Estadística descriptiva de Series históricas de tasas de rendimiento de CETES a 28, 91, 182 y 364 d.

	C28d	C91d	C182d	C364d
Media	5.99	6.24	6.47	6.73
C.V.	0.32	0.34	0.35	0.34
ErrorStd	0.07	0.07	0.08	0.08
Mediana	5.36	5.49	5.80	6.20
Moda	4.25	4.28	4.47	4.20
Desv. Estd.	1.95	2.10	2.23	2.30
VarianzaM	3.79	4.42	4.99	5.31
Curtosis	-0.25	-0.49	-0.72	-1.02
C. Asimetría	0.92	0.86	0.79	0.63
Rango	7.07	7.14	7.46	7.72
Min.	3.95	4.02	4.01	4.00
Máx.	11.02	11.16	11.47	11.72
Suma	4710.27	4907.03	5088.65	5291.28
Obs.	786	786	786	786

Fuente: elaboración propia.

Al ejecutar la prueba de normalidad de los rendimientos con Jarque-Bera al 5 % de significancia, el resultado es que se rechaza tal supuesto, por lo tanto, hay evidencia suficiente para decir que estos datos tienen asimetría y curtosis que son significativamente diferentes de una distribución normal, como se observa en el siguiente cuadro

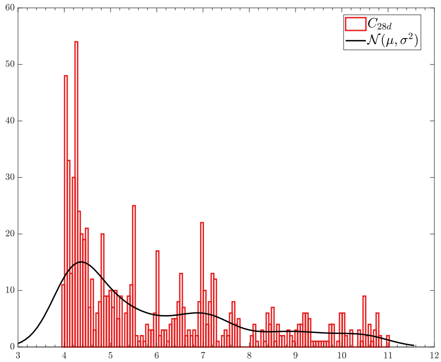
Cuadro 2: Prueba de normalidad Jarque-Bera de tasas de CETES a 28, 91, 182 y 364 d.

	C28d	C91d	C182d	C364d
JB-stat	113.47	104.40	97.72	85.23
p-value	1.00E-03	1.00E-03	1.00E-03	1.00E-03

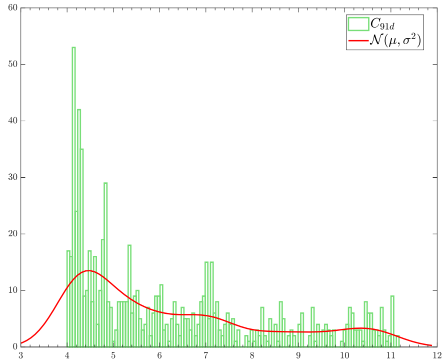
Fuente: elaboración propia.

Figura 2: Histogramas de tasas de rendimiento de CETES a 28, 91, 182 y 364 días.

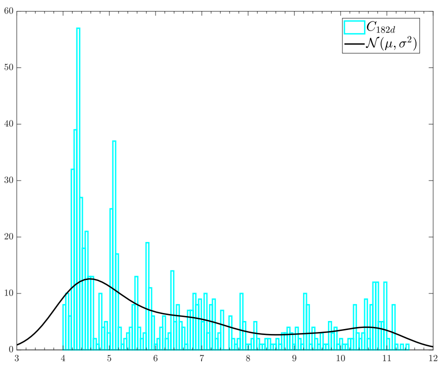
((a)) Histograma CETES $T = 28$ días.



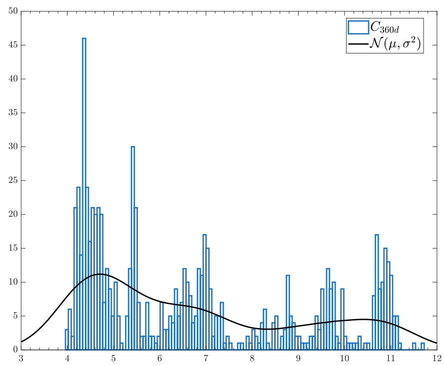
((b)) Histograma CETES $T = 91$ días.



((c)) Histograma CETES $T = 182$ días.



((d)) Histograma CETES $T = 364$ días.



Fuente: elaboración propia.

La figura (2) muestra los histogramas de los cuatro plazos que se consideran en el análisis, se confirma que la distribución es sesgada hacia la derecha, esto proviene de la tendencia hacia la baja durante el periodo de tiempo considerado, además que se observa la mayor frecuencia para las tasas de entre 4 % y 5 % hasta antes del 25/06/2021, que transcurrieron aproximadamente 133 días para que la tasa objetivo de Banxico pasara de 4.00 % a 4.25 % como se observa en el cuadro siguiente

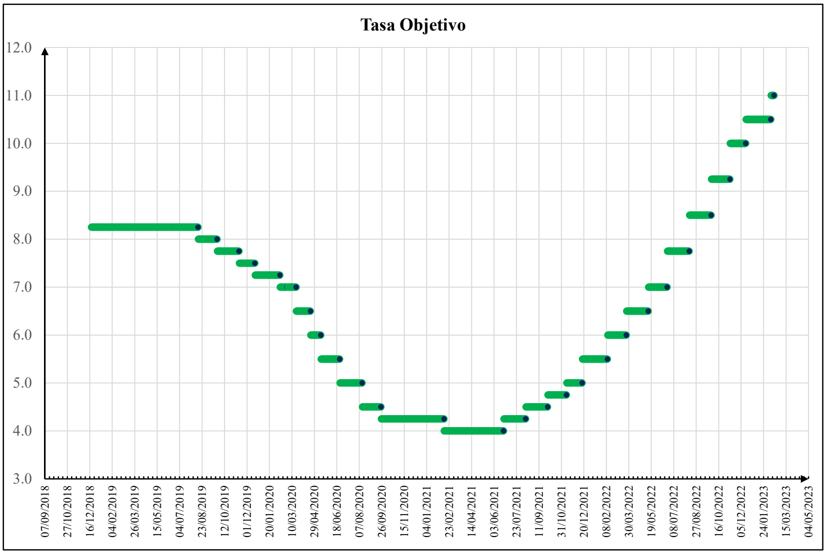
Cuadro 3: Evolución de la tasa de interés objetivo (TO).

Fecha PM	CambioTO	Días	Variación
20/12/2018	8.25	–	–
15/08/2019	8.00	238	-0.25
26/09/2019	7.75	42	-0.25
14/11/2019	7.50	49	-0.25
19/12/2019	7.25	35	-0.25
13/02/2020	7.00	56	-0.25
20/03/2020	6.50	36	-0.50
21/04/2020	6.00	32	-0.50
14/05/2020	5.50	23	-0.50
25/06/2020	5.00	42	-0.50
14/08/2020	4.50	50	-0.50
25/09/2020	4.25	42	-0.25
12/02/2021	4.00	140	-0.25
25/06/2021	4.25	133	0.25
13/08/2021	4.50	49	0.25
01/10/2021	4.75	49	0.25
12/11/2021	5.00	42	0.25
17/12/2021	5.50	35	0.50
11/02/2022	6.00	56	0.50
25/03/2022	6.50	42	0.50
13/05/2022	7.00	49	0.50
24/06/2022	7.75	42	0.75
12/08/2022	8.50	49	0.75
30/09/2022	9.25	49	0.75
11/11/2022	10.00	42	0.75
16/12/2022	10.50	35	0.50
10/02/2023	11.00	56	0.50

Fuente: elaboración propia.

Al observar el cuadro anterior se nota una tendencia bajista de la tasa objetivo desde diciembre de 2018 hasta el 12/02/2021 al tocar un piso de 4 %, posteriormente el 25/06/2021 se observa un incremento de 25 puntos base seguido de incrementos notables, por ejemplo, de 75 puntos base el 24/06/2022 y asi sucesivamente. La siguiente gráfica muestra las tendencias y los cambios correspondientes.

Figura 3: Evolución de la tasa de interés objetivo.



Fuente: elaboración propia.

En seguida se muestra un cuadro con los resultados de la estimación de parámetros del modelo de Vasicek mediante máxima verosimilitud, se ejecuta la estimación con 252 observaciones y una longitud $\Delta t = \frac{1}{252}$, como se observa en los tres primeros plazos que corresponden a 28, 91 y 182 días, el parámetro a que modela la velocidad a la que r_t se aproxima a la tasa de largo plazo b es positivo, mientras que para el plazo de 364 días este valor es negativo, estos valores tendrán un efecto al construir la curva de tasas de rendimiento.

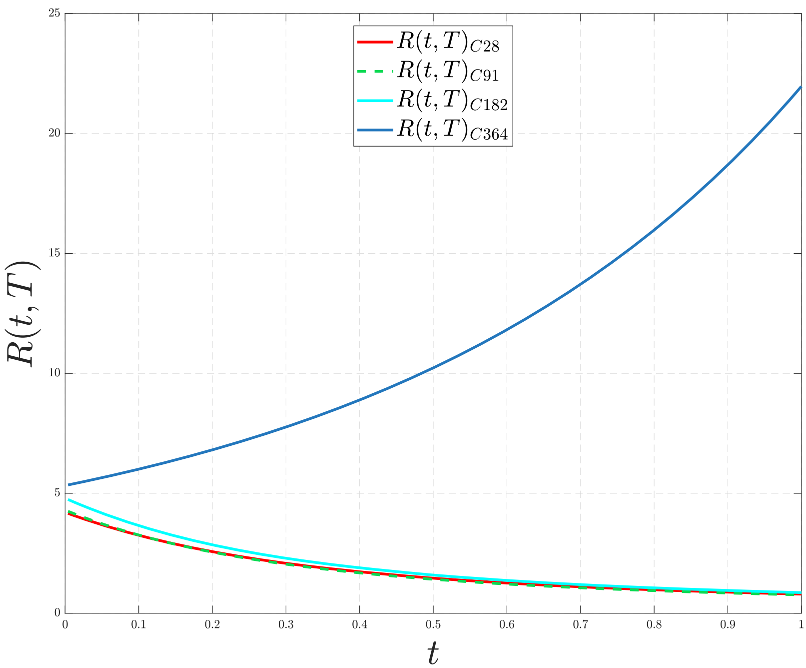
Cuadro 4: Parámetros estimados del modelo de Vasicek a CETES a 28, 91, 182 y 364 d.

	R28d	R91d	R182d	R364d
a	5.4934	5.8678	5.8022	-2.3910
b	0.0415	0.0419	0.0434	0.0421
σ	0.0059	0.0037	0.0052	0.0068
r_0	4.208373	4.299810	4.796725	5.324279

Fuente: elaboración propia.

Con los parámetros estimados se procede a generar las curvas de tasas de rendimiento con la ecuación (12), los resultados se muestran en la siguiente gráfica

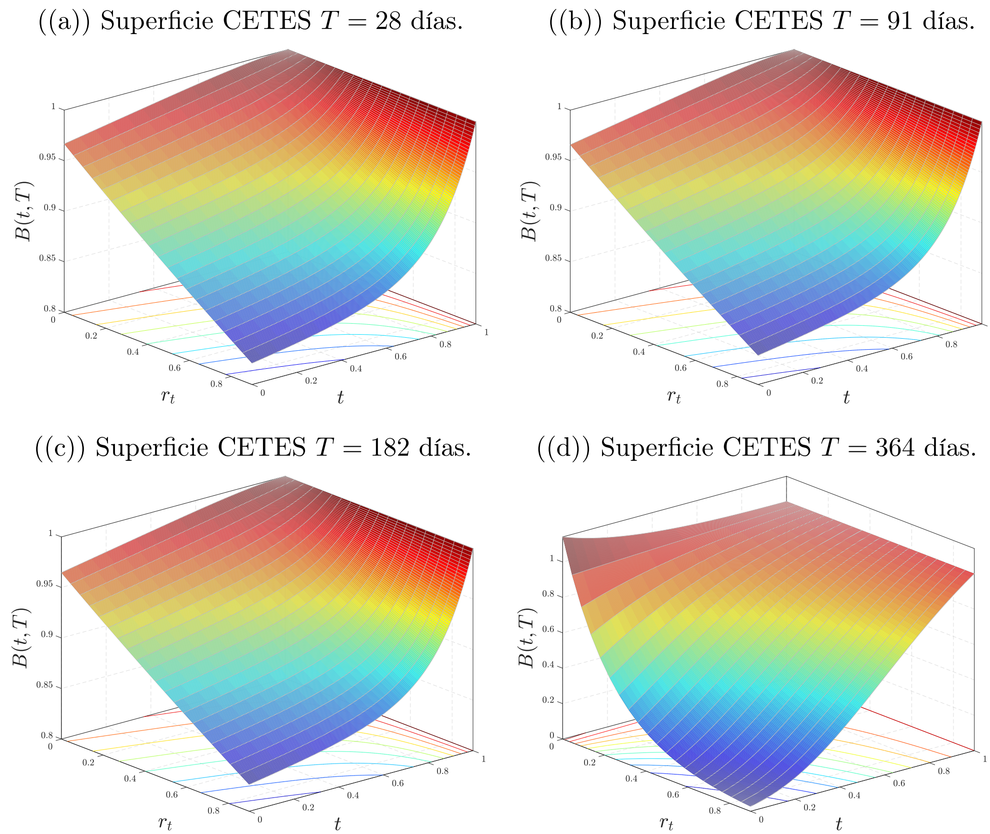
Figura 4: Curva de rendimiento de CETES: 28, 91, 182 y 364 días.



Fuente: elaboración propia.

De la gráfica anterior se observa que la curva a 364 días se mueve más rápido que las otras y es creciente, esto no implica necesariamente que la volatilidad de los precios de los bonos a largo plazo sea menor que la volatilidad de los precios de los bonos a corto plazo, ya que la duración de un bono debe multiplicarse por el precio del bono y proporciona información sobre el plazo promedio ponderado en el que el tenedor de ese bono recuperará la inversión inicial.

Figura 5: Superficie de precios de bonos con parámetros estimados con tasas de CETES a 28, 91, 182 y 364 días.



Fuente: elaboración propia.

Por último, se muestran las diferentes superficies de precios de bonos con los parámetros estimados del cuadro (4), se observan precios de bonos consistentes con las estructuras de plazos generadas anteriormente, salvo la última superficie.

5 Conclusiones

El supuesto de que tasa de interés constante en la valuación de opciones produce hasta cierto punto estimaciones confiables de precios, el mismo supuesto produciría resultados poco confiables en la valuación de bonos y derivados de tasa de interés. Una explicación de este hecho es que los bonos se emiten tanto a corto plazo como a largo plazo y se negocian a menudo en el mercado secundario hasta su vencimiento. Además, en el caso del mercado Mexicano, el gobierno federal y las entidades privadas participan activamente en las bolsas de valores locales y extranjeras.

En este trabajo se ha presentado un modelo de tasas de interés expresado en términos de una ecuación diferencial estocástica. En particular, el modelo de tasa corta de interés de Vasicek de reversión a la media, cuyo origen es un proceso conocido como proceso de Ornstein-Uhlenbeck [11]. Este modelo es de particular interés en finanzas y en economía, porque también existen argumentos económicos convincentes a favor de la reversión a la media, como son: cuando las tasas son altas, la economía tiende a desacelerarse y los prestatarios requieren menos fondos. Además, las tasas retroceden a un valor de equilibrio y las tasas disminuyen. Por el contrario, cuando las tasas son bajas, tiende a haber una gran demanda de fondos por parte de los prestatarios y las tasas tienden a aumentar. No obstante, dado que la distribución de la tasa en este modelo se distribuye normal, existe una probabilidad positiva de que se obtengan tasas negativas, lo cual no necesariamente puede ser una desventaja.

Con información del portal de Banxico se extraen series del Vector de precios de títulos gubernamentales (*on the run*) con la tasa diaria de los rendimientos de CETES a 28 días (SF4570), CETES a 91 días (SF45471), CETES a 182 días (SF45472) y CETES a 364 días (SF45473), del periodo 02/01/2020 al 10/02/2023 con un total de 786 observaciones. Se ejecuta la estadística descriptiva de las series de tasas de rendimiento observándose promedio de tasa para 28 días de 5.99 %, para 91 días de 6.24 %, para 182 días de 6.47 % y 6.73 % para 364 días, con un promedio de 6.36 % y desviación estándar de 2.15 %. Se rechaza el supuesto de normalidad para las cuatro series de tasas.

Para estimar los parámetros del modelo de Vasicek por máxima verosimilitud se consideró el periodo 25/06/2020 al 24/06/2021 con 252 observaciones, se generan las curvas de rendimiento a los cuatro plazos. Se ha elegido este periodo de tiempo debido que en la fecha 24/06/2021 se observó un cambio en la política monetaria al subir la tasa objetivo 25 puntos base, el alza fue de 4.00 a 4.25, desde esa fecha se han observado incrementos constantes de hasta 75 puntos base como una medida para contener el ambiente de inflación acelerada. La evidencia empírica indica que para los tres primeros plazos se observa una curva ligeramente invertida, que se interpreta que habrá un aumento en la tasa de largo plazo, por lo tanto, aumentará la demanda de largo plazo, en consecuencia los bonos aumentan de precio y el rendimiento disminuye. Para el plazo de 364 días la curva de rendimiento arroja resultados poco confiables o inconsistentes, ya que por ejemplo, a plazo de 127 días la curva estimada genera una tasa de 10.23 % mientras que la observada es 6.85 %. Para los demás plazos las curvas que se generan muestran tendencia decreciente.

En futuras líneas de investigación es añadir a la EDE que conduce la dinámica del modelo de Vasicek saltos de Poisson o alguna distribución de valores extremos, así como suponer que la volatilidad de la tasa no es constante y se puede modelar con algún modelo de la familia GARCH. Se afirma que el modelo Vasicek es atractivo desde el punto de vista teórico y por su relativa facilidad para su implementación, con claras ventajas y desventajas, lo que conduce a nuevos modelos, conocidos como modelos multifactoriales.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por los proyectos de investigación:*"Calibración y análisis de curvas de rendimiento cupón cero"* con clave SIP-20221767 y *"Valuación de opciones de tipo asiático sobre un subyacente cuya dinámica de precios tiene tasa de interés y volatilidad estocásticas, mediante racionalidad económica."* con clave SIP-20221252 de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. De la misma manera, los autores agradecemos a los árbitros sus valiosas observaciones y recomendaciones.

Bibliografía

[1] Bayazit, D. (2004). Yield curve estimation and prediction with Vasicek model, master thesis. Recuperado de https://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12605126/index.pdf

[2] Capiński M., Kopp E., Traple J. Stochastic Calculus for Finance. Cambridge: Cambridge University Press; 2012. doi:10.1017/CBO978113901736

[3] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., y Ross, S. A. (1985). *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, **53**(2), 385-407. doi:10.2307/19112

[4] Cruz Aranda, F. (2007). Valor en riesgo de bonos cupón cero en el mercado mexicano con los modelos Vasicek y CIR: simulación Montecarlo con saltos de Poisson y valores extremos. (Tesis de doctorado en ciencias financieras). Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México.

[5] Duffie, D. (2001). Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton University Press, Third Edition.

[6] Duffy, D. J. (2006). Finite difference methods in financial engineering. A PDE approach, Wiley, first edition, U.K.

[7] Gómez, V. (2004). Nuevos planteamientos en modelos unifactoriales de la estructura temporal de los tipos de interés. (Tesis de doctorado en economía aplicada: matemáticas). Universidad de Valladolid, España.

[8] Gujarati, D. y Porter, D. (2010). Econometría, McGraw-Hill, 5a edición, México.

[9] Hernández, E. (2006). Aplicaciones financieras del modelo de Vasicek. (Tesis maestría en ingeniería, Optimización financiera). Universidad Nacional Autónoma de México, México.

[10] Merton, R. C. *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics, **4**(1) (1973), 141–183.

[11] G. E. y Ornstein, L. S. Uhlenbeck (1930). On the theory of the Brownian motion. Physical Review, 36(5), 823–841. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.36.823

[12] Pinchao Ramos, D. E. (2018). Valuación de bonos de cupón cero con un modelo de tasa de interés estocástica con parámetros calibrados por mínimos cuadrados ordinarios, (periodo 2012-2017), tesis de maestría en ciencias económicas, Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional.

[13] Prakasa Rao, B. (2021). Maximum likelihood estimation for sub-fractional Vasicek model. Random Operators and Stochastic Equations, **29**(4), 265-277. https://doi.org/10.1515/rose-2021-2065

[14] Rossi, R. J. (2018). Mathematical Statistics : An Introduction to Likelihood Based Inference. New York: John Wiley & Sons. ISBN 978-1-118-77104-4.

[15] Vasicek, O. (1977). *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics, **5**(2), 177–188. https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2

[16] Vasicek, O. y Venegas-Martínez, F. (2020). Modelos de la estructura de plazos de las tasas de interés: Revisión, tendencias y perspectivas. Revista Mexicana de Economía y Finanzas Nueva Época REMEF, **16**(2), e587. doi:https://doi.org/10.21919/remef.v16i2.587

[17] Venegas- Martínez, F., *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre.* Segunda edición, Cengage, México (2008).

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Alcaldía Miguel Hidalgo

Ciudad de México, C.P. 11340

mmartinezpa@ipn.mx
amortiz@ipn.mx
jsegoviaa@ipn.mx

Topología

Matemáticas y sus aplicaciones 21, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-10-1

Capítulo 5

Sobre la unicidad del n-ésimo hiperespacio para continuos enrejados

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y Leonardo Ramírez Aparicio

FCFM, BUAP

Resumen

En la teoría de los continuos y sus hiperespacios, se dice que un continuo X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$ si para cada continuo Y, con hiperespacio $\mathcal{H}(Y)$, tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, se cumple que X es homeomorfo a Y. Es muy conocido que si tenemos dos continuos X y Y homeomorfos, con sus respectivos hiperespacios $\mathcal{H}(X)$ y $\mathcal{H}(Y)$, entonces dichos hiperespacios también son homeomorfos, véase [12, Teorema 1.9]. Algo más interesante es cuando nos preguntamos si el recíproco siempre se cumple. En general, esto no es cierto, véase [12, Ejemplo 5.1] y [12, Ejemplo 5.2] . Sin embargo, demostraremos que dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, el hiperespacio de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de X con a lo más n componentes, denotado como $C_n(X)$, sí tiene hiperespacio único, cuando X es enrejado. Un continuo X es casi enrejado si la cerradura de $\mathcal{G}(X)$ en X es igual a X, donde $\mathcal{G}(X)$ es el conjunto de puntos de X que tienen una vecindad en X que es una gráfica finita. Un continuo casi enrejado X es enrejado si X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que para cada elemento $U \in \mathcal{B}$ se cumple que $U - \mathcal{P}\,(X)$ es conexo.

1 Preliminares

Un **continuo** X es un espacio métrico con más de un punto, conexo y compacto. Un subconjunto Y de X es un **subcontinuo** de X si, Y es un continuo o Y es un conjunto de un punto. Dado un continuo X, mientras no se diga lo contrario, denotamos por d a la métrica de X. Además, si $p \in X$,

$A \subset X$ y $\epsilon > 0$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ, será denotada por $B_d(\epsilon, p)$. La ϵ-**nube** de A (o la **nube con centro en** A **y radio** $\epsilon > 0$), es $N_d(\epsilon, A) = \{x \in X\colon$ existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \epsilon\}$. Asimismo, la d-**bola cerrada generalizada** en X de radio ϵ alrededor de A, es el conjunto $C_d(\epsilon, A) = \{x \in X\colon d(x, A) \leq \epsilon\}$. El *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de A en X, son denotados por $\mathrm{int}_X(A)$, $\mathrm{cl}_X(A)$ y $\mathrm{Bd}_X(A)$, respectivamente. El conjunto de los números naturales es denotado por $\mathbb{N}$.

Los **hiperespacios** de un continuo X son espacios cuyos elementos son subconjuntos de X que cumplen ciertas condiciones específicas. Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, algunos de los hiperespacios de X son:

$$\begin{aligned}
2^X &= \{A \subset X\colon A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es un cerrado de } X\};\\
C(X) &= \{A \in 2^X\colon A \text{ es conexo}\};\\
C_n(X) &= \{A \in 2^X\colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\};\\
F_1(X) &= \{A \in C(X)\colon |A| = 1\}.
\end{aligned}$$

la clase 2^X se le conoce como el **hiperespacio de los subconjuntos cerrados** de X, se acostumbra denotar a $C_1(X)$ como $C(X)$, conocido como el **hiperespacio de los subcontinuos** del continuo X. Por otra parte, $C_n(X)$ es conocido como el n-**ésimo hiperespacio** de X. El hiperespacio $F_1(X)$ es conocido como el **primer producto simétrico**. Al hiperespacio 2^X se le considera dotado con la métrica de Hausdorff, inducida por la métrica d de X, con la cual resulta ser un espacio métrico. Esta métrica se define de la siguiente manera: $H(A, B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0\colon A \subset N_d(B, \epsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \epsilon)\}$, con $A, B \in 2^X$. Observemos que la restricción de la métrica de Hausdorff a $C(X)$ y $C_n(X)$ hace de cada uno de estos un espacio métrico.

Dados X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, ..., U_n \subset X$. El **vietórico de** $U_1, U_2, ..., U_n$ **en** 2^X está dado de la siguiente manera:

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\}\}.$$

2 Conceptos y resultados generales.

Con la finalidad de demostrar que los continuos enrejados tienen hiperespacio único $C_n(X)$, cuando X es un continuo enrejado y $n \in \mathbb{N}$, presentamos los conceptos y resultados generales que nos serán de ayuda para este fin.

Definición 2.1. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos la dimensión de X, recursivamente, que denotamos como $\dim(X) \in \{-1, 0, 1, ...,\} \cup \{\infty\}$, de la siguiente manera:

(a) $\dim(X) = -1$ si y solo si $X = \emptyset$;

(b) supongamos que hemos definido cuándo un espacio topológico Y tiene dimensión $\dim(Y) \leq n - 1$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, decimos que la dimensión de X en x es menor o igual a n, denotada por $\dim(x, X) \leq n$, si y solo si X tiene una base local de vecindades de x cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a $n - 1$. Si para cada $x \in X$, se cumple que $\dim(x, X) \leq n$, entonces escribimos que $\dim(X) \leq n$;

(c) la dimensión de X es igual a n, denotada por $\dim(X) = n$, si y solo si $\dim(X) \leq n$ y es falso que $\dim(X) \leq n - 1$;

(d) la dimensión de X en x es igual a n, denotada por $\dim(x, X) = n$, si y solo si $\dim(x, X) \leq n$ y es falso que $\dim(x, X) \leq n - 1$;

(e) decimos que la dimensión de X es ∞, denotada por $\dim(X) = \infty$, si y solo si es falso que $\dim(X) \leq n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$;

(f) decimos que la dimensión de X en x es ∞, denotada por $\dim(x, X) = \infty$, si y solo si $\dim(x, X) > n$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.

Definición 2.2. Sea X un continuo. Un **arco libre** de X es un arco α con puntos extremos a y b tal que $\alpha - \{a, b\}$ es un abierto de X.

Definición 2.3. Sea X un continuo, un **arco libre maximal** J de X es un arco libre de X, el cual es maximal con respecto a la inclusión, es decir, para cada arco libre K de X tal que $J \subset K$, se cumple que $J = K$. Una **circunferencia libre** S de X, es una curva cerrada simple de X para la cual existe un único $p \in S$ tal que $S - \{p\}$ es un abierto de X.

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, denotamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X) &= X - \mathcal{G}(X);\\
\mathcal{FA}(X) &= \bigcup\{\mathrm{int}_X(J) : J \text{ es un arco libre de } X\};\\
\mathfrak{A}(X) &= \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal de } X\};\\
\mathfrak{A}_S(X) &= \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal de } X \text{ o}\\
&\qquad\qquad J \text{ es una circunferencia libre de } X\};\\
\mathfrak{A}_E(X) &= \{J \in \mathfrak{A}(X) : \text{existe } p \in E(J) \cap \mathrm{int}_X(J)\}.
\end{aligned}$$

Lema 2.4. *Sean X un continuo y $B \in 2^X$. Si $f \colon 2^X \to 2^X$ está dada por $f(A) = A \cup B$, para cada $A \in 2^X$, entonces f es una función continua.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ una colección finita de subconjuntos abiertos de X tal que $f(A) = A \cup B \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Sea J el conjunto más grande de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que para cada $i \in J$, $A \cap U_i \neq \emptyset$. Consideremos $\mathcal{U} = \{U_i \colon i \in J\}$. Como $A \cup B \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, tenemos que $A \in \langle \mathcal{U}\rangle$. Observemos que $\langle \mathcal{U}\rangle$ es un abierto de 2^X. Así, si $f(\langle \mathcal{U}\rangle) \subset \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, f será continua. Para esto, sea $A \in \langle \mathcal{U}\rangle$, entonces $A \subset \bigcup \mathcal{U} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Además, $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in J$. Si existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $j \notin J$, entonces $A \cap U_j = \emptyset$. Como $(A \cup B) \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $B \cap U_j \neq \emptyset$. De esto último, concluimos que $f(A) = A \cup B \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$. Por lo tanto, f es continua. □

Lema 2.5. *Si X es un continuo y $f \colon X \to F_1(X)$ está dada por $f(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_1(X) \colon U_i$ es un abierto de X, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}\}$. Por el Teorema 15, $\mathcal{B}$ es una base de $F_1(X)$. Sean $x \in X$ y $f(x) = \{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_1(X)$. Consideremos $V = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, entonces V es un subconjunto abierto de X tal que $x \in V$. Dado $y \in V$, tenemos que $y \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Por lo que, $f(y) = \{y\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_1(X)$. Así, $f(V) \subset \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_1(X)$. Esto muestra que f es continua.

Ahora, sea U un subconjunto abierto de X. Veamos que $f(U) = \langle U\rangle \cap F_1(X)$. Sea $x \in U$, entonces $f(x) = \{x\} \in \langle U\rangle \cap F_1(X)$. Así, $f(U) \subset \langle U\rangle \cap$

$F_1(X)$. Dado $\{y\} \in \langle U \rangle \cap F_1(X)$, tenemos que $y \in U$ y por ende, $f(y) = \{y\} \in f(U)$. Luego, $\langle U \rangle \cap F_1(X) \subset f(U)$. Por lo tanto, como f es una función biyectiva, continua y abierta, se sigue que f es un homeomorfismo. □

El siguiente resultado será utilizado en el Teorema 4.16.

Teorema 2.6. [6, Teorema 9.4, página 83] *Sean X un espacio topológico y $\{A_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una cubierta de X tal que :*

(a) *para cada $\alpha \in \Lambda$, tenemos que A_α es un abierto de X o;*

(b) *para cada $\alpha \in \Lambda$, tenemos que A_α es un cerrado de X, y tal cubierta forma una familia de vecindades finita.*

Para cada $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$, sea $f_\alpha \colon A_\alpha \to Y$ continua tal que $f_\alpha \restriction_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta \restriction_{A_\alpha \cap A_\beta}$. Entonces existe una única función continua $f \colon X \to Y$ extensión de f_α, es decir, $f \restriction_{A_\alpha} = f_\alpha$.

3 Variedades

Es momento de hablar de otro concepto topológico interesante que nos permitirá tratar a ciertos espacios topológicos de manera local como n-celdas; hablamos del concepto de variedad (topológica). En realidad, la definición que aquí presentamos es la de variedad con frontera, pero por razones de simplicidad en el lenguaje, utilizamos el concepto de variedad. De hecho, las definiciones comunmente usadas para dicho concepto son más sofisticadas, pero para nuestros propositos, bastará con la Definición 3.2.

Comenzamos con presentar los conceptos de n-celda, n-variedad, interior como variedad y frontera como variedad. Así, como algunos resultados de interés que serán de ayuda para demostraciones posteriores.

Definición 3.1. Una n-celda es cualquier espacio homeomorfo a la bola cerrada n-dimensional $\mathbb{B}_n$ en $\mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \; \| x \| \leq 1\}$.

Definición 3.2. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que X es una n**-variedad** si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad en X homeomorfa a una n-celda.

Denotaremos por $Int_V X$ y ∂X, el **interior como variedad** y la **frontera como variedad** de X, respectivamente. Los conjuntos están dados por

$$\begin{aligned} Int_V X &= \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad en } X \text{ homeomorfa a } \mathbb{R}^n\} \text{ y} \\ \partial X &= X - Int_V X. \end{aligned}$$

Proposición 3.3. *Si X y Y son n-variedades, y $h\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $h\,(Int_V X) = Int_V Y$. En consecuencia, $h\,(\partial X) = \partial Y$.*

Demostración. Sea $y \in h\,(Int_V X)$, entonces existe $x \in Int_V X$ tal que $y = h(x)$. Luego, existe una vecindad V de x en X que es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Como V es homeomorfa a $h(V)$, entonces $h(V)$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Así, como $y \in h(V) \subset Y$, tenemos que $h(V)$ es una vecindad de y en Y que es homeomorfa $\mathbb{R}^n$, es decir, $y \in Int_V Y$, de donde $h\,(Int_V X) \subset Int_V Y$.

Recíprocamente, utilizando que $h^{-1}\colon Y \to X$ es un homeomorfismo, se tiene que $h^{-1}\,(Int_V Y) \subset Int_V X$. Por lo tanto, $Int_V Y = h\,(h^{-1}\,(Int_V Y)) \subset h\,(Int_V X)$.

Para la segunda parte, notemos que h es biyectiva, luego $h\,(X - Int_V X) = h\,(X) - h\,(Int_V X) = Y - h\,(Int_V X)$. Así, utilizando lo demostrado en la primera parte, tenemos que $h\,(\partial X) = Y - Int_V Y$, es decir $h\,(\partial X) = \partial Y$. □

Si $p \in X$ y $\epsilon > 0$, denotaremos por $B_d\,(\epsilon, p)$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ.

Proposición 3.4. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si x tiene una vecindad W en X homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, entonces X tiene una base de vecindades de x homeomorfas a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $h\colon W \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo y sea Z una vecindad de x en X. Como $x \in \mathrm{int}_X\,(W) \cap \mathrm{int}_X\,(Z)$ y $A = \mathrm{int}_X\,(W) \cap \mathrm{int}_X\,(Z) \subset W$, entonces A es una vecindad de x en W. Por lo que, $h\,(\mathrm{int}_X(W) \cap \mathrm{int}_X\,(Z))$ es una vecindad de $h(x)$ en $\mathbb{R}^n$. Más aún, $C = h\,(\mathrm{int}_X(W) \cap \mathrm{int}_X\,(Z))$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, así, como $h(x) \in C$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B = B_{\mathbb{R}^n}\,(\epsilon, h(x)) \subset C \subset \mathbb{R}^n$. Luego, como B es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $x \in h^{-1}\,(B) \subset A \subset Z$, con $h^{-1}\,(B)$ un abierto de W contenido en A un abierto de X, tenemos que $h^{-1}\,(B)$ es un abierto de X y homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, tal que $x \in h^{-1}\,(B) \subset Z$. Esto termina la prueba. □

Proposición 3.5. *Si X es un espacio topológico, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una vecindad U de x en X que es una n-variedad tal que $x \in \partial U$ si y solo si para vecindad V de x en X que es también una n-variedad, resulta que $x \in \partial V$.*

Demostración. Hacemos la primera implicación por contrarrecíproca. Supongamos que existe una vecindad V de x en X que es una n-variedad tal que $x \notin \partial V$, entonces $x \in Int_V V$. Luego, existe una vecindad W de x en V tal que W es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Como $x \in \operatorname{int}_V(W) \cap \operatorname{int}_X(V)$ y $A = \operatorname{int}_V(W) \cap \operatorname{int}_X(V)$ es un abierto de V contenido en $\operatorname{int}_X(V)$, se sigue que A es un abierto de X contenido en W. Esto implica que W es una vecindad de x en X, homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Por la Proposición 3.4, para cada vecindad U de x en X que es también una n-variedad, existe una vecindad Z de x en X, homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in Z \subset U$. Como Z es también una vecindad de x en U, tenemos que $x \in Int_V U$, de donde, $x \notin \partial U$. Esto prueba la primera implicación.

El recíproco es inmediato. Así termina la prueba. □

Teorema 3.6. [8, Teorema 4.12] *Sean X un espacio métrico, U un abierto de X y V una n-celda, con $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in U \cap \operatorname{int}_X(V)$, entonces existe una n-celda J de X tal que $x \in \operatorname{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \operatorname{int}_X(V)$.*

Ahora presentamos el Teorema de la invariancia del dominio de Brouwer, el cual nos será útil para demostrar el Teorema 3.8.

Teorema 3.7. [25, Teorema 19.2] *Si X y Y son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $h\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $h(\operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. En particular, si X es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces Y es un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.8. *Si F es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ que también es una n-variedad, entonces $Int_V F = \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$ y $\partial F = \operatorname{Bd}_{\mathbb{R}^n}(F)$.*

Demostración. Sea $x \in Int_V F$. Luego, existe una vecindad V de x contenida en F tal que V es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Sea $h\colon \mathbb{R}^n \to V$. Por el Teorema3.7, $h(\mathbb{R}^n) = V$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que, $x \in V \subset F$. Luego, $x \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$. Esto muestra que $Int_V F \subset \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$.

Recíprocamente, sea $x \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$. Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(\epsilon, x) \subset F$. Como $B_{\mathbb{R}^n}(\epsilon, x)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y además, es una vecindad de x en

$\mathbb{R}^n$ y por ende, una vecindad de x en F, se sigue que $x \in Int_V F$. Esto muestra que $\operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F) \subset Int_V F$. Por lo tanto, $Int_V F = \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$.

La otra igualdad se sigue de la primera igualdad y de que F es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, así, $\operatorname{Bd}_{\mathbb{R}^n}(F) = F - \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F) = F - Int_V F = \partial F$, es decir, $\partial F = \operatorname{Bd}_{\mathbb{R}^n}(F)$. □

Proposición 3.9. *Si X es un espacio métrico que es una n-variedad y U es un subconjunto abierto de X, entonces U es una n-variedad.*

Demostración. Sea $x \in U \subset X$. Como $x \in X$ y X es una n-variedad, existe una vecindad W de x en X que es una n-celda. Entonces $x \in U \cap \operatorname{int}_X(W)$, luego, por el Teorema 3.6, existe una n-celda J de X tal que $x \in \operatorname{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \operatorname{int}_X(W) \subset U \subset X$. Como $\operatorname{int}_X(J)$ es un abierto de X contenido en U, entonces $\operatorname{int}_X(J)$ es un abierto de U. Luego J es una vecindad de x en U que es una n-celda. Así, como x fue elegida arbitrariamente en U, resulta que U es una n-variedad. □

Proposición 3.10. *Si X es un espacio métrico que es una n-variedad y U es subconjunto abierto de X, entonces $\partial U = \partial X \cap U$.*

Demostración. Como U es subconjunto abierto de X, por la Proposición 3.9, U es una n-variedad, luego, podemos hablar de su frontera como variedad.

Sea $x \in \partial X \cap U$, entonces $x \in \partial X$ y $x \in U$. Observemos que X es una vecindad de x en X que es una variedad tal que $x \in \partial X$. Como U es una vecindad de x en X que es también una n-variedad, por la Proposición 3.5, tenemos que $x \in \partial U$.

Recíprocamente, sea $x \in \partial U$. Como U es una vecindad de x en X que es una n-variedad tal que $x \in \partial U$ y X es una vecindad de x en X que es también una n-variedad, por la Proposición 3.5, tenemos que $x \in \partial X \cap U$. Así, termina la prueba. □

Proposición 3.11. *Si M es una m-variedad y N es una n-variedad, entonces $M \times N$ es una $m+n$-variedad. Además, se cumple que $\partial(M \times N) = (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$.*

Demostración. Sea $(m,n) \in M \times N$, entonces $m \in M$ y $n \in N$. Como M es una m-variedad y N es una n-variedad, existen U y V vecindades de x en M y N, respectivamente, tales que U es una m-celda y V una n-celda. Luego $U \times V$ es una vecindad de (m,n) en $M \times N$. Más aún, como U es homemorfo a I^m y V es homeomorfo a I^n, entonces $U \times V$ es homeomorfo a $I^m \times I^n = I^{m+n}$, es decir, $U \times V$ es una $m+n$-celda. Así, como (m,n) fue elegido arbitrariamente en $M \times N$, resulta que $M \times N$ es una $m+n$-variedad.

Ahora probemos que $\partial\,(M \times N) = (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$. Sea $(m,n) \in \partial\,(M \times N)$, entonces existen W y Z vecindades de x en M y N, respectivamente, tales que W es una m-celda y Z una n-celda. Luego, existen $h_1\colon I^m \to W$ y $h_2\colon I^n \to Z$ homeomorfismos. Por la proposición 3.3, $\partial W = h_1\,(\partial I^m)$ y $\partial Z = h_2\,(\partial I^n)$. Sea $h\colon I^m \times I^n \to W \times Z$ que está dada por $h\,(w,z) = (h_1(w), h_2(z))$. Observemos que h es un homeomorfismo. Luego, por la Proposición 3.3, $\partial\,(W \times Z) = h\,(\partial\,(I^m \times I^n))$. Como $\partial\,(I^m \times I^n) = (I^m \times \partial I^n) \cup (\partial I^m \times I^n)$, entonces

$$
\begin{aligned}
h\,(\partial\,(I^m \times I^n)) &= h\,((I^m \times \partial I^n) \cup (\partial I^m \times I^n)) \\
&= h\,((I^m \times \partial I^n)) \cup h\,((\partial I^m \times I^n)) \\
&= (h_1\,(I^m) \times h_2\,(\partial I^n)) \cup (h_1\,(\partial I^m) \times h_2\,(I^n)) \\
&= (W \times \partial Z) \cup (\partial W \times Z)\,,
\end{aligned}
$$

de donde $\partial\,(W \times Z) = (W \times \partial Z) \cup (\partial W \times Z)$. Utilizando esta última igualdad, tenemos que, como $(m,n) \in \partial\,(M \times N)$ y $W \times Z$ es una vecindad de (m,n) en $M \times N$, por la Proposición 3.5, $(m,n) \in \partial\,(W \times Z)$. Así, $(m,n) \in W \times \partial Z$ o $(m,n) \in \partial W \times Z$, es decir, $n \in \partial Z$ o $m \in \partial W$. De nuevo, por la Proposición 3.5, $n \in \partial N$ o $m \in \partial M$. Así, $(m,n) \in (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$ y por ende, $\partial\,(M \times N) \subset (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$.

Recíprocamente, dado $(m,n) \in (M \times \partial N) \cup (\partial M \times \partial N)$, tenemos que $n \in \partial N$ o $m \in \partial M$, esto implica por la proposición 3.5 que, $n \in \partial Z$ o $m \in \partial W$, es decir, $(m,n) \in \partial\,(W \times Z)$. Nuevamente por la Proposición 3.5, $(m,n) \in \partial\,(M \times N)$. Así, $(M \times \partial N) \cup (\partial M \times N) \subset \partial\,(M \times N)$. Por lo tanto, $\partial\,(M \times N) = (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$. $\square$

4 Los continuos enrejados tienen n-ésimo hiperespacio único

En esta sección demostramos que los continuos enrejados tienen n-ésimo hiperespacio único.

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, las siguientes clases de conjuntos tienen un papel importante en esta sección:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_n(X) = \{A \in C_n(X) : {}& A \text{ tiene una vecindad en } C_n(X) \text{ que es una} \\ & 2n\text{-celda}\};\\ \mathfrak{P}_n^{\partial}(X) = \{A \in C_n(X) : {}& A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{M} \text{ en } C_n(X) \text{ que} \\ & \text{es una } 2n\text{-celda y } A \in \partial\mathcal{M}\};\\ \Gamma_n(X) = \{A \in C_n(X) - \mathfrak{P}_n(X) : {}& A \text{ tiene una base local de vecindades} \\ & \text{abiertas } \mathfrak{H} \text{ en } C_n(X) \text{ tal que, para cada } \mathcal{U} \in \mathfrak{H}, \\ & \dim(\mathcal{U}) = 2n \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X) \text{ es arco conexo } \}.\end{aligned}$$

Se acostumbra denotar a $\mathfrak{P}_1(X)$ y $\mathfrak{P}_1^{\partial}(X)$ como $\mathfrak{P}(X)$ y $\mathfrak{P}^{\partial}(X)$, respectivamente.

Si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y $p \in E(J)$ tal que $p \in \mathrm{int}_X(J)$, decimos que p es un **extremo** de X. Además, en algunos resultados, si B es un subconjunto de un continuo X, denotamos por:

$$\begin{aligned}C(B) &= \{A \in C(X) : A \subset B\};\\ F_1(B) &= \{A \in F_1(X) \colon A \subset B\}.\end{aligned}$$

Observación 4.1. Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathfrak{P}_n(X)$ es una $2n$-variedad.

En efecto, sea $A \in \mathfrak{P}_n(X)$, entonces $A \in C_n(X)$ y A tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda. Como $\mathfrak{P}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $C_n(X)$ y $A \in \mathfrak{P}_n(X) \cap \mathrm{int}_{C_n(X)}(M)$, por el Teorema 3.6, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de A en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda tal que $A \in \mathrm{int}_{C_n(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \mathfrak{P}_n(X) \cap \mathrm{int}_{C_n(X)}(M) \subset \mathfrak{P}_n(X) \subset C_n(X)$. Observemos que $\mathcal{N}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}_n(X)$ que es una $2n$-celda. Como A fue elegido arbitrariamente en $\mathfrak{P}_n(X)$, por la Definición 3.2, $\mathfrak{P}_n(X)$ es una $2n$-variedad.

Otra forma de describir a $\mathfrak{P}^{\partial}(X)$ que nos será útil en la Proposición 4.5, es la siguiente.

Observación 4.2. Si X es un continuo, entonces $\mathfrak{P}^{\partial}(X) = \{A \in \mathfrak{P}(X) \colon A$ tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $\mathfrak{P}(X)$ que es una 2-celda y $A \in \partial M\}$.

Sea $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X) \subset \mathfrak{P}(X)$, entonces $A \in \mathfrak{P}(X)$, A tiene una vecindad $\mathcal{N}$ en $C(X)$ que es una 2-celda y $A \in \partial\mathcal{N}$. Como $A \in \mathfrak{P}(X) \cap \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$ y $\mathfrak{P}(X)$ es un subconjunto abierto de $C(X)$, por el Teorema 3.6, existe una

2-celda $\mathcal{M}$ en $C(X)$ tal que $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(X) \cap \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathfrak{P}(X) \subset C(X)$. Notemos que $\mathcal{M}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}(X)$. Si $A \notin \partial\mathcal{M}$, entonces $A \in Int_V\mathcal{M}$, por lo que existe W vecindad de A en $\mathcal{M}$ tal que W es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Como $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M})$ es una vecindad de A en $\mathcal{M}$, por la Proposición 3.4, existe una vecindad U de A en $\mathcal{M}$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathcal{M}}(U) \subset U \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ y U es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Notemos que $\operatorname{int}_{\mathcal{M}}(U)$ también es un subconjunto abierto de $\mathcal{N}$, entonces U es una vecindad de A en $\mathcal{N}$ tal que U es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, lo que es una contradicción, ya que $A \in \partial\mathcal{N}$. Así, $A \in \partial\mathcal{M}$, y por ende, $A \in \{A \in \mathfrak{P}(X) \colon A$ tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $\mathfrak{P}(X)$ que es una 2-celda y $A \in \partial\mathcal{M}\}$.

Recíprocamente, sea $A \in \{A \in \mathfrak{P}(X) \colon A$ tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $\mathfrak{P}(X)$ que es una 2-celda y $A \in \partial\mathcal{M}\}$, entonces $A \in \mathfrak{P}(X)$ y A tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $\mathfrak{P}(X)$ que es una 2-celda tal que $A \in \partial\mathcal{M}$. Como $A \in \operatorname{int}_{\mathfrak{P}(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(X) \subset C(X)$ y $\mathfrak{P}(X)$ es un subconjunto abierto de $C(X)$, entonces $\mathcal{M}$ es una vecindad de A en $C(X)$. Así, $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$.

Lema 4.3. *Sean X un continuo localmente conexo y $A \in C(X)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$;

(b) *existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que una de las siguientes condiciones se cumplen: (1) $A = \{p\}$, para algún $p \in \operatorname{int}_X(J)$, (2) $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y existe un extremo p de X tal que $p \in A \subset \operatorname{int}_X(J)$.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Supongamos que $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$, entonces existe una vecindad $\mathcal{M}$ de A en $C(X)$ que es una 2-celda tal que $A \in \partial\mathcal{M}$. Luego, $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \subset C(X)$, así $\dim(A, \mathcal{M}) = \dim(A, C(X))$. Más aún, por [25, Teorema 9.5], $\dim(\mathcal{M}) = \dim(I^2) = 2$, en particular, $\dim(A, \mathcal{M}) = 2$, entonces $\dim(A, C(X)) = 2$. Por [?, Teorema 4.15], existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \in \langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C(X)}$ y $A \subset \operatorname{int}_X(J)$. Como $A \in \langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C(X)} \subset C(J)$, entonces $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(C(J))$. Así, $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \cap \operatorname{int}_{C(X)}(C(J))$, entonces por el Teorema 3.6, existe una 2-celda $\mathcal{L}$ de $C(X)$ tal que $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L} \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \cap \operatorname{int}_{C(X)}(C(J)) \subset \operatorname{int}_{C(X)}(C(J)) \subset C(J) \subset C(X)$. Si $A \notin \partial\mathcal{L}$, entonces $A \in Int_V\mathcal{L}$, por lo que existe una vecindad $\mathcal{S}$ de A en $\mathcal{L}$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, con $\mathcal{S}$ homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Como en particular, $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{L})$ es una vecindad de A en $\mathcal{L}$, por la Proposición 3.4, existe una vecindad $\mathcal{T}$ de A en $\mathcal{L}$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T} \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, con

$\mathcal{T}$ homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, esto implica que $\text{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T})$ es un subconjunto abierto de $\text{int}_{C(X)}(\mathcal{L})$ y por ende, de $C(X)$. Así, como $A \in \text{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subset C(X)$, tenemos que $\text{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T})$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{M}$, es decir, $\mathcal{T}$ es una vecindad de A en $\mathcal{M}$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, lo que es una contradicción, ya que $A \in \partial\mathcal{M}$. Por lo tanto, $A \in \partial\mathcal{L}$. Por otro lado, como $\text{int}_{C(X)}(\mathcal{L})$ es un abierto de $C(X)$ contenido en $C(J)$, entonces $\text{int}_{C(X)}(\mathcal{L})$ es también un abierto de $C(J)$, por lo que $\mathcal{L}$ es una vecindad de A en $C(J)$ que es una 2-celda y por ende, una 2-variedad tal que $A \in \partial\mathcal{L}$. Así, como $C(J)$ es una vecindad de A en $C(J)$ que es una 2-variedad por ser una 2-celda, entonces por la Proposición 3.5, se sigue que $A \in \partial C(J)$.

En base a esto, tenemos dos casos.

Caso 1. J es una curva cerrada simple.

Por [12, Ejemplo 5.2], tenemos que $A \in \partial C(J) = F_1(J)$, luego, $\mid A \mid = 1$. Como $A \subset \text{int}_X(J)$, entonces $A = \{p\}$, para algún $p \in \text{int}_X(J)$. Así, se cumple (a).

Caso 2. J es un arco.

Observemos que A es un subcontinuo de J. Luego, A es de un solo punto, $A = J$ o A es un subarco propio de J. Si A es de un solo punto, claramente se cumple (a). Si $A = J$, como $A \subset \text{int}_X(J)$, entonces $A = \text{int}_X(J)$. Esto implica que, A es un cerrado y abierto no vacío de X. Como X es conexo, $A = X$. Así, (b) se cumple. Por último, si A es un subarco propio de J y $E(J) = \{p, q\}$, por [12, Ejemplo 5.1], tenemos que $A \in \partial C(J) = F_1(J) \cup C(p, J) \cup C(q, J)$. Como $A \notin F_1(J)$, entonces $A \in C(p, J) \cup C(q, J)$. Si $A \in C(p, J)$, entonces $p \in A \subset \text{int}_X(J) \subset J$, así, $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y p es un extremo de X. Análogamente, si $A \in C(q, J)$, se puede demostrar que $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y q es un extremo de X tal que $q \in A \subset \text{int}_X(J)$. Así, (b) se cumple.

(b)$\Rightarrow$(a) Cuando X es un arco o una curva cerrada simple, el resultado es inmediato. Así, supongamos que X no es un arco ni una curva cerrada simple. Como $A \in C(X)$ y $A \subset \text{int}_X(J)$, entonces $A \in C(\text{int}_X(J)) \subset C(J)$. Luego, $C(\text{int}_X(J))$ es una vecindad de A en $C(X)$. Como $C(\text{int}_X(J))$ es un subconjunto abierto de $C(X)$ contenido en $C(J)$, entonces $C(\text{int}_X(J))$ es un subconjunto abierto de $C(J)$. Más aún, como $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, por [12, Ejemplo 5.1] y [12, Ejemplo 5.2], $C(J)$ es una 2-celda, y por ende, una 2-variedad. Así, por la Proposición 3.9, $C(\text{int}_X(J))$ es una 2-variedad cuya frontera como variedad, por la Proposición 3.10, es $\partial C(\text{int}_X(J)) = \partial C(J) \cap C(\text{int}_X(J))$. De aquí, si $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, $\text{int}_X(J)$ es homeomorfo a $(0, 1)$. De la construcción en [12, Ejemplo 5.1] y [12, Ejemplo 5.2], $C(\text{int}_X(J))$ es homeomorfo a $(0, 1) \times (0, 1)$.

Entonces, $\partial C(\mathrm{int}_X(J)) = F_1(\mathrm{int}_X(J))$. En otro caso, si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y p_J y q_J son los puntos extremos de J, con $p_J \in \mathrm{int}_X(J)$, $\mathrm{int}_X(J)$ es homeomorfo a $[0,1)$. De la construcción en [12, Ejemplo 5.1], $C(\mathrm{int}_X(J))$ es homeomorfo a $[0,1) \times [0,1)$. Así, $\partial C(\mathrm{int}_X(J)) = C(p_J, \mathrm{int}_X(J)) \cup F_1(\mathrm{int}_X(J))$.

Ahora bien, si se cumple (1), $A = \{p\}$, para algún $p \in \mathrm{int}_X(J)$. Por el párrafo anterior, $A \in \partial C(\mathrm{int}_X(J))$. Si se cumple (2), $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y existe un extremo p de X tal que $p \in A \subset \mathrm{int}_X(J)$. Como $p \in E(J) \cap \mathrm{int}_X(J)$ y X no es un arco, entonces $p = p_J$. Por el párrafo anterior, $A \in \partial C(\mathrm{int}_X(J))$. En cualquier caso, $C(\mathrm{int}_X(J))$ es una vecindad de A en $C(X)$ que es una 2-variedad tal que $A \in \partial C(\mathrm{int}_X(J))$. Como $A \in C(\mathrm{int}_X(J)) \cap \mathrm{int}_{C(X)}(C(J))$ y $C(J)$ es una 2-celda, por el Teorema 3.6, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de A en $C(X)$ que es una 2-celda, tal que $A \in \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset C(\mathrm{int}_X(J)) \cap \mathrm{int}_{C(X)}(C(J))$. Por la Proposición 3.5, $A \in \partial\mathcal{N}$. Esto muestra que $A \in \mathfrak{P}^\partial(X)$ y termina la prueba del Lema. □

Lema 4.4. *Si X es un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$, entonces $\Gamma_n(X) = \{A \in C_n(X) : A$ es conexo y existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \mathrm{int}_X(J)\} = \mathfrak{P}(X)$.*

Demostración. Primero demostremos que $\Gamma_n(X) = \{A \in C_n(X) : A$ es conexo y existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \mathrm{int}_X(J)\}$. Sea $A \in \Gamma_n(X)$, entonces $A \in C_n(X) - \mathfrak{P}_n(X)$ y A tiene una base de vecindades abiertas $\mathfrak{H}$ en $C_n(X)$ tal que, para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$, $\dim(\mathcal{U}) = 2n$ y $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$ es arco conexo. Como para cada vecindad $\mathcal{V}$ de A en $C_n(X)$, existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$ de A en $C_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset C_n(X)$, entonces, $\dim(A, C_n(X)) = \dim(A, \mathcal{U}) = 2n$, es decir, $\dim(A, C_n(X)) = 2n$. Así, por [16, Teorema 5], existe una gráfica finita D en X tal que $A \subset \mathrm{int}_X(D)$. Entonces $A \in \langle \mathrm{int}_X(D) \rangle_{C_n(X)} \subset C_n(D)$, es decir, $C_n(D)$, es una vecindad de A en $C_n(X)$. En consecuencia, $\mathfrak{H}$ contiene una base de vecindades abiertas $\mathfrak{H}'$ de A en $C_n(D)$ tal que, para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$, $\dim(\mathcal{U}) = 2n$, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{B}_n(X)$ es arco conexo y $\mathcal{U} \subset C_n(D)$.

Ahora mostremos que $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X) = \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$, para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$. Sean $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$ y $B \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$, entonces B tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda. Como $B \in \mathcal{U} \cap \mathrm{int}_{C_n(X)}(\mathcal{M})$, por el Teorema 3.6, existe una $2n$-celda $\mathcal{N}$ en $C_n(X)$ tal que $B \in \mathrm{int}_{C_n(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{U} \cap \mathrm{int}_{C_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{U} \subset C_n(D)$. Esto implica que $\mathcal{N}$ es una vecindad de B en $C_n(D)$ que es una $2n$-celda. Así, $B \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$.

Recíprocamente, dado $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$ y $B \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$, tenemos que B tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C_n(D)$ que es una $2n$-celda. Como $B \in \mathcal{U} \cap \operatorname{int}_{C_n(D)}(\mathcal{M})$, por el Teorema 3.6, existe una $2n$-celda $\mathcal{N}$ en $C_n(D)$ tal que $B \in \operatorname{int}_{C_n(D)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{U} \cap \operatorname{int}_{C_n(D)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{U} \subset C_n(D)$. Observemos que $\operatorname{int}_{C_n(D)}(\mathcal{N})$ es un abierto de $C_n(X)$, luego, $\mathcal{N}$ es una vecindad de B en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda. Por lo tanto, $B \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$. Así concluimos que $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X) = \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$.

Como por hipótesis, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$ es arco conexo, por el párrafo anterior, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$ es arco conexo. Además, $A \in \mathcal{U} - \mathfrak{P}_n(X) = \mathcal{U} - \mathfrak{P}_n(D)$. Así, hemos demostrado que $A \in \Gamma_n(D)$. Entonces por [10, Lema 3.6], A es conexo y por [16, Lema 11], existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)$.

Ahora supongamos que $A \in C_n(X)$ es conexo y existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)$. Como $R(J) = \emptyset$, por [10, Lema 3.6], $A \in C_n(J) - \mathfrak{P}_n(J)$ y A tiene una base de vecindades abiertas $\mathfrak{H}$ en $C_n(J)$ tal que para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$, $\dim(\mathcal{U}) \leq 2n$ y $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(J)$ es arco conexo. Observemos que por [16, Lema 11], $\dim(\mathcal{U}) = 2n$, para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$. Como por hipótesis $A \subset \operatorname{int}_X(J)$ y $A \in C_n(X)$, entonces $A \in \langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C_n(X)} \subset \operatorname{int}_{C_n(X)}(C_n(J)) \subset C_n(J)$, es decir, $\operatorname{int}_{C_n(X)}(C_n(J))$ es una vecindad de A en $C_n(J)$. En consecuencia, $\mathfrak{H}$ contiene una base de vecindades abiertas $\mathfrak{H}'$ de A en $C_n(X)$ tal que para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$, $\dim(\mathcal{U}) = 2n$, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{B}_n(J)$ es arco conexo y $\mathcal{U} \subset \operatorname{int}_{C_n(X)}(C_n(J))$. Procediendo como en párrafos anteriores, se demuestra que $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(J) = \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$ y $A \in \mathcal{U} - \mathfrak{B}_n(J) = \mathcal{U} - \mathfrak{B}_n(X)$. Por lo tanto, $A \in \Gamma_n(X)$.

Por último, demostremos que $\{A \in C_n(X) : A \text{ es conexo y existe } J \in \mathfrak{A}_S(X) \text{ tal que } A \subset \operatorname{int}_X(J)\} = \mathfrak{P}(X)$. Sean $A \in C_n(X)$ tal que A es conexo y $A \subset \operatorname{int}_X(J)$ para algún $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $A \in \langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C(X)} \subset C(J) \subset C(X)$, es decir, $C(J)$ es una vecindad de A en $C(X)$. Por [12, Ejemplo 5.2], $C(J)$ es una 2-celda, así, $A \in \mathfrak{P}(X)$.

Recíprocamente, sea $A \in \mathfrak{P}(X)$, entonces $A \in C(X)$ y A tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C(X)$ que es una 2-celda. Luego, $\dim(A, C(X)) = \dim(A, \mathcal{M}) = 2$, es decir, $\dim(A, C(X)) = 2$. Así, por [16, Lema 11], existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)$. Esto muestra que $A \in \{A \in C_n(X) : A \text{ es conexo y existe } J \in \mathfrak{A}_S(X) \text{ tal que } A \subset \operatorname{int}_X(J)\}$ y termina la demostración. □

Proposición 4.5. *Sean X y Y dos continuos localmente conexos y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. Si $h\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$.*

Demostración. Por la Observacion 4.1, $\mathfrak{P}(X)$ y $\mathfrak{P}(Y)$ son 2-variedades, por lo que podemos hablar de sus fronteras como variedad. Mostremos que $\partial\mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}^{\partial}(X)$. Sea $A \in \partial\mathfrak{P}(X)$, entonces $A \in \mathfrak{P}(X)$, por lo que A tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C(X)$ que es una 2-celda y $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \cap \mathfrak{P}(X)$. Por el Teorema 3.6, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de A en $C(X)$ que es una 2-celda tal que $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \cap \mathfrak{P}(X)$. Observemos que $\mathcal{N}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}(X)$. Si $A \notin \partial\mathcal{N}$, entonces existe una vecindad $\mathcal{S}$ de A en $\mathcal{N}$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Como $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$ es una vecindad de A en $\mathcal{N}$, por la Proposición 3.4, existe una vecindad $\mathcal{T}$ de A en $\mathcal{N}$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathcal{N}}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T} \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X) \subset C(X)$ y $\mathcal{T}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Notemos que $\mathcal{T}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}(X)$ que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, entonces $A \in Int_V\mathfrak{P}(X)$, lo que es una contradicción, ya que $A \in \partial\mathfrak{P}(X)$. Así, $A \in \partial\mathcal{N}$. Por la Observación 4.2, $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$.

Recíprocamente, sea $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$, por la Observación 4.2, $A \in \mathfrak{P}(X)$, A tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $\mathfrak{P}(X)$ que es una 2-celda y $A \in \partial\mathcal{M}$. Si $A \notin \partial\mathfrak{P}(X)$, entonces $A \in Int_V\mathfrak{P}(X)$. Luego, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de A en $\mathfrak{P}(X)$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Como $\mathcal{M}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}(X)$, por la Proposición 3.4, existe una vecindad $\mathcal{S}$ de A en $\mathfrak{P}(X)$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathfrak{P}(X)}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(X) \subset C(X)$ y $\mathcal{S}$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Observemos que $\mathcal{S}$ es una vecindad de A en $\mathcal{M}$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, lo que es una contradicción. Así, $A \in \partial\mathfrak{P}(X)$, y por lo tanto, $\partial\mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}^{\partial}(X)$.

Regresando a la demostración, por el párrafo anterior, tenemos que $\partial\mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}^{\partial}(X)$ y $\partial\mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. Como $\mathfrak{P}(X)$ está dado en términos de conceptos topológicos que se conservan bajo homeomorfismos, para $n = 1$, $h(\mathfrak{P}(X)) = \mathfrak{P}(X)$. Para $n \geq 3$, por el Lema 4.4, $\Gamma_n(X) = \mathfrak{P}(X)$ y $\Gamma_n(Y) = \mathfrak{P}(Y)$. Como $\Gamma_n(X)$ está dado en términos de conceptos topológicos, se tiene que $h(\Gamma_n(X)) = \Gamma_n(Y)$, o sea, $h(\mathfrak{P}(X)) = \mathfrak{P}(Y)$. Por la Proposición 3.3, $h(\partial\mathfrak{P}(X)) = \partial\mathfrak{P}(Y)$, es decir, $h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. Esto termina la prueba de la proposición. □

Teorema 4.6. *Si X es un continuo localmente conexo que no es un arco, entonces existe un homeomorfismo $h\colon \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) \to \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$ tal que $h(p) = \{p\}$ para cada $p \in \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - \bigcup\{\operatorname{int}_X(J) : J \in \mathfrak{A}_E(X)\}$ y, si $h(p) \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, entonces $p \in \mathcal{P}(X)$ o p es un punto extremo de J, para algún $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, donde $J \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ y $p \in \operatorname{int}_X(J)$.*

Demostración. Cuando X es una curva cerrada simple, por [12, Ejemplo 5.2], $C(X)$ es una 2-celda tal que $\partial C(X) = F_1(X)$. Luego, $F_1(X) \subset \mathfrak{P}^{\partial}(X)$. Más aún, $F_1(X) = \mathfrak{P}^{\partial}(X)$. En efecto, supongamos que $F_1(X) \neq \mathfrak{P}^{\partial}(X)$, entonces podemos suponer que $\mathfrak{P}^{\partial}(X) \not\subset F_1(X)$. Luego, existe $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$ tal que $A \notin F_1(X)$. Como X es una curva cerrada simple, $\mathfrak{A}_E(X) = \emptyset$. Entonces, por el Lema 4.3, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A = \{p\}$, para algún $p \in \operatorname{int}_X(J)$. Como $J = X$, $A \in F_1(X)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathfrak{P}^{\partial}(X) = F_1(X)$. De aquí, $\operatorname{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) = F_1(X)$. Como X es casi enrejado, por [16, Lema 1], $\operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) = X$. Entonces, por el Lema 2.5, existe $h\colon \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) \to \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$ tal que $h(p) = \{p\}$, para cada $p \in \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. Como X es una gráfica finita, $h(p) \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Así, supongamos que X no es un arco ni una curva cerrada simple.

Sean $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y p_J y q_J sus puntos extremos, con $p_J \in \operatorname{int}_X(J)$. Como X no es un arco, $\operatorname{int}_X(J) = J - \{q_J\}$. Sean $h_J\colon [0,1] \to J$ un homeomorfismo tal que $h_J(0) = q_J$ y $h_J(1) = p_J$, y $W = \bigcup\{J - \{q_J\}\colon J \in \mathfrak{A}_E(X)\}$. Observemos que W es un subconjunto abierto de X. Como $\mathcal{FA}(X) = \bigcup\{\operatorname{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, luego, $W \subset \mathcal{FA}(X)$.

Consideremos $h\colon \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) \to \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$ que está dada por

$$h(p) = \begin{cases} \{p\} & \text{si } p \in \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - W, \\ \{h_J(2s)\} & \text{si } p \in J \in \mathfrak{A}_E(X),\ p = h_J(s) \text{ y } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ h_J([2-2s, 1]) & \text{si } p \in J \in \mathfrak{A}_E(X),\ p = h_J(s) \text{ y } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Por el Lema 4.3, h es una función bien definida. Observemos que h es continua en $\operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - W$ y en W. Así, para concluir que h es continua, basta con demostrar que h es continua en cada punto de $\operatorname{Bd}_X(W)$. Sea $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de W tal que $\lim x_m = x$, para algún $x \notin W$. Mostremos que $\lim h(x_m) = \{x\}$. Como para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in W$, existe $J_m \in \mathfrak{A}_E(X)$ tal que $x_m \in \operatorname{int}_X(J_m)$. Si $\{J_m\colon m \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto finito, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ y una subsucesion $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \in J_N$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como X es un espacio métrico compacto, podemos suponer que $\lim x_{n_k} = x$. Más aún, como J_N es cerrado, $x \in J_N$. Así, $x \in J_N - W$. Esto implica que, $x \in \{q_{J_N}\}$, para algún $q_{J_N} \in \operatorname{Bd}_X(J_N)$, es decir, $x = q_{J_N}$. Por la continuidad de h, $\lim h(x_{n_k}) = h(q_{J_N}) = \{x\}$, es decir, $\lim h(x_{n_k}) = \{x\}$. Entonces, $\lim h(x_n) = \{x\}$. Por lo tanto, h es continua. Así, podemos asumir que $J_m \neq J_k$, si $m \neq k$. Como X no es un arco y X es compacto, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $q_{J_m} \in \operatorname{Bd}_X(J_m)$ tal que $\lim q_{J_m} = q$, para algún $q \in X$. Por [16, Lema 8], $\lim J_m = \{q\}$, además, $\lim x_m = q$, así, $x = q$. Por lo tanto, $\lim h(x_m) = \{x\}$. De cualquier modo, h es continua.

Ahora veamos que h es una función biyectiva. Por construcción, h es inyectiva. Por otra parte, para probar que h es sobreyectiva, observemos cómo se comporta geométricamente la función h en W cuando $s \in [0,1]$. Si $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, los elementos $h(p) = \{h_J(2s)\}$, son puntos en el hiperespacio $C(J)$ (que a su vez son singulares en el subespacio J de X) que van desde $\{q_J\}$ a $\{p_J\}$, tomando todos los puntos del arco J. Por otra parte, si $s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, los elementos $h(p) = h_J\left([2-2s,1]\right)$ son de dos formas: un singular $\{p_J\}$ cuando $s = \frac{1}{2}$ y arcos de J con el punto en común p_J cuando $s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ en el subespacio J de X, que a su vez en el hiperespacio $C(J)$ se pegan en el punto $\{p_J\}$, pero que no se superponen con los puntos $h(p) = \{h_J(2s)\}$, cuando $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Con ayuda de lo descrito en el parráfo anterior, veamos que $\mathfrak{P}^{\partial}(X) \subset h\left(\mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right)\right)$. Sea $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$, entonces por el Lema 4.3, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que uno de los siguientes dos casos se cumplen:

Caso 1. $A = \{p\}$, para algún $p \in \mathrm{int}_X(J)$.

Si $p \notin W$, entonces $p \in \mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right) - W$. Luego, por la construcción de h, se sigue que $h(p) = \{p\} = A$. En otro caso, si $p \in W$, $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, luego existe $s \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $h(p) = \{h_J(2s)\} = \{p\} = A$.

Caso 2. $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y existe un extremo p de X tal que $p \in A \subset \mathrm{int}_X(J)$. Notemos que $h_J(1) = p \in A \cap \mathrm{int}_X(J)$.

Podemos suponer que A no es un singular. Entonces, existe $s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tal que $h(p) = h_J\left([2-2s,1]\right) = A$.

De esta forma, $\mathfrak{P}^{\partial}(X) \subset h\left(\mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right)\right)$. Sea $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$, entonces existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathfrak{P}^{\partial}(X)$ tal que $\lim A_m = A$. Como para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $p_m \in \mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right)$ tal que $h\left(p_m\right) = A_m$, entonces existe una sucesión $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right)$. Como X es compacto y $\mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right)$ es un conjunto cerrado de X, $\lim p_m = p$, para algún $p \in \mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right)$. Así, por la continuidad de h, $h(p) = \lim h\left(p_m\right) = \lim A_m = A$, es decir, $h(p) = A$, para algún $p \in \mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right)$. Esto muestra que $\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) \subset h\left(\mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right)\right)$. Por lo tanto, h es sobreyectiva.

Finalmente, sea $p \in \mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X)\right)$ tal que $h(p) \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Si $h(p) = \{p\}$, claramente $p \in \mathcal{P}(X)$. En otro caso, si $h(p) \neq \{p\}$, entonces $p \in W$, por lo que $p \in J - \{q_J\} = \mathrm{int}_X(J)$, para algún $J \in \mathfrak{A}_E(X)$. Como $h(p) \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, $h(p) \not\subset \mathrm{int}_X(J)$, ya que si $h(p) \subset \mathrm{int}_X(J)$, como J es una gráfica finita, entonces $h(p) \subset \mathcal{G}(X)$, de donde $h(p) \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$, lo que es una contradicción. Así, $h(p) \not\subset \mathrm{int}_X(J)$, por lo que $h(p) = J = h_J\left([0,1]\right)$ y $p = h_J(1) = p_J$, por la construcción de la función h. Es decir, p es un punto extremo de J, con $J \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ y $p \in \mathrm{int}_X(J)$. Esto termina la prueba del teorema. $\square$

Teorema 4.7. *Si X y Y son continuos localmente conexos casi enrejados, $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ y $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Cuando X es un arco, por [10, Teorema 3.8 (b)] el resultado es inmediato. Análogamente, si Y es un arco el resultado se cumple. Así, supongamos que X y Y no son arcos. Sea $h\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ un homeomorfismo. Por la Proposición 4.5, $h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. Como h conserva cerraduras por ser un homeomorfismo, $h\left(\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$. Entonces, $h\restriction_{\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)}\colon \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) \to \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$ también es un homeomorfismo. Como X y Y no son arcos, por el Teorema 4.6, $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{FA}(X))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$ y $\mathrm{cl}_{C(Y)}(\mathcal{FA}(Y))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$, así, $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ es homemorfo a $\mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Como X y Y son continuos casi enrejados, por [16, Lema 1], $X = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ y $Y = \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Por lo tanto, X es homeomorfo a Y. □

Teorema 4.8. *Si X y Y son continuos localmente conexos casi enrejados que no son arcos y $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Sea $h\colon C(X) \to C(Y)$ un homeomorfismo. Por el Teorema 4.5, $h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. Como h conserva cerraduras por ser un homeomorfismo, entonces $h\left(\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$. Esto implica que $h\restriction_{\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)}\colon \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) \to \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$ es un homeomorfismo. Como X no es un arco, por el Teorema 4.6, $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{FA}(X))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$. Análogamente, $\mathrm{cl}_{C(Y)}(\mathcal{FA}(Y))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$. Así, $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ es homemorfo a $\mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Como X y Y son continuos casi enrejados, por [16, Lema 1], $X = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ y $Y = \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Por lo tanto, X es homeomorfo a Y. □

Con el proposito de extender las conclusiones del Teorema 4.7 y el Teorema 4.8, para el caso $n = 2$, introducimos la siguiente notación.

Dados un continuo X que no es un arco ni una curva cerrada simple, y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, sea

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(J, K) = {} & \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right) \\ & \cap \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right).\end{aligned}$$

Además, cuando J es un arco y $E(J) = \{p_J, q_J\}$, supondremos que $q_J \in \mathrm{Bd}_X(J)$. En cambio, si J es una curva cerrada simple, q_J será el único punto de J tal que $J - \{q_J\}$ es un subconjunto abierto de X. Observemos que $q_J \notin \mathrm{int}_X(J)$, ya que X no es una curva cerrada simple. También, dependiendo si J es un arco o una curva cerrada simple, denotamos a $\mathcal{E}(J)$ de la siguiente manera. Si J es un arco, $\mathcal{E}(J) = C(J)$. Si J es una curva cerrada simple, $\mathcal{E}(J) = \{A \in C(J)\colon A = J$ o $A = \{p\}$ para algún $p \in J$ o A un subarco de J tal que $q_J \notin A$ o A es un subarco de J tal que q_J es uno de sus puntos extremos$\}$. Notemos que en ambos casos, $\mathcal{E}(J) = \mathrm{cl}_{C(X)}(C(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle)$.

Sea W_0 el continuo obtenido al tomar $W_0 = D - \mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}(E)$, donde D y E son discos cerrados en el plano $\mathbb{R}^2$, E es un subconjunto propio de D, y E y D son tangentes, véase la Figura 1.

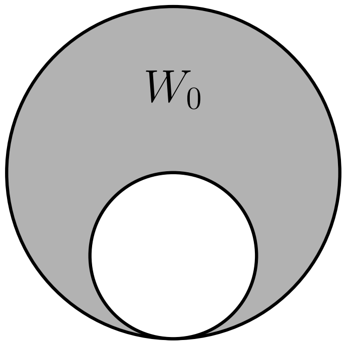


Figura 1: Continuo W_0.

Lema 4.9. *Si X es un continuo que no es un arco ni una curva cerrada cerrada simple y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces:*

(a) *si J es un arco, $\mathcal{E}(J)$ es una 2-celda;*

(b) *si J es una curva cerrada simple, $\mathcal{E}(J)$ es homeomorfo a W_0, donde el punto de tangencia correspondiente es $\{q_J\}$.*

Demostración. (a) Si J es un arco, por [12, Ejemplo 5.1], $\mathcal{E}(J)$ es una 2-celda.

(b) Si J es una curva cerrada simple, de la construcción en [12, Ejemplo 5.2], vemos que $\mathcal{E}(J)$ es homeomorfo al continuo W_0. Así, concluye la prueba de este lema. $\square$

Teorema 4.10. *Sea X un continuo localmente conexo que no es una curva cerrada simple. Entonces, $\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es la clase de componentes de $\mathfrak{P}_2(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathfrak{P}_2(X)$, entonces existe una vecindad $\mathcal{M}$ de A en $C_2(X)$ que es una 4-celda. Observemos que $\dim(A, \mathcal{M}) = \dim(A, C_2(X))$. Más aún, por [25, Teorema 9.5], $\dim(\mathcal{M}) = \dim(I^4) = 4$, en particular, $\dim(A, \mathcal{M}) = 4$. Luego, $\dim(A, C_2(X)) = 4$. Por [16, Lema 11], existen $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, con $A \in \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$, luego tenemos que, $A \in \bigcup\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Es decir, $\mathfrak{P}_2(X) \subset \bigcup\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Recíprocamente, sea $A \in \bigcup\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, entonces, existen $L, M \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $A \in \langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)}$.

Caso 1. $L = M$ y L es un arco libre maximal de X.

Tenemos que $\langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)} = \langle \mathrm{int}_X(L)\rangle_{C_2(X)} \subset C_2(L)$. Como $\langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)}$ es un subconjunto abierto de $C_2(X)$ y por [9, Lema 2.2], $C_2(L)$ es una 4-celda, se sigue que $C_2(L)$ es una vecindad de A en $C_2(X)$ que es una 4-celda. Así, $A \in \mathfrak{P}_2(X)$.

Caso 2. $L = M$ y L es una circunferencia libre de X.

Como X no es una curva cerrada simple, si $p \in L$ es tal que $L - \{p\}$ es un abierto de X, entonces $\mathrm{int}_X(L) = L - \{p\}$. Luego, $\langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)} = \langle \mathrm{int}_X(L)\rangle_{C_2(X)} = \{A \in C_2(X) \colon A \subset L - \{p\}\}$. Dado $A \in \langle \mathrm{int}_X(L)\rangle_{C_2(X)}$, existe un arco $J \subset L - \{p\}$ tal que $A \subset \mathrm{int}_X(J)$. Así, $A \in \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)} \subset C_2(J)$, esto es, $C_2(J)$ es una vecindad de A en $C_2(X)$ que es una 4-celda. Por lo tanto, $A \in \mathfrak{P}_2(X)$.

Caso 3. $L \neq M$.

Por [21, Lema 3.1], $\mathrm{int}_X(L) \cap \mathrm{int}_X(M) = \emptyset$. Sea $A \in \langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)}$, entonces $A \subset \mathrm{int}_X(L) \cup \mathrm{int}_X(M)$, $A \cap \mathrm{int}_X(L) \neq \emptyset$ y $A \cap \mathrm{int}_X(M) \neq \emptyset$. Así, las componentes de A son $A_1 = A \cap \mathrm{int}_X(L)$ y $A_2 = A \cap \mathrm{int}_X(M)$. Como $A_1 \subset X \cap \mathrm{int}_X(L)$, por el Teorema 3.9, existe un arco L_1 de X tal que $A_1 \subset \mathrm{int}_X(L_1) \subset L_1 \subset \mathrm{int}_X(L)$. Luego, $A_1 \subset L \cap \mathrm{int}_X(L_1) \subset \mathrm{int}_L(L_1) \subset L_1 \subset \mathrm{int}_X(L)$, es decir, $A_1 \subset \mathrm{int}_L(L_1) \subset L_1 \subset \mathrm{int}_X(L)$. Similarmente, se puede demostrar que $A_2 \subset \mathrm{int}_M(M_1) \subset M_1 \subset \mathrm{int}_X(M)$, para algún arco M_1 de X. Entonces $\mathrm{int}_L(L_1)$ y $\mathrm{int}_M(M_1)$ son abiertos de X. Además, $L_1 \cap M_1 \subset \mathrm{int}_X(L) \cap \mathrm{int}_X(M) = \emptyset$, es decir, L_1 y M_1 son ajenos. Observemos que la función $\varphi \colon C(L_1) \times C(M_1) \to \langle L_1, M_1\rangle_{C_2(X)}$ que está dada por $\varphi(H, G) = H \cup G$ es un homeomorfismo y $A \in \langle \mathrm{int}_L(L_1), \mathrm{int}_M(M_1)\rangle_{C_2(X)} \subset \langle L_1, M_1\rangle_{C_2(X)} =$

$\varphi\left(C(L_1) \times C(M_1)\right)$. Como $C(L_1)$ y $C(M_1)$ son 2-celdas, por la Proposición 3.11, $C(L_1) \times C(M_1)$ es una 4-celda, así, como $\langle \mathrm{int}_L(L_1), \mathrm{int}_M(M_1)\rangle_{C_2(X)}$ es un subconjunto abierto de $C_2(X)$, entonces $\langle L_1, M_1\rangle_{C_2(X)}$ es una vecindad de A en $C_2(X)$ que es una 4-celda. Por lo tanto, $A \in \mathfrak{P}_2(X)$.

De lo anterior, $\mathfrak{P}_2(X) = \bigcup\{\langle \mathrm{int}_X\left(J\right), \mathrm{int}_X\left(K\right)\rangle \colon J, K \in \mathfrak{A}_S\left(X\right)\}$. Como por [11, Lema 2.1], para cada $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, $\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$ es una componente de $\mathfrak{P}_2(X)$, se sigue que las componentes de $\mathfrak{P}_2(X)$ son todos los conjuntos de esta forma. □

Lema 4.11. [16, Lema 32] *Si X es un continuo localmente conexo tal que $R\left(X\right) \neq \emptyset$, entonces $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) = \{A \in \mathfrak{P}_2(X) \colon A$ es conexo o A tiene una componente de un solo punto, o A contiene un extremo de $X\}$.*

Lema 4.12. [16, Lema 33] *Sea X un continuo localmente conexo tal que $R\left(X\right) \neq \emptyset$. Si $J, K \in \mathfrak{A}_S\left(X\right)$ son tales que $\mathrm{Bd}_X\left(J\right) \subset \mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X) - J\right)$ y $\mathrm{Bd}_X\left(K\right) \subset \mathrm{cl}_X\left(\mathcal{FA}(X) - K\right)$, entonces $\mathcal{D}\left(J, K\right) = \{\{p\} \cup A \colon p \in \mathrm{Bd}_X\left(J\right)$ y $A \in \mathcal{E}(K)$, o $p \in \mathrm{Bd}_X(K)$ y $A \in \mathcal{E}(J)\}$.*

Dados X un continuo tal que $R(X) \neq \emptyset$, $p \in X$ y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, denotamos como $\mathcal{D}_p^J = \{\{p\} \cup A \colon A \in \mathcal{E}(J)\}$.

Lema 4.13. *Dado X un continuo tal que $R\left(X\right) \neq \emptyset$, sean $p \in X$, $J \in \mathfrak{A}_S\left(X\right)$ y $f \colon \mathcal{E}\left(J\right) \to \mathcal{D}_p^J$ que está dada por $f\left(A\right) = \{p\} \cup A$, para cada $A \in \mathcal{E}\left(J\right)$. Entonces, f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean $p \in X$, $J \in \mathfrak{A}_S\left(X\right)$ y $\mathcal{D}_p^J = \{\{p\} \cup A \colon A \in \mathcal{E}\left(J\right)\}$. Consideremos $f \colon \mathcal{E}(J) \to \mathcal{D}_p^J$ que está dada por $f(A) = \{p\} \cup A$, para cada $A \in \mathcal{E}(J)$. Observemos que f es sobreyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{E}(J)$ tales que $f(A) = f(B)$, es decir, $\{p\} \cup A = \{p\} \cup B$. Si $p \in A$, entonces A es conexo. Esto implica que $p \in B$ y por ende, B es conexo. Así, $A = B$. Si $p \notin A$, entonces $\{p\} \cup A$ es disconexo y $\{p\}$ y A son las componentes de $\{p\} \cup A$. Como $\{p\} \cup A$ es disconexo, entonces $p \notin B$. Luego, $\{p\} \cup B$ es disconexo y $\{p\}$ y B son las componentes de $\{p\} \cup B$. Asi, $A = B$. De cualquier modo, f es inyectiva. Por el Lema 2.4 y el Lema 4.9, f es una función continua y $\mathcal{E}\left(J\right)$ es un conjunto compacto, respectivamente. Por lo tanto, f es una biyectiva, continua, con dominio compacto y codominio de Hausdorff, así, f es un homeomorfismo. □

Lema 4.14. *Si X es un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

(1) *si* $p, q \in \mathrm{Bd}_X(J) \cup (X - J)$, *con* $p \neq q$,

$$\mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J = \begin{cases} \{\{p,q\}, J\}, & si\ p, q \in J, \\ \emptyset, & si\ p \notin J\ \ o\ q \notin J; \end{cases}$$

(2) *si* $\mathrm{Bd}_X(J) = \{p, u\}$ *y* $\mathrm{Bd}_X(K) = \{q, v\}$,

$$\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J = \begin{cases} \{\{p,q\}, \{p,v\}\}, & si\ v \neq q,\ u \neq p,\ u = v\ \ y\ p = q, \\ \{\{p,q\}\}, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Demostración. (1) Sean $J \in \mathfrak{A}_S(X)$y $p, q \in \mathrm{Bd}_X(J) \cup (X - J)$, con $p \neq q$. Veamos quién es $\mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J$. Sea $D \in \mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J$, entonces $D = \{p\} \cup A = \{q\} \cup B$, con $A, B \in \mathcal{E}(J)$. Tenemos dos casos.

Caso 1. $p, q \in J$.

Entonces, $p, q \in \mathrm{Bd}_X(J)$. Como $p \neq q$ y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tenemos que $p, q \in \mathrm{Bd}_X(J) = E(J)$ y J es un arco. Si $p \in A$, entonces $D = A$ y $q \in A$. Esto implica que A es un subcontinuo de un arco J tal que $E(J) \subset A$. Luego, $D = A = J$. Si $p \notin A$, entonces D es disconexo y $\{p\}$ y A son las componentes de D. Luego, $q \notin B$, $\{q\} \cup B$ es disconexo y $\{q\}$ y B son las componentes de D. Como $\{p\} \neq \{q\}$, entonces $A = \{q\}$ y $B = \{p\}$. Así, $D = \{p, q\}$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J = \{\{p, q\}, J\}$.

Caso 2. $p \notin J$ o $q \notin J$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \notin J$. Sea $D \in \mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J$, entonces $D = \{p\} \cup A = \{q\} \cup B$. Como $A \subset J$ y $p \notin J$, entonces D es disconexo y $\{p\}$ y A son sus componentes. Como D es disconexo, entonces $q \notin B$ y $\{q\}$ y B son las componentes de D. Como $\{p\} \neq \{q\}$, entonces $A = \{q\}$ y $B = \{p\}$. Así, $D = \{p, q\}$. Esto implica que $D \in \mathcal{D}_q^J$. De aquí, $p \in J$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J = \emptyset$.

De los casos 1 y 2, obtenemos lo deseado.

(2) Ahora, consideremos $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, con $J \neq K$ y $p \in \mathrm{Bd}_X(J)$ y $q \in \mathrm{Bd}_X(K)$. Veamos quién es $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J$. Sea $D \in \mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J$, entonces $D = \{p\} \cup A = \{q\} \cup B$, con $A \in \mathcal{E}(K)$ y $B \in \mathcal{E}(J)$. Como $J \neq K$, entonces $\mathrm{int}_X(J) \cap K = \emptyset$, así, $K \subset X - \mathrm{int}_X(J)$. Esto implica que $K \cap J \subset \mathrm{Bd}_X(J)$. Como $B \subset \{p\} \cup A$, $\{p\} \subset \mathrm{Bd}_X(J)$, $B \subset J$ y $A \subset K$, entonces $B \subset (\{p\} \cup A) \cap J = \{p\} \cup (A \cap J) \subset \{p\} \cup (K \cap J) \subset \mathrm{Bd}_X(J)$. De aquí, como B es conexo y $\mathrm{Bd}_X(J)$ es finita, se sigue que $B = \{b\}$, para algún $b \in \mathrm{Bd}_X(J)$.

De manera análoga, se puede ver que $A = \{a\}$, para algún $a \in \mathrm{Bd}_X(K)$. Así, $D = \{p\} \cup \{a\} = \{q\} \cup \{b\}$, con $a \in \mathrm{Bd}_X(K)$ y $b \in \mathrm{Bd}_X(J)$. Por el Lema 4.9, $F_1(J) \subset \mathcal{E}(J)$ y $F_1(K) \subset \mathcal{E}(K)$. Luego, $\{q, d\} \in \mathcal{D}_q^J$, para cada $d \in J$, y $\{p, e\} \in \mathcal{D}_p^K$, para cada $e \in K$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J = \{\{p, a\} : a \in \mathrm{Bd}_X(K)\} \cap \{\{q, b\} : b \in \mathrm{Bd}_X(J)\}$. Así, si $\mathrm{Bd}_X(J) = \{p, u\}$ y $\mathrm{Bd}_X(K) = \{q, v\}$, entonces $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J = \{\{p, q\}, \{p, v\}\} \cap \{\{q, p\}, \{q, u\}\} = \{\{p, q\}\} \cup (\{\{p, v\}\} \cap \{\{q, u\}\})$. De aquí, si $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J \neq \{\{p, q\}\}$, entonces $\{\{p, v\}\} \cap \{\{q, u\}\} \not\subset \{\{p, q\}\}$, por lo que $\{\{p, v\}\} \cap \{\{q, u\}\} \neq \emptyset$. Luego, existe $w \in \{\{p, v\}\} \cap \{\{q, u\}\}$ tal que $w = \{p, v\} = \{q, u\} \neq \{p, q\}$. Así, $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J \neq \{\{p, q\}\}$ si y solo si $\{p, v\} = \{q, u\} \neq \{p, q\}$ si y solo si $v \neq q$, $u \neq p$, $u = v$ y $p = q$. Por lo tanto, el enunciado (2) se cumple. $\square$

Teorema 4.15. [16, Lema 34] Dados X y Y continuos localmente conexos tales que $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$, sean $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $L, M \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tales que $\mathrm{Bd}_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$, $\mathrm{Bd}_X(K) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - K)$, $\mathrm{Bd}_Y(L) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - L)$ y $\mathrm{Bd}_Y(M) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - M)$. Si $h\colon C_2(X) \to C_2(Y)$ es un homeomorfismo y $h\left(\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right) = \langle \mathrm{int}_Y(L), \mathrm{int}_Y(M)\rangle_{C_2(Y)}$, entonces los siguientes enunciados se cumplen:

(1) si $J = K$ y J es una curva cerrada simple, entonces $L = M$ y L es una curva cerrada simple;

(2) si $J = K$, J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $L = M$, L es un arco y $L \notin \mathfrak{A}_E(Y)$;

(3) si $J = K$ y $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $L = M$ y $L \in \mathfrak{A}_E(Y)$;

(4) si $J \neq K$, entonces $L \neq M$;

(5) si X y Y son casi enrejados, $J = K$ y $p \in J - \mathrm{int}_X(J)$, entonces $h(\{p\})$ es un conjunto de un solo punto y $h(\{p\}) \subset L - \mathrm{int}_Y(L)$.

Teorema 4.16. *Sean X y Y continuos localmente conexos y casi enrejados. Si $C_2(X)$ es homeomorfo a $C_2(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Cuando X es un arco o una curva cerrada simple, por [9, Teorema 4.1], el resultado es inmediato. Similarmente, si Y es un arco o una curva cerrada simple, el resultado se cumple. Supongamos que X y Y no son un arco ni una curva cerrada simple y sea $h\colon C_2(X) \to C_2(Y)$ un

homeomorfismo. Como $\mathfrak{P}_2(X)$ está dado en términos de conceptos topológicos que se preservan bajo homeomorfismos, $h\left(\mathfrak{P}_2(X)\right) = \mathfrak{P}_2(Y)$. Por [11, Lema 2.1] las componentes de $\mathfrak{P}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $\langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$, donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, como $h\left(\langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right)$ es una componente de $\mathfrak{P}_2(Y)$, existen $L, M \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tales que $h\left(\langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right)$
$= \langle \operatorname{int}_Y(L), \operatorname{int}_Y(M)\rangle_{C_2(Y)}$. Como X es casi enrejado, $\operatorname{Bd}_X(J) \subset \operatorname{cl}_X(X - J) = \operatorname{cl}_X(\operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - \operatorname{cl}_X(J))$
$\subset \operatorname{cl}_X(\operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)) = \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$, es decir, $\operatorname{Bd}_X(J) \subset \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$. Similarmente, $\operatorname{Bd}_X(K) \subset \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - K)$. Como Y también es casi enrejado, $\operatorname{Bd}_Y(L) \subset \operatorname{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - L)$ y $\operatorname{Bd}_Y(M) \subset \operatorname{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - M)$. Si $J = K$, por el Teorema 4.15 (1), (2), (3), $L = M$. Luego, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h\left(\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)}\right) = \langle \operatorname{int}_Y(L_J)\rangle_{C_2(Y)}$. Notemos que la argumentación anterior, también se puede aplicar al homeomorfismo $h^{-1}\colon C_2(Y) \to C_2(X)$. Así, para cada $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $h^{-1}\left(\langle \operatorname{int}_Y(L)\rangle_{C_2(Y)}\right) = \langle \operatorname{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$, esto implica que $\langle \operatorname{int}_Y(L)\rangle_{C_2(Y)} = \langle \operatorname{int}_Y(L_J)\rangle_{C_2(Y)}$. Luego, $\operatorname{int}_Y(L) = \operatorname{int}_Y(L_J)$, por lo que $L = \operatorname{cl}_Y(\operatorname{int}_Y(L)) = \operatorname{cl}_Y(\operatorname{int}_Y(L_J)) = L_J$. Por lo tanto, $\bigcup\{L\colon L \in \mathfrak{A}_S(Y)\} = \bigcup\{L_J\colon L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$.

Dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, con $J \neq K$, por [21, Lema 3.1], $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$, entonces $\langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)} \cap \langle \operatorname{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} = \emptyset$. Utilizando que h es inyectiva, $h\left(\langle \operatorname{int}_X(J)_{C_2(X)}\right) \cap h\left(\operatorname{int}_X(K)_{C_2(X)}\right) = \emptyset$, es decir, $\langle \operatorname{int}_Y(L_J)\rangle_{C_2(Y)} \cap \langle \operatorname{int}_Y(L_K)\rangle_{C_2(Y)} = \emptyset$. Así, $L_J \neq L_K$.

Ahora, sea $p \in X - \bigcup\{\operatorname{int}_X(L)\colon L \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Afirmamos que $h(\{p\}) = \{y\}$, para algún $y \in Y - \bigcup\{\operatorname{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. Como $X = \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$, existe una sucesión $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathcal{FA}(X)$ tal que $\lim p_m = p$. Como $\mathcal{FA}(X) = \bigcup\{\operatorname{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p_m \in \operatorname{int}_X(J_m)$. Como X no es un arco ni una curva cerrada simple, para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos elegir $q_m \in \operatorname{Bd}_X(J_m)$. Si $\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es finito, como $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión del conjunto cerrado $\bigcup\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, entonces $p \in \bigcup\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Así, existe $J_s \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p \in J_s$, por lo que $p \in \operatorname{Bd}_X(J_s)$. Por el Teorema 4.15 (5), tenemos que $h(\{p\}) = \{y\}$, para algún $y \in \operatorname{Bd}_Y(L_{J_s})$. Así, supongamos que $\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es infinito y $J_m \neq J_k$, si $m \neq k$. Por [16, Lema 8], $\lim J_m = \{p\}$, entonces $\lim q_m = p$, esto es, $\lim\{q_m\} = \{p\}$. Por el Teorema 4.15 (5), se tiene que $h(\{q_m\}) = \{w_m\}$, para algún $w_m \in \operatorname{Bd}_Y(L_{J_m})$. Como h es continua,

$\lim h(\{q_m\}) = \lim\{w_m\} = h(\{p\})$. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Bd}_Y(L_{J_m}) \subset Y - \bigcup\{\mathrm{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$, entonces $\{w_m\}$ es una sucesión del conjunto cerrado $Y - \bigcup\{\mathrm{int}_X(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. Así, existe $y \in Y - \bigcup\{\mathrm{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$ tal que $\lim w_m = y$, por lo que $h(\{p\}) = \lim\{w_m\} = \{y\}$, para algún $y \in Y - \bigcup\{\mathrm{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. De esta forma, podemos considerar las funciones continuas $\Phi_X\colon X \to F_1(X)$ y $\Phi_Y\colon Y \to F_1(Y)$ que están dadas por $\Phi_X(x) = \{x\}$ y $\Phi_Y(y) = \{y\}$, respectivamente, y $g_1 = {\Phi_Y}^{-1} \circ h \circ \Phi_X\colon X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(L)\colon L \in \mathfrak{A}_S(X)\} \to Y - \bigcup\{\mathrm{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ que es continua.

Si J es una curva cerrada simple, por el Teorema 4.15 (1),(5), L_J es una curva cerrada simple y $h(\{q_J\}) = \{q_{L_J}\}$, con $q_{L_J} \in \mathrm{Bd}_Y(L_J)$, es decir, $g_1(q_J) = q_{L_J}$. Sea $g_J\colon J \to L_J$ un homeomorfismo tal que $g_J(q_J) = q_{L_J}$. Similarmente, si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, por el Teorema 4.15 (1), (3), $L_J \in \mathfrak{A}_E(Y)$ y $g_1(q_J) = q_{L_J} \in \mathrm{Bd}_Y(L_J)$. Sea $g_J\colon J \to L_J$ un homeomorfismo tal que $g_J(q_J) = q_{L_J}$. Finalmente, si J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, entonces por el Teorema 4.15 (2), (5), L_J es un arco, $L_J \notin \mathfrak{A}_E(Y)$ y $h(\{p_J\})$, y $h(\{q_J\})$ son conjuntos de un solo punto contenidos en $\mathrm{Bd}_Y(L_J) = \{p_{L_J}, q_{L_J}\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $h(\{p_J\}) = \{p_{L_J}\}$. Luego, $h(\{q_J\}) = \{q_{L_J}\}$. Así, $g_1(p_J) = p_{L_J}$ y $g_1(q_J) = q_{L_J}$. Sea $g_J\colon J \to L_J$ un homeomorfismo tal que $g_J(p_J) = p_{L_J}$ y $g_J(q_J) = q_{L_J}$. En cualquiera de los casos, $g_J(\mathrm{Bd}_X(J)) = \mathrm{Bd}_Y(L_J)$. Como $\{\mathrm{int}_X(J) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es una familia de subconjuntos abiertos y ajenos entre sí de X, por el Teorema 2.6, existe una única función continua $g_2\colon \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\} \to Y$ tal que $g_2 \restriction_{\mathrm{int}_X(J)} = g_J \restriction_{\mathrm{int}_X(J)}$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Sea $g\colon X \to Y$ tal que $g \restriction_{X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}} = g_1$ y $g \restriction_{\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(Y)} = g_2$. Notemos que $g \restriction_J = g_J$ es continua para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Luego, para mostrar que g es continua, basta probar que g es continua en $\mathrm{Bd}_X(\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\})$.

Sea $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de $\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ tal que $\lim p_m = p$, para algún $p \in X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p_m \in \mathrm{int}_X(J_m)$. Como X no es un arco ni una curva cerrada simple, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $q_m \in \mathrm{Bd}_X(J_m)$. Si $\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es finito, entonces $p \in \bigcup\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Por lo que, $p \in J_s$, para algún $J_s \in \mathfrak{A}_S(X)$. Luego, $p \in \mathrm{Bd}_X(J_s)$. Así, supongamos que $J_m \neq J_k$, si $m \neq k$. Por [16, Lema 8], $\lim J_m = \{p\}$. Entonces, $\lim q_{J_m} = p$, así, $\lim\{q_{J_m}\} = \{p\}$. Como para cada $m \in \mathbb{N}$, $q_{J_m} \in \mathrm{Bd}_X(J_m)$, se sigue que $q_{J_m} \in X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, luego $g(q_{J_m}) = g_1(q_{J_m}) = {\Phi_2}^{-1}(h(\{q_{J_m}\})) \in L_{J_m}$. Esto implica que, $\{g(q_{J_m})\} = \Phi_2(g(q_{J_m})) = h(\{q_{J_m}\})$. Por la continuidad de

h, $\lim h(\{q_{J_m}\}) = h(\{p\}) = \{g(p)\} = \lim\{g(q_{J_m})\}$. Así, $\lim g(q_{J_m}) = g(p)$. Como $L_{J_m} \neq L_{J_k}$, si $J_k \neq J_m$, $g(q_{J_m}) = g_{J_m}(q_{J_m}) \in L_{J_m}$ y $\lim g(q_{J_m}) = g(p)$, por [16, Lema 8], $\lim L_{J_m} = \{g(p)\}$. Además, $g(p_m) = g_{J_m}(p_m) \in L_{J_m}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces, $\lim g(p_m) = g(p)$. Esto demuestra que g es continua.

Por último, veamos que g es biyectiva. Notemos primero que $g(\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}) = \bigcup\{\mathrm{int}_Y(L_J) : L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. Por la inyectividad de g_1, la inyectividad de $g_J = g \restriction J$ y $g_1(X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}) \cap g_2(\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}) \subset (Y - \bigcup\{\mathrm{int}_X(L_J) : L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)\}) \cap (\bigcup\{\mathrm{int}_X(L_J)\}\colon L_J \in \mathfrak{A}_S(Y))\} = \emptyset$, se sigue que g es inyectiva. Como $\mathcal{FA}(Y) = \bigcup\{\mathrm{int}_Y(L_J)\colon L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$, se debe de cumplir que, $\mathcal{FA}(Y) \subset g(\mathrm{cl}_X(\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\})) = g(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))) = g(X)$, es decir, $\mathcal{FA}(Y) \subset g(X)$. Esto implica que, g es sobreyectiva. Por lo tanto, g es un homeomorfismo. □

Teorema 4.17. *Sean X y Y continuos localmente conexos y casi enrejados. Si $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces:*

(a) *si $n = 1$ y X no es un arco ni una curva cerrada simple, entonces X es homeomorfo a Y;*

(b) *si $n \neq 1$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. (a) Cuando $n = 1$ y X es una gráfica finita distinta de un arco y una curva cerrada simple, por [10, Teorema 3.8 (a)], el resultado es inmediato. Así, podemos suponer que X no es un gráfica finita. Para utilizar el Teorema 4.8, probemos que Y no es un arco ni una curva cerrada simple. Supongamos que Y es un arco o una curva cerrada simple. Por [12, Ejemplo 5.1] y [12, Ejemplo 5.2], $C(Y)$ es una 2-celda. Como $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces, $C(X)$ es una 2-celda, así, $\dim(C(X)) < \infty$. Como X es localmente conexo, por [12, Teorema 72.2], X es una gráfica finita, lo que es una contradicción. Por lo tanto, Y no es un arco ni una curva cerrada simple. Por el Teorema 4.8, X es homeomorfo a Y.

(b) Cuando $n = 2$, por el Teorema 4.16, X es homeomorfo a Y y el resultado se cumple. El caso cuando $n \geq 3$, se sigue del Teorema 4.7. Así concluye la prueba del Teorema. □

Finalmente, culminamos con la demostración de que los continuos enrejados tienen n-ésimo hiperespacio único.

Teorema 4.18. *Supongamos que X es un continuo enrejado. Si $n \neq 1$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$. Si X no es un arco ni una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que Y es un continuo tal que $C_n(X)$ es homeomorfo $C_n(Y)$, entonces existe $h\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ un homeomorfismo. Como X es un continuo enrejado, por el Lema 4.8, X es localmente conexo. Entonces por [23, Teorema 3.2], $C_n(X)$ es un continuo localmente conexo. Como h es homeomorfismo, por [4, Proposición 8.25], $h\left(C_n(X)\right) = C_n(Y)$ es un continuo localmente conexo. Así, por [23, Teorema 3.2], Y es un continuo localmente conexo. Por otra parte, como $\mathfrak{F}_n\left(X\right)$ está dado en términos de conceptos topológicos y h es un homeomorfismo, se sigue que $h\left(\mathfrak{F}_n\left(X\right)\right) = \mathfrak{F}_n\left(Y\right)$. Como X es enrejado, por [16, Teorema 5], $\mathfrak{F}_n\left(X\right)$ es denso en $C_n(X)$, luego, como h conserva cerraduras por ser un homeomorfismo, tenemos que $C_n(Y) = h\left(C_n(X)\right) = h\left(\mathrm{cl}_{C_n(X)}\left(\mathfrak{F}_n(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)}\left(h\left(\mathfrak{F}_n(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)}\left(\mathfrak{F}_n(Y)\right)$, es decir, $C_n(Y) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)}\left(\mathfrak{F}_n(Y)\right)$. Esto muestra que $\mathfrak{F}_n(Y)$ es denso en $C_n(Y)$. Entonces, por [16, Teorema 5], Y es un continuo enrejado. En particular, Y es un continuo casi enrejado. Así, X y Y son continuos localmente conexos y casi enrejados. Por lo tanto, si $n = 1$ y X no es un arco ni una curva cerrada simple, por el Teorema 4.17 (a), X tiene hiperespacio único $C(X)$. En otro caso, si $n \neq 1$ y X es cualquier continuo enrejado, por el Teorema 4.17 (b), X tiene hiperespacio único $C_n(X)$. □

5 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haberse tomado el tiempo en la revisión de este trabajo. Sus sugerencias permitieron mejorar la calidad de este trabajo.

Bibliografía

[1] Gerardo Acosta y David Herrera Carrasco, *Dendrite without unique hyperspace*, Houston Journal of Mathematics, 35 (2009) 451–467.

[2] José Gerardo Ahuatzi Reyes, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *Continuos localmente conexos sin hiperespacio único $C_n(X)$*,

Capítulo 9, *Matemáticas y sus aplicaciones 6*, Fomento editorial BUAP, primera edición, 2015.

[3] R. D. Anderson, *On topological inifinite deficiency*, Michigan Math, J., 14, (1967), 365–383.

[4] Fidel Casarrubias Segura y Ángel Tamariz Mascarúa, *Elementos de topología de conjuntos*, 2011.

[5] Vianey Córdoba Salazar, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *La topología de los hiperespacios*, Capítulo 26, *Matemáticas y sus aplicaciones 1*, Fomento Editorial BUAP, primera edición, 2011.

[6] James Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[7] Ryszard Engelking, *General topology*, Sigma series in pure mathematics, Heldermann Verlag, 1989.

[8] Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *Encajes*, Capítulo 19, *Matemáticas y sus aplicaciones 2*, Fomento Editorial BUAP, primera edición, 2013.

[9] Alejandro Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glasnik Matematicki Series, 37 (2002), 347–363.

[10] Alejandro Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$*, Topology Proceedings, 27 (2003), 179–188.

[11] Alejandro Illanes, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$ II*, Topology Proceedings, 34 (2009), 77–96.

[12] Alejandro Illlanes y Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspace fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[13] Janusz J. Charatonik and Alejandro Illanes *Local connectedness in hyperespaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36 (2006), 811–856.

[14] James R. Munkres, *Topología*, Segunda Edición, Prentice Hall, Madrid, España, 2002.

[15] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[16] Rodrigo Hernández-Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, 43, (2013), 1583–16323.

[17] David Herrera-Carrasco, Fernando Macías Romero y Francisco Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, Journal Of Mathematics Research, 4, (2012), 1–9.

[18] W. Hurewiz and H. Wallman, *Dimension Theory*, volume 4 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1941.

[19] Ignacio L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Limusa, México, D.F., 2008.

[20] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Polish Scientific Publishers and Academic Press, Inc. New York, 1968.

[21] Antonio. Libreros-López, Fernado Macías-Romero y David Herrera-Carrasco *On the uniqueness of the n-fold pseudo-hyperspace suspension for locally connected continua*, Topology and its Applications, 312 (2022), 108053.

[22] Verónica Martínez-de-la-Vega, *Dimension of the n-fold hyperspaces of graphs*, Houston Journal of Mathematics, 32 (2006), 783–799.

[23] Sergio Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X*, Topology and its Applications, 109 (2001), 237–256.

[24] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

[25] Sam B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, no.18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[26] Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
leonardo.ramirezap@alumno.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 21, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-10-1

Capítulo 6

Unicidad de conos sobre curvas localmente conexas

Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

En este trabajo probamos que si X y Y son dos curvas localmente conexas que no son retractos absolutos como vecindades, entonces X es homeomorfo a Y si y sólo si $Cono(X)$ es homeomorfo a $Cono(Y)$.

1 Introducción

Sea (X, τ) un espacio topológico. Se define el **Cono** de X como el espacio cociente

$$Cono(X) = X \times [0,1]/(X \times \{1\})$$

donde $X \times [0,1]$ es el **cilindro** de X. El presente trabajo considerará a los espacios X como continuos, es decir, espacios métricos, conexos, compactos y no degenerados. Si $n \in \mathbb{N}$, estaremos interesados en los siguientes hiperespacios de X:

$$2^X = \{A \subset X \colon A \text{ es un subconjunto no vacío y cerrado de } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \text{ y}$$

$$C(X) = C_1(X).$$

A estos hiperespacios se les otorgará la métrica de Hausdorff [4, Theorem 2.2]. Los hiperespacios $F_n(X)$ y $C_n(X)$ se conocen como *$n-$ésimo producto simétrico* de X y el *$n-$ésimo hiperespacio* de X, respectivamente.

En el estudio de continuos, sus hiperespacios y conos, surgió la interrogante sobre la relación entre ellos. Particularmente, J. T. Rogers en [11] analiza la relación entre el Cono de un continuo X y su hiperespacio de continuos $C(X)$, buscando aquellos continuos tales que $Cono(X)$ y $C(X)$ fueran homeomorfos. Descubrió que si X es un arco, una curva cerrada simple o un indescomponible cuyos subcontinuos sean arcos, entonces X posee esta propiedad conocida como cono = hiperespacio. En 1977, S. B. Nadler en su artículo [9] determina que existen exactamente ocho continuos hereditariamente descomponibles con la propiedad de cono = hierpespacio y años más tarde, A. Illanes encuentra una caracterización para esta propiedad, véase [3]. Una propiedad que ha adquirido amplia notoriedad en el estudio de hiperespacios es precisamente la unicidad. Un continuo X que pertenece a una familia de continuos Λ posee **hiperespacio único** $\mathcal{K}(X)$ si se tiene un continuo Y tal que cada que $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ son homeomorfos, entonces X y Y también son homeomorfos. Utilizando una idea similar, se define la propiedad de **cono único** cada que un continuo X cumple que $Cono(X)$ es homeomorfo a $Cono(Y)$, para cualquier continuo Y, y esto implique que X y Y sean homeomorfos. Comencemos con un ejemplo que da pie a esta propiedad. Sabemos que $Cono([0,1])$ es homeomorfo a $C([0,1])$, por lo que $C([0,1])$ es una 2-celda. Por otro lado, $Cono(\mathcal{S}^1)$ es homeomorfo a una 2-celda a través del homeomorfismo $f : Cono(\mathcal{S}^1) \to \mathcal{S}^1$ definido por $f(\theta,t) = (1-t)e^{i\theta}$. De esta manera, $Cono([0,1])$ y $Cono(S^1)$ son homeomorfos a pesar de que $[0,1]$ y $\mathcal{S}^1$ no lo son. Consecuentemente, ni $[0,1]$ ni $\mathcal{S}^1$ poseen la propiedad de cono único.

Recientemente, A. Illanes, D. y V. Martínez de-la-Vega descubrieron una gran familia de continuos que cumplen con esta condición, la cual será abordada en este capítulo.

2 Notación y definiciones

Dado un subconjunto A de un continuo X, A°, $\mathrm{cl}_X(A)$, y $\mathrm{Bd}_X(A)$, denotan el *interior*, la *cerradura*, y la *frontera* de A en X, respectivamente. Si d es la métrica de X, $\varepsilon > 0$, y $a \in X$, el conjunto $\{x \in X : d(a,x) < \varepsilon\}$ es denotado por $B_X(a,\varepsilon)$, o $B(a,\varepsilon)$ cuando no exista posibilidad de confusión. Sea $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{B(a,\varepsilon) : a \in A\}$. Dados $n, r \in \mathbb{N}$ y subconjuntos $U_1, \ldots, U_r$ de X, sea

$$\langle U_1, \ldots, U_r\rangle_n = \{A \in C_n(X) : A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada}$$

$$i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Es conocido que [4, Theorem 1.2] la familia de conjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n$, donde cada U_i es abierto en X, es una base para la topología de $C_n(X)$. Sean $p \in X$ y β número cardinal. Decimos que *p tiene orden menor o igual que β en X*, denotado por $\mathrm{ord}(p, X) \leq \beta$, cada que p tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ en X tal que la cardinalidad de $\mathrm{Bd}_X(U)$ es menor o igual a β, para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que *p tiene orden igual a β en X* ($\mathrm{ord}(p, X) = \beta$) si se cumple que $\mathrm{ord}(p, X) \leq \beta$ y $\mathrm{ord}(p, X) \nleq \alpha$ para cada número cardinal $\alpha < \beta$. Sean $E(X) = \{x \in X\colon \mathrm{ord}(x, X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X\colon \mathrm{ord}(x, X) = 2\}$, y $R(X) = \{x \in X\colon \mathrm{ord}(x, X) \geq 3\}$. Los elementos de $E(X)$ (respectivamente, $O(X)$ y $R(X)$) son llamados *puntos extremos* (respectivamente, *puntos ordinarios* y *puntos de ramificación*) de X.

Un punto $x \in X$ es un *punto Euclideano* si tiene una vecindad en X homeomorfa al espacio Euclideano E^n. El conjunto de puntos Euclideanos de X se denota por $\alpha(X)$. Un punto $x \in X - \alpha(X)$ es un *punto semi-Euclideano* si tiene una vecindad homeomorfa a la mitad del espacio Euclideano. Es decir, si existe una vecindad de x en $X - \alpha(X)$ homeomorfa al conjunto $\{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \geq 0\}$. El conjunto de puntos semi-Euclideanos se denota por $\beta(X)$.

Los componentes de $\alpha(X)$ se conocen como *componentes Euclideanos.*

Para visualizar de una mejor manera estas definiciones, observemos lo siguiente para una n-celda.

- Si $x \in \mathrm{int}(I^n)$, entonces $x \in \alpha(I^n)$.
- Si $x \in \mathrm{Fr}(I^n)$, entonces $x \in \beta(I^n)$.
- Más aún, $\gamma(I^n) = \emptyset$, por lo cual I^n es una variedad.

Lemma 2.1. *Si C es una curva localmente conexa, entonces $\alpha(C \times [0,1)) = \alpha(C) \times (0,1)$.*

Demostración. Sea $(x,t) \in \alpha(C \times [0,1))$. Entonces existe una vecindad V de (x,t) homeomorfa a E^n. Recordemos que π_1 y π_2 son las proyecciones naturales y son funciones continuas. Entonces, $\pi_1(V)$ es una vecindad de x homeomorfa a E^1. Esto implica que $x \in \alpha(C)$. Por otro lado, si $t \in (0,1)$, también tenemos que $\pi_2(V)$ es vecindad de t. Supongamos finalmente que $t = 0$. Notemos que $C \times \{0\}$ es homeomorfo a C, por lo que todo punto

Euclideano del primero es Euclideano del segundo. Esto prueba la primera inclusión. La segunda inclusión se prueba de manera similar. $\square$

Un punto $x \in X$ es *aproximadamente Euclideano* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua $f : X \times [0,1] \to X$ tal que

(i) $f(x,0) = x$,

(ii) $d(f(x,t),x) < \varepsilon$, para cada $(x,t) \in X \times [0,1]$,

(iii) $x \in \alpha(f(X \times 1))$,

(iv) $\dim_p[f(X \times 1)] = \dim_p[X]$.

Podemos tener un mejor acercamiento a los puntos aproximadamente Euclideanos con los siguientes ejemplos.

(1) Sean $Q_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(x + \frac{3}{2^{n+1}}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4^{n+1}}, n \in \mathbb{N}\}$ y $X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\right) \cup ([0,1] \times 0)$. Entonces, el punto $(0,0)$ es aproximadamente Euclideano, pero no es Euclideano.

(2) Todo punto Euclideano de X también es aproximadamente Euclideano.

(3) En una variedad, los puntos Euclideanos y aproximadamente Euclideanos coinciden.

Ahora un resultado que caracteriza los puntos aproximadamente Euclideanos en el producto de una curva localmente conexa. Se sigue de [1, Theorem 7].

Theorem 2.2. *Sea C una curva localmente conexa. Un punto $(x,t) \in C \times [0,1)$ es aproximadamente Euclideano en $C \times [0,1)$ si y sólo si $\operatorname{ord}_C(x) = 2$ y C es localmente contráctil en x y $t \in (0,1)$.*

3 Resultados preliminares

Una función continua $h : X \times [0,1] \to X$ se conoce como una *deformación isotópica en X* si $h(x,0) = x$ para cada $x \in X$ y la función $h_t(x) = h(x,t)$ es un encaje en X para cada $t \in [0,1]$. Una función continua $h : X \times [0,1] \to X$

se conoce como una *deformación isotópica sobre* X si $h(x,0) = x$ para cada $x \in X$ y la función $h_t(x) = h(x,t)$ es un homeomorfismo sobre X para cada $t \in [0,1]$.

Dos puntos x_1, x_2 se dice que son **isotópicos** en X si existe una deformación isotópica sobre X, $h : X \times [0,1] \to X$, tal que $h(x_1, 1) = x_2$. A partir de la definición es claro que la relación isotopía entre puntos es de equivalencia. Las clases de equivalencias se conocen como *componentes isotópicos* de X.

Consideramos ahora algunas propiedades de los componentes isotópicos y su relación con los componentes Euclideanos.

Lemma 3.1. *(i) Los componentes isotópicos de X son arco conexos.*

(ii) Si $x \in X$ y $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces la imagen de un componente isotópico de x es un componente isotópico de $h(x)$.

(iii) Si x, y pertenecen al mismo componente isotópico de X, entonces X es localmente homeomorfo en x y y.

(iv) Un componente Euclideano de X es un componente isotópico de X.

Demostración. (i) Sean x_1, x_2 puntos en una componente isotópica de X. Entonces existe una deformación isotópica $h : X \times [0,1] \to X$ tal que $h(x_1, 0) = x_1$, $h(x_1, 1) = x_2$ y $h_t(x) = h(x,t)$ es un homeomorfismo sobre X. Observemos que h_1 es un arco que une x_1 con x_2 en X, por lo que se sigue el resultado. (ii) y (iii) Se siguen del hecho que h es un homeomorfismo. □

Utilizando Lema 3.1, se tiene la siguiente observación.

Observación 3.1. Una curva localmente conexa C tiene los siguientes componentes isotópicos:

(i) componentes Euclideanos,

(ii) subconjuntos unipuntuales de $\beta(C)$,

(iii) subconjuntos unipuntuales de $\gamma(C)$.

Lemma 3.2. *Sean C una curva localmente conexa distinta del intervalo y S^1, y $\mathcal{A}$ el conjunto de los componentes Euclideanos de C. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$, donde:*

- *$A \in \mathcal{A}_1$, si $\operatorname{cl}(A) \cap \beta(C) = \emptyset$ y $|\operatorname{cl}(A) \cap \gamma(C)| = 1$,*

- *$A \in \mathcal{A}_2$, si $\operatorname{cl}(A) \cap \beta(C) = \emptyset$ y $|\operatorname{cl}(A) \cap \gamma(C)| = 2$,*

- *$A \in \mathcal{A}_3$, si $\operatorname{cl}(A) \cap \beta(C) \neq \emptyset$.*

Demostración. Puesto que C es un continuo de dimensión 1 localmente conexo, los componentes Euclideanos A serán homeomorfos a (0,1) con $\operatorname{cl}(A) \cap \gamma(C)$ que contienen uno o dos puntos, por la definición de $\gamma(C)$. □

Lemma 3.3. *Sean C una curva localmente conexa (distinta del intervalo y S^1) y $\mathcal{B}$ el conjunto de componentes isotópicos de $C \times [0,1)$. Entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{7} \mathcal{B}_i$, donde esots conjuntos son ajenos por pares y:*

- *$B \in \mathcal{B}_i$, si $B = A \times (0,1)$ y $A \in \mathcal{A}_i$, para $i = 1,2,3$.*

- *$B \in \mathcal{B}_4$, si $B = A \times \{0\}$, para $A \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$,*

- *$B \in \mathcal{B}_5$, si $B = (\operatorname{cl}(A) \cap \beta(C)) \times [0,1) \cup A \times \{0\}, A \in \mathcal{A}_3$,*

- *$B \in \mathcal{B}_6$, si $B = \{x\} \times (0,1)$, donde $x \in \gamma(C)$,*

- *$B \in \mathcal{B}_7$, si $B = \{x\} \times \{0\}$, donde $x \in \gamma(C)$.*

Demostración. Para cada $B \in \bigcup_{i=1}^{7} \mathcal{B}_i$, existe una componente isotópica que contiene a B. Notemos que si $B \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, por Lemma 2.1 y 3.1 (iv), se tiene que B es una componente isotópica de $C \times [0,1)$. Por otro lado, notemos que $\beta(C \times [0,1)) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5} B$. Por Lema 3.1, se tiene que cada $B \in \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5$ es una componente isotópica de $C \times [0,1)$. Por Lema

□

Lemma 3.4. *Sean C y C' dos curvas localmente conexas, tales que $C \neq \mathcal{S}^1$, $C' \neq [0,1]$, $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{7} \mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}' = \bigcup_{i=1}^{7} \mathcal{B}'_i$ son los conjuntos de componentes isotópicas de $C \times [0,1)$ y $C \times [0,1)$ definidas en el Lema 3.3, respectivamente. Si $h : C \times [0,1) \to C' \times [0,1)$ es un homeomorfismo, entonces h envía cada $B \in \mathcal{B}_i$ en $h(B) \in \mathcal{B}'_i$, para cada $i = 1,2,\ldots,7$.*

Demostración. Por Lema 3.1 (b), tenemos que si $B \in \mathcal{B}$, entonces $h(B) \in \mathcal{B}'$. Veamos entonces que si $B \in \mathcal{B}_i$, entonces $h(B) \in \mathcal{B}_i'$, para cada $i = 1, 2, \ldots, 7$. Sea $B \in \mathbb{B}_1$. Entonces $\mathrm{cl}(B)$ es homeomorfa a $\mathcal{S}^1 \times [0,1)$ y $\mathrm{cl}(B) \cap \mathrm{cl}((C \times [0,1)) - \mathrm{cl}(B))$ es homeomorfo a $[0,1)$.

Sea $B \in \mathbb{B}_2$. Entonces $\mathrm{cl}(B)$ es homeomorfa a $[0,1] \cap [0,1)$ y $\mathrm{cl}(B) \cap \mathrm{cl}((C \times [0,1)) - \mathrm{cl}(B))$ es homeomorfo a $\{0,1] \times [0,1)$.

Sea $B \in \mathbb{B}_3$. Entonces $\mathrm{cl}(B)$ es homeomorfa a $[0,1] \times [0,1)$ y $\mathrm{cl}(B) \cap \mathrm{cl}((C \times [0,1)) - \mathrm{cl}(B))$ es homeomorfo a $[0,1)$.

Puesto que los componentes isotópicos de $\bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{B}_i$ son de dimensión 2 y están definidos por a través de propiedades topológicas, podemos concluir que h preserva tipos i de componentes isotópicas, para cada $i = 1, 2, 3$.

Si $B \in \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5$, entonces B se encuentra en la frontera de exactamente una componente isotópica C_B de $C \times [0,1)$. Más aún, si $B \in \mathcal{B}_4$, se tiene que $C_B \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ y si $B \in \mathcal{B}_5$, entonces $C_B \in \mathcal{B}_3$. Nuevamente, debido a que h preserva componentes isotópicos del tipo $i = 1, 2, 3$, se sigue que también preserva componentes del tipo $i = 4, 5$. Notemos que si $B \in \mathcal{B}_7$, tenemos que B es de dimensión cero. Más aún, es el único que cumple esta condición, por lo que h también preserva componentes isotópicos del tipo 7.

Finalmente, ya que h preserva componentes isotópicos de los tipos $i = 1, 2, 3, 4, 5,$
7, se sigue que h también preservará los del tipo 6.

□

4 Descomposición del cono

Vamos a construir el homeomorfismo entre dos curvas localmente conexas utilizando el siguiente teorema.

Theorem 4.1. *Si C y C' son curvas localmente conexas y $C \times [0,1)$ es homeomorfo a $C' \times [0,1)$, entonces C es homeomorfo a $[0,1)$.*

Demostración. Observemos que si $\gamma(C) = \emptyset$, entonces C es un arco o una curva cerrada simple, por lo que el resultado se sigue. De esta forma, vamos a asumir que $gamma(C \times [0,1)) \neq \emptyset$. Esto implica que $[0,1] \neq C \neq \mathcal{S}^1$. Debido a que existen solamente dos variedades de dimensión 1 (la curva cerrada simple y el arco), C no es una variedad. Por definición, $\gamma(C) \neq \emptyset$. Sea $h : C \times [0,1) \to$

$C' \times [0,1)$ un homeomorfismo. Por Lema 3.3, para cada $x \in (\gamma(C) \times \{0\}$, se tiene que $\{x\}$ es una compoenente isotópica de $C \times [0,1)$. Luego, por Lema 3.4, tenemos que h envía $\gamma(C) \times \{0\}$ a $\gamma(C') \times \{0\}$. Tomemos $h_0(x) = h(x)$, para cada $x \in \gamma(C) \times \{0\}$.

Para cada $x \in \beta(C) \times \{0\}$ se tiene que existe una componente isotópica $K(x) \in \mathcal{B}_5$ tal que $x \in K(x)$. Por Lema 3.4, $h(K(x)) \in \mathcal{B}_5$ y $h(K(x)) = (A \cap \beta(C')) \times [0,1) \cup A \times \{0\}$, para algún $A \in \mathcal{A}_3^{'}$. Notemos que $\beta(C') \times \{0\} \cap h(K(x)) = (A \cap \beta(C')) \times \{0\}$. Puesto que $C' \neq [0,1]$, tenemos que $|\operatorname{cl}(A) \cap \beta(C')| = 1$. Se sigue que existe un punto $x' \in \beta(C') \times \{0\} \cap h(K(x))$. Definamos entonces $h_0(x) = x'$, para cada $x \in \beta(C) \times \{0\}$.

Veamos que esta función es continua. Por la definición de h_0, $h_0|_{\gamma(C)\times\{0\}}$ es continua. Por esta razón, tomaremos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $\beta(C) \times \{0\}$ y supongamos que converge a un punto $x_0 = (x_0^C, x_0^{[0,1)}$. Es claro que $x_0^{[0,1)} = 0$. Debido a que en cada vecindad de x_0^C hay elementos de $\beta(C)$, x_0^C no tiene una vecindad homeomorfa a (0,1) o [0,1). Luego, $x_0^C \in \gamma(C)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una componente isotópica $K(x_n) \in \mathcal{B}_5$ tal que $x_n \in K(x_n) = (A_n \cap \beta(C)) \times [0,1) \cup A_n \times \{0\}$, donde A_n es una componente Euclideana de C y $A_n \in \mathcal{A}_3$. Ya que C es una curva localmente conexa, los diámetros de las componentes de C tienden a cero. Luego, $\lim \operatorname{diám}(A_n) = 0$ y $K(x_n)$ tiende a $\{x_0^C\} \times [0,1)$. Se sigue que $h_0(x_n)$ tiende a $h(x_0) = h(x_0)$. Puesto que $\gamma(C) \cup \beta(C)$ es compacto, h_0 definida de esta forma es un homeomorfismo entre $(\gamma(C) \cup \beta(C)) \times \{0\}$ y $(\gamma(C') \cup \beta(C')) \times \{0\}$. Por [1, Lema 11], se extiende este homeomorfismo a $C \times [0,1)$ y se sigue el resultado. $\square$

Si X y Y son homeomorfos, entonces sus respectivos conos también lo son. Para probar el reverso, veamos el siguiente resultado.

Lemma 4.2. *Si C y C' son curvas localmente conexas, no son retractos absolutos como vecindades y $h : Cono(C) \to Cono(C')$ es un homeomorfismo, entonces h envía el vértice de $Cono(C)$ al vértice de $Cono(C')$.*

Demostración. Si C es una curva localmente conexa, existen tres tipos de puntos en $Cono(C)$:

(i) $(c,t) \in C \times [0,1)$ tales que c tiene una vecindad en C que es una dendrita,

(ii) $(c,t) \in C \times [0,1)$ tal que toda vecindad de c en C contiene una curva cerrada simple,

(iii) el vértice de $Cono(C)$.

Sea $x \in Cono(C)$. Si x satisface la condición (i), entonces $Cono(C)$ es localmente contractil en x y todos los puntos de x cercanos a él. Por otro lado, si x satisface la condición (ii), entonces $Cono(C)$ no es localmente contractil en x. Finalmente, si x es el vértice del $Cono(C)$, entonces $Cono(C)$ es localmente contractil en x. Sin embargo, como C no es un retracto absoluto como vecindad, en cada vecindad de x existe un punto y tal que $Cono(C)$ no es localmente contractil en y. Puesto que el vértice de $Cono(C)$ es el único punto que satisface esta propiedad, todo homeomorfismo entre $Cono(C)$ y $Cono(C')$ enviará el vértice en el vértice, justo como queríamos probar.

□

Finalmente, podemos probar el resultado más importante del capítulo.

Theorem 4.3. *Sean X y Y dos curvas localmente conexas que no son retractos absolutos como vecindades. Entonces, $Cono(X)$ es homeomorfo a $Cono(Y)$ si y sólo si X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Sea $h : Cono(X) \to Cono(Y)$ un homeomorfismo. Por Lema 4.2, $h(x_0) = y_0$, donde x_0 y y_0 son vértices de los conos en X y Y, respectivamente. Usando Teorema 4.1, se tiene el resultado. □

Más aún, se tiene una extensión a este resultado:

Theorem 4.4. *[5, Teorema 1.5] Sean X y Y curvas localmente conexas distintas del intervalo, una curva cerrada simpe, un n-odo y una n-teta gráfica, para cada $n \geq 3$. Entonces, $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos si y sólo si X es homeomorfo a Y.*

5 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por su tiempo y valiosas observaciones sobre este proyecto, las cuales mejoraron significativamente su calidad.

Bibliografía

[1] K. Borsuk, *On the decomposition of a locally connected compactum into Cartesian product of a curve and a manifold*, Fund. Math. 40 (1953), 140–159.

[2] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.

[3] Alejandro Illanes, *The cone= hyperspace property, a characterization*, Topology and its Applications, 113 (2009), 61–67.

[4] Alejandro Illanes, Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[5] Alejandro Illanes, Verónica Martínez-de-la-Vega, Daria Michalik, *The uniqueness of cones over locally connected curves*, Topology and its Applications 320 (2022), 108242.

[6] R.C. Kirby, L.C. Siebenmaan, *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations,* (AM-88), vol. 88, 1977.

[7] K. Kuratowski, *Topology Vol. II*, Academic Press, New York, (1968).

[8] Sergio Macías, *Topics on continua*, 2nd ed., Springer, Cham, Switzerland, 2018.

[9] Sam B. Nadler, Jr., *Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic*, Transactions of the American Mathematical Society, 230 (1977), 321–345.

[10] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

[11] James T. Rogers, Jr., *The Cone = Hyperspace Property*, Canadian Journal of Mathematics, 24(2), 279–285.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

gerardo.hernandezval@alumnos.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 21, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-10-1

Capítulo 7

El n-ésimo producto simétrico suspensión

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo se presentan algunas propiedades del hiperespacio $SF_n(X)$ para un continuo X, llamado el n-ésimo producto simétrico suspensión de X. Se dan antecedentes históricos y la construción de este hiperespacio. También se presentan algunos modelos para ciertos continuos. Se estudian propiedades como la conexidad local, unicoherencia, aposindesis, funciones inducidas y unicidad para dicho hiperespacio.

1 Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Dado un continuo X, un hiperespacio de X es una colección específica de subconjuntos de X. Los hiperespacios que se estudían en este trabajo son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \ y \ A \text{ es un cerrado de } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : \ A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : \ A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

La familia 2^X es llamada hiperespacio de los subconjuntos cerrados de X, y $C_1(X)$ es el hiperespacio de los subcontinuos de X. Al hiperespacio $F_n(X)$ se le conoce como el n-ésimo producto simétrico de X. Note que, el primer producto simétrico de X es el hiperespacio $F_1(X)$ de los subconjuntos singulares de X, y se puede ver que X es homeomorfo a $F_1(X)$.

En 1979, S. B. Nadler Jr. [29] introdujo el concepto de hiperespacio suspensión de un continuo X como el espacio cociente $C(X)/F_1(X)$, que se obtiene de $C(X)$ al identificar a $F_1(X)$ en un punto y se denota como $HS(X)$. En 2004, S. Macías [22] definió el n-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo X, para un entero n mayor que 1, como el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$, y se denota como $HS_n(X)$.

En 2010, F. Barragán [4] definió para $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, el n-ésimo producto simétrico suspensión de X, denotado por $SF_n(X)$, como el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$.

Dado un continuo X, sea $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X), HS_n(X), SF_n(X)\}$. Decimos que un continuo X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$, si para cualquier continuo Y tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y. Una clase de continuos C tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$ si para cada continuo $X \in C$, se tiene que X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$.

En la sección 3, se construye al n-ésimo producto simétrico de un continuo y se prueba que éste es un continuo. En la sección 4, se dan algunos ejemplos de modelos geométricos del n-ésimo producto simétrico suspensión para algunos continuos. En la secciones 5, 6, 7 y 8 se presentan algunas propiedades del n-ésimo producto simétrico de un continuo. En la sección 9, se enuncian algunos teoremas referentes al tema de unicidad del n-ésimo producto simétrico de un continuo.

2 Preliminares

Dado un continuo X denotaremos por d a la métrica de X. Dado $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, la bola con centro en a y de radio ε, se denota por $B_d(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$. Para cualquier $A \subset X$ y $\delta > 0$ definimos la **nube** de radio δ alrededor de A, como $N_d(A, \delta) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \delta)$. La métrica d en X induce una métrica en 2^X, que es la métrica de Hausdorff, que se define de la siguiente manera: $H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(B, \varepsilon) \;\; y \;\; B \subset N_d(A, \varepsilon)\}$, con $A, B \in 2^X$.

Dado un continuo X, en [17, Corolario 14.10] se prueba que $(2^X, H)$ y $(C(X), H)$ son continuos, así podemos hablar de hiperespacios de 2^X. Decimos que $X \approx Y$ cuando X es homeomorfo a Y. En este trabajo $\mathbb{R}^n$ se considera con la topología euclidiana y por ende todos sus subespacios.

Definición 2.1. Sean X, Y espaciós metricos, decimos que la función $f : X \to Y$ es un **encaje** si f es un homeomorfismo entre X y $f(X)$.

Definición 2.2. Un **arco** es cualquier conjunto homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$.

Definición 2.3. Un continuo X es una **gráfica finita** si se puede expresar como la unión de un número finito de arcos tales que, cada par de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos. Cada arco que conforma a una gráfica finita le llamamos arista.

Definición 2.4. Sea X un espacio métrico y $p \in X$. Diremos que X es **localmente conexo en p**, si para toda vecindad U de p, existe V abierto y conexo tal que $p \in V \subset U$. Se dice que X es localmente conexo, si es localmente conexo en todos sus puntos.

Definición 2.5. Sea X un continuo, decimos que X es **colocalmente conexo**, siempre que cada punto en X tenga una base local de vecindades abiertas cuyos complementos son conexos.

Una n**-celda** es un espacio homeomorfo a la bola cerrada B^n en $\mathbb{R}^n$, donde $B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$ y $||\mathbf{x}||$ denota la norma euclidiana.

Definición 2.6. Dado X una gráfica finita, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, decimos que p es de **orden** n en X, denotado por $ord(p, X) = n$, si p tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un n-odo simple que tiene a p como vértice.

Los puntos de orden 1 son puntos extremos, los de orden 2 son puntos ordinarios y los puntos de orden 3 o mayor son puntos de ramificación, estos se identifican con $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$, respectivamente. El conjunto de vertices de X se denota por $V(X) = E(X) \cup O(X)$ y una arista será un arco cuyos puntos extremos son vértices.

Sean $U_1, U_2, ..., U_m$ una colección finita de subconjuntos de X, $\langle U_1, U_2, ..., U_m\rangle_n$ denota el subconjunto de $F_n(X)$

$$\{A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_k \text{ y } A \cap U_k \neq \emptyset \text{ para cada } k \in \{1, 2, ..., m\}\}.$$

Se sabe por [17, Teorema 1.2] que la familia de todos los subconjuntos de $F_n(X)$ de la forma $\langle U_1, U_2, ..., U_m\rangle_n$, donde cada U_i es un subconjunto abierto de X, es una base para la topologia inducida por la métrica de Hausdorff en $F_n(X)$.

3 Construcción

En esta sección construimos el n-ésimo producto simétrico suspensión para un continuo X. También probaremos que este espacio es un continuo. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $F_n(X)$ es un continuo.

Teorema 3.1. *Sea X^n es producto topológico de n copias del continuo (X, d) por sí mismo. Sea $f_n : X^n \to F_n(X)$ la función definida por $f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Entonces f_n es continua y suprayectiva.*

Demostración. Sea $D_n : X^n \times X^n \to \mathbb{R}$, definida por $D_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_2)) = \max\{d(x_1, y_1), ..., d(x_n, y_n)\}$, esta es una métrica para X^n.

Probaremos que f_n es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in X^n$ tales que $D_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_2)) < \varepsilon$, por como se define D_n se cumple que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Es decir, $x_i \in B_d(y_i, \varepsilon)$ y $y_i \in B_d(x_i, \varepsilon)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, por lo tanto $\{x_1, ..., x_n\} \subset N(\varepsilon, \{y_1, ..., y_n\})$ y $\{y_1, ..., y_n\} \subset N(\varepsilon, \{x_1, ..., x_n\})$. Esto implica que $H(f_n(x_1, ..., x_n), f_n(y_1, ..., y_n)) < \varepsilon$. Por lo tanto f_n es uniformenete continua y por ende continua. Veamos que f_n es suprayectiva, sea $\{x_1, ..., x_m\} \in F_n(X)$, donde $m \leq n$. Si $n = m$, se cumple que $f_n(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_m\}$. Si $m < n$ pongamos $x_j = x_m$ para cada $j \in \{m + 1, ..., n\}$, es claro que $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ y $f_n(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\} = \{x_1, ..., x_m\}$. Por lo tanto, f_n es suprayectiva. □

Corolario 3.2. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Se cumple que X^n también es un continuo, entonces como f_n es continua $f_n(X^n)$ también es un continuo. Es decir, $F_n(X)$ es un continuo. □

Definición 3.3. Una descomposición $\mathcal{D}$, de un continuo X es una familia de subconjuntos no vacíos de X ajenos entre sí tales que

$$\cup\mathcal{D} = X.$$

Definición 3.4. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Sea

$$\tau(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \cup\mathcal{U} \in \tau\}.$$

El espacio $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es conocido como el espacio cociente de X, y $\tau(\mathcal{D})$ se conoce como la topología cociente. Se suele denotar por $X \diagup \mathcal{D}$ a dicho espacio. Note que los puntos en $X \diagup \mathcal{D}$ son subconjuntos de X.

Definición 3.5. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Se define la función cociente $q_X : X \to X \diagup \mathcal{D}$ como $q_X(x) = D$, donde D es el único elemento en $\mathcal{D}$ tal que $x \in D$.

Otra forma de definir una topología para $X \diagup \mathcal{D}$, que es equivalente a $\tau(\mathcal{D})$ es

$$\tau^{'}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : q_X^{-1}(\mathcal{U}) \text{ es abierto en X}\}.$$

Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $\mathcal{D} = \{F_1(X)\} \cup \{\{A\} : A \in F_n(X) - F_1(X)\}$ una descomposición de $F_n(X)$. El n-ésimo producto simétrico suspensión de X, denotado por $SF_n(X)$, es el espacio cociente $F_n(X)/\mathcal{D}$, como $SF_n(X)$ se obtiene de $F_n(X)$ al identificar a $F_1(X)$ a un punto, con la topología cociente, $F_n(X)/\mathcal{D}$ se suele denotar por:

$$F_n(X)/F_1(X).$$

La función cociente q_X es tal que, $q_X : F_n(X) \to SF_n(X)$ definida por

$$q_X(A) = \begin{cases} \{A\} & si \;\; A \in F_n(X) - F_1(X) \\ F_X & si \;\; A \in F_1(X). \end{cases}$$

F_X denota al elemento tal que $q_X(F_1(X)) = \{F_X\}$. Note que $q_X(A) = F_1(X) \in \mathcal{D}$ para toda $A \in F_1(X)$, entonces $F_X = F_1(X)$, como $F_1(X)$ puede ser tomado como un subconjunto de $F_n(X)$ o un punto en $SF_n(X)$, se opta por usar el símbolo F_X, para evitar confunción, denotando así a $F_1(X)$ como un punto en $SF_n(X)$. La restricción de q_X al subespacio $F_n(X) - F_1(X)$,

$$q_X|_{F_n(X)-F_1(X)} \colon F_n(X) - F_1(X) \longrightarrow SF_n(X) - \{F_X\}$$

es un homeomorfismo. De ahora en adelante, escribimos

$$q_X^* = q_X|_{F_n(X)-F_1(X)}.$$

Veamos que $SF_n(X)$ es un continuo.

Definición 3.6. Sea X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{D}$ es **semi continua superior** (scs) si para cada elemento $D \in \mathcal{D}$ y cada abierto U de X tal que $D \subset U$, existe V abierto de X tal que $D \subset V$ y para cada $W \in \mathcal{D}$ tal que $W \cap V \neq \emptyset$ se cumple que $W \subset U$.

Observe que esta definición se basa únicamente en la forma en que la partición $\mathcal{D}$ está siendo tomada, por lo que se utilizará la topología cociente.

Definición 3.7. Si $\mathcal{D}$ es una partición de X, entonces cualquier subconjunto de X que sea la unión de una subcolección de $\mathcal{D}$ se dirá $\mathcal{D}$-saturado.

Lema 3.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{D}$ una partición de X y q_X la función cociente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{D}$ es semi continua superiormente,*
2. *q_X es una función cerrada,*
3. *si $D \in \mathcal{D}, U \in \tau$, y $D \subset U$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $D \subset V \subset U$ y es $\mathcal{D}$-saturado.*

Demostración. Veamos que 1 implica 2. Sean C un conjunto cerrado de X y $x \in q_X^{-1}(\mathcal{D} - q_X(C))$, note que $q_X(x) \in \mathcal{D} - q_X(C)$. Veamos que $q_X(x) \cap C = \emptyset$. Supongamos por el contrario, que $y \in q_X(x) \cap C$, entonces $q_X(x) \cap q_X(y) \neq \emptyset$ y así, $q_X(x) = q_X(y)$ y por lo que $q_X(x) \in q_X(C)$, lo cual es una contradicción, todo esto por como esta definida q_X .

Tenemos entonces que $q_X(x) \subset X - C$. Como $X - C$ es abierto y $\mathcal{D}$ semi continua superiormente, existe $V \in \tau$ con $q_X(x) \subset V$ tal que si $v \in V$, entonces $q_X(v) \subset X - C$. Supongamos que $q_X(v) \in q_X(C)$, entonces $q_X(v) = q_X(y)$ para algún $y \in C$ y así, $y \in q_X(v) \cap C$, entonces $q_X(v) \subset X - C$, lo cual contradice la definición de v. Por lo tanto, $q_X(V) \subset D - q_X(C)$. Luego, $x \in V \subset_X^{-1} (\mathcal{D} - q_X(C))$ y se sigue que es abierto. Por lo tanto $\mathcal{D} - q_X(C)$ es abierto. Finalmente, como q_X es la función cociente, se sigue que $q_X(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$.

Veamos que (2) implica (3). Sean $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tal que $D \subset U$. Considere $V = q_X^{-1}(\mathcal{D} - q_X(X - U))$. Notemos que V es abierto puesto que q_X es cerrada y $D \subset V \subset U$. Para ver que V es $\mathcal{D}$-saturado, veamos que $V = \bigcup(\mathcal{D} - q_X(X - U))$. Sea $v \in V$, entonces $v \in q_X(V) \in \mathcal{D} - q_X(X - U)$ y así $v \in \bigcup(\mathcal{D} - q_X(X - U))$. Por otro lado, si $v \in \bigcup(\mathcal{D} - q_X(X - U))$, existe $A \in \mathcal{D} - q_X(X - U)$ tal que $v \in A$. Luego, $q_X(v) = A$, es decir, $v \in q_X^{-1}(\mathcal{D} - q_X(X - U))$, y por lo tanto se cumple (3). Finalmente, se sigue de la definición que (3) implica (2). $\square$

Teorema 3.9. *[28, Teorema 3.10] Todo espacio cociente de una partición semi continua superior de un continuo es un continuo.*

Lema 3.10. *Sea X normal y $F \subset X$ cerrado en X. Si $\mathcal{D} = \{F\} \cup \{\{x\} : x \in X - F\}$, entonces $\mathcal{D}$ es semi continua superior.*

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}$ y U abierto en X tal que $D \subset U$. Por la definición de $\mathcal{D}$, se tienen dos casos:

Caso 1. Si $D = \{x\}$, para algún $x \in X - F$, tenemos que D y F son cerrados en X. Puesto que X es normal, existen U_1, U_2 ajenos tales que $D \subset U_1$ y $F \subset U_2$. Sea $V = U_1 \cap U$. Así, tenemos que $D \subset V \subset U$. Notemos $V = \bigcup_{x \in V} \{x\}$ y $V \cap F = \emptyset$, por lo que V es $\mathcal{D}-$ saturado.

Caso 2. Si $D = F$. Haciendo $V = U$ se cumple que $D \subset V \subset U$ y $V = \bigcup_{x \in U - F} \{x\} \cup F$, como $F \in \mathcal{D}$ y $\{x\} \in \mathcal{D}$ para cada $x \in U - F$, por lo tanto V es $\mathcal{D}-$ saturado.

De ambos casos y utilizando el Lema 3.8 (3), tenemos que $\mathcal{D}$ es semi continua superiormente. $\square$

Lema 3.11. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $F_1(X)$ es un subconjunto compacto de $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $f : X \to F_n(X)$ una función definida por $f(x) = \{x\}$, basta ver que f es continua y para ello, tomemos un básico de la topológia de $F_n(X)$, digamos $\langle U_1, ..., U_m \rangle_n$, con $m \leq n$ y U_i son subconjuntos abiertos de X, para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Note que $\bigcap_{i=1}^{m} U_i = f^{-1}(\langle U_1, ..., U_m \rangle_n)$, por lo tanto $f^{-1}(\langle U_1, ..., U_m \rangle_n)$ es abierto en X, luego f es continua. Como X es compacto entonces $f(X) = F_1(X)$ también es compacto. $\square$

Corolario 3.12. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $F_1(X)$ es un subconjunto cerrado de $F_n(X)$.*

Teorema 3.13. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $SF_n(X) = F_n(X)/F_1(X)$ es un continuo.*

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{F_1(X)\} \cup \{\{A\} : A \in F_n(X) - F_1(X)\}$. Puesto que $F_n(X)$ es normal y $F_1(X)$ es un subconjunto cerrado de $F_n(X)$, tenemos que $\mathcal{D}$ es semi continua superior por Lema 3.10. Finalmente, por el Teorema 3.9, se sigue que $SF_n(X)$ es un continuo. □

4 Modelos

En esta sección se presentan algunos modelos del espacio $SF_n(X)$, para algunos continuos X.

Ejemplo 4.1. Sea X un arco. En [19, pág. 51] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(X)$ es el triángulo en el plano con vértices en $(0,0), (0,1)$ y $(1,1)$, el cual es homeomorfo a una 2-celda, a su vez $F_1(X)$ es homeomorfo al segmento que une el punto $(0,0)$ con el punto $(1,1)$. Si identificamos $F_1(X)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a una 2-celda. Así, el hiperespacio $SF_2(X)$, también es una 2-celda. Ver Figura 1.

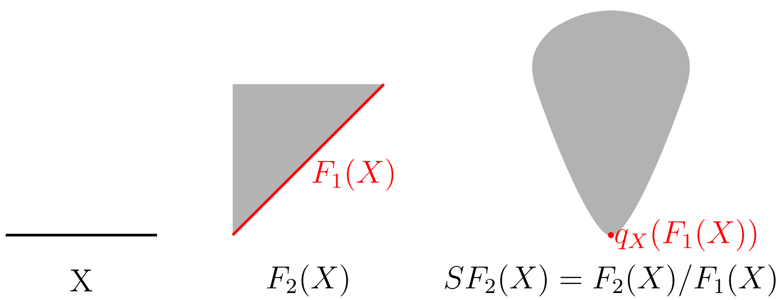


Figura 1: El segundo producto simétrico suspensión del arco.

Sea T el continuo que se conoce como triodo simple. A continuación, presentamos el n-ésimo producto simétrico suspensión de T para el caso particular cuando $n = 2$.

Ejemplo 4.2. En [19, pág. 55] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(T)$ es el espacio que se muestra en la Figura 2, el cual es una

2-celda D_0 que contiene tres 2-celdas, D_1, D_2 y D_3, pegadas de tal manera que $D_0 \cap D_i$ es un arco para cada $i \in \{1,2,3\}$ y la intersección $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ es un punto p. Además, $F_1(T)$ está contenido en la frontera de D_1, D_2, D_3 y $F_1(T) \cap D_0 = \{p\}$. Así, al identificar $F_1(T)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a $F_2(T)$. Por tanto, $SF_2(T)$ es homeomorfo a $F_2(T)$. En la Figura 2 podemos observar un bosquejo de cómo se llega al espacio $SF_2(T)$.

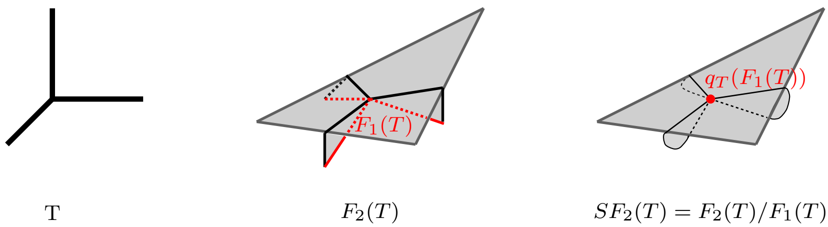


Figura 2: Segundo producto simétrico suspensión del triodo simple.

Ejemplo 4.3. Sea S^1 la curva cerrada simple. En [5, p. 877] se prueba que $F_2(S^1)$ es homeomorfo a la banda de Möbius, y $F_1(S^1)$ es homeomorfo a la frontera de la banda de Möbius. Entonces $SF_2(S^1)$ es homeomorfo al plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$.

Ejemplo 4.4. [4, Ejemplo 3.5] Si Q es el cubo de Hilbert, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, se cumple que $SF_n(Q)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.

La curva cerrada simple S^1 es un ejemplo de un continuo que no es unicoherente y $F_2(S^1)$ también es no unicoherente pero $SF_2(S_1)$ es unicoherente [5, p. 877].

En las siguientes secciones se presentan algunas propiedades del espacio $SF_n(X)$ para un continuo X.

5 Unicoherencia

En esta sección estudiaremos la propiedad de unicoherencia, mostrando que si X es unicoherente, entonces $SF_n(X)$ también es unicoherente, cuando $n \geq 3$ (ver Teorema 5.7). Si $n = 2$ puede ocurrir que no se herede esta propiedad, o que el espacio X no sea unicoherente pero $SF_n(X)$ sí lo sea.

Definición 5.1. Sea X un continuo, decimos que X es unicoherente si para cada par de subcontinuos A, B de X tales que $X = A \cup B$ se cumple que $A \cap B$ es conexo.

Ejemplo 5.2. El intervalo $[0, 1]$ es unicoherente. Esto ya que los subcontinuos del $[0, 1]$ son subintervalos conexos de $[0, 1]$. La intersección de dos intervalos conexos también es conexa.

Ejemplo 5.3. La curva cerrada simple S^1 no es unicoherente. Un subcontinuo de S^1 es un punto o un arco. Dados dos subcontinuos de X, A y B, tales que $S^1 = A \cup B$ se cumple que $A \cap B = \{a, b\}$ donde a, b son puntos extremos de A, B.

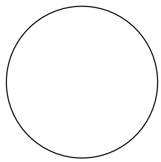


Figura 3: S^1

Definición 5.4. Una función continua $f : X \to Y$ es monótona si, es sobreyectiva y para cada punto $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un subconjunto conexo de X.

Ejemplo 5.5. Sea $f : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = sen(x)$, es claro que f es continua y sobreyectiva. Pero $f^{-1}(0) = \{0, \pi, 2\pi\}$ es un subconjunto disconexo, por lo tanto f no es monótona. Si cambiamos el dominio de f por el conjunto $[0, \frac{\pi}{2}]$, entonces ya es monótona.

Teorema 5.6. *La función q_X es monótona.*

Demostración. Por definición de espacio cociente q_X es continua. Claramente q_X es sobreyectiva. Sea $Y \in SF_n(X)$, por lo que existe $X \in SF_n$ tal que $q_X(X) = Y$, entonces $q_X^{-1}(Y) = X$. Se tienen dos casos que $X \in F_n(X) - F_1(X)$ o $X = F_1(X)$. Para el primer caso, es claro que X es conexo ya que es un punto en $F_n(X)$. Hay que probar que $F_1(x)$ es conexo en $F_n(X)$, esto es así ya que $F_1(X)$ es homeomorfo a X, por lo tanto es conexo. $\square$

Teorema 5.7. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Entonces $SF_n(X)$ es un continuo unicoherente.*

Demostración. Por [23, Teorema 8], $F_n(X)$ es unicoherente. Por el Teorema 5.6 q_X es monótona. Entonces, por [28, Corolario 13.34] se tiene que $SF_n(X)$ es un continuo unicoherente. □

Para el caso donde $n = 2$, el hecho de que X sea unicoherente no necesariamente implica que el hiperespacio $SF_n(X)$ sea unicoherente. Se conocen dos ejemplos de esto, uno es [6, Ejemplo 2.1] y el otro en [4, Ejemplo 4.4]. En estos ejemplos se da un continuo X que es unicoherente pero $SF_2(X)$ no es unicoherente.

Por otro lado, en [30, P. 197] se muestra que $SF_2(S^1)$ es unicoherente. Esto nos da un ejemplo de un continuo que no es unicoherente, S^1, pero su segundo producto simétrico suspensión si lo es.

6 Conexidad local

En esta sección se presentan propiedades referentes a conexidad local para el n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo, probando que el hecho de que $SF_n(X)$ sea localmente conexo, es equivalente a que X sea localmente conexo (ver Teorema 6.2).

Teorema 6.1. *Sea X un continuo y sea $n \geq 2$ un entero positivo. Si $F_n(X) - F_1(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sea $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Sea $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subset U$. Por [28, Corolario 5.5], existe K un subcontinuo de X, tal que $\{x\} \subsetneq K \subset B_d(x, \delta)$. Sea $y \in K$ tal que $y \neq x$. Es claro que existe $\alpha > 0$ tal que $B_d(x, \alpha) \cap B_d(y, \alpha) =$. Denotemos $A = \{x, y\}$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \text{mín}\{\alpha, \delta\}$. Sea $U_1 = B_d(x, \varepsilon)$ y $U_2 = B_d(y, \varepsilon)$, así $\langle U_1, U_2 \rangle_n$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Por Corolario 3.12, se tiene que $F_n(X) - F_1(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$, por tanto $\langle U_1, U_2 \rangle_n \cap (F_n(X) - F_1(X))$ es abierto en $F_n(X)$ y por ende también es abierto en $F_n(X) - F_1(X)$. Como $F_n(X) - F_1(X)$ es localmente conexo, existe C un subconjunto conexo y abierto de $F_n(X) - F_1(X)$ (también lo será en $F_n(X)$) tal que $A \in C \subset \langle U_1, U_2 \rangle_n \cap (F_n(X) - F_1(X))$. Entonces, por [9, Lema 6.1] se cumple que $\bigcup C$ es un subconjunto abierto de X y $(\bigcup C) \cap U_1$ es un subconjunto conexo de

X. Esto implica que $(\bigcup C) \cap U_1$ es un subconjunto abierto y conexo de X tal que $x \in (\bigcup C) \cap U_1 \subset U$. Por lo tanto X es localmente conexo en x. Así, X es localmente conexo. □

Teorema 6.2. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $SF_n(X)$ localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo, por [24, Lema 2] se cumple que $F_n(X)$ es localmente conexo, como q_X es continua y $q_X(F_n(X)) = SF_n(X)$, por [28, Proposición 8.16] se sigue que $SF_n(X)$ es localmente conexo.

Si $SF_n(X)$ es localmente conexo, por [21, Teorema 3, p. 230] $SF_n(X) - \{F_X\}$ es localmente conexo. Dado que $SF_n(X) - \{F_X\}$ es homeomorfo a $F_n(X) - F_1(X)$, se cumple que $F_n(X) - F_1(X)$ es localmente conexo. Por lo tanto, por el Teorema 6.1 X es localmente conexo. □

Con respecto a la propiedad de arco conexidad, se enuncia el siguiente Teorema.

Teorema 6.3. *[4, Teorema 6.1] Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 2$. Si X es arco conexo, entonces $SF_n(X)$ es arco conexo.*

7 Funciones inducidas

Dados dos continuos X, Y y $f : X \to Y$ una función, f induce una función del hiperespacio 2^X a 2^Y, dada por la imagen de cualquier cerrado de X bajo f. Veremos qué propiedades hereda la función f, a las funciones inducidas de los espacios $F_n(X), F_n(Y)$ y $SF_n(X), SF_n(Y)$ y viceversa (ver Teoremas 7.2, 7.7).

Teorema 7.1. *[28, Teorema 8.2.2] Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces la función $2^f : 2^X \to 2^Y$ definida por $2^f(A) = f(A)$ es continua.*

Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, se denota por $F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ a la función inducida tal que $F_n(f)(A) = f(A)$, como f es una función, $F_n(f)$ esta bien definida. Como un Corolario del Teorema 7.1 se tiene que $F_n(f)$ es continua. Definimos la función inducida por f entre los n-ésimos productos simétricos suspensión de X y Y, denotado por $SF_n(f) : SF_n(X) \to SF_n(Y)$ por:

$$SF_n(f)(A) = \begin{cases} (q_Y \circ F_n(f) \circ q_X^{-1})(A) & si \quad A \neq F_X \\ F_Y & si \quad A = F_X. \end{cases}$$

La función inducida $SF_n(f)$ es continua por [10, Teorema 4.3, p. 126].

Teorema 7.2. *Sean X, Y continuos, $f : X \to Y$ un función continua y $n \geq 2$ un entero. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

- *$f : X \to Y$ es un homeomorfismo;*
- *$F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ es un homeomorfismo;*
- *$SF_n(f) : SF_n(X) \to SF_n(Y)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Dados $A, B \in F_n(X)$ tales que $A \neq B$, como f es un homeomorfismo se cumple que $f(A) \neq f(B)$, por lo tanto $F_n(f)$ es inyectiva. Dado $A \in F_n(Y)$ de la sobreyectividad e inyectividad de f existe $A^{'} \in F_n(X)$ tal que $f(A^{'}) = A$, por tanto $F_n(f)$ es sobreyectiva. Como $F_n(X)$ es un continuo y $F_n(f)$ es continua se tiene que $F_n(f)$ es un homeomorfismo.

Los elementos que viven en $SF_n(X)$ son de la forma $\{A\}$ donde $A \in F_n(X) - F_1(X)$ o F_X. Entonces, dados $A, B \in SF_n(X)$ tales que $A \neq B$, podemos suponer que $A = \{A^{'}\}$ y $B \in \{\{B^{'}\}, F_X\}$ para algunos $A^{'}, B^{'} \in F_n(X) - F_1(X)$, note que $A^{'} \neq B^{'}$. Así, $q_X^{-1}(A) = A^{'}$ y $q_X^{-1}(B) = B^{'}$ o $q_X^{-1}(B) \in F_1(X)$, en ambos casos $q_X^{-1}(A) \neq q_X^{-1}(B)$, como $F_n(f)$ es inyectiva se cumple que $F_n(f)(q_X^{-1}(A)) \neq F_n(f)(q_X^{-1}(B))$. Finalmente, $q_Y(F_n(f)(q_X^{-1}(A))) = \{F_n(f)(q_X^{-1}(A))\}$ y $q_Y(F_n(f)(q_X^{-1}(B))) \in \{\{F_n(f)(q_X^{-1}(B))\}, F_Y\}$, como $F_n(f)(q_X^{-1}(A)) \in F_n(Y) - F_1(Y)$ y de la inyectividad de $F_n(f)$ se cumple que $(q_Y \circ F_n(f) \circ q_X^{-1})(A) \neq (q_Y \circ F_n(f) \circ q_X^{-1})(B)$, es decir, $SF_n(f)$ es inyectiva. La sobreyectividad de $SF_n(f)$ se tiene ya que $q_Y, F_n(f), q_X^{-1}$ son sobreyectivas. Dado que $SF_n(X), SF_n(Y)$ son continuos y $SF_n(f)$ es continua se cumple que $SF_n(f)$ es un homeomorfismo.

Sean $x, y, z \in X$ elementos distintos, consideremos $A = \{\{x, z\}\}$ y $B = \{\{z, y\}\}$, es claro que $A, B \in SF_n(X)$. Como $SF_n(f)$ es inyectiva se cumple que $SF_n(f)(A) \neq SF_n(f)(B)$. Por como se define la función se tiene que $(q_Y \circ F_n(f) \circ q_X^{-1})(A) = (q_Y \circ F_n(f))(\{x, z\}) = q_Y(f(\{x, z\}))$ y $(q_Y \circ F_n(f) \circ q_X^{-1})(B) = (q_Y \circ F_n(f))(\{z, y\}) = q_Y(f(\{z, y\}))$, por lo tanto $q_Y(f(\{z, y\})) \neq q_Y(f(\{z, x\}))$, podemos suponer que $q_Y(f(\{x, z\})) = \{\{f(\{x, z\})\}\}$ y $q_Y(f(\{y, z\})) \in \{\{\{f(\{y, z\})\}\}, F_Y\}$. Esta suposición tiene de forma implicita que $f(x) \neq f(z)$. Tenemos dos casos.

- Caso 1. $q_Y(f(\{y,z\})) = \{\{f(\{y,z\})\}\}$, esto implica que $f(y) \neq f(z)$. Como $q_Y(f(\{z,y\})) \neq q_Y(f(\{z,x\}))$, entonces $f(\{x,z\}) \neq f(\{y,z\})$, como $f(z)$ pertenece a ambos conjuntos, debe ocurrir que $f(x) \neq f(y)$.

- Caso 2. $q_Y(f(\{y,z\})) = F_Y$, esto implica que $f(y) = f(z)$ y como $f(x) \neq f(z)$ se cumple que $f(x) \neq f(y)$.

Por lo tanto, f es inyectiva. Sea $y, z \in Y$ distintos, dado que $SF_n(f)$ es sobreyectiva y $\{\{y,z\}\} \in SF_n(Y)$, existe $A \in SF_n(X)$ tal que $SF_n(f)(A) = \{\{y,z\}\}$, por la definición de $SF_n(f)$ se cumple que $A \neq F_X$, esto quiere decir que $A = \{A'\}$ donde $A' \in F_n(X) - F_1(X)$, entonces como f es inyectiva se cumple que $SF_n(f)(A) = q_Y(f(A')) = \{f(A')\}$, por tanto $\{\{y,z\}\} = \{f(A')\}$, es decir, $f(A') = \{y,z\}$ de aquí que existe $x \in A'$ tal que $f(x) = y$. Por ende, f es sobreyectiva. Dado que f es continua y X, Y son continuos se cumple que f es un homeomorfismo. $\square$

Se cumple algo similar al Teorema anterior, cambiando la propiedad de homeomorfismo por la de función monótona.

Teorema 7.3. *[3, Teorema 4.1] Sea $f : X \to Y$ una función continua sobreyectiva y $n \geq 2$ un entero. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *$f : X \to Y$ es monótona;*

- *$F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ es monótona;*

- *$SF_n(F) : SF_n(X) \to SF_n(Y)$ es monótona.*

Lema 7.4. *Sean X un continuo, $n, r \in \mathbb{N}$ tales que $r \leq n$ y $U_1, ..., U_r$ subconjuntos abiertos de X. Entonces $\bigcup \langle U_1, ..., U_r \rangle_n$ es un subconjunto abierto de X.*

Demostración. Sea $x \in \bigcup \langle U_1, ..., U_r \rangle_n$, entonces existe $A \in \langle U_1, ..., U_r \rangle_n$ tal que $x \in A$. Dado que $x \in A \subset \bigcup_{i=1}^{r} U_i$, podemos considerar $J = \{j \in \{1, ..., r\} : x \in U_j\}$. Por lo tanto $x \in \bigcap_{j \in J} U_j$, es claro que $\bigcap_{j \in J} U_j$ es un subconjunto abierto de X. Veamos que $\bigcap_{j \in J} U_j \subset \bigcup \langle U_1, ..., U_r \rangle_n$, sea $y \in \bigcap_{j \in J} U_j$ y consideremos $B =$

$\{y\} \cup (A - \{x\})$, note que $B \in \langle U_1, ..., U_r \rangle_n$, por lo tanto $y \in \bigcup \langle U_1, ..., U_r \rangle_n$. Por ende, $x \in \bigcap_{j \in J} U_j \subset \bigcup \langle U_1, ..., U_r \rangle_n$, es decir, $\bigcup \langle U_1, ..., U_r \rangle_n$ es un conjunto abierto de X. $\square$

Como los conjuntos de la forma $\langle U_1, ..., U_r \rangle_n$, para $n, r \in \mathbb{N}$, son una base para la topología de $F_n(X)$, se cumple que todo abierto es unión de conjuntos del tipo $\langle U_1, ..., U_r \rangle_n$, como consecuencia del Lema 7.4 se tiene el siguiente Corolario.

Corolario 7.5. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{C}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un subconjunto abierto de X.*

Definición 7.6. Sean X, Y continuos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es abierta, si para cualquier subconjunto abierto A de X se cumple que $f(A)$ es un subconjunto abierto de Y.

Teorema 7.7. *Sean X, Y continuos, $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si $F_n(f)$ es abierta, entonces f es abierta.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X. Entonces, $\langle U \rangle_n$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$, por hipótesis $F_n(f)(\langle U \rangle_n)$ es abierto en $F_n(Y)$, por el Corolario 7.5 $\bigcup F_n(f)(\langle U \rangle_n)$ es un subconjunto abierto de Y.

Veamos que $f(U) = \bigcup F_n(f)(\langle U \rangle_n)$. Sea $y \in \bigcup F_n(f)(\langle U \rangle_n)$, entonces existe $B \in F_n(f)(\langle U \rangle_n)$ tal que $y \in B$. Luego, existe $A \in \langle U \rangle_n$ tal que $F_n(f)(A) = B$, por definición de $F_n(f)$ se cumple que $f(A) = B$, y como $A \subset U$ se tiene que $B \subset f(U)$, es decir, $y \in f(U)$. por lo tanto $\bigcup F_n(f)(\langle U \rangle_n) \subset f(U)$. Sea $z \in f(U)$, existe $a \in U$ tal que $f(a) = z$. Consideremos $C = \{a\}$ y $D = \{z\}$, de esto que $C \in \langle U \rangle_n$ y $F_n(f)(C) = D$. Así, $z \in D \in F_n(f)(\langle U \rangle_n)$, por lo tanto $z \in \bigcup F_n(f)(\langle U \rangle_n)$. Esto implica que, $f(U) \subset \bigcup F_n(f)(\langle U \rangle_n)$. Concluimos que $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y. Por lo que f es abierta. $\square$

Teorema 7.8. *[3, Teorema 5.4] Sean X, Y continuos, $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si $SF_n(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.*

8 Propiedades aposindéticas

En esta sección estudiamos la propiedad de aposindesis para un continuo X. Probando que $SF_n(X)$ es aposindético siempre que $n \geq 3$ (ver Teorema 8.5). Para el caso $n = 2$, $SF_n(X)$ es aposindético solo cuando X también lo es.

Definición 8.1. Sean X un continuo y $x, y \in X$, decimos que X es *aposindético* en x con respecto a y, si existe un subcontinuo W de X tal que $x \in_X W \subset W \subset X - \{y\}$. Entonces, X es aposindético en x, si X es aposindético en x con respecto a cada punto del subconjunto $X - \{x\}$. Decimos que X es aposindético, si es aposindético en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 8.2. El arco $X = [0, 1]$ es aposindético. Sean $x, y \in X$ distintos. Basta considerar $A = [0, 1] \cap (x - \frac{|x-y|}{2}, x + \frac{|x-y|}{2})$, A es un subcontinuo de X tal que $x \in_X A \subset A \subset X - \{y\}$. Como x, y se tomaron de forma arbitraria se cumple que X es aposindético.

Ejemplo 8.3. Consideremos al continuo $X = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\})$, este es conocido como el seno del topólogo. Dados $x, y \in X$ tales que $x, y \in \{(0, t) : t \in [-1, 1]\} \subset X$, se cumple que cada subcontinuo A de X que contenga a x en su interior también debe tener a y. Por lo tanto, X no es aposindético en x con respecto a y, por ende X no es aposindético.

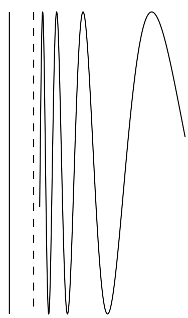


Figura 4: Seno del topólogo

Teorema 8.4. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Entonces los siguientes enunciados son ciertos:*

- *$SF_n(X)$ es aposindético en F_X.*

- *Si $\mathcal{A} \in SF_n(X) - \{F_X\}$, entonces $SF_n(X)$ es aposindético en $\mathcal{A}$ con respecto a cualquier punto de $SF_n(X) - \{F_X, \mathcal{A}\}$.*

Demostración. Probemos el primer enunciado. Sea $\mathcal{B} \in SF_n(X) - \{F_X\}$. Podemos tomar U, V dos subconjuntos abiertos de $SF_n(X)$ tales que $F_X \in U$, $\mathcal{B} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sea $B \in F_n(X) - F_1(X)$ tal que $q_X(B) = \mathcal{B}$, entonces $q_X^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $B \in q_X^{-1}(V) \subset F_n(X) - F_1(X)$, esta última contención es por que $U \cap V = \emptyset$. Por [24, Teorema 4], existe $\mathcal{V}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $B \in \mathcal{V} \subset q_X^{-1}(V)$ y $F_n(X) - \mathcal{V}$ es conexo. De esto que $\mathcal{B} \in q_X(\mathcal{V}) \subset V$ y $q_X(F_n(X) - \mathcal{V})$ es conexo. Note que $\mathcal{V} \cap F_1(X) = \emptyset$, así $q_X^*(\mathcal{V}) = q_X(\mathcal{V})$ y como q_X^* es un homeomorfismo, se tiene que $q_X(\mathcal{V})$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$ y $q_X(F_n(X) - \mathcal{V}) = SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$. Esto implica que $SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$ es un subcontinuo de $SF_n(X)$. Observe que $F_X \in U \subset SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$, es decir, $F_X \in_{SF_n(X)} (SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$. Por lo tanto, $SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$ es un continuo de $SF_n(X)$ tal que $F_X \in_{SF_n(X)} (SF_n(X) - q_X(\mathcal{V}) \subset SF_n(X) - q_X(\mathcal{V}) \subset SF_n(X) - \{\mathcal{B}\}$. De esto que $SF_n(X)$ es aposindético en F_X con respecto a $\mathcal{B}$, como $\mathcal{B}$ se tomó de forma arbitraria, se tiene que $SF_n(X)$ es aposindético en F_X.

Para segundo caso, sean $\mathcal{A} \in SF_n(X) - \{F_X\}$ y $\mathcal{B} \in SF_n(X) - \{F_X, \mathcal{A}\}$. Debemos hallar un subcontinuo de $SF_n(X)$ de modo que tenga a $\mathcal{A}$ en su interior, pero no tenga a $\mathcal{B}$. Podemos tomar U, V dos subconjuntos abiertos de $SF_n(X)$ tales que $\mathcal{A}, F_X \in U$, $\mathcal{B} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sean $B, A \in F_n(X) - F_1(X)$ tal que $q_X(B) = \mathcal{B}$ y $q_X(A) = \mathcal{A}$, note que $A \neq B$ por que q_X^* es un homeomorfismo, entonces $q_X^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $B \in q_X^{-1}(V) \subset F_n(X) - (F_1(X) \cup \{A\})$ esta última contención es por que $U \cap V = \emptyset$. Por [24, Teorema 4] $F_n(X)$ es colocalmente conexo, por lo que existe $\mathcal{V}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $B \in \mathcal{V} \subset q_X^{-1}(V)$ y $F_n(X) - \mathcal{V}$ es conexo. De esto que $\mathcal{B} \in q_X(\mathcal{V}) \subset V$ y $q_X(F_n(X) - \mathcal{V})$ es conexo.

Note que $\mathcal{V} \cap F_1(X) = \emptyset$ y $q_X(\mathcal{V}) \cap U = \emptyset$, así $q_X^*(\mathcal{V}) = q_X(\mathcal{V})$ y como q_X^* es un homeomorfismo, se tiene que $q_X(\mathcal{V})$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$ y $q_X(F_n(X) - \mathcal{V}) = SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$. Esto implica que $SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$ es un subcontinuo de $SF_n(X)$. A su vez, $\mathcal{A} \in U \subset SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$, es decir, $\mathcal{A} \in_{SF_n(X)} (SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$. Por lo tanto, $SF_n(X) - q_X(\mathcal{V})$ es un continuo de $SF_n(X)$ tal que $\mathcal{A} \in_{SF_n(X)} (SF_n(X) - q_X(\mathcal{V}) \subset SF_n(X) - q_X(\mathcal{V}) \subset SF_n(X) - \{\mathcal{B}\}$.

De esto que $SF_n(X)$ es aposindético en $\mathcal{A}$ con respecto a $\mathcal{B}$, como $\mathcal{B}$ se tomó de forma arbitraria en $SF_n(X) - \{F_X, \mathcal{A}\}$, se tiene que lo deseado. $\square$

Teorema 8.5. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$. Entonces $SF_n(X)$ es aposindético.*

Demostración. Por el Teorema 8.4, basta probar que para cada elemento $\mathcal{A} \in SF_n(X) - \{F_X\}$, $SF_n(X)$ es aposindético en $\mathcal{A}$ con respecto a F_X. Sea $\mathcal{A} \in SF_n(X) - \{F_X\}$ y tomemos $A \in F_n(X) - F_1(X)$ tal que $q_X(A) = \mathcal{A}$. Consideremos dos puntos $p, q \in A$ tal que $p \neq q$. Sean U y V dos subconjuntos abiertos de X tales que $p \in U$, $q \in V$, $\mathrm{cl}_X U \cap \mathrm{cl}_X V = \emptyset$ y $A \subset U \cup V$, estos existen ya que A es finito. Definamos $\mathcal{C} = \langle \mathrm{cl}_X (U), \mathrm{cl}_X (V), X\rangle_n \cup \langle bd(U), bd(V), X\rangle_n \cup \langle bd(U), \{p\}, X\rangle_n \cup \langle \{p\}, \{q\}, X\rangle_n$. Por [26, Lema 2], $\mathcal{C}$ es un continuo de $F_n(X)$. Note que $A \in \langle U, V\rangle_n \subset \mathcal{C}$, por lo que $A \in_{F_n(X)} \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$. Por otro lado, observe que $\mathcal{C} \cap F_1(X) = \emptyset$, como q_X^* es un homeomorfismo $q_X^*(\mathcal{C}) = q_X(\mathcal{C})$ es un subcontinuo de $SF_n(X)$ tal que $\mathcal{A} \in_{SF_n(X)} (q_X(\mathcal{C})) \subset q_X(\mathcal{C}) \subset SF_n(X) - \{F_X\}$. Por lo tanto, $SF_n(X)$ es aposindético en $\mathcal{A}$ con respecto a F_X. $\square$

Teorema 8.6. *[2, Teorema 3.10] Si X es un continuo aposindético, entonces $SF_2(X)$ es aposindético.*

9 Unicidad

En esta sección enunciaremos algunos resultados de unicidad para los hiperespacios $F_n(X)$ y $SF_n(X)$.

Unicidad del hiperespacio $F_n(X)$

El primero Teorema asegura la unicidad del hiperespacio $F_n(X)$ para un tipo de continuo especifico, a saber, las gráficas finitas.

Teorema 9.1. *[7, Corolario 5.9] Para cada $n \in \mathbb{N}$. La clase de las gráficas finitas tienen hiperespacio único $F_n(X)$.*

Un espacio métrico, compacto y Hausdorff Y se llama compactación métrica de X, si X es un subconjunto denso de Y. En tal caso el conjunto $R = Y - X$ se llama el residuo de Y.

Los siguientes Teoremas prueban la unicidad de $F_n(X)$, cuando X es una compactación métrica del rayo $[0,\infty)$.

Teorema 9.2. *[18, Teorema 3.1] Si X es una compactación métrica del $[0,\infty)$, entonces X tiene hiperespacio único $F_2(X)$.*

Teorema 9.3. *[18, Teorema 4.1] Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, si X es una compactación métrica del $[0,\infty)$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.*

Teorema 9.4. *[18, Teorema 5.6] Si X es una compactación métrica del $[0,\infty)$ cuyo residuo es un retracto de una vecindad de X, entonces X tiene hiperespacio único $F_3(X)$.*

Una dendrita es un continuo localmente conexo tal que cada subcontinuo de X es unicoherente. Dicho de otra manera es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples. Definimos el siguinte conjunto.

$\mathfrak{D} = \{X : X$ es una dendrita cuyo conjuntos de puntos extremos es cerrado$\}$.

Teorema 9.5. *[1, Teorema 5.2] [11, Teorema 3.7] Para cada $n \in \mathbb{N}$. La clase de los elementos de $\mathfrak{D}$ tienen hiperespacio único $F_n(X)$.*

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(X) = \{x \in X \ :\ & x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X\text{, tal que}\\ & G \text{ es una gráfica finita }\},\\ \mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}&(X).\end{aligned}$$

Los siguientes teoremas, son para continuos casi enrejados o enrejados.

Definición 9.6. Decimos que un continuo X es **casi enrejado** si y sólo si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Un continuo casi enrejado X es **enrejado** si, X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que para cada elemento $U \in \mathcal{B}$ se cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.

Teorema 9.7. *[12, Corolario 4.4] Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. La clase de los continuos localmente conexos y casi enrejados tienen hiperespacio único $F_n(X)$.*

Teorema 9.8. *[13, Teorema 3.11] Para cada $n \in \{2,3\}$. La clase de los continuos enrejados tienen hiperespacio único $F_n(X)$.*

Teorema 9.9. *[14, Teorema 4.8] Para cada $n \in \mathbb{N} - \{3\}$. La clase de los continuos casi enrejados y localmente conexos X tienen hiperespacio único $F_n(X)$.*

Teorema 9.10. *[8, Teorema 3.10] La clase de los continuos casi enrejados y localmente conexos X tiene hiperespacio único $F_3(X)$.*

Unicidad del hiperespacio $SF_n(X)$

La unicidad del hiperespacio $SF_n(X)$, cuando X es un continuo es una investigación reciente, el Teorema 9.11 es de un trabajo del 2021 y el Teorema 9.12 es de un trabajo realizado en 2023.

Teorema 9.11. *[27, Teorema 3.8] Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.*

Teorema 9.12. *[16, Teoerma 6.2 y Teorema 6.4] Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \in \{2, 3\}$, entonces X tiene hiperespacio único $SF_n(X)$.*

Actualmente se está estudiando la unicidad del espacio $SF_n(X)$, cuando X es un continuo localmente conexo casi enrejado y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$.

10 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

[1] Gerardo Acosta, Rodrigo Hernández-Gutiérrez, Verónica Martínez-de-la-Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glasnik Matematicki Ser. III 44 (2009) no. 1, 195–210.

[2] Franco Barragán, *Aposyndetic properties of the n-fold symmetric product suspension of a continuum*, Glasnik Matematki, 49 (2014), 179–193.

[3] Franco Barragán, *Induced maps on n-fold symmetric product suspensions*, Topology Appl. 158 (2011), 1192–1205.

[4] Franco Barragán, *On the n-fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. 157 (2010), 597–604.

[5] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological space*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 37 (1931) 875–882.

[6] Enrique Castañeda, *A unicoherent continuum whose second symmetric product is not unicoherent*, Topology Proc. 23 (1998) 61–67.

[7] Enrique Castañeda, Alejandro Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.

[8] Vianey Córdova-Salazar, David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product,* Topology. Appl. 268 (2019)

[9] Janusz J. Charatonik, Alendro Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math. (2004) 1–45.

[10] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1976.

[11] David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, *Dendrites with unique symmetric products,* Topology Proc. 34 (2009), 175–190.

[12] David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero, Francio Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products,* Journal of Mathematics Research 4(4) (2012), 1–9.

[13] Luis A. Guerrero-Méndez, David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products,* Topology Appl. 191 (2015), 16–27.

[14] David Herrera-Carrasco, María de J. López, Fernando Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product,* Topology Appl. 209 (2016), 1–13.

[15] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y Germán Montero Rodríguez, «La clase de las gráficas finitas es SF_n-cerrada (Capítulo 7)» Matemáticas y sus aplicaciones 15, Colección Manuales y

Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 147 - 167. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-696-2. Versión electrónica en https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.

[16] David Herrera-Carrasco, María de J. López, Antonio Libreros-López, F. Macías Romero, *Finite graphs have unique second and third symmetric product suspension*, (2023), Enviado a Topology and its Applications.

[17] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New york, Basel (1999).

[18] Alejandro Illanes, Jorge M. Martínez-Montejano, *Compactification of* $[0, \infty)$ *with unique hyperspace* $F_n(X)$, Glasnik Matematicki, 44(64) (2009), 457–478.

[19] Alejandro Illanes, *Models of Hyperspaces,* Topol. Proc. 41 (2013), 39–64.

[20] A. Illanes, S. Macías, S.B. Nadler Jr., *Symmetric products and* Q *-manifolds*, Geometry and Topology in Dynamics, Contemporary Math. Series of Amer. Math. Soc., Vol. 246, 1999, Providence, RI, 137–141.

[21] K. Kuratowski, *Topology*, vol. II, Academic Press, New York, 1968.

[22] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138 (2004), 125–138.

[23] S. Macías, *On symmetric products of continua*, Topology Appl. 92 (1999) 173–182.

[24] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc. 22 (1997) 281–296.

[25] S. Macías, *Topics on Continua*, Second Edition, Springer, 2018, ISBN:978- 3-319-90901-1.

[26] J. M. Martínez, *Mutual aposyndesis of symmetric products*, Topology Proc. 24 (1999), 203–213.

[27] G. Montero, D. Herrera, M. de J. López, F. Macías, *Finite graphs have unique n-fold symmetric product suspension*, Houston J. Math., 47 (2021), no. 4, 20 pp.

[28] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).

[29] Sam B. Nadler Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math. 5 (1) (1979), 125–132.

[30] G.T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 21, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-10-1

Capítulo 8

Contractibilidad en los hiperespacios 2^X y $C(X)$

Luis Antonio Guevara Martínez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

Sean 2^X el hiperespacio de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados y $C(X)$ el hiperespacio de todos los subcontinuos, de un continuo X. En el presente trabajo se dan a conocer algunas caracteristicas que debe satisfacer el continuo X para que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ sean contraíbles o tengan la propiedad del punto fijo.

1 Introducción

El presente capítulo resume el trabajo realizado por el tercer autor como parte de su tesis de licenciatura en matemáticas ([5]). Este escrito consiste en una breve exposición de las caracteristicas que debe tener un espacio continuo para garantizar que sus hiperespacios sean crontraíbles o cuenten con la propiedad del punto fijo, siguiento los resultados expuestos en 199 por Sam B, Nadler Jr. y Alejandro Illanes en los capítulos 20, 21 y 22 de su obra titulada *Hyperspaces: Fundamental and Recent Advances* ([7]). El propósito de este escrito es desarrollar de manera profunda las demostraciones expuestas en estos capítulos, a fin de facilitar la consula a los lectores.

2 Preliminares

Definición 2.1. Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto. Dados un continuo X y $Y \subset X$, diremos que Y es un

subcontinuo de X si Y es un continuo como subespacio de X o bien, si Y tiene exactamente un punto.

Definición 2.2. Si X es un continuo, entenderemos por un **hiperespacio** de X a una colección de subconjuntos de X con alguna propiedad en particular. Por ejemplo, podemos considerar

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en X}\}.$$

Otros hiperespacios que se consideran en este trabajo son:

- $C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ conexo}\right\}$,
- $C(p, X) = \{A \in C(X) : p \in A\}$

Para $n \in \mathbb{N}$:

- $C_n(X) = \{A \in C(X) : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$,
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$. Al hiperespacio $F_1(X)$ se le llama espacio de singulares de X.

Note que como X es un compacto, entonces 2^X es el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X, en particular $X \in 2^X$, y $C(X)$ es el hiperespacio de todos los subcontinuos de X.

Definición 2.3. Sea X un espacio métrico. Si $x \in X$ y $A \in 2^X$, definimos y denotamos la distancia del punto x al conjunto A como

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Para cualquier $r > 0$ y $A \in 2^X$, denotamos la **nube** al rededor de A y radio r como

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

Definición 2.4. Si X es un espacio métrico con métrica acotada d, la **métrica de Hausdorff** para 2^X inducida por d, denotada por H_d, para cada A, $B \in 2^X$ es

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}.$$

Teorema 2.5. *Sea X un espacio métrico compacto no vacío con métrica d. Si A, $B \in 2^X$ y $a \in A$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a,b) \leq H_d(A,B)$.*

Demostración. Sean A, $B \in 2^X$ y $a \in A$. Si $a \in B$, entonces $d(a,a) = 0 \leq H_d(A,B)$.
Supongamos que $a \notin B$. Como B es un compacto, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a,b) \leq d(a,c)$ para cada $c \in B$. En efecto consideremos la función $f : B \to \mathbb{R} \cup \{0\}$, dada por $f(c) = d(a,c)$. Note que f está bien definida y es continua, así, f alcanza su mínimo, esto es, existe un $b \in B$ tal que $d(b,a) \leq d(a,c)$ para cada $c \in B$. Veamos que $d(a,b) \leq H_d(A,B)$.

Supongamos que $H_d(A,B) < d(a,b)$. Note que $d(a,b)$ es fijo, entonces por la propiedad del ínfimo, existe ε_0 tal que $\varepsilon_0 < d(a,b)$. Se sigue que $A \subset N_d(\varepsilon_0, B)$ y $B \subset N_d(\varepsilon_0, A)$. En particular, $A \subset N_d(\varepsilon_0, B)$, así para $a \in A$, existe $c_0 \in B$ tal que $d(a,c_0) < \varepsilon_0 < d(a,b)$, pero esto contradice el hecho de que $d(a,b) \leq d(a,c)$ para toda $c \in B$. Por lo tanto $d(a,b) \leq H_d(A,B)$. □

Teorema 2.6. *Sean X es un continuo y d una métrica para X, entonces H_d es una métrica.*

Demostración. Note que por definición H_d es una función de valores reales positivos.

Sean A, B, $C \in 2^X$.

(1) $H_d(A,B) = H_d(B,A)$.

Por definición tenemos que H_d es una función simétrica, es decir, $H_d(A,B) = H_d(B,A)$.

(2) $H_d(A,B) = 0$ si y solo si $A = B$.

Supongamos que $H_d(A,B) = 0$. Entonces por definición se tiene que $A \subset N_d(r,B)$ y $B \subset N_d(r,A)$. Sin perdida de generalidad, tenemos que $A \subset N_d(r,B)$ para toda $r > 0$. Sea $p \in A$, entonces existe un $b_n \in B$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(p,b_n) < \frac{1}{n}$. Como B es un compacto, entonces existe una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a p y como B es cerrado en X, entonces $p \in B$. Por lo tanto $A \subset B$. De manera análoga $B \subset A$, así $A = B$.

Reciprocamente, supongamos que $A = B$. Entonces para toda $r > 0$ se tiene que $A \subset N_d(r,A)$, así $H_d(A,A) = 0$.

(3) $H_d(A,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C)$.

Sean $\delta \geq 0$ y $a \in A$. Entonces por el lema 2.5, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) \leq H_d(A,B)$. Usando nuevamente el lema 2.5 para $b \in B$, existe $c \in C$ tal que $d(b,c) \leq H_d(B,C)$. Así, $d(a,c) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C) + \delta$. Entonces para toda $a \in A$, se tiene que $A \subset N_d(H_d(A,B) + H_d(B,C) + \delta, C)$. De manera análoga, se tiene que $C \subset N_d(H_d(A,B) + H_d(B,C) + \delta, A)$. Se sigue que $H_d(A,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C) + \delta$. Finalmente, como δ es arbitrario, se concluye que $H_d(A,C) \leq H_d(A,B) + H_d(B,C)$.

Por lo tanto, H_d es una métrica para 2^X.

Más aún, los otros hiperespacios heredan la métrica de 2^X, por lo tanto son espacios métricos. □

Teorema 2.7. *[11, Teorema 2.2] Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son arco conexos.*

Definición 2.8. Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subset 2^X$. Una **función de Whitney** para $\mathcal{H}$ es una función continua $\omega : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cualesquiera A, $B \in \mathcal{H}$ con $A \subset B$ y $A \neq B$, se tiene que $\omega(A) < \omega(B)$.

2. $\omega(A) = 0$ si y solo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.

Teorema 2.9. *[11, Teorema 1.41]Si X es un espacio métrico compacto, entonces cualquier hiperespacio de X tiene una función de Whitney.*

Teorema 2.10. *[11, Teorema 2.7]Sea X un espacio métrico compacto, y sean A_0, $A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subset A_1$ y $A_0 \neq A_1$. Entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ que va de A_0 a A_1.*

Definición 2.11. Un continuo se dice que es **descomponible** si es la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo que no es descomponible se dice que es **indescomponible**. Un continuo se dice que es **hereditariamente descomponible** si todos sus subcontinuos con más de un elemento son descomponibles. Un continuo se dice que es **hereditariamente indescomponible** si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Teorema 2.12. *[5, Teorema 1.57] Sea X un continuo hereditariamente indescomponible, y sea ω una función de Whitney para $C(X)$ (ω existe por el lema 2.9). Si A, $B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $\omega(A) = \omega(B)$, entonces $A = B$.*

Definición 2.13. Sean X y Y espacios métricos compactos y no vacíos. Una función continua que va de $X \times [0,1]$ a Y es llamada **homotopía**.

Definición 2.14. Para cada homotopía $h : X \times [0,1] \to Y$ y cualquier $t \in [0,1]$, denotemos por h_t la función de X a Y dada por $h_t(x) = h(x,t)$ para toda $x \in X$. Decimos que dos funciones $f, g : X \to Y$ son **homotópicas** si existe una homotopía $h : X \times [0,1] \to Y$ tal que $h_0 = f$ y $h_1 = g$.

Definición 2.15. Se dice que $Y \subset X$ es **contraíble** en X si existe una homotopía $h : Y \times [0,1] \to X$ y existe un punto $x_0 \in X$ tal que, para toda $y \in Y$, se satisface:

- $h(y,0) = y$,
- $h(y,1) = x_0$.

Teorema 2.16. *La contractibilidad es una invariante topológica.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos homeomorfos, tal que X es contraíble. Como X es contraíble, existe una homotopía $h : X \times [0,1] \to X$ tal que para toda $x \in X$ $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = x_0$ para algún $x_0 \in X$. Como X y Y son homeomorfos existe $f : X \to Y$ homeomorfismo.

Sea $g : Y \times [0,1] \to Y$ dada por $g(y,t) = f \circ h(f^{-1}(y), t)$. Note que por como se construyó g, es continua y está bien definida. Además, $g(y,1) = h(f^{-1}(y),1) = f(h(f^{-1}(y),1)) = f(x_0) = y_0$ y $g(y,0) = f \circ h(f^{-1}(y),0) = f(h(g^{-1}(y),0)) = f(f^{-1}(y)) = y$, es decir, $g(y,0) = y$ y $g(y,1) = y_0$ para toda $y \in Y$ y algún $y_0 \in Y$. Por lo tanto Y es contraíble. $\square$

Lema 2.17. *[5, Lema 1.42] Si X es un espacio contraíble y $X \subset Y$, entonces Y es contraíble en X.*

Lema 2.18. *[5, Lema 1.43] Sean Y y Z espacios métricos compactos y no vacíos, tales que Y es contraíble en Z y $V \subset Y \subset Z \subset W$, entonces Y es contraíble en W y V es contraíble en Z.*

Corolario 2.19. *[5, Corolario 1.46] Todo espacio contraíble es arco conexo y las contracciones de los espacios contraíbles se pueden escoger de manera que terminen en cualquier punto de nuestra elección.*

3 Hiperespacios contraíbles

Comenzaremos con el que se considera el teorema fundamental con respecto a la contractibilidad de hiperespacios. El teorema muestra que si uno de los hiperespacios 2^X y $C(X)$ es contraíble, entonces el otro también lo es. Este teorema también muestra una manera usual para determinar cuando 2^X o $C(X)$ es contraíble, si el espacio de los singulares de X, $F_1(X)$, es contraíble en 2^X o $C(X)$.

Primero enunciaremos un resultado que nos ayudará en la demostración de nuestro Teorema.

Lema 3.1. *[5, Lema 2.1] Sean X un continuo y $A \subset X$. Consideremos a las familias $\mathcal{C}(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\}$ y $\mathcal{D}(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\}$. Entonces se tienen las siguientes condiciones:*

1. *si A es abierto, entonces $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son abiertos en 2^X,*

2. *si A es cerrado, entonces $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son cerrados en 2^X.*

Teorema 3.2. *Sea X un continuo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $F_1(X)$ *es contraíble en* $C(X)$*,*

(b) $F_1(X)$ *es contraíble en* 2^X*,*

(c) $C(X)$ *es contraíble,*

(d) 2^X *es contraíble.*

Demostración. [*(a) ⇒ (b)*]. Haciendo uso del lema 2.18, se tiene que si un espacio es contraíble, entonces es contraíble en cualquier espacio que lo contenga, además como $C(X) \subset 2^X$.Tenemos que $F_1(X)$ es contraíble en 2^X.

[*(b) ⇒ (d)*]. Por hipótesis existe una función continua $h : F_1(X) \times [0,1] \to 2^X$ y un elemento $A_0 \in 2^X$ tales que, para toda $x \in X$, $h(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $h(\{x\}, 1) = A_0$. Por hipótesis X es continuo, entonces por el teorema 2.7, se tiene que 2^X es arco conexo, y por el corolario 2.19, podemos suponer que $A_0 = X$.

Definimos $L : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ por:

$$L(A,t) = \bigcup\{h(\{x\}, s) : x \in A \text{ y } s \in [0,t]\}.$$

Probemos que L es continua. Sea $\varepsilon > 0$, como $F_1(X) \times [0,1]$ es compacto y h es continua, entonces h es uniformemente continua, así existe $\delta > 0$ tal que, si $H(A,B) < \delta$ y $|t-u| < \delta$, entonces $H(h(A,t), h(B,u)) < \varepsilon$.

Sean A, $B \in 2^X$ y t, $u \in [0,t]$ tales que $H(A,B) < \delta$ y $|t-u| < \delta$. Necesitamos ver que $H(L(A,t), L(B,u)) < \varepsilon$. Sea $m \in L(A,t)$. Entonces existe $x \in A$ y $s \in [0,t]$, tales que $m \in h(\{x\}, s)$. Ya que $x \in A \subset N(\delta, B)$, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \delta$. Tomemos a $r = \text{mín}\{s,t\}$. Note que $r \in [0,u]$. Si $s \leq u$, entonces $r = s \in [0,t] \cap [0,u]$, y si $u < s$, entonces $r = u < s \leq t$ y como $t-u < \delta$, tenemos que $|s-r| < \delta$. En cualquiera de los dos casos se tiene que $|s-r| < \delta$. Por como elegimos a δ, se tiene que $H(h(\{x\},s), h(\{y\},r)) < \varepsilon$. De manera que $p \in h(\{x\},s) \subset N(\varepsilon, h(\{y\},r)) \subset N(\varepsilon, L(B,u))$, por lo que $L(A,t) \subset N(\varepsilon, L(B,u))$. De manera análoga se muestra que $L(B,u) \subset N(\varepsilon, L(A,t))$. Por lo tanto $H(L(A,t), L(B,u)) < \varepsilon$. Así, L es continua.

Ahora, demostremos que $L(A,0) = A$ y $L(A,1) = X$, para toda $A \in 2^X$. Observemos que

$$\begin{aligned} L(A,0) &= \bigcup\{h(\{x\},s) : x \in A \text{ y } s \in [0,0]\} \\ &= \bigcup\{h(\{x\},0) : x \in A\} = \bigcup\{\{x\} : x \in A\} = A, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L(A,1) &= \bigcup\{h(\{x\},s) : x \in A \text{ y } s \in [0,1]\} \\ &\supset \bigcup\{h(\{x\},1) : x \in A\} = X. \end{aligned}$$

Así, L es una homotópia para 2^X. Por lo tanto, 2^X es contraíble.

[*(b)* $\Rightarrow$ *(c)*]. Note que si, $A \in 2^X$ y $0 \leq u \leq t \leq 1$, entonces $[0,y] \subset [0,t]$ y por como definimos L, se tiene que $L(A,u) \subset L(A,t)$.

Si $A \in C(X)$ y $t \in [0,1]$, probaremos que $L(A,t) \in C(X)$. Supongamos que esto no es cierto y que existe un $t \in [0,1]$ talque $L(A,t)$ no es conexo, es decir, $L(A,t) = G \cup K$, donde G y K son cerrados, ajenos y no vacíos. Por lo demostrado anteriormente, tenemos que $A \subset L(A,t) = G \cup K$, y como A es conexo, entonces A debe estar contenido en G o K. Supongamos que $A \subset G$, tomemos $P = \{s \in [0,t] : L(A,s) \subset G\}$, $Q = \{s \in [0,t] : L(A,s) \cap K \neq \emptyset\}$ y sea $f : [0,t] \to 2^X$ definida por $f(s) = L(A,s)$. Ya demostramos que L es continua, por lo que f es continua, además notemos que $P = f^{-1}(D)$ y $Q = f^{-1}(B)$, donde $D = \{E \in 2^X : E \subset G\}$ y $B = \{E \in 2^X : E \cap K \neq \emptyset\}$.

Por el lema 3.1, D y B son cerrados en 2^X, más aún f es continua, entonces P y Q son cerrados. Como G y K son ajenos, P y Q también son ajenos. Por lo que se demostró anteriormente, para toda $s \in [0,t]$, $L(A,s) \subset L(A,t) = G \cup K$, se tiene que $s \in P \cup Q$. Entonces P y Q son cerrados, ajenos y su unión es $[0,t]$. Como $[0,t]$ es conexo, P o Q debe ser vacío. Pero $L(A,0) = A \subset G$, por lo que $0 \in P$ y $L(A,t) = G \cup K$ y $K \neq \emptyset$ de donde $y \in Q$. Se tiene una contradicción.

Por último, de lo que hemos demostrado tenemos que $L|_{C(X)\times[0,1]} : C(X) \times [0,1] \to C(X)$ es una homotópia para $C(X)$, con lo que queda demostrado *(b)* implica *(c)*.

Observemos que *(c)* implica *(a)* y *(d)* imlpica *(b)* se cumplen por el lema 2.17, pues si un espacio es contraíble, cualquier subespacio es contraíble en él. $\square$

4 X contraíble, X hereditariamente indescomponible

Usaremos el teorema anterior para mostrar que 2^X y $C(X)$ son contraíbles para dos diversas clases de continuo X. Nuestros resultados están en los siguientes dos corolarios.

Primero recordemos que $F_1(X)$ es homeomorfo a X. En efecto, ya que existe una función $h : X \to F_1(X)$ dada por $h(x) = \{x\}$ es un homeomorfismo. Esto nos ayudará a demostrar el siguiente corolario.

Corolario 4.1. *Si X es un continuo contraíble, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración. Sea X un continuo contraíble. Entonces, como $F_1(X) \approx X$, y $F_1(X)$ es contraíble en si mismo. De ahí que F_1 es contraíble en $C(X)$. Por lo tanto, haciendo uso del teorema 3.2, se tiene que 2^X y $C(X)$ son contraíbles. $\square$

Corolario 4.2. *Si X es un continuo hereditario indescomponible, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Mostraremos que $F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$, luego se hará uso del teorema 3.2. Como por hipótesis X es compacto, entonces por el teroema 2.9, existe una función de Whitney ω, para el hiperespacio $C(X)$. Definamos $h : F_1 \times [0, \omega(X)] \to C(X)$ como sigue. Sea $(\{x\}, t) \in F_1(X) \times [0, \omega(X)]$; por el teorema 2.10, consideremos un arco ordenado en $C(X)$ que va de $\{x\}$ a X, como ω es una función continua, entonces existe $A_{x,t} \in \omega^{-1}(t)$ tal que $x \in A_{x,t}$; más aún, por el lema 2.12, existe un único $A_{x,t}$; sea

$$h(\{x\}, t) = A_{x,t}.$$

Esto define a la función $h : F_1(X) \times [0, \omega(X)] \to C(X)$. Se sigue de la definición de función de Whitney(2.8) que, para cada $\{x\} \in F_1$,

$$h(\{x\}, 0) = \{x\} \text{ y } h(\{x\}, \omega(X)) = X.$$

Ahora, probaremos que h es continua. Sea $(\{x\}, t) \in F_1(X) \times [0, \omega(X)]$, y sea $\{(\{x_i\}, t_1)\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión que converge en $F_1(X) \times [0, \omega(X)]$ a $(\{x\}, t)$. Supongamos, sin perdida de generalidad que la sucesión $\{h(\{x_i\}, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a B en $C(X)$. Entonces, dado que $x_i \in h(\{x_i\}, t_i)$ para cada i, note que $x \in B$; también, como $\omega(h(\{x_i\}, t_i)) = t_i$ para cada i y ya que ω es continua, se tiene que $\omega(B) = t$. Por lo tanto, $B = h(\{x\}, t)$. Así, queda demostrado que h es continua.

De las propiedades que se verificaron de h anteriormente, hemos probado que $F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$. Por lo tanto, por el teorema 3.2, se tiene que 2^X y $C(X)$ son contraíbles. $\square$

5 Propiedad de Kelley

Pongamos nuestra atención en una condición útil y suficiente para determinar si 2^X y $C(X)$ son contraíbles. Dicha condición se debe a Kelley y la llamaremos propiedad (k). Más adelante se mostrará que si X es un continuo que cuenta con la propiedad (k), entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.

Definición 5.1. Sea X un continuo, y sea d una métrica para X. Decimos que X cuenta con la propiedad (k), o **propiedad de Kelley**, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ que satisface la siguiente condición:

(k) si p, $q \in X$ tales que $d(p, q) < \delta$ y si $A \in C(X)$ tal que $p \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$. (donde H denota la métrica de Hausdorff para $C(X)$.

Definición 5.2. Sea X un continuo con métrica d, y sea $p \in X$; decimos que X tiene la **propiedad** (k) **en** p si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(p, \varepsilon) > 0$ tal que si $q \in X$ satisface $d(p, q) < \delta$ y si $A \in C(X)$ tal que $p \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$.

Note que, un continuo tiene la propiedad (k) si y solo si tiene la propiedad (k) en cada uno de sus puntos.

Teorema 5.3. *La propiedad de Kelley es una invariante topológica.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos tales que son homeomorfos y X tiene la propiedad de Kelley.

Sean $f : X \to Y$ homeomorfismo y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = f(a)$ para algún $a \in X$, sea $B \in C(Y)$ tal que $f(a) \in B$. Como f es biyectiva, entonces para $b_n \in Y$ existe $a_n \in X$ tal que $f(a_n) = b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $f^{-1} : Y \to X$ continua, además $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(f(a_n)) = f^{-1}(f(a))$, así $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Como $B \in C(Y)$, se tiene que B es conexo y compacto, además f^{-1} es continua, así $f^{-1}(B)$ es conexo y compacto. Luego, como $f(a) \in B$, entonces $f^{-1}(f(a)) \in f^{-1}(B)$, de ahí que $a \in f^{-1}(B)$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n) = f^{-1}(B)$, luego $f(a_n) \in f(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, como A_n es conexo y compacto, entonces $f(A_n)$ es conexo y compacto, así $f(A_n)$ es un subcontinuo para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n) = f^{-1}(B)$, como f es continua $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n) = B$, por lo tanto Y tiene la propiedad de Kelley. □

Teorema 5.4. *Sea X un continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X tiene la propiedad de Kelley.

(2) Para toda $A \in C(X)$ con $a \in A$, para alguna $a \in X$, y para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Demostración. Supongamos que X es un continuo con la propiedad de Kelley.

Sean $a \in X$, $A \in C(X)$ con $a \in A$ y una sucesión $\{a_n\}_{a\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} = a$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y definimos $f_{a_n} : C(a_n, X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dada por $f(B) = H(A, B)$. Veamos que f_{a_n} es continua.

Sean $B \in C(a_n, X)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $U = \mathcal{B}_H(B, \varepsilon) \cap C(a_n, X)$, note que U es abierto en $C(a_n, X)$. Tomemos un $r \in f_{a_n}(U)$, entonces existe un $C \in U$ tal que $f_{a_n}(C) = r = H(A, C)$. Como $C \in U$ se cumple que $H(B, C) < \varepsilon$, así $H(A, B) \leq H(B, C) + H(A, C) < \varepsilon + H(A, C)$, se sigue que $H(A, B) - H(A, C) < \varepsilon$, luego $f_{a_n}(B) - f_{a_n}(C) < \varepsilon$, de ahí que $f_{a_n}(B) - r < \varepsilon$.

Por otro lado, $H(A, C) \leq H(A, B) + H(C, B) < H(A, B) + \varepsilon$, de ahí $-\varepsilon < H(A, B) - H(A, C)$, así $-\varepsilon < f_{a_n}(B) - r$. Por lo tanto tenemos que $|f_{a_n}(B) - r| < \varepsilon$, luego f_{a_n} es continua.

Como $C(a_n, X)$ es compacto y f_{a_n} es continua, entonces f_{a_n} alcanza su mínimo, es decir, existe $A_n \in C(a_n, X)$ tal que $H(A, A_n) \leq H(A, B)$ para toda $B \in C(a_n, X)$.

Sea $\varepsilon > 0$, como X tiene la propiedad de Kelley, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $b \in \mathcal{B}(a, \delta)$ existe $B \in C(X)$ con $b \in B$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, para $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $a_n \in \mathcal{B}(a, \delta)$. Así, para $n \geq N$ existe $B_n \in C(X)$ con $a_n \in B_n$ tal que $H(A, B_n) < \varepsilon$. Note que $B_n \in C(a_n, X)$, entonces $\varepsilon > H(A, B_n) \geq H(A, A_n)$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Ahora, supongamos que X no es de Kelley en algún punto a. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $b \in \mathcal{B}(a, \delta)$ y existe $A \in C(X)$ con $a \in A$, tal que para todo $B \in C(X)$ con $b \in B$, $H(A, B) \geq \varepsilon$. Sean $\delta_n = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $b_n \in \mathcal{B}(a, \frac{1}{n})$ y existe $A_n \in C(X)$ con $a \in A_n$ tal que para toda $B \in C(X)$ con $b_n \in B$ se tiene que $A(A_n, B) \geq \varepsilon$.

Sea $C(a, X) = \{a \in C(X) : a \in A\}$, note que $C(a, X) = CL_{\{a\}} \cap C(X)$, note que $C(a, X)$ es cerrado en $C(X)$. Ahora, como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el compacto $C(a, X)$, entonces existe una subsuceción $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, para algún $A \in C(X)$ con $a \in A$. Además, $H(A_k, B) \geq \varepsilon$ para toda $B \in C(X)$ con $b_k \in B$ y $b_k \in \mathcal{B}(a, \frac{1}{n})$ (#).

Tenemos que $A \in C(a, X)$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = a$ por construcción. Por hipotesis, existe $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C(X)$ tal que $b_k \in B_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = A$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_k, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $k \geq N_1$. Además, como $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = A$ para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(B_k, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $k \geq N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ y sea $k \geq N$, tenemos que

$$H(A_k, B_k) \leq H(A_k, A) + H(A, B_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Entonces hemos encontrado $B_k \in C(X)$ con $b_k \in B_k$ y $b_k \in \mathcal{B}(a, \frac{1}{k})$ tal que $H(A_k, B_k) < \varepsilon$, lo cual contradice lo dicho en (#). Por lo tanto X tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Teorema 5.5. *Sea X un continuo localmente conexo, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $a \in X$ y Y un subcontinuo de X talque $a \in Y$. Como X es localmente conexo, entonces para $\mathcal{B}(a, \frac{\varepsilon}{2})$ existe un subconjunto abierto y conexo $\mathcal{U}$ de X tal que $a \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}(a, \frac{\varepsilon}{2})$. Además, como $\mathcal{U}$ es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}(a, \delta) \subset \mathcal{U}$. Si $d(a, b) < \delta$ con $b \in \mathcal{U}$. Note que por ser $\mathcal{U}$ conexo, se tiene que $\text{cl}(\mathcal{U})$ es conexo, de ahí que $\text{cl}(\mathcal{U})$ es un subcontinuo de X. Definimos $Z = Y \cup \text{cl}(\mathcal{U})$ un subcontinuo de X tal que $b \in Z$ y $\text{diám}(\mathcal{U}) < \frac{\varepsilon}{2}$, así $H(Z, Y) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Definición 5.6. Sea X un espacio topológico. X es **conexo en pequeño en** p (*cik* por sus siglas en aleman) si p tiene una vecindad base de vecindades conexas, esto es, conjuntos conexos que contienen a p en sus interiores en X. X es **conexo en pequeño**, si es conexo en pequeño en todos sus puntos. Note que si X es localmente conexo en p, entonces X es *cik* en p.

Definición 5.7. Sea X un continuo, y sea ω una función de Whitney para $C(X)$ (ω existe por el teorema 2.9). Definimos F_ω en $X \times [0, \omega(X)]$ por

$$F_\omega(x, t) = \{A \in \omega^{-1}(t) : x \in A\},$$

para cada $(x, t) \in X \times [0, \omega(X)]$. Es útil formular F_ω en terminos de la contención de hiperespacios $C_x(X)$:

$$F_\omega(x, t) = C_x(X) \cap \omega^{-1}(t),$$

para cada $(x, t) \in X \times \{0, \omega(X)\}$.

Veamos el siguente hecho sobre F_ω.

Proposición 5.8. *[5, Proposición 2.19] Sea X un continuo. Entonces, para cada $(x,t) \in X \times [0, \omega(X)]$, $F_\omega(x,t) \in 2^{2^X}$.*

Lema 5.9. *[5, Lema 2.16] Si X es un cotinuo que es conexo en pequeño, entonces tiene la propiedad (k).*

Proposición 5.10. *[5, Proposición 2.22] Sea X un continuo, y sea ω una función de Whitney para $C(X)$. Entonces, X tiene la propiedad (k) si y solo si F_ω es continua.*

Proposición 5.11. *[12, Teorema 81] Sea X un continuo. La función unión $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ definida por*

$$\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\},$$

para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$, es continua.

Teorema 5.12. *Si X es un continuo que tiene la propiedad (k), entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración. Mostremos que $F_1(X)$ es contraíble en 2^X y haremos uso del teorema 3.2.

Sea ω una función de Whitney para $C(X)$ (ω existe por teorema 2.9). Por la proposición 5.10, $F_\omega : X \times [0, \omega(X)] \to 2^{2^X}$ es continua (recordando 5.8). Sea $D = F_1(X) \times [0, \omega(X)]$. Definimos una función h en D como sigue:

$$h(\{x\}, t) = \bigcup F_\omega(x,t) \text{ para cada } (\{x\}, t) \in D.$$

Note que la función natural de $F_1(X)$ en X (es decir, $\{x\} \to x$) es continua; como F_ω es continua, vemos que h es una función continua de D a 2^X usando la proposición 5.11. Más aún, usando la definición de función de Whitney (2.8), vemos que para cada $\{x\} \in F_1(X)$,

$$h(\{x\}, 0) = \bigcup F_\omega(x, 0) = \bigcup \{\{x\}\} = \{x\}$$

y

$$h(\{x\}, \omega(X)) = \bigcup F_\omega(x, \omega(X)) = \bigcup \{X\} = X.$$

Entonces, h es una función homotópica la cual muestra que $F_1(X)$ es contraíble en 2^X. Por lo tanto, por el teorema 3.2, tenemos que 2^X y $C(X)$ son contraíbles. □

Corolario 5.13. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración. Por el teorema 5.5, se tiene que X cuenta con la propiedad (k). Ahora, por el teorema 5.12, podemos concluir que 2^X y $C(X)$ son contraíbles. □

Definición 5.14. Un espacio topológico X se dice que es **homogéneo** si para cualesquiera p y $q \in X$, existe un homeomorfismo h que va de X en X tal que $h(p) = q$.

Corolario 5.15. *[5, Corolario 2.32] Si X es un continuo homogéneo, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

6 Hiperespacios con la propiedad del punto fijo

En esta sección determinaremos clases de continuos X, para los cuales 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo (algunos resultados son únicamente para $C(X)$).

Mencionaremos que exiten continuos Y, tales que tienen la propiedad del punto fijo, pero $C(Y)$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Definición 6.1. Sean X un espacio métrico, $p \in X$ y $f : X \to X$, se dice que p es un **punto fijo** de f si $f(p) = p$. Diremos que X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua $h : X \to X$ tiene un punto fijo.

El resultado más célebre sobre la propiedad del punto fijo es el teorema de Brouwer:

Teorema 6.2 (Teorema del Punto Fijo de Brouwer)**.** *[2, Corolario 2.2] Cualquier n-celda tiene la propiedad del punto fijo.*

Teorema 6.3. *[7, Teorema 10.8] Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X y $C(X)$ son absolutamente retractos.*

Definición 6.4. Si Y es un espacio métrico compacto y no vacío. Una **retracción** es una función continua r de Y en Y, tal que r es la identidad en su rango, es decir, $r(r(y)) = r(y)$ para cada $y \in Y$. Un subconjunto Z de Y, se dice que es un **retracto** de Y, si existe una retracción sobreyectiva de Y en

Z. Un espacio metrizable, compacto y no vacío K es un **retracto absoluto** (**AR** por sus siglas en inglés), cuando K pueda ser encajado en un espacio métrico Y, la copia de K es un retracto de Y.

Corolario 6.5. *[5, Corolario 3.8] Todo absoluto retracto (AR) tiene la propiedad del punto fijo.*

Teorema 6.6. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X y $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el teorema 6.3, se tiene que 2^X y $C(X)$ son absolutamente retractos. Por lo tanto, haciendo uso del corolario 6.5, se tiene que 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo. □

Definición 6.7. Sean (X, d) un espacio métrico, Y un espacio topológico, y $\varepsilon > 0$. Una función $f : X \to Y$ es llamada **ε-función** con respecto a d si f es continua y para cada $y \in f(X)$,

$$\text{diám}_d(f^{-1}(y)) < \varepsilon.$$

Sean X un espacio métrico y $\mathcal{P}$ una colección de espacios métricos compactos, X es **tipo-$\mathcal{P}$** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función f_ε sobreyectiva de X a algún elemento Y_ε de $\mathcal{P}$.

Teorema 6.8. *[5, Teorema 3.22] Si X es un continuo tipo-arco, entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Teorema 6.9. *[5, Teorema 3.24] Si X es un continuo tipo-circunferencia, entonces $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Proposición 6.10. *Sea (Y, d) un espacio métrico compacto. Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua f_ε de Y a un subconjunto Y_ε de Y, tal que Y_ε tiene la propiedad del punto fijo y f_ε dista de la función identidad en Y en menos que ε. Entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f : Y \to Y$ continua. Sea $\varepsilon > 0$. Note que $f_\varepsilon \circ f\,|_{Y_\varepsilon}$ es una función continua que va de Y_ε a Y_ε. Así, $f_\varepsilon \circ f\,|_{Y_\varepsilon}$ tiene un punto fijo p_ε. Entonces, como la distancia de f_ε a la función identidad en Y es menor que ε,

$$d(f(p_\varepsilon), p_\varepsilon) = d(f(p_\varepsilon), f_\varepsilon(f(p_\varepsilon))) < \varepsilon.$$

Ahora, de lo que mostramos, existe una sucesión $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que $d(f(p_i), p_i) < \frac{1}{i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como Y es compacto, alguna subsucesión de $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a algún p. Se sigue que $f(p) = p$. □

Ahora, se probará un teorema que puede ser aplicado para varios tipos de continuos. Primero daremos la definición de función inducida, la cual nos será de mucha ayuda para la demostración de dicho teorema.

Definición 6.11. Sean X y Y compactos y sea $f : X \to Y$ una función continua. La **función inducida** $f^* : 2^X \to 2^Y$ dada por

$$f^*(A) = f(A) \text{ para cada } A \in 2^X;$$

la **función inducida** $\widehat{f} : C(X) \to C(Y)$ es $f^* |_{C(X)}$. (A veces f^* es denotada por 2^f y $\widehat{f}$ es denotada por $C(f)$.)

Teorema 6.12. *Sea X un continuo. Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua f_ε de X a un continuo localmente conexo X_ε, con $X_\varepsilon \subset X$, tal que la distancia de f_ε a la función identidad en X es menor que ε. Entonces, 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Denotemos con d una métrica para X. Supongamos que la distancia de f_ε a la función identidad en X es menor que ε, con respecto a la métrica d en X. Así, vemos que la función inducida $f_\varepsilon^* : 2^X \to 2^{X_\varepsilon}$ dista de la función identidad en 2^X en menos que ε con respecto a H_d. También, 2^{X_ε} tiene la propiedad del punto fijo por el teorema 6.6. Por lo tanto, podemos hacer uso de la proposición 6.10 para concluir que 2^X tiene la propiedad del punto fijo. De manera análoga se demuestra para $C(X)$, haciendo uso de la función inducida $\widehat{f_\varepsilon} : C(X) \to C(X_\varepsilon)$. $\square$

Definición 6.13. Un **dendroide** es un continuo arco conexo hereditariamente unicoherente (hereditariamente unicoherente significa que cada subcontinuo es unicoherente **??**).

Definición 6.14. Una **gráfica finita** es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cuales quiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos.

Definición 6.15. Un **árbol** es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples. Note que un árbol es un dendroide localmente conexo.

Teorema 6.16. *[4, p. 261] Si X es una dendroide suave y $\varepsilon > 0$, entonces existe una retracción r_ε de X en un árbol tal que la distancia de r_ε a la función identidad en X es menor que ε .*

Teorema 6.17. *Si X es un dendroide suave, entonces 2^X y $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el teorema 6.16, podemos hacer uso del teorema 6.12, así 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad de el punto fijo. □

Definición 6.18. Un **abanico** es un dendroide X, para el cual solo un punto es un punto extremo en común para tres o más arcos en X.

Teorema 6.19. *(**Teorema de Fugate**)[3, p. 120] Si X es un abanico y $\varepsilon > 0$, entonces existe una retracción sobreyectiva r_ε de X a un árbol (el cual en este caso es un arco) tal que la distancia de r_ε a la función identidad en X es menor que ε.*

Gracias al teorema que acabamos de enunciar, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.20. *Si X es un abanico, entonces 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el teorema de Fugate 6.19 podemos aplicar el teorema 6.12 para ver que 2^X y $C(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. □

Teorema 6.21. *[5, Teorema 3.41] Sea X un producto cartesiano a lo más numerable, donde cada espacio coordenado es un abanico o un dendroide suave. Entonces 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad del punto fijo.*

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

Bibliografía

[1] K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Monografie Matematyczne, Vol. 44, Polish Scientific Publishers, Warszawa, Poloand, 1967.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1978.

[3] J. B. Fugate, *Retracting fans onto finite fans*, Fund. Math. 71, (1971), 113–125.

[4] J. B. Fugate, *Small retractions of smooth dendroids onto trees.*, Fund. Math. 71, (1971), 255–262.

[5] Luis Antonio Guevara Martínez, *Existencia de arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 25 de abril de 2023.

[6] Alejandro Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas; Texto No. 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[7] Alejandro Illanes; Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recents Advances*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[8] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Acad. Press, New York, N.Y., 1966.

[9] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Acad. Press, New York, N.Y., 1968.

[10] Sergio Macías, (2005). *Un breve panorama de los hiperespacios de continuos*, Revista Integración, Temas De matemáticas, 23(2), 1-13.

[11] Esaú Alejandro Pérez Rosales, *Existencia de arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 22 de junio de 2022.

[12] Fátima Itzel Regis Avila, *Hiperespacios y Continuos Pseudocontráctiles*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias, UAEM, presentada el 19 de septiembre de 2019.

[13] Cristina Sánchez López, *Propiedad del Punto Fijo: Lema de Spencer*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 30 de junio de 2014.

[14] G. S. Young, *Fixe d-point teoremas for arcwise connected continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 11, (1960), 880-884

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

luis.guevaramar@alumno.buap.mx
david.herrera@correo.buap.mx
fernando.macias@correo.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 21, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-10-1

Capítulo 9

El punto fijo en las dendritas

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, David Rodríguez Hernández
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo se hablará de la propiedad del punto fijo en los continuos, especificamente se probará esta propiedad en un caso particular de ellos que son las dendritas. Daremos la definición de dendrita y diremos cuando un espacio topológico tiene la propiedad del punto fijo, para después probar que las dendritas tienen dicha propiedad.

1 Introducción

La teoría del punto fijo es posible definirla en cualquier espacio topológico, se sabe que actualmente esta tiene diversas aplicaciones en áreas tales como el análisis matemático, las ecuaciones diferenciales, física y economia, existen teoremas que datan de finales del siglo XVIII y principios del XIX a cargo de Poincaré y Banach donde ya se vislumbraba su utilidad. Se puede llegar a probar que si un espacio topológico tiene la propiedad del punto fijo, este debe ser conexo y en conjunto con la compacidad se puede hacer teoría del punto fijo en los continuos, pues, entendemos por continuo a un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. No podemos permitirnos dejar pasar la pregunta ¿que tipo de continuos tienen la propiedad del punto fijo? y aunque en general este capítulo no responde completamente esa cuestión, centraremos nuestro estudio en los continuos localmente conexos que no tienen curvas cerradas simples, conocidos como dendritas. A saber, probaremos que las dendritas tienen la propiedad del punto fijo.

2 Preliminares

Ya que nuestro estudio tiene que ver con los espacios topológicos que tienen la propiedad del punto fijo, daremos la definición de punto fijo, además enunciaremos un teorema importante que aunque no se incluye su demostración, esta puede ser revisada en la bibliografía correspondiente. Daremos una breve revisada al concepto de compacidad y conexidad para después dar la definición de continuo y continuo localmente conexo, así como algunas caracterizaciones de este último.

Fue René Maurice Fréchet (1878-1973) quien a principios del siglo XIX definió a los conjuntos compactos como aquellos que contienen sólo un número finito de puntos o si cada uno de sus subconjuntos infinitos tiene al menos un punto límite. Aunque más tarde se asumió que esta idea no era muy adecuada en el contexto de espacios topológicos abstractos, fue entonces cuando se formuló el concepto de compacidad en términos de cubrimientos del espacio por conjuntos abiertos, y es actualmente la manera en que se trabaja la compacidad en cualquier espacio topológico.

Definición 2.1. Sea $Y \subset X$. Si $Y \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ con U_α conjunto abierto en X; a la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se le llama cubierta abierta de Y.

Si $I' \subset I$ es tal que $Y \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I'} U_\alpha$, entonces decimos que la subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I'}$ es una subcubierta de Y.

Si además I' es un conjunto finito, diremos que la subfamilia es una subcubierta finita de Y.

Definición 2.2. Sea X un espacio métrico y $Y \subset X$. Decimos que Y es **compacto** si toda cubierta abierta de Y admite una subcubierta finita.

Ejemplo 2.3. Sea $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$, a saber, Y es compacto.

Demostración: Sea A una cubierta abierta de Y, luego debe existir un abierto U de A que contiene al 0 y por la forma en que está definido Y el conjunto U debe contener a todos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ excepto a un número finito de ellos; digamos $y_1, ..., y_k$. Ahora, para cada una de estos puntos que no están en U, tomemos un elemento de A que los contenga, digamos $A_1, ...A_k$. Luego $U \cup \{A_i\}_{i=1}^k$ es una subcubierta abierta para Y y por tanto Y es compacto.■

Intuitivamente un espacio acotado es aquel que no se extiende indefinidamente, en otras palabras cuando se mantiene dentro de ciertos límites.

Definición 2.4. Sea Y un subconjunto no vacío de (X, d) un espacio métrico. Decimos que Y es acotado si existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x, y \in Y$ se tiene que $d(x, y) \leq k$.

El teorema que a continuación se enuncia relaciona los intervalos acotados y cerrados de $\mathbb{R}$ con el concepto de compacidad.

Teorema 2.5. *Cada intervalo cerrado y acotado de* $\mathbb{R}$ *es compacto.*

Demostración. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta para dicho intervalo, consideremos a

$$B = \{c \in [a, b] : \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \ admite\ una\ subcubierta\ finita\ para\ [a, c]\}$$

consideremos a $S = sup\{B\}$, a saber si $S < b$, entonces debe existir U_β de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $S \in U_\beta$, luego al ser U_β abierto debe existir un $\varepsilon > 0$ tal que $(S - \varepsilon, S + \varepsilon) \subset U_\beta$, y al ser $S - \varepsilon < S$, el intervalo $[0, S - \varepsilon]$ puede cubrirse con una cantidad finita de elementos de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y así el intervalo $[0, S + \frac{\varepsilon}{2}]$ con los elementos que cubren a $[0, S - \varepsilon]$ junto com U_β, lo que implicaria que S no es el supremo de B, por tanto debe suceder que $S = b$ y así $[a, b]$ puede cubrirse con una cantidad de elementos de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Por tanto $[a, b]$ es compacto. ■

Teorema 2.6. *Si* (X, d) *es un espacio métrico compacto y* C *un subconjunto cerrado de* X*, entonces* C *es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta para C, luego al ser C cerrado, tenemos que C^c abierto, nótese que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup C^c$ es una cubierta abierta para X y al ser X compacto, este admite una subcubierta finita. A saber C^c puede ser o no parte de la subcubierta finita.
En el caso de que C^c no sea parte de la subcubierta finita de X se tendría que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_k}\}$ es una subcubierta finita para X, es

decir $X \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$ y como $C \subset X$, entonces $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$ y por tanto C compacto.
En el caso de que C^c sea parte de la subcubierta finita de X, esta sería de la forma $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_k}, C^c\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, luego al igual que en el caso anterior $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \cup C^c$ pero $C \not\subset C^c$ por lo que $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$ y por tanto C compacto. ■

Siguiendo ahora con el concepto de conexidad. La definición actual de esta fue introducida en 1893 por C. Jordan (1838-1922) para la clase de los subconjuntos del plano. El estudio sistemático de la conexidad fue iniciado en 1914, por F. Hausdorff (1878-1973), y en 1921 por B. Knaster (1893-1980) y K. Kuratowski (1896-1980).

Siempre podemos pensar de manera intuitiva a un conjunto conexo como un conjunto de una sola pieza (que no se puede dividir), pero en términos más precisos y a manera de no generar ambigüedad, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.7. Sea X un espacio métrico y sean P y Q subconjuntos abiertos no vacíos de X. Diremos que P Y Q son una **separación** de X si $X = P \cup Q$ y $P \cap Q = \emptyset$.
Diremos que X es **disconexo** si existe una separación de X y en caso contrario diremos que X es conexo, o bien. X es **conexo** si no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos.
Además, si $Y \subset X$, entonces Y es disconexo o conexo si lo es como subespacio con la topología relativa.

Proposición 2.8. *Sean C un subespacio métrico conexo de X. Si $C \subset B \subset \overline{C}$, entonces B es conexo.*

Demostración. Supongamos que B es disconexo, entonces deben existir M y N abiertos tales que $B = M \cup N$ y $M \cap N = \emptyset$. Luego como C es conexo, C debe ser subconjunto de M o bien de N, sin perdida de generalidad supongamos que $C \subset M$, entoces $\overline{C} \subset \overline{M}$ por lo que $\overline{C} \cap N = \emptyset$. Y como $B \subset \overline{C}$ se tiene que $B \cap N = \emptyset$, luego $N = \emptyset$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, B es conexo. ■

A continuación un teorema que caracteriza los subconjuntos conexos del espacio $\mathbb{R}$.

Teorema 2.9. *Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si I es un intervalo o un subconjunto unitario.*

Demostración: Primero Supongamos que $I \subset \mathbb{R}$ es conexo. En caso de que sea un conjunto unitario no hay nada que probar, así pues supongamos que no es unitario y también que no es un intervalo, luego deben existir $a, b \in I$ tales que $[a, b] \not\subset I$, así existe $c \in (a, b)$ tal que $c \notin I$, Considerese los conjuntos

$$P = (-\infty, c) \cap I \quad y \quad Q = (c, \infty) \cap I$$

luego $I = P \cup Q$ con P yQ separados, pero esto contradice que I conexo. por tanto I debe ser un intervalo.

Ahora, demostremos el regreso, a saber, si I unitario no tenemos nada que probar, supongamos pues que I es un intervalo y no es conexo. Luego, deben existir $P, Q \subset \mathbb{R}$ no vacíos y separados tales que $I = P \cup Q$. Sean $x \in P$ y $y \in Q$ y supongase que $x < y$, al ser I un intervalo podemos asegurar que $[x, y] \subset I$. Así pues, sea $R = [x, y] \cap P$, notemos que $R \neq \emptyset$ y tiene como cota superior a y, luego debe exitir $\alpha = supR$.
Ahora bien, se tiene que $x \leq \alpha \leq y$ por lo que $\alpha \in [x, y]$, entonces $\alpha \in P$ o bien $\alpha \in Q$ pero no en ambos, supongamos que $\alpha \in P$, entonces $\alpha < y$.
Pero al ser P abierto en I debe existir D abierto en $\mathbb{R}$ con la propiedad de que $P = D \cap I$, entonces $\alpha \in D$ por lo que debe exitir un $\varepsilon > 0$ tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset D$ y como $\alpha < y$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ a manera de que $\alpha + \varepsilon < y$, así $\alpha + \varepsilon \in I$, luego $\alpha + \varepsilon \in P$ lo que contradice que $\alpha = supR$, lo mismo para el caso en que $\alpha \in Q$. Por tanto I conexo. ∎

Nótese que la unión de conjuntos conexos puede ser un conjunto no conexo, pero si la intersección de estos conjuntos es al menos un punto, entonces la unión dará como resultado un conjunto conexo.
El siguiente teorema generaliza esta idea.

Teorema 2.10. *[4, Teorema (2.A.10)] Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de subconjuntos conexos en un espacio topológico X tales que para $i \neq j$, se cumple que $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ es conexo.*

Definición 2.11. Sea X un conjunto no vacío y sea $f : X \to X$ una función se dice que $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.

Teorema 2.12. *[4, Teorema (1.F.6)]* (**Teorema de pegado de funciones**). *Sean A y B subconjuntos cerrados de un espacio topológico X. Sea Y un espacio arbitrario y supongamos que $f\colon A \to Y$ y $g\colon B \to Y$ son funciones continuas tales que $f \mid A \cap B = g \mid A \cap B$. Entonces la función $h\colon A \cup B \to Y$ definida, para cada $x \in A \cup B$, por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in A, \\ g(x), & si\ x \in B. \end{cases}$$

es continua.

Ejemplo 2.13. Es fácil verificar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x$ tiene como puntos fijos a 0 y 3.

Ejemplo 2.14. De igual forma es fácil verificar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 5$ no tiene puntos fijos.

Definición 2.15. Se dice que un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si cada función continua $f\colon X \to X$, tiene un punto fijo.

Ejemplo 2.16. Denotemos como I al intervalo cerrado $[0, 1]$, veamos que tiene la propiedad del punto fijo. En efecto, sean $f\colon I \to I$ una función continua, $A = \{x \in I : x \leq f(x)\}$ y $B = \{x \in I : x \geq f(x)\}$. Observe, $I = A \cup B$ y, que A y B son subconjuntos cerrados de I, además $0 \in A$ y $1 \in B$. Entonces, como I es un conexo, existe $x_0 \in A \cap B$, es decir $x_0 \in A$ y $x_0 \in B$ por lo que $x_0 \leq f(x_0)$ y $x_0 \geq f(x_0)$ y en consecuencia $f(x_0) = x_0$.

Es importante mencionar que la propiedad del punto fijo se preserva bajo homeomorfismos.

La primera definición de *continuo* fue dada en 1883 por G. Cantor (1845-1918) y nos dice que un continuo es un subconjunto cerrado y denso en sí mismo y conexo en un espacio Euclidiano. Pero esta definición había sido formulada sobre la base del estudio de otro objeto de investigación matemática: El concepto de línea o curva, las cuales eran más importantes en esa época (vea en [2, pág. 225-226]).

Tengamos en consideración lo siguiente:

- Decimos que un conjunto es **no degenerado.** si dicho conjunto tiene más de un punto.

- Decimos que un conjunto es **numerable** si es finito o si tiene cardinalidad igual a la del conjunto $\mathbb{N}$.

- Se entiende que un subconjunto D de un espacio métrico X es **denso** en X, si cada subconjunto abierto y no vacío en X intersecta a D.

- Decimos que un espacio topológico X es **separable** si este contiene un subconjunto denso y numerable.

Ya que hemos dado una breve repasada a los temas de conexidad y compacidad es momento de hablar de la definición de continuo, no sin antes mencionar que si se requiere profundizar más en esos temas se sugiere [7] [6] como una buena referencia. Ahora hablemos un poco de los continuos.

Definición 2.17. Un **continuo** es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. Además si X es un continuo y $Y \subset X$ se dirá que Y es un **subcontinuo** de X, si Y es un continuo.

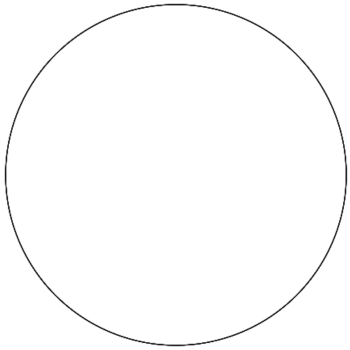
Nota: Con los puntos anteriores y dado que cada espacio métrico compacto es separable, [6, pág. 90-93], en consecuencia podemos decir que cada continuo es separable.

Ejemplo 2.18. Cualquier conjunto unitario es un continuo.

Ejemplo 2.19. Sean a, $b \in \mathbb{R}$, donde $a < b$, el intervalo $[a, b]$ es un continuo. Pues como demostramos en el teorema 2.5 $[a, b]$ es compacto y como demostramos en el teorema 2.9 $[a, b]$ es conexo.

Intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 2.20. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((0, 0), (x, y)) = 1\}$ donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}^2$. X es la circunferencia unitaria y es un continuo.

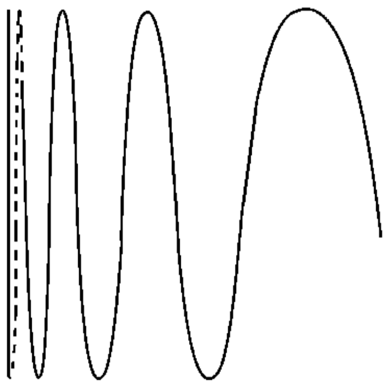


Circunferencia unitaria.

Ejemplo 2.21. Si $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, entonces $X = \overline{W}^{\mathbb{R}^2}$ es un continuo llamado la curva sinoidal del topólogo. Observe que

$$\overline{W}^{\mathbb{R}^2} = W \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

El continuo X se puede observar de manera aproximada en la siguiente figura.



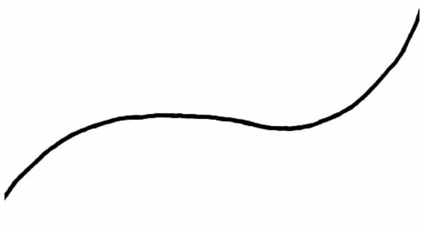
Continuo $sen(\frac{1}{x})$

Llegados a este punto es valido hacernos la pregunta: ¿La unión de continuos es un continuo? y aunque la respuesta es que no necesariamente, el siguiente teorema nos dice bajo que condiciones esto es posible.

Teorema 2.22. *La unión de dos continuos es un continuo siempre que tengan un punto en común.*

Definición 2.23. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

Sea A un arco. Para cualquier homeomorfismo $f\colon [0,1] \to A$, se tiene que $\{p,q\} = \{f(0), f(1)\}$. Por esto, los puntos extremos del arco A son p y q. Podemos decir que A es un **arco de** p **a** q o de q a p.



Arco.

Como el intervalo $[0,1]$ es un continuo, así un arco debe también ser un continuo. En el ejemplo 2.16 probamos que el intervalo $[0,1]$ tiene la propiedad del punto fijo y por la definición 2.23 sabemos que un arco es homeomorfo al intervalo $[0,1]$ y dado que la propiedad del punto fijo es una invariante topológica, entonces todo arco tiene la propiedad del punto fijo.

Definición 2.24. Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria.

Curva cerrada simple.

Definición 2.25. Sean X un espacio topológico conexo y $p \in X$. Si $X - \{p\}$ es conexo, entonces p es llamado **punto de no corte** de X. Si $X - \{p\}$ no es conexo, entonces p es llamado **punto de corte** de X.

Por ejemplo, sea A un arco de p a q.
El arco A tiene sólo dos puntos de no corte, a saber, p y q, y tiene una cantidad no numerable de puntos de corte que son los elementos de $A-\{p,q\}$. Un ejemplo de un continuo que no tiene puntos de corte es la circunferencia unitaria S^1.

Definición 2.26. Un espacio métrico X es **localmente conexo en** $p \in X$, si para cada vecindad V de p existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p \in U \subset V$. Decimos que X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Definición 2.27. Un espacio métrico X es **uniformemente localmente arco conexo,** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, z \in X$ con $x \neq z$ si $d(x,z) < \delta$, entonces existe un arco $A \subset X$ tal que $\text{diám}(A) < \varepsilon$ y A tiene como puntos extremos a x y z.

Una definición íntimamente relacionada con la noción de conexidad local es la siguiente.

Definición 2.28. Sea X un espacio topológico. X, es **arco conexo** si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un arco A en X de x a y.

El siguiente resultado nos dice que los continuos localmente conexos son arco conexos. Aunque la inversa no siempre es verdadera.

Ejemplo 2.29. Considere $P = ([0,1] \times 0) \cup (A \times [0,1])$, donde $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Conocemos a P como el **Peine**, es un continuo que es arco conexo y no es localmente conexo.

Teorema 2.30. *[7, 8.23] Todo continuo localmente conexo es arco conexo.*

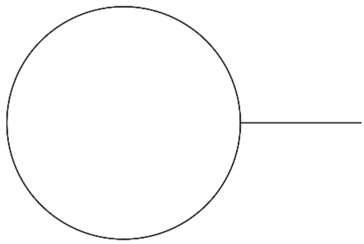
3 Gráficas y árboles

Existen varias caracterizaciones de las gráficas y dado que es de nuestro interés abordarlas desde la noción de los continuos. A continuación damos la siguiente definición.

Definición 3.1. Una **gráfica** es un continuo que puede escribirse como la unión finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos o son ajenos o se intersectan en una cantidad finita de puntos.

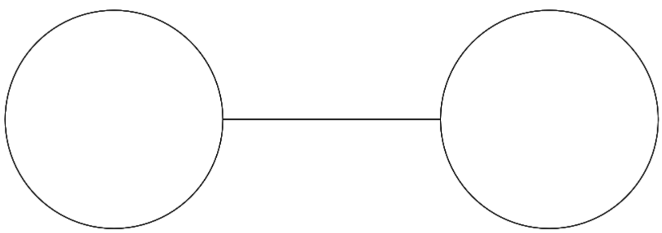
Cabe mencionar que todo espacio topológico homeomorfo a los espacios que mencionaremos en seguida son gráficas:

Ejemplo 3.2. Sea $X = S^1 \cup ([1, 2] \times \{0\})$. Este continuo es llamado Paleta y es una gráfica.



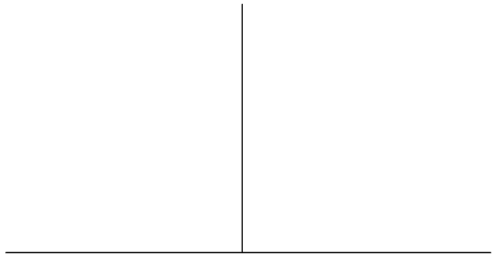
Paleta.

Ejemplo 3.3. Consideremos los puntos del plano cartesiano $q_1 = (-2, 0)$, y $q_2 = (2, 0)$ y el intervalo $[-1, 1] \times \{0\}$. Sean R y S dos circunferencias de radio uno, centradas en los puntos q_1 y q_2, respectivamente. Ahora, sea $X = R \cup S \cup ([-1, 1] \times \{0\})$. Este continuo es llamado la Pesa y también es un ejemplo de gráfica.



Pesa.

Ejemplo 3.4. El siguiente ejemplo es la unión de tres arcos que sólo se intersectan en un punto. A este continuo se le conoce como Triodo Simple.

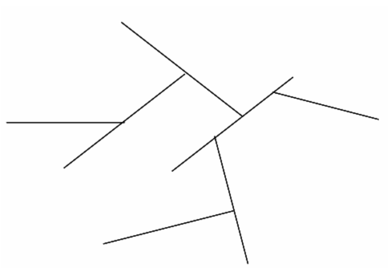


Triodo simple.

Ahora definamos lo que es un árbol, el lector podrá darse cuenta que la familia de los árboles es una subfamilia de la familia de las gráficas. Para el desarrollo de este trabajo es necesario tener la noción de árbol ya que en el siguiente capítulo veremos como aproximar una dendrita por árboles.
A continuación se da una caracterización de árbol y curva cerrada simple las cuales serán auxiliares en la siguiente sección.

Definición 3.5. Un **árbol** es una gráfica que no contiene curvas cerradas simples.

Ejemplo 3.6. En la siguiente figura esquematizamos lo que es un árbol, observe que éste es una gráfica.



Árbol.

En el periodo 1916-1920 W. Sierspiński, S. Strazewicz y R. L. Moore obtuvieron caracterizaciones topológicas del arco como el único continuo que contiene exactamente dos puntos que no son de corte. R. L. Moore además caracterizó a la curva cerrada simple como un continuo que es separado por cualquier par de sus puntos.

Ahora, como un árbol es la unión de un conjunto finito de arcos que se intersectan en uno de sus puntos y que no contiene curvas cerradas simples, podemos pensar en la siguiente caracterización.

Teorema 3.7. *[7, 9.28] Un continuo X es un árbol si y sólo si X contiene una cantidad finita de puntos de no corte.*

Algunas de las caracterizaciones de curva cerrada simple fueron consideradas en 1911, por Z. Janiszewski. En 1924, J. R. Kline demostró que un continuo el cual no es separado por subconjuntos conexos es una curva cerrada simple. R. L. Moore caracterizó a la curva cerrada simple como sigue.

Teorema 3.8. *[7, 9.31] Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si para cada $x, y \in X$, tenemos que $X - \{x, y\}$ es disconexo.*

4 Dendritas

Para este sección pondremos especial interes en los continuos que son localmente conexos y que no tienen curvas cerradas simples, los cuales llevan por nombre *dendritas*. Los árboles son un ejemplo de dendritas. Las dendritas suelen ser ejemplos para muchos conceptos en la teoría de los continuos localmente conexos. Existe una gran cantidad de caracterizaciones de las dendritas (vea en [3]). A continuación la definición con la que daremos seguimiento a este tema.

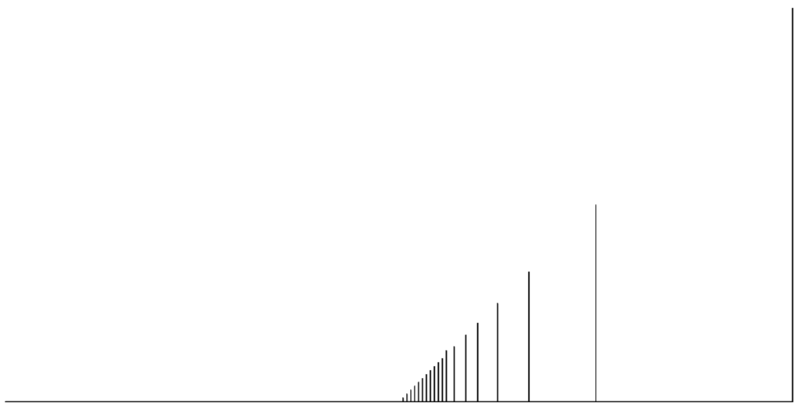
Definición 4.1. Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

Algunos ejemplos clásicos de dendritas se muestran enseguida:

Ejemplo 4.2. Sean $A_n = \{r(\cos\frac{\theta}{2^n\pi}, sen\frac{\theta}{2^n\pi}) : 0 \leq r \leq \frac{1}{2^{n-1}}\}$ definamos a $F_w = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Este continuo es una dendrita, y es llamada F_w o también, en ocasiones, el punto peludo.

F_w.

Ejemplo 4.3. Sea $W = \cup\{\{1/n\} \times [0, 1/n] : n \in \mathbb{N}\} \cup ([-1, 1] \times \{0\})$. Este continuo es llamado Peine Nulo y es un ejemplo de dendrita.



Peine Nulo.

Ejemplo 4.4. Consideremos

$$H_0 = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$$

y

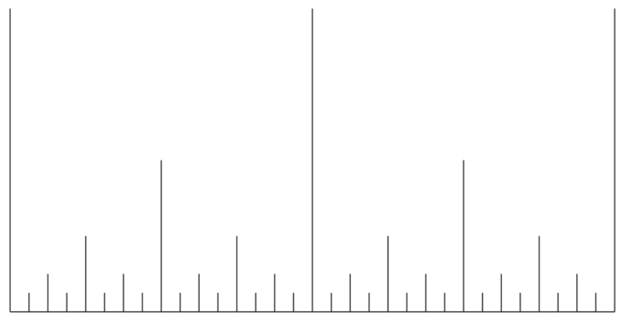
$$H_i = \left\{ \left(\frac{k}{2^{i+1}}, r \right) : 0 \leq k \leq 2^{i+1}, k \ \ natural \ \ impar, r \in \left[0, \frac{1}{i} \right] \right\}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$.

Luego el conjunto

$$\mathcal{H} = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i \right) \cup H_0$$

es una dendrita.



$\mathcal{H}$.

Observe que una curva cerrada simple es una gráfica y no es dendrita. F_w es una dendrita, sin embargo no es gráfica, por lo que, no toda dendrita es gráfica y no toda gráfica es dendrita. Las gráficas que son dendritas son los árboles, por lo que la intersección del conjunto de las dendritas con el conjunto de las gráficas es precisamente el conjunto de los árboles.

La siguiente proposición ayudará en la demostración que para cualesquiera dos puntos en una dendrita existe un único arco que los une. Observe que este hecho no funciona para las gráficas ya que en una curva cerrada simple existen dos arcos que unen a un par de puntos.

Proposición 4.5. *Sean X un continuo y $p,q \in X$. Si A y B son arcos distintos en X que van de p a q, entonces $A \cup B$ contiene una curva cerrada simple.*

Demostración. Sea A un arco en X que va de p a q. Supongamos que existe otro arco B en X que va de p a q. Notemos que A y B son arcos que tienen al menos a p y q como puntos comunes. Se afirma que $A \cup B$ contiene una curva cerrada simple, sean

$$f\colon [0,1] \to A \text{ y } g\colon [0,1] \to B$$

homeomorfismos tales que $f(0) = g(0) = p$ y $f(1) = g(1) = q$. Como A y B son distintos, existe $t \in (0,1)$ tal que $f(t) = r$ con $r \in A$ y $r \notin B$. Ahora, sean

$$A_1 = \{s \in [0,t) : f(s) = g(s)\} \text{ y } A_2 = \{s \in (t,1] : f(s) = g(s)\}$$

estos conjuntos son no vacíos ya que al menos $0 \in A_1$ y $1 \in A_2$. Luego, sean

$$t_1 = \text{ínf}\, A_1 \text{ y } t_2 = \sup A_2$$

observe que $f(t_1) = g(t_1)$ y $f(t_2) = g(t_2)$, y $f([t_1,t_2])$, $g([t_1,t_2])$ son arcos. Sea $C = f([t_1,t_2]) \cup g([t_1,t_2])$, C es una curva cerrada simple donde $C \subset (A \cup B) \subset X$. Con lo que concluimos la prueba. ■

Proposición 4.6. *Sean X una dendrita y $p, q \in X$, entonces existe un único arco A en X que va de p a q.*

Demostración. Supongamos que existen A y B dos arcos disjuntos en X que van de p a q, por Proposición 4.5, $A \cup B$ contiene una curva cerrada simple, pero esto contradice el hecho de que X es una dendrita. Así, existe un único arco A en X que va de p a q. ■

Puede demostrarse que cualquier subcontinuo de una dendrita es también una dendrita.

Corolario 4.7. *[7, 10.6] Todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita.*

Es posible trabajar con las dendritas a partir de árboles contenidos en ellas, mismos que serán subcontinuos más comodos para abordarlas, enunciaremos un teorema que nos dice que para las dendritas existe una sucesión de arboles con ciertas propiedades que listaremos en 4.11, pero antes daremos los siguientes lemas.

Lema 4.8. *Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Para cada $x \in X - Y$ existe un único punto $r(x) \in Y$ tal que $r(x)$ es un punto de cualquier arco en X que va de x a cualquier punto de Y.*

Demostración. Fijemos $x \in X - Y$ y sea $y_0 \in Y$. Como X es un continuo localmente conexo, (Teorema 2.30) X es arco conexo, por lo que existe un arco A en X que va de x a y_0. Consideremos el orden '$\leq$én el conjunto A tal que $x \leq y_0$. Sea $M = \{x \leq t : t \in A \cap Y\}$, por el Teorema de Zorn el conjunto M tiene mínimo, sea $r(x) = mínM$. Así $r(x) \in A \cap Y$. Ahora, sean $y_1 \in Y$ y B un arco en X que va de x a y_1. Se demostrará que $r(x) \in B$. Como Y es un subcontinuo de X, entonces por el Corolario 4.7, Y es una dendrita y por el Teorema 2.30, Y es arco conexo; y así, existe un arco C en Y que va de $r(x)$ a y_1. Sea D un arco en X que va de $r(x)$ a x. Notemos que $C \cap D = \{r(x)\}$ y $C \cup D$ es un arco en X que va de x a y_1, así, $C \cup D$ y B son arcos de la dendrita X con los mismos puntos extremos; y por la Proposición 4.6, $B = C \cup D$; con lo que se demuestra que $r(x) \in B$.

Ahora, se demostrará la unicidad de $r(x)$. Para lo cual, supongamos que para $x \in X - Y$ existen $r(x), s(x) \in Y$, con $r(x) \neq s(x)$, tales que tienen la propiedad anteriormente demostrada. Como X es arco conexo, existe un arco A' en X que va de x a $r(x)$, notemos que $s(x) \in A'$ ya que $s(x)$ tiene la propiedad de estar contenido en cualquier arco que va de x a cualquier punto de Y. Así, $s(x) \leq r(x)$. De manera similar, existe un arco A'' en X que va de x a $s(x)$, notemos que $r(x) \in A'$ ya que $r(x)$ tiene la propiedad de estar contenido en cualquier arco que va de x a cualquier punto de Y. Así, $r(x) \leq s(x)$. Por lo tanto, $r(x) = s(x)$. Con lo se concluye la demostración del Lema. ■

Lema 4.9. *[7, 10.25] Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Definimos $r\colon X \to Y$ por $r(x)$ como en 4.8 si $x \in X - Y$ y $r(x) = x$ si $x \in Y$. Entonces la función r es continua.*

Definición 4.10. La función $r\colon X \to Y$ definida en 4.9 es llamada **función primer punto para Y**.

Denotemos al arco que va de r a s como $[r, s]$. Ahora, estamos listos para el siguiente teorema.

Teorema 4.11. *[7, 10.27](**Teorema de aproximación por árboles**) Sea X una dendrita no degenerada. Entonces existe una sucesión $\{Y_i\}_{i=2}^{\infty}$ que satisface los siguientes proposiciones:*

(1) Cada Y_i es un árbol;

(2) Para cada $i \in \mathbb{N}$, $Y_i \subset Y_{i+1}$;

(3) $\lim\limits_{i\to\infty} Y_i = X$;

(4) Existe $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $Y_1 = \{p_1\}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\overline{Y_{i+1} - Y_i}$ es un arco con punto extremo p_i tal que $\overline{Y_{i+1} - Y_i} \cap Y_i = \{p_i\}$;

(5) Para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $r_i \colon X \to Y_i$ es la función primer punto para Y_i. La sucesión $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad sobre X.

Demostración. Es fácil demostrar el caso en que X es un árbol, así pues supongamos que X no es un árbol. Como todo continuo es separable, sea $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de X. Sean $Y_1 = \{x_1\}$ y $p_1 = x_1$. Por el Teorema 2.30, existe el arco $[p_1, x_2] \subset X$. Sean $Y_2 = [p_1, x_2]$ y $p_2 = x_2$. Notemos que

$$\overline{Y_2 - Y_1} \cap Y_1 = \overline{[p_1, p_2] - \{p_1\}} \cap \{p_1\} = [p_1, p_2] \cap \{p_1\} = \{p_1\}.$$

Luego, para $k = \text{mín}\{j : x_j \notin Y_2\}$, existe el arco $[p_2, x_k] \subset X$ donde $p_2 \in Y_2$. Sea $x_k = p3$ y $Y_3 = Y_2 \cup [p_2, p_3]$. Notemos que

$$\overline{Y_3 - Y_2} \cap Y_2 = \overline{(Y_2 \cup [p_2, p_3]) - Y_2} \cap Y_2 = [p_2, p_3] \cap Y_2 = \{p_2\}.$$

Ahora, supongamos que para $k > 0$, Y_k es un árbol, y que $Y_k \neq X$. Escojamos a $m = \text{mín}\{j : x_j \notin Y_k\}$. Por el Teorema 2.30, existe el arco $[p_k, x_m]$ donde $p_k \in Y_k$. Sean $p_{k+1} = x_m$ y $Y_{k+1} = Y_k \cup [p_k, p_m]$. Observemos que

$$\overline{Y_{k+1} - Y_k} \cap Y_k = \overline{(Y_k \cup [p_k, p_{k+1}]) - Y_k} \cap Y_k = [p_k, p_{k+1}] \cap Y_k = \{p_k\}.$$

Por inducción, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tienen definidos a Y_i y p_i, donde cada Y_i es un árbol. Con esta construcción los incisos *(1), (2),* y *(4)* del teorema son válidos.

Para la demostración de los incisos restantes se sugiere ver [7, 10.27].

5 Propiedad del punto fijo

En esta sección demostrarémos que las dendritas tienen la propiedad del punto fijo (Vea el Teorema 5.4). Pero antes veamos la siguiente proposición que nos será de gran ayuda en nuestra prueba.

Proposición 5.1. *Si X es un continuo y existe una sucesión de funciones continuas que van de X en X, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, que converge uniformemente a la función identidad sobre X, id_X, tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $f\colon X \to X$ una función continua y $\varepsilon > 0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, la función

$$f_i \circ f \mid f(X_i)\colon f(X_i) \to f(X_i)$$

tiene un punto fijo, es decir, existe x_i tal que $f_i(f(x_i)) = x_i$.

Por la convergencia uniforme de $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ tenenmos que $d(f_i, id_X) < \varepsilon$ para $i \geq N$. Y por lo tanto

$$d(x_i, f(x_i)) = d(f_i(f(x_i)), f(x_i)) < \varepsilon,$$

y así, $x_i = f(x_i)$. Ahora, como X es compacto, la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente en X, sea x el punto al que converge, entonces $f(x) = x$. Así concluimos que X tiene la propiedad del punto fijo. ■

También para lograr nuestro cometido necesitamos probar que los arboles tienen la propiedad del punto fijo, para esto el siguiente lema será de gran ayuda

Lema 5.2. *Si X y Y son dos continuos con la propiedad del punto fijo tales que $X \cap Y = \{p\}$, entonces $X \cup Y$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f\colon X \cup Y \to X \cup Y$ una función continua.
Sin pérdida de generalidad asumamos que $f(p) \in X$.
Definamos $r\colon X \cup Y \to X$ como

$$r(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \in X; \\ p, & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

Afirmación: la función r es continua y el Teorema 2.12. nos permite justificarlo.
Fijémonos en $f \mid X$, y notemos que es continua.
Ahora bien, $r \circ (f \mid_X)\colon X \to X$ es composición de funciones continuas, por lo tanto es continua y tiene un punto fijo, ya que X tiene la propiedad del punto fijo, entonces existe $b \in X$ tal que $r(f(b)) = b$. Entonces, si $f(b) \in X$ entonces $b = r(f(b)) = f(b)$ y si $f(b) \in Y$, $r(f(b)) = p = b$, y así $f(p) = f(b) \in X \cap Y$, con lo que concluimos que $f(p) = p$. Por lo tanto $X \cup Y$ tiene la propiedad del punto fijo. ■

Lema 5.3. *Todo árbol tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea Y un árbol. Por el Teorema 3.7 Y contiene una cantidad finita de puntos extremos. Sea E el conjunto de los puntos extremos de Y. Así, $|E| = n$. Realizaremos la demostración por inducción tomando como base los puntos extremos de Y.

Paso (i): Sea $A_1 = [x_1, x_2]$ un arco en Y, donde x_1, $x_2 \in E$, por la Definición 2.23, A_1 es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, el cual tiene la propiedad del punto fijo y como dicha propiedad es una invariante topológica entonces A_1 tiene la propiedad del punto fijo. Luego, sea $A_2 = [p_1, x_3]$ un arco en Y, donde $x_3 \in E$ y $p_1 \in [x_1, x_2]$ tal que $p_1 \notin E$ y $A_2 \cap A_1 = \{p_1\}$, A_2 tiene la propiedad de punto fijo (justificando como anteriormente se hizo para A_1), así por el Lema 5.2, $A_2 \cup A_1$ tiene la propiedad del punto fijo.

Paso (ii): Supongamos que $\bigcup A_k$ tiene la propiedad del punto fijo, y $\bigcup A_k$ contiene los puntos extremos $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Sea A_{k+1} un arco en Y con puntos extremos p_k y x_{k+2}, donde $x_{k+2} \in E$, $p_k \in \bigcup A_k$ tal que $p_k \notin E$ y $[\bigcup A_k] \cap A_{k+1} = \{p_k\}$, notemos que A_{k+1} tiene la propiedad del punto fijo, así por el Lema 5.2, $\bigcup A_{k+1}$ tiene la propiedad del punto fijo. Notemos que $Y = \bigcup A_{n-1}$, por inducción se concluye que todo árbol tiene la propiedad del punto fijo. ■

Teorema 5.4. *Toda dendrita tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea X una dendrita no degenerada. Por el Teorema 4.11, existe una sucesión $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que cada Y_i es un árbol. Luego para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $r_i\colon X \to Y_i$ una función continua definida como en el Teorema 4.9.
Así por el lema 5.3 cada Y_i tiene la propiedad del punto fijo, entonces cada función continua $r_i \mid Y_i\colon Y_i \to Y_i$ tiene un punto fijo, entonces $r_i\colon X \to X$

tiene un punto fijo; y por (5) del Teorema 4.11, $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ debe converger uniformemente a la función identidad Id_X sobre X. Ahora, aplicando la Proposición 5.1, se concluye que X tiene la propiedad del punto fijo. ■

Bibliografía

[1] N. Bourbaki, General Topology I, Springer, 1989.

[2] Janusz J. Charatonik, Bosquejo de la historia de la teoría de los continuos, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, editado por Raúl Escobedo, Sergio Macías, Hector Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 225–264.

[3] Janusz J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 22(1998), 227–253.

[4] Charles O. Christenson y William L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[5] J. Dugundji, *Topology,* 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.

[6] Ignacio L. Iribarren T., *Topología de Espacios Métricos*, 1ra ed., editorial Limusa, 1987.

[7] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[8] Graciela Salicrup. *Introducción a la topología.* Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
rh223470378@alm.buap.mx

Índice de autores

Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 171
Arriaga Hernández, Jesús Alonso, 67

Contreras Carreto, Agustín, 51
Cuevas Otahola, Bolivia, 67

Guevara Martínez, Luis Antonio, 195
Guillén Galván, Carlos, 51

Hernández Valdez, Gerardo, 159
Herrera Carrasco, David, 129, 159, 171, 195, 215
Huerta-Sánchez, Luis Antonio, 5

López Toriz, María de Jesús, 159
López-Andrade, Carlos Alberto, 5

Macías Romero, Fernando, 129, 159, 171, 215
Macías Romero, Fernando, 195
Martínez Palacios, María Teresa Verónica, 97
Morín Castillo, María Monzerrat, 67

Oliveros Oliveros, José Jacobo, 67
Ortiz Ramírez, Ambrosio, 97

Pino Pérez, Ramón, 67

Ramírez Aparicio, Leonardo, 129
Rodríguez Hernández, David, 215

Segovia Aldape, Juan Martín , 97

Matemáticas y sus aplicaciones 21
de Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco
16 de octubre de 2023
Formato: pdf
Peso: 6 MB
El cuidado de la edición es de Leonardo Ramírez Aparicio y
está a disposición en pdf en la página
de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros