Fernando Macías Romero

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchingo, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas de proyectos de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 40 tesis de licenciatura, 10 de maestría y 8 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI I.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conferences on Mathematics and its Aplications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los de Matemáticas y sus aplicaciones.

Los capítulos del presente libro 20 están creados con la más intensa pasión, se agrupan por las diferentes áreas de la matemática, a la que pertenecen los temas, cuyos frutos beneficiarán a las Internacional Conferences on Mathematics and its Applications (CIMA) que a su vez emanan por la fortuna de contar con el mejor comité editorial que ha seleccionado la Gran Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Aquí se encuentran los resultados que promueven la riqueza matemática, en este libro están los trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorable jueces al ser autorizados después de sabios arbitrajes sumamente rigurosos.

FCFM BUAP

BUAP ediciones

9 786078 957095

Matemáticas y sus aplicaciones 20

Matemáticas y sus aplicaciones 20

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Editores

David Herrera Carrasco

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Univesidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemerita Universidad Autónoma de Puebla. Ha sido miembro organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado varios artículos, en revistas internacionales. Es autor de varions libros (como coautor, con otros profesores de la FCFM); es editor de algunos libros. Además, ha concluido la dirección de tesis: 5 de doctorado, 8 de maestría y más de 30 de Licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis de licenciatura y del posgrado.

Matemáticas y sus aplicaciones 20

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Rectora: María Lilia Cedillo Ramírez
Secretaria General: José Manuel Alonso Orozco
Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura: José Carlos Bernal Suárez
Dirección General de Publicaciones: Luis Antonio Lucio Venegas

Primera edición: 2023
ISBN: 978-607-8957-09-5

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 222 229 55 00
www.buap.mx

DR © Dirección General de Publicaciones
2 Norte 104, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP. 72000
Tels.: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00, ext. 5768
www.dgp.buap.mx | libros.dgp@correo.buap.mx
http://publicaciones.buap.mx

Diseño de portada:

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 20

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el
International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Comité científico internacional

Angoa Amador José Juan (BUAP), Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Rocío Leonel Gómez (Rosario Catellanos), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), María de Jesús López Toriz (BUAP) Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Fernando Macías Romero (BUAP), Daria Michalik (UKSW, PL), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Jesús Fernando Tenorio Arvide (UTM, Oax-MEX) Cenobio Yescas Aparicio (UTM, Oax-MEX)

Contenido

Presentación 1

Análisis Matemático

Capítulo 1. Some remarks on convergence function theory 5

Laura Cano Cordero, Patricia Domínguez Soto

Lógica

Capítulo 2. La técnica del forcing como cambio paradigmático 29

Emilio Angulo Perkins

Modelación Matemática

Capítulo 3. Implementación computacional de métodos de integración numérica: Punto medio, del trapecio, Simpson 1/3 y 3/8 55

Claudio Lazcano Morales, José Julio Conde Mones, Carlos Arturo Hernández Gracidas, Félix Augusto Aquino Camacho, José Jacobo Oliveros Oliveros

Topología

Capítulo 4. Axiomas de separación 99
Armando Martínez García

Capítulo 5. Sobre la unicidad del (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión 159
Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero

Capítulo 6. Espacios contráctiles 183
David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Víctor Manuel Ortiz Rosas

Capítulo 7. Propiedades del cubo de Hilbert 205
Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

Índice de autores 233

Presentación

Las International Conferences On Mathematics and its Applications (CIMA) llevan ya 19 años realizándose, año tras año. Aquí participa como organizadora la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) en compañía de sus estudiantes. Contamos con la participación de matemáticos de nivel internacional en estos CIMA. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Nineth International Conference on Mathematics ant its Applications* (9CIMA, 2022), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 9CIMA, 2022 como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la FCFM de la BUAP. Es por el amor a la matemática que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Agradecemos infinitamente a Felipe de Jesús Aguilar Romero por su apoyo en la edición de esta obra 20.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Análisis Matemático

Matemáticas y sus aplicaciones 20, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-09-5

Capítulo 1

Some remarks on convergence function theory

Laura Cano Cordero, Patricia Domínguez Soto
FCFM, BUAP

Abstract

The concepts of function and convergence of functions are fundamental in Mathematics. These concepts were defined formally in the 19th century by Cauchy and are an essential breakdown in formalizing the concepts in analysis. Later, the importance of the idea of convergence took importance with the study of Newton's iterative method for many mathematicians such as Schroeder, Koenings, Leau, Arzelá, Ascoli, among others, and reached its summit with Montel's theory at the beginning of the 20th century.
In this chapter, we give some remarks of concepts and theorems obtained by the consequence of Montel's theory and give several examples of them.

1 Introduction

The invention of calculus represents one of the most significant breakdowns in the history of mathematics. Newton and Leibniz, independent subject creators, based their studies on geometrical arguments rather than analytical ones as we know them nowadays. Meanwhile, Newton used the ratio of infinitesimals, i.e., values greater than zero but less than any quantity; Leibniz sought the algebraization of infinitesimals. These points of view both provide powerful methods to solve problems. However, both left foundational issues unresolved, which has a significant headway near the end of the century due to the reliance on symbols and the need for more rigorous concepts.

Lagrange moved calculus to a more rigorous footing with his book Fonctions analytiques, which set an example of how to prove known calculus results from definitions thoroughly. Lagrange's work turned to the rigorization

of calculus based on the function concept, which he represented as an infinite series. However, Lagrange was one of many using infinite series. Fourier, at the beginning of the nineteenth century, presented a work in what we call today a Fourier series derivated from his studies of the flow of heat in the lamina and in the mid-eighteenth century, Euler had worked with infinite series and obtained significant results concerning the summation of infinite series. Despite these works, some details in their arguments seemed confused and contradictory. It was Cauchy who introduces the $a + ib$ form of the complex number (where i represents the square root of -1) and then proceeds to set out the framework that defines the properties and properties of such quantities. Moreover, it reinterprets the concepts of real variables analysis using complex variables to demonstrate the continuity of functions, series and convergence.

Montel, a French mathematician, introduced the definition of normal family. Moreover, the introduction of this concept may bring substantial simplifications in the proofs of many classical results of functions as the Mapping theorem of Riemann and Hadamard's characterization of entire functions of finite order and Picards's theorem on essential singularities (Big theorem of Picard).

2 Convergence of sequences of functions

In this section, we will discuss examples of the convergence of sequences of functions both in the real and complex realm to exemplify the importance of the concept of a normal family in analysis.

The following example, given in [7], shows some pathologies that can appear in the convergence of a sequence of real variable functions.

Example 2.1. *Suppose that any rational number in $x \in [0, 1]$ is represented in the form $x = \frac{p}{q}$, in its lowest terms. For each $n \in \mathbb{N}$ with $n \geq 2$, the construction of the sequence of functions $f_n(x)$ defined on $[0, 1]$ is as follows:*

For each fixed $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} + 2n^2(x - \frac{p}{q}) & \text{if } x \in \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right), \frac{p}{q}\right]; \\ \frac{1}{q} - 2n^2(x - \frac{p}{q}) & \text{if } x \in \left[\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right)\right]; \\ \frac{1}{n} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By construction, for each $q < n$ the sequence of functions $f_n(x)$ has a local maximum equal to $\frac{1}{q} > \frac{1}{n}$, it is increasing in the left-hand and decreasing in the right-hand neighbourhood of $\frac{p}{q}$. The values of $f_n(x)$ are larger than $\frac{1}{n}$ only in a neighbourhood of each $\frac{p}{q}$ for $q < n$, and the diameter $\frac{1}{n}^2\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right)$ of such a neighbourhood decreases for larger values of n, approaching 0 as n tends to infinity. Note that $f_{n+1}(x)$ is smaller than $f_n(x)$ at all points except for the special points $\frac{p}{q}$, $q < n+1$, where $f_n(x) = f_{n+1}(x)$.

Since $0 < f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ for all $n \geq 2$ and for all $x \in [0,1]$, the sequence of functions $f_n(x)$ is convergent on $[0,1]$ to a function f (since at each point we have the decreasing numerical sequence bounded below). Note that $f_n(0) = f_n(1) = 1$, for all $n \geq 2$ and, consequently, $f(0) = f(1) = 1$. Let us consider a rational point $x_0 = \frac{p}{q}$ in $(0,1)$ with the fraction $\frac{p}{q}$ in lowest terms. For each $n > q$, the point x_0 is used for construction of the function f, and therefore, it will satisfy that $f_n(x_0) = f_n(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$, for all $n > q$, that is, $\lim_{n\to\infty} f_n \frac{p}{q} = 1 = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$.

Now let us choose an irrational $x_0 \in (0,1)$ and, by using the method of mathematical induction, we will show that there exists $n_k \in \mathbb{N}$ such that $f_n(x_0) \leq \frac{1}{k}$ for all $n \geq n_k$.

For $k = 2$ we denote the distance between x_0 and the end point 0 by d_0 and the distance between x_0 and the endpoint 1 by d_1 (both distances are positive because x_0 is irrational and the endpoints are rational). There exists $n_2 \in \mathbb{N}$ such that $\frac{1}{2n_2^2} < \min(d_0, d_1)$, which means that x_0 lies outside of the intervals $\left[0, \frac{1}{2n_2^2}\left(1 - \frac{1}{n_2}\right)\right]$ and $\left[1 - \frac{1}{2n_2^2}\left(1 - \frac{1}{n_2}\right), 1\right]$, implying that $f_n(x_0) \leq \frac{1}{2}$ for all $n \geq n_2$.

For $k = 3$, besides the end points, there appears the point $\frac{1}{2}$ used in the

construction of the functions f_n, $n \geq 3$. *Denote the distance between* x_0 *and* $\frac{1}{2}$ *by* d_2 *and choose* $n_3 \in \mathbb{N}$ *such that* $\frac{1}{2n_3^2}\, d_2$ *and* $n_3 \geq n_2$. *Then* x_0 *lies outside the interval* $\left[0, \frac{1}{2n_3^2}\left(1-\frac{1}{n_3}\right)\right]$, *as well as outside the intervals* $\left[1-\frac{1}{2n_3^2}\left(1-\frac{1}{n_3}\right), 1\right]$, *and consequently,* $f_n(x_0) \leq \frac{1}{3}$ *for all* $n \geq n_3$.

Let us suppose now that at $(k-1)-$*th step* $f_n(x_0) \leq \frac{1}{k-1}$ *for all* $n \geq n_{k-1}$ *and prove that a similar inequality holds for* k. *On* $k-$*th step, a few (at most* $k-2$*) new points* p $k-1$, $1 \leq p \leq k-2$, *associated with the denominator* $q = k-1$, *appear in the construction of the functions* f_n, $n \geq k$. *Denote the smallest distance between* x_0 *and each of these points by* d_k *and choose* $n_k \in \mathbb{N}$ *such that* $\frac{1}{n_{2k}} < d_k$ *and* $n_k \geq n_{k-1}$. *Therefore,* x_0 *lies outside of each of the intervals around the points* $\frac{p}{q}$, $q < k$, *(the intervals used in the first two sentences of the definition of* f_n *and consequently,* $f_n(x_0) \leq \frac{1}{k}$ *for all* $n \geq n_k$. *Thus, the last property is proved. Passing to the limit, as* k *tends to infinity, in the inequality* $f_n(x_0) \leq \frac{1}{k}$, *we obtain* $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0 = f(x_0)$ *at all irrational points in* $(0,1)$. *Thus, the limit function has the following form:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{if } x = \frac{p}{q}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This is the Riemann function, which is discontinuous at all the rational points (and continuous at all the irrational points) in $[0,1]$.

We recall that a complex function is a function from complex numbers to complex numbers, i.e., a function $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, where the value z and their image $f(z)$ may be separated into real and imaginary parts, that is, $z = x+iy$ and

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

where $u(x,y), v(x,y)$ are functions in $\mathbb{R}^2$ and $x, y \in \mathbb{R}$.

A sequence of functions of a complex variable is denoted by $f_n(z) = u_n(x,y) + iv_n(x,y)$ where $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ are sequences of real functions. In particular, when $y = 0$ we obtain a real sequences of functions.

I. A sequence $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of functions in a domain $G \subset \mathbb{C}$ *converges uniformly* to a limit function f if for all $\epsilon > 0$, there exists an N such that if $n > N$, then $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.

II. A sequence $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of functions in a domain G *converges locally uniformly* to a limit f if it converges uniformly in each compact subset $K \subset G$.

In Example 2.1 we obtained a limit function f, which has infinitely many discontinuity points on $[0, 1]$, although each of the functions f_n is continuous on $[0, 1]$. Thus, we can post the following question: If there exist a sequence of holomorphic functions f_n such that its limit is not a holomorphic function? The answer, in general, is not true as the following example shows.

Example 2.2. *Let $G_n = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \neq \frac{1}{2n}\}$ and $K_n \subset G_n$ be the compact subset $K_n = L_n \cup R_n$, where $L_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n, \Re z \leq 0\}$ and $R_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n, \Re z \geq \frac{1}{n}\}$.*

Let

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \Re z \leq \frac{1}{2n}; \\ z & \text{if } \Re z \geq \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

The set $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ is connected and by Runge's theorem [3] we can find a sequence of polynomials p_n so that

$$\sup_{z\in K_n} = |f(z) - p_n(z)| < \frac{1}{n}.$$

It follows that

$$\lim_{n\to\infty} p_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z \in \cup L_n; \\ z & \text{if } z \in \cup R_n, \end{cases}$$

so the pointwise limit fails to be continuous along the imaginary axis.

A natural question is the following: Under what conditions a sequence of holomorphic functions its limit is an analytic function? The answer to this question was given in the Weiersstrass Convergence Theorem in which the space of analytic function is equipped with the topology of local uniform

convergence, and later by Montel with the concept of Normality, all these concepts are defined in the next section.

Example 2.3. *Let* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *be defined by* $f_n(z) = z\exp(-\frac{1}{2}n^2z^2)$ *and let the domain* G *be the real axis. Observe that* f_n *converges uniformly to the constant function zero. Indeed, if* $z \in G$ *we have that*

$$\sup_{z\in G} \mid f_n(z) \mid = f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n}\exp\Big(\frac{-1}{2}\Big) \to 0,$$

as $n \to \infty$.

Lemma 2.4. *Consider the sequence* $f_n(z) = (1+\frac{z}{n})^n$, *we can prove that* f_n *converges locally uniformly in* $\mathbb{C}$.

Proof. Choose the principal branch $\mathrm{Log}(1+\frac{z}{n})$ *of* $\log(1+\frac{z}{n})$ *in* $\mathbb{C}\backslash((-\infty,-n]\cup\{0,1\})$ *for* $n \geq 1$. *Then*

$$\mathrm{Log}(1+\frac{z}{n}) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big(\frac{z}{n}\Big)^k \text{ locally uniformly in } \mid z \mid < n.$$

Then for $z \in \mathbb{C}$ *fixed and* n *large enough, it is satisfied that*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log\mathrm{Log}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n &= \lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{z^k}{n^{k-1}}\right)\\
&= z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\lim_{n\to\infty}\frac{z^k}{n^{k-1}}\\
&= z.
\end{aligned}$$

This implies that $\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n$ *converge point-wisely to* e^z *in* $\mathbb{C}$.

Moreover, this convergence is local uniform. Indeed, if we consider $\mid z \mid \leq R$ *and let* $n > R$, *then for* $\mid z \mid \leq R$,

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - z\right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{R^k}{n^{k-1}}\\ &= n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{R}{n}\right)^k\\ &= n\left(-\log\left(1-\frac{R}{n}\right)-\frac{R}{n}\right) \to 0 \textit{ as } n\to\infty.\end{aligned}$$

Thus, $\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ *converges uniformly to* z *on* $|z|\geq R$. ■

Remark 2.5. *Definitions I and II induce in the space of complex functions a topology called, in the literature, the uniform converge topology.*

III. A set F of functions is *locally uniformly bounded* in a domain G if for each compact subset $K\subset G$, there is a constant $M(K)<\infty$ such that for all $f\in F$ and for all $z\in K$, $|f(z)|\leq M(K)$, this is, F is *uniformly bounded* on K.

Example 2.6. *If we consider* $f_n(z)=2^{\frac{-n}{2}}(z+1)^n$ *in the domain* $\{z:|z|\leq\sqrt{2}-1\}$, *then* $|f_n(z)|\leq 1$ *for any compact* K *in* G.

A natural question to ask is: If $\{f_n\}$ is a convergent sequence of functions in the uniform convergence to f such that for all $n\in\mathbb{N}$ f_n have some properties in common are these properties inherited to f? In the following theorem due to Hurwitz this question is solved.

Theorem 2.7. *(Hurwitz) Let* f_n *be analytic in a domain* G, *and suppose that* f_n *converges uniformly on each compact subset of* G *to* f. *Then either* $f(z)\equiv 0$ *in* G, *or every zero of* f *is a limit point of a sequence of zeros of the functions* f_n.

Corollary 2.8. *Let* f_n *analytic and univalent in a domain* G, *and suppose that* f_n *converges uniformly on each compact subset of* G *to* f. *Then* f *either is univalent or constant on* G.

3 Compact sets on the space of holomorphic functions

We begin this section by defining the concept of normal families, and later on, we will demonstrate that these families are, in fact, compact sets in the space of holomorphic functions. We proceed to define the concept of normal families as follows.

Normal Family. A family $\mathcal{F}$ of analytic functions on a domain $G \subset \mathbb{C}$ is *normal* in G if either every sequence $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ or every sequence $\{\frac{1}{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ contains a subsequence converging uniformly to an analytic function f on every compact subset $K \subset G$. A family of analytic functions $\mathcal{F}$ on a domain $G \subset \mathbb{C}$ is *compact* in G if either every sequence $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ or every sequence $\{\frac{1}{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ contains a subsequence converging uniformly to an analytic function $f \in \mathcal{F}$ on every compact subset $K \subset G$.

Remark 3.1. *The concept of a normal family is analogous to the Bolzano-Weierstrass property of a bounded set of points in Euclidean space. Thus, for functional spaces, compact families are analogous to closed sets in R^n, and therefore, in modern language, we can state that in the space of holomorphic functions with the usual metric, the compact sets are exactly normal families.*

Example 3.2. *Consider the sequence of functions given by $f_n(z) = z^n$ which is a normal family if $|z| < 1$ given that $z^n \to 0$.*

Characterization and properties of normal families

In this subsection, we will study some basic properties and characterization of normal families.

We know that if $\mathcal{F}$ is a locally bounded family of analytic functions, then by the Cauchy integral formula, the family of derivatives $\{f^{'} : f \in \mathcal{F}\}$ is also locally bounded, which is the key for the following theorem due to Montel.

Theorem 3.3. *A family of analytic functions $\mathcal{F}$ is normal if and only if $\mathcal{F}$ is locally bounded.*

For families of analytic functions, the Arzelá–Ascoli theorem, together with Cauchy's estimate, whose demonstration can be found in [3].

Theorem 3.4. *The following statements are equivalent for a family $\mathcal{F}$ of analytic functions on a region Ω :*

1. *$\mathcal{F}$ is normal on Ω;*
2. *$\mathcal{F}$ is locally bounded on Ω;*
3. *$\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ is locally bounded on Ω and there is a $z_0 \in \Omega$ so that $\{f(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$ is a bounded subset of $\mathbb{C}$.*

We recall that uniform convergence implies pointwise convergence. However, in the case of normal families, this concept is equivalent and This remarkable fact is known as Vitali's theorem which we enunciate as follows, the reader can consult [3] for a demonstration.

Theorem 3.5. *(Vitali) Let F be a set of analytic functions which is locally uniformly bounded in a domain G. If $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ and $\{h_p\}_{p\in\mathbb{N}} \subset G$ such that $\lim_{\to\infty} h_p = \alpha \in G$, and if for every fixed p the limit $\lim_{n\to\infty} f_n(h_p)$ exists, then the whole sequence $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is locally uniformly convergent in G.*

Remark 3.6. *Although, Vitali's theorem seems as a curiosity in the theory of convergence of analytic functions it has crucial implications in complex analysis as the following example shows.*

Example 3.7. *The function $e^{-t}t^{z-1}$ is continuous in $[a, b] \times \mathbb{C}$ for $0 < a < b < \infty$, and holomorphic in $\mathbb{C}$, for t fixed.*

$$f(z, a, b) := \int_a^b e^{-t}t^{z-1}dt$$

is an analytic function. If we assume the existence of the real integral

$$h(x) := \int_a^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

$x > 0$ (pointwise convergence), then the family of functions

$$\mathcal{F} := \{f(z,a,b) : a,b \in \mathbb{R} \text{ with } a < b\}$$

is locally bounded in the domain $\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$; for all $z = x + iy$ with $0 < c \leq x \leq d < \infty$, we have

$$|f(z,a,b)| \leq \int_0^1 t^{c-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{d-1}e^{-t}.$$

Moreover, for every choice of the real sequences with $a_n < b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, converges compactly in $\mathcal{A}$ to a holomorphic function. Since the limit function of $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, is independent of the choice of the sequences a_n and b_n we obtain that the integral $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ is a holomorphic function in $\mathcal{A}$.

Now we are in condition to give an example of a family of functions which is normal.

Example 3.8. *Consider the family $\mathcal{F}$ of functions f which are analytic and univalent in the unit disk $\mathbb{D}$, satisfying the conditions $f(0) = 0$ and $f^{'}(0) = 1$. This space of holomorphic functions.*

These functions are uniformly bounded on each compact of $\mathbb{D}$. Therefore, $\mathcal{F}$ is locally and so is a normal family. Then by Hurwitz's corollary is the limit function g is either univalent or constant in $\mathbb{D}$,, however, g is not constant given that by Weierstrass' theorem, we know that $f^{'}(0) \to g^{'}(0) = 1 \neq 0$, and $g(0) = 0$.

Example 3.9. *Let the sequence of functions $g_n = G \circ f_n$ where f_n is a sequence of Herglotz functions, i.e., for all $n \in \mathbb{N}$, $\Im z > 0$ implies that $\Im f_n(z) > 0$; and $G(z) = \frac{i-z}{z+i}$. Then, g_n is a sequence of functions with values in $\{|z| < 1\}$.*

Following an analogous argument as in Example 3.8, there exists g_{n_j} and g_∞ with $g_{n_j} \to g_\infty$ and g_∞ holomorphic, and either $g_\infty(z) \subset \{|z| < 1\}$ for all z or $g_\infty(z) = e^{i\theta}$ for some $\theta \in [0, 2\pi)$.

If we consider G^{-1} to $g_n \to g_\infty$ and given that G^{-1} is continuous on $\{|z| < 1\} \setminus \{-1\}$, we get three possibilities on compacts K contained on $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$.

1. $f_{n_j} \to f$, *where* f *is a Herglotz function;*
2. $f_{n_j} \to x \in \mathbb{R}$;
3. $f_{n_j} \to \infty$.

Thus, the Herglotz functions are a normal family.

Example 3.10. *A Carathéodory function is an analytic function* F *with* $\Re z > 0$ *and* $F(0) = 1$. *We claim the set of such functions is compact, and therefore normal.*

Let f *be a function in the space of function given in Example 3.8, then we have*

$$F(z) = \frac{1 + f(z)}{1 - f(z)} \tag{1}$$

$$f(z) = \frac{1 - F(z)}{1 + F(z)} \tag{2}$$

Thus by Schwarz's lemma [2]

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |F(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

From Montel's theorem follows that the set of Carathéodory functions are precompact.

In what follows we will give an example of normal families in which the domain G of the family has some characteristics, in order to gain normality.

Example 3.11. *Take the set* $F = \{f_n(z) = nz, n \in \mathbb{N}\}$. *The following example shows that normality can depend on the chosen domain. For any sequence* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(0) \to 0$ *and if* $z \neq 0$, $f_n(z) \to \infty$. *So if we choose our domain* G *to be an open disc containing the origin, i.e,* $D(0, 1)$, *then* F *is not normal in this domain. But if* $\hat{G} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, *then every sequence* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *contains a sub sequence converging uniformly to* ∞ *on every compact subset of* G.

With these nuances in place, we are ready to state the three points of Montel's criterion for normality or the Fundamental normality test.

Theorem 3.12. *(Fundamental Normality Test) Let F be a family of analytic functions on a domain $G \subset \mathbb{C}$ which omits two (or more) fixed values a and b in $\mathbb{C}$. Then F is normal in G.*

Remark 3.13. *As we can observe the Fundamental Normality Test provides the necessary conditions under which a family of analytic functions is normal. However, these are not sufficient, it is enough to consider the identity function and its iterates thus, we obtain the family of functions f_n given by $f_n(z) = z$ for all $n \in \mathbb{N}$ which is normal but no omits three points.*

Corollary 3.14. *A family of analytic functions on some domain $G \subset \mathbb{C}$ which is not normal omits at most one finite point.*

As we mention in the introduction the concept of normal families is of great importance in complex analysis, one of its applications is a proof of Louiville's theorem [3] which is stated below.

Theorem 3.15 (Louiville)**.** *A bounded function f which is defined and analytic everywhere on $\mathbb{C}$ must be constant.*

Generalizations of Montel's theorem for meromorphic functions

Another well-known result on normal families of analytic functions is the following Miranda's criterion, see [5] for a proof.

Theorem 3.16 (Miranda)**.** *Let $\mathcal{F}$ be a family of analytic functions in a domain D of the complex plane. If for all $f \in \mathcal{F}$; $f \neq 0$ and $f^{'} \neq 1$, then $\mathcal{F}$ is a normal family.*

In particular, Pang and Zalcman in [7] obtained the following extension of Miranda's criterion.

Theorem 3.17 (Pang)**.** *Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic functions in a domain D of the complex plane, a nonzero complex number, and B a positive constants. Suppose that for all $f \in \mathcal{F}$,*

1. *$f^{'}(z) = a$ whenever $z \in f^{-1}(0)$ and*
2. *$|f^{''}(z_1)| \leq B$ whenever $z \in (f^{'} - a)^{-1}(0)$.*

Then $\mathcal{F}$ is a normal family.

Li in [4] obtained the following theorem, which simultaneously generalizes Montel's criterion and Miranda's criterion, and in fact includes all the previous theorems as simple consequences.

Theorem 3.18 (Li). *Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic functions in a domain D of the complex plane, a, b nonzero complex numbers, and A, B positive constants. Suppose that for all $f, g \in \mathcal{F}$,*

1. *$A \leq |f^{'}(z)| \leq B$ and $|f^{''}(z)| \leq B$ whenever $z \in f^{-1}(0)$; and*
2. *$\min\{|f^{''}(z_1)|, |g^{'}(z_2)|\} \leq B$ when $z \in F^{-1}(0)$ and $F(z_1, z_2) := (f^{'}(z_1) - a, g(z_2) - b)$.*

Then $\mathcal{F}$ is a normal family.

Example 3.19. *Consider $\{f_n\} = \{\frac{1}{n}\sin nz\}$ in the unit disc. Then ${f_n}'(z) = \cos nz$ and $f_n^{''}(z) = -n\sin nz$, for each f_n in the family. When $f_n(z) = 0$, $nz = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, thus 1 of Theorem 3 is satisfied. When $f_n^{'}(z) = 1$, we have that $f^{''}(z) = \sin nz = 0$, thus 2 of Theorem 3 is also satisfied. However, it is easy to see that for any complex number a there exist infinitely many n's such that at the point $\frac{\pi}{4}$ in the unit disc, $f_n(\frac{\pi}{4}) = 0$, but $f_n^{'}(\frac{\pi}{4}) \neq a$ Thus, this family does not satisfy the conditions in Pang's theorem.*

So far we have mostly spoken about families of holomorphic functions,but it is quite natural and of great interest to extend the theory to comprise families of meromorphic functions (analytic function except in poles). Habitually we think about meromorphic functions as functions mapping a domain D to the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$, with the Riemann sphere equipped with the spherical metric ρ, i.e., the distance function inherited from the standard metric on unit sphere in $\mathbb{R}^3$ through the stereographic projection, which is determined as the infimum of the spherical lengths of paths γ joining the two points defined, i.e., $\rho(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \int \frac{2|dz|}{1+|z|^2}$.

The general concepts of convergence, and more specifically locally uniform convergence of sequences of maps between metric spaces applies to the current situation. A sequence of meromorphic functions in a domain G is

viewed as a sequence of maps $f_n : G \to \hat{\mathbb{C}}$ with $\hat{\mathbb{C}}$ equipped with the spherical metric, and we can speak about convergence in this situation. To distinguish this concept from the habitual concept of convergence, we shall refer to it as spherical convergence. Any holomorphic function may be considered meromorphic, so in the case all the functions in the sequence are holomorphic we have two concepts of convergence. For instance, consider the sequence of functions $f_n(z) = n$, this sequence diverge in $\mathbb{C}$ but converges to function constant ∞ in $\hat{\mathbb{C}}$. In general, in the spherical world functions are allowed to converge to the constant infinity.

From the mentioned above it is possible to generalize Weierstrass's theorem in the following way.

Theorem 3.20. *Let $\{f_n\}$ be a family of meromorphic functions in the domain G in the finite plane, and assume that it converges spherically locally uniformly to the function f. Then it holds true that:*

1. *The function f is meromorphic in G;*
2. *If all the functions f_n are holomorphic in G then either f is holomorphic or constant equal to ∞.*

As in the case of Weierstrass Montel's theorem can be generalized considering the spherical distance, this is known in the literature as Marty's theorem, see [6].

Theorem 3.21 (Marty)**.** *A family $\mathcal{F}$ of meromorphic functions in a domain G in the finite plane is normal if and only if the family formed by the spherical derivatives $f^{\#}$ for $f \in \mathcal{F}$ is bounded on compacts, where $f^{\#}$ is the spherical derivative defined by*

$$f^{\#}(z) = \frac{|f^{'}(z)}{1 + |f(z)|^2}.$$

Example 3.22. *The spherical derivative of functions in the family z^n are uniformly bounded on compacts contained in $G = \{z : \|z\| > 1\}$. Indeed,if $\|z\| > 1$ we find*

$$(z^n)^{\#} = \frac{n|z^{n-1}|}{1 + |z^{2n}|} = \frac{n|z|^{-n-1}}{1 + |z|^{-2n}} < nR^{-n-1}$$

which stays bounded as n growths since $x\exp^{-xlogR} \to 0$ as $x \to \infty$ when $R > 1$. Hence $\{z^n\}$ is a normal family in G in the spherical sense.

Montel himself in 1916 gave a generalization of the Fundamental Normality Test (FNT) by replacing the omitted values by values taken on only with suitably high multiplicity. Precisely he proved:

Theorem 3.23. *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D and let a, b, c be three fixed values such that the roots of the equation*

$$f(z) = a, f(z) = b, f(z) = c$$

have multiplicity divisible by h, k, l respectively, for each $f \in \mathcal{F}$. If

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} < 1,$$

then $\mathcal{F}$ is normal in D.

For more general functions, D. Bargmann, M. Bonk, A. Hinkkanen and G.J. Martin proved in [1] the following result.

Theorem 3.24. *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on a domain D and let $h_n : D \to \hat{\mathbb{C}}, ; n = 1, 2, 3$ be continuous functions such that $h_i(z) \neq h_j(z)$ for $1 \leq i \neq j \leq 3$ and for all $z \in D$. If for each $f \in \mathcal{F}$,*

$$f(z) \neq h_n(z), 1 \leq n \leq 3, \forall z \in D,$$

then $\mathcal{F}$ is normal in D.

This theorem can be generalized for a shared set of meromorphic functions, i.e., if f and g are two non-constant meromorphic functions defined on D it is said to share a set S of distinct meromorphic functions in D if

$$\cup_{\Psi \in S} \overline{E}_f(\psi) = \cup_{\Psi \in S} \overline{E}_g(\psi),$$

where $\overline{E}_f(\psi) = \{z \in D : f(z) = \psi(z)\}$.

Example 3.25. *Consider the family $\mathcal{F} = \{f_m : m \in \mathbb{N}\}$, where $f_m(z) = 2mz$ on the unit disk $\mathcal{D}$ and let $\psi_1(z) = z, \psi_2(z) = z/2$ and $\psi_3(z) = z/3$. Clearly, for every $f, g \in \mathcal{F}$, f and g share the set $S = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ on $\mathcal{D}$.*

We now formulate the following theorem for meromorphic functions that share a set.

Theorem 3.26. *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D and let $S = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ be distinct meromorphic functions in D such that*

1. *Every $f, g \in \mathcal{F}$ share the set S in D;*
2. *For every $f \in \mathcal{F}, f(z_0) \neq \psi_i(z_0)$ whenerver $\psi_i(z_0) = \psi_j(z_0)$ for $i, j \in \{1, 2, 3\}$ $(i \neq j)$ and $z_0 \in D$.*

Then $\mathcal{F}$ is normal in D

Example 3.27. *From theorem above the family of functions given in Example 3.25 is not normal because $f_m(0) = \psi_1(0) = \psi_2 = (0) = \psi_3(0) = 0$. However, the family $\mathcal{G} := \{f_m : m \in \mathbb{N}\}$, where*

$$f_m(z) = \frac{e^z}{3m}$$

on the unit disk $\mathcal{D}$ and let $S := \{\psi_1(z) = 0, \psi_2(z) = e^z$ and$\psi_3(z) = e^z/2$. It is clear that for every $f, g \in \mathcal{F}$ share the set S of meromorphic functions then by theorem above $\mathcal{G}$ is a normal family in $\mathcal{D}$.

So far, we have proved generalizations of the TNF. However, Zalcman in [8] has a lemma which establishes the properties that satisfy a family of not normal functions, which we enunciate above.

Lemma 3.28 (Zalcman)**.** *Suppose that $\mathcal{F}$ is family of analytic maps on a domain Ω that is not normal. Then there exist*

1. *$z_n \in \Omega$ with $z_n \to z \in \Omega$;*
2. *$\epsilon_n > 0$, with $\epsilon_n \to 0$; and*
3. *$f_n \in \mathcal{F}$ such that the sequence of functions $\psi \mapsto f_n(z_n + \epsilon_n \psi)$ converges locally uniformly on $\mathbb{C}$ to a non constant analytic function g with $|g^{\#}| \leq g^{\#}(0) = 1$.*

Remark 3.29. *The functions g_n are not all defined in the same domain. However, g_n is defined in the disk D_n about the origin of radius $R_n = (r - \|a\|)\rho_n^{-1}$, and the radii R_n tends to infinity. This implies that any point in the complex plane $\mathbb{C}$ eventually will be contained in all the $D_n's$, that is will be lying in D_n for $n > 0$.*

It can be proved by using Lemma 3.28 that the Great Theorem of Picard implies the Fundamental Test of Normality. An illustrative example of Lemma 3.28 is the following.

Example 3.30. *Take Ω the unit disk and the family $\mathcal{F} := \{f_n : f_n(z) = 2^n z^n, n \in \mathbb{N}\}$. This family is not normal in the region $\|z\| > 1/2$, it is not even pointwise bounded there. Take $a_n = 1/2$, for all n, and $\rho_n = \frac{\alpha}{2n}$, where α is any real number. With this information we can find $g_n(z) = (1 + \alpha z/n)^n$ which approaches $g(z) = \exp^{\alpha z}$ when $n \to \infty$.*

4 An example of the convergence of sequences of sets

A hyperbolic Iterated Function System (IFS) consists of a complete metric space $(X,\ d)$ and a finite number of contraction mappings $f_i : X \to X$, with respective contractivity factors t_i for $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$. The value $t = \max^n t_i$ is called the contractility (factor of the IFS).

The IFS is a method to construct objects with fractal nature mathematically. The attractor or the set of fixed points obtained from the IFSs are mostly self-similar fractals. We have the following theorem for the existence and uniqueness of the attractor of an IFS.

Theorem 4.1. *Suppose that a family of contracting functions $\{f_1, f_2, \ldots f_n\}$ in M is given. If we define the transformation $F : \mathbb{K}(M) \to \mathbb{K}(M)$ by*

$$F(X) = f_1(X) \cup f_2(X) \cup \ldots \cup f_k(X), \tag{3}$$

then F is contracting. Furthermore, there exists a unique non-empty compact subset $X \subset M$ that satisfies $F(X) = X$

Remark 4.2. *Sometimes a more general definition is used. Instead of (3), we can define the function F as follows:*

$$F(X) = f_1(X) \bigcup f_2(X) \bigcup \ldots \bigcup f_k(X) \bigcup Y, \tag{4}$$

where Y is a fixed compact subset of M. This generalized function is also contracting.

Given a continuous function $f : X \to X$, we will denote by $f^{\circ n}$ the composition of f with itself, n times. For $n = 1$ we will write f instead of $f^{\circ 1}$

Definition 4.3. *Given a complete metric space X with bounded metric d, we define the space*

$$\mathcal{H}(X) = \{A \subset X : A \text{ is compact and different from a vacuum}\}.$$

The space $\mathcal{H}(X)$ is called fractal space.

Remark 4.4. *A well-known result is the Banach's Fixed Point Theorem, which states that every contraction w defined on a complete metric space X has exactly one fixed point; that is, there exists a unique point $x \in X$ such that $w(x) = x$.*

Furthermore, if x is the fixed point, this point can be obtained by calculating the limit of the sequence $(z, f(z), f^{\circ 2}(z), ...)$, taking any point $z \in X$.

Theorem 4.5. *If $\{w_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ are contractions in X, where X is a complete metric space, then $W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ defined by $W(A) = \cup_{i=1}^{n} w_i(A)$, for each $A \in \mathcal{H}(X)$, is a contraction.*

Now, we will introduce the set of Iterated Systems of Functions.

Definition 4.6. *An iterated system of functions (ISF) consists of a complete metric space X and a finite set of contractions $w_1, w_2, \ldots, w_n$ over X, it is denoted by $\{X, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. The fixed point of contraction W defined in $\mathcal{H}(X)$ by the contractions $w_1, w_2, \ldots, w_n$, as in Theorem 4.5, will be called attractor.*

In what follows we will carry out the construction of the Sierpinski triangle resulting from a SIF as an attractor of a SIF. To do this, we recall the definition of the Sierpinski triangle.

Let Δ be an equilateral triangle of side 1, together with its interior. Determine the midpoints of the sides of Δ and join these points in such a way that a triangle is formed; thus, four triangles are formed, which remove the central triangle. Then for each of the three remaining triangles repeats the same construction as before and so on; which determines a sequence of sets $S_0, S_1, S_2, ..., S_n, \ldots$

Let $(S_n)_n$ be the sequence obtained previously, the triangle is defined from Sierpínski that we will denote $\mathcal{S}$, as $\mathcal{S} := \cap_{n=0}^{\infty} S_n$

Theorem 4.7. *Let w_1, w_2, w_3 be contractions in $\mathbb{R}^2$, defined as follows:*

$$\begin{aligned} w_1(x,y) &= \frac{1}{2}(x,y), \\ w_2(x,y) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}, \\ w_3(x) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

where $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$ is an iterated system of functions whose attractor is the Sierpinski triangle $\mathcal{S}$.

Proof. The set S_1 is obtained by scaling three copies of Δ each by a factor of $r = 1/2$. Suppose the bottom side of Δ lies along the x axis with vertices at the origin and at the point $(1, 0)$, then two of the scaled triangles are translated so that the bottom left the vertices are at $(1/2, 0)$ and $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ respectively.

Applying mathematical induction on the sequence $\{F^n(\Delta)\}_n$ we obtain the sets S_n. By construction we have that each S_n is a non-empty compact set and which also: $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S2_{\supseteq} \ldots S_n \supseteq \ldots$

It only remains to show that $(S_n)_n$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. Indeed,

$$d(S_0, S_1) = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$d(S_1, S_2) = \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2}$$
$$d(S_2, S_3) = \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^2}$$
$$\cdots$$
$$d(S_n, S_{n+1}) = d(S_0, S_1) = \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^n}.$$

Now if $m \geq n$ we have:

$$\begin{aligned} d(S_n, S_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d(S_j, S_{j+1}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^n} + \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^m} \qquad (5) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}\Big(\frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^m}\Big) \to 0, \end{aligned}$$

when $n, m \to \infty$. □

Bibliography

[1] Bargmann, D. et al., *Families of meromorphic functions avoiding continuous functions* Journal d'Analyse Mathḿatique, **79**, no 1, 379–387, 1999.

[2] Lang S., Complex Analysis, 3rd edition, Springer Verlag New York (1993).

[3] Marshall, Donald E.. Complex Analysis, Cambridge University Press, 2019.

[4] Li, Bao Qin, *A joint theorem generalizing the criteria of Montel and Miranda for normal families*, Proceedings of the American Mathematical Society, 2639–2646,2009.

[5] Miranda C., *Sur un nouveau crit'ere de normalit´e pour les familles de fonctions holomorphes,* Bull. Soc. Math. France **63** 185–196, 1935.

[6] J. L. Schiff, Normal families, Springer Verlag New York (1993).

[7] Pang, X., and Zalcman, L. (2000). Normal families and shared values. Bulletin of the London Mathematical Society, 32(3), 325–331.

[8] Zalcman, L., *Normal families: new perspectives*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **35** (1998), 215–230.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
lcano@fcfm.buap.mx
pdsoto@fcfm.buap.mx

Lógica

Matemáticas y sus aplicaciones 20, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-09-5

Capítulo 2

La técnica del forcing como cambio paradigmático

Emilio Angulo Perkins

Resumen

El método del forcing provocó un cambio drástico en el área de teoría de conjuntos; preguntas y el como se abordan fueron modificados. En este trabajo se utiliza el análisis Kuhniano desde la interpretación de Leo Corry para afirmar y describir como el método del forcing modificó la Imagen del conocimiento de las Matemáticas de la postura formalista.

1 Introducción

Los cambios en la imagen del conocimiento de cualquier área no son siempre perceptibles, y en el caso de las matemáticas, fue durante mucho tiempo aceptada la noción de que no sucedían.

Lo que se presenta es un estudio de cómo el método del forcing y su desarrollo modificó la imagen del conocimiento de las matemáticas para la postura formalista.

Este estudio toma el método de análisis paradigmático, iniciado por Thomas Kuhn en su texto "La estructura de las revoluciones científicas" [14], bajo la versión propuesta por Corry en [7][1] . La versión de Corry no es *una* interpretación del análisis por paradigmas, sino un *esquema* para análisis por paradigmas. Se describirá con detalle bajo que parámetros está nuestro análisis.

Al usar el concepto de Imagen del conocimiento, se hace referencia a la presentación de Corry [7, sec. III] de las ideas de Yehuda Elkana. Con el cual

[1]Este artículo, explica el autor, cubre cuestiones abordadas en sus artículos [6] y [8] que tienen puntos en común y se presentan secciones de ellos sin que se empalmen.

se clasifican de manera, casi siempre, clara las preguntas/enunciados de una área del conocimiento.

Tenemos las preguntas/enunciados que se refieren al objeto de estudio de la disciplina y preguntas/enunciados en la disciplina de la disciplina misma ("discipline *qua* discipline"). Corry da como ejemplo de la primera categoría las tres leyes de Newton, que evidentemente tratan sobre cuestiones sobre el movimiento de los cuerpos. En cambio decir, que el sistema de Copérnico es más simple que el de Ptolomeo es un enunciado sobre teorías físicas y no sobre cuerpos celestes; este enunciado pertenece a la segunda categoría.

Como sea, nos alerta Corry, debemos estar siempre atentos que esta distinción no siempre es tan clara, como puede verse en el caso de los teoremas de incompletitud de Gödel, que tratan sobre el objeto de estudio de la teoría de modelos, pero también se pueden interpretar como enunciados sobre la matemática misma.

Aún más, igualmente importante es estar conscientes de que esta división es contingente y lo que en un momento perteneció a una categoría puede pertenecer a otra después.

Sin embargo, en este trabajo difiero al lugar que Corry le da al método. Corry incluye al método dentro del cuerpo del conocimiento, sin embargo no explicita que entiende por método. Usando las ideas de Barseghyan [2], entendiendo al método como los criterios a satisfacer para la aceptación de nuevas teorías en el mosaico científico de la disciplina, me parece más adecuado incluir el método en la imagen del conocimiento.

Por último y derivado del párrafo anterior, se obtiene la razón por la cual en el título y secciones me refiero al forcing como "técnica", en lugar de "método" como cotidianamente se hace en la práctica matemática. Por lo cual, cada vez que en el texto se mencione el "método del forcing" debe entenderse como la "técnica del forcing".

2 La técnica del forcing como cambio paradigmático

Paradigmas en la Ciencia

En 1962 Thomas Kuhn publica *La estructura de las revoluciones científicas*, texto con el cual se le da la estocada final a la concepción del progreso lineal

y acumulativo de la ciencia (camino ya avanzado con la obra de Popper)[2]. Se plantea un progreso a partir de saltos cualitativos en nuevas direcciones obtenidos por cambios *paradigmáticos*, que fuerzan un replanteamiento del área del conocimiento en cuestión y una incompatibilidad, respecto a la visión del mundo, con la postura anterior. La idea de paradigma juega un papel central y articulador en el desarrollo de la obra de Khun. Debido a la profundidad y generalización del texto de Khun, el concepto de paradigma recibe distintos matices y cualidades. Observemos dos enunciados que creemos son significativos en su obra así como útiles para nuestro análisis; el primero aparece en su obra original de 1962

> Sus realizaciones carecían hasta tal punto de precedentes, que eran capaces de atraer a un grupo duradero de partidarios alejándolos de los modos rivales de actividad y a la vez eran lo bastante abiertas para dejarle al grupo de profesionales de la ciencia así definido todo tipo de problemas por resolver. En adelante me referiré con el término *paradigmas* a los logros que comparten estas dos características[...].

La segunda cita corresponde al epílogo agregado en 1969

> El paradigma como ejemplo compartido es el elemento central de lo que ahora considero el aspecto más novedoso y menos comprendido de este libro.

Con base en el desarrollo del texto de Khun y teniendo como eje los dos enunciados previamente señalados, identificamos los dos siguientes componentes escenciales de un paradigma:

- ⋆ Debe ser ejemplar
- ⋆ Debe ofrecer una colección nueva de problemas por resolver.

Que un suceso sea ejemplar es que ofrezca un modo de reproducirlo; no solo para repetirlo sino para hacer variaciones sobre el mismo, permitiendo que la segunda cualidad sea viable científicamente, esto es, ofrecer nuevos problemas por resolver. Para detallar más estas ideas, desarrollemos un ejemplo

[2]Afirmación hecha por el mismo Kuhn en [17]

imaginario: Si alguien pudiese transmutar plomo en oro, pero fuera incapaz de reproducir el proceso o explicarlo, este suceso no sería un cambio paradigmático, sino una anomalía dentro del paradigma existente, y se buscaría el modo de resolverlo, según el paradigma establecido o una nueva propuesta *paradigmática*; en cambio si se ofreciera el método con el cual se logró tal resultado, estaríamos, probablemente, frente a un cambio paradigmático, ya que ejemplifica el proceso y abre la posibilidad de investigar a que otros materiales se les puede aplicar el proceso. Un ejemplo real lo podemos apreciar en el siglo XVIII; hasta antes de esta fecha, se habían detectado fenómenos relacionados con la electricidad, montado experimentos y elaborado teorías sobre ello; sin embargo lo que se tenían eran observaciones de fenómenos inconexos y no significativos (en cuanto no eran interpretables) y teorías incapaces de explicarles. La construcción de la botella de Layden (originalmente pensada como una botella para capturar el "fluído" eléctrico), en su forma final, a diferencia de los experimentos predecesores, era ejemplar y abría un campo de problemas por resolver, al abandonarse el estudio de la electricidad como fluido y centrar la atención en las dos capas conductoras; esto es, representó un cambio paradigmático.

El objetivo de este trabajo es analizar, a partir de la visión de Kuhn, el método del forcing como cambio paradigmático y la manifestación concreta de sus consecuencias. Evidentemente, lo primero es asegurar la validez de la teoría kuhniana del cambio científico y la factibilidad de su aplicación a las matemáticas. Este es un tema por sí mismo extenso y abierto. Lo que se ofrece a continuación es un breve resumen que expone las fortalezas y debilidades del análisis de Kuhn y la razón por la cual se ha escogido. Para un desarrollo más detallado del tema consultarse [14],[17],[2], [18].

Varios intentos se han hecho para construir una Teoría General del Cambio Científico (TGCC), están, por ejemplo, los hechos por Popper, Kuhn, Lakatos y Laudan. Para la comunidad de la filosofía de la ciencia, ninguno ha logrado ofrecer una respuesta completamente satisfactoria.

La propuesta de Kuhn fue criticada fuertemente en sus inicios, y aún ahora se le sigue achacando que es una concepción irracional del cambio científico así como también se le acusa de proponer que la decisión entre teorías rivales es totalmente subjetiva[3] . Los señalamientos anteriormente dichos, son las

[3] *In Kuhn's writings, the issue of rationality arises in connection with paradigms and with theory- choice* Corry en [7].

críticas más comunes y están basadas sobre mal interpretaciones de los textos de Kuhn.

Nos centraremos en lo que considero los principales problemas de la teoría de Kuhn al *competir* con otras TGCC y de los cuales erróneamente se derivan señalamientos equivocados, como los mencionados anteriormente.

-La descripción de Kuhn es extremadamente vaga en muchas cuestiones, rara vez se enuncian clara, explícita y univocamente descripciones de nociones medulares como lo son *paradigma*[4] *o crisis*, así como los criterios para la selección entre teorías rivales o la delimitación entre ciencia normal y ciencia extraordinaria[5].

-La continuidad del quehacer científico, de la ciencia, en su totalidad, toma un marcado y predominante carácter socio-psicológico. [6]

De lo anterior se puede concluir, de manera coincidente con la postura generalizada, que el análisis kuhniano no provee de una TGCC satisfactoria.[7] Sin embargo, la incapacidad del análisis kuhniano de articular una TGCC no invalida sus contribuciones para la construcción de esta. El análisis de Kuhn provee de una herramienta descriptiva que detalla bastante el proceso de cambio al estudiar un suceso histórico en particular (aunque falla en articular estos sucesos de manera general) y las consecuencias de su aceptación en el área y comunidad científica. Es por estos elementos que, por su evidente utilidad y fecundidad, recurrimos al análisis kuhniano.

Al recurrir a Kuhn como herramienta teórica para el análisis de este cambio científico en particular no se está cometiendo más error que el que comete un ingeniero al recurrir a la mecánica newtoniana para sus cálculos.

Habiendo discutido la aplicabilidad del método kuhniano en general, pro-

[4] *This vague term (and its several synonyms) was object of harsh criticisms and several reformulations* [7].

[5] *Kuhn himself, as well as his followers and critics, often addressed the issues belonging to the different axes without clearly separating them; this has been the source of a [...] typical difficulty in discussing Kuhn's theory and its applicability* [7].

[6] *But Kuhn's conceptual framework for dealing with continuity in sciencie is socio-psychological[...]* [17]. El punto de partida de Kuhn es la socio-psicología (o sociología).*Kuhn's starting point is the social psychology (or sociology) of the normal scientific community* [20].

[7] Realmente el estudio de las fallas del análisis kuhniano es más amplio y profundo. En [17] se exponen las críticas a la obra de Kuhn por parte de sus contemporáneos. En [2] se realiza un estudio más actual, dentro del cual incluye como falla de Kuhn el confundir criterios descriptivos con normativos.

sigue evaluar su aplicabilidad a la matemática. Con lo anteriormente discutido quedan claras las bondades del análisis paradigmático de nuestro caso, que en concreto serían: apreciar detalladamente cómo impactó el método del Forcing a, los *programas* de investigación (problemas resueltos y por resolver, validación de métodos y soluciones), y a la percepción de la matemática por parte de la misma comunidad. A continuación se expondrá, el desarrollo de la problemática sobre la aplicabilidad del análisis kuhniano a las matemáticas.

Paradigmas en las Matemáticas

En las matemáticas, como en ninguna otra ciencia, prevaleció (y hasta hoy es comúnmente aceptada,) la concepción acumulativa (generalizadora) del desarrollo matemático. Cuando se dio la *revolución historiográfica* de las ciencias, con Kuhn como principal exponente[8], las Matemáticas fueron la ciencia menos susceptible al fenómeno y, no obstante, donde más oposición se tuvo a las ideas de Kuhn.

Probablemente, el primer artículo publicado que tomó posición en la discusión fue el de Crowe, *Ten "Laws" Concerning Patterns of Change in the Hisotry of Mathematics* [9], en cuyo trabajo, la décima y culminante ley afirma que *Las revoluciones nunca ocurren en matemáticas.*

Sin embargo, el posicionamiento de Crowe es sumamente débil cuando uno escruta lo que él entiende por "*en matemáticas*". Para empezar, no explicita qué entiende por matemáticas, pero afirma que la nomenclatura, simbolismo, metamatemáticas, metodología, e historiografía de las matemáticas, no forman parte de las matemáticas[9].

Estas debilidades en la argumentación de Crowe fueron perfectamente señaladas por Mehrtens en [20], donde elabora una crítica a las "leyes" pro-

[8]Sobre esto, véase por ejemplo, el análisis de Buchdahl en [3]. Mehrtens menciona en [20] " *«The new historiography of science»* , whose basic book is T. S. Kuhn's essay *The Structure of Scientific Revolutions*". "*Yet beyond one's own evaluation of the merits of Kuhn's actual views, there is at least one undeniable virtue that must be conceded to his work: that of having brought about the widespreadadoption of a new agenda for debate in the history and philosophy of science...*". Leo Corry en *The Kuhnian Agenda and the History of Mathematics*, síntesis de sus dos artículos [6] y [8].

[9]*Also, the stress in law 10 on the preposition «in» is crucial, for, as a number of the earlier laws make clear, revolutions may occur in mathematical nomenclature, symbolism, metamathematics (e.g. the metaphysics of mathematics), methodology (e.g. standards of rigor), and perhaps even in the historiography of mathematics.*

puestas por Crowe; explicando dichas "leyes" a través de los conceptos de la teoría kuhniana.

Respecto a la postura de Merthens sobre las revoluciones en matemáticas, expongo a continuación extractos de la sección de su artículo respecto a la décima "ley" de Crowe.

> Hasta muy avanzado el siglo diecinueve, el magisterio de Cambridge y Oxford consideraron cualquier intento de mejorar la teoría de fluxiones como una impía revuelta contra la sagrada memoria de Newton. El resultado fue que la escuela newtoniana de Inglaterra y la escuela continental leibniziana divergieron[...] El dilema fue roto en 1812 cuando un grupo de jóvenes matemáticos en Cambridge quienes, bajo la inspiración del mayor Robert Woodhouse, formaron una "Sociedad Analítica" para propagar la notación diferencial. [...] Este movimiento encontró inicialmente una fuerte crítica, que fue superada con acciones como la publicación de una traducción al inglés del "Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus" de Lacroix. La nueva generación de Inglaterra empezó entonces a participar en las matemáticas modernas [Struik 1948, 246-8][10]
>
> Para la comunidad matemática inglesa esto fue una revolución. Un apartado substancial de la matriz disciplinaria, el compromiso con el sistema newtoniano de notación, fue desechado. Este es uno pero muy sugestivo ejemplo, y hay más.
>
> Aún así, Crowe sostiene que no hay revoluciones en matemáticas. El probablemente rechazaría el ejemplo dado diciendo que no es una revolución *en* las matemáticas. Para él "la preposición 'enés crucial". Desafortunadamente el no explica qué significa *en* matemáticas, excepto que la nomenclatura, simbolismo, metamatemáticas, metodología, e historiografía no están *en* las matemáticas. Probablemente Crowe tiene los "contenidos" o la "substancia" de las matemáticas (¿Qué es esto?).
>
> Pero tómese un ejemplo: una pieza de matemáticas muy en el sentido de Crowe sería el teorema de Taylor, que ha sido invariablmente válido desde su publicación en 1715. Pero ¿Es el mismo

[10]Struik, Dirk J. 1948 *A Concise History of Mathematics* 2nd ed. New York (Dover).

> contenido en la publicación original de Taylor y en los libros de texto modernos? Siempre existe un amplio trasfondo conectado con dicho teorema. Actualmente el concepto de función es completamente diferente, el análisis infinitesimal está montado sobre las bases de la topología general, con el teorema de Taylor los matemáticos tienen una generalización de los espacios de Banach en mente, y así. Aún así hay algo más que mera tradición conectando el teorema de 1715 y su versión actual. El ejemplo debería mostrar que este "contenido" es difícil de asir. *Uno no puede desnudar los contenidos de la nomenclatura, simbolismo, metamatemáticas, etc.*[El énfasis es mío].
>
> Tomemos, digamos, el texto *Moderne Algebra* de Waerden de 1930 y cualquier libro de texto de álgebra de 1830. La diferencia es rotunda; el conjunto completo de campos estrechamente conectados, terminología, simbolismo, metodología, y las metamatemáticas han cambiado. Todos estos elementos están entrelazados: un concepto, por ejemplo, no esta sólo determinado por su propio contenido en una definición dada, sino también esta determinado por las conexiones en el que es usado. Por lo tanto, hay una "meta-física" para él. Aún más, cada uno de estos elementos es substancial para la teoría como acontecimiento histórico. Consecuentemente, Yo diría que los cambios en metodología, simbolismo, etc., son cambios *en* matemáticas.

Desde la respuesta de Merthens a Crowe, la discusión se ha prolongado con numerosos estudios, críticas y publicaciones.

Leo Corry ofrece en [7], un análisis del estado de la problemática en 1996.

Corry afirma que en las disciplinas científicas aparecen dos, mas o menos discernibles tipos de preguntas. El primer tipo incluye preguntas acerca del objeto de estudio de la disciplina. El segundo tipo comprende preguntas de la disciplina *qua* disciplina, o meta-preguntas (Preguntas que la disciplina hace sobre la *misma* disciplina como ¿Qué preguntas son válidas? o ¿Cuáles de ellas deben ser respondidas?). Resolver el primer tipo de cuestiones está siempre dentro de los objetivos de cualquier disciplina y, obviamente, los practicantes de tal disciplina están usualmente comprometidos a dicha actividad. Respecto a las cuestiones del segundo tipo, sin embargo, donde uno puede encontrar algunos científicos intentando conscientemente responderlas,

uno puede encontrar otros científicos respondiéndolas sólo implícita o tácitamente, y aún otros ignorando la existencia de este tipo de preguntas. Incluso se puede encontrar científicos que deliberadamente evaden lidiar con ellas.

Hay afirmaciones, continúa Corry, que fácilmente pueden ser clasificadas como respuestas a alguno de los tipos de preguntas mencionados anteriormente. Sin embargo, para otras oraciones, podría ser más difícil establecer cuando son respuestas acerca del objeto de estudio, o cuando de la disciplina *qua* disciplina. Cada una de las tres leyes de Newton, por ejemplo, claramente pertenecen a la primera categoría; las tres son afirmaciones sobre como los cuerpos se mueven. La aserción que el sistema de Copérnico es "más simple" que el de Ptolomeo, claramente pertenece al segundo tipo: es una aserción sobre teorías astronómicas en lugar de una aserción sobre los cuerpos celestes. Los teoremas de Gödel son resultados muy profundos *dentro* de una rama específica de las matemáticas, pero también pueden ser tomados como aserciones *sobre* las matemáticas, la disciplina.

De este modo se pueden identificar dos capas relacionadas a cualquier disciplina científica; el "cuerpo del conocimiento" y las "imágenes del conocimiento". El cuerpo del conocimiento incluye las aserciones que responden a cuestiones relacionadas al objeto de estudio de la disciplina, mientras que las imágenes del conocimiento incluyen aserciones acerca de la disciplina *qua* disciplina. Esta división no siempre es marcada y, seguramente, está históricamente determinada: la clasificación de una afirmación perteneciendo a alguna capa puede cambiar a través del tiempo.

Los párrafos anteriores exponen los cimientos del análisis realizado por Corry. Previamente realiza un análisis de la obra de Kuhn para identificar los puntos de la *agenda* kuhniana.

Corry concluye, a través de un ejercicio analítico y sintético (ambos con contraste histórico). Que las categorías de *paradigma* y *revolución* son aplicables a la imagen del conocimiento matemático.

Esto resuelve la falaz contradicción entre, la existencia de revoluciones y cambios paradigmáticos en la matemática y el aparente progreso acumulativo-generalizador de la matemática. Efectivamente, el conocimiento matemático *tiende* a un proceso acumulativo-generalizador de manera exacerbada en comparación de otras ciencias, así el *cuerpo del conocimiento* de la matemática toma este cariz. Más no por lo anterior dejan de suceder fenómenos revolucionarios en la *disciplina*. La causa del aspecto acumulativo-generalizador en el cuerpo del conocimiento matemático falta por dilucidarse. La respuesta a

si esta causa es parte de la naturaleza del cuerpo del conocimiento será independiente del actual fenómeno de manifestación acumulativa-generalizadora de dicho cuerpo.

Las consecuencias descritas en la sección 3 fueron identificadas *antes* de emprender el actual trabajo y fueron el eje principal para la configuración de éste. Se resalta este hecho por que *no* fueron ejemplos buscados *ad hoc* u obtenidos a partir de la visión de marco teórico alguno. Estos fenómenos manifiestos, son detallados y explicitados por Malykhin en el reporte que realizó de la sesión combinada del Seminario de Moscú de Topología y la Sociedad Matemática Rusa de 1987; sin embargo Malykhin no alcanza a contextualizar estos fenómenos dentro de un proceso general del cambio científico. Afirma, en consonancia con la postura dominante, que el forcing es una herramienta muy útil para obtener resultados absolutos (aquellos resultados "reales", los que se pueden obtener a partir de ZFC,ver página 42), pero afirma, sabiendo que hay algo más, que "Al mismo tiempo, su valor objetivo, sin dudas, no se reduce sólo a esto.[...] No hay duda de que en el futuro su valor sólo incrementará"[11], sin desarrollar cual es ese "valor objetivo". Creo que las secciones restantes del texto exhiben una parte de este "valor" y certeza de su crecimiento que Malykhin intuye pero no explicita. Sin embargo, para develarlas fue necesario contextualizar el método del forcing dentro de la Historia y Filosofía de la Matemática y hacer uso de la justificación de Corry.

Creo necesario agregar algunas observaciones sobre el análisis de Corry. En él, Corry no da "su interpretación" sobre la teoría kuhniana del cambio científico, sino todo lo contrario, lo evita y estudia las limitaciones de los trabajos que operan de este modo. Corry ofrece los ejes que él identifica de la teoría kuhniana con los enunciados que los describen, generalizando así, el proceder de optar por *una* interpretación particular de la teoría kuhniana por un nivel de compromiso con los enunciados. Menciona que entre más compromiso y más literalmente se acepten, se obtienen resultados más radicales pero difíciles de aplicar a la historia en su conjunto más allá de sucesos históricos particulares, pero entre menor compromiso y de manera más relativa se acepten, se obtiene mayor consonancia con la historia pero los resultados obtenidos se vuelven más obvios o triviales.

Podemos describir el análisis de Corry no como una interpretación de la

[11] *At the same time its objective value, without a doubt, does not reduce merely to this.[$\cdots$] There is no doubt that in the future its value will only increase* [19].

teoría kuhniana sino como un esquema para estas interpretaciones. Con lo anterior ¿Cómo encaja el análisis hecho del forcing realizado en este trabajo? Intentando seguir la postura de Corry y no caer en interpretaciones particulares, nuestro análisis realizado sobre el forcing responde, *sin importar el nivel de compromiso* al enunciado (2.1) "Paradigmas, no teorías (ni descubrimientos individuales, por supuesto) son las unidades básicos de los logros y cambios científicos"[12]; respecto al (2.2), si uno sitúa en la postura formalista como la postura mayoritariamente aceptada en la comunidad científica, también se cumple que "Un científico no puede, mientras se halle bajo un paradigma, entender seriamente un paradigma rival" [13].

Esos dos enunciados son los correspondientes al eje de los paradigmas, además, las consecuencias coinciden con el análisis de Corry al ser identificadas como cambios directos en la imagen del conocimiento de la matemática y *después* indirectos en el cuerpo del conocimiento.

Sin embargo, hay que explicitar que no se ataca en este trabajo a fondo el eje de la disociación entre ciencia normal y ciencia revolucionaria, donde el forcing debería cumplir con los requisitos de la última y servir de parámetro para la distinción.

Desarrollo Histórico del Forcing

El Forcing como Paradigma

Se recomienda antes de continuar, la lectura de la introducción al capítulo 10 en [13]; que es una exposición cronológica del desarrollo del método del forcing. Aún sin el uso de ninguna herramienta teórica para estudiar el suceso, se puede apreciar la conmoción que el método causo desde sus primeras etapas, lo cual impelió a varios matemáticos a perfeccionar vertiginosamente el método. Las mismas personas involucradas estaban conscientes de lo revolucionario del método, como puede apreciarse en una cita de Scott: "La teoría de conjuntos nunca será la misma después de Cohen, y simplemente no hay comparación en la sofisticación de nuestro conocimiento acerca de la teoría de modelos contrastada con la época pre-Cohen".

[12] *Paradigms, not theories (and, of course, not individual discoveries), are the basic units of scientific achievement and change.*

[13] *A scientist cannot, while under the sway of one paradigm, seriously entertain a rival paradigm.*

En este apartado se justificará el por que el método de Forcing representa un cambio paradigmático en la matemática (como ya se explicó, en la imagen del conocimiento matemático); pero antes abordaremos los alcances de este cambio paradigmático.

La matemática como ciencia está constituida por muchas y extensas áreas. El forcing aparece como respuesta a lo que Hilbert había considerado el problema más importante por resolver en las matemáticas, la Hipótesis del Continuo; de este modo, el método de Cohen trastocó profundamente la Teoría de Conjuntos y, por la naturaleza del método, a la Teoría de Modelos

La cualidad del forcing de ser ejemplar puede ser apreciada en las afirmaciones de Kanamori y Malykhin " El forcing provee un esquema notablemente general y flexible con fuertes fundamentos intuitivos para establecer consistencia relativa e independencia.", "El forcing es una poderosa herramienta que permite discernir si alguna afirmación es compatible con ZFC" respectivamente; así como en la de Joan Bagarya en [1]

> *La técnica de* forcing*,[...], ha sido desarrollada a lo largo de los casi 50 años de su existencia de manera impresionante, dando lugar a una teoría extremadamente sotisficada desde el punto de vista técnico* que ha permitido resolver un gran número de problemas abiertos, tanto dentro de la misma teoría de conjuntos como en otras áreas de la matemática[14]

además,como ya se dijo al comienzo del apartado, en la introducción al capítulo 10 de [13]ofrece ejemplos históricos de la rapidez con la que fue adoptado el forcing como método.

Diversos trabajos, como por ejemplo [16], exhiben explícitamente el forcing como método; si bien esa no es la exposición de Cohen en [5] y [4], el perfeccionamiento y refinamiento del método como es expuesto en aquél trabajo refleja fielmente la cualidad que se está estudiando: el ser ejemplar.

A continuación abordaremos la cualidad del método de abrir un panorama nuevo de problemas; donde esto debe entenderse como la apertura de la posibilidad de *resolver* problemas, ya sean totalmente nuevos o problemas conocidos que son inatacables o están excluidos de la ciencia normal. En palabras de Kuhn, un cambio paradigmático produce un consiguiente desplazamiento en los problemas susceptibles de examen científico y en las normas

[14]El énfasis es mío

con las cuales la profesión determina qué habrá de contar como un problema admisible o como solución legítima a un problema.

Previamente en este trabajo, esto ya se había insinuado cuando Bagarya afirma que el método de forcing " [...] ha permitido resolver un gran número de problemas abiertos, tanto dentro de la misma teoría de conjuntos como en otras áreas". Entraremos en más detalles haciendo uso del artículo de Malykhin [19] que identifica claramente este proceso. La lucidez con la que Malykhin percibe esto es evidente en su detallado análisis[15] y es preludiada por su introducción, el énfasis es mío:

> En este artículo hablaremos acerca de los cambios que el forcing ha traído en la topología general; no tanto acerca de los resultados que han sido obtenidos haciendo uso de él como de la alteración del modo en que las cosas son investigadas y *acerca de las nuevas preguntas importantes que emergen* e incluso, tal vez, un poco acerca del cambio en la psicología del pensamiento matemático del trabajo matemático en ésta área.

Lo que haré en el resto de la sección será exponer las ideas de Malykhin (del texto [19])que permitan identificar la apertura de las nuevas áreas de investigación.

"El lector estará familiarizado con el hecho de que casi toda la matemática actual esta construida a partir de una base conjuntista. Después de la aparición de las paradojas en la teoría de conjuntos, ésta fue axiomatizada por diversos métodos. El más conocido, más difundido y el más intuitivamente aceptado es el sistema de Zermelo-Fraenkel ZFC con el axioma de elección.

ZFC se nos presenta como un sistema axiomático sumamente fuerte; se asume que cualquier enunciado matemático puede expresarse en términos de éste sistema, así que éste sistema puede ser considerado la base de toda la matemática moderna. Sin embargo de acuerdo al teorema de incompletitud de Gödel la fuerza de éste sistema está limitado por la presencia de afirmaciones que son independientes de él, ésto es que ni la afirmación $\mathbf{T}$ ni su negación $\neg\mathbf{T}$ pueden ser demostradas en **ZFC**. Si **ZFC** es consistente, hecho que la mayoría de los matemáticos **creen**, entonces ambos sistemas axiomáticos $\mathbf{ZFC}+\mathbf{T}$ y

[15] Malykhin indica que el artículo está basado en el reporte plenario dado por él mismo en la sesión combinada del all-Moscow seminar "Topology Circle" y la Moscow Mathematical Society el 19 de Mayo de 1987.

ZFC + $\neg$**T** son consistentes y, al menos en principio, podrían ser postulados como la base de todas las matemáticas.

Desde antes de la invención del forcing se sabía sobre ésta situación, pero los matemáticos *no tenían herramienta alguna para reconocer afirmaciones independientes. El forcing es una poderosa herramienta que permite discernir si alguna afirmación es compatible con* ZFC .

Con la aparición del forcing, *se incorporó, al trabajo matemático la verificación de la consistencia o independencia de postulados sobre los que había un existente interés pero una trayectoria de indemostrabilidad.* "[16]

Malykhin explica una estructuración del trabajo matemático; esta estructura consiste en resultados absolutos y resultados relativos de primer y segundo tipo. Los resultados absolutos, contemplan todos los resultados matemáticos obtenidos a partir de **ZFC**. Los resultados relativos de primer tipo son resultados matemáticos obtenidos a partir de **ZFC** con hipótesis adicionales, los de segundo tipo son resultados **meta-matemáticos** sobre consistencia. Plantea que el quehacer matemático anterior al forcing fluía en el orden listado de los resultados matemáticos: Se busca demostrar enunciados dentro de **ZFC** (resultados absolutos), en caso de que esta empresa fracase, se procede a intentar demostrar esos enunciados con hipótesis adicionales a **ZFC** (resultados relativos del primer tipo), si nuevamente es inaccesible la prueba del enunciado se procede finalmente a analizar su consistencia o independencia (resultados relativos del segundo tipo).

Dentro de este proceso, no significa que no hubiera desarrollo de resultados que *después* se sabría son independientes de ZFC; pero estos resultados, al no poder comprobarse su consistencia se convertían en resultados *condicionales* y *estaban excluídos del cuerpo de la matemática considerado* standard; resultados del tipo, por ejemplo: Asumiendo S, el objeto K puede existir; donde no se sabe si S es compatible con **ZFC**.

Comparense los pasajes resaltados hasta ahora con la siguiente cita de Kuhn en [14]:

> Todas ellas [las revoluciones científicas] produjeron un consiguiente desplazamiento en los problemas susceptibles de examen científico y en las normas con las cuales la profesión determinaba qué habría de contar como un problema admisible o como solución legítima a un problema

[16] El énfasis es mío.

Podemos asegurar sin equivocación que el método del forcing incorporó nuevos problemas a la matemática, siendo los ejemplos más notorios, los resultados de consistencia.

Hasta aquí se ha explicado en qué ha consistido la apertura de los nuevos problemas por resolver en términos generales. Merece ser resaltada la similitud con las anomalías que identifica Kuhn en los periodos de crisis; problemas que son abordados parcialmente (resultados condicionales) pero que sólo son comprensibles hasta la aceptación de un paradigma que los incorpore al cuerpo de la *ciencia normal* (resultados de consistencia).

En la sección 4 de [1] se pueden encontrar referencias a como se ha desarrollado el método del forcing así como problemas resueltos y por resolver a partir de éste.

3 Modificación de la imagen del conocimiento

Cambio en los planes de investigación

En esta subsección expongo fragmentos de lo que considero puntos medulares de la sección §2 de [19] concernientes a los cambios en los planes de investigación.

Hablando estrictamente -nos dice Malykhin- todos los resultados relativos son metamatemáticos, no ocurren en **ZFC** pero nos hablan acerca de sus consistencia, por ejemplo, un resultado obtenido asumiendo **HC** nos dice que el resultado es compatible con **ZFC**. Aún así, la división mencionada es útil al menos por dos razones. Primero, es posible obtener resultados relativos del 1er grupo, esto es, con hipótesis adicionales, sin saber del forcing. Así es como era antes de la invención del forcing, cuando **HC**, **HGC**, la hipótesis de Luzin $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ y demás, fueron usadas intensivamente. Segundo, obtener resultados de compatibilidad por forcing es construir un modelo para el cual la correspondiente afirmación **T** es satisfecha. Más aún, usualmente no se sabe mucho acerca de este modelo. Por lo tanto, si uno logra probar que **T** es satisfecha con alguna hipótesis adicional **S** que es ya bien conocida y ampliamente usada, digamos **HC**, entonces esto debería considerarse un avance: la prueba de la implicación **S**$\rightarrow$**T** no requiere conocimiento de forcing, **T** se convierte psicológicamente más aceptable, sabemos ahora que **T** es compatible con todas las afirmaciones que son implicadas por **S**. Con el incremento

cuantitativo de investigación en cualquier área de las matemáticas, la oportunidad de obtener resultados absolutos en esta área se reduce, y es remplazada al moverse en nuevas y menos investigadas áreas. Se esta volviendo más y más difícil obtener resultados absolutos, así que su valor crece. Obtenemos más y más resultados relativos, están apareciendo en todos lados. Están jugando un papel cada vez mayor, incluso para encontrar nuevos resultados absolutos. Como cuestión de hecho, si uno tiene éxito al establecer que una afirmación **T** es compatible con **ZFC**, sabemos entonces que ¡Es imposible construir un contraejemplo a ella en **ZFC**! En algunos casos, el resultado de compatibilidad de alguna afirmación juega el papel de una señal de alto para cualquiera que esté buscando el resultado absoluto correspondiente.

Pregunta Malykhin: ¿Cuanto tiempo y qué tan seguido ha pasado esto? y ¿Está pasando ahora? Primero tratamos de demostrar una afirmación T en la cual estamos interesados usando sólo los axiomas de **ZFC**, esto es, deseamos obtener un resultado *absoluto*. No funciona. Empezamos a utilizar suposiciones adicionales, como **HC**; en este procesos queremos obtener un resultado *relativo* pero en el lenguaje de la teoría de conjuntos usando un axioma adicional. Incluso esto puede no funcionar. Entonces aplicamos forcing y obtenemos un resultado de *compatibilidad* de T con **ZFC**. De hecho esto es ya un resultado *metamatemático*. Afirma que en **ZFC** no hay una prueba de la negación de T. Pero de todo, probar que T es compatible con **ZFC** es, en cierto sentido, lo más fácil de las tres posibilidades listadas. Esto significa que ahora que sabemos la técnica del forcing, la sucesión de hechos será invertida más rápido que nunca. Primero probamos por forcing que T es compatible con **ZFC**. Ésto es tranquilizador. Después encontramos que para que T sea válida es suficiente que cierta aseveración S, cuya compatibilidad con **ZFC** es conocida, sea satisfecha, como **HC**. Es posible que después un resultado absoluto correspondiente sea también conseguido, no obstante, lo más común es que sea más débil que el obtenido originalmente por forcing y todavía más, es conseguido muchos años después.

Definición de la matemática

Como se ha llegado a mencionar, casi por regla general, un cambio paradigmático va acompañado de un cambio en la cosmovisión, sin embargo ese cambio es acotado por distintos factores. Las ecuaciones de Maxwell representa un cambio de cosmovisión sobre los fenómenos electro-magnéticos, pero

no cambió la cosmovisión newtoniana, por ejemplo.

La postura filosófica dominante en la actualidad en las matemáticas es el formalismo [17] que nació del *programa de Hilbert* , a pesar de que sus limitaciones fueron prontamente exhibidas al publicarse los resultados de incompletitud de Gödel, y podemos encontrar ejemplos de la aceptación de esta postura como en [11]:

> Todo esto no significa el fin del formalismo. Incluso de cara a los teoremas de incompletitud, es coherente sostener que matemáticas son la ciencia de los sistemas formales.[18]

Esto es totalmente consecuente con el análisis de Kuhn, que nos dice que las anomalías **no** son el criterio determinante para desechar un paradigma, es necesario la aparición de un paradigma que lo reemplace. Esta idea es desarrollada de manera actualizada y con mayor detalle como la primera ley del cambio científico que propone Hakob Barseghyan en [2][19].

Así, acotaremos la connotación de "(*re*)*Definición de la matemática*" a la postura formalista, que como ya se expuso, no es la única, y al área que esta postura toma como fundacional de las matemáticas. La acotación al área fundacional de las matemáticas se refiere a que, incluso dentro del quehacer matemático reivindicado como formalista, la redefinición cosmogónica que trastoca profundamente la mayoría de las teorías que componen el área fundacional de las matemáticas (la teoría de conjuntos, la teoría de modelos y la teoría de pruebas), se va difuminando conforme se aleja uno de éstas teorías. Estas manifestaciones periféricas de la redefinición de las matemáticas a partir del cambio paradigmático son principalmente la legitimación de nuevas hipótesis.

Después de lo dicho en los párrafos anteriores, uno podría cuestionar la utilidad del análisis de una redefinición tan acotada. La relevancia de esta es porque aparece en el área **fundacional** de la postura **dominante** en la

[17] El formalismo, como las distintas escuelas filosóficas sobre la matemática, tiene distintas vertientes; cuando hacemos referencia al formalismo, siempre es a la versión de Hilbert. Para más detalles véase [23]

[18] *All this does not spell the end of formalism. Even in the face of the incompleteness theorems, it is coherent to maintain that mathematics is the science of formal systems.*

[19] *According to the first law , any element of the mosaic of accepted theories and employed methods remains in the mosaic except insofar as it is overthrown by another element or elements.*

comunidad matemática. Por lo cual, los detalles de estos cambios ofrecen información valiosa para un estudio mas amplio de la Historia y Filosofía de la Matemática en particular, así como para la Historia y Filosofía de la Ciencia en general, sin embargo esto queda fuera del alcance de este trabajo.

Habiendo hecho las observaciones anteriores, por brevedad, omitiremos su mención en lo que resta de la subsección, entendiéndose que cuando se haga referencia a "las matemáticas" o su definición (o redefinición) es bajo las acotaciones previamente expuestas, es decir, estas referencias son desde la postura formalista, que sigue siendo relevante ya que su área fundacional es la aceptada mayoritariamente por la comunidad matemática.

A modo de introducción, podemos apreciar la certeza de Malykhin de estar ante un cambio profundo e influyente en las matemáticas cuando dice que la situación respecto al forcing es análoga con la aparición de las geometrías no-Euclideanas. Claro que aquella vez fue la primera vez de una situación tal en la historia de las matemáticas y el impacto psicológico fue más fuerte. Pero Malhykin nos hace el llamamiento a observar que "la constitución de la situación con el forcing va más profundo en la fundamentación de las matemáticas: La consistencia de las geometrías no-Euclideanas se redujo al final a la consistencia de la aritmética; la cuestión sobre la consistencia de ésta última no se había considerado en ese momento" En cambio, con el forcing, nos dice "... para la consistencia de la teoría de conjuntos, uno podría decir, que no hay a donde girar, ¡Es ella misma el último recurso!"[20]

Hemos dicho que la redefinición se ha dado en el área fundacional de las matemáticas, compuesta actualmente por la teoría de conjuntos, teoría de modelos, teoría de pruebas y teoría de recursividad, sin embargo, como la teoría de conjuntos tiene la capacidad de expresar los resultados de las otras tres, suele privilegiarse a la teoría de conjuntos como *la* teoría fundacional de las matemáticas. La teoría de conjuntos como teoría fundacional de las matemáticas es un hecho que es mencionado y desarrollado, en distintos grados, en libros de texto (que se mencione en libros de texto será importante para este análisis más adelante) como [10], [22], [12],[15], observado y discutido en [21] y analizado estadísticamente en [24][21] , esta concepción no se encuentra

[20] *...for the consistency of set theory, there is, one might say, nowhere to turn -it is itself the last resort!* en [19].

[21] En este texto, Zalamea añade un Apéndice al final que exhibe una tabla que intenta "registrar [...] ciertos énfasis y temáticas en la historia y la filosofía de la lógica, según se realizan dentro del 'ámbito angloamericano"'. En la clasificación propuesta, la categoría de

limitada únicamente al área conjuntista y es ampliamente compartida por la comunidad matemática como lo señala Potter en [21]:

> Libros de texto modernos sobre teoría de conjuntos están plagados con variantes de esta aserción: uno de ellos afirma tajantemente que 'teoría de conjuntos son los fundamentos de las matemáticas'(Kunen 1980, p.xi), y sentencias similares son encontradas no sólo (como podría esperarse) en libros escritos por matemáticos conjuntistas sino también en muchos libros de matemáticas convencionales. En efecto, este papel para la teoría de conjuntos se ha vuelto tan familiar que difícilmente alguien que llegue tan lejos como el leer este libro podría desconocerlo del todo. [22].

La teoría de conjuntos ocupa el lugar fundacional en la matemática porque responde el problema de *objeto de estudio*: prácticamente todo objeto matemático puede ser interpretado como un conjunto. Teniendo la axiomatización como ideal de toda teoría matemática, y siendo **ZFC**, la axiomatización más aceptada y usada de la teoría de conjuntos, el papel fundacional de dicha teoría se expresa comúnmente como "La matemática es el estudio de consecuencia de **ZFC**"

Es necesario hacer algunas observaciones de lo que se ha expuesto hasta el momento antes de proseguir. Al iniciar la subsección se mencionó que la concepción de definición de las matemáticas estaría acotada al área fundacional y a la postura formalista. Pero el párrafo precedente exhibe una concepción de la matemática a partir de la teoría de conjuntos, el área fundacional, sin mencionarse una sola vez la cuestión formalista. A pesar de esto, he decidido limitar el alcance a la postura formalista por la siguiente razón. Es un hecho, como lo subraya Potter en [21][23] , que la forma actual de la Teoría de

filosofía analítica contiene la teoría de conjuntos con una lógica clásica de primer orden subyacente.

[22] *Modern textbooks on set theory are littered with variants of this claim: one of them states baldly that 'set theory is the foundation of mathematics' (Kunen 1980, p. xi), and similar claims are to be found not just (as perhaps one might expect) in books written by set theorists but also in many mainstream mathematics books. Indeed this role for set theory has become so familiar that hardly anybody who gets as far as reading this book can be wholly unaware of it.*

[23] *we shall need to bear this foundational use for set theory in mind throughout, [...] because it has been enormously influential in determining the manner in which the theory has been developed[...].*

Conjuntos se debe en gran medida a la persecución por obtener una teoría fundacional de las matemáticas, y este hacer se dio en el contexto histórico del programa de Hilbert. Considero que no es un factor que pueda ser obviado. La consecuencia de esta postura es que el alcance de este cambio paradigmático puede haber impactado otras escuelas filosóficas de las matemáticas, pero es una cuestión que no se abarcará y que no invalida los razonamientos hechos o por hacer en este trabajo. Sin embargo, subrayar la influencia del formalismo de Hilbert conduce a otro resultado que se exhibirá brevemente más adelante.

Dado que la mayoría de los resultados matemáticos se obtienen a partir de **ZFC** y casi en su totalidad todos los resultados con aplicación técnica, hay una inclinación natural a considerar **ZFC** como *la* base de las matemáticas.

Sin embargo el forcing y los resultados de compatibilidad que ha arrojado han mermado y socavado fuertemente la postura de que "las matemáticas son todo aquello que se pueda obtener a partir de **ZFC**" Ahora se sabe que se puede trabajar en nuevos sistemas de teoría de conjuntos (por ejemplo $\mathbf{ZFC}+\mathbf{HC}, \mathbf{ZFC}+\mathbf{HGC}, \mathbf{ZFC}+\mathbf{AM}$), obtener resultados nuevos en ellos y que no hay, aún, una buena razón para negarlos como resultados legítimamente matemáticos, aunque uno está obligado a explicitar en que sistema fueron obtenidos.

Con el análisis de Corry, se puede apreciar con detalle, la *profundidad* con que el método del forcing afectó a la disciplina matemática: El párrafo anterior sintetiza la enorme repercusión del método en el *cuerpo del conocimiento* matemático. Recordemos además que Corry nos indica que, en el caso de las matemáticas, los cambios paradigmáticos y sus consecuentes revoluciones se dan en la *imagen del conocimiento*, capa en la que sin duda alguna, se encuentra la concepción de las matemáticas, y que resuelve la clasificación entre resultados 'matemáticos'y 'metamatemáticos'. También recordemos que la división entre la imagen y el cuerpo del conocimiento es contingente (y por lo tanto afectada por condiciones históricas); Malykhin nos señala en repetidas ocasiones que los resultados de consistencia e independencia, que se consideran en la imagen del conocimiento, es decir, resultados metamatemáticos, están tomando prioridad en el desarrollo de las investigaciones, y que la cantidad de ellos aumenta a una velocidad creciente. ¿Cuanto tiempo puede pasar para qué, una área que cada vez recibe más atención y esfuerzos de la comunidad matemática en general se considere parte del cuerpo del conocimiento matemático?

Sobre esta última cuestión, Malykhin pareció no reparar; aún más, parece

estar convencido de que no habrá cambios de este tipo cuando nos dice

> Por supuesto, el cuerpo principal de las matemáticas, como lo expresó Arkhangel'skii, continua consistiendo de resultados 'absolutos'; estos son resultados que se obtuvieron de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, esto es, resultados en **ZFC**.

[24]

4 Conclusiones

Las áreas poco afectadas por el forcing siguen y podrían seguir teniendo la concepción clásica formalista de las matemáticas, sin embargo, la matemática producida por la postura formalista estaba empezando a ser desbordada por los problemas *condicionales*. Ahora *no se duda al reconocer a los investigadores de forcing y axiomas independientes como matemáticos*: el método del forcing los incorporó al cuerpo formalista matemático como problemas de *consistencia*. Este fenómeno estudiado de manera crítica desde la Historia y la Filosofía de la Matemática implica una modificación en la concepción de las matemáticas, imagen del conocimiento, que a su vez implicó una modificación en el cuerpo del conocimiento (imagen y cuerpo del conocimiento en la acepción de Corry). Estos problemas de indepencia se convirtieron en el más importante acceso a una ampliación de los problemas matemáticos.

5 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

[1] Joan Bagaria. La teoría de conjuntos. *La gaceta de la RSME*, 14(2):1–20, 2012.

[24] *Of course, the main body of mathematics, as expressed by Arkhangel'skii, continues to consist of "absolute'.'results; these are the results that are obtained from the usual axioms of set theory, that is, results in* ***ZFC***

[2] Hakob Barseghyan. *The laws of scientific change*. Springer, Cham, 2015.

[3] G. Buchdahl. A revolution in historiography of science. *History of Science*, 4:55, 1965.

[4] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis i. *Proceedings of the London Mathematical Society U.S.A.*, 50:1143–1148, 1963.

[5] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis ii. *Proceedings of the London Mathematical Society U.S.A.*, 51:105–110, 1964.

[6] Leo Corry. The kuhnian agenda and the history of mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*, 24:95–117, 1993.

[7] Leo Corry. The kuhnian agenda and the history of mathematics, 1995. `http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/paradigms.pdf`[Web. 3 de Junio 2016].

[8] Leo Corry. Paradigms and images in the history of mathematics. In E. Ausejo and M. Hormigon, editors, *Paradigms and Mathematics*, pages 169–192. Siglo XXI, 1996.

[9] Michael J. Crowe. Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics. *Historia Mathematica*, 2, 1975.

[10] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, 1 edition, 5 1977.

[11] Leon Horsten. Philosophy of mathematics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2016 edition, 2016.

[12] Karel Hrbacek and Thomas Jech. *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Expanded (Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics)*. Marcel Dekker, 3 edition, 1999.

[13] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*. Springer, 1994.

[14] Thomas S. Kuhn. *The Structure of Scientific Rvolutions*. University of Chicago Press, 2nd edition, 1970.

[15] Kenneth Kunen. *Set Theory An Introduction To Independence Proofs (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).* North Holland, 12 1983.

[16] Kenneth Kunen. *Set Theory.* Number 34. College Publications, 2009.

[17] I. Lakatos and A. Musgrave. *Criticism and the Growth of Knowledge: Volume 4: Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965.* Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965. Cambridge University Press, 1970.

[18] Imre Lakatos. *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery (Cambridge Philosophy Classics).* Cambridge University Press, reissue edition, 10 2015.

[19] V.I. Malykhin. New methods in general topology connected with forcing. *Russian Math. Surveys*, 43:4:95–110, 1988.

[20] Herbert Mehrtens. T.s. kuhn's theories and mathematics: A discussion paper on the "new historiography" of mathematics. *Historia Mathematica*, 3:297–320, 1976.

[21] Michael Potter. *Set Theory and Its Philosophy: A Critical Introduction.* Oxford University Press Inc., 1 edition, 2004.

[22] Ernest Schimmerling. *A Course on Set Theory.* Cambridge University Press, 1 edition, 8 2011.

[23] Alan Weir. Formalism in the philosophy of mathematics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Spring 2015 edition, 2015.

[24] Fernando Zalamea. Javier de lorenzo: por una filosofía dinámica de la praxis matemática. *Mathesis*, II(I):1–35, 1964.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

eapmat@yandex.com

Modelación Matemática

Matemáticas y sus aplicaciones 20, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-09-5

Capítulo 3

Implementación computacional de métodos de integración numérica: Punto medio, del trapecio, Simpson 1/3 y 3/8

Claudio Lazcano Morales[1], José Julio Conde Mones[1], Carlos Arturo Hernández Gracidas[2], Félix Augusto Aquino Camacho[3], José Jacobo Oliveros Oliveros[1].

[1]FCFM-BUAP, [2]CONACYT-FCFM-BUAP
[3]Escuela Preparatoria "Alfonso Calderón Moreno", BUAP

Resumen

En este trabajo, se presentan elementos básicos de la teoría de integración y se proporcionan ejemplos en los que se aplican los métodos del Punto Medio, del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8, de los cuales se incluyen sus códigos en MATLAB. Los resultados numéricos muestran la eficiencia y factibilidad de cada uno de los métodos de integración estudiados.

Introducción

Existen métodos analíticos y numéricos para integrar una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Los Métodos de Integración Numérica (MIN) o *cuadraturas* son aplicados cuando es imposible el cálculo exacto de su integral aplicando los métodos analíticos de integración o cuando se tienen datos tabulados en algunos puntos del dominio de una función. Así, un MIN es un procedimiento que permite hallar un valor numérico aproximado a la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ ([5]). Cabe mencionar que los MIN se aplican tanto para funciones definidas en intervalos cerrados ($[a, b]$) y abiertos (a, b) ([2], [13], [20]), como para funciones definidas en regiones bidimensionales o tridimensionales con una

geometría regular o irregular ([6], [7], [22]) que tiene aplicación en la solución de problemas directos e inversos ([12]). Muchos de estos problemas de aplicación de la ciencia e ingeniería están descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales con condiciones de frontera y/o iniciales ([3], [9], [19]). Entre los métodos numéricos más usados para resolver ecuaciones diferenciales está el Método de Elemento Finito (MEF), el cual hace uso de los MIN ([4]).

Por otro lado, en los problemas de aplicación, muy frecuentemente se cuenta con un número finito de datos, registrados por algún instrumento de medición sobre la frontera o exterior de la región de estudio. La imposibilidad de medir en más puntos puede deberse al alto costo o a que la tecnología existente hasta el momento no permite tomar mediciones en más puntos de la frontera de un medio inaccesible. Por ejemplo, al realizar el registro de un electroencefalograma, los electrodos se posicionan sobre el cuero cabelludo de acuerdo al sistema internacional 10-20 ([1], [18]). Ahora, cuando se tiene un número finito de datos o mediciones tabuladas de una función desconocida, que representa algún fenómeno de estudio, se pueden aplicar métodos de interpolación para poder tener valores aproximados de la función en puntos donde no se conoce su valor, y de esta forma aplicar un MIN si se desea calcular su integral ([8], [24]).

Como se había mencionado antes, algunas funciones no tienen antiderivada o primitiva elemental, por lo que resulta imposible el cálculo exacto de su integral aplicando los métodos analíticos, por lo cual los MIN son una herramienta útil para aproximar la integral definida de este tipo de funciones. Los MIN también permiten calcular una aproximación numérica de una antiderivada de una función f a través del Primer Teorema Fundamental del Cálculo: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, donde la integral es en sentido de Riemann ([21]). Cabe mencionar que existen otros tipos de integrales como la Lebesgue y la Henstock-Kurzweil ([23]). Hay funciones que son Lebesgue integrables pero no Riemann integrables. Por ejemplo, la función de Dirichlet que vale 0 en los irracionales y 1 en los racionales, definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$, es Lebesgue integrable, pero no es Riemann integrable ([20]). Por otra parte, la función definida a través de $f(x) = \frac{1}{x} sen(\frac{1}{x})$ en $(0, 1]$ y 0 en $x = 0$, es Henstock-Kurzweil integrable, pero no es ni Lebesgue, ni Riemann integrable, este tema es motivo de investigación reciente. En [14] se utiliza el MEF

para encontrar la solución numérica de un problema elíptico con funciones integrables de Henstock-Kurzweil, en donde se aplican algunos métodos de cuadratura como la Trapezoidal adaptativa y la de Lobatto para integrar funciones que son altamente oscilantes en sentido de Henstock-Kurzweil en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Este artículo está enfocado a presentar los MIN del Punto Medio, del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8, además de la implementación de estas en MATLAB para funciones continuas $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sin embargo, las cuadraturas presentadas en este trabajo no siempre funcionan para otro tipo de funciones, como por ejemplo para la función Henstock-Kurzweil integrable mencionada arriba, la cual es altamente oscilante y no acotada; en este caso, puede aplicarse una cuadratura Trapezoidal con una malla adaptativa para el intervalo de integración ([14], [25]).

1 Integrales no elementales: Funciones sin primitiva elemental

Una función es llamada elemental si puede ser expresada mediante un número finito de sumas, restas, productos, cocientes o composiciones de funciones potencias, radicales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas. También se dice que una función $y = f(x)$ tiene una antiderivada o primitiva si existe una función $g(x)$ tal que su derivada $g'(x) = f(x)$. La integral indefinida g de la función f (la cual pertenece a una clase de funciones antiderivadas G), se denota por el símbolo $\int f(x)dx$. Nótese que los elementos de G son primitivas de la forma $g(x) + c$, donde c es una constante real. En este sentido, se dice que una función no tiene integral elemental si su primitiva, si existe, no es posible expresarla como combinación de funciones elementales.

Sabemos que, si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces es Riemann integrable. De esto, surge la siguiente pregunta: *¿Los métodos de integración que se aprenden en el curso de Cálculo Integral (a nivel medio superior o superior) bastan para integrar toda función continua?* La respuesta parece ser "sí", pues en los cursos, después de varios cálculos algebraicos, siempre se llega a una integral indefinida $g(x) = \int f(x)dx$, la cual permite calcular la integral definida de la función f en un intervalo $[a, b]$ aplicando

el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo: $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$. Sin embargo, existen funciones que no tienen primitiva elemental, una de ellas es la función campana de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \tag{1}$$

cuya integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx,$$

no se puede expresar en términos de funciones elementales ([11]). De hecho, la mayoría de las funciones elementales no tienen integrales elementales, y una forma de calcularlas numéricamente es a través del Primer Teorema Fundamental del Cálculo ([21]). Para mayor información sobre las integrales no elementales véase [11] y [17].

2 Integración aproximada

Para funciones como la campana de Gauss, dada en (1), que no tiene integral elemental, se hace uso de los MIN para obtener aproximaciones de sus integrales definidas. Las fórmulas de Newton-Cotes son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de interpolación que es fácil de integrar ([5]). La interpolación consiste en, dado un conjunto de datos, hallar una función de cierta clase que pase por ese conjunto de datos. Las clases más comunes son los polinomios y las funciones continuas. Como se mencionó en la Introducción, en las aplicaciones de la ciencia e ingeniería se busca estudiar distintos fenómenos, acerca de los cuales se tiene un primer conocimiento por medio de mediciones. Estas mediciones, a su vez, son representadas por funciones, cuyas gráficas son punteadas (porque tenemos un número finito de mediciones). Así, surge la pregunta, ¿cómo conocer la función f que describe completamente el fenómeno?, o bien, ¿cómo se genera una función alternativa g que interpole los datos obtenidos y sea lo más parecida a f? De conseguir g, se puede obtener conocimiento en lugares donde no se ha podido medir, pero surgen distintas cuestiones matemáticas básicas, como son: la existencia y unicidad de g, las clases de funciones en las que se interpolará (polinómica, exponencial, trigonométrica, etc.). Si se considera que g es un polinomio de

grado menor o igual que n, entonces se está hablando de interpolación polinómica y en este caso existe un polinomio que aproxima a la función continua f con la precisión deseada, lo cual está garantizado por el siguiente teorema ([10], [13]).

Teorema 2.1. ***Aproximación de Weierstrass.*** *Dada f continua en $[a, b]$, para todo $\epsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $\forall x \in [a, b] : |f(x) - P(x)| < \epsilon$.*

A pesar de su gran valor teórico, el teorema anterior no brinda un método para calcular P, por lo que se recurre a distintos métodos que permiten construir polinomios de aproximación.
A partir de los polinomios de aproximación, cuyas integrales pueden calcularse fácilmente, se pueden obtener aproximaciones de la integral de una función. Esta es una estrategia de integración utilizada para deducir las construcciones de los MIN de Simpson 1/3 y 3/8. Otra estrategia consiste en aproximar la integral mediante la suma finita de áreas de polígonos. Esta última estrategia es utilizada para deducir las construcciones de los MIN del Punto Medio y del Trapecio. Estos cuatro MIN se presentan en la siguiente sección ([2], [5], [10], [13] [21]), así como su implementación en MATLAB.

Para determinar qué tan cerca está la integral exacta de una integral aproximada se calcula el Error Absoluto (EA) y Error Relativo (ER) como se muestra en las siguientes definiciones.

Definición 2.2. Sean $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y A_n el número dado por cualquier método de aproximación a la integral definida de f en el paso n. Se define el error absoluto EA_{A_n} como

$$EA_{A_n} = \left| \int_a^b f(x)dx \ - \ A_n \right|.$$

Definición 2.3. Sean $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y A_n el número dado por cualquier método de aproximación a la integral definida de f en el paso n y AE_{A_n} el error absoluto de A_n. Se define el error relativo ER_{A_n} como

$$ER_{A_n} = \left| \frac{EA_{A_n}}{\int_a^b f(x)dx} \right| .$$

En ambas definiciones se menciona *el paso* n, lo cual significa que el método numérico de integración considera n subintervalos en su aproximación ([2], [13]). Ahora, EA_{A_n} nos indica la separación que hay del valor exacto con el aproximado y aquí hay que realizar dos observaciones, la primera es que la aproximación puede ser mayor o menor que el valor exacto; en cambio, si únicamente nos interesa la distancia entre ambos, se considera el valor absoluto, que se denomina *error de aproximación*. La segunda observación está relacionada con el hecho, de que el error de aproximación solo podrá ser conocido cuando la integral definida se pueda calcular de forma exacta, mientras que el ER_{A_n} tiene el objetivo de indicar la cantidad de error respecto al valor exacto. Observe que si se multiplica ER_{A_n} por 100 entonces se obtiene el porcentaje del error y en la literatura en ocasiones lleva el nombre de *error relativo porcentual* o simplemente *error porcentual*. Para conocer más acerca de los tipos de errores se recomienda consultar las referencias [1], [5] y [16].

Respecto al EA, si denotamos la integral aproximada de los métodos del Punto Medio, del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8 compuestos por M_n, T_n, $S3_n$ y $S8_n$ en el paso n, respectivamente, entonces para una malla uniforme de longitud h en el intervalo $[a, b]$, se enuncian los teoremas que garantizan la convergencia y la velocidad de convergencia de los métodos ([2], [10], [21]).

Teorema 2.4. *Suponga que* $|f''(x)| \leq K$ *para* $K \in \mathbb{R}$ *y* $x \in [a, b]$. *Si* EA_{M_n} *denota el error absoluto del Método del Punto Medio, entonces la cota de error es de la forma*

$$EA_{M_n} \leq \frac{K(b-a)}{24} h^2.$$

Teorema 2.5. *Suponga que* $|f''(x)| \leq K$ *para* $K \in \mathbb{R}$ *y* $x \in [a, b]$. *Si* EA_{T_n} *denota el error absoluto del Método del Trapecio, entonces la cota de error está dada por*

$$EA_{T_n} \leq \frac{K(b-a)}{12} h^2.$$

Teorema 2.6. *Suponga que* $|f^{(4)}(x)| \leq K$ *para* $K \in \mathbb{R}$ *y* $x \in [a, b]$. *Si* EA_{S3_n} *y* EA_{S8_n} *denotan el error cometido por el Método de Simpson 1/3 Compuesto y el Método de Simpson 3/8 Compuesto, respectivamente, entonces las cotas de error están dadas por*

$$EA_{S3_n} \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4 \quad y \quad EA_{S8_n} \leq \frac{K(b-a)}{80} h^4.$$

3 Construcción de los Métodos de Integración Numérica

Método del Punto Medio

Este método consiste en aproximar la integral definida de f por medio de una cuadratura que es la suma finita de áreas (positivas y/o negativas) de rectángulos, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)h_i, \tag{2}$$

donde n es el número de subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ en que es dividido $[a, b]$ y h_i es la longitud de cada uno de estos, para $i = 1, 2, .., n$. Cuando h es constante, se dice que se tiene una malla uniforme del intervalo $[a, b]$. El desarrollo de este método es un caso particular del concepto con el que se construye la integral definida, las *sumas de Riemann* ([20], [21]). La construcción del Método del Punto Medio para una malla uniforme del intervalo $[a, b]$ se desarrolla a continuación.

Construcción 3.1. Sea f una función continua en $[a, b]$ y n el número de subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de $[a, b]$, cada uno de longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Consideremos la partición de $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h,\ \dots,\ x_{n-1} = a+(n-1)h,\ x_n = b\} \tag{3}$$

y la selección $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ dada por

$$\mathcal{A} = \left\{\xi_1 = \frac{x_0 + x_1}{2},\ \xi_2 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \dots,\ \xi_n = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right\},$$

es decir, ξ_i es el punto medio entre x_{i-1} y x_i. Ahora bien, observe que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(\xi_i)$ y h son la altura y la base de un rectángulo. De esta manera, se forman n rectángulos, cuya suma de áreas da la cuadratura que aproxima a la integral definida ([2]). Esto se ilustra en la Figura 1.

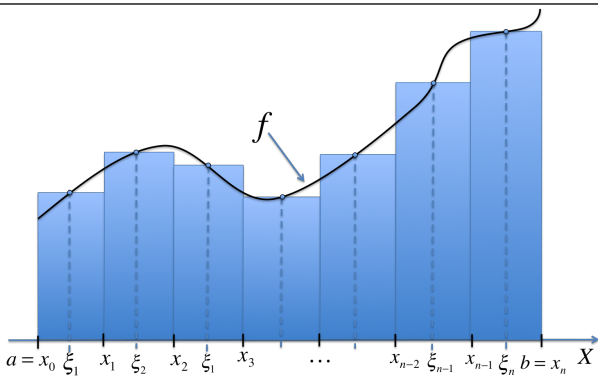


Figura 1: Ilustración del Método del Punto Medio.

Finalmente, el Método del Punto Medio para una malla uniforme del intervalo $[a, b]$ está dado por la expresión (2) con $h_i = \frac{b-a}{n}$.

Método del Trapecio

El Método del Trapecio se asemeja al Método del Punto Medio, pero en este caso se aproxima a la integral definida de f por medio de una cuadratura basada en la suma finita de áreas de trapecios, como se muestra en la Figura 2. Para una malla uniforme del intervalo $[a, b]$ su expresión está dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\Big). \tag{4}$$

Veamos su construcción.

Construcción 3.2. Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, el cual se divide en n subintervalos, cada uno de longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Consideremos la partición $\mathcal{P}$ dada por (3). Para cada $i = 1, ..., n$ se construye el trapecio con los dos puntos $p_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $p_i = (x_i, f(x_i))$ (ver la Figura 2) cuya área está dada por

$$A_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}h, \tag{5}$$

y como es para cada $i = 1, ..., n$ entonces se obtienen n áreas

$$A_{T_1} = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}h,\ A_{T_2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}h,\ \dots, A_{T_n} = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}h.$$

Sumando estas áreas, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} A_{T_i} &= \frac{h}{2}\Big(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\Big)\\ &= \frac{h}{2}\Big(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+f(x_n)\Big)\\ &= \frac{h}{2}\Big(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\Big).\end{aligned}$$

Así, se obtiene el resultado (4).

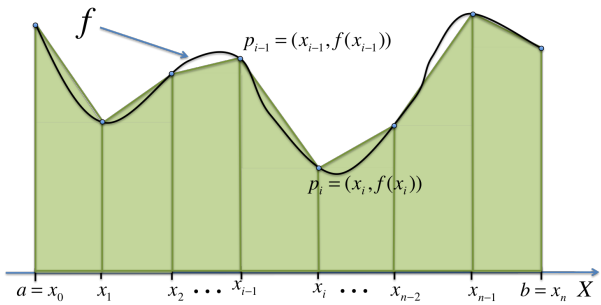


Figura 2: Ilustración del Método del Trapecio.

Método de Simpson 1/3

Los métodos de Simpson 1/3 simple y compuesto, aproximan a la integral de la función f por una cuadratura basada en la suma finita de integrales de funciones polinomiales de grado 2. A continuación se muestra la construcción detallada de cada cuadratura.

Forma simple

El Método de Simpson 1/3 simple, para una malla uniforme formada por tres puntos $\mathcal{P}_s = \{x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = b\}$ del intervalo $[a,b]$, está dado por

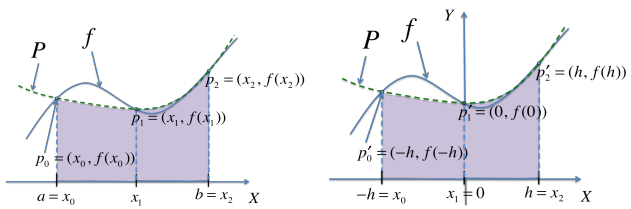
$$\int_a^b f(x)dx \ \approx\ \frac{h}{3}\Big(f(a)+4f(a+h)+f(b)\Big), \tag{6}$$

donde $h = \frac{b-a}{2}$. En seguida se muestra su construcción.

Construcción 3.3. Considere la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Note que a y b son los límites de integración. Se divide $[a, b]$ en $n = 2$ subintervalos, cada uno con la misma longitud, la cual está dada por $h = \frac{b-a}{2}$. En este caso, la partición de $[a, b]$ es: $\mathcal{P}_s = \{x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = b\}$. Luego, se consideran los tres puntos

$$\begin{aligned} p_0 &= \big(x_0, f(x_0)\big), \\ p_1 &= \big(x_1, f(x_1)\big), \\ p_2 &= \big(x_2, f(x_2)\big). \end{aligned}$$

por los cuales se hace pasar una función polinomial P de grado 2, como muestra la Figura 3.3(a).



((a)) G_f original. ((b)) G_f trasladada.

Figura 3: a) Ilustración del Método de Simpson 1/3 simple. b) Traslado de la gráfica G_f.

Denotemos por G_f a la gráfica de la función f. Para facilitar los cálculos posteriores, se recorre G_f de tal manera que $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x_2 = h$, tal como se muestra en la Figura 3.3(b). Esto es posible, ya que las áreas son las mismas. En este caso, se definen los puntos:

$$\begin{aligned} p\prime_0 &= \big(-h, f(-h)\big), \\ p\prime_1 &= \big(0, f(0)\big), \\ p\prime_2 &= \big(h, f(h)\big). \end{aligned}$$

Ahora se procede a encontrar la función P. Para ello, se necesita que P pase por $p\prime_0,\ p\prime_1\ y\ p\prime_2$, es decir,

$$\begin{aligned} P(-h) &= f(x_0), \\ P(0) &= f(x_1), \\ P(h) &= f(x_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Luego, la forma general del polinomio es $P(x) = Ax^2+Bx+C$ con $A,\ B\ y\ C \in \mathbb{R}$ y $A \neq 0$. De (7) se encuentra el sistema de tres ecuaciones lineales con 3 incógnitas,

$$\begin{aligned} Ah^2 - Bh + C &= f(x_0), \\ C \qquad &= f(x_1), \\ Ah^2 + Bh + C &= f(x_2), \end{aligned}$$

cuya solución está dada por

$$A = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{2h^2}, \quad B = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} \quad y \quad C = f(x_1). \tag{8}$$

Integrando el polinomio P y haciendo uso del segundo Teorema Fundamental del Cálculo

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} P(x)dx &= \int_{-h}^{h} \big(Ax^2 + Bx + C\big)dx = \Big(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\Big)\Big|_{-h}^{h} \\ &= \Big(A\frac{h^3}{3} + B\frac{h^2}{2} + Ch\Big) - \Big(A\frac{(-h)^3}{3} + B\frac{(-h)^2}{2} + C(-h)\Big) \\ &= A\frac{h^3}{3} + B\frac{h^2}{2} + Ch + A\frac{h^3}{3} - B\frac{h^2}{2} + Ch \\ &= 2A\frac{h^3}{3} + 2Ch, \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{-h}^{h} P(x)dx = \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch. \tag{9}$$

Sustituyendo los valores de (8) en (9) se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} P(x)dx &= \frac{2}{3}\Big(\frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{2h^2}\Big)h^3 + 2f(x_1)h \\ &= \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{3} + \frac{6f(x_1)h}{3} \\ &= \frac{1}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big). \end{aligned} \tag{10}$$

Regresando a las variables originales, se halla

$$\begin{aligned}\int_a^b P(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} P(x)dx \\ &= \int_{-h}^{h} P(x)dx \\ &= \frac{1}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(f(a) + 4f(a+h) + f(b)\Big).\end{aligned}$$

Finalmente, el Método de Simpson 1/3 simple indica

$$\int_a^b f(x)dx \;\approx\; \int_{-h}^{h} P(x)dx = \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f(a+h) + f(b)\Big),$$

con lo que se verifica (6).

Forma compuesta

Considere la forma simple del Método de Simpson 1/3 y suponga ahora que el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos con $n > 2$ y par. Para construir el Método de Simpson 1/3 compuesto, la idea es aplicar $\frac{n}{2}$ veces la forma simple, de la cual ya se conoce una cuadratura. Esto se muestra en la Figura 4.

El Método de Simpson 1/3 compuesto en una malla uniforme del intervalo $[a, b]$ está dado por la expresión

$$\int_a^b f(x)dx \;\approx\; \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) + f(b)\Big), \qquad (11)$$

donde, como se comentó anteriormente, $n > 2$ y par. Observe con detalle la construcción.

Construcción 3.4. Sean f una función continua en $[a, b]$ y $k \in \mathbb{N} - \{1\}$. $n = 2k$ es el número de subintervalos de $[a, b]$ con longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Consideremos

la partición $\mathcal{P}_c = \{x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h,\ \dots\ ,\ x_n = b\}$. Ahora, por las propiedades de la integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx.$$

Aplicando el Método de Simpson 1/3 simple en cada uno de los sumandos del lado derecho de la igualdad anterior se tiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_1(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} P_2(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} P_{\frac{n}{2}}(x)dx,$$

donde P_i, para $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$, son las funciones polinomiales de grado 2 del Método de Simpson 1/3 simple. De la igualdad anterior y (10) se halla

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_2} P_1(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} P_2(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} P_{\frac{n}{2}}(x)dx \\
&= \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big) + \frac{h}{3}\Big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big) + \dots \\
&+ \frac{h}{3}\Big(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big) \\
&= \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2}) + \\
&4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big) \\
&= \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + \\
&4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big) \\
&= \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4\Big[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})\Big] + 2\Big[f(x_2) + f(x_4) + \dots \\
&+ f(x_{n-2})\Big] + f(b)\Big).
\end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) = f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})$$

y

$$\sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) = f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2}),$$

de donde se llega a que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) + f(b)\Big),$$

que es el resultado indicado en (11).

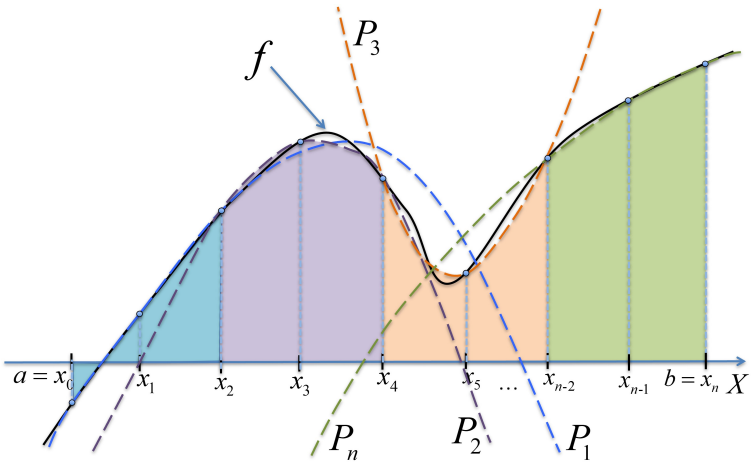


Figura 4: Ilustración del Método de Simpson 1/3 compuesto.

Método de Simpson 3/8

Para este método también tendremos la forma simple y compuesta, cada una sigue la misma estrategia que se aplica en el Método de Simpson 1/3, pues la integral definida se aproxima a una cuadratura basada en la suma finita de integrales de funciones polinomiales de grado 3. En este caso, se presenta un esbozo de las construcciones, pues cada una es análoga a las dadas en el método presentado anteriormente.

Forma simple

El método indica

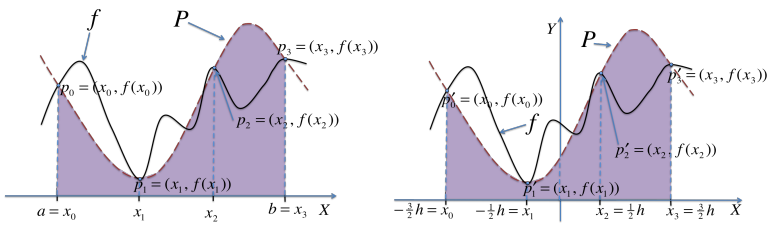
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\Big(f(a)+3f(a+h)+3f(a+2h)+f(b)\Big). \tag{12}$$

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$, el cual se divide en 3 subintervalos con la misma longitud $h=\frac{b-a}{3}$, como se muestra en la Figura 3.5(a). Consideremos la partición $\mathcal{P}_s=\{x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=a+2h,\ x_3=b\}$. Por los puntos

$$\begin{aligned} p_0 &= (x_0, f(x_0)),\\ p_1 &= (x_1, f(x_1)),\\ p_2 &= (x_2, f(x_2)),\\ p_3 &= (x_3, f(x_3)). \end{aligned}$$

se hace pasar una función polinomial de grado 3, es decir, $P(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Ahora, se aplica una traslación de la función, como se muestra en la Figura 3.5(b), para simplificar los cálculos posteriores. Sean

$$\begin{aligned} P\Big(-\frac{3}{2}h\Big) &= f(x_0),\\ P\Big(-\frac{1}{2}h\Big) &= f(x_1),\\ P\Big(\frac{1}{2}h\Big) &= f(x_2),\\ P\Big(\frac{3}{2}h\Big) &= f(x_3), \end{aligned}$$



((a)) Gráfica de f original. ((b)) Gráfica de f trasladada.

Figura 5: a) Ilustración del Método de Simpson 3/8 simple. b) Traslado de la gráfica G_f.

de lo cual resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales de 4×4

$$\begin{aligned} A\Big(-\frac{3}{2}h\Big)^3 - B\Big(-\frac{3}{2}h\Big)^2 + C\Big(-\frac{3}{2}h\Big) + D &= f(x_0), \\ A\Big(-\frac{1}{2}h\Big)^3 - B\Big(-\frac{1}{2}h\Big)^2 + C\Big(-\frac{1}{2}h\Big) + D &= f(x_0), \\ A\Big(\frac{1}{2}h\Big)^3 - B\Big(\frac{1}{2}h\Big)^2 + C\Big(\frac{1}{2}h\Big) + D &= f(x_0), \\ A\Big(\frac{3}{2}h\Big)^3 - B\Big(\frac{3}{2}h\Big)^2 + C\Big(\frac{3}{2}h\Big) + D &= f(x_0), \end{aligned} \tag{13}$$

de cuya solución hallamos

$$\int_{-\frac{3}{2}h}^{\frac{3}{2}h} P(x)dx \;=\; \frac{9Bh^3 + 12Dh}{4} = \frac{3h}{8}\Big(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\Big), \tag{14}$$

que corresponde al Método de Simpson 3/8 simple dado en (12).

Forma compuesta

En el Método de Simpson 3/8 compuesto se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx \;\approx\; \frac{3h}{8}\Big(f(a)+3\sum_{i=0}^{(n-3)/3} f(x_{3i+1})+3\sum_{i=0}^{(n-3)/3} f(x_{3i+2})+2\sum_{i=1}^{(n-3)/3} f(x_{3i})+f(b)\Big), \tag{15}$$

cuya deducción es también análoga a la forma compuesta de Simpson 1/3. En este caso, el número de subintervalos n tiene que ser un múltiplo de 3, es decir, $n = 3k$ para algún $k \in \mathbb{N} - \{1\}$, cada uno de longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Consideremos la partición es $\mathcal{P}_c = \{x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots\ ,\ x_n = b\}$. Ahora bien, se puede ver que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx.$$

Si en cada uno de estos sumandos aplicamos el Método de Simpson 3/8 simple, se obtiene la aproximación mostrada en (15). Para hallar este resultado se realizan cálculos análogos a la Sección 3. En la Figura 6, se ilustra este método aplicando el método simple en los subintervalos del mismo color.

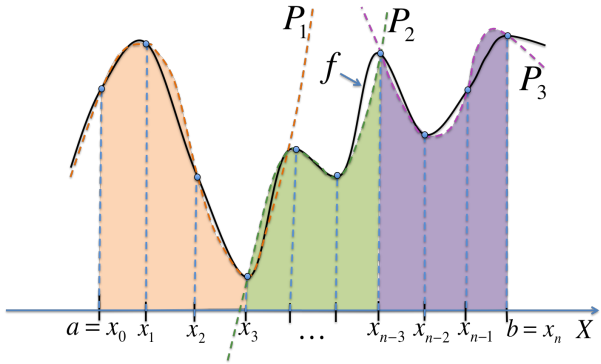


Figura 6: Ilustración del Método de Simpson 3/8 compuesto.

4 Implementación computacional de los Métodos de Integración Numérica

En esta sección se muestra el código fuente MATLAB ([15]) correspondiente a los cuatro métodos mencionados en este trabajo. Cada programa tiene en la parte final una sección donde se pueden calcular los errores absoluto, relativo y porcentual siempre que se conozca el valor exacto de la integral. También pueden utilizarse estos errores para conocer qué tan cerca se está de otras aproximaciones. Estos programas se pueden descargar en la siguiente liga: `https://github.com/JoseJulioCondeMones/Programas-de-integracion`, los cuales son utilizados en la Sección 5.

```
%%%%%%%%——— PRIMER PROGRAMA: METODO DEL PUNTO MEDIO %%%%%%%%

fprintf('\n "INTEGRACION NUMERICA POR EL METODO DEL PUNTO MEDIO"\n\n');

Exp_f = input('Ingrese la funcion:    f(x) = ','s');
f = inline(Exp_f);

a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo:    a = ');
b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo:    b = ');

while a > b
    fprintf('\n     NOTA: Recuerde que a tiene que ser menor que b.\n\n');
    a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo:    a = ');
    b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo:    b = ');
end
```

```
fprintf('Escriba el numero de subintervalos para [%d,%d]:   n = ',a,b);
n = input(' ');

h = (b-a)/n;
x = a:h:b;
suma = 0;

for i=1:n
    punto_medio = ( x(i)+x(i+1) )/2;
    altura = feval(f,punto_medio);
    suma = suma+(h*altura);
end

int_aprox_f = suma;

fprintf('\n Considerando %d subintervalos, la longitud de la malla regular
        es h = %4.5f \n',n,h);
fprintf('\n La integral aproximada de la funcion f en [%d,%d] es: %4.10f
        \n\n',a,b,  int_aprox_f);

E=input('Si quiere calcular el error, ingrese "1", de lo contrario,
        ingrese cualquier otro numero: ');

if E == 1
    fprintf('\n Si existe la integral exacta de f(x) en [%d,%d] puedes
         calcular los errores cometidos en este Metodo Numerico.\n',a,b);

    integral_exacta = input('Ingrese el valor de la Integral Exacta:
                            Integral_Exacta = ');

    Error_Absoluto = abs(integral_exacta - int_aprox_f);
    Error_Relativo = Error_Absoluto / abs(integral_exacta);
    Error_Porcentual = Error_Relativo*100;

    fprintf('\n El error cometido por el Metodo de Riemann es: \n');
    fprintf('        ERROR ABSOLUTO  = %4.10f \n',Error_Absoluto);
    fprintf('        ERROR RELATIVO  = %4.10f \n',Error_Relativo);
    fprintf('       ERROR PORCENTUAL = %4.10f por ciento \n',Error_Porcentual);
end


%%%%%%%%%------ SEGUNDO PROGRAMA: METODO DEL TRAPECIO %%%%%%%%%

fprintf('\n "INTEGRACION NUMERICA POR EL METODO DEL  TRAPECIO"\n\n');

Exp_f = input('Ingrese la funcion a integrar f(x): ','s');

a = input('Escriba el valor del extremo izquierdo del intervalo "a":     ');
b = input('Escriba el valor del extremo derecho del intervalo "b":     ');

while a > b
fprintf('\n Advertencia: El valor de "a" tiene que ser menor que "b".\n\n');
a = input('Escriba otra vez el valor del extremo izquierdo del intervalo
"a": ');
b = input('Escriba otra vez el valor del extremo derecho del intervalo "b": ');
end
```

```
n = input('Escriba el numero "n" de subintervalos para [a,b]:  ');

while n < 1
    fprintf('\n Advertencia: El valor de "n" debe ser mayor que cero.\n\n');
    n = input('Escriba nuevamente el numero "n" de subintervalos para [a,b]:
');
end

h = (b-a)/n;
x_i = a:h:b;

fprintf('\n Considerando %d subintervalos, la longitud de la malla regular es
        h= %4.10f \n',n,h);

Suma = 0;
Suma = Suma + feval(f,x_i(1))*h/2; % donde h=(b-a)/n.

for i = 2:n
    Suma = Suma + feval(f,x_i(i))*h; % donde h=(b-a)/n.
end

Suma = Suma + feval(f,x_i(n+1))*h/2; % donde h=(b-a)/n.
int_aprox_f = Suma;

fprintf('\n La integral aproximada de la funcion f en [%d,%d] es: %4.10f
    \n\n', a, b, int_aprox_f);

E = input('Si quiere calcular el error, ingrese
"1", de lo contrario, ingrese cualquier otro numero: ');
if E == 1
fprintf('\n Si existe la integral exacta de f(x) en [%d,%d] puedes calcular
los errores  cometidos en este Metodo Numerico.\n',a,b);

integral_exacta=input('Ingrese el valor de la Integral
Exacta: Integral Exacta= ');

Error_Absoluto = abs( integral_exacta - int_aprox_f);
Error_Relativo = Error_Absoluto / abs(integral_exacta);
Error_Porcentual = Error_Relativo*100;

fprintf('\n El error cometido por el Metodo del Trapecio es: \n');
fprintf('        ERROR ABSOLUTO  = %4.10f \n',Error_Absoluto);
fprintf('        ERROR RELATIVO  = %4.10f \n',Error_Relativo);
fprintf('       ERROR PORCENTUAL = %4.10f por ciento \n',Error_Porcentual);
end


%%%%%%%%%------  TERCER PROGRAMA: METODO DE SIMPSON 1/3  %%%%%%%%%

fprintf('\n "INTEGRACION NUMERICA POR EL METODO DE SIMPSON 1/3"\n\n');

Exp_f = input('Ingrese la funcion:   f(x) = ','s');
f = inline(Exp_f);

a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo:   a = ');
```

```
b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo:   b = ');

while a > b
    fprintf('\n NOTA: Recuerde que a tiene que ser menor que b.\n\n');
    a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo:   a = ');
    b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo:   b = ');
end

fprintf('Escriba el numero par de subintervalos para [%d,%d]:   n = ',a,b);
n = input(' ');
m = mod(n,2);

while m == 1
    fprintf('\n NOTA: Recuerde que n debe ser par.\n\n');
    fprintf('Escriba nuevamente el numero n de subintervalos para
        [%d,%d]: n = ',a,b);
    n = input(' ');
    m = mod(n,2);
end

h = (b-a)/n;
y = a:h:b;

if n == 2
    int_aprox_f = (h/3)*(feval(f,y(1))+4*feval(f,y(2))+feval(f,y(3)));
    else
        alpha = 0;
        betha = 0;
        for i = 1:(n/2);
            alpha = alpha+feval(f,y(2*i));
        end
        for i = 1:((n-2)/2);
            betha = betha+feval(f,y(2*i+1));
        end
        int_aprox_f = (h/3)*(feval(f,y(1))+4*alpha+2*betha+feval(f,y(n+1)));
end

fprintf('\n Considerando %d subintervalos, la longitud de cada uno es
    h = %4.10f \n',n,h);
fprintf('\n La integral aproximada de la funcion f(x) en [%d,%d] es: %4.10f
    \n\n',a,b, int_aprox_f);

E = input('Si quiere calcular el error, ingrese "1", de lo contrario ingrese
    cualquier otro numero: ');

if E == 1
fprintf('\n Si existe la integral exacta de f(x) en [%d,%d] puedes calcular
        los errores cometidos en este Metodo Numerico.\n',a,b);

integral_exacta = input('Ingrese el valor de la Integral Exacta: Integral
                Exacta = ');

Error_Absoluto = abs( integral_exacta - int_aprox_f);
Error_Relativo = Error_Absoluto / abs(integral_exacta);
Error_Porcentual = Error_Relativo*100;
```

```
fprintf('\n El error cometido por el Metodo del Trapecio es: \n');
fprintf('        ERROR ABSOLUTO  = %4.10f \n',Error_Absoluto);
fprintf('        ERROR RELATIVO  = %4.10f \n',Error_Relativo);
fprintf('       ERROR PORCENTUAL = %4.10f por ciento \n',Error_Porcentual);
end


%%%%%%%%%——— CUARTO PROGRAMA: METODO DE SIMPSON 3/8 %%%%%%%%%

fprintf('\n "INTEGRACION NUMERICA POR EL METODO DE SIMPSON 3/8""\n\n');

Exp_f = input('Ingrese la funcion:   f(x) = ','s');
f = inline(Exp_f);

a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo:   a = ');
b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo:   b = ');

while a > b
    fprintf('\n NOTA: Recuerde que a tiene que ser menor que b.\n\n');
    a = input('Ingrese el valor del extremo izquierdo del intervalo:   a = ');
    b = input('Ingrese el valor del extremo derecho del intervalo:   b = ');
end

fprintf('Escriba el numero multiplo de 3 de subintervalos para [%d,%d]:
        n = ',a,b);
n = input(' ');
m = mod(n,3);

while m ~= 0
    fprintf('\n NOTA: Recuerde que "n" tiene que ser multiplo de 3.\n\n');
    n = input('Escriba nuevamente el numero n de subintervalos para
    [a,b]: ');
    m = mod(n,3);
end

h = (b-a)/n;
y = a:h:b;

if n == 3
    int_aprox_f = ((3*h)/8)*(feval(f,y(1))+3*feval(f,y(2))+3*feval(f,y(3))+
                  feval(f,y(4)));\line\break
    else
        alpha = 0;
        betha = 0;
        gamma = 0;
        for i = 1:n/3;
            alpha = alpha+feval(f,y((3*i)-1));
        end
        for i = 1:n/3;
            betha = betha+feval(f,y(3*i));
        end
        for i = 1:(n-3)/3;
            gamma = gamma+feval(f,y((3*i)+1));
        end
        int_aprox_f = ((3*h)/8)*(feval(f,y(1))+3*alpha+3*betha+2*gamma+
                      feval(f,y(n+1)));
```

```
end

fprintf('\n Considerando %d subintervalos, la longitud de cada uno es de
        %4.10f \n',n,h);
fprintf('\n La integral aproximada de la funcion f en [a,b] es: %4.15f
        \n\n', int_aprox_f);

E = input('Si quiere calcular el error, ingrese "1", de lo contrario, ingrese
    cualquier otro numero: ');

if E == 1
fprintf('\ni existe la integral exacta de f(x) en [%d,%d] puedes calcular los
errores cometidos en este Metodo Numerico.\n',a,b);

integral_exacta = input('Ingrese el valor de la Integral Exacta: Integral
                Exacta = ');

Error_Absoluto = abs(integral_exacta - int_aprox_f);
Error_Relativo = Error_Absoluto / abs(integral_exacta);
Error_Porcentual = Error_Relativo*100;

fprintf('\nEl error cometido por el Metodo del Trapecio es: \n');
fprintf('       ERROR ABSOLUTO  = %4.10f \n',Error_Absoluto);
fprintf('       ERROR RELATIVO  = %4.10f \n',Error_Relativo);
fprintf('      ERROR PORCENTUAL = %4.10f por ciento \n',Error_Porcentual);
end
```

5 Resultados numéricos

Cuando se programa un algoritmo en algún lenguaje de programación, se tiene que probar y calibrar por medio de ejemplos donde se conoce la solución exacta o analítica y de esta forma comprobar su factibilidad y eficiencia. Para los MIN desarrollados en este trabajo e implementados en MATLAB, se proporcionan ejemplos de funciones en donde se calculó la integral de manera exacta y comparó contra la integral aproximada.

A continuación, se muestran los resultados de las pruebas realizadas para los métodos presentados en la Sección 2 respecto a funciones cuya integral en $[0, 1]$ es posible conocer de manera exacta.

En los ejemplos numéricos, se consideran el EA y el ER, los cuales están dados por las definiciones 2.2 y 2.3. Recordemos que M_n, T_n, $S3_n$ y $S8_n$ denotan las integrales aproximadas dadas por los métodos del Punto Medio, del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8, respectivamente, donde el subíndice n

es el número de subintervalos en que es dividido el intervalo $[a, b]$, como se menciona en la Sección 2.

Caso de estudio 1: Resultados numéricos para funciones polinomiales.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f(x) = 3x$ en $[0, 1]$, cuya integral exacta es

$$\int_0^1 3x\ dx \ = \ \frac{3}{2} = 1.5. \tag{16}$$

En este caso, se obtienen las integrales aproximadas presentadas en la Tabla 1 para diferentes valores de n, en donde se observa que los cuatro MIN devuelven resultados aceptables, incluso para el valor más pequeño de $n = 6$, ya que los errores relativos y absolutos son cero o prácticamente cero. En particular, para el Método del Trapecio los errores relativos son cero porque el integrando es una función lineal y esta cuadratura utiliza polinomios lineales a trozos para interpolar al integrando. También se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos aumentan cuando se incrementa el valor de n como se esperaría, y el tiempo es menor para Trapecio y el mayor de todos es para el Punto Medio cuando $n = 3000$.

Punto Medio						**Trapecio**					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.5000e+00	2.2204e-16	1.4803e-16	0.001115 s	6	1.6667e-01	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.001716 s
30	3.3333e-02	1.5000e+00	2.2204e-16	1.4803e-16	0.002406 s	30	3.3333e-02	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.003125 s
300	3.3333e-03	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.019848 s	300	3.3333e-03	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.020607 s
3000	3.3333e-04	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.179213 s	3000	3.3333e-04	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.177864 s

Simpson 1/3						**Simpson 3/8**					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002211 s	6	1.6667e-01	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002496 s
30	3.3333e-02	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002986 s	30	3.3333e-02	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.003136 s
300	3.3333e-03	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.020251 s	300	3.3333e-03	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.020151 s
3000	3.3333e-04	1.5000e+00	2.2204e-16	1.4803e-16	0.178858 s	3000	3.3333e-04	1.5000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.178654 s

Cuadro 1: Resultados numéricos del Ejemplo 1 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 2. Para la función $f(x) = 5x^2$ definida en $[0, 1]$, su integral exacta está dada por

$$\int_0^1 5x^2\ dx \ = \ \frac{5}{3} \ \approx \ 1.666666666666667. \tag{17}$$

En la Tabla 2, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n, en donde se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan muy bien la integral de f, incluso para cuando $n = 6$. En particular, los errores absolutos y relativos son cero para Simpson 1/3 cuando $n = 6$ y 30, ya que f es una función polinomial de segundo grado y de este tipo de funciones son los interpolantes del Método de Simpson 1/3. En Simpson 1/3, cuando $n = 300$ y 3000 los errores no son cero, lo cual puede deberse a posibles errores de truncamiento o redondeo de cálculos aritméticos de la computadora; sin embargo, son muy pequeños comparados contra los errores obtenidos por Punto Medio y Trapecio. Como en el ejemplo anterior, se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos aumentan cuando se incrementa el valor de n como se esperaría, y el tiempo es menor para Punto Medio y mayor para Simpson 1/3 cuando $n = 3000$.

Punto Medio						**Trapecio**					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.6551e+00	1.1574e-02	6.9444e-03	0.001069 s	6	1.6667e-01	1.6898e+00	2.3148e-02	1.3889e-02	0.001852 s
30	3.3333e-02	1.6662e+00	4.6296e-04	2.7778e-04	0.002994 s	30	3.3333e-02	1.6676e+00	9.2593e-04	5.5556e-04	0.003332 s
300	3.3333e-03	1.6667e+00	4.6296e-06	2.7778e-06	0.020907 s	300	3.3333e-03	1.6676e+00	9.2593e-06	5.5556e-06	0.020379 s
3000	3.3333e-04	1.6667e+00	4.6296e-08	2.7778e-08	0.178745 s	3000	3.3333e-04	1.6676e+00	9.2593e-08	5.5556e-08	0.179772 s

Simpson 1/3						**Simpson 3/8**					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.6667e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002000 s	6	1.6667e-01	1.6667e+00	2.2204e-16	1.3323e-16	0.002981 s
30	3.3333e-02	1.6667e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002933 s	30	3.3333e-02	1.6667e+00	2.2204e-16	1.3323e-16	0.003249 s
300	3.3333e-03	1.6667e+00	2.2204e-16	1.3323e-16	0.020085 s	300	3.3333e-03	1.6667e+00	2.2204e-16	1.3323e-16	0.021361 s
3000	3.3333e-04	1.6667e+00	6.6613e-16	3.9968e-16	0.184041 s	3000	3.3333e-04	1.6667e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.179392 s

Cuadro 2: Resultados numéricos del Ejemplo 2 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 3. Consideremos a la función $f(x) = 3x^3$ definida en $[0, 1]$. Su integral exacta es

$$\int_0^1 3x^3 \, dx \;=\; \frac{3}{4} \;=\; 0.75. \tag{18}$$

En la Tabla 3, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n para cada una de las cuadraturas. En este caso, también se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan muy bien la integral de f, incluso para cuando $n = 6$ como en el ejemplo anterior. En particular, los errores absolutos y relativos son cero para Simpson 3/8 con $n = 6$, 30, y 300, ya que f es una función polinomial de tercer grado y de este tipo de funciones son los

interpolantes del Método de Simpson 3/8. Para $n = 3000$ los errores no son cero, lo cual puede deberse a redondeo o truncamiento de cálculos aritméticos de la computadora. Además, también se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos aumentan cuando se incrementa el valor de n.

Punto Medio						**Trapecio**					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	7.3958e-01	1.0417e-02	1.3889e-02	0.001656 s	6	1.6667e-01	7.7083e-01	2.0833e-02	2.7778e-02	0.002089 s
30	3.3333e-02	7.4958e-01	4.1667e-04	5.5556e-04	0.002790 s	30	3.3333e-02	7.5083e-01	8.3333e-04	1.1111e-03	0.003093 s
300	3.3333e-03	7.5000e-01	4.1667e-06	5.5556e-06	0.019442 s	300	3.3333e-03	7.5001e-01	8.3333e-06	1.1111e-05	0.020532 s
3000	3.3333e-04	7.5000e-01	4.1667e-08	5.5556e-08	0.179294 s	3000	3.3333e-04	7.5000e-01	8.3333e-08	1.1111e-07	0.178431 s

Simpson 1/3						**Simpson 3/8**					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.001902 s	6	1.6667e-01	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.002129 s
30	3.3333e-02	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.003636 s	30	3.3333e-02	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.003112 s
300	3.3333e-03	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.019638 s	300	3.3333e-03	7.5000e-01	0.0000e+00	0.0000e+00	0.019814 s
3000	3.3333e-04	7.5000e-01	1.1102e-16	1.4803e-16	0.176823 s	3000	3.3333e-04	7.5000e-01	2.2204e-16	2.9606e-16	0.184508 s

Cuadro 3: Resultados numéricos del Ejemplo 3 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 4. Para este ejemplo, consideremos a la función $f(x) = x^4$ definida en $[0, 1]$. Su integral exacta es

$$\int_0^1 x^4 dx \;=\; \frac{1}{5} \;=\; 0.2. \tag{19}$$

En la Tabla 4, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan en este trabajo. En este caso, también se observa que el Método de Simpson 1/3 aproxima mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros métodos aplicados, incluso para el valor más pequeño de $n = 6$. Esto puede deberse a que la función f es un polinomio de grado par y por esto es mejor interpolado por los interpolantes del Método de Simpson 1/3. Como los ejemplos previos, también se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos incrementan cuando aumenta el valor de n.

Punto Medio						**Trapecio**					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.9539e-01	4.6071e-03	2.3036e-02	0.001126 s	6	1.6667e-01	2.0923e-01	9.2335e-03	4.6168e-02	0.001895 s
30	3.3333e-02	1.9981e-01	1.8515e-04	9.2575e-04	0.002708 s	30	3.3333e-02	2.0037e-01	3.7033e-04	1.8516e-03	0.003453 s
300	3.3333e-03	2.0000e-01	1.8518e-06	9.2592e-06	0.019252 s	300	3.3333e-03	2.0000e-01	3.7037e-06	1.8518e-05	0.021577 s
3000	3.3333e-04	2.0000e-01	1.8519e-08	9.2593e-08	0.173846 s	3000	3.3333e-04	2.0000e-01	3.7037e-08	1.8519e-07	0.180970 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	2.0010e-01	1.0288e-04	5.1440e-04	0.001994 s	6	1.6667e-01	2.0023e-01	2.3148e-04	1.1574e-03	0.002685 s
30	3.3333e-02	2.0000e-01	1.6461e-07	8.2305e-07	0.004792	30	3.3333e-02	2.0000e-01	3.7037e-07	1.8519e-06	0.003008 s
300	3.3333e-03	2.0000e-01	1.6461e-11	8.2304e-11	0.021169 s	300	3.3333e-03	2.0000e-01	3.7037e-11	1.8519e-10	0.020263 s
3000	3.3333e-04	2.0000e-01	1.6376e-15	8.1879e-15	0.178329 s	3000	3.3333e-04	2.0000e-01	3.7748e-15	1.8874e-14	0.177563 s

Cuadro 4: Resultados numéricos del Ejemplo 4 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 5. En este caso, consideremos a la función polinomial de grado siete dada por $f(x) = -7x^7 + 5x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 + 1$ definida en $[0, 1]$. Su integral exacta está dada por

$$\int_0^1 (-7x^7 + 5x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 + 1)dx \;=\; \frac{271}{840} \;=\; 0.322619047619048 \quad (20)$$

En la Tabla 5, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas presentadas aquí. También se observa que los tiempos de ejecución de los algoritmos incrementan cuando aumenta el valor de n.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	3.5988e-01	3.7264e-02	1.1551e-01	0.001236 s	6	1.6667e-01	2.4729e-01	7.5325e-02	2.3348e-01	0.001526 s
30	3.3333e-02	3.2415e-01	1.5263e-03	4.7309e-03	0.002897 s	30	3.3333e-02	3.1957e-01	3.0538e-03	9.4658e-03	0.003314 s
300	3.3333e-03	3.2263e-01	1.5278e-05	4.7355e-05	0.019809 s	300	3.3333e-03	3.2259e-01	3.0555e-05	9.4710e-05	0.020651 s
3000	3.3333e-04	3.2262e-01	1.5278e-07	4.7355e-07	0.178697 s	3000	3.3333e-04	3.2262e-01	3.0556e-07	9.4711e-07	0.179638 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	3.1852e-01	4.0962e-03	1.2697e-02	0.001942 s	6	1.6667e-01	3.1385e-01	8.7687e-03	2.7180e-02	0.002539 s
30	3.3333e-02	3.2261e-01	6.8597e-06	2.1263e-05	0.004512 s	30	3.3333e-02	3.2260e-01	1.5406e-05	4.7752e-05	0.003994 s
300	3.3333e-03	3.2262e-01	6.8723e-10	2.1302e-09	0.021591 s	300	3.3333e-03	3.2262e-01	1.5462e-09	4.7928e-09	0.020313 s
3000	3.3333e-04	3.2262e-01	6.8445e-14	2.1216e-13	0.186657 s	3000	3.3333e-04	3.2262e-01	1.5432e-13	4.7834e-13	0.182323 s

Cuadro 5: Resultados numéricos del Ejemplo 5 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

De las Tablas 4 y 5 se observa que al hacer una comparativa entre el Método del Punto Medio y el del Trapecio, el error absoluto es del mismo orden, para los distintos valores de n. En ambos casos, se tiene más o menos la misma cantidad de ceros después del punto decimal, sin embargo, el Método del Punto Medio resulta ser más preciso que el del Trapecio. Esto no

ocurre con respecto a los métodos de Simpson, ya que Simpson 1/3 muestra un error absoluto más pequeño. Esto es congruente con los resultados dados en los teoremas 2.4 y 2.5, los cuales se enunciaron en la Sección 2.

Considerando *las cotas de error de las integrales aproximadas*, de los teoremas 2.4 y 2.5, y tomando los resultados de la Tabla 4, se verifican los resultados obtenidos. Para ilustrar, se toman $n = 3000$ y $h = \frac{b-a}{n}$. Para otros valores de n es análogo.

- Consideremos a la función $f(x) = x^4$ en $[0, 1]$. Se tiene que $|f''(1)| = 12 \geq |f''(x)|$, $\forall x \in [0, 1]$. Tomemos $K = 12$ en los teoremas 2.4 y 2.5, de donde se halla

$$EA_{M_n} \leq \frac{12}{24}\left(\frac{1}{3000}\right)^2 = \frac{1}{2(3000)^2} \approx 5.5555 \times 10^{-8},$$

  y

$$EA_{T_n} \leq \frac{12}{12}\left(\frac{1}{3000}\right)^2 = \frac{1}{3000^2} \approx 1.1111 \times 10^{-7}.$$

  Así, de la Tabla 4 se observa que $EA_{M_n} = 1.8519 \times 10^{-8} \leq 5.5555 \times 10^{-8}$ y $EA_{T_n} = 3.7037 \times 10^{-8} \leq 1.1111 \times 10^{-7}$.

- Para esta misma función $f(x) = x^4$ en $[0, 1]$, se tiene que $|f^{(4)}| = 24 \geq |f^{(4)}(x)|$, $\forall x \in [0, 1]$. Tomando $K = 25$ en el Teorema 2.6 se halla

$$EA_{S3_n} \leq \frac{25(1)}{180}\left(\frac{1}{3000}\right)^4 \approx 1.7146 \times 10^{-15},$$

$$EA_{S8_n} \leq \frac{25(1)}{80}\left(\frac{1}{3000}\right)^4 \approx 3.8580 \times 10^{-15}.$$

  Si se revisan los resultados de la Tabla 4, también se verifica que $EA_{S3_n} = 1.6376 \times 10^{-15} \leq 1.7146 \times 10^{-15}$ y $EA_{S8_n} = 3.7748 \times 10^{-15} \leq 3.8580 \times 10^{-15}$.

Por lo visto anteriormente, una pregunta que surge es la siguiente: ¿Qué tan grande debe ser n, o bien, qué tan pequeño debe ser h, para obtener un error absoluto menor o igual que alguna tolerancia dada ϵ para la función f? Desde luego, se requiere que ϵ sea muy pequeño, lo cual llevaría a que la aproximación encontrada por los MIN sea más precisa. En el siguiente ejemplo se muestra el uso de los Teoremas 1, 2 y 3, dando así una respuesta a la

pregunta anterior.

Ejemplo 6. Consideremos a la función $f(x) = sen(x)$. Se calculará su integral en $[0, \pi]$ por medio del Método de Simpson 1/3. Vamos a encontrar n para garantizar que EA_{S3} sea menor a 0.00001. Se tiene que $|f^{(4)}(x)| = |sen(x)| = sen(x) \leq 1$, para toda $x \in [0, \pi]$. Así, se propone $K = 1$ y del Teorema 3

$$EA_{S3_n} \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4 = \frac{\pi}{180} h^4.$$

Si se elige $\epsilon = 0.00001 = 1 \times 10^{-5}$ y se pide que n satisfaga $\frac{\pi}{180} h^4 = \frac{\pi^5}{180 n^4} \leq \epsilon$, entonces

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{\pi^5}{180\epsilon}} \approx 20.3058. \tag{21}$$

Hay que recordar que para Simpson 1/3, n tiene que ser un múltiplo de 2, por tanto, si se considera n a partir del 22 se obtiene una aproximación menor a $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ y en efecto, el programa nos indica

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx = 2 \approx 2.000004631498475 = S3_{22},$$

lo que lleva a

$$EA_{S3_{22}} = 4.6315 \times 10^{-6} < \epsilon,$$

con un tiempo de cálculo o de ejecución del programa de 0.002506 s. En complemento al ejemplo anterior, para el resto de los métodos y para $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ se tiene lo siguiente:

- Punto Medio: A partir de $n = 359$,

  $$\int_0^{\pi} sen(x)dx \approx 2.000006381614593 = M_{359},\ EA_{M_{359}} = 6.3816 \times 10^{-6} < \epsilon,$$

  con un tiempo de cálculo o de ejecución del programa de 0.023398 s.

- Trapecio: A partir de $n = 508$,

  $$\int_0^{\pi} sen(x)dx \approx 2.000004631498475 = T_{508},\ EA_{T_{508}} = 6.3741 \times 10^{-6} < \epsilon,$$

  con un tiempo de cálculo o de ejecución del programa de 0.032803 s.

- Simpson 3/8: A partir de $n = 27$,

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx \approx 2.000004631498475 = S8_{27},\ EA_{S8_{27}} = 4.5971\times10^{-6} < \epsilon,$$

con un tiempo de cálculo o de ejecución del programa de 0.002781 s.

De lo anterior, se observa que el método de Simpson 1/3 es más eficiente, pues necesita de menos subintervalos para obtener la precisión que se busca y consume menos tiempo de ejecución para obtener la aproximación.

Caso de estudio 2: Resultados numéricos para funciones no polinomiales con antiderivada elemental.

En esta sección, se muestran resultados numéricos para algunas funciones no polinomiales que tienen antiderivada explícita, lo que permite determinar sus integrales exactas y compararlas con las integrales aproximadas calculadas por los MIN presentados en la Sección 2.

Ejemplo 7. Para este ejemplo, consideremos a la función $f(x) = csc(x)cot(x)$ definida en $[1, 2]$. Su antiderivada (salvo constantes) está dada por $\frac{1}{sen(x)}$. Así,

$$\int_1^2 csc(x)cot(x)\ dx \ = \ \frac{1}{sen(1)} - \frac{1}{sen(2)} \ \approx \ 0.088644935483505. \qquad (22)$$

En la Tabla 6, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan en este trabajo. En este caso, se observa que el Método de Simpson 1/3 aproxima mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros métodos aplicados. Incluso, para $n = 6$ (que es un valor relativamente pequeño) el error relativo es 4.9255×10^{-4}, que puede considerarse aceptable para algunos problemas.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	8.7952e-02	6.9314e-04	7.8193e-03	0.001006 s	6	1.6667e-01	9.0040e-02	1.3952e-03	1.5739e-02	0.001916 s
30	3.3333e-02	8.8617e-02	2.8125e-05	3.1728e-04	0.003014 s	30	3.3333e-02	8.8701e-02	5.6265e-05	6.3472e-04	0.003112 s
300	3.3333e-03	8.8645e-02	2.8142e-07	3.1747e-06	0.021999 s	300	3.3333e-03	8.8645e-02	5.6284e-07	6.3494e-06	0.021537 s
3000	3.3333e-04	8.8645e-02	2.8142e-09	3.1747e-08	0.196200 s	3000	3.3333e-04	8.8645e-02	5.6284e-09	6.3494e-08	0.195485 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	8.8689e-02	4.3662e-05	4.9255e-04	0.002453 s	6	1.6667e-01	8.8735e-02	8.9672e-05	1.0116e-03	0.002863 s
30	3.3333e-02	8.8645e-02	7.7816e-08	8.7784e-07	0.003356 s	30	3.3333e-02	8.8645e-02	1.7422e-07	1.9654e-06	0.003329 s
300	3.3333e-03	8.8645e-02	7.8201e-12	8.8218e-11	0.022059 s	300	3.3333e-03	8.8645e-02	1.7595e-11	1.9848e-10	0.021929 s
3000	3.3333e-04	8.8645e-02	3.7470e-16	4.2270e-15	0.194413 s	3000	3.3333e-04	8.8645e-02	1.6792e-15	1.8943e-14	0.195914 s

Cuadro 6: Resultados numéricos del Ejemplo 7 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 8. Ahora, consideremos a la función $f(x) = cot^4(3x)csc^2(3x)$ en $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. En este caso,

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} cot^4(3x)csc^2(3x)\ dx \ = \ \frac{\frac{1}{5tan^5(\frac{3}{4})} - \frac{1}{5tan^5(\frac{9}{4})}}{3} \ \approx \ 0.117876836696773 \quad (23)$$

En la Tabla 7, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan en la Sección 2. En este caso, se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros métodos aplicados. En este caso, para $n = 30$ el error relativo es del orden de 10^{-4}. El menor error absoluto se obtiene del Método de Simpson 1/3 que aproxima a la integral exacta a cuatro cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 300$ para aproximar a la integral exacta a cuatro cifras significativas, con un error relativo del orden de 10^{-4}. Si se toma $n = 3000$, las aproximaciones a la integral exacta mejoran mucho con un error relativo del orden de 10^{-6} para Punto Medio y Trapecio, y son el doble de exactas para Simpson 1/3 y 3/8, como puede observarse en la Tabla 7.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	8.3333e-02	9.2079e-02	2.5798e-02	2.1886e-01	0.001458 s	6	8.3333e-02	1.7395e-01	5.6073e-02	4.7569e-01	0.001738 s
30	1.6667e-02	1.1664e-01	1.2368e-03	1.0492e-02	0.002437 s	30	1.6667e-02	1.2036e-01	2.4827e-03	2.1062e-02	0.003490 s
300	1.6667e-03	1.1786e-01	1.2474e-05	1.0582e-04	0.021537 s	300	1.6667e-03	1.1790e-01	2.4949e-05	2.1165e-04	0.022193 s
3000	1.6667e-04	1.1788e-01	1.2475e-07	1.0583e-06	0.195183 s	3000	1.6667e-04	1.1788e-01	2.4950e-07	2.1166e-06	0.195864 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	8.3333e-02	1.3225e-01	1.4375e-02	1.2195e-01	0.001972 s	6	8.3333e-02	1.4008e-01	2.2203e-02	1.8836e-01	0.002671 s
30	1.6667e-02	1.1792e-01	4.7221e-05	4.0059e-04	0.004460 s	30	1.6667e-02	1.1798e-01	1.0165e-04	8.6234e-04	0.003441 s
300	1.6667e-03	1.1788e-01	4.9520e-09	4.2010e-08	0.023720 s	300	1.6667e-03	1.1788e-01	1.1136e-08	9.4476e-08	0.021637 s
3000	1.6667e-04	1.1788e-01	4.9566e-13	4.2049e-12	0.200129 s	3000	1.6667e-04	1.1788e-01	1.1148e-12	9.4571e-12	0.198458 s

Cuadro 7: Resultados numéricos del Ejemplo 8 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 9. Para este ejemplo, consideremos a la función $f(x) = \frac{x+4}{x^2+2x+5}$ en $[1, 2]$. Así,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx = \frac{ln\left(\frac{25}{4}\right) - ln\left(\frac{17}{4}\right) + 3\left(arctan(\frac{3}{4}) - arctan(\frac{1}{4})\right)}{2}$$
$$\approx 0.790614908905623$$

En la Tabla 8, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan. En este caso, se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros dos métodos. Para $n = 6$, el error relativo es del orden de 10^{-8}, teniendo el menor error absoluto la de Simpson 1/3 que aproxima a la integral exacta a cuatro cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 30$ para aproximar a la integral exacta a cuatro cifras significativas, con un error relativo del orden de 10^{-5}. Para $n = 6$, el error relativo de los métodos del Punto Medio y del Trapecio es del orden de 10^{-4}, el cual es aceptable. Para $n = 30$, la exactitud es un poco más del doble para Simpson 1/3 y 3/8, respecto a los métodos del Punto Medio y del Trapecio.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	7.9088e-0	2.6289e-04	3.3252e-04	0.001193 s	6	1.6667e-01	7.9009e-01	5.2577e-04	6.6502e-04	0.001449 s
30	3.3333e-02	7.9063e-01	1.0515e-05	1.3300e-05	0.002486 s	30	3.3333e-02	7.9059e-01	2.1030e-05	2.6599e-05	0.002967 s
300	3.3333e-03	7.9062e-01	1.0515e-07	1.3300e-07	0.019500 s	300	3.3333e-03	7.9061e-01	2.1030e-07	2.6599e-07	0.020298 s
3000	3.3333e-04	7.9061e-01	1.0515e-09	1.3300e-09	0.178021 s	3000	3.3333e-04	7.9061e-01	2.1030e-09	2.6599e-09	0.178774 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	7.9061e-01	7.1734e-08	9.0732e-08	0.001991 s	6	1.6667e-01	7.9061e-01	7.6806e-08	9.7148e-08	0.002028 s
30	3.3333e-02	7.9061e-01	1.6695e-10	2.1117e-10	0.002802 s	30	3.3333e-02	7.9061e-01	3.7094e-10	4.6919e-10	0.004869 s
300	3.3333e-03	7.9061e-01	1.6875e-14	2.1345e-14	0.019525 s	300	3.3333e-03	7.9061e-01	3.8081e-14	4.8166e-14	0.021773 s
3000	3.3333e-04	7.9061e-01	7.7716e-16	9.8298e-16	0.176011 s	3000	3.3333e-04	7.9061e-01	2.2204e-16	2.8085e-16	0.178845 s

Cuadro 8: Resultados numéricos del Ejemplo 9 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 10. Consideremos a $f(x) = \frac{sec^2(x)}{\sqrt{1-4tan^2(x)}}$ en $[0,1]$. Se tiene que

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{sec^2(x)}{\sqrt{1-4tan^2(x)}}dx \;=\; arcsen\left(2tan\left(\frac{1}{4}\right)\right) \;\approx\; 0.535979982224614. \quad (24)$$

En la Tabla 9, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan. Aquí, se observa que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros dos métodos. Para $n = 3$, el error relativo es del orden de 10^{-4}, teniendo el menor error absoluto el Método de Simpson 1/3, que aproxima a la integral exacta a tres cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 30$ para obtener un error relativo del orden de 10^{-4}, con la que aproximan a la integral exacta a tres cifras significativas.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	8.3333e-02	1.3957e-03	2.6040e-03	4.4027e-02	0.001040 s	6	8.3333e-02	5.3879e-01	2.8133e-03	5.2488e-03	0.001217 s
30	1.6667e-02	5.6812e-05	1.0600e-04	4.6642e-02	0.003021 s	30	1.6667e-02	5.3609e-01	1.1366e-04	2.1206e-04	0.003023 s
300	1.6667e-03	5.6856e-07	1.0608e-06	4.6751e-02	0.022058 s	300	1.6667e-03	5.3598e-01	1.1371e-06	2.1216e-06	0.022419 s
3000	1.6667e-04	5.6856e-09	1.0608e-08	4.6752e-02	0.202728 s	3000	1.6667e-04	5.3598e-01	1.1371e-08	2.1216e-08	0.202563 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	8.3333e-02	5.3608e-01	1.0018e-04	1.8691e-04	0.001978 s	6	8.3333e-02	5.3618e-01	1.9561e-04	3.6496e-04	0.002087 s
30	1.6667e-02	5.3598e-01	1.9703e-07	3.6760e-07	0.002988 s	30	1.6667e-02	5.3598e-01	4.3852e-07	8.1817e-07	0.003222 s
300	1.6667e-03	5.3598e-01	1.9924e-11	3.7173e-11	0.022447 s	300	1.6667e-03	5.3598e-01	4.4823e-11	8.3628e-11	0.021365 s
3000	1.6667e-04	5.3598e-01	2.1094e-15	3.9356e-15	0.203998 s	3000	1.6667e-04	5.3598e-01	4.3299e-15	8.0784e-15	0.203760 s

Cuadro 9: Resultados numéricos del Ejemplo 10 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Caso de estudio 3: Resultados numéricos para funciones que no tienen antiderivada elemental.

En esta subsección, a diferencia de todas las anteriores, se trabaja con funciones cuya antiderivada no es una función elemental ([11]). Tomaremos como la integral exacta a la que nos proporciona el Primer Teorema Fundamental del Cálculo. En este caso, debemos calcular numéricamente dicha integral, por lo que utilizamos la cuadratura de Lobatto que viene proporcionada por la función *quadl* de MATLAB, que aproxima a la integral de la función f en el intervalo $[a, b]$ con un error de 10^{-16} ([15]). Sin embargo, pueden utilizarse otras cuadraturas como la de Gauss-Kronrod, que viene dada por la función *quadgk*. Para cada n, aquí lo que observaremos en cuántas cifras decimales se iguala el resultado encontrado por los MIN de la Sección 2 con el dado por la función *quadl*. Para los siguientes ejemplos, consideraremos la función $f(x) = e^{x^2}$ y la función campana de Gauss $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, las cuales no tienen primitiva elemental ([21]).

Ejemplo 11. Sea $f(x) = e^{x^2}$, para $x \in [0, 1]$. En este caso, la integral aproximada dada por *quadl* es

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx \;\approx\; 1.462651745907181. \tag{25}$$

En la Tabla 9, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas presentadas e implementadas en MATLAB. En este caso, se observa también que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros dos métodos. Para $n = 3$, el error relativo es del orden de 10^{-4}, teniendo el menor error absoluto el de Simpson 1/3, que aproxima a la integral exacta a tres cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 30$ para obtener un error relativo del orden de 10^{-4}, con la que aproximan a la integral exacta a tres cifras significativas.

Punto Medio						**Trapecio**					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.4564e+00	6.2419e-03	4.2675e-03	0.001012 s	6	1.6667e-01	1.4752e+00	1.2527e-02	8.5646e-03	0.001279 s
30	3.3333e-02	1.4624e+00	2.5161e-04	1.7202e-04	0.002551 s	30	3.3333e-02	1.4632e+00	5.0329e-04	3.4410e-04	0.003134 s
300	3.3333e-03	1.4626e+00	2.5169e-06	1.7208e-06	0.020133 s	300	3.3333e-03	1.4627e+00	5.0338e-06	3.4416e-06	0.020239 s
3000	3.3333e-04	1.4627e+00	2.5169e-08	1.7208e-08	0.182598 s	3000	3.3333e-04	1.4627e+00	5.0339e-08	3.4416e-08	0.179609 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	1.4629e+00	2.2171e-04	1.5158e-04	0.001574 s	6	1.6667e-01	1.4631e+00	4.7641e-04	3.2572e-04	0.001606 s
30	3.3333e-02	1.4627e+00	3.7211e-07	2.5441e-07	0.004281 s	30	3.3333e-02	1.4627e+00	8.3553e-07	5.7124e-07	0.002981 s
300	3.3333e-03	1.4627e+00	3.7287e-11	2.5493e-11	0.021217 s	300	3.3333e-03	1.4627e+00	8.3894e-11	5.7358e-11	0.020086 s
3000	3.3333e-04	1.4627e+00	3.1086e-15	2.1253e-15	0.182843 s	3000	3.3333e-04	1.4627e+00	7.5495e-15	5.1615e-15	0.183889 s

Cuadro 10: Resultados numéricos del Ejemplo 11 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Ejemplo 12. Consideremos a la campana de Gauss $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ para $x \in [0, 1]$. Su integral aproximada dada por *quadl* es

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx \;\approx\; 0.341344746068543. \tag{26}$$

En la Tabla 9, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de n y para cada una de las cuadraturas que se presentan. En este caso, se observa también que los métodos de Simpson 1/3 y 3/8 aproximan mucho mejor a la integral de f en comparación con los otros dos métodos. Para $n = 3$, el error relativo está alrededor del orden de 10^{-5}, obteniéndose el menor error absoluto con Simpson 1/3, que aproxima a la integral exacta a cuatro cifras significativas. Los métodos del Punto Medio y del Trapecio necesitan una malla uniforme más fina del intervalo de integración con $n = 30$ para obtener un error relativo del orden de 10^{-5}.

Punto Medio						Trapecio					
[gray].9 n	h	M_n	EA_{M_n}	ER_{M_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	T_n	EA_{T_n}	ER_{T_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	3.4163e-01	2.8051e-04	8.2179e-04	0.001096 s	6	1.6667e-01	3.4078e-01	5.6064e-04	1.6424e-03	0.001684 s
30	3.3333e-02	3.4136e-01	1.1203e-05	3.2820e-05	0.003120 s	30	3.3333e-02	3.4132e-01	2.2406e-05	6.5639e-05	0.003294 s
300	3.3333e-03	3.4134e-01	1.1202e-07	3.2818e-07	0.022745 s	300	3.3333e-03	3.4134e-01	2.2405e-07	6.5637e-07	0.023193 s
3000	3.3333e-04	3.4134e-01	1.1193e-09	3.2790e-09	0.208639 s	3000	3.3333e-04	3.4134e-01	2.2405e-09	6.5637e-09	0.212099 s

Simpson 1/3						Simpson 3/8					
[gray].9 n	h	$S3_n$	EA_{S3_n}	ER_{S3_n}	Tiempo	[gray].9 n	h	$S8_n$	EA_{S8_n}	ER_{S8_n}	Tiempo
6	1.6667e-01	3.4135e-01	2.0953e-06	6.1383e-06	0.001917 s	6	1.6667e-01	3.4135e-01	4.7622e-06	1.3951e-05	0.002382 s
30	3.3333e-02	3.4134e-01	3.3205e-09	9.7278e-09	0.003009 s	30	3.3333e-02	3.4134e-01	7.4732e-09	2.1893e-08	0.003285 s
300	3.3333e-03	3.4134e-01	3.3196e-13	9.7250e-13	0.022956 s	300	3.3333e-03	3.4134e-01	7.4674e-13	2.1876e-12	0.022419 s
3000	3.3333e-04	3.4134e-01	5.5511e-17	1.6262e-16	0.209837 s	3000	3.3333e-04	3.4134e-01	2.2204e-16	6.5050e-16	0.214107 s

Cuadro 11: Resultados numéricos del Ejemplo 12 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Caso de estudio 4: Primitivas numéricas aproximadas.

En esta sección, se calcula una aproximación numérica de la primitiva, antiderivada, o integral indefinida de una función $f(x)$ por medio del Primer Teorema Fundamental del Cálculo ([21]), aplicando los MIN presentados en este trabajo. Denotemos por $F_M(x)$, $F_T(x)$, $F_{S3}(x)$, $F_{S8}(x)$ y $F_{Lobatto}(x)$ las primitivas numéricas dadas por los métodos del Punto Medio, del Trapecio, de Simpson 1/3 y 3/8, y la cuadratura de Lobatto, respectivamente. Tomaremos como primitiva exacta a la obtenida por medio de la cuadratura de Lobatto cuando la función no tiene una primitiva elemental. En los siguientes ejemplos, se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos, y en cada subintervalo $\left[a + \frac{(i-1)h}{m}, a + \frac{(i)h}{m}\right]$, para $i = 1, 2, 3, ..., m$, de longitud $h = \frac{(b-a)}{m}$, se aplican cada una de las cuadraturas simples de los MIN presentados en este trabajo. Para ilustrar, al aplicar el Método de Simpson 3/8 simple, dado por (12), se divide el subintervalo $\left[a + \frac{(i-1)h}{m}, a + \frac{(i)h}{m}\right]$ en 3 subintervalos y se obtiene $F_{S8}(x_i) = \int_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{2}{3}h} P(x) \approx F(x_i) = \int_0^{x_i} f(t)dt$, en cada punto $x_i = a + \frac{(i-1)h}{m}$ del intervalo $[a, b]$, para $i = 1, 2, 3, ..., m$, y así sucesivamente se van sumando las integrales para el consecutivo subintervalo $\left[a + \frac{(i)h}{n}, a + \frac{(i+1)h}{n}\right]$ para calcular $F_{S8}(x_{i+1}) = \int_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{2}{3}h} P(x) \approx F(x_{i+1}) = \int_0^{x_{i+1}} f(t)dt$ en el punto x_{i+1}.

A fin de tener una forma de medir la bondad de la aproximación, se define el Error Absoluto

$$EA_{\text{máx}}(F_C, F) = \text{máx}\left\{|F_C(x_i) - F(x_i)|, \text{ para } i = 1, 2, 3, ..., m\right\}, \qquad (27)$$

entre la primitiva numérica F_C y la primitiva exacta F por $EA_{\text{máx}}(F_C, F)$. El subíndice C indica el MIN aplicado. A continuación se muestran dos ejemplos.

Ejemplo 13. Primitiva numérica aproximada de una función que tienen antiderivada elemental. Para poder comparar las primitivas numéricas con una *primitiva exacta*, es decir, donde la integral se puede expresar en términos de funciones elementales, se considera la función $f(x) = e^x sen(x)$ para $x \in [0, 5]$, y su primitiva exacta dada por $F(x) = \frac{1}{2}e^x(sen(x) - cos(x)) + c$ para $x \in [0, 6]$ y con $c = 0.5$. La constante c se eligió para $F(0) = 0$, ya que el Primer Teorema Fundamental nos devuelve una primitiva que toma el valor cero en cero. En este caso, vamos a comparar las soluciones numéricas dadas

por los MIN con la primitiva exacta $F(x)$ y la primitiva numérica $F_{Lobatto}(x)$ dada por una cuadratura de Lobatto que es calculada usando la función *quadl* de MATLAB.

Los resultados numéricos mostrados en la Tabla 12 muestran que las mejores aproximaciones están dadas por Simpson 1/3 y 3/8, incluso para el valor más pequeño $n = 60$, con un error absoluto de alrededor de 1×10^{-5}, siendo el más preciso Simpson 3/8. Para que Punto Medio y Trapecio tengan un error absoluto de alrededor de 1×10^{-4}, es necesario aumentar $n = 1500$ y $n = 15000$, respectivamente. En la Figura 7, se muestran las gráficas de las diferentes primitivas aproximadas de $F_M(x)$, $F_T(x)$, $F_{S3}(x)$, $F_{S8}(x)$, para $n = 30, 30, 60$ y 90, respectivamente, las cuales coinciden con la gráfica de la primitiva aproximada $F_{Lobatto}(x)$ para $x \in [0, 5]$.

En la Tabla 13, se muestran los errores absolutos para diferentes valores de m aplicando la cuadratura de Lobatto, los cuales muestran que es mejor Lobatto que las demás cuadraturas presentadas en la Tabla 12, con una precisión de alrededor de 1×10^{-14}, pero con un mayor tiempo de cómputo comparado con Punto Medio, Trapecio y Simpson 1/8. Si no es requerida una precisión tan grande, puede resultar conveniente considerar el Método de Simpson 1/3, que guarda un compromiso entre tiempo de cómputo y precisión.

Punto Medio				
[gray].9 m	n	h	$EA_{\text{máx}}(F_M, F)$	Tiempo
30	30	1.6667e-01	1.2992e-01	0.011344 s
180	180	2.7778e-02	3.6109e-03	0.013018 s
1500	1500	3.3333e-03	5.1999e-05	0.103457 s
15000	15000	3.3333e-04	5.1999e-07	1.032783 s

Trapecio				
[gray].9 m	n	h	$EA_{\text{máx}}(F_T, F)$	Tiempo
30	30	1.6667e-01	2.5969e-01	0.007160 s
180	180	2.7778e-02	7.2216e-03	0.025108 s
1500	1500	3.3333e-03	1.0400e-04	0.209690 s
15000	15000	3.3333e-04	1.0400e-06	2.023349 s

Simpson 1/3				
[gray].9 m	n	h	$EA_{\text{máx}}(S_{S3}, F)$	Tiempo
30	60	8.3333e-02	9.8191e-05	0.008433 s
180	360	1.3889e-02	7.5832e-08	0.037250 s
1500	3000	1.6667e-03	1.5731e-11	0.304460 s
15000	30000	1.6667e-04	1.2790e-13	3.026088 s

Simpson 3/8				
[gray].9 m	n	h	$EA_{\text{máx}}(F_{S8}, F)$	Tiempo
30	90	5.5556e-02	4.3645e-05	0.010721 s
180	540	9.2593e-03	3.3703e-08	0.049297 s
1500	4500	1.1111e-03	6.9775e-12	0.403255 s
15000	45000	1.1111e-04	1.3500e-13	4.026059 s

Cuadro 12: Resultados numéricos del Ejemplo 13 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

Cuadratura de Lobatto		
[gray].9 m	$EA_{\text{máx}}(F_{Lobatto}, F)$	Tiempo
30	1.4211e-14	0.047053 s
180	2.1316e-14	0.053725 s
1500	5.6843e-14	0.355341 s
15000	1.2079e-13	3.545414 s

Cuadro 13: Resultados numéricos del Ejemplo 13 aplicando la cuadratura de Lobatto, usando la función *quadl* de MATLAB con una tolerancia de 1×10^{-16}.

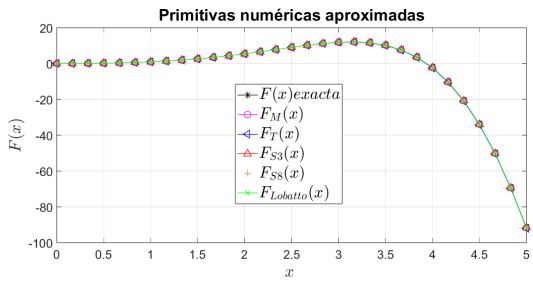


Figura 7: Gráficas de las primitivas numéricas aproximadas de la función $f(x) = e^x sen(x)$, $x \in [0, 5]$.

Ejemplo 14. Primitiva numérica aproximada de una función que no tiene antiderivada elemental. Para este ejemplo, consideremos a la función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$, para $x \in [1, 12]$, que no tiene primitiva elemental. En este caso, vamos a comparar las soluciones numéricas dadas por los MIN, presentados en la Sección 3, con la primitiva aproximada $F_{Lobatto}(x) \approx F(x) = \int_1^x f(t)dt$, para $x \in [1, 12]$, usando la función *quadl* de MATLAB.

Los resultados numéricos, dados en la Tabla 14, muestran que las mejores aproximaciones están dadas por Simpson 1/3 y 3/8. Para $n = 66$, el error absoluto es de alrededor de 1×10^{-8}, siendo el más preciso Simpson 3/8. Para que los métodos del Punto Medio y del Trapecio tengan errores absolutos de alrededor de 1×10^{-8}, es necesario tomar $n = 33000$ para ambos métodos. En la Figura 8, se muestran las gráficas de las diferentes primitivas aproximadas $F_M(x)$, $F_T(x)$, $F_{S3}(x)$ y $F_{S8}(x)$, para $n = 66, 66, 132$ y 198, respectivamente, las cuales coinciden con la gráfica de la primitiva aproximada $F_{Lobatto}(x)$ para $x \in [0, 5]$. También, se puede observar en la Tabla 14 que los tiempos de ejecución de la cuadratura de Lobatto $Tiempo_{Lobatto}$ son mayores para todos

los valores de m comparados contra los provistos por los métodos del Punto Medio y del Trapecio; estos son menores respecto a los tiempos arrojados por los métodos de Simpson 1/3 y 3/8.

Punto Medio						**Trapecio**					
[gray].9 m	n	h	$EA_{\text{máx}}(F_M, F)$	$Tiempo_{PM}$	$Tiempo_{Lobatto}$	[gray].9 m	n	h	$EA_{\text{máx}}(F_T, F)$	$Tiempo_T$	$Tiempo_{Lobatto}$
66	66	1.6667e-01	5.4309e-04	0.005327 s	0.028470 s	66	66	1.6667e-01	1.0859e-03	0.010286 s	0.028470 s
330	330	3.3333e-02	2.1724e-05	0.021846 s	0.083085 s	330	330	3.3333e-02	4.3448e-05	0.044297 s	0.083085 s
3300	3300	3.3333e-03	2.1724e-07	0.215708 s	0.760821 s	3300	3300	3.3333e-03	4.3448e-07	0.427371 s	0.760821 s
33000	33000	3.3333e-04	2.1724e-09	2.131116 s	7.636930 s	33000	33000	3.3333e-04	4.3448e-09	4.213655 s	7.636930 s

Simpson 1/3						**Simpson 3/8**					
[gray].9 m	n	h	$EA_{\text{máx}}(S_{S3}, F)$	$Tiempo_{S3}$	$Tiempo_{Lobatto}$	[gray].9 m	n	h	$EA_{\text{máx}}(S_{S8}, F)$	$Tiempo_{S8}$	$Tiempo_{Lobatto}$
66	132	8.3333e-02	9.2686e-08	0.121591 s	0.028470 s	66	198	5.5556e-02	4.1191e-08	0.357648 s	0.028470 s
330	660	1.6667e-02	1.4826e-10	0.236801 s	0.083085 s	330	990	1.1111e-02	6.5892e-11	0.423359 s	0.083085 s
3300	6600	1.6667e-03	1.6320e-14	1.293745 s	0.760821 s	3300	9900	1.1111e-03	6.5503e-15	2.200045 s	0.760821 s
33000	66000	1.6667e-04	3.3307e-16	10.758638 s	7.636930 s	33000	99000	1.1111e-04	3.3307e-16	19.217573 s	7.636930 s

Cuadro 14: Resultados numéricos del Ejemplo 14 aplicando los MIN en *format short e* de MATLAB.

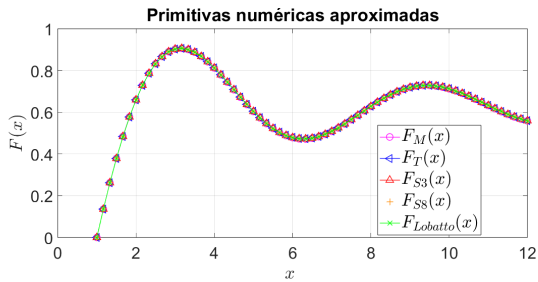


Figura 8: Gráficas de las primitivas numéricas aproximadas de la función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$, $x \in [1, 12]$.

De los ejemplos 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 y 10, se observa que el Método del Punto Medio es más preciso que el del Trapecio. Para funciones polinomiales de grado uno o funciones continuas constantes a trozos, el método del Trapecio aproxima mejor que el resto de las cuadraturas, como lo muestra el ejemplo 1. En el caso de los métodos de Simpson, encontramos funciones en las que S8 es más preciso que S3, como en los ejemplos 1 y 9 (en ambos para $n = 3000$). Por lo tanto, la elección de un MIN depende de la clase a la que pertenecen las funciones; sin embargo, cuando solo se cuenta con un número limitado de mediciones o datos tabulados, es factible aplicar el método del Trapecio.

6 Conclusiones

En este trabajo se muestra la implementación computacional de cuatro métodos de integración: Punto Medio (que es un tipo de Sumas de Riemann), del Trapecio, y de Simpson 1/3 y 3/8, los cuales fueron programados en MATLAB, y fueron probados para diferentes funciones con y sin primitiva elemental. Los resultados numéricos muestran la eficiencia y factibilidad de cada método de integración para cierta clase de funciones.

Es importante mencionar que el código de los programas se desarrolló utilizando iteraciones o ciclos (también conocidos como bucles), que en MATLAB se implementan mediante los comandos *for* y *while*. Cabe mencionar que hay otras formas de programar el código de los métodos de integración numérica, como la vectorización, las cuales pueden optimizar los programas desarrollados. Sin embargo, el objetivo de este trabajo es didáctico, ya que consideramos que el lector podrá asociar los programas con los resultados sobre cuadraturas presentados aquí, haciendo más natural relacionar el código con las fórmulas de los métodos de integración numérica. Así, en aras de lograr un mejor entendimiento de los programas y las cuadraturas, se deja para trabajos futuros la optimización del código. Una posibilidad atractiva es la vectorización del código y comparar los resultados con los programas desarrollados aquí. El código de estos programas se puede descargar utilizando el hipervínculo de la sección 4.

Por último, los programas computacionales desarrollados en este trabajo pueden ser usados como material de apoyo para el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo, tanto para el nivel medio superior como para el superior.

7 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

[1] Algredo-Badillo, I., Conde-Mones, J. J., Hernández-Gracidas, C. A., Morín-Castillo, M. M., Oliveros-Oliveros, J. J., & Feregrino-Uribe, C. (2020). *An FPGA-based analysis of trade-offs in the presence of ill-conditioning and different precision levels in computations*. Plos one, Vol. 15(6), e0234293.

[2] Angoa, J., Contreras, A., Ibarra, M., López, M. & Martínez, A. (2015). *Cálculo Integral.* Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

[3] Baccouch, M. (Ed.). (2021). *Finite Element Methods and Their Applications*. BoD–Books on Demand.

[4] Brenner, S. C., Scott, L. R., & Scott, L. R. (2008). *The mathematical theory of finite element methods*. Vol. 3. New York: Springer.

[5] Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2007). *Métodos Numéricos para Ingenieros.* Quinta edición. México: McGraw-Hill.

[6] Conde-Mones, J. J., Estrada-Aguayo, E. R., Oliveros-Oliveros, J. J., Hernández-Gracidas, C. A., & Morín-Castillo, M. M. (2021). *Stable Identification of Sources Located on Interface of Nonhomogeneous Media*. Mathematics. Vol. 9(16), 1932.

[7] Conde-Mones, J. J., Hernández-Gracidas, C. A., Morín-Castillo, M. M., Oliveros-Oliveros, J. J., & Juárez-Valencia, L. H. (2022). *Stable Numerical Identification of Sources in Non-Homogeneous Media*. Mathematics, Vol. 10(15), 2726.

[8] Gardner, J. L. (2003). *Uncertainties in interpolated spectral data*. Journal of Research of the national Institute of Standards and Technology, Vol. 108(1), 69.

[9] Glowinski, R. (2003). *Finite element methods for incompressible viscous flow. Handbook of numerical analysis*. Vol. 9, 3–1176.

[10] Guerrero, W., Bermúdez, B. & Escamilla, J. (2017). *Tópicos de Análisis y Métodos Numéricos.* Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

[11] Ivorra, C. (2009). *Funciones sin primitiva elemental.* La Gaceta de la RSME, Vol. 12(3), 483–516. Valencia, España.

[12] Kirsch, A. (2011). *An introduction to the mathematical theory of inverse problems.* Vol. 120. New York: Springer.

[13] Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications.* Vol. 17. John Wiley & Sons.

[14] León-Velasco, D. A., Morín-Castillo, M. M., Oliveros-Oliveros, J. J., Pérez-Becerra, T., & Escamilla-Reyna, J. A. (2019). *Numerical solution of some differential equations with Henstock–Kurzweil functions.* Journal of Function Spaces, 2019, 1–9.

[15] López, C. P. (2002). *Matlab y sus Aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería.* Pearson Educación.

[16] Mathews, J. H., & Fink, K. D. (2000). *Métodos Numéricos con MATLAB.* Madrid: Prentice Hall.

[17] Mora, W. (2015). *¿Se puede saber si una función tiene primitiva elemental?* Revista Digital Matemática, Educación e Internet. Vol. 15(2), 1–60. Costa Rica.

[18] Ramos-Argüelles, F., Morales, G., Egozcue, S., Pabón, R. M., & Alonso, M. T. (2009). *Técnicas básicas de electroencefalografía: principios y aplicaciones clínicas.* In Anales del sistema sanitario de Navarra. Vol. 32, pp. 69–82. Gobierno de Navarra. Departamento de Salud.

[19] Richter, M. (2021). *Inverse problems: Basics, theory and applications in geophysics.* Springer Nature.

[20] Spivak, M. (2012). *Calculus.* Tercera edición, Reverté.

[21] Stewart, J. (2011). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* Séptima edición, Cengage Learning.

[22] Su, L., & Jiang, T. (2018). *Numerical method for solving nonhomogeneous backward heat conduction problem.* International Journal of Differential Equations, 2018, 1–11.

[23] Swartz, C. W., & Kurtz, D. S. (2011). *Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane.* Vol. 13. World Scientific Publishing Company.

[24] Taesombat, W., & Sriwongsitanon, N. (2009). *Areal rainfall estimation using spatial interpolation techniques.* Science Asia, Vol. 35(3), 268–275.

[25] Yang, W. C., Lee, P. Y., & Ding, X. (2009). *Numerical integration on some special Henstock-Kurzweil integrals.* The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Vol. 3(3), 205–223.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Escuela Preparatoria Alfonso Calderón Moreno, BUAP
Km.1.5 Carretera a la Resurrección, Col. Ex hacienda Bosques de Manzanilla,
Puebla, Pue. C.P. 72307

claudio.lazcanom@alumno.buap.mx
jose.conde@correo.buap.mx
carlos.hgracidas@correo.buap.mx
felix.aquinoc@correo.buap.mx
jose.oliveros@correo.buap.mx

Topología

Matemáticas y sus aplicaciones 20, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-09-5

Capítulo 4

Axiomas de separación

Armando Martínez García
FCFM, BUAP

Resumen

En este trabajo se presentan las definiciones y algunas equivalencias entre los Axiomas de Separación T_0, R_0, R_1, T_1.

1 Introducción

Es conocido que uno de los temas que se estudian en los cursos de topología son los axiomas de separación entre los cuales están los de ser un espacio topológico T_0, T_1, en este trabajo mencionaremos dos axiomas más los cuales los espacios topológico R_0 y R_1.

En la sección 2 de este capítulo se dan los resultados generales que se usarán en este trabajo.

En la sección 3 se da la definición de espacio topológico T_0 y algunas equivalencias a esta definición como por ejemplo dados $x, y \in X$ con $x \neq y$ si $y \in cl(\{x\})$ entonces $x \notin cl(\{y\})$, si $y \in ker(\{x\})$, entonces $x \notin ker(\{y\})$.

En la sección 4 se da la definición de espacio topológico R_0 y algunas equivalencias a esta definición como por ejemplo: para todo $x \in X$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se tiene que $cl(\{x\}) \subset U$; para todo conjunto cerrado $F \subset X$, $ker(F) = F$.

En la sección 5 se da la definición de espacio topológico R_1 y algunas equivalencias a esta definición como por ejemplo: para todo $x, y \in X$ con $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ existen $U, V \in \tau$ tales que $cl[ker(\{x\})] \subset U$, $cl[ker(\{y\})] \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$; $\Delta^+ = \{(x, y) \in X \times X : cl(\{x\}) = cl(\{y\})$ es un conjunto cerrado en $X \times X$.

En la sección 6 se da la definición de espacio topológico T_1 y algunas equivalencias a esta definición como por ejemplo: para todo $x \in X$, $ker(\{x\}) =$

$\{x\}$; todo espacio topológico T_0 y R_0 es T_1.

2 Resultados Generales

En esta sección presentaremos las definiciones y resultados necesarios para desarrollar este trabajo.

Definición 2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Diremos que

1. A es un conjunto cerrado si $X \setminus A \in \tau$.
2. x es un punto de adherencia del conjunto A si $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$.
3. x es un punto de acumulación del conjunto A si $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$.
4. La cerradura de A, la cual denotaremos como $cl(A)$, es el conjunto $cl(A) = \{x \in X : x$ es punto de adherencia del conjunto A$\}$.
5. El derivado de A, el cual denotaremos como $d(A)$, es el conjuto $d(A) = \{x \in X : x$ es punto de acumulación del conjunto A$\}$.
6. El kernel de A, el cual denotaremos como es $kerA$, es el conjunto $kerA = \cap\{U \in \tau : A \subset U\}$.
7. El shell de A, el cual denotaremos como $s(A)$, es $s(A) = ker(A) \setminus A$.
8. $I(A) = cl(A) \cap Ker(A)$.

Lema 2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces*

1. $cl(A) = \cap\{F \subset X : A \subset F$ *con* F *un conjunto cerrado*$\}$.
2. $cl(A) = A \cup d(A)$.
3. *A es un conjunto cerrado si y sólo si* $A = cl(A)$.
4. $cl(cl(A)) = cl(A)$.

5. *Si* $B \subset A$, *entonces* $cl(B) \subset cl(A)$.

Teorema 2.3. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $x, y \in X$, *entonces*

1. *Si* $y \in cl\{x\}$, *entonces* $cl\{y\} \subset cl\{x\}$.
2. *Si* $y \in ker(\{x\})$, *entonces* $ker\{y\} \subset ker\{x\}$.
3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   (a) $y \in ker(\{x\})$;
   (b) $x \in cl\{y\}$.
4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   (a) $ker(\{y\}) \neq ker(\{x\})$;
   (b) $cl(\{x\}) \neq cl\{y\}$.
5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   (a) $y \in s(\{x\})$;
   (b) $x \in d(\{y\})$.
6. *Si* $y \in I(\{x\})$, *entonces* $I(\{y\}) = I(\{x\})$.
7. *Para todo* $x, y \in X$ *se tiene que* $I(\{x\}) \cap I(\{y\}) = \emptyset$ *o* $I(\{x\}) = I(\{y\})$.

Demostración. 1) Sean $x, y \in X$ tales que $y \in cl\{x\}$.

Como $y \in cl\{x\}$, entonces $\{y\} \subset cl\{x\}$ y aplicando el Lema 2.2 se sigue que $cl\{y\} \subset cl\{x\}$.

2) Sean $x, y, z \in X$ tales que $y \in ker(\{x\})$ y $z \in ker(\{y\})$.

Como $y \in ker(\{x\})$ y $z \in ker(\{y\})$ de la Definición 2.1 se tiene $y \in W$ para todo $W \in \tau$ tal que $x \in W$ y $z \in W$ para todo $W \in \tau$ tal que $y \in W$ de donde

$$z \in W \text{ para todo } W \in \tau \text{ tal que } x \in W.$$

Por lo tanto, $ker\{y\} \subset ker\{x\}$.

3) a) implica b) Sea $y \in ker(\{x\})$, aplicando la Definición 2.1 tenemos que $y \in U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ esto implica que $x \in cl(\{y\})$.

b) implica a) Sea $x \in cl\{y\}$, aplicando la Definición 2.1 tenemos que $y \in U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ esto implica que $y \in ker(\{x\}))$.

Por lo tanto

$$y \in ker(\{x\}) \text{ si y sólo si } x \in cl(\{x\}).$$

4) a) implica b) Sea $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$, entonces $cl(\{x\}) \subset cl(\{y\})$ y $cl(\{y\}) \subset cl(\{x\})$ de donde $x \in cl(\{y\})$ y $y \in cl(\{x\})$.

Como $x \in cl(\{y\})$, del inciso 3, se sigue que $y \in ker(\{x\})$ y del inciso 2 tenemos que $ker(\{y\}) \subset ker(\{x\})$ y como $y \in cl(\{x\})$ y el inciso 3 implica que $x \in ker(\{y\})$ se sigue del inciso 2 que $ker(\{x\}) \subset ker(\{y\})$ de donde

$$ker(\{x\}) = ker(\{y\}).$$

b) implica a) Análogamente si $ker(\{x\}) = ker(\{y\})$, entonces $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$.

Por lo tanto,

$$ker(\{x\}) \neq ker(\{y\}) \text{ si y sólo si } cl(\{x\}) \neq cl(\{y\}).$$

5) Si $y \in s(\{x\})$, de la Definición 2.1, tenemos que $y \in ker(\{x\}) \setminus \{x\}$, en consecuencia $y \in ker(\{x\})$ y $y \notin \{x\}$ lo cual implica que $y \in U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \neq x$ es decir

$$y \in (U \setminus \{x\}) \text{ implica que } x \in d(y).$$

En forma análoga tenemos que si $x \in d(y)$, entonces $y \in s(\{x\})$.

Por lo tanto $y \in s(\{x\})$ si y sólo si $x \in d(y)$.

6) Como $y \in I(\{x\})$, de la Definición 2.1, $y \in cl(\{x\} \cap ker(\{x\}))$ de donde $y \in cl(\{x\})$ y $y \in ker(\{x\})$.

i) Como $y \in cl(\{x\})$ de los incisos (1), (2) y (3), se cumple que $cl\{y\} \subset cl\{x\}$, $x \in ker(\{y\})$ y $ker(\{x\}) \subset ker(\{y\})$.

ii) Dado que $y \in ker(\{x\})$ del inciso (2), tenemos que $ker\{y\} \subset ker\{x\}$ lo cual implica que $y \in ker(\{x\})$, del inciso (3) lo tenemos $x \in cl(\{y\})$ y del inciso (1) se tiene que $cl(\{x\}) \subset cl(\{y\})$.

De i) y ii) se sigue $cl(\{x\} = cl\{y\})$ y $ker(\{x\} = ker\{y\})$.

Por lo tanto

$$I(\{x\}) = I(\{y\}).$$

7) Si $I(\{x\}) \cap I(\{y\}) \neq \emptyset$, sea $z \in I(\{x\}) \cap I(\{y\})$ lo cual implica que $z \in I(\{x\})$ y $z \in I(\{y\})$. De (5) se tiene que $I(\{x\}) = I(\{z\}) = I(\{y\})$.

Por lo tanto,

$$I(\{x\}) = I(\{y\}).$$

□

3 Espacios T_0

Definición 3.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. (X, τ) es un espacio T_0 si para todo $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existe $U \in \tau$ tal que

$$(x \in U \text{ y } y \notin U) \text{ o } (y \in U \text{ y } x \notin U).$$

Lema 3.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio T_0;*
2. *Si $y \in cl(\{x\})$, entonces $x \notin cl(\{y\})$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio T_0, $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $y \in cl(\{x\})$.

Como $y \in cl(\{x\})$, si $x \in cl(\{y\})$ de la Definición 2.1 tenemos que para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$, $y \in U$ y para todo $V \in \tau$ tal que $y \in V$, implica que $x \in V$, lo cual no puede ser ya que (X, τ) es un espacio T_0.

Por lo tanto

$$x \notin cl(\{y\}).$$

2) implica 1) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $y \in cl(\{x\})$, implica que $x \notin cl(\{y\})$.

Como $x \notin cl(\{y\})$, por el Teorema 2.3, se sigue que $y \notin ker(\{x\})$ lo cual implica que existe $V \in \tau$ tal que $x \in V$ y $y \notin V$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico T_0. □

Lema 3.3. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_0;*
2. *Si $y \in ker(\{x\})$, entonces $x \notin ker(\{y\})$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico T_0 y $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $y \in ker(\{x\})$.

Si $x \in ker(\{y\})$ de la Definición 2.1 y dado que $y \in ker(\{x\})$ tenemos que $y \in U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $x \in V$ para todo $V \in \tau$ tal que $y \in V$, contradiciendo que (X, τ) es un espacio topológico T_0.

Por lo tanto

$$x \notin ker(\{y\}).$$

2) implica 1) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $y \in ker(\{x\})$, implica que $x \notin ker(\{y\})$.

Como $x \notin ker(\{y\})$, por el Teorema 2.3, tenemos $y \notin cl(\{x\})$ lo cual implica que existe $U \in \tau$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico T_0. □

Lema 3.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio T_0;*

2. *Para todo $x \in X$, $d(\{x\})$ es unión de conjuntos cerrados.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) un espacio T_0 y $y \in d(\{x\})$.

Como $y \in d(\{x\})$, de la Definición 2.1, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ de donde $y \in (X \setminus U)$ y $x \notin (X \setminus U)$.

Dado que $y \in d(\{x\}) \subset cl(\{x\})$ y $y \in (X \setminus U)$, entonces $y \in cl(\{x\}) \cup (X \setminus U)$ el cual es un conjunto cerrado.

Afirmamos que $cl(\{x\}) \cup (X \setminus U) \subset d(\{x\})$.

Sea $z \in cl(\{x\}) \cup (X \setminus U)$, entonces $z \in cl(\{x\})$ y $z \in (X \setminus U)$. De la Definición 2.1 se sigue que $z \in \{x\} \cup d(\{x\})$ y $z \in (X \setminus U)$ lo cual implica que $z \in d(\{x\})$ es decir,

$$cl(\{x\}) \cup (X \setminus U) \subset d(\{x\}).$$

Por lo tanto, $d(\{x\})$ es union de conjuntos cerrados.

2) implica 1) Supongamos que para todo $x \in X$, $d(\{x\})$ es unión de conjuntos cerrados.

Sea $y \in X$ con $x \neq y$, entonces $y \in d(\{x\})$ o $y \notin d(\{x\})$.

Si $y \in d(\{x\})$, como $d(\{x\})$ es unión de conjuntos cerrados, existe un conjunto cerrado F tal que $y \in F$ y $x \notin F$ lo cual implica que

$$x \in (X \setminus F), y \notin (X \setminus F) \text{ y } (X \setminus F) \in \tau.$$

Si $y \notin d(\{x\})$, entonces

$$y \in (X \setminus cl(\{x\})),\ x \notin (X \setminus cl(\{x\})) \text{ y } (X \setminus cl(\{x\})) \in \tau.$$

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico T_0. □

Lema 3.5. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_0;*

2. *Para todo $x \in X$, $I(\{x\}) = \{x\}$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio T_0 y $x \in X$.

Como $x \in cl(\{x\})$ y $x \in ker(\{x\})$, entonces

$$\{x\} \subset cl(\{x\}) \cap ker(\{x\}) = I(\{x\}).$$

Ahora sea $y \in X$ tal que $y \notin \{x\}$, entonces $y \neq x$ y dado que (X, τ) es un espacio T_0 existe $U \in \tau$ tal que

$$(y \in U \text{ y } x \notin U) \text{ o } (x \in U \text{ y } y \notin U).$$

Si $(y \in U$ y $x \notin U)$, entonces $y \notin cl(\{x\})$.
Si $(x \in U$ y $y \notin U)$, implica $y \notin ker(\{x\})$.
Por lo tanto si $y \notin \{x\}$, tenemos que

$$y \notin ker(\{x\}) \text{ o } y \notin cl(\{x\})$$

de donde tenemos que $y \notin I(\{x\})$.

Por lo tanto para todo $x \in X$,

$$I(\{x\}) = \{x\}.$$

2) implica 1) Sean $x, y \in X$ tales $I(\{x\}) = \{x\}$ y $y \neq x$.

Como $y \neq x$, entonces $y \notin I(\{x\})$ lo cual implica que $y \notin cl(\{x\})$ o $y \notin ker(\{x\})$.

Si $y \notin cl(\{x\})$, existe $U \in \tau$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$.
Si $y \notin ker(\{x\})$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$.
Por lo tanto (X, τ) es un espacio topológico T_0. □

Lema 3.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_0;*

2. *Si $x \in cl(\{y\})$ y $y \in cl(\{x\})$, entonces $x = y$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico T_0 y $x, y \in X$ tales que $x \in cl(\{y\})$ y $y \in cl(\{x\})$.

Si $x \neq y$, existe $U \in \tau$ tal que ($x \in U$ y $y \notin U$) o ($y \in U$ y $x \notin U$).

Si $x \in U$ y $y \notin U$, entonces $x \notin cl(\{y\})$ lo cual no puede ser.

Si $y \in U$ y $x \notin U$, implica que $y \notin cl(\{x\})$ lo cual no puede ser.

Por lo tanto,

$$x = y.$$

2) implica 1) Sean $x, y \in X$ tales que $x \in cl(\{y\})$ y $y \in cl(\{x\})$, esto implica que $x = y$.

Si (X, τ) no es un espacio topológico T_0, existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que para todo $U \in \tau$, $x \in U$ si y solo si $y \in U$. En consecuencia $x \in cl(\{y\})$ y $y \in cl(\{x\})$ de donde $x = y$ lo cual no puede ser.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico T_0. □

Lema 3.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_0;*

2. *Para todo $x \in X$, $d(\{x\}) \cap (ker(\{x\}) \setminus \{x\}) = \emptyset$.*

Demostración. 1) implica 2) Supongamos que existe $x \in X$ tal que, $d(\{x\}) \cap (ker(\{x\}) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, entonces existe $y \in d(\{x\}) \cap (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$. Esto implica que $y \in d(\{x\})$ y $y \in (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$.

Como $y \in d(\{x\})$, por el Teorema 2.3, se tiene que $x \in (ker(\{y\}) \setminus \{y\})$. Por lo tanto $y \in (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$ y $x \in (ker(\{y\}) \setminus \{y\})$, es decir para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$, $y \in U$ y $y \neq x$ y para todo $V \in \tau$ tal que $x \in V$, $y \in V$ y $y \neq x$. Lo cual no puede ser ya que (X, τ) es un espacio topológico T_0.

Por lo tanto,

$$\text{para todo } x \in X, d(\{x\}) \cap (ker(\{x\}) \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

2) implica 1. Si (X, τ) no es un espacio topológico T_0, entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $y \in U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $x \in V$ para todo $V \in \tau$ tal que $y \in V$ de donde $y \in ker(\{x\})$ y $x \in ker(\{y\})$.

Como $x \in ker(\{y\})$, del Teorema 2.3, $y \in cl(\{x\})$, entonces $y \in cl(\{x\})$, $y \in ker(\{x\})$ y $x \neq y$.

Por lo tanto, $d(\{x\}) \cap (ker(\{x\}) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. □

Lema 3.8. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_0;*

2. *Si $y \in (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$, entonces $ker(\{y\}) \subset (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean $y \in (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$, $z \in ker(\{y\})$ y $U \in \tau$ tales que $x \in U$, entonces $y \in U$ y $y \neq x$. Esto implica que $z \in U$.

Afirmamos que $z \neq x$. Si $z = x$, entonces $x \in ker(\{y\})$, de donde $y \in (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$ y $x \in ker(\{y\})$ con lo que $y \in U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $x \neq y$ y $x \in V$ para todo $V \in \tau$ tal que $y \in V$. Contradiciendo que (X, τ) es un espacio topológico T_0. Por lo tanto, $z \in U$ y $z \neq x$.

Con lo cual cocluimos que

$$ker(\{y\}) \subset (ker(\{x\}) \setminus \{x\}).$$

2) implica 1) Si (X, τ) no es un espacio topológico T_0, entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $x \in U$ si y solo si $y \in U$ para todo $u \in \tau$. Lo cual contradice la hipotesis. □

Lema 3.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_0;*

2. *Si $y \in d(\{x\})$, entonces $cl(\{y\}) \subset d(\{x\})$.*

Demostración. Sean $y \in d(\{x\})$, $z \in cl(\{y\})$ y $U \in \tau$ tal que $z \in U$, entonces $y \in U$ y se sigue que $x \in (U \setminus \{y\})$.

Afirmamos que $x \neq z$. Si $x = z$, entonces $x \in cl(\{y\})$ y como $x \neq y$, entonces $x \in d(\{y\})$. Por lo tanto $y \in d(\{x\})$ y $x \in d(\{y\})$ y del Teorema 2.3, tenemos que $x \in (ker(\{y\}) \setminus \{y\})$ y $y \in (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$ lo cual implica que $y \in U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \neq x$ y $x \in V$ para todo $V \in \tau$ tal que $y \in V$ y $y \neq x$. Contradiciendo que (X, τ) es T_0 de donde $x \in (U \setminus \{z\})$.

Por lo tanto si $y \in d(\{x\})$, entonces $cl(\{y\}) \subset d(\{x\})$. □

De los Lemas 2.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9 se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_0.*
2. *Si $y \in cl(\{x\})$, entonces $x \notin cl(\{y\})$.*
3. *Si $y \in ker(\{x\})$, entonces $x \notin ker(\{y\})$.*
4. *Para todo $x \in X$, $d(\{x\})$ es unión de conjuntos cerrados.*
5. *Para todo $x \in X$, $I(\{x\}) = \{x\}$.*
6. *Para todo $x, y \in X$ si $x \in cl(\{y\})$ y $y \in cl(\{x\})$, entonces $x = y$.*
7. *Para todo $x \in X$, $d(\{x\}) \cap (ker(\{x\}) \setminus \{x\}) = \emptyset$.*
8. *Si $y \in (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$, entonces $ker(\{y\}) \subset (ker(\{x\}) \setminus \{x\})$.*
9. *Si $y \in d(\{x\})$, entonces $cl(\{y\}) \subset d(\{x\})$.*

4 Espacios R_0

Definición 4.1. (X, τ) es un espacio topológico R_0 si para $U \in \tau$

$$U = \cup\{F \subset U : F = cl(F)\}.$$

Lema 4.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0;*
2. *$cl(\{x\}) \subset U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico R_0, $U \in \tau$ y $x \in U$.

Como $U \in \tau$ y $x \in U$, existe un conjunto cerrado $F \subset U$ tal que $x \in F$ y aplicando el Teorema 2.3, $cl(\{x\}) \subset F$.

2) implica 1) Supongamos que $cl(\{x\}) \subset U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Es claro que

$$U = \cup\{cl(\{x\}) : x \in U\}.$$

Por lo tanto (X, τ) es un espacio topológico R_0. □

Lema 4.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0;*

2. *$ker(F) = F$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico R_0 y $F \subset X$ un conjunto cerrado.

Como F es un conjunto cerrado, entonces $X \setminus F \in \tau$ lo cual implica que $X \setminus F = \cup\{C \subset X \setminus F : cl(C) = C\}$ es decir $F = \cap\{X \setminus C : F \subset X \setminus C\}$.

Por lo tanto

$$ker(F) = F.$$

2) implica 1) Supongamos que $ker(F) = F$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$.

Sea $U \in \tau$, entonces $X \setminus U$ es un conjunto cerrado lo cual implica que $ker(X \setminus U) = X \setminus U$, y que U es unión de conjuntos cerrados.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico R_0. □

Lema 4.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0;*

2. *$cl(\{x\}) \subset ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico R_0.

Sean $x \in X$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$, por el Lema 3.2, se tiene que $cl(\{x\}) \subset U$ de donde $cl(\{x\}) \subset \cap\{U : U \in \tau$ tal que $x \in U\}$.

Por lo tanto,

$$cl(\{x\}) \subset ker(\{x\}) \text{ para todo } x \in X.$$

2) implica 1) Supongamos que $cl(\{x\}) \subset ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.

Como $cl(\{x\}) \subset ker(\{x\})$ para todo $x \in X$, $cl(\{x\}) \subset U$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$.

Por lo tanto, del Lema 4.2 (X, τ), es un espacio topológico R_0. □

Lema 4.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0;*

2. *$cl(\{x\}) = ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

Demostración. 1) implica 2) Supongamos que (X, τ) es un espacio R_0.

Del Lema 4.3, se tiene que $cl(\{x\}) = ker(cl(\{x\}))$. Dado que $x \in cl(\{x\})$, se sigue que $x \in ker(cl(\{x\}))$ y por el Teorema 2.3, $ker(\{x\}) \subset ker(cl(\{x\}))$ con lo cual obtenemos que $ker(\{x\}) \subset cl(\{x\})$ y por Lema 4.4, $cl(\{x\}) \subset ker(\{x\})$.

Por lo tanto

$$cl(\{x\}) = ker(\{x\}) \text{ para todo } x \in X.$$

2) implica 1) Se sigue del Lema 4.4. □

De la definición de $I(x)$ y el Lema 4.5 tenemos los siguientes 2 resultados.

Lema 4.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0*

2. *$I(x) = cl(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

Lema 4.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0;*

2. *$I(x) = ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

Lema 4.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0;*

2. *Para todo conjunto cerrado $F \subset X$ y para todo $x \in X$ tal que $x \notin F$ existe $U \in \tau$ tal que $F \subset U$ y $x \notin U$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean que (X, τ) un espacio topológico R_0, $F \subset X$ un conjunto cerrado y $x \in X$ tal que $x \notin F$.

Como $F \subset X$ es un conjunto cerrado y $x \in X$ es tal que $x \notin F$ entonces $x \in X \setminus F$ y $X \setminus F \in \tau$ que implica que existe un conjunto cerrado $K \subset X \setminus F$ tal que $x \in K$ por lo tanto $F \subset (X \setminus K)$ *y* $x \notin (X \setminus K)$.

Definiendo $U = X \setminus K$ concluimos que

$$U \in \tau, F \subset U \text{ y } x \notin U.$$

2) implica 1) Supongamos que para todo conjunto cerrado $F \subset X$ y para todo $x \in X$ con $x \notin F$ existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $F \subset U$ y $x \notin U$.

Sean $V \in \tau$ y $x \in V$, entonces $x \notin (X \setminus V)$ implica que existe $U \in \tau$ tal que $(X \setminus V) \subset U$ y $x \notin U$ de donde $x \in (X \setminus U) \subset V$ y del Teorema 2.3, se tiene que $cl(\{x\}) \subset (X \setminus U) \subset V$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico R_0. □

Lema 4.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0;*

2. *$cl(\{x\}) \cap F = \emptyset$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$ y para todo $x \in X$ tal que $x \notin F$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico R_0, $F \subset X$ y $x \in X$ tal que $x \notin F$.

Como $F \subset X$ un conjunto cerrado y $x \notin F$, entonces $x \in (X \setminus F)$ y del Lema 4.2, se sigue que $cl(\{x\}) \subset (X \setminus F)$, lo cual implica que

$$cl(\{x\}) \cap F = \emptyset.$$

2) implica 1) Supongamos que $cl(\{x\}) \cap F = \emptyset$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$ y para todo $x \in X$ tal que $x \notin F$.

Sea $U \in \tau$ y $x \in U$, entonces $x \notin (X \setminus U)$ y $(X \setminus U)$ es un conjunto cerrado lo cual implica que $cl(\{x\}) \cap (X \setminus U) = \emptyset$ y del Teorema 2.3, se sigue que $cl(\{x\}) \subset U$.

Del Lema 4.2, concluimos que (X, τ) es un espacio topológico R_0. □

Lema 4.10. *Sean (X, τ) un espacio topológico R_0 y $x, y \in X$ tales que si $y \in cl(\{x\})$, entonces $cl(\{y\}) = cl(\{x\})$.*

Demostración. Como $y \in cl(\{x\})$ del Teorema 2.3, tenemos que $cl(\{y\}) \subset cl(\{x\})$.

Afirmamos que $x \in cl(\{y\})$. Si $x \notin cl(\{y\})$, entonces $x \in (X \setminus cl(\{y\}))$ por lo tanto existe un conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $x \in F \subset (X \setminus cl(\{y\}))$ de donde $cl(\{x\}) \subset (X \setminus cl(\{y\}))$ lo cual implica que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) = \emptyset$ que no puede ser ya que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) \neq \emptyset$ y del Teorema 2.3, tenemos que $cl(\{x\}) \subset cl(\{y\})$.

Por lo tanto, $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$. □

Lema 4.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0;*
2. *Para todo $x, y \in X$ tales que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) \neq \emptyset$, se tiene que $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico R_0 y $x, y \in X$ tales que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) \neq \emptyset$.

Como $x, y \in X$ son tales que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) \neq \emptyset$ existe $z \in cl(\{x\}) \cap cl(\{y\})$ lo cual implica que $z \in cl(\{x\})$ y $z \in cl(\{y\})$ y del Lema 4.10, se tiene que $cl(\{x\}) = cl(\{z\})$ y $cl(\{z\}) = cl(\{y\})$.

Por lo tanto

$$cl(\{x\}) = cl(\{y\}).$$

2) implica 1) Supongamos que para todo $x, y \in X$ tales que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) \neq \emptyset$, se tiene que $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$.

Sean $U \in \tau$ y $x \in U$. Afirmamos que $cl(\{x\}) \subset U$.

Ya que si $cl(\{x\})$ no esta contenido en U existe $z \in cl(\{x\}) \setminus U$ lo cual implica que $cl(\{z\}) = cl(\{x\})$ y $cl(\{z\}) \subset U^c$ de donde $cl(\{x\}) \subset U^c$ es decir $x \in U^c$ contradiciendo que $x \in U$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico R_0. □

De los Lemas 4.2–4.11 se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_0.*

2. *$cl(\{x\}) \subset U$ para todo conjunto abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$.*

3. *$ker(F) = F$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$.*

4. *$cl(\{x\}) \subset ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

5. *$cl(\{x\}) = ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

6. *$I(x) = cl(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

7. *$I(x) = ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.*

8. *Para todo $x, y \in X$ tales que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) \neq \emptyset$, entonces $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$.*

9. *Para todo $x, y \in X$ tales que $ker(\{x\}) \cap ker(\{y\}) \neq \emptyset$, entonces $ker(\{x\}) = ker(\{y\})$.*

5 Espacios R_1

Definición 5.1. (X, τ) es un espacio topológico R_1 si para todo $x, y \in X$ tales que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ existen conjuntos $U, V \in \tau$ tales que

$$cl(\{x\}) \subset U, cl(\{y\}) \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Lema 5.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico R_1, entonces (X, τ) es u espacio topológico R_0.*

Demostración. Sea $W \in \tau$ y $x \in W$. Supongamos que existe $y \in cl(\{x\})$ tal que $y \notin W$, entonces $y \in W^c$ se sigue que $cl(\{y\}) \subset W^c$ y $x \notin cl(\{y\})$ lo cual implica que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ por lo tanto existen conjuntos $U, V \in \tau$ tales que

$$cl(\{x\}) \subset U, cl(\{y\}) \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Como $cl(\{x\}) \subset U$ y $y \in cl(\{x\})$, entonces $y \in U$ y como $y \in cl(\{y\}) \subset V$ implica que $U \cap V \neq \emptyset$ que es una contradicción.

Por lo tanto, (X, τ) es R_0. □

Lema 5.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X,τ) es un espacio R_1;*

2. *Para todo $x,y \in X$, con $x \neq y$ tales que $ker(\{x\}) \neq ker(\{y\})$ implica que existen conjuntos cerrados $F_1, F_2 \subset X$ tales que*

$$ker(\{x\}) \subset F_2,\ ker(\{x\}) \cap F_1 = \emptyset,$$

$$ker(\{y\}) \subset F_1,\ ker(\{y\}) \cap F_2 = \emptyset \text{ y } F_1 \cup F_2 = X.$$

Demostración. 1) implica 2) Sea (X,τ) es un espacio R_1 tal que para todo $x,y \in X$, con $x \neq y$, $ker(\{x\}) \neq ker(\{y\})$.

Como (X,τ) es un espacio R_1 del Lema 5.2, se sigue que (X,τ) es un espacio R_0 y dado que $ker(\{x\}) \neq ker(\{y\})$ se tiene que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ lo cual implica que existen $U, V \in \tau$ tales que

$$cl(\{x\}) \subset U, cl(\{y\}) \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Definamos $F_1 = U^c$, $F_2 = V^c$ es claro que $F_1 \cup F_2 = X$, F_1, F_2 son conjuntos cerrados, $x \in U \subset F_2$, $y \in V \subset F_1$ lo cual implica que $ker(\{x\}) \subset U \subset F_2$ y claramente $ker(\{x\}) \cap F_1 = \emptyset$ en forma análoga $ker(\{y\}) \subset U \subset F_1$ y $ker(\{y\}) \cap F_2 = \emptyset$.

2) implica 1) Supongamos que para todo $x,y \in X$, con $x \neq y$ tales que $ker(\{x\}) \neq ker(\{y\})$ existen conjuntos cerrados $F_1, F_2 \subset X$ tales que

$$ker(\{x\}) \subset F_2,\ ker(\{x\}) \cap F_1 = \emptyset,$$

$$ker(\{y\}) \subset F_1,\ ker(\{y\}) \cap F_2 = \emptyset \text{ y } F_1 \cup F_2 = X.$$

Como $F_1 \cup F_2 = X$, entonces $F_1^c \cap F_2^c = \emptyset$ es claro que $F_1^c, F_2^c \in \tau$ de donde tomando $V = F_2^c$ y $U = F_1^c$ se tiene que

$$cl(\{x\}) \subset U,\ cl(\{y\}) \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Por lo tanto (X,τ) es un espacio topológico R_1. □

Lema 5.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X,τ) es un espacio topológico R_1;*

2. *Para todo $x, y \in X$, tal que $x \neq y$ con $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ existen $U, V \in \tau$ tales que*

$$cl[ker(\{x\})] \subset U,\ cl[ker(\{y\})] \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Demostración. 1) implica 2) Sean (X,τ) es un espacio topológico R_1, $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$.

Como (X,τ) es un espacio topológico R_1 y $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$, entonces

1. Existen $U, V \in \tau$ tales que $cl(\{x\}) \subset U$, $cl(\{y\}) \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

2. (X,τ) es un espacio topológico R_0

Como (X,τ) es un espacio topológico R_0, entonces $cl(\{x\} = ker(\{x\}))$ que implica que $cl(\{x\} = cl(cl(\{x\})) = cl(ker(\{x\})))$.

Por lo tanto

$$cl[ker(\{x\})] \subset U,\ cl[ker(\{y\})] \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

2) implica 1) Es inmediato. □

Lema 5.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X,τ) es un espacio topológico R_1;*

2. *Para todo $x, y \in X$, tales que $x \neq y$ si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ implica que existen*

$$V, W \in \tau \text{ tales que } x \in V, y \in W, V \subset U \text{ y } V \cap W = \emptyset.$$

Demostración. 1) implica 2) Sean (X,τ) un espacio topológico R_1 y $x, y \in X$, tales que $x \neq y$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$.

Como (X,τ) un espacio topológico R_1 tenemos que

1. (X,τ) un espacio topológico R_0 y dado que $x \in U$, entonces $cl(\{x\}) \subset U$ y como $y \notin U$, $cl(\{y\}) \subset U^c$ lo cual implica que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) = \emptyset$.

2. Existen $U', W \in \tau$ tales que $cl(\{x\}) \subset U'$, $cl(\{y\}) \subset W$ y $U' \cap W = \emptyset$.

Definiendo $V = U \cap U'$ concluimos que

$$V, W \in \tau \text{ tales que } x \in V, y \in W, V \subset U \text{ y } V \cap W = \emptyset.$$

2) implica 1) Supongamos que para todo $x, y \in X$, tales que $x \neq y$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$, entonces existen

$$V, W \in \tau \text{ tales que } x \in V, y \in W, V \subset U \text{ y } V \cap W = \emptyset.$$

De la hipótesis se sigue que (X, τ) un espacio topológico R_0 lo cual implica que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) = \emptyset$ de donde $(cl(\{x\}))^c \in \tau$, $y \in (cl(\{x\}))^c$ y $x \notin (cl(\{x\}))^c$ y por hipótesis existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ y $V \subset (cl(\{x\}))^c$ lo cual implica que $cl(\{x\}) \subset U$, $cl(\{y\}) \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico R_1. □

Lema 5.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_1;*
2. *Para todo $x, y \in X$, tales que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ existen conjuntos cerrados $F_1, F_2 \subset X$ tales que*

$$x \in F_1, y \notin F_1, y \in F_2, x \notin F_2, F_1 \cup F_2 = X.$$

Demostración. 1)implica 2) Sea (X, τ) es un espacio topológico R_1.

Como (X, τ) es un espacio topológico R_1, entonces para todo $x, y \in X$ con $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ existen $U, V \in \tau$ tales que $cl(\{x\}) \subset U$, $cl(\{x\}) \subset U$ y $U \cap V = \emptyset$.

De donde tomando $F_1 = V_2^c$ y $F_2 = V_1^c$ se sigue que

$$x \in F_1, y \notin F_1, y \in F_2, x \notin F_2, F_1 \cup F_2 = X.$$

2) implica 1) Supongamos que para todo $x, y \in X$, tales que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ existen conjuntos cerrados $F_1, F_2 \subset X$ tales que

$$x \in F_1, y \notin F_1, y \in F_2, x \notin F_2, F_1 \cup F_2 = X.$$

Como $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ se sigue que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) = \emptyset$ lo cual implica que (X, τ) es un espacio topológico R_0 tal que $x \in F_1 \setminus F_2$ y $y \in F_2 \setminus F_1$ se tine que $cl(\{x\}) \subset F_1 \setminus F_2$, $cl(\{y\}) \subset F_2 \setminus F_1$ y $(F_1 \setminus F_2) \cap (F_2 \setminus F_1) = \emptyset$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico R_1. □

Lema 5.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_1;*

2. *Para todo $x, y \in X$, tales que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ existen $U, V \in \tau$ tales que*
$$x \in U, y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Demostración. 1) implica 2) Es inmediato.

2) implica 1) Supongamos que para todo $x, y \in X$, tales que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Si (X, τ) no es un espacio topológico R_1, entonces existen $x, y \in X$ con $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ tales que para todo $U, V \in \tau$ con

$$cl(\{x\}) \subset U, cl(\{y\}) \subset V \text{ y } U \cap V \neq \emptyset.$$

lo cual implica que para todo $U, V \in \tau$ tal que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V \neq \emptyset$ que contradice la suposición.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico R_1. □

Lema 5.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_1;*

2. *El conjunto*
$$\Delta^* = \{(x, y) \in X \times X : cl(\{x\}) = cl(\{y\})\}$$

es un conjunto cerrado en $X \times X$.

Demostración. 1) implica 2) Sea (X, τ) es un espacio topológico R_1 y $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta^*$, entonces $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ implica que existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Es claro que $U \times V$ es un conjunto abierto en $X \times X$ y $\Delta^* \cap (U \times V) = \emptyset$.

Por lo tanto

$$\Delta^* = \{(x, y) \in X \times X : cl(\{x\}) = cl(\{y\})\}$$

es un conjunto cerrado en $X \times X$.

2) implica 1) Supongamos que

$$\Delta^* = \{(x, y) \in X \times X : cl(\{x\}) = cl(\{y\})\}$$

es un conjunto cerrado en $X \times X$, entonces para todo $x, y \in X$ tales que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ de donde $(x, y) \notin \Delta^*$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\Delta^* \cap (U \times V) = \emptyset$ lo cual implica que $U \cap V = \emptyset$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico R_1. □

Lema 5.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_1;*

2. *Para todo $x, y \in X$ tal que $y \in X \setminus cl(\{x\})$ existen*

$$U, V \in \tau \text{ tales que } y \in U, cl(\{x\}) \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico R_1 y $x, y \in X$ tal que $y \in X \setminus cl(\{x\})$.

Como $y \in X \setminus cl(\{x\})$, entonces $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\}$ se sigue que existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$ y dado que (X, τ) es un espacio topológico R_1 se tiene que (X, τ) es un espacio topológico R_0 y $x \in V$ tenemos que $cl(\{x\}) \subset V$.

Por lo tanto si $y \in X \setminus cl(\{x\})$ existen

$$U, V \in \tau \text{ tales que } y \in U, cl(\{x\}) \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

2) implica 1) Sean $x, y \in X$ tales que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$.

Como $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ sin perdida de generalidad podemos suponer que existe $z \in cl(\{x\})$ y $z \notin cl(\{y\})$, entonces $z \in X \setminus [cl(\{y\})]$ lo cual implica que existe $U, V \in \tau$ tales que $z \in U$, $cl(\{y\}) \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Como $z \in cl(\{x\})$ y $z \in U$, se tiene que $x \in U$ y $cl(\{y\}) \subset V$ que implica que $y \in V$ por lo tanto si $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ existen

$$U, V \in \tau \text{ tales que } x \in U, y \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico R_1. □

Lema 5.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_1;*

2. *Para todo $x, y \in X$ tales que $y \in X \setminus cl(\{x\})$ existe*

$$U \in \tau \text{ tal que } y \in U \text{ y } cl(U) \subset X \setminus cl(\{x\}).$$

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico R_1 y $x, y \in X$ tales que $y \in X \setminus cl(\{x\})$.

Como $y \in X \setminus cl(\{x\})$ del Lema 5.9, se sigue que existen $U, V \in \tau$ tales $y \in U$, $cl(\{x\}) \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. y $U \cap V = \emptyset$. Dado que $cl(\{x\}) \subset V$ se tiene que $cl(U) \cap cl(\{x\}) \subset cl(U) \cap V$, si $cl(U) \cap cl(\{x\}) \neq \emptyset$, entonces $cl(U) \cap V \neq \emptyset$ lo que implica que $U \cap V \neq \emptyset$ lo cual no puede ser por lo tanto $cl(U) \cap cl(\{x\}) \neq \emptyset$ de donde $cl(U) \subset X \setminus cl(\{x\}$.

Por lo tanto si $y \in X \setminus cl(\{x\})$ existe

$$U \in \tau \text{ tal que } y \in U \text{ y } cl(U) \subset X \setminus cl(\{x\}).$$

2) implica 1) Sean $x, y \in \tau$ tales que $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$.

Como $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ sin perdida de generalidad podemos suponer que $y \neq cl(\{x\})$, entonces $y \in X \setminus \{x\}$ que implica que existe $U \in \tau$ tal que $y \in U$ y $cl(U) \subset X \setminus cl(\{x\})$ de donde $cl(\{x\}) \subset X \setminus cl(U)$, eligiendo $V = X \setminus cl(U)$, $V \in \tau$, $x \in V$, $y \in U$ y $U \cap V = \emptyset$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico R_1. □

De los Lemas 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10 se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico R_1;*

2. *Para todo $x, y \in X$, con $x \neq y$ tales que $ker(\{x\}) \neq ker(\{y\})$ existen conjuntos cerrados $F_1, F_2 \subset X$ tales que*

$$ker(\{x\}) \subset F_2,\ ker(\{x\}) \cap F_1 = \emptyset,$$

$$ker(\{y\}) \subset F_1,\ ker(\{y\}) \cap F_2 = \emptyset \text{ y } F_1 \cup F_2 = X.$$

3. *Para todo* $x, y \in X$, *tal que* $x \neq y$ *con* $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ *existen* $U, V \in \tau$ *tales que*

$$cl[ker(\{x\})] \subset U,\ cl[ker(\{y\})] \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

4. *Para todo* $x, y \in X$, *tales que* $x \neq y$ *si existe* $U \in \tau$ *tal que* $x \in U$ *y* $y \notin U$, *entonces existen*

$$V, W \in \tau \text{ tales que } x \in V, y \in W, V \subset U \text{ y } V \cap W = \emptyset.$$

5. *Para todo* $x, y \in X$, *tales que* $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ *existen conjuntos cerrados* $F_1, F_2 \subset X$ *tales que*

$$x \in F_1, y \notin F_1, y \in F_2, x \notin F_2, F_1 \cup F_2 = X.$$

6. *Para todo* $x, y \in X$, *tales que* $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ *existen* $U, V \in \tau$ *tales que*

$$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset.$$

7. *El conjunto*

$$\Delta^* = \{(x, y) \in X \times X : cl(\{x\}) = cl(\{y\})\}$$

es un conjunto cerrado en $X \times X$.

8. *Para todo* $x, y \in X$ *tal que* $y \in X \setminus cl(\{x\})$ *existen*

$$U, V \in \tau \text{ tales que } y \in U, cl(\{x\}) \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

9. *Para todo* $x, y \in X$ *tales que* $y \in X \setminus cl(\{x\})$ *existe*

$$U \in \tau \text{ tal que } y \in U \text{ y } cl(U) \subset X \setminus cl(\{x\}).$$

6 Espacios T_1

Definición 6.1. (X, τ) es un espacio topológico T_1 si para todo $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen conjuntos abiertos $U_x, U_y \subset X$ tales que

$$(x \in U_x \text{ y } y \notin U_x) \text{ y } (y \in U_y \text{ y } x \notin U_x).$$

Lema 6.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_1;*

2. *Para todo $x \in X$, $cl(\{x\}) = \{x\}$.*

Demostración. 1) implica 2) Supongamos que (X, τ) es un espacio T_1.

Sea $x \in X$, entonces $x \in cl(\{x\}$ implica que $\{x\} \subset cl(\{x\})$.

Supongamos que existe $y \notin \{x\}$ del Teorema 2.3, $x \notin ker(\{y\})$, entonces existe $U \in \tau$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$ implica que $y \notin cl(\{x\}$.

Por lo tanto para todo $x \in X$

$$cl(\{x\}) = \{x\}.$$

2) implica 1) Supongamos para todo $x \in X$, $cl(\{x\}) = \{x\}$.

Sea $y \in X$ con $x \neq y$, como $cl(\{x\}) = \{x\}$, entonces $y \notin cl(\{x\})$ de donde existe $U \in \tau$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$.

Como $cl(\{y\}) = \{y\}$, entonces $x \notin cl(\{y\})$ por lo que existe $V \in \tau$ tal que $x \in V$ y $y \notin V$.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico T_1. □

Lema 6.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_1;*

2. *Para todo $x \in X$, $d(\{x\}) = \emptyset$.*

Demostración. 1) implica 2) Supongamos que (X, τ) es un espacio T_1.

Como X es un espacio T_1 del Lema 6.2, para todo $x \in X$, $cl(\{x\}) = \{x\}$ y del Lema 2.2, tenemos que $d(\{x\}) = \emptyset$.

2) implica 1) Supongamos que para todo $x \in X$, $d(\{x\}) = \emptyset$.

Por el Lema 2.2, $cl(\{x\}) = \{x\} \cup d(\{x\})$ y dado que $d(\{x\}) = \emptyset$, entonces $cl(\{x\}) = \{x\}$.

Por el Lema 6.2, (X, τ) es un espacio T_1. □

Lema 6.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio topológico T_1;*

2. *Para todo* $x \in X$, $ker(\{x\}) = \{x\}$.

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio topológico T_1 y $x \in X$.

Es claro que $\{x\} \subset ker(\{x\})$.

Ahora sea $y \in X$ tal que $y \in ker(\{x\})$ del Teorema 2.3 tenemos que $x \in cl(\{y\})$ y del Lema 6.2, $cl(\{y\}) = \{y\}$ de donde $x \in \{y\}$, entonces $x = y$ que implica que $y \in \{x\}$.

Por lo tanto para todo $x \in X$

$$ker(\{x\}) = \{x\}.$$

2) implica 1) Supongamos que para todo $x \in X$, $ker(\{x\}) = \{x\}$.

Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces $y \notin ker(\{x\})$ y $x \notin ker(\{y\})$ por lo que existen $U, V \in \tau$ tales que ($x \in U$ y $y \notin U$) y ($y \in V$ y $x \notin V$).

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico T_1. □

Lema 6.5. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (X, τ) *es un espacio topológico* T_1*;*

2. *Para todo conjunto* $A \subset X$ *finito,* A *es un conjunto cerrado.*

Demostración. 1) implica 2) Sean (X, τ) es un espacio T_1 y $A \subset X$ un conjunto finito.

Como $A \subset X$ es un conjunto finito sea $A = \{x_1, x_2, ...x_n\}$ por el Lema 6.2, $cl(\{x_i\}) = \{x_i\}$ de donde

$$A = \{cl(\{x_1\}), cl(\{x_2\}), ..., cl(\{x_n\})\}.$$

Por lo tanto A es un conjunto cerrado.

2) implica 1) Supongamos que todo conjunto finito $A \subset X$ es un conjunto cerrado.

Sea $x \in X$ y consideremos el conjunto $A = \{x\}$, de donde se sigue que $cl(\{x\}) = \{x\}$.

Del Lema 6.2, (X, τ) es un espacio topológico T_1. □

Lema 6.6. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (X, τ) *es un espacio topológico* T_1*;*

2. *Para todo conjunto* $A \subset X$, $ker(A) = A$.

Demostración. 1) implica 2) Supongamos que (X, τ) es un espacio T_1.

Sea $A \subset X$, es claro que $A \subset ker(A)$. Ahora si $x \notin ker(A)$, entonces existe $U \in \tau$ tal que $A \subset U$ y $x \notin U$ lo cual implica que $x \notin A$.

Por lo tanto

$$ker(A) = A.$$

2) implica 1) Es suficiente elegir $A = \{x\}$, entonces $ker(\{x\}) = \{x\}$ y aplicar Lema 6.4.

Por lo tanto, (X, τ) es espacio topológico T_1. □

Lema 6.7. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (X, τ) *es un espacio topológico* T_1*;*

2. (X, τ) *es un espacio topológico* T_0 *y* R_0.

Demostración. 1) implica 2) Es claro.

2) implica 1) Sean (X, τ) es un espacio topológico T_0 y R_0.

Supongamos que existe $x \in X$ tal que $cl(\{x\}) \neq \{x\}$, entonces existe $y \in cl(\{x\}) \setminus \{x\}$ lo cual implica que $y \in cl(\{x\})$ y $y \neq x$.

Como $y \in cl(\{x\})$ y (X, τ) es un espacio topológico R_0 se sigue que $cl(\{y\}) = cl(\{x\})$ y dado que (X, τ) es un espacio topológico T_0 se tiene que $x = y$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, (X, τ) es un espacio topológico T_1. □

De los Lemas 6.2, 6.3, 5.4, 6.5, 6.6 y 6.7 se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 6.8. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. (X, τ) *es un espacio topológico* T_1.

2. *Para todo* $x \in X$, $cl(\{x\} = \{x\})$.

3. *Para todo* $x \in X$, $d(\{x\}) = \emptyset$.

4. *Para todo* $x \in X$, $ker(\{x\}) = \{x\}$.

5. *Para todo conjunto* $A \subset X$ *finito* A *es un conjunto cerrado.*

6. *Para todo conjunto* $A \subset X$, $ker(A) = (A)$.

7. *Para todo* $x \in X$, $ker(\{x\}) \setminus \{x\} = \emptyset$.

8. *Para todo* $x, y \in X$ *con* $x \neq y$, $cl(\{x\} \cap cl(\{x\}) = \emptyset$.

9. *Para todo* $x, y \in X$ *con* $x \neq y$, $ker(\{x\} \cap ker(\{x\}) = \emptyset$.

10. (X, τ) *es un espacio topológico* T_0 *y* R_0.

Agradecimientos

Agradesco encarecidamente a los árbitros su revisón exhaustiva del trabajo. Sus sugerencias y comentarios permitieron mejorar sustancialmente una primera versión del mismo.

Bibliografía

[1] C. E. Aull and W. J. Thron, *Separation Axioms Between* T_0 *and* T_1 Indagationes Math 24 (1962) 26–37.

[2] A. S. Davis, *Indexed System of neighbourhoods for general topological spaces*, Amer. Math. Monthly 68 (1961) 886–893.

[3] C. Dorsett, R_0 *and* R_1*-topological spaces*, Mat. Vesnik 2 (1978) 117–122.

[4] K. K. Dube, *A note on* R_0*-topological spaces*, Mat. Vesnik 11 (1974) 203–208.

[5] K. K. Dube, *A note on* R_1 *topological spaces*, Periodica Mathematica Hungarica 13 (4) (1982) 267–271.

[6] K. K. Dube, *On* R_1 *topological spaces (II)*, Mathematical Chronicle. 16 (1987) 41–45.

[7] R. Engelking, *General topology*, Heldermann, Sigma series in pure mathematics, vol 6, 1989.

[8] M. G. Murdeshwar and S. A. Naimpally, R_1 *topological spaces*, Canad. Math. Bull, 9 (1966), 521–523.

[9] M. R. Zizovic, *A note on* R_0 *and* R_1 *topological spaces*, Mat. Vesnik 38 (1986) 112–115.

[10] L. A. Al-swidi and Basim Mohammed M, *Separation axioms via kernel set in topological spaces*, Archives des sciences 65 7 (2012) 41–48.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

maga@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 20, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-09-5

Capítulo 5

Sobre la unicidad del (n, m)-ésimo hiperespacio suspensión

Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ y X un continuo. Se define el (n, m)-hiperespacio suspensión de X como el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$, denotado por $HS_m^n(X)$. Se dice que X posee hiperespacio único $HS_m^n(X)$ si la siguiente implicación es válida: cada vez que Y sea un continuo tal que $HS_m^n(X)$ sea homeomorfo a $HS_m^n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y. En este trabajo se estudia la unicidad del hiperespacio $HS_m^n(X)$ para las familias de continuos enrejados y casi enrejados.

1 Introducción

A través de los años, el estudio de hiperespacios de conjuntos se ha convertido en un campo relevante dentro de la teoría de continuos.

Recordemos que un *continuo* es un espacio métrico no vacío, conexo y compacto. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un continuo X. Algunos continuos conocidos son el arco (cualquier espacio homeomorfo al intervalo [0,1]), la curva cerrada simple (un espacio homeomorfo a $\mathcal{S}^1$) y la curva del topólogo (la cerradura del espacio $\{(x, \sin(1/x)) \colon 0 < x \leq 1\}$). Llamaremos *hiperespacios* a algunos subconjuntos (cerrados) de un continuo X. Si $n \in \mathbb{N}$, estaremos interesados en los siguientes hiperespacios de X:

$$2^X = \{A \subset X \colon A \text{ es un subconjunto no vacío y cerrado de } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \text{ y}$$
$$C(X) = C_1(X).$$

A estos hiperespacios se les otorgará la métrica de Hausdorff [12, Theorem 2.2]. Los hiperespacios $F_n(X)$ y $C_n(X)$ se conocen como *n-ésimo producto simétrico* de X y el *n-ésimo hiperespacio* de X, respectivamente. Es importante recalcar que cada vez que X es un continuo, todos estos hiperespacios son en sí continuos (see [18, 1.8.8, 1.8.9, 1.8.12]).

En 2004, Sergio Macías introdujo el n-ésimos hiperespacio suspensión de un continuo en [16]. Tiempo después, en 2008, Juan C. Macías introdujo el n-ésimo pseudo-hiperespacio suspension de un continuo $HS_1^n(X)$, en [15]. Más aún, el hiperespacio $HS_1^n(X)$ se puede encontrar en la literatura en [3], [6], [7], [15], [16]–[20]. En 2018 José G. Anaya, David Maya y Francisco Vázquez-Juárez presentaron el (n,m)-ésimo hiperspacio suspensión, denotado por $HS_m^n(X)$, el cual se define como el cociente entre $C_n(X)$ y $F_m(X)$ for para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq m$. Por lo tanto, este hiperespacio es una generalización del n-ésimo hiperespacio suspensión, véase [1]. El hecho de que $HS_m^n(X)$ es un continuo se sigue de [21, Theorem 3.10].

Si X es un continuo y $n, m \in \mathbb{N}$ satisfacen $m \leq n$, el símbolo $q_X^{(n,m)}$ denota la proyección natural $q_X^{(n,m)} \colon C_n(X) \to HS_m^n(X)$, y F_X^m denota el elemento $q_X^{(n,m)}(F_m(X))$.

Una de las propiedades que se estudiarán sobre este hiperespacio es la unicidad. Se dice que un continuo X que pertenece a una familia de continuos Λ posee hiperespacio único $HS_m^n(X)$ si se tiene un continuo Y tal que cada que $HS_m^n(X)$ y $HS_m^n(Y)$ son homeomorfos, entonces X y Y también son homeomorfos. A lo largo de este trabajo se busca verificar si esta propiedad es válida para algunas familias de continuos.

2 Notación y definiciones

Dado un subconjunto A de un continuo X, A°, $\mathrm{cl}_X(A)$, y $\mathrm{Bd}_X(A)$, denotan el *interior*, la *cerradura*, y la *frontera* de A en X, respectivamente. Si d es la métrica de X, $\varepsilon > 0$, y $a \in X$, el conjunto $\{x \in X \colon d(a,x) < \varepsilon\}$ es denotado por $B_X(a,\varepsilon)$, o $B(a,\varepsilon)$ cuando no exista posibilidad de confusión. Sea $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{B(a,\varepsilon) \colon a \in A\}$. Dados $n, r \in \mathbb{N}$ y subconjuntos $U_1, \ldots, U_r$ de X, sea

$$\langle U_1,\ldots,U_r\rangle_n = \{A \in C_n(X)\colon A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1,\ldots,r\}\}.$$

Es conocido que [12, Theorem 1.2] la familia de conjuntos de la forma $\langle U_1,\ldots,U_r\rangle_n$, donde cada U_i es abierto en X, es una base para la topología de $C_n(X)$. Sean $p \in X$ y β número cardinal. Decimos que *p tiene orden menor o igual que β en X*, denotado por $\operatorname{ord}(p,X) \leq \beta$, cada que p tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ en X tal que la cardinalidad de $\operatorname{Bd}_X(U)$ es menor o igual a β, para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que *p tiene orden igual a β en X* ($\operatorname{ord}(p,X) = \beta$) si se cumple que $\operatorname{ord}(p,X) \leq \beta$ y $\operatorname{ord}(p,X) \nleq \alpha$ para cada número cardinal $\alpha < \beta$. Sean $E(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x,X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x,X) = 2\}$, y $R(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x,X) \geq 3\}$. Los elementos de $E(X)$ (respectivamente, $O(X)$ y $R(X)$) son llamados *puntos extremos* (respectivamente, *puntos ordinarios* y *puntos de ramificación*) de X. Una variedad topológica M (posiblemente con frontera) de dimensión finita n es una espacio topológico metrizable M donde cada uno de sus elementos x de M admite una vecindad abierta U y un homeomorfismo $\kappa : U \longrightarrow \kappa(U)$ sobre un subconjunto abierto del medio espacio Euclideano $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_1 \geq 0\}$. Los puntos x en M que corresponden a los puntos $\kappa(x)$ en el hiperplano $\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n_+\colon x_1 = 0\}$ forman la frontera como variedad de M. El interior como variedad de M se define como el complemento de la frontera como variedad en M, véase [11, p. 7].

Lema 2.1. *La función $q_X|_{C_n(X)-F_m(X)}\colon C_n(X) - F_m(X) \to HS^n_m(X) - \{F^m_X\}$ es un homeomorfismo.*

Definición 2.2. Dado un continuo X, sean

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X\colon x \text{ tiene una vecindad en } X \text{ la cual es una gráfica finita}\},$$

y

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Un continuo X se dice que es **casi enrejado** cada vez que el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Un continuo casi enrejado X es **enrejado** cuando X tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ tales que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo, para cada elemento $U \in \mathfrak{B}$.

Nuestra atención será dirigida a estas familias de continuos. Dado un continuo X y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, sea

$$\mathcal{L}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } C_n(X) \text{ la cual es una } 2n\text{-celda}\},$$
$$\mathcal{D}_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \notin \mathcal{L}_n(X) \text{ and } A \text{ tiene una base de vecindades } \mathfrak{B} \text{ en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathfrak{B}, \dim[\mathcal{U}] = 2n \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{L}_n(X) \text{ es arco conexo}\},$$
$$\mathcal{HL}^n_m(X) = \{A \in HS^n_m(X) \colon A \text{ tiene una vecindad en } HS^n_m(X) \text{ la cual es una } 2n\text{-celda}\},$$
$$\mathcal{HD}^n_m(X) = \{A \in HS^n_m(X) \colon A \notin \mathcal{HL}^n_m(X) \text{ y } A \text{ tiene una base de vecindades } \mathfrak{B} \text{ en } HS^n_m(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathfrak{B}, \dim[\mathcal{U}] = 2n \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathcal{HL}^n_m(X) \text{ es arco conexo}\}, \mathcal{HE}^n_m(X) = \{A \in HS^n_m(X) : \dim_A[HS^n_m(X)] = 2n\}.$$

Sea $J \in X$. Consideremos los siguientes conjuntos en X:

$$\mathfrak{A}_R(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un ciclo en } X\},$$
$$\mathfrak{A}_E(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal con punto extremo } p \text{ de } J \text{ tal que } p \in J^\circ\},$$
$$\mathfrak{A}_S(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal de } X\} \cup \mathfrak{A}_R(X).$$

Si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, sea

$$\mathcal{K}^n_m(J, X) = \mathrm{cl}_{C_n(X)}(\langle J^\circ \rangle_n) - F_m(X).$$

Si $x \in J \cap ((R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X))$, sea

$$\mathcal{K}_{x,J} = \{A \in \mathcal{K}^n_m(J, X) \colon A \cap (R(X) \cup \mathcal{P}(X)) = \{x\}\}.$$

A partir de las definiciones anteriores, se tiene la siguiente observación.

Observación 2.3. Sean X un continuo y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Entonces,

$$q_X^{(n,m)}(\mathcal{D}_n(X) - F_m(X)) = \mathcal{HD}^n_m(X) - \{F^m_X\}.$$

3 Preliminares

En esta sección se presentan algunos resultados importantes para las pruebas de unicidad. La mayoría de los resultados se pueden encontrar para el caso $n = m$ de nuestro hiperespacio en [7].

Teorema 3.1. *[4, Teorema 4] Sea X un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes.*

- *$dim_A[C_n(X)]$ es finito,*
- *exist una gráfica D contenida en X tal que $A \subset D_0$,*
- *$A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.*

Teorema 3.2. *A continuum X is locally connected is and only if $HS^n_m(X)$ is locally connected for every $n \geq m$.*

El siguiente resultado extiende [7, Lema 2.4].

Lema 3.3. *Sean X un continuo localmente conexo y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Si $A \in C_n(X) - F_m(X)$ y $A \cap R(X) \neq \emptyset$, entonces* $\dim_{q_X^{(n,m)}(A)}[HS^n_m(X)] \geq 2n+1$.

Demostración. Por Lema 2.1, se sigue que $\dim_{q_X^{(n,m)}(A)}[HS^n_m(X)] = \dim_A[C_n(X)]$. Si $\dim_A[C_n(X)]$ no es finita, el resultado se sigue. Supongamos que $\dim_A[C_n(X)]$ es finita. Las hipótesis nos permiten utilizar el Teorema 3.1, por lo que se tiene una gráfica finita G tal que $A \subset \mathrm{int}_X(G)$. Notemos que $\dim_A[C_n(X)] = \dim_A[C_n(G)]$ dado que $A \in \mathrm{int}_X(G)$. Puesto que $A \cap R(X) \neq \emptyset$, tenemos que $A \cap R(G) \neq \emptyset$. En consecuencia, por [19, Teorema 2.4], $\dim_A[C_n(G)] \geq 2n+1$. Finalmente, el Lema 2.1 concluye la prueba. □

El siguiente resultado extiende el [7, Lema 2.8].

Lema 3.4. *Sea X un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Entonces,* $\dim[\mathcal{U}] \geq 2n+1$, *para cada vecindad $\mathcal{U}$ de F^m_X in $HS^n_m(X)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ una vecindad abierta de F^m_X en $HS^n_m(X)$ y $\mathcal{V} = (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{U})$. Entonces, $\mathcal{V}$ es un subconjunto abierto de $C_n(X)$. Sea $p \in R(X)$. Es fácil ver que $\{p\} \in \mathcal{V}$. En consecuencia, existe $r > 0$ tal que $B_{C_n(X)}(\{p\}, r) \subset \mathcal{V}$. Sea C la componente de $B_X(p,r)$ que contiene a p. Puesto que C es un subconjunto abierto y conexo de X, se tiene que C es arco conexo. Por ende, existe un arco A tal que $p \in A \subset B_X(p,r)$. Notemos que $A \in \mathcal{V}$. Luego, $q_X^{(n,m)}(A) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, por Lema 3.3, $\dim_{q_X^{(n,m)}(A)}[\mathcal{U}] \geq 2n+1$. Finalmente, el resultado se sigue. □

Los siguientes dos resultados extienden [14, Lema 3.6] y [14, Lema 3.7], respectivamente.

Lema 3.5. *Sean X un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$, $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ y $n \geq 3$. Entonces, $\mathcal{HD}^n_m(X) = \{q_X^{(n,m)}(A) \in HS^n_m(X) : A \in C(X) - F_1(X)$ y $A \cap [R(X) \cup \mathcal{P}(X)] = \emptyset\}$.*

Demostración. Dado $B \in \mathcal{HD}^n_m(X)$, existe $A \in C_n(X)$ tal que $B = q_X^{(n,m)}(A)$. Puesto que $R(X) \neq \emptyset$, por Lema 3.4 y la definición de $\mathcal{HD}^n_m(X)$, es posible concluir que $B \neq F^m_X$; luego, $A \notin F_1(X)$. Más aún, por la Observación 2.3, $A \in \mathcal{D}_n(X)$. De acuerdo con el [4, Lemma 28], $A \in C(X) - F_1(X)$ y $A \subset \mathrm{int}_X(J)$, para algún $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Esto implica que A no intersecta los puntos extremos de J. Por lo tanto, $A \cap [R(X) \cup \mathcal{P}(X)] = \emptyset$.

Por otro lado, para probar la segunda inclusión, sea $A \in C(X) - F_1(X)$ tal que $A \cap [R(X) \cup \mathcal{P}(X)] = \emptyset$. Ya que buscamos probar que $q_X^{(n,m)}(A) \in \mathcal{HD}^n_m(X)$, por la Observación 2.3, será suficiente probar que $A \in \mathcal{D}_n(X)$. Por Teorema 3.1, existe una gráfica finita G contenida en X tal que $A \subset \mathrm{int}_X(G)$. Puesto que $A \cap R(X) = \emptyset$, se sigue que $A \cap R(G) = \emptyset$. Por consiguiente, existe un arco libre L en G tal que $A \subset \mathrm{int}_G(L)$. Dado que $A \subset \mathrm{int}_X(G)$ y $A \subset \mathrm{int}_X(L)$, es posible asumir que $L \subset \mathrm{int}_X(G)$. Esto a su vez implica que L es un arco libre X usando la topología heredada. Por [4, Lema 10], existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $L \subset J$. Por lo tanto, por [4, Lema 28], $A \in \mathcal{D}_n(X)$. □

Lema 3.6. *Sean X un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$ y sea $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$.*

(a) Si $n \geq 3$, entonces las componentes de $\mathcal{HD}^n_m(X)$ son los conjuntos de la forma $q_X^{(n,m)}(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle \cap C(X)) - \{F^m_X\}$, donde $J \in \mathcal{A}_S(X)$.

(b) Las componentes de $\mathcal{HE}^n_m(X)$ son los conjuntos de la forma

$$q_X^{(n,m)}(\langle J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ\rangle_n) - \{F^m_X\},$$

donde $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{A}_S(X)$ y $n \geq k$.

Demostración. (a) Notemos que para cada $A \in C(X) - F_1(X)$ tal que $A \cap [R(X) \cap \mathcal{P}(X)] = \emptyset$, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \mathrm{int}_X(J)$ ([4, Lema 28]). Por Lema 3.5, se sigue que $\mathcal{HD}^n_m(X) = \bigcup\{q_X^{(n,m)}(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle \cap C(X)) - \{F^m_X\} : J \in \mathcal{A}_S(X)\}$. Por arcos ordenados en $C(X)$, los conjuntos $q_X^{(n,m)}(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle \cap C(X)) - \{F^m_X\}$ son arco conexos y, por lo tanto, conexos. Más aún, los conjuntos $q_X^{(n,m)}(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle \cap C(X)) - \{F^m_X\}$ son abiertos en $\mathcal{HD}^n_m(X)$ y ahenos a pares. Concluimos que estos conjuntos deben ser las componentes de $\mathcal{HD}^n_m(X)$.

(b) Por Lema 3.4, $F_X^m \notin \mathcal{HE}_m^n(X)$. Si $B \in \mathcal{HE}_m^n(X)$, entonces existe $A \in C_n(X) - F_m(X)$ tal que $B = q_X^{(n,m)}(A)$. Notemos que

$$\dim_A[C_n(X)] = \dim_B[HS_m^n(X)] = 2n.$$

De acuerdo al [4, Lmma 11], existen $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{A}_S(X)$, con $m \leq n$, tales que $A \in \langle J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ\rangle_n - F_m(X)$. Esto implica que $\mathcal{HE}_m^n(X) \subset \bigcup\{q_X^{(n,m)}(\langle J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ\rangle_n) - \{F_X^m\} : J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{A}_S(X)\}$. Para demostrar la segunda inclusión, sea $A \in \langle J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ\rangle_n - F_m(X)$. Luego, $A \cap [R(X) \cup \mathcal{P}(X)] = \emptyset$, ya que $A \subset \bigcup J_i^\circ$. Por Teorema 3.1, existe una gráfica fintia G contenida en X tal que $A \subset \mathrm{int}_X(G)$. Dado que $A \cap R(X) = \emptyset$, tenemos que $A \cap R(G) = \emptyset$. Consiguientemente, por [19, Theorem 2.4], $\dim_A[C_n(G)] = 2n$. Puesto que $\dim_{q_X^{(n,m)}(A)}[HS_m^n(X)] = \dim_A[C_n(X)] = \dim_A[C_n(G)]$, tenemos $q_X^{(n,m)}(A) \in \mathcal{HE}_m^n(X)$. Por ende,

$$\mathcal{HE}_m^n(X) = \bigcup\{q_X^{(n,m)}(\langle J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ\rangle_n) - \{F_X^m\} : J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{A}_S(X)\}.$$

Notemos que los conjuntos $q_X^{(n,m)}(\langle J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ\rangle_n) - \{F_X^m\}$ son arco conexos, por lo tanto, conexos. Más aún, los conjuntos $q_X^{(n,m)}(\langle J_1^\circ, \ldots, J_k^\circ\rangle_n) - \{F_X^m\}$ son abiertos en $\mathcal{HE}_m^n(X)$ y ajenos por pares. En conclusión, estas deben de ser las componentes de $\mathcal{HE}_m^n(X)$. □

4 Unicidad de hiperespacios

El propósito principal de esta sección es verificar la unicidad del hiperespacio $HS_m^n(X)$ para los continuos enrejados.

Teorema 4.1. *Sean X y Y continuos localmente conexos casi enrejados, $n, m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ con $m \leq n$ y sea $h\colon HS_m^n(X) \to HS_m^n(Y)$ un homeomorfismo. Supongamos que para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X^{(n,m)}(\langle J^\circ\rangle_n \cap C(X)) - \{F_X^m\}) \subset q_Y^{(n,m)}(\langle (J_h)^\circ\rangle_n)$ y $\mathfrak{A}_S(Y) = \{J_h\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Entonces,*

(A) $h(q_X^{(n,m)}(\langle J^\circ\rangle_n) - \{F_X^m\}) = q_Y^{(n,m)}(\langle (J_h)^\circ\rangle_n) - \{F_Y^m\}$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$.

(B) $h^{-1}(q_Y^{(n,m)}(\langle (J_h)^\circ\rangle_n \cap C(Y)) - \{F_Y^m\}) \subset q_X^{(n,m)}(\langle J^\circ\rangle_n) - \{F_X^m\}$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$.

(C) La asociación $J \to J_h$ es biyectiva entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$.

(D) $h(F_X^m) = F_Y^m$.

Más aún, si suponemos que

(1) $J \in \mathfrak{A}_R(X)$ si y sólo si $J_h \in \mathfrak{A}_R(Y)$ y

(2) $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ si y sólo si $J_h \in \mathfrak{A}_E(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

Demostración. Por [1, Teorema 3.6], podemos suponer que X y Y no son gráficas finitas. Más aún, en las pruebas de (A)-(D) [7, Teorema 3.3] la condición de tener una base de vecindades $\mathfrak{B}$ tales que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo para cada elemento $U \in \mathfrak{B}$ nunca es usada. En realidad, las propiedades usadas en dichas pruebas son la densidad de $\mathcal{G}(X)$ and $\mathcal{G}(Y)$ en X y Y, respectivamente, y que X y Y sean localmente conexos. Por consiguiente, las pruebas de (A)-(D) son similares a las pruebas de (A)-(D) en [7, Teorema 3.3].

Sea $A \in C_n(X) - F_m(X)$. Luego, por la definición de la función cociente y el homeomorfismo h, se sigue que $h(q_X^{(n,m)}(A)) \neq F_Y^m$. Más aún, existe $D_A \in C_n(Y) - F_m(Y)$ tal que $h(q_X^{(n,m)}(A)) = q_Y^{(n,m)}(D_A)$. Sea

$$g : C_n(X) - F_m(X) \to C_n(Y) - F_m(Y)$$

la función definida como $g = (q_Y^{(n,m)})^{-1} \circ h \circ q_X^{(n,m)}$. Así, g es un homeomorfismo y $g(A) = D_A$. Observemos que

$$\begin{aligned}\dim_A[C_n(X)] &= \dim_{q_X^{(n,m)}(A)}[HS_m^n(X)]\\ &= \dim_{h(q_X^{(n,m)}(A))}[HS_m^n(Y)]\\ &= \dim_{g(A)}[C_n(Y)].\end{aligned}$$

Probaremos que X y Y son homeomorfos. Para ello, serán necesarias las siguientes Afirmaciones.

Afirmación 1. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Las siguientes proposiciones son verdaderas.

(a) $\mathcal{K}_m^n(J_h, Y) = \{g(A) \in C_n(Y) - F_m(Y) \colon A \in \mathcal{K}_m^n(J, X)\}$,

(b) $\{\dim_A[C_n(X)] \colon A \in \mathcal{K}_m^n(J, X)\} = \{\dim_B[C_n(Y)] \colon B \in \mathcal{K}_m^n(J_h, Y)\}$,

(c) $|J \cap \mathcal{P}(X)| = |J_h \cap \mathcal{P}(Y)|$, y

(d) $|J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)| = |J_h \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)|$.

Demostración de la Afirmación 1. (a) Sea $A \in \mathcal{K}_m^n(J, X)$. Entonces, existe una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ contenida en $\langle J^\circ \rangle_n - F_m(X)$ que converge a A. Dado

que h es un homeomorfismo y por Lema 2.1, se sigue que $h(q_X^{(n,m)}(\langle J^\circ\rangle_n) - F_m(X)) = q_Y^{(n,m)}(\langle J_h^\circ\rangle_n) - \{F_Y^m\}$. Por consiguiente, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $D_{A_k} \in \langle J_h^\circ\rangle_n - F_m(Y)$. Por ende, usando la definición de $\mathcal{K}_m^n(J,X)$, $D_A \in \mathcal{K}_m^n(J_h,Y)$. Esto prueba la primera inclusión. La segunda inclusión se sigue de manera análoga.

(b) se sigue inmediatamente de (a), pues la dimensión se conserva bajo homeomorfismos. Proseguimos con la prueba de (c) y (d). Probaremos la siguiente ecuación

$$|J \cap \mathcal{P}(X)| = 0 \textit{ si y solo si } |J_h \cap \mathcal{P}(Y)| = 0. \tag{1}$$

Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 0$. Supongamos que $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| \leq 1$. Sean $q \in J_h \cap \mathcal{P}(Y)$ y $A \in \mathcal{K}_{q,J_h}$. Es claro que $\dim_A[C_n(Y) - F_m(Y)]$ no es finita. Luego, $\dim_{g^{-1}(A)}[C_n(X) - F_m(X)]$ no es finita, lo cual contradice a $J \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. El reverso es análogo. Para completar la prueba de (c) y (d) es necesario verificar los siguientes casos:

Caso 1. $J \in \mathfrak{A}_E(X) \cup \mathfrak{A}_R(X)$.

Por (1) y (2), $J_h \in \mathfrak{A}_E(Y) \cup \mathfrak{A}_R(Y)$. Si $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 0$, entonces en cualquiera de los casos $J \in \mathfrak{A}_R(X)$ o $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ se tiene que $|J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)| = 1$. Por (1), tenemos que $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| = 0$, lo cual a su vez implica que $|J_h \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)| = 1$. Ahora, si $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 1$, entonces $|J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)| = 0$. Por (1), tenemos que $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| = 1$, lo cual implica que $|J_h \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)| = 0$. Esto prueba (c) y (d) para este caso.

Caso 2. J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$.

Por (1) y (2), J_h es un arco y $J_h \notin \mathfrak{A}_E(Y)$. Si $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 0$, se sigue que $|J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)| = 2$. Por (1), se sigue que $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| = 0$, lo cual implica que $|J_h \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)| = 2$.

Caso 2.1 $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 1$.

Entonces, puesto que $J \notin \mathcal{A}_E(X)$, se sigue que $|J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)| = 1$. Por (1), tenemos que $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| \geq 1$. Supongamos que $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| = 2$. Entonces, $E(J_h) \subset \mathcal{P}(Y)$. Sea $A \in \mathcal{K}_m^n(J,X)$ tal que $A \cap R(X) \neq \emptyset$ y $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Luego, por Lema 3.3, $\dim_A[(C_n(X) - F_m(X)]$ es finita y mayor a $2n$, y por ser g homeomorfismo, $\dim_{g(A)}[C_n(Y) - F_m(Y)]$ es finita y mayor a $2n$. Puesto que $A \in \mathcal{K}_m^n(J,X)$, observemos que $g(A) \not\subset (J_h)^\circ$. Consiguientemente, $g(A) \cap E(J_h) \neq \emptyset$, lo cual nos lleva a que $\dim_{g(A)}[C_n(Y) - F_m(Y)]$ no es finita, llegando así a una contradicción. Por lo tanto, $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| = 1$ y $|J_h \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)| = 1$.

Caso 2.2 $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 2$.

Luego, $|J \cap R(X) \cap \mathcal{P}(X)| = 0$. Por (1), se tiene que $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| \geq 1$. Si $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| = 1$, de manera similar al Caso 2.1, se sigue que $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $|J_h \cap \mathcal{P}(Y)| = 2$, lo cual implica que $|J_h \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)| = 0$. Esto prueba (c) y (d) para el Caso 2.

Hemos completado la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2. Si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $x \in J \cap \mathcal{P}(X)$, entonces $\mathcal{K}_{x,J}$ es arco conexo.

Prueba de la Afirmación 2. La prueba de esta Afirmación es similar a la prueba de [6, Theorem 3.1, Afirmación 2].

Afirmación 3. Existe una biyección entre $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ y $R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$.

Demostración de la Afirmación 3. Dado $v \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $v \in J$. Sea $A \in \mathcal{K}_{v,J}$. Observemos que $A - \{v\} \subset J^\circ$. Dado que $v \in \mathcal{G}(X)$, por la definición se sigue que $A \subset \mathcal{G}(X)$ y así, $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Por Teorema 3.1, existe una gráfica finita G_1 contenida en X tal que $A \subset G_1^\circ$. Por (a) de la Afirmación 1, se tiene que $g(A) \in \mathcal{K}_m^n(J_h, Y)$. Como $\dim_A[C_n(X)]$ es finita, se sigue que $\dim_{g(A)}[C_n(Y)]$ es finita. Así, $g(A) \cap \mathcal{P}(Y) = \emptyset$. Por Teorema 3.1, existe una gráfica finita G_2 contenida en Y tal que $g(A) \subset G_2^\circ$. Por ello, tenemos que

$$\begin{aligned}\dim_A[C_n(G_1)] &= \dim_A[C_n(X) - F_m(X)]\\ &= \dim_{g(A)}[C_n(Y) - F_m(Y)]\\ &= \dim_{g(A)}[C_n(G_2)].\end{aligned}$$

Por [19, Teorema 2.4 (a)], $\dim_A[C_n(G_1)] > 2n$. Luego, $\dim_{g(A)}[C_n(G_2)] > 2n$, que a su vez implica que $g(A) \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \neq \emptyset$. Supongamos que $|g(A) \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)| = 2$. Notemos

$$\dim_{g(A)}[C_n(G_2)] = \text{máx}\{\dim_B[C_n(Y)] \text{ es finita}\colon B \in \mathcal{K}_m^n(J_h, Y).$$

Entonces, $\dim_A[C_n(G_1)] = \text{máx}\{\dim_A[C_n(X)] \text{ es finita}\colon\ A \in \mathcal{K}_m^n(J, X)\}$ y se sigue que $|A \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)| = 2$, lo cual es una contradicción ya que $A \in \mathcal{K}_{x,J}$. Concluimos que $|g(A) \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)| = 1$. Sea $v_h(A) \in g(A) \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$. Observemos que $v_h(A) \in J_h$. De acuerdo al segundo párrafo de la prueba de la Afirmación 2 en [6, Theorem 3.1], tenemos que

$v_h(A)$ no depende de A y por ende, no depende de la elección de J. Es así que podemos definir la siguiente función:

$$\varphi_1 \colon R(X) \cap \mathcal{G}(X) \to R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$$

dada por $\varphi_1(v) = v_h$, para cada punto $v \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$. Observe que φ_1 satisface la siguiente propiedad: si $v \in R(X) \cap \mathcal{G}(X) \cap J$ y $A \in \mathcal{K}_{v,J}$, entonces $g(A) \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) = \{v_h\}$ y $v_h \in J_h$. Por (B) y (C), X y Y satisfacen condiciones simétricas. De esta manera, es posible definir una función $\phi \colon R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \to R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ a través de un proceso similar con la siguiente propiedad: si $w \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \cap J_h$ y $B \in \mathcal{K}_{w,J_h}$, entonces $g^{-1}(B) \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X) = \{\phi(w)\}$ y $\phi(w) \in J$. Veamos que la función φ_1 es una biyección. Sea $v \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $v \in J$ y $A \in \mathcal{K}_{v,J}$. Notemos que $g(A) \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) = \{\varphi_1(v)\}$ y $\varphi_1(v) \in J_h$. Más aún, $g(A) \in \mathcal{K}_{\varphi_1(v),J_h}$. Entonces, $A \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X) = \{\phi(\varphi_1(v))\}$ y $\phi(\varphi_1(v)) \in J$. Puesto que $A \in \mathcal{K}_{v,J}$, se sigue que $v = \phi(\varphi_1(v))$. Análogamente, es posible concluir que $v = \varphi_1(\phi(v))$. Por lo tanto, φ_1 es una biyección. Esto completa la prueba de la Afirmación 3.

Notemos que las siguientes condiciones son equivalentes:
(i) $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X) \cap J$, donde $J \in \mathfrak{A}_S(X)$,
(ii) $\varphi_1(x) \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \cap J_h$, donde $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$.
Más aún, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, por (A),

$$g(J) \subset J_h. \tag{2}$$

Afirmación 4. Sea $x \in \mathcal{P}(X)$. Si $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos distintos a pares $\mathfrak{A}_S(X)$ la cual converge a $\{x\}$, entonces $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un conjunto de $F_1(Y)$ en $C_n(Y)$. Más aún, $\{(J_k)_h\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge al mismo conjunto de un elemento que la sucesión $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Demostración de la Afirmación 4. Será suficiente probar que toda subsucesión convergente de $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge al mismo elemento, dado que Y es un continuo. Sea $\{g(J_{k_l})\}_{l\in\mathbb{N}}$ una subsucesión $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ la cual converge a un elemento $T \in C_n(Y)$. Sea $y \in T$. Entonces existe una sucesión $\{t_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $t_{k_l} \in g(J_{k_l})$ para cada $l \in \mathbb{N}$, que converge a y. Por (2) y [4, Lemma 8], se tiene que $\{(J_{k_l})_h\}_{l\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$. Luego, $T = \{y\}$. Entonces, $\{g(J_{k_l})\}_{l\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$. Por lo tanto, toda subsucesión convergente de la sucesión $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un conjunto de un solo punto. Sea

$\{g(J_{k_s})\}_{s\in\mathbb{N}}$ otra subsucesión de $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $\{w\}$, para algún $w \in Y$. Veamos que $y = w$. Procederemos por contradicción, supongamos que $y \neq w$. Sean U_y y U_w dos subconjuntos abiertos y ajenos de Y tales que $y \in U_y$ y $w \in U_w$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g(J_{k_l}) \in \langle U_y\rangle_n - F_m(Y)$ y $g(J_{k_s}) \in \langle U_w\rangle_n - F_m(Y)$, para cada l, $s \geq N$. Sea $\mathcal{U}_y = g^{-1}(\langle U_y\rangle_n - F_n(Y))$ y $\mathcal{U}_w = g^{-1}(\langle U_w\rangle_n - F_n(Y))$. Notemos que $\mathcal{U}_y$ y $\mathcal{U}_w$ subconjuntos abiertos y ajenos de $C_n(X)$ tales que $J_{k_l} \in \mathcal{U}_y$ y $J_{k_s} \in \mathcal{U}_w$, para cada l, $s \geq N$. Esto es una contradicción y por lo tante, $y = w$. Luego, $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$. Dado que $g(J_k) \subset (J_k)_h$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por [4, Lema 8], tenemos que $\{(J_k)_h\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$. Esto completa la prueba de la Afirmación 4.

Ahora centramos nuestra atención en $\mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{P}(Y)$.

Afirmación 5. Existe una biyección φ_2 entre $\mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{P}(Y)$.

Demostración de la Afirmación 5. Sea $x \in \mathcal{P}(X)$. Por [8, Teorema 4.1], existe una sucesión de elementos ajenos a pares $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ contenida en $\mathfrak{A}_S(X)$ la cual converge a $\{x\}$. Por la Afirmación 4, existe $y \in Y$ tal que $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$. Más aún, $\{(J_k)_h\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$. Por [8, Theorem 4.1], tenemos que $y \in \mathcal{P}(Y)$. Sea $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ otra sucesión contenida en $\mathfrak{A}_S(X)$ convergente a $\{x\}$. Por la Afirmación 4, $\{g(L_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{w_1\}$ para algún $w_1 \in Y$. Más aún, $\{(L_k)_h\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{w_1\}$. Para probar que $y = w_1$, tendremos que considerar dos casos:

Caso 5.1. $\{J_k\colon k \in \mathbb{N}\} \cap \{L_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ es finito.

Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{J_k\colon k \geq N\} \cap \{L_k\colon k \geq N\} = \emptyset$. Sean $S_{2k+1-N} = J_k$ y $S_{2k-N} = L_k$, para cada $k \geq N$ y sea $I = \{k \in \mathbb{N}\colon k \geq N\}$. Observe que $\{S_k\}_{k\in I}$ está compuesto por elementos ajenos a pares en $\mathfrak{A}_S(X)$. Notemos que $\{S_k\}_{k\in I}$ converge a $\{x\}$. Por la Afirmación 4, $\{g(S_k)\}_{k\in I}$ converge a $\{z\}$, para algún $z \in Y$. Puesto que $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{g(L_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ son subsucesiones de $\{g(S_k)\}_{k\in I}$, es posible concluir que $y = z = w_1$.

Caso 5.2. $\{J_k\colon k \in \mathbb{N}\} \cap \{L_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ is infinito.

Luego, es posible extraer una sucesión $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ contenida en $\{J_k\colon k \in \mathbb{N}\} \cap \{L_k\colon k \in \mathbb{N}\}$, la cual es una subsucesión de $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Puesto que $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos ajenos a pares en $\mathfrak{A}_S(X)$, aplicando una vez más la Afirmación 4 se tiene que $\{g(T_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{z\}$, para algún $z \in Y$. Dado que $\{g(T_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de ambas sucesiones $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{g(L_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, concluimos que $z = w_1 = y$.

De ambos casos, se tiene que dado $x \in \mathcal{P}(X)$, entonces existe un único punto $y_x \in \mathcal{P}(Y)$ tal que si $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos ajenos por pares contenida en $\mathfrak{A}_S(X)$ la cual converge a $\{x\}$, entonces $\{(J_k)_h\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y_x\}$. Definimos la función:

$$\varphi_2\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$$

por $\varphi_2(x) = y_x$, para cada punto $x \in \mathcal{P}(X)$.

Por (B) y (C), X y Y satisfacen condiciones simétricas. Luego, definimos una función $\varphi_2'\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ tal que satisface la siguiente propiedad: si $y \in \mathcal{P}(Y)$ y $\{(J_k)_h\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos ajenos por pares en $\mathfrak{A}_S(Y)$ la cual converge a $\{y\}$, entonces $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{(\varphi_2')(y)\}$. Las propiedades de φ_2 y φ_2', nos dicen que $(\varphi_2)^{-1} = \varphi_2'$. Esto completa la prueba de la Afirmación 5.

Afirmación 6. Si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $x \in J \cap \mathcal{P}(X)$, entonces $\varphi_2(x) \in J_h \cap \mathcal{P}(Y)$. Más aún, si J es un arco y $x \in E(J) \cap \mathcal{P}(X)$, entonces $\varphi_2(x) \in E(J_h) \cap \mathcal{P}(Y)$.

Demostración de la Afirmación 6. Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de arcos en $\mathcal{K}_{x,J}$ la cual converge a $\{x\}$. Por (A) y Lema 3.6 (a), obtenemos $h(q_X^{(n,m)}(\langle J^\circ\rangle_n \cap C(X)) - \{F_X^m\}) = q_Y^{(n,m)}(\langle (J_h)^\circ\rangle_n \cap C(Y)) - \{F_Y^m\}$. Entonces, $g(\langle J^\circ\rangle_n \cap C(X)) - F_m(X) = (\langle (J_h)^\circ\rangle_n \cap C(Y)) - F_m(Y)$. Dado $k \in \mathbb{N}$, notemos que $A_k \in \mathrm{cl}_{C_n(X)}((\langle J^\circ\rangle_n \cap C(X)) - F_m(X))$. Luego, $g(A_k) \in \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(\langle (J_h)^\circ\rangle_n \cap C(Y)) - F_m(Y)$.

Probaremos que $\{g(A_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $C(Y)$. Para ello, probaremos que toda subsucesión convergente de $\{g(A_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a exactamente el mismo elemento de $C(Y)$. Sea $\{g(A_{k_l})\}_{l\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{g(A_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ la cual converge a algún elemento $T \in C(Y)$. Supongamos que $T \notin F_1(Y)$. Consiguientemente, $g^{-1}(T) \notin F_1(X)$; sin embargo, $\{A_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ converge a $g^{-1}(T)$ lo cual contradice la convergencia a $\{x\}$. Por lo tanto, $T = \{y\}$, para algún $y \in Y$. Sea $\{g(A_{k_s})\}_{s\in\mathbb{N}}$ otra subsucesión de $\{g(A_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ la cual converge a $\{w\}$, para algún $w \in Y$. Bajo argumentos análogos a los presentados en la prueba de la Afirmación 4 se prueba que $y = w$. Por ende, $\{g(A_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$. Luego, $y \in J_h$. Por [8, Teorema 4.1], existe una sucesión $\{J_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos ajenos por pares en $\mathfrak{A}_S(X)$ la cual converge a $\{x\}$. Por Afirmación 4 y la definición de φ_2, $\{g(J_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{\varphi_2(x)\}$. Sean $S_{2k+1} = J_k$ y $S_{2k} = A_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{x\}$. Bajo argumento análogos a los usados para probar que $\{g(A_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$,

se puede concluir que $\{g(S_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{w_1\}$, para algún $w_1 \in Y$. Luego, $y = w_1 = \varphi_2(x)$. Por lo tanto, $\varphi_2(x) \in J_h$. Esto completa la prueba de la Afirmación 6.

Sea $\varphi_3 : (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X) \to (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$ una función definida como sigue:

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{if } x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X), \\ \varphi_2(x) & \text{if } x \in \mathcal{P}(X). \end{cases}$$

Notemos que φ_3 es una biyección.

Afirmación 7. Existe un homeomorfismo φ de $\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{G}(Y) \cup \mathcal{P}(Y)$ tal que $\varphi|_{(R(X)\cap\mathcal{G}(X))\cup\mathcal{P}(X)} = \varphi_3$.

Demostración de la Afirmación 7. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Será necesario considerar cinco casos:

Caso 7.1. $|J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)| = 2$.

Notemos que J es un arco. Sean $x, z \in E(J)$. Entonces, $\{x, z\} = J \cap R(X) \cap \mathcal{P}(X)$. Puesto que J_h es un arco con puntos extremos $\varphi_1(x)$ y $\varphi_1(z)$, podemos considerar un homeomorfismo $\varphi_J \colon J \to J_h$ tal que $\varphi_J(x) = \varphi_1(x)$ y $\varphi_J(z) = \varphi_1(z)$.

Caso 7.2. $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 2$.

Observemos que J y J_h son arcos. Sea $E(J) = \{x, z\}$. Por la Afirmación 6, se sigue que $E(J_h) = \{\varphi_2(x), \varphi_2(z)\}$. Luego, existe un homeomorfismo $\varphi_J : J \to J_h$ tal que $\varphi_J(x) = \varphi_2(x)$ y $\varphi_J(z) = \varphi_2(z)$.

Caso 7.3. $|J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)| = 1$ y $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 1$.

Notemos que J es un arco. Sean $x \in J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ y $z \in J \cap \mathcal{P}(X)$. Puesto que J_h es un arco con puntos extremos $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(z)$, podemos considerar un homeomorfismo $\varphi_J : J \to J_h$ tal que $\varphi_J(x) = \varphi_1(x)$ y $\varphi_J(z) = \varphi_2(z)$.

Caso 7.4. $|J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X)| = 1$ y $J \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

Asumamos que $J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X) = \{x\}$, por lo que $J_h \cap R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) = \{\varphi_1(x)\}$. En cualquier caso, si J es un arco o un ciclo, por (1) y (2) tenemos que J_h es un arco o un ciclo, respectivamente. Entonces, existe un homeomorfismo $\varphi_J : J \to J_h$ tal que $\varphi_J(x) = \varphi_1(x)$.

Caso 7.5. $|J \cap \mathcal{P}(X)| = 1$ and $J \cap R(X) \cap \mathcal{G}(X) = \emptyset$.

Sea $x \in J \cap \mathcal{P}(X)$. Por la Afirmación 6, $\varphi_1(x) \in J_h \cap \mathcal{P}(Y)$. Si J es un arco o un ciclo, por (1) y (2) tenemos que J_h es un arco o un ciclo, respectivamente. Luego, podemos definir al homeomorfismo $\varphi_J \colon J \to J_h$ tal que $\varphi_J(x) = \varphi_1(x)$.

Por [2, Teorema 9.4, p. 83], es posible tomar una extensión continua

$$\varphi' \colon \bigcup \mathfrak{A}_S(X) \to \bigcup \mathfrak{A}_S(Y)$$

de las funciones φ_J, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Notemos que $\varphi'(J) = J_h$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Más aún, φ' es un homeomorfismo.

Ahora, definamos φ de $\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{P}(X)$ sobre $\mathcal{G}(Y) \cup \mathcal{P}(Y)$, para cada $x \in X$, por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_2(x) & \text{if } x \in \mathcal{P}(X), \\ \varphi'(x) & \text{if } x \in \bigcup \mathfrak{A}_S(X). \end{cases}$$

Probaremos que φ es una función continua. Para probar esto, sean $x \in \mathcal{G}(X)$ y $\{x_m\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X que converge a x. Puesto que $\mathcal{G}(X)$ es un subconjunto abierto de X es posible asumir que $x_m \in \mathcal{G}(X)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Puesto que φ' es una función continua sobre $\mathcal{G}(X)$, tenemos que φ es continua en x. Sea $x \in \mathcal{P}(X)$. Probaremos tres casos.

Caso i. $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos distintos a pares en $\mathcal{G}(X)$ que converge a x.

Primero supongamos que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ está contenido en $J_1 \cup \cdots \cup J_r$, para algunos $J_1, \ldots, J_r \in \mathfrak{A}_S(X)$. Dado que $J_1 \cup \cdots \cup J_r$ es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $x \in J_1 \cup \cdots \cup J_r$. Observe que $\varphi(x_k) = \varphi'(x_k) \in (J_1)_h \cup \cdots \cup (J_r)_h$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\varphi(x) = \varphi'(x)$. Dado que φ' es continua, tenemos que $\{\varphi(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $\varphi(x)$.

Finalmente, supongamos que existen elementos ajenos a pares $J_k \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $x_k \in J_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por [4, Lema 8], tenemos que $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $\{x\}$. Por la definición de φ_2, se sigue que $\{(J_k)_h\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $\{\varphi_2(x)\}$. Dado que $\varphi(x_k) \in (J_k)_h$, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{\varphi(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $\varphi_2(x)$.

Caso ii. $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos distintos a pares en $\mathcal{P}(X)$ que converge a x con $x_k \neq x$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Sea $\{J_l^k\}_{l \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos distintos a pares en $\mathfrak{A}_S(X)$ la cual converge a $\{x_k\}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por definición de φ_2, tenemos que $\{(J_l^k)_h\}_{l \in \mathbb{N}}$ converge a $\{\varphi_2(x_k)\}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $\{(J_{s_k}^k)_h\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos ajenos por pares en $\mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $H_{d'}((J_{s_k}^k)_h, \varphi(x_k)) < \frac{1}{k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, donde d' es la métrica de Y. Por [4, Lema 8], $\{(J_{s_k}^k)_h\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$, para algún $y \in Y$. Notemos que $\{\varphi_2(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a

y. Es posible suponer que $y \neq \varphi_2(x_k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, sea $r_k = \text{mín}\{H_d(\{x\}, \{x_m\}), H_{d'}(\{\varphi_2(x_m)\}, \{y\})\}$. Sea $l_k \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(\{x_k\}, J^k_{l_k}) < r_k$ y $H_{d'}((J^k_{l_k})_h, \{\varphi_2(x_k)\}) < r_k$. Entonces,

$$H_d(\{x\}, J^k_{l_k}) \leq H_d(\{x\}, \{x_k\}) + H_d(\{x_k\}, J^k_{l_k}) \leq 2H_d(\{x\}, \{x_k\})$$

y

$$\begin{aligned} H_{d'}(\{y\}, (J^k_{l_k})_h) \leq & H_{d'}(\{y\}, \{\varphi_2(x_k)\}) + H_{d'}((J^k_{l_k})_h, \{\varphi_2(x_k)\}) \\ \leq & 2H_{d'}(\{y\}, \{\varphi_2(x_k)\}). \end{aligned}$$

A partir de aquí, $\{J^k_{l_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{x\}$ y $\{(J^k_{l_k})_h\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$. Por la definición de φ_2, $\{(J^k_{l_k})_h\}_{k\in\mathbb{N}}$ también converge a $\{\varphi_2(x)\}$. Luego, $\varphi_2(x) = y$. Por lo tanto, $\{\varphi(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi_2(x)$.

Caso iii. $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos distintos a pares en $\mathcal{G}(X) \cup \mathcal{P}(X)$ que converge a x con $x_k \neq x$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Por Caso i y Caso ii, $\{\varphi(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi(x)$.

Finalmente, si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a $x \in \mathcal{P}(X)$, entonces, por Caso i, Caso ii and Caso iii, se sigue que $\{\varphi(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi(x)$. Luego, φ es continua. Por lo tanto, X es homeomorfo a Y. □

Observación 4.2. Sean X un continuo y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Usando [10, 2] and [10, 3], se obtienen los siguientes modelos de $\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X) - F_1(X)$,

Caso 1. $J \in \mathfrak{A}_E(X)$.

Entonces, J es un arco con p y q tal que $p \in J^\circ$. Observemos que $\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X) - F_1(X) = \langle J - \{q\} \rangle_n \cap C(X) - F_1(J)$. Luego, $\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X) - F_1(X)$ es una $2-$variedad con frontera.

.

Caso 2. $J \in \mathfrak{A}_R(X)$.

Existe $p \in J$ tal que $J^\circ = J - \{p\}$. Luego, $\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X) = C(J) - \{A \in C(J) \colon p \in A\}$. Entonces, $\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X) - F_1(X)$ es una $2-$variedad sin frontera.

Caso 3. J es un arco tal que $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$.

Entonces, $J^\circ = J - \{p, q\}$ donde p y q son puntos extremos de J. Luego, $\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X) - F_1(X) = \langle J - \{p, q\} \rangle_n \cap C(X) - F_1(J)$. Entoncces, $\langle J^\circ \rangle_n \cap C(X) - F_1(X)$ es una $2-$variedad sin frontera.

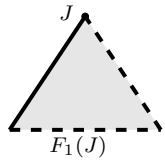


Figura 1: Caso 1

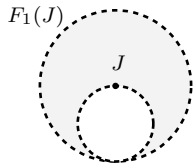


Figura 2: Caso 2

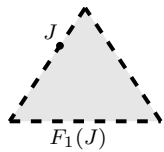


Figura 3: Caso 3

Teorema 4.3. *Los miembros de la clase de continuos localmente conexos casi enrejados son HS^n_m-determinados, para cada $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, $m \in \mathbb{N} - \{1\}$ y $m < n$.*

Demostración. Sean X y Y dos continuos localmente conexos casi enrejados y $h : HS^n_m(X) \to HS^n_m(Y)$ un homeomorfismo. Dado que la definición de $\mathcal{HL}^n_m(X)$ está en términos topológicos, se tiene que $h(\mathcal{HL}^n_m(X)) = \mathcal{HL}^n_m(Y)$. Esto implica a su vez que $h(\mathcal{HD}^n_m(X)) = \mathcal{HD}^n_m(Y)$. Por Lema 3.6 (a), tenemos que para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $J_h \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(q^{(n,m)}_X(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_n \cap C(X)) - \{F^{(n,m)}_X\}) = q^{(n,m)}_Y(\langle \mathrm{int}_Y(J_h)\rangle_n \cap C(Y)) - \{F^m_Y\}$. Puesto que $q^{(n,m)}_Y(\langle \mathrm{int}_Y(J_h)\rangle_n \cap C(Y)) - \{F^m_Y\} \subset q^{(n,m)}_Y(\langle \mathrm{int}_Y(J_h)\rangle_n) - \{F^m_Y\}$, por Teorema 4.1 (C) y (D), la asociación $J \mapsto J_h$ entre $\mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathfrak{A}_S(Y)$ es una biyección, y $h(F^m_X) = F^m_Y$. Por lo tanto, $g : C_n(X) - F_m(X) \to C_n(Y) - F_m(X)$ definido por $g = (q^{(n,m)}_Y)^{-1} \circ h \circ q^{(n,m)}_X$ es un homeomorfismo.

Afirmación 1. $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ si y sólo si $J_h \in \mathfrak{A}_E(Y)$.

Prueba de la Afirmación 1. Sea $J \in \mathfrak{A}_E(X)$. Por Lema 3.6 (a), se tiene

que $g(\langle J^\circ\rangle_n \cap C(X) - F_1(X)) = \langle J_h^\circ\rangle_n \cap C(Y) - F_1(Y)$. Por la Observación 4.2, se sigue que $J_h \in \mathfrak{A}_E(Y)$. El reverso se prueba de manera análoga.

Afirmación 2. $J \in \mathfrak{A}_R(X)$ si y sólo si $J_h \in \mathfrak{A}_R(Y)$.

Prueba de la Afirmación 2. Sea $J \in \mathfrak{A}_R(X)$. Supongamos que J_h es un arco. Por la Afirmación 1, $J_h \notin \mathfrak{A}_E(Y)$.

Caso 1. $J \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

Sea $p \in J \cap R(X)$. Notemos que $\dim_{J_h}[C_n(Y) - F_m(Y)] = \dim_{g^{-1}(J_h)}[C_n(X) - F_m(X)]$. Puesto que

$$g(\mathrm{cl}_{C_n(X)-F_m(X)}(\langle J^\circ\rangle_n \cap C(X) - F_1(X))) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)-F_m(Y)}(\langle J_h^\circ\rangle_n \cap C(Y) - F_1(Y)),$$

se tiene que $g^{-1}(J_h) \subset J$. Por ende, $\dim_{J_h}[C_n(Y) - F_m(Y)]$ es finita. Luego, $J_h \cap \mathcal{P}(Y) = \emptyset$. Por Teorema 3.1, existen gráficas finitas D, G tales que $J_h \subset D^\circ$ y $J \subset G^\circ$, respectivamente. Sean $q, r \in J_h \cap R(Y)$ y Q un subarco de J_h con $q \in Q$ y $r \notin Q$. Por [19, Theorem 2.4], tenemos lo siguiente:

$$\begin{gathered} 2n + [\mathrm{ord}(q) - 2] = \dim_Q[C_n(D)] \\ = \dim_Q[C_n(X)] = \dim_Q[C_n(X)] = \dim_Q[C_n(X)] \\ = \dim_Q[C_n(X) - F_m(X)] = \dim_{g^{-1}(Q)}[C_n(Y) - F_m(Y)] = \dim_{g^{-1}(Q)}[C_n(Y)] \\ = \dim_{g^{-1}(Q)}[C_n(G)] = 2n + [\mathrm{ord}(p) - 2]. \end{gathered}$$

Entonces, $\mathrm{ord}(p) = \mathrm{ord}(q)$. Análogamente, tenemos que $2n + [\mathrm{ord}(q) - 2] + [\mathrm{ord}(r) - 2] = \dim_{J_h}[C_n(D)] = \dim_{g^{-1}(J_h)}[C_n(G)] = 2n + [\mathrm{ord}(p) - 2]$, lo cual conduce a una contradicción. Por lo tanto, $J_h \in \mathfrak{A}_R(X)$.

Caso 2. $J \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$.

Sea $p \in J \cap \mathcal{P}(X)$. Luego, $J_h \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$. Más aún, $E(J_h) \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$. Sean $a, b \in E(J_h)$. Probaremos que $a, b \in \mathcal{P}(Y)$. Supongamos que $a \in \mathcal{P}(Y)$ y $b \notin \mathcal{P}(Y)$. Puesto que $J_h \notin \mathcal{A}_E(Y)$, tenemos que $b \in R(Y) \cap \mathcal{G}(X)$. Sea Q un subarco propio de J_h que contiene a b. Por Teorema 3.1, existe una gráfica finita D tal que $Q \subset D^\circ$. Por [19, Theorem 2.4], se tiene que

$$\begin{gathered} 2n + [\mathrm{ord}(b) - 2] = \dim_Q[C_n(D)] = \dim_Q[C_n(X)] \\ = \dim_Q[C_n(X) - F_m(X)] = \dim_{g^{-1}(Q)}[C_n(Y) - F_m(Y)] = \dim_{g^{-1}(Q)}[C_n(Y)] \\ = \dim_{g^{-1}(Q)}[C_n(h^{-1}(D)] = 2n \end{gathered}$$

Notemos que esto nos lleva a una contradicción, pues $\mathrm{ord}(b) \geq 3$. Por [8, Theorem 4.1], existen $\{L_k^a\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{L_k^b\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de elementos distintos a pares de $\mathfrak{A}_S(Y) - \{J_h\}$ que convergen a $\{a\}$ y $\{b\}$, respectivamente. Puesto que

$q_Y^{(n,m)}(\langle J_h^\circ, (L_k^a)^\circ\rangle_n) - F_m(Y)$ es una componente de $HS_m^n(Y)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, por Lema 3.6 (b), existen $M_1^k, M_2^k, \ldots, M_{r_k}^k \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que

$$h(q_X^{(n,m)}(\langle (M_1^k)^\circ, \ldots, (M_{r_k}^k)^\circ\rangle_n - F_X^m) = q_Y^{(n,m)}(\langle (J_h)^\circ, (L_k^a)^\circ\rangle_n) - F_m(Y).$$

Equivalentemente,

$$g^{-1}(\langle (J_h)^\circ, (L_k^a)^\circ\rangle_n - F_m(Y)) = \langle (M_1^k)^\circ, \ldots, (M_{r_k}^k)^\circ\rangle_n - F_m(X).$$

Consiguientemente,

$$\begin{aligned} &g^{-1}\left(\mathcal{K}_m^n(J_h, Y) \cap \mathrm{cl}_{C_n(Y)-F_m(Y)}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \langle (J_h)^\circ, (L_k^a)^\circ\rangle_n - F_m(Y)\right]\right) \\ &= \mathcal{K}_m^n(J, X) \cap \mathrm{cl}_{C_n(X)-F_m(X)}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \langle (M_1^k)^\circ, \ldots, (M_{r_k}^k)^\circ\rangle_n - F_m(X)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

De manera similar para b, existen $N_1^k, N_2^k, \ldots N_{s_k}^k \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que

$$\begin{aligned} &g^{-1}\left(\mathcal{K}_m^n(J_h, Y) \cap \mathrm{cl}_{C_n(Y)-F_m(Y)}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \langle (J_h)^\circ, (L_k^b)^\circ\rangle_n - F_m(Y)\right]\right) \\ &= \mathcal{K}_m^n(J, X) \cap \mathrm{cl}_{C_n(X)-F_m(X)}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \langle (N_1^k)^\circ, \ldots, (N_{s_k}^k)^\circ\rangle_n - F_m(X)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Sean $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $\langle J_h^\circ\rangle_n \cap C(Y)$ que converge a J_h y $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $D_k \in \langle (L_k^a)^\circ\rangle_n \cap C(Y)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Observe que $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{a\}$. Por ende, $B_k \cup D_k \in \langle J_h^\circ, (L_k^a)^\circ\rangle_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\{B_k \cup D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a J_h. Sea $C = g^{-1}(J_h)$ y $C_k = g^{-1}(B_k \cup D_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $C_k \in \langle (M_1^k)^\circ, \ldots, (M_{r_k}^k)^\circ\rangle_n$. Puesto que $C \in K_n(J, X)$, existe $c \in C$ tal que $c \in J^\circ$. Más aún, existe $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a c tal que $c_k \in C_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $c_k \in J^\circ$. Por lo tanto, $c_k \in (M_l^k)^\circ$ para algunos $l_1 \in \{1, \ldots, r_k\}$ y $k \geq N$. Entonces, $c_k \in (M_{l_1}^k)^\circ \cap J^\circ$ para $k \geq N$. Luego, podemos suponer que $l_1 = 1$ y $M_1^k = J$ para cada $k \geq N$. Más aún, es posible suponer que esto

ocurre para cada $k \in \mathbb{N}$, y así, la Ecuación (3) se convierte en

$$\begin{aligned} &g^{-1}\left(\mathcal{K}_m^n(J_h, Y) \cap \mathrm{cl}_{C_n(Y)-F_m(Y)}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\langle (J_h)^\circ, (L_k^a)^\circ\rangle_n - F_m(Y)\right]\right) \\ &= \mathcal{K}_m^n(J, X) \cap \mathrm{cl}_{C_n(X)-F_m(X)}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\langle (J)^\circ, \ldots, (M_{r_k}^k)^\circ\rangle_n - F_m(X)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Análogamente para b, la Ecuación (4) se puede reescribir como sigue

$$\begin{aligned} &g^{-1}\left(\mathcal{K}_m^n(J_h, Y) \cap \mathrm{cl}_{C_n(Y)-F_m(Y)}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\langle (J_h)^\circ, (L_k^b)^\circ\rangle_n - F_m(Y)\right]\right) \\ &= \mathcal{K}_m^n(J, X) \cap \mathrm{cl}_{C_n(X)-F_m(X)}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\langle (J)^\circ, \ldots, (N_{s_k}^k)^\circ\rangle_n - F_m(X)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

En las Ecuaciones (5) y (6), necesitamos que $r_k = n = s_k$. Para ello, sea $k \in \mathbb{N}$. Si $r_k < n$, entonces hagamos $M_t^k = M_{r_k}^k$, para cada $t \in \{r_k, \ldots, n\}$. De manera similar, si $s_k < n$, entonces $N_j^k = N_{s_k}^k$, para cada $j \in \{s_k, \ldots, n\}$. Probaremos que es posible considerar que $\{M_l^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos distintos a pares para cada $l \in \{2, \ldots, n\}$.

Sean $l \in \{2, \ldots, n\}$ y $d_k \in M_l^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Puesto que X es un continuo, suponemos que $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a un punto $d \in X$. Por [4, Lema 8], tenemos que $\{M_l^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{d\}$. Más aún, por [8, Teorema 4.1], se tiene que $d \in \mathcal{P}(X)$. Observemos que la sucesión $\{M_l^k \cap C_k\}$ converge a $\{d\} \cap C$. Puesto que $M_l^k \cap C_k \neq \emptyset$, tenemos que $d \in C$. Ya que $C = g^{-1}(J_h)$, $d \in J$ y se sigue que $d = p$. Por consiguiente, $\{M_l^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\}$, para cada $l \in \{2, \ldots, n\}$. Análogamente, $\{N_l^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\}$.

Ahora, probaremos que la parte derecha de las Ecuaciones (5) y (6) son iguales. Sea $A \in \mathcal{K}_m^n(J, X) \cap \mathrm{cl}_{C_n(X)-F_m(X)}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\langle (J)^\circ, \ldots, (M_{r_k}^k)^\circ\rangle_n - F_m(X)\right]$. Luego, existe una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ contenida en $\bigcup_{k=1}^{\infty}\langle (J)^\circ, \ldots, (M_{r_k}^k)^\circ\rangle_n - F_m(X)$ qie converge a A. Sea $\{D_k^l\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $\{p\}$ tal que $D_k^l \subset \langle (N_l^k)^\circ\rangle_n \cap C(N_l^k)$ para cada $l \in \{2, \ldots, n\}$, y consideremos la sucesión $B_k = A_k \cap J \cup (D_k^2 \cup \cdots \cup D_k^l)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $A_k \cap J \subset J^\circ$, tenemos

que $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en $\bigcup_{k=1}^{\infty}\langle (J)^\circ,\ldots,(N_{s_k}^k)^\circ\rangle_n - F_m(X)$. Observemos que $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $(A\cap J)\cup\{p\}$. Más aún, ya que $p\in A\subset J$, tenemos que $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a A. Esto concluye la primera inclusión. La segunda inclusión se sigue de manera análoga. Esto contradice el hecho de que el lado izquierdo de las Ecuaciones (5) y (6) no son iguales. Por lo tanto, $J_h\in\mathfrak{A}_R(X)$.

Luego, se ha probado (1) y (2) del Teorema 4.1, por lo cual es posible concluir que X y Y son homeomorfos. □

La clase de continuos enrejados posee la propiedad de unicidad para el hiperespacio HS_m^n. Para verificar esta proposición, consideremos los siguientes resultados:

Teorema 4.4. *Sea X un continuo enrejado, $n,m\in\mathbb{N}$, con $m\leq n$. Si Y es un continuo tal que $HS_m^n(X)$ es homeomorfo a $HS_m^n(Y)$, entonces Y es un continuo enrejado.*

Demostración. Puesto que X es un continuo localmente conexo ([4, Lema 2]), por Teorema 3.2, tenemos que $HS_m^n(X)$ es un continuo localmente conexo. Luego, $HS_m^n(Y)$ es un continuo localmente conexo. Nuevamente, por Teorema 3.2, se sigue que Y es un continuo localmente conexo.

Sean $h\colon HS_m^n(X)\to HS_m^n(Y)$ un homeomorfismo, $A\in C_n(X)$ y $B\in C_n(Y)$ tal que $h(q_X^{(n,m)}(A))=F_Y^m$ y $h^{-1}(q_Y^{(n,m)}(B))=F_X^m$. Sean $\mathcal{K}=C_n(X)-(F_m(X)\cup\{A\})$ y $\mathcal{L}=C_n(Y)-(F_m(Y)\cup\{B\})$. Definamos $g\colon\mathcal{K}\to\mathcal{L}$ como $g=(q_Y^{(n,m)})^{-1}\circ h\circ q_X^{(n,m)}|_{\mathcal{K}}$, el cual es un homeomorfismo. Puesto que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ son subconjuntos abiertos de $C_n(X)$ y $C_n(Y)$, respectivamente, tenemos que $\dim_W[C_n(X)]=\dim_W[\mathcal{K}]=\dim_{g(W)}[\mathcal{L}]=\dim_{g(W)}[C_n(Y)]$, para cada $W\in\mathcal{K}$. Esto implica que $g(\mathcal{F}_n(X)\cap\mathcal{K})=\mathcal{F}_n(Y)\cap\mathcal{L}$. Por [4, Teorema 5], obtenemos que $\mathcal{F}_n(X)$ es un subconjunto denso de $C_n(X)$. Dado que $\mathcal{K}$ es un subconjunto abierto de $C_n(X)$, se sigue que $\mathcal{F}_n(X)\cap\mathcal{K}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}$. Luego, $\mathcal{F}_n(Y)\cap\mathcal{L}$ es un subconjunto denso de $\mathcal{L}$. Debido a que $\mathcal{L}$ es un subconjunto denso de $C_n(Y)$, se tiene que $\mathcal{F}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $C_n(Y)$. Por [4, Teorema 5], se sigue que Y es un continuo enrejado. □

Teorema 4.5. *Sea X un continuo enrejado, $n,m\in\mathbb{N}$, con $m\leq n$. Entonces, X tiene hiperespacio único $HS_m^n(X)$.*

Demostración. Sean Y un continuo y $h\colon HS_m^n(X) \to HS_m^n(Y)$ un homeomorfismo. Por [7, Teorema 3.4], el resultado se sigue para $m = n$. Supongamos que $m < n$. Dado que X es un continuo enrejado, por Teorema 4.4, tenemos que Y es un continuo enrejado. Por Teorema 4.3, se obtiene que Y es homeomorfo a X. Por lo tanto, X tiene hiperespacio único $HS_m^n(X)$. □

5 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por su tiempo y valiosas observaciones sobre este proyecto, las cuales mejoraron significativamente su calidad.

Bibliografía

[1] J.G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace $HS_m^n(X)$ for a finite graph X is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.

[2] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.

[3] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum,* Topology Appl. 138 (2004), 109–124.

[4] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua,* Rocky Mountain J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.

[5] G. Hernández-Valdez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Uniqueness of the (n, m)-fold hyperspace suspension for continua*, sent to Topology Appl. (2022).

[6] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$,* Topology Proc. 44 (2014), 75–95.

[7] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique n-fold hyperspace suspension,* Topology Appl. 196 (2015), 652–667.

[8] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product,* Topology Appl. 209 (2016), 1–13.

[9] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique n-fold hyperspace suspension,* Houston J. Math. Volume 44, Number 4, (2018), 1335–1365.

[10] A. Illanes, *Models of hyperspaces,* Topology Proc. 41 (2013), 39–69.

[11] R.C. Kirby, L.C. Siebenmaan, *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations,* (AM-88), vol. 88, 1977.

[12] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[13] K. Kuratowski, *Topology Vol. II*, Academic Press, New York, (1968).

[14] A. Libreros-López, F. Macías-Romero, D. Herrera-Carrasco, *On the uniqueness of n-fold pseudo-hyperspace suspension for locally connected continua*, Topology Appl. 312 (2022) 108053, 22 pp.

[15] J.C. Macías, *On the n-fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, Glas. Mat. Ser. III 43 (2008), 439–449.

[16] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138 (2004), 125–138.

[17] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua, II*, Glas. Mat. Ser. III 41(61)(2006), 335–343.

[18] S. Macías, *Topics on continua*, 2nd ed., Springer, Cham, Switzerland, 2018.

[19] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n-fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. 32 (2006), 783–799.

[20] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique n-fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 219–233.

[21] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

gerardo.hernandezval@alumnos.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
mjlopez@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 20, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-09-5

Capítulo 6

Espacios contráctiles

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Víctor Manuel Ortiz Rosas
FCFM-BUAP

Resumen

En topología, un espacio topológico X es contráctil si tiene el tipo de homotopía de un punto, esto es, si existe una equivalencia homotópica entre el espacio X y un espacio de un sólo punto digamos $\{p\}$. La noción de espacio contráctil es muy importante en topología algebraica, ya que representa la clase más sencilla de espacios desde el punto de vista de la homotopía.

1 Introducción

En las siguientes páginas se presentan una serie de resultados conocidos acerca de espacios contráctiles, veremos su definición, algunas ejemplos y teoremas que nos permitirán saber cuando un espacio es contráctil. El presente trabajo sigue los resultados expuestos en 1999 por Sam B. Nadler Jr. y Alejandro Illanes en el capítulo 20 de su obra Hyperspaces: Fundamental and Recent Advances [6]. Para la lectura y correcta comprensión de este trabajo se espera que el lector esté familiarizado con los resultados más importantes de la teoría de espacios métricos y la topología general. De no ser el caso, se sugiere consultar [7] y [9] respectivamente para una introducción.

2 Preliminares

Definición 2.1. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto. Dados un continuo X y $Y \subseteq X$, diremos que Y es un

subcontinuo de X si Y es un continuo como subespacio de X o bien, si Y tiene exactamente un punto.

Definición 2.2. Un espacio topológico X es homogéneo si para cualesquiera $p, q \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(p) = q$.

Definición 2.3. Un arco es un espacio métrico que es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Sean C un arco, $h : [0, 1] \to C$ un homeomorfismo, $p = h(0)$ y $q = h(1)$. Se puede verificar que si $g : [0, 1] \to C$ es también un homeomorfismo, entonces $\{g(0), g(1)\} = \{p, q\}$. A los puntos p y q les llamaremos los puntos extremos de C [12, pp. 3].

Definición 2.4. Un espacio métrico X es arco conexo si dados cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existe un arco en X cuyos puntos extremos son x y y.

Definición 2.5. Si X es un espacio métrico, entenderemos por un hiperespacio de X a una colección de subconjuntos de X con alguna propiedad en particular.

Ejemplo 2.6.

Dado un conjunto X podemos considerar

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A\text{es no vacío y cerrado de}X\}.$$

Otros hiperespacios que se consideran en este trabajo son:

$$CLC(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ es conexo}\}$$

$$2^X = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto}\}$$

$$C(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto y conexo}\}$$

$F_n(X) = \{A \in CL(X) : 1 \leq |A| \leq n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A. Al hiperespacio $F_n(X)$ se le conoce como el n-ésimo producto simétrico de X. Notar que $F_1(X) = \{A \in CL(X) : |A| = 1\}$ y se le llama espacio de singulares de X.

$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$, que se conoce como el espacio de subconjuntos finitos de X.

$C_n(X) = \{A \in 2X : A$ tiene a lo más n componentes $\}$, $n \in \mathbb{N}$.

$C_\infty(X) = \{A \in CL(X) : A$ tiene un número finito de componentes $\}$.

Definición 2.7. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x \in X$ y $A \in CL(X)$, definimos y denotamos la distancia del punto x al conjunto A como $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}$.
Para cualquier $r > 0$ y $A \in CL(X)$, definimos y denotamos a la nube alrededor de A y radio r como $\mathcal{N}(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$.

Definición 2.8. Si X es un espacio métrico con métrica d, la métrica de Hausdorff para $CL(X)$ inducida por d, denotada por H_d, se define como $H_d(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{y} B \subseteq N(r, A)\}$, para cualesquiera $A, B \in CL(X)$.

Puede verificarse en [12, 1.15] que H_d es efectivamente es una métrica para $CL(X)$

Definición 2.9. Sean $(Y, \tau_Y), (Z, \tau_Z)$ espacios topológicos, y sea $F : Y \to CL(Z)$ una función. Entonces decimos que F es semicontinua superior (usc) en $p \in Y$ si ocurre que dado $U \in \tau_Z$ tal que $F(p) \subseteq U$, entonces existe $V \in \tau_Y$ tal que $p \in V$ y $F(y) \subseteq U$ para todo $y \in V$. Si F es usc en todos los puntos de Y, decimos que F es usc.

Definición 2.10. Sea X un espacio métrico compacto, y sea $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Una función de Whitney para $\mathcal{H}$ es una función continua $w : \mathcal{H} \to [O, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subseteq B$ y $A \neq B$ se cumple $w(A) < w(B)$ y

(2) $w(A) = 0$ si y sólo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.

Definición 2.11. Sea X un espacio topológico, decimos que X es conexo en pequeño (cik) en $p \in X$, si para cada conjunto abierto U tal que $p \in U$, existe una vecindad conexa V de p en X contenida en U [11].

Definición 2.12. Sea X un continuo. Se dice que X es descomponible si existen U, V subcontinuos propios de X tales que $X = U \cup V$. Un continuo que no es descomponible se dice que es indescomponible.

Definición 2.13. Decimos que un continuo es hereditariamente descomponible siempre que todos sus subcontinuos no degenerados (que tiene a menos dos puntos) son descomponibles. Análogamente, decimos que que un continuo es heriditariamente indescomponible siempre que todos sus suncontinuos son indescomponibles.

Definición 2.14. Sean Y y Z espacios topológicos, una homotopía es una función continua de $Y \times [0,1]$ a Z.

Notación 2.15. Dados dos espacios topológicos Y, Z y una homotopía $h : Y \times [0,1] \to Z$ y $t \in [0,1]$, denotamos por h_t a la función $h_t : Y \to Z$ definida por $h_t(y) = h(y,t)$ para todo $y \in Y$.

Definición 2.16. Sean Y y Z espacios topológicos, decimos que dos funciones $f, g : Y \to Z$ son homotópicas si existe una homotopía $h : Y \times [0,1] \to Z$ tal que $h_0 = f$ y $h_1 = g$, en tal caso diremos que h es una homotopía que une a f con g.

Definición 2.17. Si una función entre dos espacios topológicos $f : Y \to Z$ es homotópica a una función constante de Y en Z, decimos que f es inesencial, en caso contrario diremos que f es esencial.

Definición 2.18. Un espacio topológico Y es contractil si la identidad $Id : Y \to Y$ es inesencial, esto es, Id es homotópica a una función constante de Y en Y.

La intuición nos dice que un espacio es contractil si puede ser deformado continuamente a un punto, pero esto no necesariamente es así, observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.19. Consideremos el espacio $\mathbb{R}$, note que la identidad $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es homotópica a la función constante cero, $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a través de la homotopía $h : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,t) = (1-t)x$, pero observe que $h_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ para $t < 1$ lo cual cambia la idea de que $\mathbb{R}$ pueda ser deformado al punto 0.

Definición 2.20. Sean Y y Z espacios topológicos tales que $Y \subseteq Z$, decimos que Y es contractil en Z si existe una homotopía $h : Y \times [0,1] \to Z$ tal que $h_0 = i : Y \to Z$ (la inclusión) y h_1 es una función constante de Y en Z.

3 El Teorema Fundamental

Teorema 3.1. *Para cualquier continuo X, las condiciones (1) a (4) son equivalentes:*

(1) 2^X *es contractil.*

(2) $C(X)$ *es contractil.*

(3) $F_1(X)$ *es contractil en* $C(X)$*.*

(4) $F_1(X)$ *es contractil en* 2^X*.*

(5) $C_n(X)$ *es contráctil* ($n \in \mathbb{N}$)*.*

(6) $C_\infty(X)$ *es contráctil..*

Demostración.

(4) $\Rightarrow$ (1) supongamos que existen una función continua $K : F_1(X) \times [0,1] \to 2^X$ y un elemento $A_0 \in 2^X$ tales que, para todo $p \in X$, $K(\{p\}, 0) = \{p\}$, y $K(\{p\}, 1) = A_0$. Por hipótesis y del hecho de que 2^X es arco conexo, podemos suponer que $A_0 = X$.

Definimos $L : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ por:

$$L(A,t) = \bigcup\{K(\{p\}, s) : p \in A, s \in [0,t]\}$$

Observemos que L es continua. Sea $\epsilon > 0$, como $F_1(X) \times [0,1]$ es compacto y K es continua, entonces K es uniformemente continua, por lo que existe $\delta > 0$ tal que, si $H(A,B) < \delta$ y $|t-u| < \delta$, entonces $H(K(A,t), K(B,u)) < \epsilon$. Sean $A, B \in 2^X$ y $t, u \in [0,1]$ tales que $H(A,B) < \delta$ y $|t-u| < \delta$. Veamos que $H(L(A,t), L(B,u)) < \epsilon$. Sea $m \in L(A,t)$. Entonces existen $p \in A$ y $s \in [0,t]$ tales que $m \in K(\{p\}, s)$. Ya que $p \in A \subseteq \mathcal{N}(\delta, B)$, existe $q \in B$ tal que $d(p,q) < \delta$. Tomemos $r = \text{mín}\{s,u\}$ y notemos que $r \in [0,u]$. Si $s \leq u$, entonces $r = s \in [0,t] \cap [0,u]$ y si $u < s$, entonces $r = u < s \leq t$ y como $t - u < \delta$, tenemos que $|s-r| < \delta$. En los dos casos obtenemos $|s-r| < \delta$. Por la elección de δ, se tiene que $H(K(\{q\}, s), K(\{q\}, r)) < \epsilon$. De manera que $p \in K(\{p\}, s) \subseteq \mathcal{N}(\epsilon, K(\{q\}, r)) \subseteq \mathcal{N}(\epsilon, L(B,u))$, por lo que $L(A,t) \subseteq \mathcal{N}(\epsilon, L(B,u))$. De la misma manera se muestra que $L(B,u) \subseteq \mathcal{N}(\epsilon, L(A,t))$. Por lo tanto $H(L(A,t), L(B,u)) < \epsilon$. De aquí que L es continua.

Ahora, observe que $L(A,0) = \bigcup\{K(\{p\}, s) : p \in A, s \in [0,0]\} = \bigcup\{K(\{p\}, 0) : p \in A\} = \bigcup\{\{p\} : p \in A\} = A$ y además $X = \bigcup\{K(\{p\}, 1) : p \in A\} \subseteq$

$\bigcup\{K(\{p\},s) : p \in A, s \in [0,1]\} = L(A,1) \subseteq X$, de aquí que $L(A,1)$, por lo que concluimos que L es una homotopía entre la identidad y una función constante, por lo tanto 2^X es contractil.

(4) $\Rightarrow$ (2) Para ver que $C(X)$ es contractil, veamos que $L|_{C(X)[0,1]} : C(X) \times [0,1] \to C(X)$ es una homotopía.

Notemos que si, $A \in 2^X$ y $0 \leq u \leq t \leq 1$, entonces $[0,u] \subseteq [0,t]$ y así $L(A,u) \subseteq L(A,t)$. Si $A \in C(X)$ y $t \in [0,1]$, probaremos que $L(A,t) \in C(X)$. Supongamos que esto no es cierto y que existe una $t \in [0,1]$ tal que $L(A,t)$ no es conexo, es decir, $L(A,t) = G \cup K$, donde G y K son cerrados, ajenos y no vacíos. Por lo anteriormente demostrado, tenemos que $A \subseteq L(A,t) = G \cup K$, y como A es conexo, tiene que estar contenido en uno de ellos. Supongamos que $A \subseteq G$, tomemos $P = \{s \in [0,t] : L(A,s) \subseteq G\}$, $Q = \{s \in [0,t] : L(A,s) \cap K \neq \emptyset\}$ y sea $f : [0,t] \to 2^X$ definida por $f(s) = L(A,s)$. Ya demostramos que L es continua, por lo que f es continua y notemos que $P = f^{-1}(D)$ y $Q = f^{-1}(B)$, donde $D = \{E \in 2^X : E \subseteq G\}$ y $B = \{E \in 2^X : E \cap K \neq \emptyset\}$. Por [10, 75], D y B son cerrados en 2^X, además f es continua, entonces P y Q son cerrados. Como G y K son ajenos, P y Q también son ajenos. Por lo demostrado anteriormente, para toda $s \in [0,t]$, $L(A,s) \subseteq L(A,t) = G \cup K$, por lo que $s \in P \cup Q$. Entonces P y Q son cerrados, ajenos y su unión es $[0,t]$. Como $[0,t]$ es conexo, alguno de ellos tiene que ser vacío. Pero $L(A,0) = A \subseteq G$, por lo que $0 \in P$ y $L(A,t) = G \cup K$ y $K \neq \emptyset$ de donde $t \in Q$. Por lo cual hemos llegado a una contradicción. De esto concluimos que $L(A,t) \in C(X)$ para todo $A \in C(X)$ y $t \in [0,1]$. Por lo tanto $L|_{C(X)\times[0,1]} : C(X) \times [0,1] \to C(X)$ es una homotopía entre la identidad en $C(X)$ y una función constante, así $C(X)$ es contractil.

(3) $\Rightarrow$ (4) se sigue de que $C(X) \subseteq 2^X$

Observemos que (2) $\Rightarrow$ (3) y (1) $\Rightarrow$ (4) se cumplen pues si un espacio es contráctil cualquier subespacio es contráctil en él. $\square$

(1) implica (5). Como 2^X es contráctil, existe una función $H' : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ tal que para cada $A \in 2^X$, $H0'(A,0) = A$ y $H'(A,1) = X$. Sea $H : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ una homotopía asociada con H' definida por

$$H(A,t) = \bigcup\{H'(A,s) : 0 \leq s \leq t\}.$$

Por Teorema [10, 81], H es continua. Observemos que para cada $A \in 2^X$, $H(A,0) = A$, $H(A,1) = X$ y $H(\{A\} \times [0,1])$ es un arco ordenado de A a X. Notemos que si $A \in C_n(X)$ y $B \in H(\{A\} \times [0,1])$, entonces $A \subseteq B$ y

por lo tanto existe en arco ordenado que va de A a B pues $H(\{A\} \times [0,1]$ es un arco ordenado de A a X y B pertenece a este arco. Mostraremos que $B \in C_n(X)$. Sea $\{B_j : j \in J\}$ el conjunto de las componentes de B. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existe B_{j_i} tal que $A_i \subseteq B_{j_i}$. Así, el número de elementos del conjunto $J' = \{j_i \subseteq J : A_i \subseteq B_{j_i}\}$ es menor o igual que n. Demostraremos que $\{B_j : j \in J\} = \{B_{j_i} : j_i \in J'\}$. Sea $B_j \in \{B_j : j \in J\}$, por [10, 104], $B_j \cap A \neq \emptyset$. Así existe una componente A_i de A tal que $B_j \cap A \neq \emptyset$, por lo que $B_j = B_j \cup A_i \subseteq B_{j_i}$, de lo que se concluye que $B_j = B_{j_i}$. Por lo tanto $\{B_j : j \in J\} = \{B_{j_i} : j_i \in J'\}$. Así B tiene a lo más n componentes, es decir $B \in C_n(X)$. De donde $G = H|_{C_n(X)\times[0,1]} : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ es una función continua tal que para cada $A \in C_n(X)$, $G(A,0) = A$ y $G(A,1) = X$. Así $C_n(X)$ es contráctil.

(1) implica (6). La prueba es similar a (1) implica (5).
(5) implica (3). Como $C_n(X)$ es contráctil, entonces $F_1(X)$ es contráctil en $C_n(X)$, así $F_1(X)$ es contráctil en 2^X. Sabemos que (4) impica (2) y (2) implica (3), por lo tanto (5) implica (3).
(6) implica (3) se puede probar de la misma manera que (5) implica (3).

4 X contractil, X hereditariamente indescomponible

Corolario 4.1. *Si X es un continuo contractil, entonces 2^X y $C(X)$ son contractiles.*

Demostración. Sea X un continuo contractil, como $F_1(X)$ es homeomorfo a X, entonces $F_1(X)$ es contractil (en sí mismo). Luego $F_1(X)$ es contractil en $C(X)$. Así, por el teorema anterior se sigue que 2^X y $C(X)$ son contractiles. □

Corolario 4.2. *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces 2^X y $C(X)$ son contractiles.*

Demostración. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Demotraremos que $F_1(X)$ es contractil en $C(X)$. Por [6, 13.4], existe una función de Whitney, w, para $C(X)$. Definimos $h : F_1(X) \times [0, w(X)] \to C(X)$ como sigue. Sea $(x,t) \in F_1(X) \times [0, w(X)]$; considerando la existencia de un

arco ordenado en $C(X)$ de $\{z\}$ a X ([6, 14.6]), vemos que de la continuidad de w que eiste $A_{x,t} \in w^{-1}(t)$ tal que $x \in A_{x,t}$ además, por [6, 18.5], este será único, por lo que tomemos $h(\{x\}), t) = A_{x,t}$. Además de la definición de función de Whitney se tiene que para cada $\{x\} \in F_1(X)$ se cumple $h(\{x\}, O) = \{z\}$ y $h(\{x\}, w(X)) = X$. Ahora veamos que h es continua. Sea $(\{z\}, t) \in F_1(X) \times [0, w(X)]$, y sea $\{(\{x_i\}, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión que converge en $F_1(X) \times [0, w(X)]$ a $(\{z\}, t)$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\{h(\{x_i\}, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a, digamos, $B \in C(X)$ (ver [6, 3.1,3.7]). Entonces, dado que $x_i \in h(\{x_i\}, t_i)$ para todo i, podemos ver también que $x \in B$; además, dado que $w(h(\{x_i\}, t_i)) = t_i$ para todo i y como w es continua, podemos ver que $w(B) = t$. Así, $B = h(\{z\}, t)$. Por lo tanto h es continua. Con esto se demuestra que h es una homtopía y por lo tanto $F_1(X)$ es contractil en $C(X)$ y luego 2^X y $C(X)$ son ambos contractiles. □

5 Propiedad (k) (Propiedad de Kelley)

Definición 5.1. Sea (X, d) un continuo. Decimos que X tiene la propiedad (K), (o propiedad de Kelley), si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que satisface: (K) si $p, q \in X$ tal que $d(p, q) < \delta$ y si $A \in C(X)$ tal que $p \in A$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ and $H(A, B) < \delta$.

Ejemplo 5.2. Cualquier continuo de Peano tiene la propiedad (k). Para ver esto, sea (X, d) un continuo de Peano y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe una cubierta abierta finita $\mathcal{U} = \{U_1, , ..., U_n\}$, de X tal que cada U_i es conexo y con diámetro menor a ϵ. Sea δ el número de Lebesgue asociado a $\mathcal{U}$. Ahora, tomemos $p, q \in X$ tal que $d(p, q) < \delta$, y sea $A \in C(X)$ tal que $p \in A$. Entonces existe j tal que $p, q \in U_j$. Sea $B = \overline{U_j} \cup A$. Se sigue inmediatmente que $B \in C(X)$, $q \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$. Por lo tanto X tiene la propiedad (K).

Ejemplo 5.3. Todo continuo hereditariamente indescomponible tiene la propiedad (k). Esto se sigue inmediatamente de la continuidad uniforme de la homotopía h en la prueba del último corolario.

Ejemplo 5.4. Sea Y que no es cik en algún punto y_0, sea A un arco que es ajeno a Y y sea $a_0 \in A$. Encaje A a Y identificando a_0 con y_0, y sea X el espacio cociente resultante. Entonces X es un continuo que no tiene la propiedad (k) (véase [5, 3.20].

6 Teorema de la Propiedad (k)

Proposición 6.1. *Sea X un continuo. Entonces para cada $(x,t) \in X \times [0, w(X)]$, $F_w(x,t) \in 2^{2^X}$.*

Demostración. Fijemos $(x,t) \in X \times [0, w(X)]$. Recordemos que como $C(X)$ es compacto $C_x(X)$ es compacto. Así, dado que $F_w(x,t) = C_x(X) \cap w^{-1}(t)$, podemos ver que $F_w(x,t)$ es compacto. Además, $F_w(x,t) \neq \emptyset$ (dado que existe un arco ordenado α en $C(X)$ de $\{z\}$ a X por [6, 14.6], y dado que $w(A) = t$ para algún $A \in \alpha$). Por lo tanto $F_w(x,t) \in 2^{2^X}$. □

Proposición 6.2. *Sea X un continuo y sea w una función Whitney para $C(X)$. Entonces, X tiene la propiedad (k) si y sólo si F_w es continua.*

Demostración. El hecho de que X tenga la propiedad (k) implique que F_w sea continua se sigue de [6, 20.9,20-10], y el siguiente resultado:
(#) Sean (Y, d_y), (Z, d_z) y (M, d_M) espacios métricos y sea D la métrica euclidiana para $Y \times Z$; si $f : YxX \to M$ is equicontinua en cada variable (por separado), entonces f es uniformemente continua.
La prueba de (#) es simple tomando el mínimo de dos deltas y usando la desigualdad triangular (observe que $d_Y \leq D$ y $d_Z \leq D$).
Ahora, para el regregso, asumamos que $F_w : X \times [0, w(X)] \to 2^{2^x}$ es continua, (como es usual suponemos que la métrica para 2^{2^x} es la métrica de Hausdorff H_H que es inducida, como la métrica de Hausdorff H para 2^X). Entonces, dado que $X \times [0, w(X)]$ es compacto, F_w es uniformemente continua. Por lo tanto, usando las definiciones de F_w y H_H, se sigue que X tiene la propriedad (K). □

Teorema 6.3. *Si X es un continuo que tiene la propiedad (k), entonces 2^X y $C(X)$ son contractiles.*

Demostración. Sea w una función de Whitney para $C(X)$ (w existe por [6, 13.5]). Por el teorema inmediato anterior $F_w : X \times [O, w(X)] \to 2^{2^X}$ es continua (recuerde 6.1). Sea $\mathcal{D} = F_1(X) \times [0, w(X)]$. Definamos una función, h, en $\mathcal{D}$ de la siguiente forma:

$$h(\{z\}, t) = \cup F_w(x,t) \text{ para cada}(\{z\}, t)\ \mathcal{D}.$$

Observe que la función trivual de $F_1(X)$ en X ($\{x\} \mapsto x$) es continua; así, dado que F_w es continua, vemos que h es una función continua de $\mathcal{D}$ en 2^X

por 11.5. Además, usando a definición de función de Whitney, vemos que para cada $\{x\} \in F_1(X)$,

$$h(\{z\}, 0) = \cup F_w(x, O) = \cup\{\{x\}\} = \{x\}$$

y

$$h(\{x\}, w(X)) = \cup F_w(x, w(X)) = U\{X\} = x.$$

Así, h es una homotopía que muestra que $F_1(X)$ es contractil in 2^X. Por lo tanto, por 20.1, 2^X y $C(X)$ son contractiles. □

Ejemplo 6.4. Cualquier continuo contractil que no cumpla la propiedad (k) demuestra que el inverso del teorema 6.3 es falso.

Pues pensemos que algún continuo contractil Y que no es *cik* en algún punto y_0, entonces sea $X = Y \cup A$ como en 20.7. Es fácil ver que el continuo X que acabamos de construir es contractil, pero este no cumple con la propiedad (k).

7 X Peano, X homogéneo

Corolario 7.1. *Si X es un continuo de Peano, entonces 2^X y $C(X)$ son contractiles.*

Demostración. Por 20.4, X tiene la propiedad (K). Por lo tanto el corolario se sigue de 20.12.

También podemos notar los siguientes dos resultados; para una prueba revise [4, pp- 70-71] y [3, pp. 394].

Proposición 7.2. *Sean Y y Z compactos, sea $F : Y \to 2^Z$ una función, y sea $p \in Y$. Entonces F es semicontinua superior en p si y sólo si $\limsup F(y_i) \subseteq F(p)$ siempre que $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sea una sucesión en Y que converge a p.*

Proposición 7.3. *Sean Y y Z compactos. Si $F : Y \to 2^Z$ es semicontinua superior, entonces los puntos de continuidad de F forman un denso G_δ conjunto en Y*

Teorema 7.4. *Si X es un continuo, entonces X tiene la propiedad (k) en cada punto de un conjunto G_δ denso en X.*

Demostración. Para cada $x \in X$, sea $F(x) = C_x(X)$ (donde $Cx(X)$ es el hiperespacio de contención para x en $C(X)$). Se puede ver que $F(x)$ es compacto (por [6, 1.19, 3.7]); y también que $F(x)$ es conexo usando [6, 14.6]. Así, F es una función de X en $C(C(X))$.

Ahora, veamos que F es usc usando 7.2. Sea $p \in X$ y sea $\{x_i\}_{x=0}^{\infty}$ una sucesión que converge a p en X. Sea $A \in \lim\sup F(x_i)$. Entonces, $A = \lim A_{i(j)}$ donde $A_{i(j)} \in F(x_{i(j)}$ para cada $j = 1, 2, \ldots$. Así, dado que $x_{i(j)} \in A_{i(j)}$ para cada j y dado que $\{x_i\}_{x=0}^{\infty}$ converge a p, vemos que $p \in A$; luego, $A \in F(p)$. Así, hemos probado que $\lim\sup F(x_i) \subseteq F(p)$. Por lo tanto, por [6, 20.15], $F : X \to C(C(X))$ es usc en p. Esto prueba que F es usc.

Podemos ver que F es continua en x si y sólo si X tiene la propiedad (K) en x. Por lo tanto, dado que F es usc, el teorema se sigue de 7.3. □

Corolario 7.5. *Si X es un continuo homogéneo, entonces 2^X y $C(X)$ son contractiles.*

Demostración. Por 7.4 X tiene la propiedad (K) en algún punto p. Así, dado que X es homogéneo, se sigue que X tiene la propiedad (K) en todo punto. Luego, X tiene la propiedad (k). Por lo tanto, por 6.3, 2^X y $C(X)$ son contractiles. □

8 Pseudo contráctibilidad

Las nociones de pseudo-homotopía y pseudo-contractibilidad fueron introducidas por R. H.Bing. Sin embargo W. Kuperberg fue el primero en dar un ejemplo para demostrar que los conceptos de pseudo-homotopía y pseudo-contractibilidad son diferentes a los conceptos de homotopía y contractibilidad respectivamente. En esta sección presentaremos estos conceptos además de dar ejemplos para contrastar la diferencia entre estos coceptos.

Definición 8.1. Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Una función $H : X \times C \to Y$, donde C es un continuo, se dice que es una pseudo-homotopía entre f y g, si existen puntos $a, b \in C$ tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para $x \in X$. En tal caso diremos que f y g son pseudo-homotópicas.

Definición 8.2. Un espacio es llamado pseudo-contráctil si existe una pseudo-homotopía entre la función identidad y una función constante.

Observación 8.3. Obviamente cada espacio contráctil es pseudo-contráctil, sin embargo el recíproco no siempre se cumple, esto es, pseudo-contráctil no implica contráctil como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.4. Consideremos en el plano complejo $\mathbb{C}$ la espiral $X_0 = \{\frac{t+2}{t+1}e^{it} : t \in [0,\infty)\}$ alrededor del círculo unitario. El conjunto $X = X_0 \cup \{x : |x| \leq 1\} \subseteq \mathbb{C}$, constituye un continuo, que no es arco conexo, así por [10, 124], no es contráctil. Sin embargo X sí es pseudo-contráctil como veremos a continuación. Sea $C = X_0 \cup \{x : |x| = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{C}$ y consideramos a la función $H : X \times C \to X$ definida por:

(1) $H(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, \frac{t'+2}{t'+1}e^{it'}) = \frac{t+t'+2}{t+t'+1}e^{i(t+t')}$, para $t, t' \in [0,\infty)$,

(2) $H(x, \frac{t+2}{t+1}e^{it}) = xe^{it}$, para $|x| \leq 1, t \in [0,\infty)$,

(3) $H(x, x') = xx'$, para $|x| \leq 1, |x'| = 1$, o bien $x' \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$,

(4) $H(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, x) = xe^{it}$, para $t \in [0,\infty), |x| = 1$, o bien $x \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Tenemos que $H(x,2) = x$ y $H(x,0) = 0$ para $x \in X$, esto significa que X es pseudo-contráctil.

Observe que si X es un compacto, entonces la existencia de una pseudo-homotopía entre dos funciones en un espacio metrizable Y, es equivalente a la existencia de un continuo que las une en el espacio $C(X,Y)$ de funciones de X a Y.

Definición 8.5. Sean X, Y espacios topológicos, diremos que X es pseudo-contráctil con respecto a Y si cada función continua $f : X \to Y$ es pseudo-homotópica a una función constante.

Observe que todo espacio X contráctil con respecto a Y es pseudo-contráctil con respecto a Y . A continuación se generalizaran algunos resultados que fueron demostrados anteriormente para espacios contráctiles.

Teorema 8.6. *Sea X un espacio topológico. Si X es pseudo-contráctil, entonces X es pseudo-contráctil con respecto a Y para todo espacio Y.*

Demostración. Dado que X es pseudo-contráctil, existen C un continuo, puntos $a, b \in C$ y $H : X \times C \to X$ una función continua, tales que $H(x,a) = x$ y $H(x,b) = x_0$, con x_0 una constante. Sea $f : X \to Y$ una función continua, definimos $H_0 : X \times C \to Y$ como $H_0(x,t) = f(H(x,t))$. Notemos que H_0 es continua y además $H_0(x,a) = f(H(x,a)) = f(x)$ y $H_0(x,b) = f(H(x,b)) = f(x_0)$, por lo que X es pseudo-contráctil respecto a Y para todo espacio Y. $\square$

Definición 8.7. Sean X, Y espacios topológicos tales que $X \subseteq Y$. Se dice que X es pseudo-contráctil en Y si existe una función continua constante $f : X \to Y$ que es pseudo-homotópica a la función inclusión $\iota : X \to Y$.

Claramente todo espacio X contráctil en Y es pseudo-contráctil en Y.

Corolario 8.8. *Sean X, Y espacios topológicos. Si $Y \subseteq X$ y X es pseudo-contráctil, entonces Y es pseudo-contráctil en X.*

Definición 8.9. Sea X un espacio topológico y $A \in 2^X$. Una retracción de X en A es una función continua $r : X \to A$ tal que $r|_A = Id_A$, es decir $r(a) = a$ para toda $a \in A$. Se dice que A es un retracto de X si existe una retracción de X en A.

Ejemplo 8.10. Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $A = \{(x, y) \in X : ||(x, y)|| = 1\}$, $r : X \to A$ definida por $r(x, y) = \frac{(x,y)}{||(x,y)||}$ es una retracción de X en A, pues $r|_A = Id_A$.

EL siguiente teorema nos proporciona una condición suficiente para que pseudo-contráctbilidad implique contráctibilidad. Pero antes daremos un par de lemas que nos ayudarán a demostrar tal afirmación.

Lema 8.11. *Sean X, K continuos. La función $e : 2^X \times 2^K \to 2^{X\times K}$ definida por $e((A, B)) = A\times B$ es un encaje y es tal que $e(H(X)\times H(K)) \subseteq H(X\times K)$, donde $H(_) \in \{C(_), C_\infty(_), F_\infty(_)\}$.*

Demostración. La función e está bien definida, pues si A, B son cerrados de X y K respectivamente, $A \times B$ es cerrado en $X \times K$. Para probar que e es un encaje, es suficiente con probar que e es inyectiva y continua. Si $(A, B) \neq (A', B')$, entonces $A \neq A'$ o $B \neq B'$. En ambos casos $A \times B \neq A' \times B'$, lo que prueba que e es inyectiva. Para probar la continuidad, tomemos una sucesión $\{(A_n, B_n)\}_{n=1}^\infty$ convergiendo a (A, B). De esta manera $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ convergen a A y a B respectivamente. Probaremos que $\lim\sup(A_n \times B_n) \subseteq A \times B \subseteq \lim\inf(A_n \times B_n)$. Sea $(a, b) \in A \times B$, entonces existen sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ que convergen a a y a b respectivamente. Así la sucesión $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^\infty$ converge a (a, b). Por lo tanto $(a, b) \in \lim\inf(A_n \times B_n)$. Por otra parte si $(c, d) \in \lim\sup(A_n \times B_n)$, existe una sucesión $\{(c_{n_k}, d_{n_k})\}_{n=1}^\infty$ que converge a (c, d). Esto implica que cada sucesión $\{c_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ y $\{d_{n_k}\}$ converge a c y a d respectivamente. Así, $c \in \lim\sup A_n \subseteq A$ y $d \in \lim\sup B_n \subseteq B$. Por lo que $(c, d) \in A \times B$. De lo anterior concluimos que e es un encaje. De

la definición de los hiperespacios se tiene que $e(H(X) \times H(K)) \subseteq H(X \times K)$ para cada $H(_) \in \{C(_), C_\infty(_), F_\infty(_)\}$. □

Lema 8.12. *Sean X un espacio topológico y $W \subseteq Y \subseteq X$. Supongamos que Y es un retracto de X. Entonces W es (pseudo)-contráctil en X si y sólo si W es (pseudo)-contráctil en Y .*

Demostración.

Supongamos que W es pseudo-contráctil en X. Entonces existen un continuo K, puntos a, b de K y una función continua $H : W \times K \to X$ tal que $H(w, a) = w$ y $H(w, b) = p$, para algún $p \in X$ y para cada $w \in W$. Sea $r : X \to Y$ una retracción. Definimos la función continua $G : W \times K \to Y$ como sigue: $G(w, t) = r(H(w, t))$. La función continua G cumple que $G(w, a) = r(H(w, a)) = r(w) = w$ y $G(w, b) = r(H(w, b)) = r(p)$ para todo $w \in W$. La demostración del regreso es inmediata. □

Teorema 8.13. *Sean Y un continuo tal que $F_1(Y)$ es un retracto de $C(Y)$ y X un subcontinuo de Y . Si X es pseudo-contráctil en Y , entonces X es contráctil en Y .*

Demostración. Por hipótesis existe un continuo W, dos puntos distintos $c, d \in W$, $p \in Y$ y una función $H : X \times W \to Y$ tal que para cada $x \in X$, $H(x, c) = p$ y $H(x, d) = x$. Definimos $g : C(X \times W) \to C(Y)$ por $\{H(z) : z \in B\}$ para cada $B \in C(X \times W)$. Por [10, 82], g es continua. Notemos que $C(X) \times C(W)$ es homeomorfo a $\mathcal{H} \subseteq C(X \times W)$, con homeomorfismo e como en el Lema 8.11. Como $C(W)$ es arco conexo, entonces, existe un arco A contenido en $C(W)$ con puntos finales $\{c\}$ y $\{d\}$. Definimos $h : F_1(X) \times A \to C(Y)$ por $h(\{x\}, B) = g(\{x\} \times B)$ para cada $x \in X$ y cada $B \in A$. Por lo que $F_1(X)$ es contráctil en $C(Y)$. Dado que $F_1(X) \subseteq F_1(Y)$ y $F_1(Y)$ es un retracto de $C(Y)$, entonces por el Lema 8.12 $F_1(X)$ es contráctil en $F_1(Y)$. Por [10, 66], X es contráctil en Y.

□

Corolario 8.14. *Sea Y un continuo tal que $F_1(Y)$ es un retracto de $C(Y)$. Si Y es pseudocontráctil entonces Y es contráctil.*

Demostración. Haciendo $X = Y$ como en el Teorema 8.13 se tiene lo requerido. □

Teorema 8.15. *Sea X un continuo. Entonces $F_1(2^X)$ es retracto de 2^{2^X}. En particular $F_1(2^X)$ es un retracto de $C(2^X)$.*

Demostración. Sean $U : 2^{2^X} \to 2^X$ la función unión y $h : 2^X \to F_1(2^X)$ un homeomorfismo tal que $h(A) = \{A\}$. La función $g = h \circ U$ es una retracción de 2^{2^X} a $F_1(2^X)$ pues $g(\{A\}) = h \circ U(A) = h(U(A)) = h(A) = \{A\}$. Por otra parte como $F_1(2^X) \subseteq C(2^X) \subseteq 2^{2^X}$, $g|_{C(2^X)}$ es una retracción en $F_1(2^X)$. □

Teorema 8.16. *Sea X un espacio topológico. Si $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X, entonces 2^X es pseudo-contráctil*

Demostración. Dado que $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X, entonces existe un continuo C, puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : F_1(X) \times C \to 2^X$ tal que $H(\{x\}, b) = \{x\}$ y $H(\{x\}, a) = A_0$ para algún $A_0 \in 2^X$. Definimos $H' : 2^X \times C \to 2^X$ por $H'(A, t) = \bigcup\{H(\{x\}, t) : x \in A\}$. Notemos que $H'(A, a) = \bigcup\{H(\{x\}, a) : x \in A\} = \cup A_0 = A_0$ y $H'(A, b) = \bigcup\{H(\{x\}, b) : x \in A\} = \bigcup\{x : x \in A\} = A$. Por lo que 2^X es pseudo-contráctil. □

Teorema 8.17. *Sea X un continuo. Si 2^X es pseudo-contráctil, entonces 2^X es contráctil*

Demostración. Por Teorema 8.15, $F_1(2^X)$ es un retracto de $C(2^X)$. Haciendo $Y = 2^X$, como en el Corolario 8.14, tenemos que 2^X pseudo-contráctil implica que Y es contráctil.

□

Teorema 8.18. *Si $C(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $C(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como $C(X)$ es pseudo-contráctil entonces por el Corolario 8.8, $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $C(X)$, por tanto en 2^X. Así por el Teorema 8.16, 2^X es pseudo-contráctil y por el Teorema 8.17, 2^X es contráctil. Finalmente por el Teorema 3.1 $C(X)$ es contráctil. □

Teorema 8.19. *Si $C_n(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $C_n(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como $C_n(X)$ es pseudo-contráctil, entonces por el Corolario 8.8, $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $C_n(X)$, en particular $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X. De esta manera, por el Teorema 8.16, 2^X es pseudo-contráctil y por el Teorema 8.17, 2^X es contráctil. Así por el Teorema 3.1, $C_n(X)$ es contráctil. □

Teorema 8.20. *Si $C_\infty(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $C_\infty(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como $C_\infty(X)$ es pseudo-contráctil, entonces por el Corolario 8.8, $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $C_\infty(X)$, por lo que $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X. Así por el Teorema 8.16, 2^X es pseudo-contráctil y por el Teorema 8.17, 2^X es contráctil. Por último por el Teorema 3.1, $C_\infty(X)$ es contráctil. □

□

Con todas estas ideas podemos generalizar aún más el Teorema Fundamental3.1 anteriormente presentado agregando más condiciones equivalentes.

Teorema 8.21. *i X es un continuo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) 2^X *es contractil.*

(2) $C(X)$ *es contractil.*

(3) $F_1(X)$ *es contractil en* $C(X)$.

(4) $F_1(X)$ *es contractil en* 2^X.

(5) $C_n(X)$ *es contráctil* ($n \in \mathbb{N}$).

(6) $C_\infty(X)$ *es contráctil.*

(7) $F_1(X)$ *es pseudo-contráctil en C(X),*

(8) $F_1(X)$ *es pseudo-contráctil en* 2^X,

(9) $C(X)$ *es pseudo-contráctil,*

(10) 2^X *es pseudo-contráctil,*

(11) $C_n(X)$ *es pseudo-contráctil,*

(12) $C_\infty(X)$ *es pseudo-contráctil*

Demostración. (3) $\Rightarrow$ (7), (4) $\Rightarrow$ (8), (2) $\Rightarrow$ (9), (1) $\Rightarrow$ (10), (5) $\Rightarrow$ (11), (6) $\Rightarrow$ (12) se cumplen por Observación 8.3.

(1), (2), (3), (4), (5) y (6) son equivalentes por Teorema 3.1.
(8) $\Rightarrow$ (10) Se satisface por Teorema 8.16.
(10) $\Rightarrow$ (1) Se satisface por Teorema 8.17.
(9) $\Rightarrow$ (2) Se satisface por Teorema 8.18.
(11) $\Rightarrow$ (5) Se satisface por Teorema 8.19.
(12) $\Rightarrow$ (6) Se satisface por Teorema 8.20.

(8) $\Rightarrow$ (4) se cumple pues (8) $\Rightarrow$ (10), (10) $\Rightarrow$ (1) y (1) $\Rightarrow$ (4) por Teorema 3.1.

(7) $\Rightarrow$ (8) se sigue de que $C(X) \subseteq 2^X$.

$\square$

9 Suavidad y contráctibilidad en hiperespacios

En esta sección se estudia la relación entre la propiedad de suavidad y contrátibilidad. Un resultados conocido es que los continuos suaves por arcos son contráctiles. Definamos una propiedad más debil que la suavidad por arcos que es equivalente a ser contréctil en hiperespacios.

Definición 9.1. Sean X un continuo y $p \in X$. Se dice que X es suave por arcos en el punto p, siempre que exista una función continua $\alpha : X \to C(X)$ que cumpla las siguientes condiciones:

1. $\alpha(p) = \{p\}$,
2. Para cada $x \in X - \{p\}$, $\alpha(x)$ es un arco de p a x, y
3. si $x \in \alpha(y)$, entonces $\alpha(x) \subset \alpha(y)$.

Se dirá que X es sueve por arcos cuando X sea suave por arcos en algún punto $p \in X$.

Definición 9.2. Sea X un continuo. Se dice que X es debilmente suave por arcos en el punto $p \in X$, siempre que exista una función continua $\alpha : X \to C(X)$ que cumpla las siguientes condiciones:

1. $\alpha(p) = \{p\}$, y
2. Para cada $x \in X - \{p\}$, $\alpha(x)$ es un arco de p a x.

Se dirá que X es debilmente sueve por arcos cuando exista un punto $p \in X$ tal que X es debilmente suave por arcos en p.

Es claro que, si X es suave por arcos en el punto p, entonces X es debilmente suave por arcos en p, sin embargo el inverso de este enuciado no es cierto [6, Ejercicio 78.37].

Teorema 9.3. *Sea X un continuo. Los siguientes enunciados son equivalentes,*

1. *$C(X)$ es contráctil,*
2. *existe un elemento $B \in C(X)$ y una función continua $\alpha : X \to C(C(X))$ tal que para cada $x \in X$, $\alpha(x)$ es un arco de $\{x\}$ a B(en el caso en que $B = \{b\} \in F_1(X)$, pedimos que $\alpha(b) = \{B\}$),*
3. *$C(X)$ es debilmente suave por arcos, y*
4. *$C(X)$ es debilmente suave por arcos en X.*

Demostración. (1) $\to$ (4). Por ser $C(X)$ contráctil, existe $h : [0,1] \times C(X) \to C(X)$ una función continua, para ver que $C(X)$ es suave por arcos en X basta tomar $\alpha : C(X) \to C(C(X))$ decinifa por $\alpha(B) = \{\cup\{h(B,t) : t \in [0,1]\}\}$. A su vez, (4) $\to$ (3) y (3) $\to$ (2) son inmediatas de la defición. Veamos que (2) $\to$ (1).

Sean $B \in C(X)$ y una función continua $\alpha : X \to C(C(X))$ tal que para cada $\{x\} \in F_1(X) - \{B\}$, $\alpha(x)$ es un arco de $\{x\}$ a B y en el caso en que $B \in= \{b\} \in F_1(X)$, $\alpha(b) = \{B\}$. Consideremos $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y una función continua $\beta : [0,1] \to C(X)$ tal que $\beta(0) = B$, $\beta(1) = X$ y $\beta(s) \subset \beta(t)$ si $s \leq t$, esto por el [6, Teorema 14.6 y Lema 14.2].

Para cada $x \in X$, sea $D_x = \cup\{A : A \in \alpha(x)\}$. Por [6, Ejercicio 11.5], $D_x \in C(X)$. Para cada elemento $A \in \alpha(x)$ sea

$$[A,x] = \cup\{C : C \text{ pertenece al subarco de } \alpha(x) \text{ que une a } \{x\} \text{ con } A\}.$$

Definamos la siguiente función $G : F_1(X) \times [0,1] \to C(X)$ por

$$G(\{x\},t) = \begin{cases} [A,x], & si \;\; t \in [0,\frac{1}{2}], \\ D_x \cup \beta(2t-1), & si \;\; t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

donde $A \in \alpha(X)$ se elige de tal forma que $\mu([A,x]) = 2t\mu(D_x)$. Veamos que G esta bien definida. Si $A, E \in \alpha(x)$ son tales que $\mu([A,x]) = 2t\mu(D_x) = \mu([E,x])$. Entonces dado que $\alpha(x)$ es un arco, se cumple que $[A,x] \subset [E,x]$ o bien $[E,x] \subset [A,x]$, como su tamaño es el mismo se concluye que $[A,x] =$

$[E, x]$. De este modo $G(\{x\}, t)$ esta bien definida para $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Por otro lado, $\mu([B, x]) = \mu(D_x) = 2(\frac{1}{2})\mu(D_x) = D_x$ y $D_x \cup \beta(2(\frac{1}{2}) - 1) = D_x \cup \beta(0) = D_x$. Esto muestra que $G(\{x\}, \frac{1}{2}) = D_x$ en cualquiera de las dos definiciones de G, por ende G esta bien definida. Note que $G(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $G(\{x\}, 1) = X$ para toda $x \in X$. Veamos que G es continua sobre el conjunto $F_1(X) \times [0, \frac{1}{2}]$, para ellos supongamos que lo contrario. De esto que existan dos sucesiones, $\{\{x_n\}\}_{n=1}^{\infty}$ en $F_1(X)$ que converge a un elemento $\{x\} \in F_1(X)$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, \frac{1}{2}]$ convergente a un número $t \in [0, \frac{1}{2}]$, tal que $\{G(\{x_n\}, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $G(\{x\}, t)$. Tomemos $G(\{x_n\}, t_n) = [A_n, x_n]$. Sea $\langle A_n, x_n\rangle$ el subarco de $\alpha(x_n)$ que une a A_n con $\{x_n\}$.

Tomando subsucesiones, podemos suponer que $G(\{x_n\}, t_n)$ converge a D, para algún $D \in C(X) - \{G(\{x\}, t)\}$, y $\{\langle A_n, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\mathcal{A}$ para algún $\mathcal{A} \in C(C(X))$. Dado que $\langle A_n, x_n\rangle \subset \alpha(x_n)$ y $\{\alpha(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\alpha(x)$, entonces $\mathcal{A} \subset \alpha(x)$. Así, $\mathcal{A}$ es un subarco (o un subconjunto de un solo punto) de $\alpha(x)$ que contiene al punto $\{x\}$.

Sean A_0 y $\{x\}$ los puntos finales de $\mathcal{A}$. Por el ejercicio [6, Ejercicio 11.5] se cumple que $G(\{x_n\}, t_n) = [A_n, x_n] = \cup\{E : E \in \langle A_n, x_n\rangle\}$ tiende a $\cup\{E : E \in\in \mathcal{A}\} = [A_0, x]$. Luego, $\{2t_n\mu(D_{x_n})\} = \{\mu([A_n, x_n])\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\mu([A_0, x])$. Como $\{\alpha(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\alpha(x)$, aplicando nuevamente el exercicio 11.5, $\{D_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a D. Entonces $\{2t_n\mu(D_{x_n})\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $2t\mu(D_x)$. De esto que $\mu([A_0, x]) = 2t\mu(D_x)$. Se tiene así que $G(\{x\}, t) = [A_0, x]$, esto implica que $\{G(\{x_n\}, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $G(\{x\}, t)$, esta contradicción muestra que G es continua sobre el conjunto $F_1(X) \times [0, \frac{1}{2}]$. Es fácil comprobar que G es continua sobre el conjunto $F_1(X) \times [\frac{1}{2}, 1]$. Por lo tanto, G es continua. Hemos probado que $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$. Por el Teorema 8.21 se cumple que $C(X)$ es contráctil. $\square$

10 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

[1] N. Bourbaki, *General Topology I*, Springer, 1989.

[2] Félix Capulín, Leonardo Juárez-Villa, and Fernando Orozco-Zitli. *General properties of pseudo-contractibility*, Topology and its Applications 247 (2018): 57–71.

[3] Van Douwen, Eric K.; Goodykoontz Jr, Jack T. *Aposyndesis in hyperspaces and ˇCech-Stone remainders*, General Topology and Modern Analysis, LF McAuley and MM Rao, Editors. 1981.

[4] R. Duda *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph I.* Fundamenta Mathematicae, 1968, vol. 62, no 3, p. 265–286.

[5] Carl Eberhart; Sam B. Nandler, *Irreducible Whitney levels.* 1980.

[6] Alejandro Illlanes y Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspace fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[7] Ignacio L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Limusa, México, D.F., 2008.

[8] Sobolewski Mirosław, *Pseudo-contractibility of chainable continua*, Topology and its Applications 154.16 (2007): 2983–2987.

[9] James R. Munkres, *Topology.* Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

[10] Fátima Itzel Regis Avila, *Hiperespacios y Continuos Pseudocontráctiles*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias, UAEM, presentada el 19 de septiembre de 2019.

[11] Fernando Orozco Zitli, *Conexidad en pequeño y conexidad local en C(X).* CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva, 2006, vol. 13, no 1, p. 75–80.

[12] Esaú Alejandro Pérez Rosales, *Existencia de arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 22 de junio de 2022.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
victor.ortizro@alumno.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 20, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-8957-09-5

Capítulo 7

Propiedades del cubo de Hilbert

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

En este capítulo se presentan algunas propiedades del cubo de Hilbert. Un hecho conocido es que el cubo de Hilbert es homogténeo, en este trabajo se presenta una prueba a detalle de este hecho. También se estudia la propiedad del punto fijo y se presentan algunos resultados referentes a hiperespacios de continuos.

1 Introducción

El cubo de Hilbert es el producto numerable del intervalo cerrado $[0, 1]$. El intervalo $[0, 1]$ es un espacio métrico, compacto y conexo. Los espacios con estas tres propiedades son conocidos como continuos. Una de las propiedades más interesantes del cubo de Hilbert es, la de ser universal para la clase de los continuos, es decir, cualquier continuo puede ser encajado en el cubo de Hilbert, véase Teorema 3.4. Un hecho que resulta sorprendende es que dicho espacio es homogéneo, lo cual muestra que el producto numerable de espacios no homogéneos puede ser homogéneo, véase Teorema 4.23. La mayor parte de este trabajo esta enfocada en exponer una prueba a detalle para este hecho, esto se puede encontrar en el capítulo 3. Otra propiedad que se estudia es la de punto fijo, por el Teorema del punto fijo de Brower se sabe que toda n-celda tiene la propiedad del punto fijo, en el capítulo 5 se prueba que el cubo de Hilbert tiene la propiedad del punto fijo. Como consecuencia de este resultado, se cumple que todo retracto absoluto tiene la propiedad del punto fijo, estos corolarios se presentan al final del capitulo 5. Finalmente, en el

capítulo 6 se enuncian algunos resultados que muestran su relación con los hiperespacios de continuos.

2 Preeliminares

En esta sección se enuncian algunas definiciones y resultados necesarios para poder abordar el contenido de este capítulo.

Un **arco** es cualquier conjunto homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Dado un continuo X denotaremos por d a la métrica de X. Dado $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, la bola con centro en a y de radio ε, se denota por $\mathcal{B}(a,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon\}$.

Decimos que $X \approx Y$ cuando X es homeomorfo a Y. En este trabajo $\mathbb{R}^n$ se considera con la topología euclidiana y por ende todos sus subespacios.

Definición 2.1. Sean X, Y espaciós metricos, decimos que la función $f : X \to Y$ es un **encaje** si f es un homeomorfismo entre X y $f(X)$.

Una n**-celda** es un espacio homeomorfo a la bola cerrada B^n en $\mathbb{R}^n$, donde $B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$ y $||\mathbf{x}||$ denota la norma euclidiana.

Definición 2.2. Sean (X,d) y (Y,d') espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$ con $d(x,y) < \delta$ se cumple que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Lema 2.3. *Sean X un espacio métrico y $f, g : X \to X$ funciones continuas tales que $f \circ g = id = g \circ f$, entonces f, g son homeomorfismos.*

Demostración. Basta con probar que f, g son inyectivas y sobreyectivas. Ya que g es la función inversa de f y viceversa.

Sean $x, y \in X$, supongamos que $f(x) = f(y)$ y $g(x) = g(y)$, entonces $g(f(x)) = g(f(y))$ y $f(g(x)) = f(g(y))$ y por hipótesis se cumple en ambos casos que $x = y$. Por tanto f y g son inyectivas. Dado $y \in X$, sabemos que $f(y), g(y) \in X$, tomando como $x_1 = f(y)$ y $x_2 = g(y)$ se cumple que $f(x_2) = f(g(y)) = y$ y $g(x_1) = g(f(y)) = y$, por ende f, g son sobreyectivas. Luego f, g son homemorfismos. $\square$

Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos, una función de elección f para $\mathcal{A}$ cumple que $f : \mathcal{A} \to \cup\mathcal{A}$ y $f(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

Consideremos una familia $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ de espacios topológicos no vacíos, en donde J es un conjunto no vacío. El conjunto $\prod_{j\in J} X_j$ es el conjunto de todas las funciones de elección definidas del conjunto J sobre la colección $\{X_j : j \in J\}$, es decir,

$$\prod_{j\in J} X_j = \{f : J \to \bigcup_{j\in J} X_j : \text{ para cada } j \in J, f(j) \in X_j\}.$$

Teorema 2.4. *(Teorema de Tychonoff)[?, Teorema 4, pág. 17] Sea $\{X_j : j \in J\}$ una colección no vacía de espacios topológicos no vacíos. El producto $X = \prod_{j\in J} X_j$ es un espacio compacto si y sólo si el espacio X_j es compacto para cada $j \in J$.*

Teorema 2.5. *[?, Teorema 11, pág. 11] El espacio producto $X = \prod_{j\in J} X_j$ es un espacio conexo si y sólo si cada X_j es conexo.*

Definición 2.6. Sea X un espacio métrico y $p \in X$. Diremos que X es **localmente conexo en p**, si para toda vecindad U de p, existe V abierto y conexo tal que $p \in V \subset U$. Se dice que X es localmente conexo, si es localmente conexo en todos sus puntos.

Sea X un continuo. Denotamos por $\mathcal{H}(X)$ a la colección de todos los homeomorfismos de X en X.

$$\mathcal{H}(X) = \{h : X \to X : h \text{ es un homeomorfismo}\}.$$

3 El cubo de Hilbert es universal

En esta sección se demuestra que, todo continuo es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert. La parte medular de la demostración esta en probar que todo espacio métrico y compacto es separable. Antes de probar esto, definamos el cubo de Hilbert y démosle una métrica.

El cubo de Hilbert se define como el producto topológico de una cantidad numerable de copias del intervalo $[0, 1]$. En nuestro caso, el conjunto $\prod_{n=1}^{\infty}[0, 1]$

es el conjunto de todas las funciones definidas del conjunto $\mathbb{N}$ sobre la colección $\{[0,1]\}$, es decir

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty}[0,1] = \{f : \mathbb{N} \to [0,1] : f \text{ es función}\}.$$

Es por ello que los elementos en el cubo de Hilbert se pueden representan como sucesiones $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, cabe mencionar que en ocasiones no es necesario usar la notación de sucesión. Cabe mencionar que, en la literatura se suele usar I^{∞} para denotar el cubo de Hilbert.

La métrica con la que dotamos a dicho espacio es $d_{\infty} : Q \times Q \to \mathbb{R}$ y se define por:

$$d_{\infty}((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \text{ para toda } (x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in Q.$$

Esta función es claramente una métrica para Q, ya que la sucesión $\{\frac{1}{2^i}\}_{i=1}^{\infty}$ es sumable, por ende haciendo uso de criterios de sumabilidad se comprueba facilmente que d_{∞} es una métrica. El siguiente resultado es un corolario de los Teoremas 2.4 y 2.5.

Corolario 3.1. *El cubo de Hilbert es un continuo.*

Para probar la universalidad de Q, definimos la propiedad de que un espacio sea separable y posteriormente probamos que todo espacio métrico compacto es separable.

Definición 3.2. Sea X un espacio métrico. Se dice que X es **separable** si existe un subconjunto $D \subset X$ tal que D es a lo más numerable y denso en X.

Lema 3.3. *Todo espacio métrico compacto es separable.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto.
Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \subset X$ finito tal que $X \subset \bigcup_{x \in A_n} \mathcal{B}(x, \dfrac{1}{n})$, donde $\mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$ denota la bola con centro en x y radio r, para toda $x \in A_n$ y $r > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$, como X es compacto y $X \subset \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$, entonces existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tal que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(x_i, \frac{1}{n})$. Si definimos $A_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ se tiene que $X \subset \bigcup_{x \in A_n} \mathcal{B}(x, \frac{1}{n})$.

Ahora, sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, note que A es numerable. Veamos que A es denso en X, es decir, $\mathrm{cl}(A) = X$.
Sean $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Como $p \in X \subset \bigcup_{x\in A_m} \mathcal{B}(x, \frac{1}{m})$. Así, existe $a \in A_m$ tal que $p \in \mathcal{B}(a, \frac{1}{m})$, como existe $d(p, a) < \frac{1}{m} < \varepsilon$, entonces $a \in \mathcal{B}(p, \varepsilon)$. Además, $a \in A_m \subset A$, de ahí que $\mathcal{B}(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, como ε era arbitrario, se tiene que $p \in \mathrm{cl}(A)$, de ahí que A es denso en X, por lo tanto por definición, se tiene que X es separable. □

Teorema 3.4. *Todo continuo se puede encajar en un cubo de Hilbert, es decir, todo continuo es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea X un continuo y d una métrica para X. Como X es continuo, entonces por definición X es un espacio métrico compacto, así por el lema 3.3, X es separable, luego existe $A = \{p_1, p_2, \ldots\}$ subconjunto denso y a lo más numerable en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $h_n : X \to [0, 1]$ por $h_n = \frac{1}{1+d(x,p_n)}$. Note que por definición de métrica, h_n está bien definida y es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Ahora, definimos $h : X \to Q$ por

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots).$$

Como h_n es continua para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que h es continua. Más aún, sean x, $y \in X$ con $x \neq y$, y sean $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$ y $j \in \mathbb{N}$. Como A es denso en X, entonces $x \in \mathrm{cl}(A)$, de donde $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Sea $p_j \in \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A$, por como elegimos a ε se tiene que $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap \mathcal{B}(y, \varepsilon) = \emptyset$, de ahí que $d(x, p_j) < \varepsilon \leq d(y, p_j)$, lo que implica que $h_j(y) = \frac{1}{1+d(y,p_j)} < \frac{1}{1+d(x,p_j)} = h_j(x)$. Así, $h_j(x) \neq h_j(y)$, por lo tanto h es inyectiva.
Así, se tiene que h es inyectiva y continua, cuyo dominio es un compacto. Luego, X es homeomorfo a $h(X)$, es decir, h es un encaje de X en Q. □

4 El cubo de Hilbert es homogéneo

En esta sección probaremos que el cubo de Hilbert es homogéneo. Para ello se dotara de una métrica completa al espacio de todos los homeomorfismos de Q en Q, siendo esto parte fundamental de la prueba. Después, haciendo uso de propiedades de convergencia se construirá el homeomorfismo deseado.

Definición 4.1. Un espacio topológico X se llama homogéneo si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Teorema 4.2. *El intervalo abierto* $(0, 1)$ *es homogéneo.*

Demostración. Sean $a, b \in (0, 1)$. Consideremos la función $f_{ab} : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que

$$f_{ab}(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x & si \quad x \in [0, a], \\ \frac{1-b}{1-a}x + (b - \frac{1-b}{1-a}a) & si \quad x \in [a, 1]. \end{cases}$$

No es complicado ver que $f_{a,b}$ es continua, inyectiva y sobreyectiva, por ser $[0, 1]$ compacto se cumple que $f_{a,b}$ es un homeomorfismo que cumple que $f_{ab}(a) = b$, tomando la restricción a $(0, 1)$ se cumple lo deseaso. □

Teorema 4.3. *La curva cerrada simple* S^1 *es homogéneo.*

Demostración. Consideremos $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. En coordenadas polares, cada punto z en S^1, se puede expresar de la forma $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$, para algún $\theta \in [0, 2\pi)$.

Sean $z_1, z_2 \in S^1$, por lo que existen $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ tales que $z_1 = e^{i\theta_1}, z_2 = e^{i\theta_2}$. Supongamos sin perder generalidad que $\alpha = \theta_2 - \theta_1 > 0$.

Definamos la función

$$\begin{aligned} R_\alpha : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ e^{i\theta} &\longmapsto e^{i(\theta+\alpha)}. \end{aligned}$$

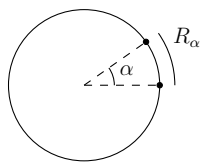


Figura 1: Rotación R_α.

Esta función toma un punto en S^1 y lo rota α radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre S^1. No es complicado converncerse de que R_α es un homeomorfismo tal que $R_\alpha(z_1) = R_\alpha(e^{i\theta_1}) = e^{i(\theta_1+\alpha)} = e^{i(\theta_1+(\theta_2-\theta_1))} = e^{i(\theta_2)} = z_2$. Por ende S^1 es homógeneo. □

Teorema 4.4. *Si X es homogéneo y Y es un continuo homeomorfo a X, entonces Y también es homogéneo.*

Demostración. Sea $g : Y \to X$ un homeomorfismo, sean $x, y \in Y$, entonces $g(x), g(y) \in X$, como X es homogéneo existe $h : X \to X$ un homeomorfismo tal que $h(g(x)) = g(y)$. Consideremos $H : Y \to Y$ tal que $H(z) = (g^{-1} \circ h \circ g)(z)$, es claro que H es un homeomorfismo. Note que $H(x) = g^{-1}(h(g(x))) = g^{-1}(g(y)) = y$. Por lo tanto, Y es homogéneo. □

Teorema 4.5. *Si X, Y son homogéneos, entonces $X \times Y$ es homogéneo,*

Demostración. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Existen homeomorfismos $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ tales que $f(x_1) = x_2$ y $g(y_1) = y_2$, con lo cual la función $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ definida por $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$ es un homeomorfismo que manda (x_1, y_1) a (x_2, y_2). □

Corolario 4.6. *El espacio $S^1 \times (0, 1)$ (cilindro sin tapas) es homógeneo.*

Teorema 4.7. *(Teorema de la invarianza del Dominio)[4, Teorema 2B.3] Si U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $h : U \to \mathbb{R}^n$ es una función continua e inyectiva, entonces la imagen $h(U)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 4.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$. $[0, 1]^n$ no es homogéneo.*

Demostración. Sean $x = (\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}), y = (0, ..., 0) \in [0, 1]^n$, supongamos que existe $h : [0, 1]^n \to [0, 1]^n$ un homeomorfismo, tal que $h(x) = y$. Como $x \in (0, 1)^n$ y $(0, 1)^n$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, por el Teorema de la invarianza de dominio se cumple que $h((0, 1)^n)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $y = h(x) \in h((0, 1)^n) \subset [0, 1]^n$, esto implica que x es un punto interior de $[0, 1]^n$, lo cual es falso, por lo tanto no existe un homeomorfismo que mande x a y, por lo que $[0, 1]^n$ no es homogéneo. □

Definamos la métrica del supremo para el espacio $\mathcal{H}(Q)$. Sea $\rho : \mathcal{H}(Q) \times \mathcal{H}(Q) \to \mathbb{R}$ definida por $\rho(f, g) = \sup\{d_\infty(f(x), g(x)) : x \in Q\}$.

Teorema 4.9. *La función ρ es una métrica para el espacio $\mathcal{H}(Q)$.*

Demostración. Sean $f, g \in Q$ tales que $\rho(f, g) = 0$. Sea $(x_i)_{i=1}^\infty \in Q$, se tiene que $0 \leq d_\infty(f((x_i)_{i=1}^\infty), g((x_i)_{i=1}^\infty)) \leq \rho(f, g) = 0$, por ende $d_\infty(f((x_i)_{i=1}^\infty), g((x_i)_{i=1}^\infty)) = 0$, si $f((x_i)_{i=1}^\infty = (y_i)_{i=1}^\infty, g((x_i)_{i=1}^\infty) = (z_i)_{i=1}^\infty$ se tiene que $|y_i - z_i| = 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$, es decir, $y_i = z_i$ para toda i, por

ende $f((x_i)_{i=1}^{\infty} = g((x_i)_{i=1}^{\infty})$, como esto se cumple para toda $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ se tiene que $f = g$. Es claro que si $f = g$ se cumple que $\rho(f, g) = 0$.

Es inmediato que $\rho(f, g) = \rho(g, f)$.

Sean $f, g, h \in \mathcal{H}(Q)$, note que $d_\infty(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f(x), h(x)) + d_\infty(h(x), g(x))$ para toda $x \in Q$ esto ya que d_∞ es métrica. por ende $\rho(f, g) \leq \sup\{d_\infty(f(x), h(x)) + d_\infty(h(x), g(x)) : x \in Q\}$ y por propiedades del supremo, se cumple que $\sup\{d_\infty(f(x), h(x)) + d_\infty(h(x), g(x)) : x \in Q\} = \sup\{d_\infty(f(x), h(x)) : x \in Q\} + \sup\{d_\infty(h(x), g(x)) : x \in Q\} = \rho(f, h) + \rho(h, g)$. Por ende se cumple la desigualdad del triángulo. □

La función ρ es una métrica para el espacio $\mathcal{H}(X)$, cuando X tiene una métrica acotada. Las siguientes propiedades serán de utilidad para este trabajo.

Lema 4.10. *Sea X un espacio métrico, con métrica acotada. La métrica ρ cumple las siguientes propiedades:*

1. *$\rho(f, g) = \rho(f \circ h, g \circ h)$ para toda $f, g, h \in \mathcal{H}(X)$.*

2. *Si $\rho(h, id) < \varepsilon$, entonces $\rho(h^{-1}, id) < \varepsilon$.*

Demostración. 1. Sean $f, g, h \in \mathcal{H}(X)$. Tenemos que $\rho(f \circ h, g \circ h) = \sup\{d((f \circ h)(x), (g \circ h)(x)) : x \in X\} = \sup\{d(f(h(x)), g(h(x))) : x \in X\} = \sup\{d(f(z), g(z) : z \in X\} = \rho(f, g)$.

2. Sea $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $\rho(h, id) < \varepsilon$, por el inciso anterior se cumple que $\rho(h, id) = \rho(h \circ h^{-1}, id \circ h^{-1}) < \varepsilon$, es decir, $\rho(h^{-1}, id) = \rho(id, h^{-1}) < \varepsilon$.

□

La métrica del supremo en $\mathcal{H}([0, 1])$ tiene el problema de no ser completa, esto se extiende para el espacio $\mathcal{H}(Q)$ con la misma métrica, por ello se debe definir una métrica difernte para hacer al espacio $\mathcal{H}(Q)$ completo.

Lema 4.11. *El espacio $\mathcal{H}([0, 1])$ con la métrica del supremo no es completo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función f_n definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} (2 - \frac{1}{2^n})x & si \quad x \in [0, \frac{1}{4}], \\ \frac{1}{2} + \frac{x - \frac{1}{2}}{2^n} & si \quad x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ 1 - (1 - x)(2 - \frac{1}{2^n}) & si \quad x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Veamos las gráficas de f_1, f_2 y f_3 para observar su comportamiento. Note que la parte del medio va convergiendo a la función constante $\frac{1}{2}$.

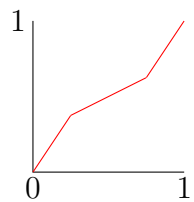


Figura 2: Gráfica de f_1.

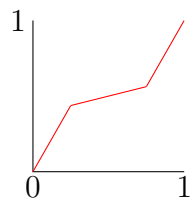


Figura 3: Gráfica de f_2.

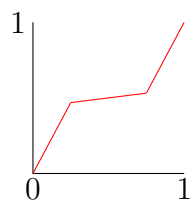


Figura 4: Gráfica de f_3.

Es claro que f_n es un homeomorfismo, ya que cada función que la compone lo es, además en la intersección de dominio coinciden. Veamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in [0,1]$. Tenemos tres casos:

1. $x \in [0, \frac{1}{4}]$. Como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq N_1$ se cumple que $|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}| < 4\varepsilon$. De esto que $|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}|x < 4\varepsilon x \leq 4\varepsilon\frac{1}{4} = \varepsilon$. Luego, $|\frac{1}{2^n}x - \frac{1}{2^m}x| < \varepsilon$, por lo que $|-2x + \frac{1}{2^n}x + 2x - \frac{1}{2^m}x| < \varepsilon$, decir, $|(2 - \frac{1}{2^m})x - (2 - \frac{1}{2^n})x| < \varepsilon$, por lo tanto $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

2. $x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Note que $0 \leq |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}$. Nuevamente, como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq N_2$ se cumple que $|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}| < 4\varepsilon$. De esto que $|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}||x - \frac{1}{2}| \leq 4\varepsilon|x - \frac{1}{2}| \leq 4\varepsilon\frac{1}{4} = \varepsilon$. Luego, $|\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^n}} - \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^m}}| \leq \varepsilon$, por lo que $|\frac{1}{2} + \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^m}}| \leq \varepsilon$, decir, $|\frac{1}{2} + \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^n}} - (\frac{1}{2} + \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^m}})| \leq \varepsilon$, por lo tanto $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

3. $x \in [\frac{3}{4}, 1]$. Es claro que $0 \leq 1 - x \leq \frac{1}{4}$. La sucesión $\{2 - \frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, por lo que existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq N_2$ se cumple que $|(2 - \frac{1}{2^n}) - (2 - \frac{1}{2^m})| < 4\varepsilon$. De esto que, $|(1-x)(2 - \frac{1}{2^n}) - (1-x)(2 - \frac{1}{2^m})| \leq (1-x)4\varepsilon \leq \varepsilon$. Luego, $|-1+(1-x)(2-\frac{1}{2^n})+1-(1-x)(2-\frac{1}{2^m})| \leq \varepsilon$, es decir, $|-(1-(1-x)(2-\frac{1}{2^n}))+1-(1-x)(2-\frac{1}{2^m})| \leq \varepsilon$, esto implica que $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Sean $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y $n, m \geq N$. Se cumple que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ para toda $x \in [0,1]$. Por lo que $\rho(f_n, f_m) \leq \varepsilon$. Esto implica que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(\mathcal{H}([0,1]), \rho)$.

Por otro lado, veamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la función $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0, \frac{1}{4}], \\ \frac{1}{2} & si \quad x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ -1 + 2x & si \quad x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

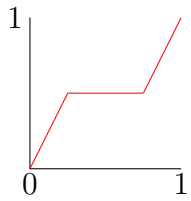


Figura 5: Gráfica de f.

Sea $\varepsilon > 0$, para $4\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se cumple que $\frac{1}{2^n} < 4\varepsilon$. Sean $n \geq N$ y $x \in [0,1]$. Tenemos tres casos:

1. $x \in [0, \frac{1}{4}]$. Se cumple que $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{2^n}x| \leq 4\varepsilon x \leq \varepsilon$.

2. $x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Se cumple que $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{x-\frac{1}{2}}{2^n}|$. También se cumple que $|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}$. Por ende $|f_n(x) - f(x)| \leq 4\varepsilon|x - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon$.

3. $x \in [\frac{3}{4}, 1]$. Se cumple que $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{2^n}(1-x)|$. También se cumple que $|1 - x| \leq \frac{1}{4}$. Por ende $|f_n(x) - f(x)| \leq 4\varepsilon(1 - x) \leq \varepsilon$.

Así, $\rho(f_n, f) \leq \varepsilon$, es decir, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f. Pero $f \notin \mathcal{H}([0,1])$. Por lo tanto, $(H([0,1], \rho)$ no es completo. □

Teorema 4.12. *El espacio $(\mathcal{H}(Q), \rho)$ no es completo.*

Demostración. Consideremos la sucesión de funciones $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}(Q)$ definidas por $F_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) = ((f_n(x_i))_{i=1}^{\infty}$, donde la función f_n es como la definida en el Lema 4.11. También consideremos la función $F : Q \to Q$ tal que $F((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (f(x_i))_{i=1}^{\infty}$, con f definida como en el Lema 4.11. Como una consecuencia del Lema 4.11 se tiene que la seceseión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y converge a la función F, sin embargo $F \notin \mathcal{H}(Q)$. Por lo tanto, $(\mathcal{H}(Q), \rho)$ no es completo. □

Como se vio en el Teorema 4.8, las $n-$celdas no son homogéneas ya que un punto de la frontera no puede ir a dar a un punto del interior. Este detalle se expande al cubo Hilbert, para aboradar esto es necesario definir la pseudofrontera y el pseudointerior, para después atacar el problema por casos.

Definición 4.13. El pseudointerior de Q es $P = \prod_{n=1}^{\infty}(0,1) = (0,1)^{\mathbb{N}}$, y la pseudofrontera es $F = Q - P$.

Teorema 4.14. *Sean $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in P$, entonces existe $h \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (y_i)_{i=1}^{\infty}$.*

Demostración. Sea $i \in \mathbb{N}$, se cumple que $x_i, y_i \in (0,1)$. Como $(0,1)$ es homogéneo, existe un homeomorfismo $h_i : [0,1] \to [0,1]$ tal que $h_i(x_i) = y_i$ (ver Teorema 4.2). Definiiendo $h : Q \to Q$ por $h((z_i)_{i=1}^{\infty}) = (h_i(z_i))_{i=1}^{\infty}$, se cumple que $h \in \mathcal{H}(Q)$ y $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (y_i)_{i=1}^{\infty}$. □

Teorema (*) Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in F$, entonces existe $h \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) \in P$.

Para la demostración del Teorema (*) necesimamos más herramientas. A continuación, se presenta todo lo necesesario para su demostración. La idea es dar este homeomorfismo como el límite de una sucesión que va *metiendo* coordenada a coordenada un punto de la pseudofrontera al pseudointerior. Se construirá una sucesión de funciones que hagan esto, esa sucesión será de Cauchy y para asegurar que esa sucesión sea convergente necesitamos que el espacio $\mathcal{H}(Q)$ sea completo, para ello necesitamos dotarlo de una métrica que sea completa.

Definamos una nueva métrica para $\mathcal{H}(Q)$. Sea $D : \mathcal{H}(Q) \times \mathcal{H}(Q) \to \mathbb{R}$, definida por $D(f,g) = \rho(f,g) + \rho(f^{-1}, g^{-1})$. Como ρ es una métrica, se obtiene de forma directa que D también es una métrica, estas dos métricas resultan ser equivalentes, es decir, inducen la misma topología.

Definición 4.15. Sean X un espacio métrico, con d, d' dos métricas para X y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucessión en X. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x_0 \in X$ con la métrica d y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x_0 \in X$ con la métrica d', entonces d es equivalente a d'

Teorema 4.16. *Las métricas ρ y D son equivalentes en $\mathcal{H}(Q)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{H}(Q)$. Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $f \in (\mathcal{H}(Q), D)$. Es claro que $\rho(f,g) \leq D(f,g)$ para toda $f, g \in \mathcal{H}(Q)$. Por ende, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se cumple que $\rho(f_n, f) \leq D(f_n, f) < \varepsilon$, es decir, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f \in (\mathcal{H}(Q), \rho)$.

Supongamos ahora que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $f \in (\mathcal{H}(Q), \rho)$. Consideremos la sucesión $\{f_n \circ f^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se cumple que $\rho(f_n, f) > \varepsilon$. Dado $n \geq N$, por el Lema 4.10 se cumple que $\rho(f_n \circ f^{-1}, id) = \rho(f_n \circ f^{-1}, f \circ f^{-1}) = \rho(f_n, f) < \varepsilon$. Esto implica que la sucesión $\{f_n \circ f^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la función identidad $id : Q \to Q$ en $(\mathcal{H}(Q), \rho)$. Note que si $\rho(f_n \circ f^{-1}, id) < \varepsilon$, por el Lema 4.10 se tiene que $\rho((f_n \circ f^{-1})^{-1}, id) < \varepsilon$, es decir, $\rho(f \circ f_n^{-1}, id) < \varepsilon$. Esto implica que la sucesión $\{f \circ f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a la función identidad en $(\mathcal{H}(Q), \rho)$.

Veamos que la sucesión $\{f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f^{-1} en $(\mathcal{H}(Q), \rho)$. Por ser Q un compacto se cumple que f^{-1} es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$, de la continuidad uniforme de f^{-1} existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \varepsilon$. De la convergencia de $\{f \circ f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\rho(f \circ f_n^{-1}, id) < \delta$, esto implica que $d((f \circ f_n^{-1})(x), x) < \delta$ para toda $x \in Q$ cuando $n \geq N$. Sea $x \in Q$ y $n \geq N$, luego $d(f^{-1}((f \circ f_n^{-1})(x)), f^{-1}(x)) < \varepsilon$, esto nos dice que $d(f_n^{-1}(x), f^{-1}(x)) < \varepsilon$, por lo tanto $\rho(f_n^{-1}, f^{-1}) < \varepsilon$. Por lo tanto $\{f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f^{-1} en $(\mathcal{H}(Q), \rho)$.

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\rho(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\rho(f_n^{-1}, f^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así $D(f_n, f) = \rho(f_n, f) + \rho(f_n^{-1}, f^{-1}) < \varepsilon$, es decir, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f \in (\mathcal{H}(Q), D)$. Por lo tanto ρ y D son métricas equvalentes en $\mathcal{H}(Q)$. □

Teorema 4.17. *[?, Teorema 1, pág 20] Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si X es completo y totalmente acotado.*

Teorema 4.18. *La métrica D es completa sobre $\mathcal{H}(Q)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(Q), D)$. Esto implica que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ son de Cauchy en $(\mathcal{H}(Q), \rho)$. Dado $x \in Q$, se cumple que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n^{-1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy en (Q, d_∞). Por el Teorema 4.17, para cada $x \in Q$ las sucesiones $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n^{-1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes. Podemos definir las siguientes funciones $f, F : Q \to Q$ tal que $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \{f_n^{-1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Vamos a probar que $f, F \in \mathcal{H}(Q)$ y además que $F = f^{-1}$.

Veamos que f es continua. Sean $x \in Q$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(\mathcal{H}(Q), \rho)$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n, m \geq N_1$ se cumple que $\rho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{4}(*)$. A su vez, como $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$ en (Q, d_∞), existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_2$ se cumple que $d_\infty(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{4}(**)$. Sea $M = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Como f_M es continua, existe $\delta > 0$ tal que si

$d_\infty(x,y) < \delta$ con $y \in Q$, entonces $d_\infty(f_M(x), f_M(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Luego, si $n \geq M$ y $y \in Q$ es tal que $d_\infty(x,y) < \delta$, entonces se cumplen las desigualdades (*), (**) y (***). De esto que

$$\begin{aligned} d_\infty(f(x), f_n(y)) \leq & d_\infty(f(x), f_M(x)) + d_\infty(f_n(y), f_M(x)) \\ \leq & d_\infty(f(x), f_M(x)) + d_\infty(f_M(y), f_M(x)) + d_\infty(f_n(y), f_M(y)) \\ < & \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la sucesión $\{f_n(y)\}_{n=1}^\infty$ converge a $f(y)$, por lo que existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_3$ se cumple que $d_\infty(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Finalmente, tomando $M' = \text{máx}\{N_3, M\}$ y $y \in Q$ es tal que $d_\infty(x,y) < \delta$, se tiene que $d_\infty(f(x), f(y)) \leq d_\infty(f(x), f_n(y)) + d_\infty(f_n(y), f(y)) < \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Por lo tanto f es continua. De forma análoga se prueba que F es continua.

Sea $x \in Q$. Veamos que $f(F(x)) = x = F(f(x))$. Sea $\varepsilon > 0$, como $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(Q), \rho)$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_1$ entonces $\rho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{4}$, por el Teorema 4.10 se cumple que $\rho(f_n \circ f_m^{-1}, f_m \circ f_m^{-1}) = \rho(f_n \circ f_m^{-1}, id) < \frac{\varepsilon}{4}$, esto implica que $d_\infty(f_n(f_m^{-1}(x)), x) < \frac{\varepsilon}{4}$. Por otro lado como f_n es continua, para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\{f_n(f_m^{-1}(x))\}_{m=1}^\infty$ converge a $f_n(F(x))$, por lo que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_2$ entonces $d_\infty(f_n(f_m^{-1}(x)), f_n(F(x))) < \frac{\varepsilon}{4}$. Tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ tenemos que si $n, m \geq N$ entonces $d_\infty(x, f_n(F(x)) \leq d_\infty(f_n(f_m^{-1}(x)), f_n(F(x))) + d_\infty(f_n(f_m^{-1}(x)), x) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$. Observe que la sucesión $\{f_n(F(x))\}_{n=1}^\infty$ converge a $f(F(x))$, esto por como esta definida f, por lo que existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_3$ entonces $d_\infty(f_n(F(x)), f(F(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalmente, tomando $M = \text{máx}\{N, N_3\}$ se cumple que si $n \geq M$ entonces $d_\infty(x, f(F(x))) \leq d_\infty(f_n(F(x)), f(F(x))) + d_\infty(x, f_n(F(x))) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. En conclusión, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que $d_\infty(x, f(F(x))) < \varepsilon$, esto implica que $d(x, f(F(x))) = 0$, es decir, $f(F(x)) = x$. De manera análoga se demuestra que $F(f(x)) = x$. Luego por el Teorema 2.3 se cumple que $f, F \in \mathcal{H}(Q)$. Esto siginifica que $f^{-1} = F$.

Queremos ver que $\lim\limits_{n\to\infty} D(f_n, f) = 0$, ya que esto terminaria la prueba. Para ello basta probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n^{-1}, f^{-1}) = 0$. Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n^{-1}, f^{-1}) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, por ser $\{f_n^{-1}\}_{n=1}^\infty$ de Cauchy en $(\mathcal{H}(Q), \rho)$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M$ se tiene que $\rho(f_M^{-1}, f_n^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, esto

implica que $d_\infty(f_M^{-1}(x), f_n^{-1}(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $x \in Q$. Para cada $x \in Q$, existe $M' \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M'$ entonces $d_\infty(f_n^{-1}(x), f^{-1}(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $x \in Q$ y $N = \text{máx}\{M, M'\}$, si $n \geq N$ se cumple así que $d_\infty(f_n^{-1}(x), f^{-1}(x)) \leq d_\infty(f_N^{-1}(x), f_n^{-1}(x)) + d_\infty(f_N^{-1}(x), f^{-1}(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto $\rho(f_n^{-1}, f^{-1}) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N$, esto implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n^{-1}, f^{-1}) = 0$. De manera análoga se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} D(f_n, f) = 0$. Esto siginifica que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f en $(\mathcal{H}(Q), D)$ y por ende D es completa. □

Lema 4.19. *Sean $f \in \mathcal{H}(Q)$ y $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que si $\rho(g, id) < \delta$, entonces $D(g \circ f, f) < \varepsilon$.*

Demostración. Note que f^{-1} es uniformemente continua, entonces existe $\gamma > 0$ tal que si $d_\infty(x, y) < \gamma$ con $x, y \in Q$, se cumple que $d_\infty(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $\delta < \text{mín}\{\gamma, \frac{\varepsilon}{2}\}$ y $g \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $\rho(g, id) < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, por el Lema 4.10 se cumple que $\rho(g^{-1}, id) < \delta$, esto implica que $d_\infty(g^{-1}(x), x) < \delta \leq \gamma$ para toda $x \in Q$, por lo que $d_\infty(f^{-1}(g^{-1}(x)), f^{-1}(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $x \in Q$, es decir, $\rho(f^{-1} \circ g^{-1}, f^{-1}) = \rho((g \circ f)^{-1}, f^{-1})) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} D(g \circ f, f) &= \rho(g \circ f, f) + \rho((g \circ f)^{-1}, f^{-1}) \\ &= \rho((g \circ f) \circ f^{-1}, f \circ f^{-1}) + \rho((g \circ f)^{-1}, f^{-1}) \\ &\leq \rho(g, id) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto termina la prueba. □

Lema 4.20. *Dados $n \in \mathbb{N}$ y $h_1, ..., h_n \in \mathcal{H}(Q)$, existe $\delta > 0$ tal que si $\rho(h_{n+1}, id) < \delta$, entonces $D(h_{n+1} \circ h_n \circ ... \circ h_1, h_n \circ h_{n-1} \circ ... \circ h_1) < \frac{1}{2^n}$.*

Demostración. Sean $\varepsilon = \frac{1}{2^n} > 0$ y $f = h_n \circ h_{n-1} \circ ... \circ h_1$, es claro que $f \in \mathcal{H}(Q)$. Por el Lema 4.20 existe $\delta > 0$ tal que si $h_{n+1} \in \mathcal{H}(Q)$ y $\rho(h_{n+1}, id) < \delta$ entonces $D(h_{n+1} \circ f, f) < \frac{1}{2^n}$. □

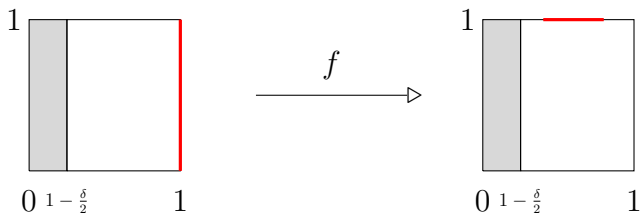
Lema 4.21. *Sean $(a_i)_{i=1}^\infty \in Q, \delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $h \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $\rho(h, id) < \delta$ y si $h((a_i)_{i=1}^\infty) = (b_i)_{i=1}^\infty$, entonces $b_n \in (0, 1)$ y h no mueve las primeras $n - 1$ coordenadas de $(x_i)_{i=1}^\infty$ para todo $(x_i)_{i=1}^\infty \in Q$.*

Demostración. Sea $\delta > 0$, podemos suponer sin perder generalidad que $\delta < 2$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $a_n \in (0,1)$ basta tomar $h = id$. Si $a_n \notin (0,1)$ entonces tenemos dos casos:

1. $a_n = 1$. Sea $k > n$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{\delta}{3}$. Es posible construir un homeomorfismo $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ que cumpla las siguientes propiedades:

   (a) $f|_{[0,1-\frac{\delta}{2}]\times[0,1]}$ es la identidad, y

   (b) $f(\{1\} \times [0,1]) \subset (0,1) \times \{1\}$.



Sean $\pi_1, \pi_2 : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ las proyecciones a la primera y segunda coordenadas, respectivamente. Definimos $h : Q \to Q$ por $h((x_i)_{i=1}^{\infty})) = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, donde $y_i = x_i$ para $i \in \mathbb{N} - \{n,k\}$ y $y_n = \pi_1(f(x_n, x_k)), y_k = \pi_2(f(x_n, x_k))$, es decir, h solo mueve las coordenadas x_n y x_k de cualquier punto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q$.

Claramente h es continua, ya que lo es en cada una de sus coordenadas. Veamos que es inyectiva y sobreyectiva.

Sean $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in Q$ tales que $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = h((y_i)_{i=1}^{\infty})$, esto implica que $x_i = y_i$ para toda $i \in \mathbb{N} - \{n,k\}$. Resta ver que $x_n = y_n$ y $x_k = y_k$. Supongamos que $f(x_n, x_k) = (x'_n, x'_k)$ y $f(y_n, y_k) = (y'_n, y'_k)$, como $\pi_1(f(x_n, x_k)) = \pi_1(f(y_n, y_k))$ y $\pi_2(f(x_n, x_k)) = \pi_2(f(y_n, y_k))$, se cumple que $x'_n = y'_n$ y $x'_k = y'_k$, es decir, $f(x_n, x_k) = f(y_n, y_k)$ y como f es un homeomorfismo se cumple que $x_n = y_n$ y $x_k = y_k$. Por lo tanto $(x_i)_{i=1}^{\infty} = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, así h es inyectiva. Sea $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in Q$ y tomemos $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q$ tal que $x_i = y_i$ para toda $i \in \mathbb{N} - \{n,k\}$. Como f es un sobreyectiva existen $w, z \in [0,1]$ tales que $f(w,z) = (y_n, y_k)$, así $\pi_1(f(w,z)) = y_n$ y $\pi_2(f(w,z)) = y_k$, basta con definir $x_n = w$ y $x_k = z$. Luego $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) =$

$(y_i)_{i=1}^{\infty}$, por lo tanto h es sobreyectiva. Como Q es compacto se cumple que h es un homeomorfismo.

Veamos que $\rho(h, id) < \delta$. Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (y_i)_{i=1}^{\infty}$. Si $x_n \leq 1-\frac{\delta}{2}$, entonces $\pi_1(f(x_n, x_k) = x_n$, es decir, $y_n = x_n$ y si $1 \geq x_n > 1 - \frac{\delta}{2}$ entonces la primera coordenada de $f(x_n, x_k)$ es mayor que $1 - \frac{\delta}{2}$, de lo contrario f ya no sería inyectiva, por lo que $y_n > 1 - \frac{\delta}{2}$. En cualquier caso $|x_n - y_n| < \frac{\delta}{2}$. De esto que

$$\begin{aligned} d_\infty((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\ &= \frac{|x_n - y_n|}{2^n} + \frac{|x_k - y_k|}{2^k} \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2^k} \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{3} = \delta. \end{aligned}$$

Esto significa que $d_\infty((x_i)_{i=1}^{\infty}, h((x_i)_{i=1}^{\infty})) < \delta$ para todo $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q$, por lo tanto $\rho(h, id) < \delta$.

Por otro lado, es claro que h no mueve las primeras $n-1$ coordenadas de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ para todo $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q$. Si $h((a_i)_{i=1}^{\infty}) = (b_i)_{i=1}^{\infty}$, como $a_n = 1$, entonces $b_n = \pi_1(f(a_n, a_k)) = \pi_1(f(1, a_k)) \in (0, 1)$. Así, h es el homeomorfismo que cumple lo deseado.

2. $a_n = 0$. Sea $k > n$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{\delta}{3}$. Es posible construir un homeomorfismo $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ que cumpla las siguientes propiedades:

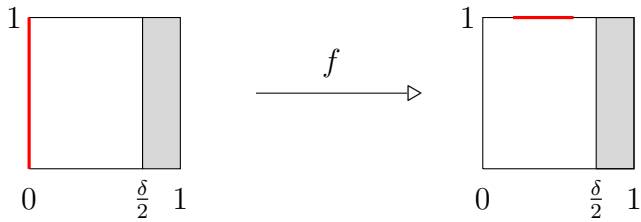
   (a) $f|_{[\frac{\delta}{2},1]\times[0,1]}$ es la identidad, y

   (b) $f(\{0\} \times [0,1]) \subset (0,1) \times \{1\}$.

   Este caso es análogo al caso 1.

En ambos casos existe el homeomorfismo deseado. □

Con todo lo anterior, estamos listos para probar el teorema más importante de esta sección, el cual es vital para la demostración del teorema principal.



Teorema 4.22. *Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in F$, entonces existe $h \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) \in P$.*

Demostración. Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in F$. Definiremos de forma inductiva, una sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}(Q)$ de tal forma que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplan las siguientes condiciones, antes definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $H_n = h_n \circ h_{n-1} \circ ... \circ h_1$:

(a) Las primeras n coordenadas de $H_n((x_i)_{i=1}^{\infty})$ pertenecen a $(0, 1)$.

(b) h_n no mueve las primeras $n-1$ coordenadas de $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, para todo $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in Q$.

(c) $D(H_n, H_{n-1}) < \frac{1}{2^{n-1}}$. (Donde $h_0 = id$)

Veamos que se cumple para $n = 1$. Sean $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $f = id$, por el Lema 4.19 existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\rho(g, id) < \delta_1$ con $g \in \mathcal{H}(Q)$, entonces $D(g, id) < \frac{1}{2}$. Aplicando el Teorema 4.21 para $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, δ_1 y $n = 1$ se tiene que existe $h_1 \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $\rho(h_1, id) < \delta$. Donde h_1 cumple con la condición (a). La condición (b) se cumple por vacuidad. Como $\rho(h_1, id) < \delta$ se tiene que $D(h, id) < \frac{1}{2} < \frac{1}{2^{1-1}}$, es decir, se cumple la condición (c).

Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $h_1, h_2, ..., h_k$ son homeomorfismos de Q en Q, que satisfacen las condiciones $(a), (b), (c)$. Veamos la forma de definir h_{k+1}.

Por el Lema 4.20 existe $\delta_k > 0$ tal que si $\rho(g, id) < \delta_k$, entonces $D(g \circ H_k, H_k) < \frac{1}{2^k}$. Apliquemos ahora el Lema 4.21 a $H_k((x_i)_{i=1}^{\infty})$, $\delta_k > 0$ y $n = k + 1$ se tiene que existe $h_{k+1} \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $\rho(h_{k+1}, id) < \delta_k$ y si $h_{k+1}(H_k((x_i)_{i=1}^{\infty})) = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ entonces $y_{k+1} \in (0, 1)$ y h_{k+1} no mueve las primeras $(k + 1) - 1 = k$ coordenadas de $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ para toda $(z_i)_{i=1}^{\infty} \in Q$. Es claro que la condición (a) y (b) se cumplen, como $\rho(h_{k+1}, id) < \delta_k$ entonces $D(H_{k+1}, H_k) < \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{(k+1)-1}}$, por lo que también se cumple (c).

Tenemos así bien definida la sucesión de homeomorfismos $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$. Consideremos la sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, veamos que esta es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(Q), D)$. Sea $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$ y supongamos que $l = m - n \geq 1$. Probemos la siguiente desigualdad haciendo inducción sobre l, que es la distancia que hay entre m, n suponiendo que $m > n$:

$$D(H_m, H_n) \leq \sum_{i=0}^{l-1} D(H_{m-i}, H_{m-i-1}).$$

Si $l = 1$, esto significa que $m = n+1$, en este caso al hacer las sustituciones correspondientes, se puede ver que se cumple la desigualdad.

Supongamos que se cumple para $l \in \mathbb{N}$ y veamos que se cumple la desigualdad para cuando $m - n = l + 1$. Note que la distancia entre m y $n + 1$ es igual a l, es decir $m - (n + 1) = l$, por la hipótesis de inducción se cumple que

$$D(H_m, H_{n+1}) \leq \sum_{i=0}^{l-1} D(H_{m-i}, H_{m-i-1}).$$

Por la desigualdad el triángulo se cumple que

$$D(H_m, H_n) \leq D(H_m, H_{n+1}) + D(H_{n+1}, H_n).$$

Como $m - l = n + 1$ y $m - l - 1 = n$, y por la hipótesis de inducción se cumple que

$$\begin{aligned} D(H_m, H_n) \leq & D(H_m, H_{n+1}) + D(H_{m-l}, H_{m-l-1}) \\ \leq & \sum_{i=0}^{l-1} D(H_{m-i}, H_{m-i-1}) + D(H_{m-l}, H_{m-l-1}) \\ = & \sum_{i=0}^{l} D(H_{m-i}, H_{m-i-1}). \end{aligned}$$

Con esto se cumple la desigualdad para toda $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Tomemos $n, m \geq N$ y supongamos sin perder generalidad que $m > n$. Por lo anterior y la condición (c) se cumple que

$$\begin{aligned} D(H_m, H_n) &\leq \sum_{i=0}^{l-1} D(H_{m-i}, H_{m-i-1}) \\ &< \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{2^{(m-i)-1}} \leq \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo que $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(Q), D)$. Por el Teorema 4.18 existe el límite $h = \lim\limits_{n\to\infty} H_n$ que es un homeomorfismo de Q.

Usando las condiciones (a) y (b) veamos que todas las coordenadas de $h((x_i)_{i=1}^{\infty})$ pertenecen al intervalo $(0,1)$. Supongamos que $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (y_i)_{i=1}^{\infty}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, digamos que $H_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (y_i^n)_{i=1}^{\infty}$. Fijemos $i \in \mathbb{N}$ y veamos que la sucesión $\{y_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y_i y a y_i^i, por ende tendríamos que $y_i = y_i^i$ y como y_i^i es la i-ésima coordenada de $H_i(x_i)$ se cumple que $y_i \in (0,1)$, lo cual implica que $(y_i)_{i=0}^{\infty} \in P$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_i$ se cumple que $D(H_n, h) < \frac{\varepsilon}{2^i}$, esto significa que $\rho(H_n, h) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ de esto que $d_\infty(H_n((x_j)_{j=1}^{\infty}), h((x_j)_{j=1}^{\infty})) < \frac{\varepsilon}{2^i}$, es decir, $d_\infty((y_j^n)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$, esto implica que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|y_j^n - y_j|}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2^i}$. En particular, para i se cumple que $\frac{|y_i^n - y_i|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^i}$, por lo tanto $|y_i^n - y_i| < \varepsilon$ para toda $n \geq N_i$, esto significa que $\{y_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y_i.

Por otro lado, note que, para toda $n \geq i+1$, H_n no mueve las primeras $n-1$ coordenadas, es decir $y_i^n = y_i^i$ para toda $n \geq i+1$, esto implica que $\{y_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ se vuelve constante en algún momento, así $\{y_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y_i^i. Por ende $y_i = y_i^i$ y se cumple que $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) \in P$. □

Teorema 4.23. *El cubo de Hilbert es homogéneo.*

Demostración. Sean $a, b \in Q$. Tenemos los siguientes casos:

1. $a, b \in P$. Para este caso basta con aplicar el Teorema 4.14.

2. $a \in P, b \in F$. Por el Teorema 4.22, existe $h_1 \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h_1(b) \in P$, luego por el Teorema 4.14 existe $h_2 \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h_2(h_1(b)) = a$, como $h_2 \circ h_1$ es un homeomorfismo, se cumple lo deseado.

3. $a, b \in F$. Por el Teorema 4.22, existen $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h_1(a), h_2(b) \in P$, luego por el Teorema 4.14 existe $h_3 \in \mathcal{H}(Q)$ tal que $h_3(h_1(a)) = h_2(b)$, de esto que $h_2^{-1}(h_3(h_1(a))) = b$, es claro que $h_2^{-1} \circ h_3 \circ h_1$ es un homeomorfismo que cumple lo deseado.

Por lo tanto el cubo de Hilbert es homogéneo. □

5 Propiedad del punto fijo

El Teorema de Brower nos dice que toda $n-$celada tiene la propiedad del punto fijo, ver Teorema 5.2. En particular, el intervalo $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo, en este caso al hacer el producto numerable, dicha propiedad se sigue cumpliendo. En esta sección se prueba que el cubo de Hilbert tiene la propiedad del punto fijo, para ello es necesario definir los conceptos de $\varepsilon-$función y $\varepsilon-$retracción.

Definición 5.1. Sean X un espacio métrico, $p \in X$ y $f : X \to X$ una función, se dice que p es un **punto fijo** de f si $f(p) = p$. Diremos que X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua $h : X \to X$ tiene un punto fijo.

Teorema 5.2. *(Teorema del Punto Fijo de Brouwer)[2, Corolario 2.2] Cualquier n-celda tiene la propiedad del punto fijo.*

Sean (X, d) un espacio métrico, Y un espacio topológico, y $\varepsilon > 0$. Una función $f : X \to Y$ es llamada **ε-función** (con respecto a d) si f es continua y para cada $y \in f(X)$,

$$\text{diám}_d(f^{-1}(y)) = \sup\{d(w, z) : w, z \in f^{-1}(y)\} < \varepsilon.$$

Definición 5.3. Si X es un espacio métrico compacto y no vacío. Una **retracción** es una función continua r de X en X, tal que r es la identidad en su rango, es decir, $r(r(x)) = r(x)$ para cada $x \in X$. Un subconjunto Y de X, se dice que es un **retracto** de X, si existe una retracción sobreyectiva de X en Y. Un espacio metrizable, compacto y no vacío K es un **retracto absoluto** (**AR** por sus siglas en inglés), siempre que cuando K pueda ser encajado en un espacio métrico X, la copia encajada de K es un retracto de X.

Usaremos el termino ε**-retracción** para referirnos a una retracción que también es una ε-función.

Note que si $r_\varepsilon : X \to X$ es una ε-retracción con respecto a la métrica d para X, entonces la distancia de r_ε a la función identidad en X es menor que ε. En efecto, si $r_\varepsilon(x) = y$, entonces x, $y \in r_\varepsilon^{-1}(y)$; así, $d(x, y) < \varepsilon$ y, por lo tanto $d(x, r_\varepsilon(x)) < \varepsilon$.

Teorema 5.4. *[6, Proposición 21.3] Sea X un espacio métrico compacto. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua f_ε de X a un subconjunto X_ε de X, tal que X_ε tiene la propiedad del punto fijo y f_ε dista de la función identidad en X en menos que ε (note que la segunda condición se cumple cuando f_ε es una $\varepsilon-$retracción). Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Teorema 5.5. *El cubo de Hilbert tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea Q_n la n-ésima celda en Q dada por

$$Q_n = \{(t_i)_{i=1}^\infty \in Q : t_i = 0 \text{ para cada } i \geq n+1\},$$

y sea $r_n : Q \to Q$ la función dada por

$$r_n((t_i)_{i=1}^\infty) = (t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots) \text{ para cada } (t_i)_{t=1}^\infty \in Q.$$

Veamos que r_n es una retracción de Q en Q_n. Note que cada una de las componentes de r_n es una función continua, de ahí que r_n es continua. Además, para cada $(t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots) \in Q_n$ existe $(t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots) \in Q$, tal que $r_n((t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots)) = (t_1, \ldots, t_n, 0, 0, \ldots)$, de ahí que r_n es sobreyectiva. Por lo tanto, r_n en efecto es una retracción de Q en Q_n.
Veamos que para cada n, r_n es una $\frac{1}{2^n}$-retracción con respecto a la métrica d_∞ para Q , es decir, $\text{diám}_{d_\infty}(r_n^{-1}((t_i)_{i=1}^\infty)) < \frac{1}{2^{n-1}}$. En efecto, sean $(s_i)_{i=1}^\infty$ y $(p_i)_{i=1}^\infty \in r_n^{-1}(t_i)_{i=1}^\infty$, note que las primeros n componentes de $(s_i)_{i=1}^\infty$ y $(p_i)_{i=1}^\infty$

son iguales, entonces,

$$\begin{aligned} d_\infty((s_i)_{i=1}^\infty, (p_i)_{i=1}^\infty) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i}. \end{aligned}$$

Como para cada i se tiene que s_i y $p_i \in [0,1]$, entonces $|s_i - p_i| \leq 1$, de ahí que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$

se puede demostrar por inducción que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n},$$

entonces

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} \leq \frac{1}{2^n},$$

más aún,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - p_i|}{2^i} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

de ahí que $\text{diám}_{d_\infty}(r_n^{-1}(t_i)_{i=1}^\infty) < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Note que $2^n = m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces por la propiedad arquimediana para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar 2^n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ para algún n, así r_n es una ε-función tal que dista de la función identidad de Q_n en menos de ε. Ahora, por el terorema 5.2, para cada n, Q_n tiene la propiedad del punto fijo, además como r_n es una $\varepsilon-$retracción, por el Teorema 5.4, Q tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Retractos absolutos tienen la propiedad del punto fijo

Una consecuencia del hecho que el cubo de Hilbert tenga la propiedad del punto fijo, es que todo retracto absoluto también tiene dicha propiedad. Otra forma de ver la universalidad del cubo de Hilbert es haciendo uso del siguiente teorema.

Teorema 5.6. *(Teorema de metrización de Urysohn)[2, Corolario 9.2 p. 195] Sea X un espacio segundo numerable. Entonces X es regular si y solo si X es metrizable. Además, cada espacio regular segundo numerable es homeomorfo a un subconjunto del cubo de Hilbert.*

Corolario 5.7. *Todo retracto absoluto puede ser encajado en el cubo de Hilbert.*

Teorema 5.8. *Si un espacio métrico compacto y no vacío X tiene la propiedad del punto fijo, entonces cada rectracto de X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean Y un retracto de X, r una retracción sobreyectiva de X en Y y $f : Y \to Y$ una función continua. Entonces, como $f \circ r$ es una función continua de X en X, se cumple que $f \circ r$ deja fijo a un punto p. Luego $(f \circ r)(p) = p$ y dado que $(f \circ r)(X) \subset Y$, se cumple que $p \in Y$; entonces $r(p) = p$. Por lo tanto $f(p) = f(r(p)) = p$, es decir, Y tiene la propiedad del punto fijo. □

Corolario 5.9. *Todo retracto absoluto tiene la propiedad del punto fijo.*

6 Cubo de Hilbert e hiperespacios

En esta sección se presentan dos teoremas importantes, los cuales dan condiciones necesarias y suficientes para determirar cuando los hiperespacios 2^X, $C(X)$ y $C(p, X)$ son homeomorfos al cubo de Hilbert, siendo X un continuo. Esto nos brinda buena información, ya que de forma inmediata se tendría que dichos hiperespacios tienen la propiedad del punto fijo y también son homogéneos, esto por los Teoremas 4.23 y 5.5.

Dado un continuo X, un hiperespacio de X es una colección específica de subconjuntos de X. Los hiperespacios que se estudían en este trabajo son los

siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \ y \ A \text{ es un cerrado de } X\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : \ A \text{ es conexo } \},$$

$$C(p, X) = \{A \in C(X) : \ p \in A\}.$$

Teorema 6.1. *[6, Teorema 15.6] Sea X un continuo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *2^X es homogéneo;*
2. *X es localmente conexo;*
3. *2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Definición 6.2. Sea X un continuo. Un **arco libre** de X es un arco α con puntos extremos a y b tal que $\alpha - \{a, b\}$ es abierto en X.

Teorema 6.3. *[6, Teorema 15.7] Sea X un continuo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$C(X)$ es homogéneo;*
2. *X es localmente conexo sin arcos libres;*
3. *$C(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Note que la implicación (3) $\rightarrow$ (1), en ambos casos, se obtiene del Teorema 4.23. En teoria de continuos existe un problema que es el de determinar cuando un continuo localmente conexo tiene hiperespacio único $C(X)$, con el teorema anterior este problema solo tiene sentido cuando considermos a X sin arcos libres, este tipo de continuos reciben el nombre de continuos enrejados, para más información de este tema consultar [7].

Recordemos que una gráfica finita es un continuo que se puede expresar como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos, son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos

Teorema 6.4. *[3, Teorema 4] Sean X un continuo y $p \in X$. Supongamos que X es localmente conexo en cada punto de un conjunto abierto que contienen a p. Entonces $C(p, X) \approx Q$ si y sólo si p no pertenece al interior, relativo a X, de una gráfica finita de X.*

7 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

Bibliografía

[1] M.E. Chacón, *Homogeneidad del cubo de Hilbert*. Notas.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, London, Sydney, Toronto, 1976.

[3] C. Eberhart, *Intervals of continua which are Hilbert cubes*, Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978) 220–224.

[4] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[5] R. Hernández-Gutiérrez, Alejandro Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, 43 (5) (2013), 1583–16323.

[6] A. Illlanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspace fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[7] A. Illanes, S. Macías, S.B. Nadler Jr., *Symmetric products and Q - manifolds*, Geometry and Topology in Dynamics, Contemporary Math. Series of Amer. Math. Soc., Vol. 246, 1999, Providence, RI, 137–141.

[8] K., Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, 1968.

[9] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).

[10] Gerardo Montero-Rodríguez, David Herrera-Carrasco, María de Jesús López y Fernardo Macías-Romero, "Finite graphs have unique n-fold symmetric product suspension", *Houston J. Math.*, (2022), in press.

[11] J. van Mill. *Infinite-dimensional topology. Prerequisites and introduction*, North-Holland Mathematical Library, VOl. 43. North-Holland Publishing , Amsterdam NL, 1989. ISBN: 0–444–87133–0.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Índice de autores

Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 205
Angulo Perkins, Emilio, 29
Aquino Camacho, Félix Augusto, 55

Cano Cordero, Laura, 5
Conde Mones, José Julio, 55

Domínguez Soto, Patricia, 5

Hernández Valdez, Gerardo , 159
Hernández Gracidas, Carlos Arturo, 55
Herrera Carrasco, David, 159, 205

López Toriz, María de Jesus, 159
Lazcano Morales, Claudio, 55

Macías Romero, Fernando, 159, 205
Martínez García, Armando, 99

Oliveros Oliveros, José Jacobo, 55

Matemáticas y sus aplicaciones 20
de Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco
16 de octubre de 2023
Formato: pdf
Peso: 6 MB
El cuidado de la edición es de Felipe de Jesús Aguilar Romero y
está a disposición en pdf en la página
de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros