Fernando Macías Romero

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchingo, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas de proyectos de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 36 tesis de licenciatura, 9 de maestría y 7 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conference on Mathematics and its Aplications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los de Matemáticas y sus aplicaciones.

Los capítulos del presente libro 19 están creados con la más intensa pasión, se agrupan por las diferentes áreas de la matemática, a la que pertenecen los temas, cuyos frutos beneficiarán a las Internacional Conferences on Mathematics and its Applications (CIMA) que a su vez emanan por la fortuna de contar con el mejor comité editorial que ha seleccionado la Gran Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Aquí se encuentran los resultados que promueven la riqueza matemática, en este libro están los trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorable jueces al ser autorizados después de sabios arbitrajes sumamente rigurosos.

BUAP FCFM CIMA

BUAP ediciones

ISBN: 978-607-525-861-4

Matemáticas y sus aplicaciones 19

# Matemáticas y sus aplicaciones 19

**Fernando Macías Romero**
**David Herrera Carrasco**

**Editores**

David Herrera Carrasco

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Univesidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemerita Universidad Autónoma de Puebla. Ha sido miembro organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado varios artículos, en revistas internacionales. Es autor de varions libros (como coautor, con otros profesores de la FCFM); es editor de algunos libros. Además, ha concluido la dirección de tesis: 4 de doctorado, 7 de maestría y más de 26 de Licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis de licenciatura y del posgrado.

# *Matemáticas y sus aplicaciones 19*

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Primera edición: 2022

ISBN: 978-607-525-861-4


4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764
http://publicaciones.buap.mx/

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552
www.fcfm.buap.mx



Hecho en México
Made in Mexico

# Matemáticas y sus aplicaciones 19

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación realizados para acrecentar el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

## Editores


Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco


## Comité científico internacional

# Contenido

# Presentación

Las International Conferences On Mathematics and its Applications (CIMA) llevan ya 16 años realizándose, año tras año. Aquí participa como organizadora la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) en compañía de sus estudiantes. Contamos con la participación de matemáticos de nivel internacional en estos CIMA. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Eighth International Conference on Mathematics ant its Applications* (8CIMA, 2021), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 8CIMA, 2021 como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la FCFM de la BUAP. Es por el amor a la matemática que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico.

*Fernando Macías Romero*
*David Herrera Carrasco*
*Editores*

**Matemáticas y sus aplicaciones 19, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-861-4**

# Capítulo 1

# Homemorfismos entre hiperespacios $C(p, X)$

**Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero**
**FCFM, BUAP**

**Resumen**

Sea $C(X)$ el hiperespacio de todos los subcontinuos de un continuo métrico $X$, y $p \in X$. Se define $C(p, X)$ como el hiperespacio de todos los subcontinuos de $X$ que contienen al punto $p$. En el presente trabajo se estudian a las gráficas finitas, para establecer una relación entre el orden de sus puntos y si sus respectivos $C(p, X)$ son homeomorfos.

## 1 Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Dado un continuo $X$, el hiperespacio de $X$ es una colección específica de subconjuntos de X. Los hiperespacios más conocidos son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \ y \ A \ es \ cerrado\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : \ A \ es \ conexo\}.$$

La familia $2^X$ es llamada hiperespacio de los subconjuntos cerrados de $X$, y $C(X)$ es el hiperespacio de los subcontinuos de $X$. En este trabajo utilizaremos también los siguientes hiperespacios; sean $A \in C(X)$ y $p \in X$,

$$C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\},$$

$$C(p, X) = \{B \in C(X) : p \in B\},$$

$$K(X) = \{C(p, X) : p \in X\}.$$

# 2 Preliminares

Dado un continuo $X$ denotaremos por $d$ a la métrica de X. Dado $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, la bola con centro en $a$ y de radio $\varepsilon$, se denota por $B_d(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$. Para cualquier $A \subset X$ y $\delta > 0$ definimos la **nube** de radio $\delta$ al rededor de $A$, como $N_d(A, \delta) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \delta)$. La métrica $d$ en $X$ induce una métrica en $2^X$, que es la métrica de Hausdorff, que se define de la siguiente manera: $H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(B, \varepsilon) \;\; y \;\; B \subset N_d(A, \varepsilon)\}$, con $A, B \in 2^X$.

Dado un continuo $X$, en [5, Corolario 14.10] se demostró que $(2^X, H)$ y $(C(X), H)$ son continuos, así podemos hablar de hiperespacios de $2^X$. Será de nuestro interés la colección de subconjuntos cerrados no vacíos en $2^X$, que denotaremos por $2^{2^X}$. Para $(2^X, H)$, tenemos el hiperespacio $(2^{2^X}, H_2)$, donde $H_2$ es la métrica de Hausdorff en $2^{2^x}$ inducida por $H$. Se sabe que si $p \in X$, entonces $C(p, X)$ es un continuo, así $K(X) \subset 2^{2^X}$. Decimos que $X \approx Y$ cuando $X$ es homeomorfo a $Y$. En este trabajo $\mathbb{R}^n$ se considera con la topología euclidiana y por ende todos sus subespacios.

**Definición 2.1.** Sean $X, Y$ espaciós metricos, decimos que la función $f : X \to Y$ es un **encaje** si $f$ es un homeomorfismo entre $X$ y $f(X)$.

**Definición 2.2.** Un **arco** es cualquier conjunto homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$.

**Definición 2.3.** Un continuo $X$ es una **gráfica finita** si se puede expresar como la unión de un número finito de arcos tales que, cada par de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos. Cada arco que conforma a una gráfica finita le llamamos arista.

Para toda gráfica finita $X$ consideramos la métrica $d$, dada por la "longitud de arco", es decir, dados $x, y \in X$, la distancia de $x$ a $y$ será la longitud de la trayectoria más corta que conecta $x$ con $y$ en $X$. Se supondrá que la longitud de cada arista es igual a 1.

**Definición 2.4.** El **n-odo simple**, denotado por $T_n$, es un continuo que se construye uniendo $n$ arcos que se intersectan dos a dos en un único punto llamado **vértice**, dicho vértice tiene que ser un punto extremo de cada uno de los $n$ arcos y los otros puntos extremos de los arcos se llaman extremos del $n$-odo.

Una $n$-**celda** es un espacio homeomorfo a la bola cerrada $B^n$ en $\mathbb{R}^n$, donde $B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$ y $||\mathbf{x}||$ denota la norma euclidiana.

**Definición 2.5.** Dado $X$ una gráfica finita, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, decimos que $p$ es de **orden** $n$ en $X$, denotado por $ord(p, X) = n$, si $p$ tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un $n$-odo simple que tiene a $p$ como vértice.

Los puntos de orden 1 son puntos extremos, los de orden 2 son puntos ordinarios y los puntos de orden 3 o mayor son puntos de ramificación, estos se identifican con $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$, respectivamente. El conjunto de vertices de $X$ se denota por $V(X) = E(X) \cup O(X)$ y una arista será un arco cuyos puntos extremos son vértices.

**Definición 2.6.** Dados $A, B \in C(X)$, decimos que una función continua $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ es un **arco ordenado** de $A$ a $B$ en $C(X)$, si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(r) \subsetneq \alpha(s)$ siempre que $r < s$ y $r, s \in [0, 1]$.

**Teorema 2.7.** *[5, Teorema 14.6] Sean $X$ un espacio métrico compacto y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado de $A$ a $B$ en $C(X)$.*

**Definición 2.8.** Sea $Y$ un $G$-conjunto. Dado $y \in Y$, la **órbita** de $y$ bajo la acción $\alpha_Y$ es:

$$\mathcal{O}(y) = \{\alpha(f, y) : f \in G\} \subset Y.$$

Dado $x \in X$, la órbita de $x$ bajo la acción $\alpha_X$ es $\mathcal{O}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{H}(X)\}$.

Con ayuda de las órbitas se define la siguiente relación de equivalencia en $X$:

$$x \equiv y \iff x \in \mathcal{O}(y) \quad (A),$$

donde las clases de equivalencia son las órbitas, las cuales brindan una partición de $X$.

# 3 Propiedades de $C(p, X)$

En esta sección se enuncian algunas propiedades generales de los hiperespaciós $C(p, X)$. Por ejemplo, se prueba que $C(p, X)$ siempre es un continuo, cuando $X$, lo es, véase el teorema 3.1. Tambén se enuncia un teorema que nos indica en que caso $C(p, X)$ contiene una $k$- celda, véase el teorema 3.3.

**Teorema 3.1.** *Sea $X$ un continuo. Si $Y \in C(X)$, entonces $C(Y, X)$ es un continuo.*

*Demostración.* Sean $A, B \in C(Y, X)$. Por el Teorema 2.7, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$. Es claro que $\alpha([0,1]) \subset C(Y, X)$, por ende $C(Y, X)$ es arco-conexo y por lo tanto $C(Y, X)$ es conexo.

Para ver que $C(Y, X)$ es compacto, tomemos $A \in \mathrm{cl}(C(Y, X))$ y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C(Y, X)$ que converge a $A$. Note que $A \in C(X)$. Veamos que $Y \subset A$

Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $y \notin A$. Por ser $A$ compacto existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \cap A = \emptyset$. Observe que $y \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq n_0$ se cumple que $H(A, A_n) < r$, de esto que $A_{n_0} \subset N(A, r)$, entonces debe existir $a \in A$ tal que $y \in B(a, r)$, pero esto implica que $a \in B(y, r)$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $y \in A$. De esta manera $Y \subset A$ por lo que $A \in C(Y, X)$. Así, que $C(Y, X)$ es cerrado y por ser $C(X)$ compacto, se cumple que $C(Y, X)$ es compacto. Luego, $C(Y, X)$ es un continuo. $\square$

**Definición 3.2.** Sea $k \in \mathbb{N}$. Un continuo $X$ es un $k$-odo si existe $M \in C(X)$ tal que $X - M$ tiene al menos $k$ componentes. Al conjunto $M$ le llamamos **corazón** del $k$-odo.

Si $X$ es una gráfica finita y $p \in X$, hay una diferencia entre que $ord(p, X) = k$ y que $p$ pertenezca al corazón de un $k$-odo en $X$. En el caso en el que $X$ es una curva cerrada simple, todo punto en $X$ tiene orden 2, sin embargo, la curva cerrada simple no es un 2-odo.

**Teorema 3.3.** *[11, Corolario 3.12] Sea $X$ un continuo y $p \in X$. Entonces, $C(p, X)$ contiene una $k$-celda si y solo si $p$ está contenido en el corazón de un $k$-odo.*

**Teorema 3.4.** *Sea $X$ un arco con puntos extremos $a, b$. Si $p \in \{a, b\}$, entonces $C(p, X)$ es un arco; en otro caso, $C(p, X)$ es una 2-celda.*

*Demostración.* Sea $I = [0,1]$, bastará probarlo para $X = I$. Sea $p \in I$, tenemos dos casos:

Caso 1. Supongamos que $p \in \{0,1\}$ y $p = 0$. Considerando la función $g : I \to C(0, I)$ definida por $g(t) = [0, t]$, note que $g$ es un homeomorfismo y, por ende, $C(0, I)$ es un arco. De forma similar, se prueba que $C(1, I)$ es un arco.

Caso 2. Sea $p \in I - \{0, 1\}$ y consideremos la función $g : [0, p] \times [0, 1-p] \to C(p, I)$ dada por $g(r, s) = [p - r, p + s]$, nuevamente $g$ es un homeomorfismo. Como $[0, p] \times [0, 1-p]$ es homeomorfo a una 2-celda se tene que $C(p, X)$ es una 2-celda.

□

**Teorema 3.5.** *[8, Teorema 3.18] Si $X$ es una curva cerrada simple y $p \in X$, entonces $C(p, X)$ es homeomorfo a una 2-celda.*

**Lema 3.6.** *Sean $X, Y$ continuos, $p \in X$ y $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo, entonces $C(p, X) \approx C(f(p), Y)$*

*Demostración.* Basta considerar la función $C(f)_p : C(p, X) \to C(f(p), Y)$ tal que $C(f)_p(A) = f(A)$, ya que este es un homeomorfismo. □

# 4 $C(p, X)$ para gráficas finitas

Para la clase de las gráficas finitas se tiene un resultado similar al teorema 3.3, este puede ser considerado una generalización en algunos casos particulares. En [4, Teorema 3.1] se presenta el resultado en un solo teorema, en este trabajo enunciamos dos teoremas referentes al mismo, siendo el teorema 4.1 un caso particular del teorema 4.2, se ha decidido así ya que la demostración tienen detalles que difieren. Todos los teoremas en esta sección son consecuencia directa o indirecta de los teoremas 4.1 y 4.2.

**Teorema 4.1.** *Sea $X$ una gráfica finita y $p \in X$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{A} \subset C(p, X)$ tal que $\mathcal{A}$ contiene una $n$-celda, donde $n = ord(p, X)$ y $H_2(\mathcal{A}, \{\{p\}\}) < \varepsilon$.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $J = vw$ una arista que contiene a $p$, tenemos 3 casos:

1. $p \in E(X)$. Podemos suponer que $v = p$. Existe $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ un arco ordenado de $\{p\}$ a $J$. Como $\alpha$ es continua en cero y $\alpha(0) = \{p\}$, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha([0, \alpha]) \subset B_H(\{p\}, \varepsilon)$, por lo cual, tomando $\mathcal{A} = \alpha([0, \alpha])$ se cumple lo deseado.

2. $p \in O(X)$. Consideremos ahora $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$ dos arcos ordenados de $\{p\}$ a $pv$ y de $\{p\}$ a $pw$ respectivamente. De la continuidad en cero de $\alpha, \beta$ existe $\delta > 0$ tal que $\delta([0,\delta]), \beta([0,\delta]) \subset B_H(\{p\}, \varepsilon)$. Definiendo $f : [0,\delta] \times [0,\delta] \to C(X)$ por $f(s,r) = \delta(s) \cup \beta(r)$ y tomando $\mathcal{A} = f([0,\delta] \times [0,\delta])$ se cumple lo deseado.

3. $p \in R(X)$. Supongamos que $ord(p,X) = n \in \mathbb{N}$ y $q_1, q_2, ..., q_n \in R(X)$ tales que $J_i = p, q_i$ son las aristas que emanan de $p$. Note que existen $f_i : [0,1] \to C(p, J_i)$ homeomorfismos tales que $f_i(0) = \{p\}$ y $f_i(1) = J_i$, además, podemos afirmar que la longitud de $f_i(l)$ es precisamente $l$. De la continuidad en cero, existe $\delta > 0$ tal que $f_i([0,\delta]) \subset B_H(\{p\}, \varepsilon)$. Al definir $f : [0,1]^n \to C(p,X)$ por $f(s_1, s_2, ..., s_n) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(s_i)$, se cumple que $f$ es un homeomorfismo, por lo que basta tomar $\mathcal{A} = f([0,\delta]^n)$. Además, note que $\{p\}$ es un punto interior de $\mathcal{A}$.

Cabe resaltar que en los tres casos la colección $\mathcal{A}$ no solo contiene una $n$-celda, sino que $\mathcal{A}$ es una $n$-celda. $\square$

**Teorema 4.2.** *Sea $X$ una gráfica finita y $p \in X$. Para cada $A \in C(p,X) - \{\{p\}\}$ y $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{A} \subset C(p,X)$ tal que $\mathcal{A}$ contiene una $n$-celda, donde $n = ord(p,X)$ y $H_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.*

*Demostración.* Sean $p \in X$, $A \in C(p,X)$ y $\varepsilon > 0$. Tenemos 3 casos:

Caso 1. $p \in E(X)$. Por el Teorema 2.7 existe $\alpha : [0,1] \to C(X)$ arco ordenado tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = A$.

Podemos tomar una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [0,1]$ tal que $x_i \to 1$, de este modo, tenemos una sucesión $\{\alpha(x_i)\} \subset C(p,X)$ tal que $\alpha(x_i) \to A$. Como $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(\alpha(x_{i_0}), A) < \varepsilon$. Sea $A_0 = \alpha(x_{i_0})$, por el Teorema 2.7 existe $\beta : [0,1] \to C(X)$ arco ordenado tal que $\beta(0) = A_0$ y $\beta(1) = A$, tomando $\beta([0,1]) = \mathcal{A} \subset C(p,X)$ se cumple que $\mathcal{A}$ es un arco y además, $A \in \mathcal{A}$. Por ser $\mathcal{A}$ un arco, se cumple que $\mathcal{A}$ contiene un 1-celda, donde $1 = ord(p,X)$.

Como $\{A\} \subset \mathcal{A}$, se cumple que $\{A\} \subset N_2(\mathcal{A}, \varepsilon)$, veamos ahora que

$$\mathcal{A} \subset N_2(\{A\}, \varepsilon) = B_H(A, \varepsilon) = \{B \in 2^X : H(A,B) < \varepsilon\}.$$

Sea $B \in \mathcal{A}$,se cumple que $H(B,A) \leq H(A_0, A) < \varepsilon$, por lo que $\mathcal{A} \subset N_2(\{A\}, \varepsilon)$. De este modo, $H_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.

Caso 2. $p \in O(X)$. Si $X$ es una curva cerrada simple, por el Corolario 3.5 se cumple la sentencia. Supongamos ahora que, $X$ no es una curva cerrada simple, de esto tenemos dos casos:

(i) $A - \{p\}$ es conexo. Sea $J = vw$ la arista de $X$ que contiene a $p$, donde $v, w$ son vértices. Si $p$ es un punto extremo de $A$, sin perder generalidad, podemos tomar un arco $L$ tal que $L \subset vp$ tal que $L \cap A = \{p\}$. Sean $\alpha, \beta : [0,1] \to C(p,X)$ arcos ordenados de $\{p\}$ a $A$, y de $\{p\}$ a $L$ respectivamente. Por ser $\alpha$ continua en 1, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $s \in [1-\delta_1, 1]$ se cumple que $H(\alpha(s), A) < \varepsilon$. A su vez, por ser $\beta$ continua en 0, existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $t \in [0, \delta_2]$ se cumple que $H(\beta(t), \{p\}) < \varepsilon$. Definamos $h : [1-\delta_1, 1] \times [0, \delta_2] \to C(p,X)$ como $h(s,t) = \alpha(s) \cup \beta(t)$, tomando $\mathcal{A} = Im(h)$ es claro que $\mathcal{A}$ contiene una 2-celda y por el Teorema **??**, inciso 2, se cumple que $H_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.

Si $p \in O(A)$, sean $m$ el punto medio de $pw$ y $a, b$ los puntos medios de los segmento $pm$ y $mw$, respectivamente. Como $A - \{p\}$ es conexo, $A - ab$ también es conexo y además $p \in A - ab$. Sea $E$ la clausura de $A - ab$ sobre $X$. Tomemos ahora $\alpha : [0,1] \to C(p,X)$ el arco ordenado de $E$ a $E \cup am$ y $\beta : [0,1] \to C(p,X)$ un arco ordenado de $E$ a $E \cup mb$. Por ser $\alpha$ continua en 1, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para cada $s \in [1-\delta_1, 1]$ se cumple que $H(\alpha(s), E \cup am) < \varepsilon$. A su vez, por ser $\beta$ continua en 1, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para cada $t \in [1-\delta_2, 1]$ se cumple que $H(\beta(t), E \cup mb) < \varepsilon$. Definiendo $h : [1-\delta_1, 1] \times [1-\delta_2, 1] \to C(p,X)$ como $h(s,t) = \alpha(s) \cup \beta(t)$ y tomando $\mathcal{A} = Im(h)$ se cumple que $\mathcal{A}$ contiene una 2-celda y por como se define $\mathcal{A}$, se tiene que $H(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.

(ii) $A - \{p\}$ no es conexo. Sean $E_1$ y $E_2$ las componentes de $A - \{p\}$. Consideremos para $i \in \{1,2\}$, $\alpha_i : [0,1] \to C(p,X)$ un arco ordenado de $\{p\}$ a $E_i \cup \{p\}$. Por ser estas funciones continuas en 1, existe $\delta_i > 0$ tal que, para cada $t_i \in [1-\delta_i, 1]$ ocurre que $H(\delta_i(t_i), E_i \cup \{p\}) < \varepsilon$. Si se define $h : [1-\delta_1, 1] \times [1-\delta_2, 1] \to C(p,X)$ por $h(t_1, t_2) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2)$ y se toma $\mathcal{A} = Im(h)$, se cumple lo deseado.

Caso 3. $p \in R(X)$. Supongamos, sin perder generalidad, que $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ y consideremos $L_1, L_2, ..., L_n$, las $n$ aristas que emanan de $p$. Para cada componente $Q$ de $A - \{p\}$, se cumple que $Q \cup \{p\}$ es una subgráfica de $X$. Dependiendo de la naturaleza de $A$, tenemos dos casos: $p \in O(Q \cup \{p\}) \cup R(Q \cup \{p\})$ o $p \in E(Q \cup \{p\})$.

(a) Para el primer caso, sea $\mathcal{C} = \{Q \subset X : Q$ es componente de $A - \{p\}$ y $p \in O(Q \cup \{p\}) \cup R(Q \cup \{p\})\}$, podemos tomar $l = |\mathcal{C}|$, por lo que $\mathcal{C} = \{Q_1, Q_2, ..., Q_l\}$.

Sea $Q_i \in \mathcal{C}$, se tiene que $m(Q_i) = ord(p, Q_i \cup \{p\}) \geq 2$. Supongamos, sin perder generalidad, que $L_1, L_2, ..., L_{m(Q_i)}$ son las aristas de $X$, contenidas en $Q_i \cup \{p\}$, (estas existen ya que $m(Q_i) \geq 2$, si $m(Q_i) < 2$ no existirían). Sea $m_j$ el punto medio de cada $L_j$. Luego, para cada $j \in \{1, 2, ..., m(Q_i) - 1\}$, podemos tomar $a_j, b_j \in L_j$, tales que, $m_j \in a_j b_j$, $d(a_j, m_j) = d(b_j, m_j) = \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(p, b_j) < d(p, a_j)$. Definamos el siguiente conjunto

$$G_{Q_i} = Q_i \cup \{p\} - \bigcup_{j=1}^{m(Q_i)-1} (a_j b_j).$$

Dado que $L_{m(Q_i)} \subset G_{Q_i}$, se puede probar que $G_{Q_i}$ es arco-conexo. A su vez, por ser $\bigcup_{j=1}^{m(Q_i)-1} (a_j b_j)$ un abierto, se cumple que $G_Q$ es cerrado y, por ende, compacto. Luego, $G_{Q_i}$ es un subcontinuo de $X$. Para cada $q \in (a_j b_j)$ se cumple que $q \in B(a_j, \frac{3\varepsilon}{4})$ o $q \in B(b_j, \frac{3\varepsilon}{4})$. Por ende, dado $D \in C(G_{Q_i}, Q_i \cup \{p\})$ se cumple que $H(D, Q_i \cup \{p\}) < \varepsilon$.

Para cada $j \in \{1, 2, ..., m(Q_i) - 1\}$, tomamos $a_j^{'}, b_j^{'}$ los puntos medios de $a_j m_j$ y $m_j b_j$ respectivamente. Dado $t \in [0, \frac{\varepsilon}{4}]$, denotemos por $J_j^a(t)$ al arco en $a_j a_j^{'}$ que contiene a $a_j$ y, cuya longitud es igual a $t$. También, para $t \in [0, \frac{\varepsilon}{4}]$, denotemos por $J_j^b(t)$ al arco en $b_j^{'} b_j$ que contiene a $b_j$, cuya longitud es igual a $t$. Para cada $j$ definamos la función $\gamma_j : [0, \frac{\varepsilon}{4}]^2 \to C(G_{Q_i}, Q_i \cup \{p\})$ por $\gamma_j(s, t) = G_{Q_i} \cup J_j^a \cup J_j^b$. No es difćil convencerse de que $\gamma_j$ es continua e inyectiva. Por lo que $\gamma_j$ es un encaje. Como esto se pudo hacer para cada $j \in \{1, ..., m(Q_i) - 1\}$, podemos definir la siguiente función para toda la componente $Q_i$.

Sea $\gamma_{Q_i} : [0, \frac{\varepsilon}{4}]^{(m(Q_i)-1)} \times [0, \frac{\varepsilon}{4}]^{(m(Q_i)-1)} \to C(G_{Q_i}, Q_i \cup \{p\})$ la función definida por,

$$\gamma_{Q_i}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) = \bigcup_{j=1}^{m(Q_i)-1} \gamma_j(s_j, t_j),$$

donde $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, ..., s_{m(Q_i)-1})$, $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, ..., t_{m(Q_i)-1})$. Es inmediato que $\gamma_{Q_i}$ es inyectiva y continua. Por lo que $\gamma_{Q_i}$ es un encaje.

Denotemos por $m = \sum_{i=1}^{l} m(Q_i)$. Se define la función $\gamma : [0, \frac{\varepsilon}{4}]^{2(m-l)} \to \bigcup_{i=1}^{l} C(G_{Q_i}, Q_i \cup \{p\})$, dada por

$$\gamma(\overrightarrow{s_1}, ..., \overrightarrow{s_l}, \overrightarrow{t_1}, ..., \overrightarrow{t_l}) = \bigcup_{i=1}^{l} \gamma_{Q_i}(\overrightarrow{s_i}, \overrightarrow{t_i}).$$

Como cada $\gamma_{Q_i}$ es un encaje, es fácil ver que $\gamma$ también es un encaje.

(b) $p \in E(Q \cup \{p\})$. Sea $\mathcal{D} = \{Q \subset X : Q$ es componente de $A - \{p\}$ y $p \in E(Q \cup \{p\})\}$ y consideremos que $k = |\mathcal{D}|$. De esto, podemos decir que $\mathcal{D} = \{Q_1, ..., Q_k\}$. Para cada $Q_j \in \mathcal{D}$ podemos tomar un arco ordenado $\alpha_{Q_j}$ en $C(Q_j \cup \{p\})$, que va de $\{p\}$ a $Q_j \cup \{p\}$. Por ser $\alpha_{Q_j}$ continua en 1, existe $\delta_{Q_j} > 0$ tal que, para cada $t \in [1 - \delta_{Q_j}, 1]$ se cumple que $H(\alpha_{Q_j}(t), Q_j \cup \{p\}) < \varepsilon$.

Se define la función $\alpha : \prod_{j=1}^{k}[1 - \delta_{Q_j}, 1] \to \bigcup_{j=1}^{k} C(Q_j \cup \{p\})$ por la regla $\alpha(\overrightarrow{x}) = \bigcup_{j=1}^{k} \alpha_{Q_j}(x_j)$, para $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_k) \in \prod_{j=1}^{k}[1 - \delta_{Q_j}, 1]$. Por la continuidad e inyectividad de las funciones $\alpha_{Q_j}$, se cumple que $\alpha$ es un encaje.

Es claro que $n \geq m + k$ (ya que $A$ no necesariamente toca a todas las aristas que tocan a $p$) sea $r = n - (m + k)$. Si $r > 0$, podemos tomar $L_{n_1}, L_{n_2}, ..., L_{n_r}$ las aristas restantes. Se tiene que existe, $Z_i \subset L_{n_i}$ un arco tal que $Z_i \cap A = \{p\}$. Para cada $i \in \{1, ..., r\}$, sea $\beta_i$ un arco ordenado en $C(Z_i)$ que va de $\{p\}$ a $Z_i$. Por la continuidad de $\beta_i$ en cero, existe $\delta_i > 0$ tal que, para toda $t \in [0, \delta_i]$ se cumple que $H(\{p\}, \beta_i(t)) < \varepsilon$ y además, $\beta_i(t) \cap A = \{p\}$. Consideremos ahora la función $\beta : \prod_{i=1}^{r}[0, \delta_i] \to \bigcup_{i=1}^{r} C(L_{n_i})$, definida por

$$\beta(\overrightarrow{x}) = \bigcup_{i=1}^{r} \beta_i(x_i)$$

, donde $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_r) \in \prod_{i=1}^{r}[0, \delta_i]$.

Por la continuidad e inyectividad de las funciones $\beta_i$, se cumple que $\beta$ es un encaje.

Podemos tomar las siguientes funciones, de tal manera que sean homeomorfismos.

(a) $h_{2(m-l)} : [0, 1]^{2(m-l)} \to [0, \frac{\varepsilon}{4}]^{2(m-l)}$.

(b) $h_k : [0, 1]^k \to \prod_{j=1}^{k}[1 - \delta_{Q_j}, 1]$.

(c) $h_r : [0, 1]^r \to \prod_{i=1}^{r}[0, \delta_i]$.

Finalmente definamos $h : [0, 1]^{2(m-l)} \times [0, 1]^k \times [0, 1]^r \to C(p, X)$, por

$$h(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = \gamma \circ h_{2(m-l)}(\overrightarrow{x}) \cup \alpha \circ h_k(\overrightarrow{y}) \cup \beta \circ h_r(\overrightarrow{z})$$

donde $\overrightarrow{x} \in [0, 1]^{2(m-l)}$, $\overrightarrow{y} \in [0, 1]^k$ y $\overrightarrow{z} \in [0, 1]^r$. Por como se han definido las funciones en que involucra $h$ se cumple que $h$ es un encaje. Tomemos $\mathcal{A} = Im(h)$, es claro que $\mathcal{A}$ es una $(2(m - l) + k + r) - celda$ que esta contenida en $C(p, X)$. Como $m = \sum_{i=1}^{l} m(Q_i)$ y $m(Q_i) \geq 2$, se cumple que $m \geq 2l$. Por lo que $m-2l \geq 0$, de esto que $2(m-l)+k+r \geq n$. Entonces, $\mathcal{A}$ contiene una $n - celda$.

Para ver que $H_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$, basta probar que, para todo $B \in \mathcal{A}$ se cumple que $H(A, B) < \varepsilon$; por como se ha construido $\mathcal{A}$, es claro que esto ocurre, por ende $H(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.

□

**Teorema 4.3.** *Sean $X$, $Y$ gráficas finitas y $p \in X$, $q \in Y$ tales que $C(p, X) \approx C(q, Y)$, entonces $ord(p, X) = ord(q, Y)$.*

*Demostración.* Sean $n = ord(p, X)$, $ord(q, Y) = m$ y supongamos que $n < m$. Como $C(p, X) \approx C(q, Y)$ existe $h : C(p, X) \to C(q, Y)$ un homeomorfismo. Sea $\varepsilon = \frac{\text{mín}\{d(p,r):\ r \in V(X)\}}{2}$, por los Teoremas 4.2 y 4.1, existe $\mathcal{A} \subset C(p, X)$ una $n - celda$, tal que $H_2(\mathcal{A}, \{\{p\}\}) < \varepsilon$ y además, $\{p\}$ es un punto interior de $\mathcal{A}$. Entonces, existe $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tal que $B_H(\{p\}, \varepsilon_0) \subset \mathcal{A}$. Ahora, por ser $h^{-1}$ continua, existe $\delta > 0$ tal que para cada $D \in B_H(h(\{p\}), \delta)$ ocurre que $H(h^{-1}(D), \{p\}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Por el Teorema 4.2 existe $\mathcal{A}' \subset C(q, Y)$, que contiene una $m - celda$, tal que $H_2(\mathcal{A}', \{h(\{p\})\}) < \delta$. Esto implica que $h^{-1}(\mathcal{A}') \subset B_H(\{p\}, \frac{\varepsilon_0}{2})$, entonces $h^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$. Es claro que, $h^{-1}(\mathcal{A}')$ contiene una $m - celda$, lo cual es una contradicción, ya que $\mathcal{A}$ es una $n - celda$, así $n \geq m$. Análogamente se puede demostrar que $m \geq n$. Por lo tanto, $m = n$. □

El teorema anterior asegura que en una grafica finita $X$, dados $p, q \in X$ tales que $C(p, X) \approx C(q, X)$, se cumple lo siguiente:

1. Si $p \in E(X)$, entonces $q \in E(X)$.
2. Si $p \in O(X)$, entonces $q \in O(X)$.
3. Si $p \in R(X)$, entonces $q \in R(X)$.

**Teorema 4.4.** *Sean $X$, $Y$ gráficas finitas y $p \in X$, $q \in Y$ tales que $ord(p, X) \neq ord(q, Y)$, entonces $\mathcal{O}(p) \neq \mathcal{O}(q)$.*

*Demostración.* Supongamos que $ord(p, X) \neq ord(q, Y)$ y $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(q)$. Luego, por el lema 3.6 se cumple que $C(p, X) \approx C(q, Y)$, lo cual implica por el teorema 4.3 que $ord(p, X) = ord(q, Y)$, lo cual es una contradicción. □

**Definición 4.5.** Sea $X$ una gráfica finita, que no es un arco. Si $q \in E(X)$, denotamos por $v(q)$ al único punto en $R(X)$ tal que la componente $Q$ de $X - \{v(q)\}$, que contiene a $q$, satisface que $Q \cup \{v(q)\}$ es un arco.

Un punto $v(q)$ es el primer punto de ramificación que nos encontramos, si caminamos sobre la gráfica finita saliendo desde $p$, véase Figura 1.

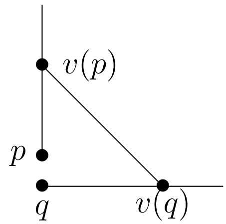



Figura 1: Puntos $v(q)$ y $v(p)$.

**Teorema 4.6.** *Sea $X$ una gráfica finita distinta de un arco. Si $e_1, e_2 \in E(X)$ y $C(e_1, X) \approx C(e_2, X)$, entonces $ord(v(e_1), X) = ord(v(e_2), X)$.*

*Demostración.* Sea $h : C(e_1, X) \to C(e_2, X)$ un homeomorfismo. Consideremos las aristas de $X$, $l_1 = e_1v(e_1)$ y $l_2 = e_2v(e_2)$, donde $n = ord(v(e_1), X) \geq 3$ y $m = ord(v(e_2), X) \geq 3$. Sea $A \in C(e_1, l_1) - \{l_1\}$, podemos suponer que $A = e_1r$, para algún $r \in l_1 - \{v(e_1)\}$. Tomemos $\varepsilon = d(r, v(e_1))$ y supongamos que $h(A) \notin C(e_2, l_2)$. Como la función inversa de $h$ es continua, $h^{-1}$ es continua en $h(A)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo $D \in B_H(h(A), \delta)$ se cumple que $H(h^{-1}(D), A) < \varepsilon$. Por como se ha elegido $\varepsilon$ se cumple que, $h^{-1}(D) \in C(e_1, l_1)$ para cada $D \in B_H(h(A), \delta)$. Es claro que $h(A) \in C(e_2, X)$ y como $h(A) \notin C(e_2, l_2)$ se cumple que $v(e_2) \in h(A)$. Así, por el Teorema 4.2, existe $\mathcal{A} \subset C(v(e_2), X)$, que contiene una $m-celda$, tal que $H_2(\mathcal{A}, \{h(A)\}) < \delta$. Esto implica que $\mathcal{A} \subset B_H(h(A), \delta)$ y por ende $h^{-1}(\mathcal{A}) \subset C(e_1, l_1)$. Es claro que $h^{-1}(\mathcal{A})$ contiene una $m$-celda. Pero por el Teorema 3.4, $C(e_1, l_1)$ es un arco, que es una contradicción. Por lo tanto, $h(A) \in C(e_2, l_2)$.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(e_1, l_1) - \{l_1\}$ una sucesión que converge a $l_1$, por la continuidad de $h$, se cumple que la sucesión $\{h(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(e_2, l_2)$ converge a $h(l_1)$ y por ser $C(e_2, l_2)$ cerrado, se tiene que $h(l_1) \in C(e_2, l_2)$.

Veamos que $h(l_1) = l_2$. Supongamos que $h(l_1) \neq l_2$, entonces $h(l_1) = e_2r$, para algún $r \in l_2 - \{v(e_2)\}$. Sea $\varepsilon = d(r, v(e_2))$, por la continuidad de $h$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $D \in B_H(l_1, \delta)$ se cumple que $H(h(D), h(l_1)) < \varepsilon$. Por como se eligió $\varepsilon$ tenemos que, $h(D) \in C(e_2, l_2)$ para cada $D \in B_H(l_1, \delta)$. Como $v(e_1) \in l_1$, por el Teorema 4.2, existe $\mathcal{A} \subset C(v(e_1), X)$, el cual contiene una $n-celda$ y además $H_2(\mathcal{A}, \{l_1\}) < \delta$. De esto último, se tiene que $\mathcal{A} \subset B_H(l_1, \delta)$ y por lo tanto $h(\mathcal{A}) \subset C(e_2, l_2)$, lo cual es una contradicción, porque por [8, Teorema 3.17] $C(e_2, l_2)$ es un arco y $h(\mathcal{A})$ contiene una $n$-celda. Por lo tanto, $h(l_1) = l_2$.

Con argumentos análogos, se prueba que $h^{-1}(C(e_2, l_2)) \subset C(e_1, l_1)$, entonces $h(C(e_1, l_1)) = C(e_2, l_2)$. Definamos los siguientes conjuntos: $Y_1 = (C(e_1, X) - C(e_1, l_1)) \cup \{l_1\}$, $Y_2 = (C(e_2, X) - C(e_2, l_2)) \cup \{l_2\}$, $Z_1 = cl(X - l_1)$ y $Z_2 = cl(X - l_2)$. Ahora definamos las funciones, $f_1 : Y_1 \to C(v(e_1), Z_1)$ por $f_1(A) = (A - l_1) \cup \{v(e_1)\}$ y $f_2 : Y_2 \to C(v(e_2), Z_2)$ por $f_2(B) = (B - l_2) \cup \{v(e_2)\}$. Observe que las funciones $f_1$ y $f_2$ son homeomorfismos, así $Y_1 \approx C(v(e_1), Z_1)$ y $Y_2 \approx C(v(e_2), Z_2)$. La función $h$ da un homeomorfismo entre $Y_1$ y $Y_2$, entonces $C(v(e_1), Z_1) \approx C(v(e_2), Z_2)$, luego por el Teorema 4.3, se cumple que $ord(v(e_1), Z_1) = ord(v(e_2), Z_2)$. Es claro que, $ord(v(e_1), X) = ord(v(e_1), Z_1) + 1$ y $ord(v(e_2), X) = ord(v(e_2), Z_2) + 1$, por lo tanto, $ord(v(e_1), X) = ord(v(e_2), X)$. □

**Corolario 4.7.** *Sea $X$ una gráfica finita distinta de un arco. Si $e_1, e_2 \in E(X)$ y $ord(v(e_1), X) \neq ord(v(e_2), X)$, entonces $\mathcal{O}(e_1) \neq \mathcal{O}(e_2)$.*

**Definición 4.8.** Sean $X$ una gráfica finita, $p \in O(X)$ y $vw$ la arista de $X$ que contiene a $p$, con $v, w \in V(X)$. Se define

$$\Sigma(p, X) = \begin{cases} ord(v, X) + ord(w, X), & \text{si } v \neq w, \\ ord(v, X), & \text{si } v = w. \end{cases}$$

**Teorema 4.9.** *Sean $X$ un continuo y $L \in C(X)$. Entonces, $L$ esta contenido en el centro de un $k-odo$ de $X$ si y solo si $C(L, X)$ contiene una $k-celda$.*

La demostración se puede consultar en [11] corolario 3.15.

**Teorema 4.10.** *Sea $X$ una gráfica finita. Si $A$ es una arista de $X$ y $p \in O(X) \cap A$, entonces $C(p, X)$ contiene una $\Sigma(p, X) - celda$.*

*Demostración.* Sea $A = vw$, con $v, w \in V(x)$. Tenemos los siguientes dos casos:

1. $v = w$. Sea $k = ord(v, X) = \Sigma(p, X)$. Se tiene que $A$ es una curva cerrada simple, consideremos $A_1 = pv$ y $A_2 = pw$ de tal manera que $A = A_1 \cup A_2$. Tomemos $p_1, p_2 \in X$, con $p_1 \neq p_2$, tal que $A_1 = pp_1 \cup p_1p_2 \cup p_2v$. Podemos tomar $q_1, q_2, ..., q_{k-2} \in X$, puntos distintos dos a dos, tales que $vq_i \cap vq_j = \{v\}$, $j \neq i$. Sea $V = \bigcup_{i=1}^{k-2} vq_i$, observar que $Y = V \cup vp_1 \cup p_2w$ es un continuo. Si $M = pw$, se cumple que $Y - M$ tiene exactamente $k$ componentes en $Y$, es decir, $Y$ es un $k - odo$ y $p \in M$, donde $M$ es el corazón. Luego, por el Teorema 4.9, $C(p, X)$ contiene una $\Sigma(p, X) - celda$.

2. $v \neq w$. Sean $k_1 = ord(v, X)$ y $k_2 = ord(w, X)$. Podemos tomar $r_1, ..., r_{k_1} \in X$, puntos distintos dos a dos, tal que $vr_i \cap vr_j = \{v\}$, $i \neq j$. También es posible seleccionar $s_1, ..., s_{k_2} \in X$, puntos distintos dos a dos, tales que $ws_i \cap ws_j = \{w\}$ cuando $i \neq j$. Sean $V = \bigcup_{i=1}^{k_1} vr_i$ y $W = \bigcup_{i=1}^{k_2} ws_i$, no es difícil probar que $Y = V \cup A \cup W$ es un continuo y que $Y - A$ tiene $k_1 + k_2 = \Sigma(p, X)$ componentes en $Y$, es decir, $Y$ es un $\Sigma(p, X) - odo$ y $A$, es el corazón. Como $p \in A$ por el Teorema 4.9, se cumple que $C(p, X)$ contiene una $\Sigma(p, X) - celda$.

□

**Lema 4.11.** *Sean $X$ una gráfica finita distinta de un arco o una curva cerrada simple, $p \in O(X)$ y $l = ab$ la arista que contiene a $p$. Entonces, para cada $A \in C(p, l)$ tal que $A \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ y para $1 > \varepsilon > H(A, l)$ existen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos $k$-celdas, tales que $\mathcal{A} \subset (B_H(A, \varepsilon) - C(p, l)) \cup \{l\} \subset \mathcal{B}$, donde $k = \Sigma(p, X) - 2$.*

*Demostración.* Sean $k_1 = ord(a, X)$ y $k_2 = ord(b, X)$. Tenemos dos casos.

Caso 1. $A = l$. Para este caso, tenemos dos subcasos:

Subcaso 1 (a) $a = b$. En este caso, $l$ es una curva cerrada simple y $\Sigma(p, X) = k_1$. Podemos tomar $r_1, r_2, ..., r_{k_1} \in O(X)$ tal que: $ar_i$ es un arco que emana de $a$ tal que $ar_i \cap ar_j = \{a\}$ y $d(a, r_i) < \varepsilon$. Supongamos, sin perder generalidad, que $ar_{k_1}, ar_{k_1-1} \subset l$. Consideremos ahora $A_i = l \cup ar_i$. Por el Teorema 2.7, existe $f_i : [0,1] \to C(l, A_i)$ un arco ordenado de $l$ a $A_i$, cabe resaltar que $f_i$ lo elegimos como un homeomorfismo. Tomemos ahora $f : [0,1]^{k_1-2} \to C(p, X)$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_{k_1-2}) = \bigcup_{i=1}^{k_1-2} f(x_i)$. Sea $\mathcal{A} = f([0,1]^{k_1-2})$, note que $H(l, A_i) < \varepsilon$ y además, $\mathcal{A} \cap C(p, l) = \{l\}$ lo cual implica que $\mathcal{A} \subset (B_H(l, \varepsilon) - C(p, l)) \cup \{l\}$.

Ahora tomemos $q_1, q_2, ..., q_{k_1} \in O(X)$ tal que: $aq_i$ es un arco que emana de $a$ tal que $aq_i \cap aq_j = \{a\}$ y $\varepsilon < d(a, q_i) < 1$. Supongamos, sin perder generalidad, que $aq_{k_1}, aq_{k_1-1} \subset l$. Consideremos ahora $B_i = l \cup aq_i$. Por el Teorema 2.7 existe $f_i : [0,1] \to C(l, B_i)$ un arco ordenado de $l$ a $B_i$, cabe resaltar que $f_i$ lo elegimos como un homeomorfismo. Tomemos ahora $f : [0,1]^{k_1-2} \to C(p, X)$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_{k_1-2}) = \bigcup_{i=1}^{k_1-2} f(x_i)$. Sea $\mathcal{B} = f([0,1]^{k_1-2})$, por la construcción de $f$ se cumple que $(B_H(l, \varepsilon) - C(p, l)) \cup \{l\} \subset \mathcal{B}$.

Subcaso 1 (b) $a \neq b$. Se tiene que $\Sigma(p, X) = k_1 + k_2$. Podemos tomar $r_1, ..., r_{k_1} \in O(X)$ tal que: $ar_i$ es un arco que emana de $a$ tal que $ar_i \cap ar_j = \{a\}$ y $d(a, r_i) < \varepsilon$. Supongamos, sin perder generalidad, que $ar_{k_1} \subset l$. Consideremos ahora $A_i = l \cup ar_i$ para $1 \leq i \leq k_1 - 1$. Por el Teorema 2.7, existe $f_i : [0,1] \to C(l, A_i)$ un arco ordenado de $l$ a $A_i$, cabe resaltar que $f_i$ lo elegimos como un homeomorfismo. A su vez, podemos tomar $k_2$ puntos $q_{k_1}, q_{k_1+1}, ..., q_{k_1+k_2-1} \in O(X)$ tal que: $bq_i$ es un arco que emana de $b$ tal que $bq_i \cap bq_i = \{b\}$ y $d(b, q_i) < \varepsilon$. Supongamos, sin perder generalidad, que $bq_{k_1+k_2-1} \subset l$. Para $k_1 \leq i \leq k_1 + k_2 - 2$ consideremos $B_i = l \cup bq_i$. Por el Teorema 2.7, existe $f_i : [0,1] \to C(l, B_i)$ un arco ordenado de $l$ a $B_i$, cabe resaltar que $f_i$ lo elegimos como un homeomorfismo. Tomemos ahora $f : [0,1]^{k_1+k_2-2} \to C(p, X)$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_{k_1+k_2-2}) = \bigcup_{i=1}^{k_1+k_2-2} f(x_i)$. Sea $\mathcal{A} = f([0,1]^{k_1+k_2-2})$, por la construcción de $f$ se cumple que $\mathcal{A} \subset (B_H(l, \varepsilon) - C(p, l)) \cup \{l\}$. Para construir el conjunto $\mathcal{B}$, basta tomar a los puntos $r_1, r_2, r_{k_1-1}$ tales que $\varepsilon <$

$d(a, r_i) < 1$ y $q_{k_1}, q_{k_1+1}, ..., q_{k_1+k_2-1}$ que cumplan que $\varepsilon < d(b, q_i) < 1$, con esta diferencia, siguiendo los pasos para construir $\mathcal{A}$, se cumplirá que $(B_H(l, \varepsilon) - C(p, l)) \cup \{l\} \subset \mathcal{B}$.

Caso 2. $A \neq l$. Nuevamente tenemos dos subcasos:

Subcaso 2 (a) $a = b$. Este caso es análogo al caso $1(a)$.

Subcaso 2 (b) $a \neq b$. Supongamos, sin perder generalidad, que $A = ac$, donde $c \in (ab)$. Dependiendo del orden de $a$ y $b$ se cumple alguno de los casos siguientes:

i. $k_1 = 1$, esto implica que $k_2 \geq 3$ y $\Sigma(p, X) = k_2 + 1$. Podemos tomar $r_1, r_2, ..., r_{k_2-1} \in O(X)$ tal que: $cr_i$ es un arco que cumple con $cr_i \cap cr_j = cb$, $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$ y $H(A, l) < d(c, r_i) < \varepsilon$. A su vez, también podemos tomar $q_1, q_2, ..., q_{k_2-1} \in O(X)$ tal que: $cq_i$ es un arco que cumple con $cq_i \cap cq_j = cb$ y $\varepsilon < d(c, q_i) < 1$. Tomando $A_i = A \cup cr_i$, y procediendo como en el inciso $1(a)$, se construye el conjunto $\mathcal{A}$, a su vez tomando $B_i = A \cup cq_i$, y procediendo como en el inciso $1(a)$, se construye $\mathcal{B}$.

ii. $k_1 \geq 3$. El orden de $b$ tiene dos posibles valores, $k_2 = 1$ o $k_2 \geq 3$. Si $k_2 = 1$ se cumple que $\Sigma(p, X) = k_1 + 1$, podemos tomar $r_1, r_2, ..., r_{k_1-1} \in O(X)$ tales que: $ar_i$ es un arco que emana de $a$ con $ar_i \cap ar_j = \{a\}$, $ar_i \cap l = \{a\}$ y $d(a, r_i) < \varepsilon$. Eligiendo $A_i = A \cup ar_i$ y siguiendo los pasos del inciso $1(a)$ se cumple lo deseado. Por otro lado, si $k_2 \leq 3$ nuevamente tomemos $r_1, r_2, ..., r_{k_1-1} \in O(X)$ tales que: $ar_i$ es un arco que emana de $a$ con $ar_i \cap ar_j = \{a\}$, $ar_i \cap l = \{a\}$ y $d(a, r_i) < \varepsilon$, además $q_{k_1}, q_{k_1+1}, ..., q_{k_1+k_2-2} \in O(X)$ tal que: $cq_i$ es un arco que cumple con $cq_i \cap cq_j = cb$ y $H(A, l) < d(c, q_i) < \varepsilon$. Tomando estos puntos, la construcción del conjunto $\mathcal{A}$, es como en el inciso $1(b)$. A su vez, al modificar $d(a, r_i) < \varepsilon$ por $\varepsilon < d(a, r_i) < 1$ y $H(A, l) < d(c, q_i) < \varepsilon$ por $\varepsilon < d(c, q_i) < 1$, se construye el conjunto $\mathcal{B}$ como en el inciso $1(b)$.

□

**Teorema 4.12.** *Sea $X$ una gráfica finita. Si $p, q \in O(X)$ y $C(p, X) \approx C(q, X)$, entonces $\Sigma(p, X) = \Sigma(q, X)$.*

*Demostración.* Sea $h : C(p, X) \to C(q, X)$ un homeomorfismo. Sea $l_1 = ab$, con $a, b \in V(X)$, la arista de $X$ que contiene a $p$ y $l_2 = cd$, con $c, d \in V(X)$, la arista de $X$ que contiene a $q$. Podemos suponer que $ord(b, X) = n, ord(c, X) = m \geq 3$. Sea $A \in C(p, l_1)$ tal que $A \cap \{a, b\} = \emptyset$. Podemos tomar $\varepsilon = \text{mín}\{d(a, A), d(b, A)\} > 0$ y supongamos que $h(A) \notin C(q, l_2)$. Como la función inversa de $h$ es continua, $h^{-1}$ es continua en $h(A)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $D \in B_H(h(A), \delta)$ se cumple que $H(h^{-1}(D), A) < \varepsilon$. Por como se ha elegido $\varepsilon$ se cumple que, $h^{-1}(D) \in C(p, l_1)$ para cada $D \in B_H(h(A), \delta)$. Es claro que $h(A) \in C(q, X)$ y como $h(A) \notin C(q, l_2)$ podemos suponer, sin perder generalidad, que $c \in h(A)$. Así, por el Teorema 4.2, existe $\mathcal{A} \subset C(c, X)$, que contiene una $m$-celda, tal que $H_2(\mathcal{A}, \{h(A)\}) < \delta$. Esto implica que $\mathcal{A} \subset B_H(h(A), \delta)$ y por ende $h^{-1}(\mathcal{A}) \subset C(p, l_1)$. Es claro que $h^{-1}(\mathcal{A})$ contiene una $m$-celda. Pero por el Teorema 3.4, $C(p, l_1)$ es una 2-celda, lo cual es una es una contradicción. Por lo tanto, $h(A) \in C(q, l_2)$.

Si $A \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ podemos tomar una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(p, l_1)$, con $A_n \cap \{a, b\} = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tal que converge a $A$, de lo anterior $\{h(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(q, l_2)$ y, por la continuidad de $h$, se cumple que la sucesión $\{h(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $h(A)$ y por ser $C(q, l_2)$ cerrado, se tiene que $h(A) \in C(q, l_2)$.

Por lo tanto, $h(l_1) \subset l_2$. Se puede probar que $h(l_1) \cap \{c, d\} \neq \emptyset$. Así, se cumple que $h(C(p, l_1)) \subset C(p, l_2)$ y de forma análoga, tenemos que $h^{-1}(C(q, l_2)) \subset C(p, l_1)$, por lo tanto $h(C(p, l_1)) = C(q, l_2)$.

Supongamos que $\Sigma(q, X) < \Sigma(p, X)$. Veamos que esta suposición implica que $h(l_1) \notin C(q, l_2)$, lo cual es una contradicción. Para ello, consideremos dos casos:

1. $h(l_1) = l_2$. De la continuidad de $h$ existe $1 > \delta > 0$ tal que $h(B_H(l_1, \delta)) \subset B_H(l_2, \frac{1}{4})$. Luego, por el Lema 4.11 existen $\mathcal{A}$ una $(\Sigma(p, X) - 2)$-celda tal que $\mathcal{A} \subset (B_H(A, \delta) - C(p, l_1))$ y $\mathcal{B}$ una $(\Sigma(q, X) - 2)$-celda tal que $(B_H(l_2, \varepsilon) - C(q, l_2)) \cup \{l_2\} \subset \mathcal{B}$, por como es $h$, se cumple que $h(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, lo cual es una contradiccón.

2. $h(l_1) \neq l_2$.Podemos suponer, sin perder generalidad, que $h(l_1) = cr$, con $r \in (cd)$. Para $1 > \varepsilon > H(cr, l_2)$, de la continuidad de $h$ existe $1 > \delta > 0$ tal que $h(B_H(l_1, \delta)) \subset B_H(cr, \varepsilon)$. Luego, por el Lema 4.11, existen $\mathcal{A}$ una $(\Sigma(p, X) - 2)$-celda tal que $\mathcal{A} \subset (B_H(l_1, \delta) - C(p, l_1))$, y $\mathcal{B}$ una

$(\Sigma(q,X)-2)$-celda tal que $(B_H(cr,\varepsilon)-C(q,l_2))\cup\{l_2\}\subset\mathcal{B}$, por como es $h$, se cumple que $h(\mathcal{A})\subset\mathcal{B}$, lo cual es una contradiccón.

Por lo tanto, $\Sigma(q,X)\geq\Sigma(p,X)$. De manera análoga, se ve que la desigualdad $\Sigma(q,X)>\Sigma(p,X)$ no es posible. Por lo tanto, $\Sigma(q,X)=\Sigma(p,X)$. □

**Corolario 4.13.** *Sea $X$ una gráfica finita. Si $p,q\in O(X)$ y $\Sigma(p,X)\neq\Sigma(q,X)$, entonces $\mathcal{O}(p)\neq\mathcal{O}(q)$.*

Culminamos esta sección con un corolario que nos ayuda a decicir cuando dos elementos de $K(X)$ no son homeomorfos.

**Corolario 4.14.** *Sean $X$ una gráfica finita distinta de un arco y $p,q\in X$. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones*

1. $ord(p,X)\neq ord(q,X)$,
2. $ord(v(p),X)\neq ord(v(q),X)$,
3. $\Sigma(p,X)\neq\Sigma(q,X)$,

*entonces $C(p,X)\not\approx C(q,X)$.*

A su vez haciendo uso de los corolarios 4.3 y 4.4, podemos enunciar el siguiente corolario que es de ayuda para diferenciar entre órbitas en una gráfica finita.

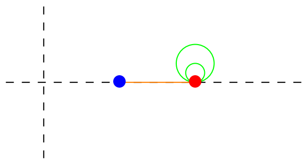
**Corolario 4.15.** *Sean $X$ una gráfica finita distinta de un arco y $p,q\in X$. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones*

1. $ord(p,X)\neq ord(q,X)$,
2. $ord(v(p),X)\neq ord(v(q),X)$,
3. $\Sigma(p,X)\neq\Sigma(q,X)$,

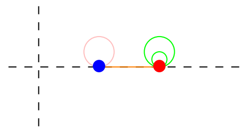
*entonces $\mathcal{O}(p)\neq\mathcal{O}(q)$.*

Veamos algunos ejemplos. En la gráfica finita $G_1$, para el punto de colo azúl pertenece a una órbita distinta a la de cualquier otro punto, ya que su orden es distinto al de cualquier otro punto en la gráfica finita. En la gráfica finita $G_2$, los puntos en color naranja tienen un hiperespacio $C(p,X)$ distinto a otros hiperespacios de puntos de distinto color, esto por el punto 2 del corolario 4.14. En la gráfica finita $G_3$, los puntos en color verde pertenece a una órbita distinta a la de cualquier otro punto, ya que su $\Sigma(p, X)$ es distinto al de cualquier otro punto en la gráfica finita, esto es consecuencia del punto 3 corolario 4.15. En la gráfica finita $G_4$, los puntos en color naranja tienen un hiperespacio $C(p, X)$ distinto a otros hiperespacios de puntos de distinto color, esto por el punto 2 del corolario 4.14.

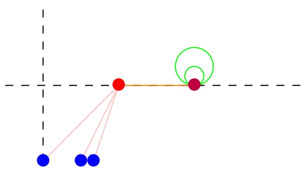
$G_1$



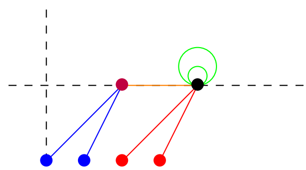
$G_2$



$G_3$



$G_4$



# 5 Pseudo-simetría

Si $ord(p, X) = ord(q, X)$, ¿cuándo esto implica que $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(q)$? o ¿puede ocurrir que $ord(p, X) = ord(q, X)$ y $\mathcal{O}(p) \neq \mathcal{O}(q)$? Por otro lado, a pesar de que $\mathcal{O}(p) \neq \mathcal{O}(q)$ ¿pueda ocurrir que $C(p, X) \approx C(q, X)$? En responder estas preguntas, se enfoca la siguiente sección.

**Definición 5.1.** Sean $X$ un continuo y $p, q \in X$. Decimos que $X$ es **pseudo-simétrico con respecto a** p y q, si existe un homeomorfismo $\varphi : C(p, X) \to C(q, X)$ tal que $\varphi(\{p\}) = \{q\}$ y $\varphi(X) = X$.

**Teorema 5.2.** *Sea $X$ un continuo. Si $X$ es homogéneo, entonces $X$ es pseudo-simétrico con respecto a cada par de sus puntos.*

*Demostración.* Sean $p, q \in X$, por ser $X$ homogéneo existe $f : X \to X$ un homoemorfismo tal que $f(p) = q$. Por el Lema 3.6, se cumple que $C(f)_p : C(p, X) \to C(q, X)$ es un homeomorfismo, donde $C(f)_p(A) = f(A)$. Es claro que $C(f)_p(\{p\}) = \{q\}$ y $C(f)_p(X) = X$. □

**Ejemplo 5.3.** El arco $[0, 1]$ es pseudo-simétrico con respecto a 0 y 1.

*Demostración.* Basta considerar el homeomorfismo $f : [0, 1] \to [0, 1]$, definido por $f(x) = 1 - x$. Tomando $C(f)_0 : C(0, [0, 1]) \to C(1, [0, 1])$ por $C(f)_0(A) = f(A)$ se cumple lo deseado. □

**Definición 5.4.** Un continuo $X$ es **descomponible**, si $X$ puede ser puesto como la unión de dos subcontinuos propios. Diremos que $X$ es **indescomponible**, si $X$ no es descomponible.

**Definición 5.5.** Un continuo $X$ es **hereditariamente descomponible** (**indescomponible**), si cada uno de sus subcontinuos propios, no degenerados, es descomponible (indescomponible).

**Teorema 5.6.** *[8, Lema 3.19] Sea $X$ un continuo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$X$ es hereditariamente indescomponible.*

2. *$C(p, X)$ es un arco para cada $p \in X$.*

**Teorema 5.7.** *Sea $X$ un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $X$ es pseudo-simético con respecto a cada par de sus puntos.*

*Demostración.* Sean $p, q \in X$, por el Teorema 5.6, podemos tomar los siguientes homeomorfismos $f_1 : C(p, X) \to [0, 1]$ y $f_2 : [0, 1] \to C(q, X)$. Tenemos que $f_1(\{p\}) = a$, $f_1(X) = b$ y $f_2(c) = \{q\}$, $f_2(d) = X$, donde $a, b, c, d \in [0, 1]$. Supongamos, sin perder generalidad, que $a < b$ y $c < d$. Se define la función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{a}x, & \text{si } x \in [0, a], \\ \frac{d-c}{b-a}x + (c - \frac{d-c}{b-a}a), & \text{si } x \in (a, b], \\ \frac{1-d}{1-b}x + (d - \frac{1-d}{1-b}b), & \text{si } x \in (b, 1]. \end{cases}$$

Note que la función $f$ es un homeomorfismo. Al definir la función $\varphi : C(p, X) \to C(q, X)$ por $\varphi(A) = (f_2 \circ f \circ f_1)(A)$, se cumple que $\varphi$ es un homeomorfismo, además $\varphi(\{p\}) = (f_2 \circ f)(f_1(\{p\})) = (f_2 \circ f)(a) = f_2(f(a)) = f_2(c) = \{q\}$ y $\varphi(X) = (f_2 \circ f)(f_1(X)) = (f_2 \circ f)(b) = f_2(f(b)) = f_2(d) = X$. Por lo tanto, $X$ es pseudo-simétrico con respecto de $p$ y $q$. □

**Teorema 5.8.** *Sean $Y$ un continuo pseudo-simétrico con respecto a los puntos $p$ y $q$, supongamos que la función $\varphi$ cumple que, si $A \in C(p, X) \cap C(q, X)$, entonces $\varphi(A) \in C(p, X) \cap C(q, X)$. Sea $X$ un continuo tal que $X = L \cup Y \cup K$, donde $L$ y $K$ son continuos tales que $L \cap Y = \{p\}$, $K \cap Y = \{q\}$ y $L \cap K = \emptyset$. Supongamos que existe un homeomorfismo $f : C(p, L) \to C(q, K)$ tal que $f(\{p\}) = \{q\}$ y $f(L) = K$. Entonces, $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, X)$.*

*Demostración.* Definamos la función $g : C(Y, X) \to C(p, L) \times C(q, K)$ por $g(A) = (A \cap L, A \cap K)$. Veamos que $g$ es inyectiva. Para esto, tomemos $A, B \in C(Y, X)$ tales que $A \neq B$ y, supongamos que $g(A) = g(B)$. De esto que $A \cap L = B \cap L$ y $A \cap K = B \cap K$. Como $A \neq B$ supongamos, sin perder generalidad, que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$, esto implica que $a \in L$ o $a \in K$. Si $a \in L$, entonces $a \in B \cap L$ y si $a \in K$, entonces $a \in B \cap K$, en ambos casos se llega a una contradicción. Por lo tanto, $g(A) \neq g(B)$.

Para ver que $g$ es sobreyectiva basta ver que, dado $(A, B) \in C(p, L) \times C(q, K)$ se cumple que, $g(Y \cup A \cup B) = (A, B)$.

Veamos que $g$ es continua. Para ello, consideremos las funciones $g_1 : C(Y, X) \to C(p, L)$, $g_2 : C(Y, X) \to C(q, K)$ definidas por $g_1(A) = A \cap L$ y $g_2(A) = A \cap K$. Sean $A \in C(Y, X)$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(Y, X)$ que converge a $A$, es decir, $A_n = A$. Veamos que $(A_n \cap L) = A \cap L$, sea $x \in \sup(A_n \cap L)$, luego, para cada $U$ abierto que contenga a $x$ se cumple que, $U \cap (A_n \cap L) \neq \emptyset$ para un número infinto de $n's$. Esto implica que $x \in \sup A_n = \inf A_n = A$ y $x \in cl(L) = L$, por ende $x \in A \cap L$. Si $x = p$, es claro que $x \in \inf(A_n \cap L)$, cuando $x \neq p$ se puede tomar $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap Y = \emptyset$ y $B(x, r) \cap K = \emptyset$, es decir, $B(x, r) \subset L$.

Luego, dado $U$ un abierto de $x$ se cumple que, existe $r > r_0 > 0$ tal que $B(x, r_0) \subset U$ y, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$ ocurre que $B(x, r_0) \cap A_n \neq \emptyset$. Como $B(x, r_0) \subset U \cap L$ se tiene que, $U \cap L \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq n_0$, esto implica que $x \in \inf(A_n \cap L)$, por lo tanto $(A_n \cap L)$ existe y, además, $(A_n \cap L) \subset A \cap L$, la contención $A \cap L \subset (A_n \cap L)$ se obtiene con pasos similares, por lo tanto $(A_n \cap L) = A \cap L$.

Así, $g_1$ es continua, con argumentos análogos se prueba que $g_2$ es continua. Observe que $g(A) = (g_1(A)), g_2(A))$, por lo tanto $g$ es continua. Por ser $C(Y, X)$ compacto se cumple que, $g$ es un homeomorfismo.

Como $Y$ pseudo-simétrico con respecto a $p$ y $q$, existe $\varphi : C(p, Y) \to C(q, Y)$ tal que $\varphi(\{p\}) = \{q\}$, $\varphi(Y) = Y$ y, por hipótesis, para cada $A \in C(p, X) \cap C(q, X)$ se cumple que $\varphi(A) \in C(p, X) \cap C(q, X)$. También, por hipótesis, existe un homeomorfismo $f : C(p, L) \to C(q, K)$ tal que $f(\{p\}) = \{q\}$ y $f(L) = K$. Se define la función $h : C(p, X) \to C(q, X)$ por:

$$h(A) = \begin{cases} \varphi(A \cap Y) \cup f(A \cap L) \cup f^{-1}(A \cap K), & \text{si } A \notin C(Y, X), \\ g^{-1}(f^{-1}(A \cap K), f(A \cap L)), & \text{si } A \in C(Y, X). \end{cases}$$

Por ser $f, g, \varphi$ homeomorfismos se cumple que, $h$ también es un homeomorfismo. Por lo tanto, $C(p, X) \approx C(q, X)$. $\square$

Este teorema nos ayuda a probar que pueden existir dos puntos $p, q$ en cierto tipo de gráfica finita $X$, tales que $ord(p, X) = ord(q, X)$, $\mathcal{O}(p) \neq \mathcal{O}(q)$ y $C(p, X) \approx C(q, X)$. Esto ayuda a probar que existen gráficas finitas cuyo grado de homogeneidad es mayor extrictamente que el tamaño de $K(X)$.

Recomendamos la lectura de las referencias [1] – [3] para conocimiento del lector y pueda ver la evolución de nuestras investigaciones las cuales tenemos plasmadas en este capítulo.

# 6 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

# Bibliografía

[1] Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Fernando Mauricio Rivera Vega «Progresiones aritméticas como base para algunos espacios topológicos (Capítulo 7)» Matemáticas y sus aplicaciones 11, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 135 – 148. Primera Edición 2019, ISBN:

978-607-525-615-3. Indautor: 03-2019-082010541400-01 Versión electrónica en https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2019.

[2] Felipe de Jesús Aguilar Romero, *Dinámica en el intervalo y en su hiperespacio de compactos* (tesis de licenciatura FCFM). Benemérita Universidad Autńoma de Puebla. México. (2019).

[3] Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, «Continuidad de la función wf en el intervalo [0,1] (Capítulo 7)» Matemáticas y sus aplicaciones 14, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 161 - 181. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-695-5. Versión electrónica en https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.

[4] Florencio Corona Vázquez, Russel Arón Quiñones Estrella, Javier Sánchez Martínez, Hugo Villanueva, *Hyperspaces C(p,X) of finite graphs*, Topology and its Applications, 248 (2018), 44-49.

[5] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New york, Basel (1999).

[6] Sergio Macías, Topics on Continua, Second Edition, Springer, 2018, ISBN:978- 3-319-90901-1.

[7] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).

[8] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces C(p,X)*, Topology and its Applications, 27 (1) (2003) 259-285.

[9] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces K(X)*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 35 (2) (2005) 655-674.

[10] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces C(p,X) for atriodic continua*, Houston Journal of Mathematics, 31 (2) (2005) 403-426.

[11] Patricia Pellicer Covarrubias, *Cells in hyperspaces*, Topology and its Applications, 154 (2007) 1002-1007.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

**Matemáticas y sus aplicaciones 19, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-861-4**

# Capítulo 2

# Arcos y circunferencias libres

**David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Leonardo Ramírez Aparicio**
**FCFM, BUAP**

**Resumen**

Un continuo es un espacio métrico no degenerado que es compacto y conexo.
Un arco libre en $X$ es un arco tal que al quitarle su conjunto de puntos extremos es abierto en $X$. Decimos que un arco libre es maximal cuando ningún otro arco libre en $X$ lo contiene propiamente. Por otro lado, una circunferencia libre en $X$ es una curva cerrada simple tal que existe un punto en ella, que al quitarselo lo que nos da es un conjunto abierto en $X$. En este trabajo, demostramos que los arcos libres no tienen vértices de triodos simples en sus interior. Así también, mostramos que en los continuos localmente conexos, cada arco libre está contenido en un arco libre maximal o una circunferencia libre. Por último, demostramos que la convergencia en el hiperespacio $C(X)$ por arcos libres maximales y circunferencias libres distintos por pares, esta implicada por la convergencia de elementos de cada uno de estos en el continuo $X$.

## 1 Preliminares

Un **continuo** es un espacio métrico $X$ con más de un punto conexo y compacto. Un subconjunto $Y$ de $X$ es un **subcontinuo** de X si $Y$ es un continuo o $Y$ es un conjunto de un punto. Los **hiperespacios** de un continuo $X$ son espacios cuyos elementos son subconjuntos de $X$ que cumplen con ciertas condiciones.

Dado un continuo $X$ denotamos por $d$ a la métrica de $X$. Si $A$ es un subconjunto de un continuo $X$, el *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de $A$ en

$X$, son denotados por $\operatorname{int}_X(A)$, $\operatorname{cl}_X(A)$ y $\operatorname{Bd}_X(A)$, respectivamente. También, denotamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales.

Si $X$ es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, algunos de los hiperespacios de $X$ son:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset, \quad A \text{ es cerrado en } X\},$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$
$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

la clase $2^X$ se le conoce como el **hiperespacio de los subconjuntos cerrados** de $X$, se acostumbra denotar a $C_1(X)$ como $C(X)$, conocido como el **hiperespacio de los subcontinuos** del continuo $X$. Por otra parte, $C_n(X)$ es conocido como el $n-$**ésimo hiperespacio** de $X$. Al hiperespacio $2^X$ se le considera dotado con la métrica de Hausdorff inducida por la métrica $d$ en $X$ y con la cual resulta ser un espacio métrico. Esta métrica está dada de la siguiente manera: $H(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset N_d(B,\epsilon) \text{ y } B \subset N_d(A,\epsilon)\}$, con $A, B \in 2^X$. Observemos que la restricción de la métrica de Hausdorff a $C(X)$ y $C_n(X)$ hace de cada uno de estos un espacio métrico.

Sean $X$ un continuo, A un subconjunto no vacío de $X$ y $\beta$ un número cardinal. Se dice que $A$ es de **orden menor o igual** que $\beta$ en $X$, denotado por $\operatorname{ord}(A,X) \leq \beta$, si para cualquier conjunto abierto $U$ de $X$ con $A \subset U$, existe un conjunto abierto $V$ de $X$ tal que, $A \subset V \subset U$ y $|\operatorname{Bd}_X(V)| \leq \beta$. Si $A = \{x\}$ se escribirá que $\operatorname{ord}(x,X) \leq \beta$ en lugar de escribir $\operatorname{ord}(\{x\},X) \leq \beta$. Se dice también que $A$ es de **orden** $\beta$ en $X$, denotado por $\operatorname{ord}(A,X) = \beta$, si $\operatorname{ord}(A,X) \leq \beta$ y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, se tiene que $\operatorname{ord}(A,X) \nleq \alpha$.

# 2 Resultados generales.

Esta sección está dedicado a presentar los resultados generales que usaremos a lo largo de este trabajo. Nuestro principal objetivo es enlistarlos para que más adelante podamos hacer referencia a ellos.

**Teorema 2.1.** [10, Teorema 8.26] *Sea $X$ un continuo localmente conexo, entonces cualquier subconjunto abierto y conexo de $X$ es arco conexo.*

**Teorema 2.2.** *Un espacio topológico $X$ es localmente conexo si y solo si, las componentes de cada subconjunto abierto de $X$ son abiertas en $X$.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es localmente conexo. Sean $U$ un abierto de $X$ y $C$ una componente de $U$. Sea $x \in C \subset U$. Como $X$ es localmente conexo, existe $V$ un abierto y conexo en $X$ tal que $x \in V \subset U$. Luego, por la maximalidad de $C$, $x \in V \subset C$. Por lo tanto, $C$ es abierto en $X$.

Ahora, supongamos que las componentes de cada subconjunto abierto de $X$ son abiertas en $X$. Dados $x \in X$ y $U$ un abierto de $X$ que contiene a $x$. Sea $C$ la componente de $U$ que contiene a $x$. Luego, $C$ es abierto y conexo en $X$ tal que $x \in C \subset U$. Por lo tanto, $X$ es localmente conexo. $\square$

**Teorema 2.3.** *Sea $X$ un continuo localmente conexo. Si $Y$ es un subcontinuo de $X$ y $U$ es cualquier subconjunto abierto de $X$ tal que $Y \subset U$, entonces existe un subcontinuo $Z$ de $X$ tal que $Y \subset \mathrm{int}_X(Z) \subset Z \subset U$.*

*Demostración.* Como $X$ es un continuo localmente conexo y $Y \subset U$ es un subcontinuo de $X$, con $U$ un abierto de $X$, entonces para cada $y \in Y$ existe un conjunto abierto y conexo $C_y$ de $X$ tal que $y \in C_y \subset \mathrm{cl}_X(C_y) \subset U$, con $\mathrm{cl}_X(C_y)$ conexo ya que $C_y$ lo es. Como $Y$ es compacto y $Y \subset \bigcup\{C_y \colon y \in Y\}$, existe $I$ un subconjunto finito de $Y$ tal que $Y \subset \bigcup\{C_y \colon y \in I\}$. Sean $\mathcal{A} = \{\mathrm{cl}_X(C_y) : y \in I\}$ y $Z = \bigcup \mathcal{A}$, entonces $Z$ es un conjunto cerrado de $X$ y como $X$ es compacto, entonces $Z$ es compacto, además $Z \subset U$. Notemos que $Y \subset Z$, $Y$ es conexo y para cada $\mathrm{cl}_X(C_y) \in \mathcal{A}$, $\mathrm{cl}_X(C_y) \cap Y \neq \emptyset$, entonces por [7, Teorema 2], $Z$ es conexo. Así, como $Z \subset X$ es compacto y conexo, entonces $Z$ es un subcontinuo de $X$. Además, como $\bigcup\{C_y \colon y \in I\} \subset Z$, entonces $Y \subset \bigcup\{C_y \colon y \in I\} \subset \mathrm{int}_X(Z)$, de donde, $Y \subset \mathrm{int}_X(Z) \subset Z \subset U$. Concluyendo lo requerido. $\square$

**Teorema 2.4.** *Sean $X$ es un continuo, $A$ un subespacio de $X$ y $x \in A$, entonces* $\mathrm{ord}(x, A) \leq \mathrm{ord}(x, X)$. *Además, si $A$ es una vecindad de $x$ en $X$, entonces* $\mathrm{ord}(x, A) = \mathrm{ord}(x, X)$.

*Demostración.* Sea $U$ un subconjunto abierto de $A$ con $x \in U$, entonces existe $V$ un subconjunto abierto de $X$ tal que $U = A \cap V$. Como $\mathrm{ord}(x, X) \leq \mathrm{ord}(x, X)$ y $x \in V$, existe un subconjunto abierto $W$ de $X$ tal que, $x \in W \subset V$ y $|\mathrm{Bd}_X(W)| \leq \mathrm{ord}(x, X)$. Observemos que $\mathrm{Bd}_A(A \cap W) \subset \mathrm{Bd}_X(W)$, luego, $|\mathrm{Bd}_A(A \cap W)| \leq \mathrm{ord}(x, X)$. Por lo tanto, como $A \cap W$ es un abierto en $A$ y $x \in A \cap W \subset U$, se sigue que, $\mathrm{ord}(x, A) \leq \mathrm{ord}(x, X)$.

Supongamos ahora que $x \in \mathrm{int}_X(A)$, por el análisis anterior, es sufiente mostrar que $\mathrm{ord}(x, X) \leq \mathrm{ord}(x, A)$. Para esto, sea $U$ un subconjunto abierto de $X$ que contiene a $x$. Notemos que $x \in \operatorname{int}_X(A) \cap U$, donde, en particular, $\operatorname{int}_X(A) \cap U$ es un subconjunto abierto de $A$, luego, existe un subconjunto abierto $W$ de $A$ tal que $x \in W \subset \operatorname{int}_X(A) \cap U$ y $|\operatorname{Bd}_A(W)| \leq \operatorname{ord}(x, A)$. Como $x \in W \subset U$, si demostramos que $|\operatorname{Bd}_X(W)| = |\operatorname{Bd}_A(W)|$ habremos terminado. Para esto, notemos que, como $W \subset \operatorname{int}_X(A) \subset A$, entonces $W$ es abierto en $\operatorname{int}_X(A)$ y por ende, en $X$. Además, como $X$ es regular y $x \in \operatorname{int}_X(A)$, podemos suponer que $\operatorname{cl}_X(W) \subset \operatorname{int}_X(A)$, luego $\operatorname{Bd}_X(W) = \operatorname{Bd}_A(W)$, obteniendo lo requerido. □

**Proposición 2.5.** [10, Proposición 9.5] *Si $X$ es un continuo no degenerado, entonces* $\operatorname{ord}(x, X) \leq 2$ *para cada $x \in X$ si y solo si, $X$ es un arco o una curva cerrada simple.*

**Lema 2.6.** [1, Lema 2.4] *Sean $X$ un espacio topológico, $x \in X$ y $F$ un subconjunto cerrado no vacío de $X$. Si $x \notin F$ y $\alpha$ es un arco que va de $x$ a un punto en $F$, entonces existe un subarco $\beta$ en $\alpha$ tal que, $F \cap \beta = \{y\}$ con $x$ e $y$ puntos extremos de $\beta$.*

**Proposición 2.7.** *Si $X$ es un espacio métrico conexo no degenerado, entonces es infinito.*

*Demostración.* Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $X$ es finito. Como $X$ es un espacio métrico, para cada $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto compacto y por ende, cerrado. Además, como $X - \{x\}$ es la unión de un número finito de conjuntos cerrados de $X$, entonces es cerrado en $X$, así, $\{x\}$ es abierto en $X$. Como $X$ tiene más de un punto, esto nos dice que $\{x\}$ es un conjunto cerrado y abierto de $X$ distinto del vacío y $X$, lo que es una contradicción ya que $X$ es conexo. Por lo tanto, $X$ es infinito. □

**Teorema 2.8.** [10, Teorema 5.6] *Sean $X$ un continuo y $E$ un subconjunto propio y no vacío de $X$. Si $K$ es una componente de $E$, entonces* $\operatorname{cl}_X(K) \cap \operatorname{Bd}_X(E) \neq \emptyset$.

**Lema 2.9.** *Sean $X$ un continuo y $J$ un arco de $X$. Si $C$ es un conjunto conexo de $X$ tal que $C \cap \operatorname{Bd}_X(J) = \emptyset$, entonces $C \cap J = \emptyset$ o $C \subset J$.*

*Demostración.* Basta notar que $X - J$ y $J - \operatorname{Bd}_X(J)$ forman una separación de abiertos de $X - J$. Así, como $C$ es conexo, $C \subset X - J$ o $C \subset J - \operatorname{Bd}_X(J)$, es decir, $C \cap J = \emptyset$ o $C \subset J$. □

**Lema 2.10.** *Sean $X$ un continuo, $Y$ un subcontinuo de $X$ y $J$ un arco libre de $X$. Si $J \subset Y \subset X$, entonces $J$ es un arco libre de $Y$.*

*Demostración.* Como $J - E(J)$, es un subconjunto abierto de $X$ y $J - E(J) \subset Y$, entonces $J - E(J)$ es un subconjunto abierto de $Y$, es decir, $J$ es un arco libre de $Y$. □

**Lema 2.11.** *Sean $X$ un continuo y $J$ un arco libre de $X$. Si $x$ es un punto extremo de $J$ con $x \in \text{int}_X(J)$ y $K$ es un arco de $X$ que contiene a $J$, entonces $x$ es un punto extremo de $K$ y $x \in \text{int}_X(K)$.*

*Demostración.* Como $x \in \text{int}_X(J)$ y $J \subset K$, se sigue que $x \in \text{int}_X(K)$. Además, como $x \in E(J)$ y $J$ y $K$ son vecindades de $x$ en $X$, por el Teorema 2.4, $\text{ord}(x, K) = \text{ord}(x, X) = \text{ord}(x, J) = 1$, es decir, $x$ es un punto extremo de $K$. □

**Lema 2.12.** [2, Lema 6.6] *Si $X$ es un continuo y $J$ y $K$ son arcos libres en $X$ tales que $\text{int}_X(J) \cap \text{int}_X(K) \neq \emptyset$, entonces $J \cup K$ es un arco libre o una circunferencia libre en $X$.*

# 3 Convergencia en hiperespacios

En esta breve sección presentamos resultados relativos a la convergencia de sucesiones de subconjuntos cerrados de un continuo, y algunas relaciones con la convergencia de sucesiones de elementos de ellos.

**Definición 3.1.** Sean $X$ un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $2^X$. El **límite inferior** y el **límite superior** de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que denotamos, respectivamente, como $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$, están dados de la siguiente manera:

$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{ para cada conjunto abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U, \\ U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo número natural } n \text{ excepto un número finito}\}$$

$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{ para cada conjunto abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U, \\ U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para un cantidad infinita de números naturales } n\}$$

Cuando $\liminf A_n = A = \limsup A_n$, donde $A \subset X$, entonces el límite de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $A$ y se escribe como $\lim A_n = A$. Nótese que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

El siguiente lema nos da una definición equivalente para el límite superior y el límite inferior en términos de sucesiones de elementos en $X$.

**Lema 3.2.** [1, Lema 6.6] *Sea $X$ un continuo. Si $\{A_n\}$ es una sucesión de subconjuntos de $X$, entonces se cumple lo siguiente:*

$$\liminf A_n = \{x \in X \colon \text{ existe una sucesión } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ en } X \text{ que converge a } x \text{ tal que } x_n \in A_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\ \} \text{ y}$$

$$\limsup A_n = \{x \in X \colon \text{ existe una sucesión } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ en } X, \text{ con } x_n \in A_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \text{ tal que alguna subsucesión de } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge a } x\ \}.$$

**Proposición 3.3.** [8, Proposición 1.120] *Sea $X$ un continuo, $A \subset X$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $2^X$. Si $A_n$ converge a $A$ en $2^X$, entonces $p \in A$ si y solo si, existe $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ tal que $p_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim p_n = p$.*

# 4 Arcos libres, arcos libres maximales y circunferencias libres.

Demostramos que ningún vertice de cualquier triodo simple, intersecta al interior de algún arco libre, véase Lema 4.5, que en los continuos localmente conexos los arcos libres que no están contenido en alguna circunferencia libre no intersectan el interior de esta, véase Lema 4.9. Además, demostramos un resultado sobre convergencia de arcos libres y circunferencias libres distintos por pares en el hiperespacio $C(X)$, véase Lema 4.12, y por último, que los arcos libres siempre están contenidos en un arco libre maximal o una circunferencia libre, véase Lema 4.14.

**Definición 4.1.** Un **arco libre** en $X$ es un arco $\alpha$ con puntos extremos $a$ y $b$ tal que $\alpha - \{a, b\}$ es abierto en $X$.

**Definición 4.2.** Un **arco libre maximal** $J$ en $X$ es un arco libre en $X$, el cual es maximal con respecto a la inclusión, es decir, para cada arco libre $K$ en $X$ tal que $J \subset K$, se cumple que $J = K$.

**Definición 4.3.** Una **circunferencia libre** $S$ en $X$, es una curva cerrada simple en $X$ para la cual existe $p \in S$ tal que $S - \{p\}$ es abierto en $X$.

Dado un arco $J$ en un continuo $X$ y $x, y \in J$. Denotamos el subarco de $J$ que va de $x$ a $y$ como $[x, y]_J$, si $x \neq y$, y $[x, y]_J = \{x\}$, si $x = y$. También, denotamos $(x, y]_J = [x, y]_J - \{x\}$ y $(x, y)_J = [x, y]_J - \{x, y\}$.

**Definición 4.4.** Un triodo simple es un continuo $X$ que es la unión de tres arcos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, tal que existe $p \in X$ con la propiedad de que $\alpha_i \cap \alpha_j = \{p\}$, cuando $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ y $p$ es un punto extremo de cada uno de los arcos $\alpha_i$.

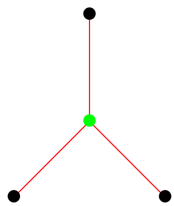


Figura 1: Triodo simple.

**Lema 4.5.** *Si $X$ es un continuo y $J$ es un arco libre de $X$, entonces ningún punto de* $\mathrm{int}_X(J)$ *puede ser el vértice de un triodo simple en $X$.*

*Demostración.* Supongamos que $x \in \mathrm{int}_X(J)$ es el vértice de un triodo simple $T$ en $X$, por el Teorema 2.4, $\mathrm{ord}(x, J) = \mathrm{ord}(x, X)$. Como $J$ es un arco, por la Proposición 2.5, $\mathrm{ord}(x, J) \leq 2$, así, $\mathrm{ord}(x, X) \leq 2$. Pero $\mathrm{ord}(x, X) \geq 3$, como esto es una contradicción, se debe de cumplir que ningún punto de $\mathrm{int}_X(J)$ puede ser el vértice de un triodo simple en $X$. $\square$

La siguiente definición solo tiene una aparición incidental, pero es importante para la demostración del Lema 4.8, como se verá a continuación.

**Definición 4.6.** Sea $X$ una curva cerrada simple. Si $K$ y $L$ son arcos contenidos en $X$ tales que $K \cup L = X$ y $E(X) = K \cap L = E(L)$, entonces se dice que $K$ y $L$ forman una **descomposición simple** de $X$. Si $x, y \in X$ son los puntos extremos en común de $K$ y $L$, se dice que $x$ y $y$ son los **puntos base** de la descomposición simple, o bien, que la descomposición simple está **basada** en $x$ y en $y$.

**Proposición 4.7.** [9, Proposición 2.59] *Si $X$ es una curva cerrada simple, entonces cualesquiera dos puntos distintos de $X$ son puntos base de una descomposición simple de $X$.*

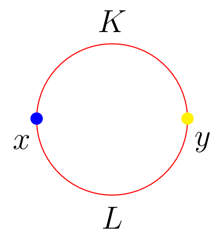



Figura 2: Puntos base de una descomposición simple.

**Lema 4.8.** *Si $X$ es un arco o una curva cerrada simple, entonces $\mathfrak{A}_S(X) = \{X\}$.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es un arco, entonces $X$ es un arco libre en $X$ y por lo tanto, es el único arco libre maximal en $X$. Además, como $X$ no contiene curvas cerradas simples, se sigue que $\mathfrak{A}_S(X) = \{X\}$. En otro caso, si $X$ es una curva cerrada simple, $\mathfrak{A}(X) = \emptyset$. Para mostrar esto, supongamos lo contrario, es decir, existe $J \in \mathfrak{A}(X)$. Sean $x \in X - J$ y $p$ y $q$ los puntos extremos de $J$ en $X$. Notemos que $x \notin \{p, q\}$, así, por el Lema 4.7, $x$ y $q$ son puntos base de una descomposición simple de $X$, por lo que, existen arcos $K$ y $L$ tales que $K \cup L = X$ y $E(K) = K \cap L = \{x, q\} = E(L)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $K$ es el arco que contiene a $J$. Notemos que $K \neq J$. Además, $K - E(K) = X - L$, que es abierto en $X$, es decir, $K$ es un arco libre de $X$ que contiene a $J$. Como esto es una contradicción, se tiene que $\mathfrak{A}(X) = \emptyset$. Luego, como la única circunferencia libre en $X$ es la misma $X$, se sigue que $\mathfrak{A}_s(X) = \{X\}$. □

Con ayuda del Lema 4.5 y el Lema 4.8 obtenemos el siguiente resultado, el cual nos será de utilidad en el Lema 4.14.

**Lema 4.9.** *Sean $X$ un continuo localmente conexo, $J$ un arco libre de $X$ y $K$ es una circunferencia libre de $X$. Si $J \not\subset K$, entonces $J \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$.*

*Demostración.* La demostración se hace por contrarrecíproca. Supongamos que $J \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$. Si $X$ es un arco o una curva cerrada simple, por el Lema 4.8, $K = X$ y el resultado es inmediato. Así, podemos suponer que $X$ no es un arco ni una curva cerrada simple. Si $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$, entonces $\operatorname{int}_X(J) \subset X - \operatorname{int}_X(K)$. luego, como $J - E(J) \subset \operatorname{int}_X(J)$, entonces $J =$

$\mathrm{cl}_X(J - E(J)) \subset \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(J)) \subset X - \mathrm{int}_X(K)$, es decir, $J \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$. Como esto es una contradicción, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$.

Sea $p \in K$ tal que $K - \{p\}$ es abierto en $X$. Notemos que $p \notin \mathrm{int}_X(K)$, es decir, $\mathrm{int}_X(K) = K - \{p\}$. Supongamos que $p \in \mathrm{int}_X(J)$ y $J \not\subset K$, es decir, existe $q \in J - K$. Sea $L = [p, q]_J$, como $L - \{p\}$ es conexo y $X - K$, $K - \{p\}$ son subconjuntos ajenos y abiertos de $X$, entonces $L - \{p\} \subset X - K$. Sean $A$ y $B$ arcos contenidos en $K$ tales que $p \in E(A) \cap E(B)$ y $A \cap B = \{p\}$. Notemos que $A \cup B \cup L$ es un triodo simple de $X$ con vértice $p$. Por el Lema 4.5, esto es una contradicción. Por lo tanto, $p \notin \mathrm{int}_X(J)$ o $J \subset K$. Si $p \notin \mathrm{int}_X(J)$, entonces $\mathrm{int}_X(J) \subset X - \{p\}$. Como $\mathrm{int}_X(J) \cap (K - \{p\}) = \mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$, y $\mathrm{int}_X(J)$ es conexo, entonces $\mathrm{int}_X(J) \subset K - \{p\}$. Así, $J = \mathrm{cl}_X(J - E(J)) \subset \mathrm{cl}_X(K - \{p\}) = K$. De cualquier modo $J \subset K$, concluyendo lo requerido. $\square$

**Observación 4.10.** Si $X$ es un continuo distinto de un arco y de una curva cerrada simple y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, las siguientes afirmaciones son ciertas.

(a) Si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $\mathrm{int}_X(J) = J - \{q_J\}$ y $\mathrm{Bd}_X(J) = \{q_J\}$, donde $p_J$ y $q_J$ son los puntos extremos de $J$, con $p_J \in \mathrm{int}_X(J)$.

(b) Si $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, es decir, $J$ es un arco libre maximal en $X$ que no tiene puntos extremos en su interior o $J$ es una circunferencia libre en $X$, entonces $\mathrm{int}_X(J) = J - \{p_J, q_J\}$ y $\mathrm{Bd}_X(J) = \{p_J, q_J\}$, si $J$ es un arco libre maximal en $X$ o $\mathrm{int}_X(J) = J - \{q_J\}$ y $\mathrm{Bd}_X(J) = \{q_J\}$, para algún $q_J$, si $J$ es una circunferencia libre en $X$.

El siguiente resultado nos será de ayuda en la demostración del Lema 4.12.

**Lema 4.11.** *Sean $X$ un continuo localmente conexo y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Si $\mathrm{int}_X(J) \cap K \neq \emptyset$, entonces $J = K$.*

**Lema 4.12.** *Sean $X$ un continuo localmente conexo, $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $\mathfrak{A}_S(X)$ distintos por pares y $x_m \in J_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Si $\lim x_m = x$ para algún $x \in X$, entonces $\lim J_m = \{x\}$ (en $C(X)$).*

*Demostración.* Notemos primero que por el Lema 4.8, $X$ no es un arco ni una curva cerrada simple. Ahora, dado $m \in \mathbb{N}$ y $x_m \in J_m$, existe una sucesión de elementos de $\mathrm{int}_X(J_m)$ que convergen a $x_m$, entonces $x_m \in \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(J_m))$. Así, como para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(J_m))$, podemos suponer que

$x_m \in \text{int}_X(J_m)$ Luego, por la Observación 4.10, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\text{Bd}_X(J_m)$ es un subconjunto no vacío de $X$ con a lo más dos elementos. Por lo que podemos poner $\text{Bd}_X(J_m) = \{p_m, q_m\}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Ahora supongamos que $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ no converge a $\{x\}$ en $C(X)$. Como $X$ es un espacio métrico compacto, entonces $C(X)$ es compacto, así, existe una subsucesión de $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $A \in C(X)$, con $A \neq \{x\}$. Podemos asumir que $\lim J_m = A$, $\lim p_m = p$ y $\lim q_m = q$, para algunos $p, q \in X$. Además, por hipótesis, $\lim x_m = x$ para algún $x \in X$. Entonces, por la Proposición 3.3, $p, q, x \in A$. Como en particular, $A \neq \{x\}$ es un conjunto conexo no degenerado, por la Proposición 2.7, $A$ es un conjunto infinito, así podemos elegir $y \in A - \{p, q\}$. Entonces por el Lema 3.2, existe una sucesión $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $X$ tal que $y_m \in J_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\lim y_m = y$. Notemos que, si $y \in \text{int}_X(J_k)$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que, $y_m \in \text{int}_X(J_k)$, para cada $m \geq l$, es decir, $J_m \cap \text{int}_X(J_k) \neq \emptyset$, pero esto es una contradicción por Lema 4.11. Por lo tanto, $y \notin \text{int}_X(J_m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Ahora, como $X$ es localmente conexo y $X - \{p, q\}$ es un conjunto abierto en $X$ que contiene a $y$, existe un subconjunto abierto y conexo $U$ en $X$ tal que, $y \in U \subset \text{cl}_X(U) \subset X - \{p, q\}$. Luego, como $\lim y_m = y$ en $X$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_m \in U$ para cada $m \geq m_0$. Por el Teorema 2.1, $U$ es arco conexo, así, para cada $m \geq m_0$, podemos tomar un arco $\alpha_m$ en $U$ con puntos extremos $y$ y $y_m$. Dado $m \in \mathbb{N}$, notemos que si $\{y, y_m\} \cap \text{Bd}_X(J_m) \neq \emptyset$, entonces $\alpha_m \cap \text{Bd}_X(J_m) \neq \emptyset$. En otro caso, si $\{y, y_m\} \cap \text{Bd}_X(J_m) = \emptyset$, entonces $y_m \notin \text{Bd}_X(J_m)$, luego, $y_m \in \text{int}_X(J_m)$. Además, como $y \notin \text{int}_X(J_m)$ y $y \notin \text{Bd}_X(J_m)$, se sigue que $y \in X - (\text{int}_X(J_m) \cup \text{Bd}_X(J_m)) = X - J_m$. Por el Lema 2.9, se tiene que $\alpha_m \cap \text{Bd}_X(J_m) \neq \emptyset$. Así, como en cualquiera de los dos casos, $\alpha_m \cap \text{Bd}_X(J_m) \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$, se sigue que $U \cap \text{Bd}_X(J_m) \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo que, existe una subsucesión de $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ o $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergente a $p$ o $q$, respectivamente, cuyos elementos están contenidos en $U$, entonces $p \in \text{cl}_X(U)$ o $q \in \text{cl}_X(U)$. Como esto es una contradicción por la elección de $U$, concluimos que $\lim J_m = \{x\}$ en $C(X)$. □

**Lema 4.13.** *Sean $X$ un continuo localmente conexo y $J$ un arco libre de $X$ con un punto extremo $e$ tal que $e \in \text{int}_X(J)$. Entonces, existe $K$ un arco libre de $X$, tal que $J \subset K$, $e$ es un punto extremo de $K$, $e \in \text{int}_X(K)$ y $K$ contiene a cada arco libre de $X$ que contiene a $J$.*

*Demostración.* Podemos asumir que $X$ no es un arco. Sea $\mathcal{F} = \{L \subset X : L$ es un arco libre de $X$ tal que $J \subset L\}$. Sea $L \in \mathcal{F}$ y $p_L, q_L$ sus puntos extremos.

Notemos que $e \in L$. Por el Lema 2.11, $e \in E(L)$ y $e \in \mathrm{int}_X(L)$. Podemos suponer que $e = q_L$. Como $L$ es un arco libre de $X$, $L - \{p_L, e\}$ es abierto en $X$. Así, $L - \{p_L\} = (L - \{p_L, e\}) \cup \{e\} \subset \mathrm{int}_X(L)$. Como $X$ no es un arco y $L$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $X$, se debe de cumplir que $L - \{p_L\} = \mathrm{int}_X(L)$. Por lo tanto, $\mathrm{Bd}_X(L) = \{p_L\}$.

Observemos que si $L, M \in \mathcal{F}$, entonces $L \subset M$ o $M \subset L$. En efecto, supongamos $L \not\subset M$ y $M \not\subset L$. Entonces existen $l \in L$ y $m \in M$ tales que $l \notin M$ y $m \notin L$. Como $J \subset L \cap M$, se tiene que $l \notin J$ y $m \notin J$. Así, $M \neq J \neq L$ y $m \neq p_J \neq l$, para algún $p_J \in E(J) - \{e\}$. Por el Lema 2.11, $e \in E(L) \cap E(M)$, luego $e \neq l$ y $e \neq m$. Observemos que $[p_J, l]_L \cup [p_J, m]_M \cup [p_J, e]_J$ es un triodo simple de $X$ cuyo vértice es $p_J$. Como $p_J \notin \mathrm{Bd}_X(L)$, entonces $p_J \in \mathrm{int}_X(L)$, esto contradice el Lema 4.5, ya que $L$ es un arco libre de $X$. Por lo tanto, si $L$, $M \in \mathcal{F}$, entonces $L \subset M$ o $M \subset L$.

Sean $U = \bigcup\{L - \{p_L\} \colon L \in \mathcal{F}\}$ y $K = \mathrm{cl}_X(U)$. Veamos que $U \neq K$. Para esto, supongamos que $U = K$. Como para cada $L \in \mathcal{F}$, $L - \{p_L\}$ es un subconjunto abierto de $X$, $U$ es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de $X$, así, como $X$ es conexo, $U = X$. Notemos que $\{L - \{p_L\} \colon L \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de $X$. Luego, como $X$ es compacto, existen $L_1$, $L_2$,...,$L_r$, con $r \in \mathbb{N}$ tales que, $X = \bigcup_{i=1}^{r} (L_i - p_{L_i}) = K$. Por el párrafo anterior, podemos suponer que $L_i \subset L_j$, para cada $i \in \{1, 2, ..., r\}$ y para algún $j \in \{1, 2, ..., r\}$. Luego, como $L_j$ es un arco, $L_i - p_{L_i} \subset L_j - p_{L_j}$. De esto se sigue que $X = L_j - p_{L_j}$ y $p_{L_j} \notin X$. Como esto es una contradicción, $U \neq K$. Fijemos $q \in X - U$. Notemos que $e \notin X - U$. Por el Teorema 2.1, $X$ es arco conexo, así, existe un arco $\alpha$ que va de $q$ a $e$. Por el Lema 2.6, existe un arco $M$ en $X$ que va de $p$ a $e$, para algún $p \in M$, tal que $M \cap (X - U) = \{p\}$, entonces $M - \{p\} \subset U$.

Veamos que $K = M$. Para esto, mostremos primero que $U = M - \{p\}$. Sea $L \in \mathcal{F}$ y $z \in L - \{p_L, e\}$. Entonces $X - \{z\} = (X - [z, e]_L) \cup (z, e]_L$, luego $\{z\}$ es una separación entre $\{p\}$ y $\{e\}$. Así, $z$ separa a $p$ y $e$ en $X$. Entonces $z \in M$. De modo que, $L - \{p_L, e\} \subset M$. Notemos que $L - \{p_L\} \subset L = \mathrm{cl}_X(L - \{p_L, e\}) \subset M$, es decir, $L - \{p_L\} \subset M$. De esto se sigue que $U \subset M$ y como $p \notin U$, entonces $U \subset M - \{p\}$. Por lo tanto, $U = M - \{p\}$. Notemos que $K = \mathrm{cl}_X(U) = \mathrm{cl}_X(M - \{p\}) = M$. Por lo tanto, $K$ es un arco con puntos extremos $p$ y $e$. Además, $K - \{p\} = M - \{p\} = U$, es un subconjunto abierto de $X$, entonces $(K - \{p\}) - \{e\} = K - \{p, e\}$ también es un subconjunto abierto de $X$. Así, $K$ es un arco libre de $X$. Dado $L \in \mathcal{F}$, como $K$ es un subconjunto cerrado de $X$ y $L - \{p_L\} \subset U \subset K$, entonces $L = \mathrm{cl}_X(L - \{p_L\}) \subset K$. Esto completa la prueba del lema. □

.

**Lema 4.14.** *Sean $X$ un continuo localmente conexo y $J$ un arco libre de $X$, entonces existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J \subset K$.*

*Demostración.* Notemos que por el Lema 4.8, podemos suponer que $X$ no es una curva cerrada simple y $J$ no está contenido en una circunferencia libre de $X$. Sean $x, y \in E(J)$ y fijemos $p, q \in (x, y)_J$ tales que $[x, p]_J \cap [q, y]_J = \emptyset$. Como $J$ es un arco libre de $X$ y $[p, q]_J \subset J$, entonces, $(p, q)_J$ es un abierto de $X$. Así, $Y = X - (p, q)_J$ es un cerrado de $X$. Sean $X_p$ y $X_q$ las componentes de $Y$ que contienen como elemento a $p$ y a $q$, respectivamente. Notemos que $\mathrm{Bd}_X(Y) = \mathrm{Bd}_X((p, q)_J) = \mathrm{cl}_X((p, q)_J) - \mathrm{int}_X((p, q)_J) = [p, q]_J - (p, q)_J = \{p, q\}$. Como $[x, p]_J \cap (p, q)_J = \emptyset$, $[x, p]_J \subset Y$. Así, ya que $[x, p]_J$ es un conjunto conexo que contiene a $p$, entonces $[x, p]_J \subset X_p$. Análogamente, $[q, y]_J \subset X_q$. En particular, $X_p$ y $X_q$ son subcontinuos de $X$. Notemos que por el Teorema 2.8, cada componente de $Y$ intersecta a $\{p, q\}$, es decir, cada componente de $Y$ tiene como elemento a $p$ o a $q$. Esto implica, que las únicas componentes de $Y$ son $X_p$ y $X_q$. Por lo tanto, $Y = X_p \cup X_q$ y $X_p \cap X_q = \emptyset$ o $X_p = X_q = Y$. Así, como $X_p$ y $X_q$ son subconjuntos abiertos de $Y$, por el Teorema 2.2, $Y$ es localmente conexo y por ende, $X_p$ y $X_q$ son subcontinuos localmente conexos. Como $[x, p]_J \subset J$, $[x, p]_J$ es un arco libre de $X$, luego, por el Lema 2.10, $[x, p]_J$ es un arco libre de $X_p$.

Ahora, $[x, y]_J = J$ es un arco libre de $X$, entonces $(x, y)_J$ es un subconjunto abierto de $X$. Si $X_p \cap X_q = \emptyset$, $X_p = Y - X_q = (X - (p, q)_J) - X_q$, entonces $X_p \cap (p, q)_J = \emptyset$. Además, como $[q, y]_J \subset X_q$, entonces $X_p \cap [q, y)_J = \emptyset$. De esto y como $[x, p]_J \subset X_p$, se sigue que $X_p \cap (x, y)_J = X_p \cap ((x, p]_J \cup (p, q)_J \cup [q, y)_J) = (x, p]_J \subset [x, p]_J$, es un subconjunto abierto de $X_p$, así $p \in \mathrm{int}_{X_p}([x, p]_J)$. En otro caso, si $X_p = X_q = Y = X - (p, q)_J$, entonces $X_p \cap (x, y)_J = (x, p]_J \cup [q, y)_J$ es un subconjunto abierto de $X_p$. Notemos que en particular, $[q.y]_J \subset X_p$, es un subconjunto cerrado de $X_p$. Así, $((x, p]_J \cup [q, y)) - [q, y]_J = (x, p]_J \subset [x, p]_J$ es un subconjunto abierto de $X_p$. De esto se sique que $p \in \mathrm{int}_{X_p}([x, p]_J)$.

De cualquier manera, $[x, p]_J$ es un arco libre de $X_p$ y $p \in \mathrm{int}_{X_p}([x, p]_J)$. Por el Lema 2.11, existe un arco libre $K_p$ de $X_p$ tal que, $[x, p]_J \subset K_p$, $p$ es un punto extremo de $K_p$, $p \in \operatorname{int}_{X_p}(K_p)$ y $K_p$ contiene cada arco libre de $X_p$ que contiene a $[x,p]_J$. Análogamente, se puede ver que $[q,y]_J$ es un arco libre de $X_q$, $q \in \operatorname{int}_{X_q}([q,y]_J)$ y existe un arco libre $K_q$ de $X_q$ tal que $[q,y]_J \subset K_q$, $q$ es un punto extremo de $K_q$, $q \in \operatorname{int}_{X_q}(K_q)$ y $K_q$ contiene cada arco libre de $X_q$ que contiene a $[q,y]_J$. Sean $p_0$ y $q_0$ los otros puntos extremos de $K_p$ y $K_q$, respectivamente.

Si $p \in (q,q_0)_{K_q}$, entonces $p \in X_p \cap X_q$, $X_p = X_q$ y $p$ no es un punto extremo del arco $[q,q_0]_{K_q} \subset X_p$. Así, por la proposición 2.5 y el Teorema 2.4, $2 \leq \operatorname{ord}\left(p,[q,q_0]_{K_q}\right) \leq \operatorname{ord}(p,X_p) = \operatorname{ord}(p,[x,p]_J) = 1$. Como esto es una contradicción, $p \notin (q,q_0)_{K_q}$ y $(q,q_0)_{K_q} \subset X_q - \{p,q\}$. Ahora notemos, si $X_p \cap X_q = \emptyset$, $X_q = Y - X_p$, entonces $X_q - \{q\} = X - ((p,q]_J \cup X_p) = X - ([p,q]_J \cup X_p)$, el cual es un subconjunto abierto de $X$. Luego, $X_q - \{p,q\}$ es un subconjunto abierto de $X$. En otro caso, si $X_p = X_q$, entonces $Y = X - (p,q)_J = X_q$, por lo que $X_q - \{p,q\} = X - [p,q]_J$ es un subconjunto abierto de $X$. De cualquier modo, $X_q - \{p,q\}$ es un subconjunto abierto de $X$. Así, como $(q,q_0)_{K_q}$ es un subconjunto abierto de $X_q$ y $(q,q_0)_{K_q}$ está contenido en el subconjunto abierto $X_q - \{p,q\}$ de $X$, entonces $(q,q_0)_{K_q}$ es abierto en $X_q - \{p,q\}$ y por ende, en $X$. Por lo tanto, $K_q$ es un arco libre de $X$. Similarmente, se puede ver que $K_p$ es un arco libre de $X$. Notemos que $\emptyset \neq (q,y)_J \subset K_q \cap [p,y]_J$, entonces $\emptyset \neq (q,y)_J \subset \operatorname{int}_X(K_q) \cap \operatorname{int}_X([p,y]_J)$, así por el Lema 2.12, $K_q \cup [p,y]_J$ es un arco libre o una circunferencia libre de $X$.

Supongamos que $K_q \cup [p,y]_J$ es una circunferencia libre de $X$. Notemos que $\emptyset \neq (q,y)_J \subset J \cap \operatorname{int}_X(K_q \cup [p,y]_J)$, entonces por el Lema 4.9, $J \subset K_q \cup [p,y]_J$. Como esto es una contradicción, $K_q \cup [p,y]_J$ es un arco libre de $X$. De forma similar, $K_p \cup [x,q]_J$ es un arco libre de $X$.

Notemos que el conjunto abierto $(p,q)_J$ de $X$ está contenido en $K_p \cup [x,q]_J$ y $K_q \cup [p,y]_J$. Por el Lema 2.12 y como $J \subset K_p \cup K_q \cup [x,q]_J \cup [p,y]_J = K_p \cup K_q \cup J$, se sigue que $M = K_p \cup K_q \cup J$ es un arco libre de $X$.

Por otro lado, notemos que $M - \{p_0,q_0\} = (p_0,p)_{K_p} \cup (x,y)_J \cup (q,q_0)_{K_q}$ es un subconjunto abierto de $M$. Luego, por el Teorema 2.4, para cada $z \in M - \{p_0,q_0\}$, $\operatorname{ord}(z, M - \{p_0,q_0\}) = \operatorname{ord}(z,M)$.

Si $\operatorname{ord}(z, M - \{p_0,q_0\}) = 1$, como $z \in (p_0,p)_{K_p} \cup (x,y)_J \cup (q,q_0)_{K_q}$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z \in (p_0,p)_{K_p} \subset M$. Por el Teorema 2.4, $\operatorname{ord}\left(z,(p_0,p)_{K_p}\right) = \operatorname{ord}(z,M) = 1$. Notemos que $\operatorname{ord}\left(z,(p_0,p)_{K_p}\right) = \operatorname{ord}\left(z,[p_0,p]_{K_p}\right)$, que es una contradicción, ya que $z$ no es un punto extremo de $[p_0, p]_{K_p}$. Por lo tanto, $p_0$ y $q_0$ son los puntos extremos de $M$.

Supongamos que $L$ es un arco libre de $X$ tal que $K_p \cup J \cup K_q \subset L$. Sean $u$ y $v$ los puntos extremos de $L$. Como $q \in [p,q]_J = [p,q]_L \subset [p,v]_L$, $(p,q)_J \subset (p,v)_L$. Luego, como $[u,p]_L \cap (p,v)_L = \emptyset$, $[u,p]_L \cap (p,q)_J = \emptyset$, es decir, $[u,p]_L \subset X - (p,q)_J$. Ya que $p \in [u,p]_L$, entonces $[u,p]_L \subset X_p$. Además, $[u,p]_L \subset L \subset X$ y $[u,p]_L \subset X_p \subset X$, entonces $[u,p]_L$ es un arco libre de $X$ y de $X_p$. Notemos que $[x,p]_J = [x,p]_L$ es un conjunto conexo contenido en $L - (p,q)_J = L - (p,q)_L = [u,p]_L \cup [q,v]_L$, con $[u,p]_L \cap [q,v]_L = \emptyset$. Como $p \in [x,p]_J \cap [u,p]_L \neq \emptyset$, entonces $[x,p]_J \subset [u,p]_L$. Por la maximilidad de $K_p$, $[u,p]_L \subset K_p$. De manera similar, como $p \in [u,q]_L$, $[q,v]_L \subset K_q$. Por lo tanto, $L = [u,p]_L \cup [p,q]_J \cup [q,v]_L \subset K_p \cup J \cup K_q$. Esto muestra que $K_p \cup J \cup K_q$ es maximal y concluye la prueba del lema. $\square$

**Teorema 4.15.** *Si $X$ es un continuo localmente conexo y $A \in C_n(X)$, entonces $\dim(A, C_n(X)) \geq 2n$ y, si $\dim(A, C_n(X)) = 2n$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y elementos $J_1, ..., J_k \in \mathfrak{A}_S(X)$, tales que $A \in \langle \mathrm{int}_X(J_1), ..., \mathrm{int}_X(J_k) \rangle_{C_n(X)}$, donde cada componente de $A$ está contenida en algún $\mathrm{int}_X(J_i)$.*

*Demostración.* Supongamos que $\dim(A, C_n(X))$ es finita ya que en caso contrario, el resultado es inmediato. Si $X$ es un arco o una curva cerrada simple, entonces $R(X) = \emptyset$ y por [5, Teorema 2.4], $\dim(A, C_n(X)) = 2n$. Por el Lema 4.8, $\mathfrak{A}_S(X) = \{X\}$, así que, $A \in \langle \mathrm{int}_X(X) \rangle_{C_n(X)}$ y cada componente de $A$ está contenida en $\mathrm{int}_X(X)$. Así, podemos suponer que $\dim(A, C_n(X))$ es finita y $X$ no es un arco ni una curva cerrada simple. Por [2, Teorema 4 (b)], existe una gráfica finita $D$ contenida en $X$ tal que $A \subset \mathrm{int}_X(D)$. Luego $A \in \langle \mathrm{int}_X(D) \rangle_{C_n(X)} \subset C_n(D)$, es decir, $C_n(D)$ es una vecindad de $A$ en $C_n(X)$. De modo que, $\dim(A, C_n(X)) = \dim(A, C_n(D))$. Por otro lado, por [5, Teorema 2.4],

$$\dim(A, C_n(D)) = 2n + \sum_{x \in A \cap R(D)} (\mathrm{ord}(x, D) - 2).$$

Notemos que si $A \cap R(D) = \emptyset$, entonces $\dim(A, C_n(D)) = 2n$. Si $A \cap R(D) \neq \emptyset$, como para cada $x \in R(D)$, $\mathrm{ord}(x, D) \geq 3$, entonces $\dim(A, C_n(X)) > 2n$. Así, $\dim(A, C_n(X)) \geq 2n$, para cada $A \in C_n(X)$.

Ahora, supongamos que $\dim(A, C_n(X)) = 2n$, entonces se debe de cumplir que $\sum_{x \in A \cap R(D)} (\mathrm{ord}(x, D) - 2) = 0$ y $A \cap R(D) = \emptyset$. Sean $A_1, A_2, ..., A_k$ las componentes de $A$, con $k \leq n$. Sea $i \in \{1, ..., k\}$. Demostremos que existe un arco libre $L_i$ de $D$ tal que $A_i \subset \mathrm{int}_D(L_i)$. Como $D$ es una gráfica finita, existe $\mathcal{D} = \{C_1, ..., C_r\}$ una colección finita de arcos tales que $D = \bigcup \mathcal{D}$ y dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos de sus puntos extremos.

Supongamos que existe un punto $x \in A_i \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3$, donde $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{D}$, entonces $x$ es un punto extremo de estos tres arcos. Para cada $l \in \{1, 2, 3\}$, tomemos $B_l$ un subarco de $C_l$ tal que $x \in B_l$, pero $B_l$ no posee al otro punto extremo de $C_l$. Entonces $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ es un triodo simple cuyo vértice es $x$. Por el Teorema 2.4, $\operatorname{ord}(x, D) \geq \operatorname{ord}(x, B_1 \cup B_2 \cup B_3) = 3$, es decir, $x \in A_i \cap R(D)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $A_i$ no tiene puntos de intersección de tres arcos distintos de $\mathcal{D}$.

Sea $D_i = \{C \in \mathcal{D} \colon C \cap A_i \neq \emptyset\}$, para cada $i \in \{1, , \ldots, k\}$. Observemos que $A_i \subset \bigcup D_i$. Como cada $D_i$ tiene un número finito de elementos y cada uno de ellos es un subconjunto compacto de $D$, entonces $\bigcup D_i$ es un subconjunto compacto de $D$. Además, como cada $A_i$ es conexo y cada par de elementos de $D_i$ son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos de sus puntos extremos, se tiene que $\bigcup D_i$ es un subconjunto conexo de $D$. Así, $\bigcup D_i$ es un continuo para cada $i \in \{1 \ldots, k\}$. Sea $i \in \{1, \ldots, k\}$, veamos que $\bigcup D_i$ es un arco o una curva cerrada simple de $D$. La demostración la haremos por inducción sobre el número finito de elementos de $D_i$. Si $\mid D_i \mid = 1$, claramente $\bigcup D_i$ es un arco. Si $\mid D_i \mid = 2$ y $C_1, C_2 \in D_i$, como $\bigcup D_i$ es conexo, entonces si $\mid C_1 \cap C_2 \mid = 1$, $\bigcup D_i$ es un arco, en otro caso, $\mid C_1 \cap C_2 \mid = 2$ y $\bigcup D_i$ es una curva cerrada simple. Ahora, supongamos que la afirmación es cierta cuando $\mid D_i \mid = k - 1$ y probemos que también es cierto cuando $\mid D_i \mid = k$. Si $\mid D_i \mid = k$, sea $C_k$ un elemento de $D_i$ que no hace disconexo a $\bigcup D_i$. Como $\mid D_i - \{C_k\} \mid = k - 1$, por hipótesis de inducción, $F = \bigcup (D_i - \{C_k\})$ es un arco o una curva cerrada simple. Si $F$ es una curva cerrada simple, entonces $D_i - \{C_k\}$ tiene al menos dos elementos de $\mathcal{D}$. Como $X$ no es una curva cerrada simple, $\bigcup D_i$ es conexo y $A_i$ intersecta a cada elemento de $D_i - \{C_k\}$ y también a $C_k$, entonces tiene que existir un punto $y \in A_i \cap C_k \cap C_l \cap C_m$, con $C_l, C_m \in D_i - \{C_k\}$, lo que es una contradicción, ya que $A_i$ no tiene puntos de intersección de tres arcos distintos de $\mathcal{D}$. Así, $F$ es un arco. Luego, como $\bigcup D_i = (\bigcup (D_i - \{C_k\})) \cup C_k$ es conexo, entonces $(\bigcup (D_i - \{C_k\})) \cap C_k \neq \emptyset$, así, si $\mid \bigcup (D_i - \{C_k\}) \cap C_k \mid = 1$, entonces $\bigcup D_i = (\bigcup (D_i - \{C_k\})) \cup C_k$ es un arco, en otro caso $\mid \bigcup (D_i - \{C_k\}) \cap C_k \mid = 2$ y $\bigcup D_i$ es una curva cerrada simple. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\bigcup D_i$ es un arco o una curva cerrada simple de $D$.

***Caso 1.*** $\bigcup D_i$ es un arco. Sea $B_i = \{C \in \mathcal{D} \colon C \cap A_i = \emptyset\}$. Observemos que $A_i \subset \bigcup D_i = (\bigcup \mathcal{D}) - \bigcup B_i$. Como $\bigcup B_i$ es un cerrado de $D$, entonces $\bigcup D_i$ es un abierto de $D$. Esto implica que $\bigcup D_i = D$, es decir, $D$ es un arco. Así, $D - E(D)$ es un abierto de $D$ y por ende, $D$ es un arco libre de $D$. Tomando $L_i = D$, obtenemos lo requerido.

***Caso 2.*** $\bigcup D_i$ es una curva cerrada simple. Observemos primero que $A_i \neq \bigcup D_i$, ya que si $A_i = \bigcup D_i$, entonces $A_i$ es una curva cerrada simple. Como $X$ no es un curva cerrada simple, entonces existe $x \in A_i \cap X$, tal que $\operatorname{ord}(x, X) \geq 3$. Como $x \in A_i \subset A \subset \operatorname{int}_X(D)$, entonces $D$ es una vecindad de $x$ en $X$. Por el Teorema 2.4, $\operatorname{ord}(x, D) = \operatorname{ord}(x, X) \geq 3$, es decir, $x \in A_i \cap R(D)$, lo que es una contradicción. Así, podemos asumir que $A_i$ es de un solo punto o $A_i$ es un arco. Si $A_i$ es de un solo punto o $A_i$ es un arco, entonces existe $p \in \bigcup D_i$ tal que $p \notin A_i$. Así, $A_i \subset (\bigcup D_i) - \{p\}$. Por la Proposición 4.7, existe una descomposición simple de $\bigcup D_i$ tal que $\bigcup D_i = K \cup L$ y $E(K) = K \cap L = E(L)$. Además, por la Proposición 2.7, podemos elegirla tal que, $A_i \subset K - E(K) \subset K \subset (\bigcup D_i) - \{p\}$. Observemos que $(\bigcup D_i) - \{p\} = (D - \bigcup(\mathcal{D} - D_i)) - \{p\}$ es un subconjunto abierto de $D$. Luego, como $K - E(K) = (\bigcup D_i) - L$, se tiene que $K - E(K)$ es un abierto de $\bigcup D_i$ y por ende, de $(\bigcup D_i) - \{p\}$. Así, $K - E(K)$ es un abierto de $D$. Tomando $L_i = K$, obtenemos que $A_i \subset \operatorname{int}_D(L_i)$.

En cualquier caso, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, existe un arco libre $L_i$ de $D$ tal que, $A_i \subset \operatorname{int}_D(L_i)$. Como $A_i \subset \operatorname{int}_X(D)$, se tiene que $A_i \subset \operatorname{int}_X(D) \cap \operatorname{int}_D(L_i)$. Sea $K_i$ una componente de $\operatorname{int}_X(D) \cap \operatorname{int}_D(L_i)$ tal que $A_i \subset K_i$. Como $\operatorname{int}_X(D) \cap \operatorname{int}_D(L_i)$ es un abierto de $D$ y está contenido en $\operatorname{int}_X(D)$, entonces $\operatorname{int}_X(D) \cap \operatorname{int}_D(L_i)$ es un abierto de $X$. Luego, como $X$ es localmente conexo, por el Teorema 2.2, $K_i$ es un abierto de $X$. Así, $A_i \subset K_i \subset \operatorname{int}_X(L_i) \subset \operatorname{int}_X(D)$, es decir, $A_i \subset \operatorname{int}_X(L_i)$. Por el Lema 2.3, existe un subcontinuo $F_i$ de $X$ tal que $A_i \subset \operatorname{int}_X(F_i) \subset F_i \subset \operatorname{int}_X(L_i) \subset D$. Observemos que $F_i$ es un subarco de $L_i$ y por ende, un arco libre de $D$, ya que $L_i$ lo es. Como $F_i - E(F_i)$ es un abierto de $D$ y está contenido en $\operatorname{int}_X(L_i)$, entonces $F_i - E(F_i)$ es un abierto de $X$. Esto implica que $F_i$ es un arco libre de $X$. Por el Lema 4.14, existe $J_i \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que, $F_i \subset J_i$. Así, $A_i \subset \operatorname{int}_X(F_i) \subset \operatorname{int}_X(J_i)$. Como esto lo podemos hacer para cualquier componente de $A$, podemos concluir que $A \in \langle \operatorname{int}_X(J_1), ..., \operatorname{int}_X(J_k) \rangle_{C_n(X)}$ y cada componente de $A$ está contenida en algún $\operatorname{int}_X(J_i)$. $\square$

# 5 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por haber dedicado su tiempo a la revisión de este trabajo.

# Bibliografía

[1] J. G. Ahuatzi Reyes, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero, *Dimensión finita en el n-ésimo hiperespacio de continuos localmente conexos*, Capítulo 6, *Matemáticas y sus aplicaciones 5*, Fomento editorial BUAP, primera edición, 2015.

[2] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes y V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, 43, (2013), 1583-16323.

[3] W. Hurewiz and H. Wallman, *Dimension Theory*, volume 4 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1941.

[4] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Polish Scientific Publishers and Academic Press, Inc. New York, 1968.

[5] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of the n-fold hyperspaces of graphs*, Houston Journal of Mathematics, 32 (2006), 783-799.

[6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

[7] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[8] J. E. Osorio Pérez, *Sobre los hiperespacios* $C(p, X)$ (Tesis de Licenciatura FCFM), Benemértita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2016.

[9] I. Serapio Ramos, *Funciones punto medio en continuos* (Tesis de Maestría FCFM), Benemértita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2016.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
leonardo.ramireza@alumno.buap.mx

**Matemáticas y sus aplicaciones 19, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-861-4**

# Capítulo 3

## La bicompletación de los espacios cuasiuniformes

**Netzahualcoyotl Carlos Castañeda Roldán, Ricardo Vázquez Huerta, José Margarito Hernández Morales**
**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**

**Resumen**

Los espacios cuasiuniformes son una generalización de los espacios uniformes y constituyen una abstracción de los espacios cuasiseudométricos. En los espacios uniformes (que incluyen a los métricos), hay una completación canónica que tiene diversas aplicaciones con respecto a la convergencia de sucesiones, redes y filtros. Esta completación canónica incluye a la construcción de los números reales a partir de los racionales mediante sucesiones de Cauchy. Al pasar de los espacios uniformes a los cuasiuniformes, se pierde la simetría de las relaciones de cercanía entre los puntos del espacio. La falta de simetría ocasiona una gama de dificultades teóricas relativas a las cuestiones de convergencia y completitud. En este capítulo nos enfocamos en una construcción conocida como la bicompletación que, en cierto sentido, es muy similar a la completación canónica de los espacios uniformes. Esperamos que este trabajo ayude a promover el interés por esta rama de la topología.

## 1 Introducción

La teoría de los espacios uniformes se empezó a desarrollar antes que la de los espacios cuasiuniformes. De acuerdo a Fletcher y Lindgren [5]: «Nachbin introdujo el concepto de espacio cuasiuniforme en conexión con el estudio de los espacios uniformes ordenados [13]». Por otra parte, Császár [4] comenta que Nachbin, en su trabajo [12] de 1948, llamó «semiuniformidades» a las estructuras conocidas actualmente como cuasiuniformidades, y que Tamari [16] les llamó «estructuras cuasiordoformes» en 1954. También menciona, con respecto a los espacios uniformes, que los introdujo André Weil [17] en 1937. Como se mencionó en el resumen, los espacios cuasiuniformes son una generalización de los espacios uniformes. Estos, a su vez, son una abstracción de los espacios métricos en un sentido similar al caso de los espacios topológicos, que también son una abstracción de los espacios métricos. Los espacios uniformes se ubican en un punto intermedio entre los espacios métricos y los espacios topológicos, ya que, por una parte, a todo espacio métrico se le asocian, de manera canónica, una topología y una estructura uniforme. Por otra parte, a todo espacio uniforme se le asocia canónicamente una topología conocida como la «topología uniforme». En el caso particular de un espacio uniforme que esté generado por una métrica, dicha topología uniforme coincide con la topología que se le asocia directamente al espacio métrico que genera al espacio uniforme. Sin embargo, existen espacios uniformes no metrizables, es decir, que no están generados por ninguna métrica. También existen espacios topológicos no uniformizables, lo que quiere decir que su topología no está generada por ninguna estructura uniforme. En este sentido el concepto de espacio topológico es estrictamente más general que el de espacio uniforme y este, por su parte, es más general que el de espacio métrico.

En este trabajo seguimos, a grandes rasgos, la exposición de la bicompletación de los espacios cuasiuniformes dada en el libro de Fletcher y Lindgren [6]. Para conveniencia del lector, damos las definiciones de algunos conceptos topológicos, así como las definiciones de métrica y de sus principales generalizaciones. Sin embargo, en general supondremos que los lectores están familiarizados hasta cierto punto con la teoría de los espacios métricos y con la de los espacio topológicos.

Dado un conjunto $X$ no vacío, una **métrica** sobre $X$, es una función $d$ con dominio en $X \times X$ y con valores en $\mathbb{R}^+$, tal que para todo $x, y, z \in X$ se cumple:

(1) $d(x,x) = 0$.

(2) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(3) $[\ d(x,y) = 0 = d(y,x)\ ] \Longrightarrow x = y$.

(4) $d(y,x) = d(x,y)$.

Una **cuasimétrica** satisface las condiciones (1), (2) y (3).

Una **seudométrica** satisface las condiciones (1), (2) y (4).

Una **cuasiseudométrica** satisface las condiciones (1) y (2).

El par $(X, d)$ recibe el nombre de espacio métrico, cuasimétrico, seudométrico o cuasiseudométrico según sea el caso. Cobzaş [3] le llama «semimétricas» a las seudométricas y «cuasisemimétricas» a las cuasiseudométricas. En un principio, al considerar el concepto de una cuasimétrica, puede parecer extraño pensar en una «distancia» asimétrica. Desde un punto de vista intuitivo es mejor pensar en términos del tiempo, costo o trabajo físico necesarios para trasladarse de un lugar a otro. Las seudométricas son simétricas pero en esos espacios puede haber puntos distintos que no estén separados, es decir, que la «distancia» entre ellos sea cero. En el caso más general de los espacios cuasiseudométricos puede no haber ni simetría de la «distancia», ni separación entre puntos distintos.

La forma estándar en la que se le asigna una topología a un espacio métrico $(X, d)$ es a través de las bolas abiertas, donde la bola abierta con centro en el punto $x$ y de radio $\varepsilon > 0$ se define como $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. En cambio, para asignarle al mismo espacio métrico la estructura de un espacio uniforme, se utilizan las llamadas bandas diagonales, que se definen, para cada $\varepsilon > 0$, como $U_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. A diferencia de la bola abierta $B(x, \varepsilon)$, en la que tanto el centro como el radio están fijos, en la banda diagonal $U_\varepsilon$ solamente está fijo el valor de $\varepsilon$. De tal manera, aunque en las definiciones de ambos conceptos figura prominentemente la misma desigualdad $d(x, y) < \varepsilon$, la bola abierta es un subconjunto del espacio $X$, mientras que la banda diagonal es un subconjunto de $X \times X$, es decir que es una relación en $X$. Para definir el concepto abstracto de espacio topológico se axiomatizan las propiedades de las uniones arbitrarias de las bolas abiertas. Similarmente, para definir el concepto abstracto de espacio uniforme, se axiomatizan las propiedades de los superconjuntos de las bandas diagonales, como se especifica a continuación.

# 2 Espacios uniformes y cuasiuniformes

Para definir formalmente los espacios uniformes y cuasiuniformes, recordemos que un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto $X$ es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de $X$, que es cerrada bajo intersecciones finitas, así como bajo la formación de superconjuntos. Un ejemplo clásico de filtro está dado por la familia de vecindades de un punto en un espacio topológico. Otro ejemplo es el llamado filtro de Fréchet, que está formado por los subconjuntos de complemento finito en un conjunto infinito. Denotamos con el símbolo $\triangle(X)$ a la relación de identidad en $X$, a la que también se le llama «la diagonal» sobre $X$. Si $U$ y $V$ son relaciones en $X$, su composición $V \circ U$ es el conjunto de parejas $(x, z)$ para las que existe un elemento $y \in X$ con $(x, y) \in U$ y $(y, z) \in V$. La notación $V \circ U$ es consistente con la que se utiliza normalmente para la composición de funciones. La relación inversa de $U$ se denota como $U^{-1}$ y consiste de aquellas parejas $(x, y)$ tales que $(y, x) \in U$.

**Definición 2.1.** Una **uniformidad** $\Psi$ en un conjunto $X$ es un filtro sobre $X \times X$, que además cumple con las tres propiedades siguientes:

(1) $\forall U \in \Psi : \triangle(X) \subseteq U$.

(2) $\forall U \in \Psi : \exists V \in \Psi : V \circ V \subseteq U$.

(3) $\forall U \in \Psi : U^{-1} \in \Psi$.

Cuando $\Psi$ cumple con los puntos (1) y (2), aunque no necesariamente con (3), se le llama una **cuasiuniformidad**. Según el caso, al par $(X, \Psi)$ se le conoce como espacio uniforme o espacio cuasiuniforme. A las relaciones $U$ elementos de $\Psi$ se les llama **entornos**. Dos ejemplos simples de cuasiuniformidades son la **uniformidad discreta**, $\{U \subseteq X \times X \mid \Delta(X) \subseteq U\}$, formada por todas las relaciones reflexivas en $X$, y la **uniformidad trivial**, $\{X \times X\}$, que tiene como único entorno a la relación total en $X$. Nótese que, dado que $\triangle(X) \subseteq U$ para todo $U \in \Psi$, si $V \circ V \subseteq U$, entonces $V \subseteq U$. Como una convención de terminología, dada cualquier propiedad general $P$ que un espacio cuasiuniforme pueda tener o no tener, se considera lo mismo decir «el espacio $(X, \Psi)$ tiene la propiedad $P$», que decir «la cuasiuniformidad $\Psi$ tiene la propiedad $P$».

Se observa que los espacios cuasiuniformes son una generalización de los espacios uniformes en un sentido semejante en que los espacios cuasimétricos son una generalización de los espacios métricos, ya que, en ambos casos, dicha generalización consiste en abandonar el requisito de la simetría. En el caso particular de un espacio métrico, dado un valor fijo $\varepsilon > 0$, la banda diagonal $U_\varepsilon$ es una relación de cercanía uniforme, a través de todo el espacio, entre los puntos del mismo. Habiendo definido a los espacios uniformes y cuasiuniformes de manera abstracta mediante las condiciones enunciadas arriba, todos los espacios seudométricos se convierten en ejemplos de espacios uniformes y todos los espacios cuasiseudométricos se vuelven ejemplos de espacios cuasiuniformes. La igualdad $d(x, x) = 0$ permite probar que los superconjuntos de las bandas diagonales son relaciones reflexivas. Asimismo, la desigualdad del triángulo permite probar que los superconjuntos de las bandas diagonales cumplen la propiedad (2) de la definición. Para tal efecto, podemos encontrar una banda diagonal $U_\varepsilon$ contenida en un entorno dado $U$, y definir al entorno buscado, $V$, como $U_{\varepsilon/2}$. De esta manera, al formar la composición $V \circ V$, esto se puede interpretar como si diéramos dos pasos en el espacio cuasiseudométrico, cada uno de ellos de longitud menor que $\varepsilon/2$, primero de un punto $x$ a un punto $y$, y luego desde $y$ hacia otro punto $z$, resultando en que se pasa desde $x$ hasta $z$ dentro de una longitud menor que $\varepsilon$, es decir, dentro de la relación $U_\varepsilon$ que está contenida dentro de $U$. En el caso de los espacios seudométricos, la igualdad $d(y, x) = d(x, y)$ permite probar la condición (3), de que las relaciones inversas de los entornos también pertenezcan a la uniformidad $\Psi$.

Se ha visto que las condiciones de las definiciónes de uniformidad y de cuasiuniformidad abarcan como casos particulares a los espacios seudométricos y cuasiseudométricos, respectivamente. Sin embargo, dichas condiciones van más allá. Al estar expresadas en abstracto, en términos únicamente de relaciones y sin hacer mención alguna de conceptos métricos, hacen posible el considerar, dentro de esta teoría, a otros ejempos diferentes, otros espacios que pueden estar definidos también en términos de conjuntos y de relaciones o con alguna noción de distancia que no tenga nada que ver con ningún espacio cuasiseudométrico. Una ventaja de esta generalidad es que se pueden demostrar propiedades de los espacios cuasiuniformes utilizando métodos de relaciones y automáticamente esos resultados se aplican a los espacios cuasiseudométricos.

Dado que cada relación tiene una inversa, y que una cuasiuniformidad $\Psi$ es una familia de relaciones, es natural considerar a la familia de todas las relaciones inversas de los entornos de $\Psi$. Resulta fácil comprobar que esta familia también es una cuasiuniformidad. Se llama la **cuasiuniformidad conjugada** de $\Psi$ y se denota como $\Psi^{-1}$. La cuasiuniformidad $\Psi$ es una uniformidad si y sólo si coincide con su conjugada. Las funciones entre espacios cuasiuniformes que juegan un papel similar al de las funciones continuas entre espacios topológicos, son las funciones cuasiuniformemente continuas.

**Definición 2.2.** Una función $f : (X, \Psi) \longrightarrow (Y, \mathcal{Y})$ entre dos espacios cuasiuniformes se llama **cuasiuniformemente continua** si cumple

$$\forall V \in \mathcal{Y} : \exists U \in \Psi : \forall x, y \in X : (x, y) \in U \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in V.$$

Si la función $f$ es cuasiuniformemente continua, biyectiva, y su inversa $f^{-1}$ también es cuasiuniformemente continua, entonces a $f$ se le llama **cuasiunimorfismo**. En el caso particular de que tanto $(X, \Psi)$ como $(Y, \mathcal{Y})$ sean espacios uniformes, si la función $f$ es cuasiuniformemente continua, entonces también se le llama **uniformemente continua**. Un **unimorfismo** es un cuasiunimorfismo entre dos espacios uniformes. Si $f$ es un unimorfismo, los espacios $(X, \Psi)$ y $(Y, \mathcal{Y})$ se llaman **uniformemente equivalentes**. Si $f$ es un cuasiunimorfismo, entonces estos espacios se llaman **cuasiuniformemente equivalentes**. En general, si $\Psi$ es la uniformidad discreta, entonces $f$ es cuasiuniformemente continua. Asimismo, si $\mathcal{Y}$ es la uniformidad trivial, $f$ es cuasiuniformemente continua. Todas las funciones constantes son cuasiuniformemente continuas. En cualquier espacio cuasiuniforme, la función identidad es cuasiuniformemente continua. La composición de funciones cuasiuniformemente continuas es cuasiuniformemente continua. A la categoría que tiene por objetos a los espacios cuasiuniformes, y por morfismos a las funciones cuasiuniformemente continuas se le denota por **QUnif**, mientras que la categoría de los espacios uniformes y las funciones uniformemente continuas se denota como **Unif**. Recordando el ejemplo de los espacios métricos, la definición de continuidad cuasiuniforme dada arriba, es casi una copia literal de la definición que se da usualmente en los textos de cálculo para las funciones uniformemente continuas. A saber, que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si la distancia entre los puntos $x$ e $y$, en el dominio de la función, es menor que $\delta$, entonces la distancia en el codominio, entre sus imágenes $f(x)$ y $f(y)$, es menor que $\varepsilon$. Solamente hay que asociar al entorno $V$ con una banda diagonal de parámetro $\varepsilon$, y al entorno $U$ con una banda diagonal de parámetro $\delta$.

Con frecuencia las cuasiuniformidades se especifican por medio de bases.

**Definición 2.3.** Una **base** de una cuasiuniformidad $\Psi$ es un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \Psi$, tal que todo entorno de $\Psi$ contiene a algún elemento de $\mathcal{B}$.

Se dice que la base **genera** a la cuasiuniformidad. A los elementos de $\mathcal{B}$ se les puede llamar «básicos» o también relaciones básicas o entornos básicos de $\Psi$. Si $\mathcal{S}$ es un subconjunto de $\Psi$, se dice que $\mathcal{S}$ es una **subbase** de $\Psi$ si la familia de intersecciones finitas de $\mathcal{S}$ es una base de $\Psi$. Como consecuencia de la segunda condición en la definición de cuasiuniformidad, si $\mathcal{B}$ es base de $\Psi$ y $n$ es un entero positivo, entonces $\{B^n \mid B \in \mathcal{B}\}$, donde $B^n$ representa la composición de la relación $B$ consigo misma $n$ veces, también es una base de $\Psi$. Dos bases se llaman **equivalentes** cuando generan a la misma cuasiuniformidad. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de cuasiuniformidades en $X$, se dice que $\mathcal{B}_1$ es **más fina** que $\mathcal{B}_2$ y que, simultáneamente, $\mathcal{B}_2$ es **más gruesa** que $\mathcal{B}_1$, si cada elemento de $\mathcal{B}_2$ contiene a algún elemento de $\mathcal{B}_1$. Es decir que cada relación en la base más gruesa debe de contener a alguna relación de la base más fina. Claramente, toda cuasiuniformidad es base de sí misma. Si $\Psi_1$ y $\Psi_2$ son cuasiuniformidades en $X$, en particular son filtros en $X \times X$, así que $\Psi_1$ es más fina que $\Psi_2$ si y sólo si $\Psi_2 \subseteq \Psi_1$. En este caso también se dice que $\Psi_1$ es un **refinamiento** de $\Psi_2$. Como toda cuasiuniformidad es más gruesa y más fina que sí misma, si se desea excluir la instancia de la igualdad, se utilizan los términos «estrictamente más fina», «estrictamente más gruesa» o «refinamiento estricto». Si $\mathcal{B}$ es una familia no vacía de relaciones en $X$, las condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{B}$ sea base de alguna uniformidad en $X$, son las siguientes.

(1) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} : \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

(2) $\forall B \in \mathcal{B} : \triangle(X) \subseteq B$.

(3) $\forall U \in \mathcal{B} : \exists V \in \mathcal{B} : V \circ V \subseteq U$.

(4) $\forall U \in \mathcal{B} : \exists V \in \mathcal{B} : V \subseteq U^{-1}$.

Si $\mathcal{B}$ cumple las condiciones (1), (2) y (3), entonces es base de alguna cuasiuniformidad en $X$. Consideremos algunos ejemplos de bases, recordando que todas las uniformidades son casos particulares de cuasiuniformidades y que, por tanto, las bases de uniformidades también son ejemplos de bases de cuasiuniformidades. El conjunto singular $\{\Delta(X)\}$ es base de la uniformidad discreta. En todo espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$, la familia $\mathcal{B} = \{U \in \mathcal{U} \mid U = U^{-1}\}$ formada por los entornos simétricos es una base de la uniformidad $\mathcal{U}$. La **estructura p-ádica** [7] es una uniformidad en $\mathbb{Z}$ que se genera de la siguiente forma. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \equiv y\,(mod\ p^n)\}$. Entonces $\mathcal{B} = \{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de relaciones de equivalencia en $\mathbb{Z}$, que cumple con las propiedades necesarias para ser base de una uniformidad $\mathfrak{D}$. A esta uniformidad se le conoce como la estructura p-ádica. Otro ejemplo de uniformidad dada mediante una base, surge en el contexto de los grupos topológicos. Un **grupo topológico** es una terna $(G, *, \tau)$ donde $(G, *)$ es un grupo, $(G, \tau)$ es un espacio topológico y la función $f : G \times G \to G$ dada por $f(x, y) = x * y^{-1}$ es continua con respecto a la topología producto en $G \times G$. Dado un subconjunto $A \subseteq G$, la relación $L_A = \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1} \cdot y \in A\}$ se llama la **relación izquierda** determinada por $A$, mientras que $R_A = \{(x, y) \in G \times G \mid x \cdot y^{-1} \in A\}$ se llama la **relación derecha** determinada por $A$. Las relaciones izquierdas $L_V$ determinadas por las vecindades $V$ del elemento neutro de $G$, forman la base de una uniformidad llamada la **uniformidad izquierda** de $G$. Similarmente, las relaciones derechas $R_V$ determinadas por las vecindades del elemento neutro, generan una uniformidad llamada la **uniformidad derecha** de $G$. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo continuo entre dos grupos topológicos, entonces $f$ es uniformemente continua, tanto con respecto a la uniformidad izquierda como a la uniformidad derecha. Para el siguiente ejemplo, recordemos que un **preorden** es una relación reflexiva y transitiva. Dado cualquier preorden $P$ en $X$, es fácil ver que la familia $\Psi_P$, formada por los superconjuntos de $P$, es una cuasiuniformidad. Además de ser un filtro en $X \times X$ y de que todos sus elementos son relaciones reflexivas, se tiene que $P \circ P = P \subseteq U$ para toda relación $U \in \Psi_P$. Es claro que $\{P\}$ es base de $\Psi_P$. En toda cuasiuniformidad $\Psi$, cualquier entorno $U \in \Psi$ que sea minimal con respecto a la contención de conjuntos, debe de ser un preorden. Veamos ahora con más detalle un ejemplo que se ha mencionado anteriormente. Dado un espacio cuasiseudométrico $(X, d)$, para cada $\varepsilon > 0$ se define la banda diagonal $U_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. La familia $\mathcal{B} = \{\ U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\ \}$ es base de una cuasiuniformidad $\Psi_d$ que se llama la **cuasiuniformidad asociada** a $d$. Una base equivalente es $\mathcal{B}_1 = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde $V_n = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < 2^{-n}\}$. Si $d$ es una seudométrica, entonces $\Psi_d$ es una uniformidad. La **cuasiseudométrica conjugada** de $d$ se denota por $d^{-1}$ y está dada por $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$. La **seudométrica inducida** por $d$ se representa como $d^s$ y se define mediante $d^s(x, y) = \text{máx}\{d(x, y), d^{-1}(x, y)\}$, para $x, y \in X$. Si $d$ es una cuasimétrica, entonces $d^s$ es una métrica. La cuasiuniformidad conjugada de $\Psi_d$ coincide con la cuasiuniformidad asociada a $d^{-1}$, es decir que $(\Psi_d)^{-1} = \Psi_{(d^{-1})}$. En el caso de que $(X, d)$ sea un espacio métrico, a $\Psi_d$ se le conoce como la **uniformidad métrica** asociada a $d$. Como ejemplo particular tenemos a la **uniformidad euclideana**, que es la uniformidad asociada al espacio $(\mathbb{R}, d)$, donde $d$ es la métrica usual, $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

**Definición 2.4.** La **uniformidad asociada** a una cuasiuniformidad $\Psi$ se denota como $\Psi^*$ y es la uniformidad más gruesa que contiene a $\Psi$.

La uniformidad asociada a la cuasiuniformidad $\Psi$ se construye como sigue. Para cada entorno $V \in \Psi$, definimos la relación $V^* = V \cap V^{-1}$, que es una relación simétrica. La familia de todas estas relaciones, $\mathfrak{B} = \{V^* \mid V \in \Psi\}$, es base de $\Psi^*$. Es decir que $\Psi^* = \{\ U \subseteq X \times X \ \mid\ \exists V \in \Psi : V^* \subseteq U\ \}$. Otra base equivalente [11] es $\mathcal{B} = \{V \cap W^{-1} \ \mid\ V, W \in \Psi\}$. La uniformidad asociada a $\Psi$ coincide con aquella asociada a su conjugada y además es un refinamiento común de $\Psi$ y de $\Psi^{-1}$. En símbolos, $\Psi^* = \left(\Psi^{-1}\right)^*$ y $\Psi \cup \Psi^{-1} \subseteq \Psi^*$. En efecto, si $U \in \Psi$, entonces $U^* \subseteq U$ y $U^* \in \mathfrak{B} \subseteq \Psi^*$. Esto implica que $U \in \Psi^*$. Similarmente para $\Psi^{-1}$. Por otra parte, la uniformidad asociada a la seudométrica inducida por una cuasiseudométrica $d$, coincide con la uniformidad asociada a la cuasiuniformidad asociada a $d$. Esto es, $\Psi_{(d^s)} = \left(\Psi_d\right)^*$. Es claro que, si $\Psi$ es una uniformidad, entonces $\Psi^* = \Psi$.

**Definición 2.5.** Un **subespacio cuasiuniforme** del espacio $(X, \Psi) \in$ **QUnif**, es un espacio cuasiuniforme $(A, \Phi)$, en donde $A$ es un subconjunto no vacío de $X$ y $\Phi$ es la familia de relaciones en $A$ dada por la traza de $\Psi$ en $A \times A$, es decir,

$$\Phi = \Psi_{|A \times A} = \{U \cap (A \times A) \mid U \in \Psi\}$$

A la cuasiuniformidad $\Psi_{|A\times A}$ se le llama la **cuasiuniformidad inducida** en $A$ por $\Psi$ y también se le conoce como la **cuasiuniformidad relativa** a $A$, o la **relativización** de $\Psi$ para $A$. Si $\Psi$ es una uniformidad, entonces $\Psi_{|A\times A}$ también lo es. Toda relativización de la uniformidad discreta es discreta y toda relativización de la uniformidad trivial es trivial. Los subespacios cuasiuniformes de subespacios cuasiuniformes son subespacios cuasiuniformes. La función $f : (A, \Psi_{|A\times A}) \to (X, \Psi)$, donde $f(a) = a$ para toda $a \in A$, es cuasiuniformemente continua. Una **inmersión cuasiuniforme** de un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$ en un espacio cuasiuniforme $(Y, \mathcal{Y})$, es un cuasiunimorfismo $f : (X, \Psi) \to \left(f(X), \mathcal{Y}_{|f(X)\times f(X)}\right)$, es decir, una función $f : X \to Y$ inyectiva, cuasiuniformemente continua y tal que su inversa izquierda $g : f(X) \to X$, donde $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, también es cuasiuniformemente continua.

**Definición 2.6.** [6] Sea $\{(X_i, \Psi_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios cuasiuniformes. La **cuasiuniformidad producto** $\Psi$ en $X = \prod_{i\in I} X_i$ es la cuasiuniformidad más gruesa en $X$ entre todas aquellas para las que cada proyección $\pi_i : X \to X_i$ $(i \in I)$ es cuasiuniformemente continua.

En el caso particular de dos espacios cuasiuniformes $(X, \Psi)$ y $(Y, \mathcal{Y})$, la cuasiuniformidad producto tiene una base $\mathcal{B}$ que se puede expresar como

$$\left\{B \subseteq (X \times Y)^2 \mid \exists U \in \Psi, V \in \mathcal{Y} : \forall x \in X, y \in Y : B\left((x, y)\right) = U(x) \times V(y)\right\}.$$

Una función $f : (X, \Psi) \to \prod_{i\in I} (Y_i, \mathcal{Y}_i)$ es cuasiuniformemente continua si y sólo si, para cada $i \in I$, la composición $\pi_i \circ f$ es cuasiuniformemente continua.

# 3 La topología cuasiuniforme

Las propiedades topológicas de los espacios cuasiuniformes se establecen con respecto a una topología específica que se le asigna de forma canónica a cada cuasiuniformidad y que se conoce con el nombre de topología cuasiuniforme. Aunque es posible hablar de vecindades de puntos y de subconjuntos en los espacios cuasiuniformes sin hacer referencia a ninguna topología, la topología cuasiuniforme está estrechamente relacionada con las vecindades cuasiuniformes de los puntos del espacio en cuestión. En lo sucesivo, dado un espacio topológico $(X, \tau)$ y un punto $x \in X$, denotaremos con el símbolo $\mathcal{N}_\tau(x)$ al filtro de vecindades de $x$, omitiendo el subíndice $\tau$ cuando el contexto sea lo suficientemente claro para identificar a la topología sin ambigüedades. Si $(X, \Psi)$ es un espacio cuasiuniforme, $x \in X$, $A, B \subseteq X$ y $U \in \Psi$, las vecindades de $x$ y de $A$, **relativas al entorno** $U$, son simplemente sus imágenes $U(x)$ y $U(A)$ bajo la relación $U$. Es decir, $U(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$ es la vecindad cuasiuniforme de $x$ relativa a $U$, mientras que $U(A) = \bigcup \{U(a) \mid a \in A\}$ es la vecindad cuasiuniforme de $A$ relativa a $U$. Se dice que $B$ es una vecindad de $x$ **con respecto a la cuasiuniformidad** $\Psi$, cuando existe un entorno $V \in \Psi$ tal que $V(x) \subseteq B$. Similarmente, $B$ es una vecindad de $A$ con respecto a $\Psi$, si y sólo si existe un entorno $V \in \Psi$ tal que $V(A) \subseteq B$. En el caso particular de que $\Psi$ sea una uniformidad, entonces tiene una base dada por relaciones simétricas y esto le da sentido a la nomenclatura siguiente. Si $(x, y) \in U$, decimos que $x$ e $y$ son **cercanos con respecto** a $U$. Si $A \times A \subseteq U$, es decir, si todos los elementos de $A$ son cercanos entre si con respecto a $U$, decimos que $A$ es **pequeño con respecto** a $U$.

**Proposición 3.1.** *Sea* $(X, \Psi)$ *un espacio cuasiuniforme. Sea* $\mathcal{B}$ *una base de* $\Psi$*. Para cada* $x \in X$*, sea* $\mathcal{B}(x) = \{B(x) \mid B \in \mathcal{B}\}$*. Entonces existe una única topología* $\tau$ *en* $X$ *con la propiedad de que, para todo* $x \in X$*,* $\mathcal{B}(x)$ *es base de* $\mathcal{N}_\tau(x)$*, el filtro de vecindades de* $x$ *en* $\tau$*.*

**Definición 3.2.** La **topología cuasiuniforme** del espacio $(X, \Psi)$ es la topología a la que se refiere la proposición 3.1 y se denota con el símbolo $\tau(\Psi)$.

A $\tau(\Psi)$ también se le conoce como la **topología asociada** a $\Psi$ y se dice que $\Psi$ **genera** o **induce** a $\tau(\Psi)$. Si $\tau$ es una topología en $X$, entonces se dice que el espacio topológico $(X, \tau)$ **admite** a la cuasiuniformidad $\Psi$ y que $\Psi$ es **compatible** con $\tau$, si y sólo si $\tau = \tau(\Psi)$. Dos cuasiuniformidades pueden generar una misma topología, en tal caso las cuasiuniformidades son llamadas **compatibles**. Más adelante se da un ejemplo de esta situación, antes del teorema 3.13. Dado que la cuasiuniformidad conjugada $\Psi^{-1}$ también induce una topología en $X$, entonces la terna $(X, \tau(\Psi), \tau(\Psi^{-1}))$ es un espacio bitopológico. La **topología simétrica** de $\Psi$ es $\tau(\Psi^*)$, la topología inducida por la uniformidad asociad a $\Psi$ [11]. La topología inducida por la uniformidad discreta es la topología discreta y la topología inducida por la uniformidad trivial es la topología indiscreta. Dada una propiedad topológica general $P$ que un espacio $(X, \tau)$ en particular pueda tener o no tener, como convención de terminología se considera preferible decir «el espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$ tiene la propiedad $P$», en vez de decir «$\Psi$ es una cuasiuniformidad en $X$ y el espacio topológico $(X, \tau(\Psi))$ tiene la propiedad P». Los conjuntos abiertos de la topología cuasiuniforme se pueden caracterizar como sigue [**?**],

$$\tau(\Psi) = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A : \exists U \in \Psi : U(x) \subseteq A\}\,.$$

Dados un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$, un punto $x \in X$ y un entorno $U \in \Psi$, el conjunto $G = \{y \in X \mid \exists V \in \Psi : V(y) \subseteq U(x)\}$ es una vecindad abierta del punto $x$ en $\tau(\Psi)$ y además está contenido en la vecindad cuasiuniforme $U(x)$. Nótese que $U(x)$ no es necesariamente un conjunto abierto en $\tau(\Psi)$, como se muestra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.3.** Considérense los conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$ y $\Psi = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$, donde los entornos elementos de $\Psi$ son estas relaciones sobre $X$:

$$U_1 = X \times X \setminus \{(1,2), (1,3)\}, \quad U_2 = X \times X \setminus \{(1,2)\},$$
$$U_3 = X \times X \setminus \{(1,3)\}, \qquad U_4 = X \times X.$$

Tenemos que $U_1$ es un preorden en $X$ y $\mathcal{B} = \{U_1\}$ es base de $\Psi$, es decir que los entornos de $\Psi$ son los superconjuntos de $U_1$ y, por lo tanto, $\Psi$ es una cuasiuniformidad en $X$. De acuerdo a la proposición 3.1, $\{U_1(x)\}$ es base de $\mathcal{N}(x)$ para cada $x \in X$. Como $\{U_1(1)\} = \{\{1\}\}$ y $\{U_1(2)\} = \{U_1(3)\} = \{X\}$, se sigue que $\tau(\Psi) = \{\varnothing, \{1\}, X\}$. Ahora, la vecindad cuasiuniforme $U_2(1)$ es el conjunto $\{1,3\}$, que no es abierto en $\tau(\Psi)$, ya que no existe $V \in \Psi$ tal que $V(3) \subseteq U_2(1)$.

Si $A \subseteq X$ es compacto en la topología $\tau(\Psi)$ y $B$ es una vecindad de $A$ en $\tau(\Psi)$, entonces $B$ es una vecindad de $A$ con respecto a $\Psi$. Si $A$ no es compacto en $\tau(\Psi)$, sus vecindades en $\tau(\Psi)$ no necesariamente son sus vecindades con respecto a $\Psi$. Si $\mathcal{B}$ es base de una cuasiuniformidad $\Psi$ en un conjunto $X$ y $A \subseteq X$, entonces la cerradura de $A$ en $\tau(\Psi)$ está dada por

$$cl(A) = \bigcap \left\{U^{-1}(A) \mid U \in \mathcal{B}\right\}.$$

Si $f : (X, \Psi) \longrightarrow (Y, \mathcal{Y})$ es cuasiuniformemente continua, entonces $f$ es continua con respecto a $\tau(\Psi)$ y a $\tau(\mathcal{Y})$. La topología inducida por la cuasiuniformidad producto del espacio $(X, \Psi) \times (Y, \mathcal{Y})$ coincide con la topología de $(X, \tau(\Psi)) \times (Y, \tau(\mathcal{Y}))$.

**Proposición 3.4.** *Sean $\Psi$ y $\mathcal{Y}$ cuasiuniformidades en $X$. Si se tienen dos entornos $U \in \Psi, V \in \mathcal{Y}$ y una relación $M \subseteq X \times X$, entonces $U \circ M \circ V$ es una vecindad de $M$ en la topología inducida por la cuasiuniformidad del espacio $(X, \Psi^{-1}) \times (X, \mathcal{Y})$.*

**Corolario 3.5.** *Sea $(X, \Psi)$ un espacio cuasiuniforme. Si $\Upsilon$ es la cuasiuniformidad producto del espacio $(X, \Psi^{-1}) \times (X, \Psi)$, entonces $\mathcal{B}$, la familia de los entornos de $\Psi$ que son abiertos en $\tau(\Upsilon)$, es una base de $\Psi$.*

**Proposición 3.6.** *Sean $\Psi$ y $\mathcal{Y}$ cuasiuniformidades en $X$ y sea $M \subseteq X \times X$. La cerradura de $M$ en la topología inducida por la cuasiuniformidad del espacio producto $(X, \Psi) \times (X, \mathcal{Y})$, está dada por*

$$\mathrm{cl}(M) = \bigcap \left\{U \circ M \circ V^{-1} \mid U \in \Psi,\ V \in \mathcal{Y}\right\}$$

**Corolario 3.7.** *Si $\Psi$ es una cuasiuniformidad en $X$, entonces la familia $\mathcal{B}$ formada por aquellos entornos de $\Psi$ que son cerrados en la topología inducida por la cuasiuniformidad del espacio producto $(X, \Psi) \times (X, \Psi^{-1})$, es una base de $\Psi$.*

**Definición 3.8.** Si $\Psi$ es una cuasiuniformidad en $X$, entonces la relación $\bigcap \Psi$, dada por la intersección de todos los entornos de $\Psi$, es un preorden en $X$ al que se le conoce como el **preorden asociado** a $\Psi$. Esta relación se denota indistintamente como $\bigcap \Psi$ o también como $\leq_\Psi$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de $\Psi$, entonces $\bigcap \Psi = \bigcap \mathcal{B}$. En el caso de que $\Psi$ sea una uniformidad, entonces el preorden $\leq_\Psi$ es una relación de equivalencia en $X$. En general, el preorden asociado a $\Psi$ no es uno de sus entornos. Sin embargo, cuando $\leq_\Psi \in \Psi$, se tiene que $\{\leq_\Psi\}$ es base de $\Psi$ y, en ese caso, la topología $\tau(\Psi)$ resulta cerrada bajo intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos. Una topología con esta propiedad recibe el nombre de **topología de Alexandrov**. Cualquier topología definida sobre un conjunto finito de puntos, es una topología de Alexandrov. Las topologías de Alexandrov se caracterizan por la propiedad de que cada uno de sus puntos tiene una vecindad mínima. Recordemos que el **preorden de especialización** $\leq_\tau$, asociado a un espacio topológico $(X, \tau)$ se define como $x \leq_\tau y \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}\,\{y\}$, para todo $x, y \in X$. La condición $x \in \mathrm{cl}\,\{y\}$ es equivalente a $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$. El preorden asociado a una cuasiuniformidad $\Psi$ coincide con el preorden de especialización de su topología inducida, es decir que $\leq_\Psi = \leq_{\tau(\Psi)}$.

Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ se llama **separado**, cuando su preorden asociado es la relación de identidad en $X$, esto es $\bigcap \mathcal{U} = \Delta(X)$. El espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es separado si y sólo si la topología $\tau(\mathcal{U})$ es de Hausdorff. A un espacio topológico se le llama $R_0$ si la equivalencia $x \in \mathrm{cl}\,\{y\} \Leftrightarrow y \in \mathrm{cl}\,\{x\}$ se cumple para todo $x, y \in X$. En el caso general de un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$, se pueden caracterizar las siguientes propiedades topológicas por medio del preorden $\leq_{\tau(\Psi)}$.

1. $(X, \Psi)$ es $R_0$ si y sólo si $\leq_{\tau(\Psi)}$ es una relación de equivalencia.

2. $(X, \Psi)$ es $T_0$ si y sólo si $\leq_{\tau(\Psi)}$ es un orden parcial.

3. $(X, \Psi)$ es $T_0$ si y sólo si $(X, \Psi^*)$ es $T_2$.

4. $(X, \Psi)$ es $T_1$ si y sólo si $\leq_{\tau(\Psi)} = \Delta(X)$.

5. $(X, \Psi)$ es $T_2$ si y sólo si $\bigcap_{U \in \Psi} (U \circ U^{-1}) = \Delta(X)$

Un espacio topológico $(X, \tau)$ se llama **uniformizable** si existe una uniformidad $\mathcal{U}$ en $X$ tal que $\tau(\mathcal{U}) = \tau$, y se llama **cuasiuniformizable** si existe una cuasiuniformidad $\Psi$ tal que $\tau(\Psi) = \tau$. No todos los espacios topológicos son uniformizables. Por ejemplo, la topología cofinita en un conjunto infinito no está inducida por ninguna uniformidad. Para ver la razón de esto, consideremos los resultados siguientes, relativos a la topología inducida por una uniformidad.

**Proposición 3.9.** *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Si $D = D^{-1} \in \mathcal{U}$ es un entorno simétrico y $M \subseteq X \times X$, entonces $D \circ M \circ D$ es una vecindad de $M$ en el producto topológico $(X, \tau(\mathcal{U})) \times (X, \tau(\mathcal{U}))$. Además, la cerradura de $M$ está dada por*

$$\mathrm{cl}(M) = \bigcap \left\{ D \circ M \circ D \mid D = D^{-1} \in \mathcal{U} \right\}.$$

**Corolario 3.10.** *La cerradura de $H \subseteq X$ en el espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es*

$$\mathrm{cl}(H) = \bigcap \left\{ D(H) \mid D = D^{-1} \in \mathcal{U} \right\}.$$

**Corolario 3.11.** *Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme, entonces, con respecto a la topología producto en $(X, \tau(\mathcal{U})) \times (X, \tau(\mathcal{U}))$, se tiene que los interiores de los entornos $U \in \mathcal{U}$ forman una base de $\mathcal{U}$. Además, las cerraduras de los entornos $U \in \mathcal{U}$ forman una base equivalente.*

**Corolario 3.12.** *Todo espacio uniforme tiene una topología regular.*

El corolario 3.12 muestra que los espacios topológicos que no son regulares, no admiten a ninguna uniformidad. Es por esto que la topología cofinita en un conjunto infinito no es uniformizable. Cuando un espacio topológico es uniformizable, es posible que dos uniformidades diferentes induzcan la misma topología, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo. Sea $X$ un conjunto infinito. Sea $\mathcal{B}_1$ el conjunto de todas las relaciones de equivalencia en $X$ y sea $\mathcal{B}_2$ el conjunto de relaciones de equivalencia que tienen un número finito de clases de equivalencia. Tanto $\mathcal{B}_1$ como $\mathcal{B}_2$ son bases que generan uniformidades $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ sobre $X$, respectivamente. Se tiene $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$ ya que $\mathcal{U}_1$ es la uniformidad discreta mientras que $\Delta(X) \notin \mathcal{U}_2$. Sin embargo, ambas uniformidades generan a la topología discreta en $X$. Claramente, la topología discreta en un conjunto infinito no es compacta. Si un espacio topológico es compacto y Hausdorff, entonces es uniformizable y solamente puede admitir a una única uniformidad, como lo ilustra el siguiente resultado.

**Teorema 3.13.** *[1], [7] Si $(X, \tau)$ es un espacio compacto Hausdorff, existe una única uniformidad $\mathcal{U}$ en $X$ compatible con $\tau$. La uniformidad $\mathcal{U}$ es el conjunto de todas las vecindades del conjunto $\Delta(X)$ en el espacio producto $(X, \tau) \times (X, \tau)$.*

*Demostración.* Destacamos que esta demostración utiliza el concepto de punto de aglomeración de una base de filtro, que se define en la siguiente sección. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de vecindades de $\Delta(X)$ en el espacio producto $(X, \tau) \times (X, \tau)$. Claramente, $\mathcal{U}$ es un filtro en $X \times X$. Por definición, toda $U \in \mathcal{U}$ es una relación reflexiva. Como la función $f(x, y) = (y, x)$ es un homeomorfismo en $(X, \tau)$, se tiene que, para toda $U \in \mathcal{U}$, $U^{-1} \in \mathcal{U}$. Supóngase que $\mathcal{U}$ no cumple la condición (2) de la definición de uniformidad. Esto implica que existe alguna $U \in \mathcal{U}$ tal que, para toda $V \in \mathcal{U}$, $(V \circ V) \cap [(X \times X) \setminus U] \neq \varnothing$. Por lo tanto, $\Gamma = \{(V \circ V) \cap [(X \times X) \setminus U] \mid V \in \mathcal{U}\}$ es una base de filtro en $X \times X$ que tiene un punto de aglomeración $(x, y) \notin \Delta(X)$. Como el espacio $(X, \tau)$ es un compacto Hausdorff, es regular, de manera que existen vecindades abiertas ajenas $U_1 \in \mathcal{N}_\tau(x), U_2 \in \mathcal{N}_\tau(y)$, así como vecindades cerradas $V_1 \in \mathcal{N}_\tau(x), V_2 \in \mathcal{N}_\tau(y)$ tales que $V_1 \subseteq U_1$ y $V_2 \subseteq U_2$. Sea $U_3 = X \setminus (V_1 \cup V_2)$ y considérese a $W = (U_1 \times U_1) \cup (U_2 \times U_2) \cup (U_3 \times U_3)$, que pertenece a $\mathcal{U}$. Se tiene que, si $(u, v) \in W$ y $u \in V_1$, entonces $v \in U_1$. Asimismo, si $(u, v) \in W$ y $u \in U_1$, entonces $v \in U_1 \cup U_3 = X \setminus V_2$. De aquí se sigue que la vecindad $V_1 \times V_2$ del punto $(x, y)$ en el espacio $(X, \tau) \times (X, \tau)$ no intersecta a $W \circ W$, pero esto es una contradicción, ya que $(x, y)$ es un punto de aglomeración de $\Gamma$. De esta forma vemos que $\mathcal{U}$ es una uniformidad en $X$. Ahora, dado un punto $z \in X$ y una vecindad $A$ de $z$ con respecto a $\tau(\mathcal{U})$, existe $S \in \mathcal{U}$ tal que $S(z) \subseteq A$. Como $(z, z) \in \Delta(X)$ y $S$ es una vecindad de $\Delta(X)$ en $(X, \tau) \times (X, \tau)$, existen $G, H \in \tau$ tales que $z \in G \cap H$ y $G \times H \subseteq S$. En consecuencia, $H \subseteq S(z) \subseteq A$, de modo que $A$ es una vecindad de $z$ con respecto a $\tau$ y esto indica que $\tau$ es más fina que $\tau(\mathcal{U})$. Como el espacio $(X, \tau)$ es Hausdorff, dado cualquier punto $(a, b) \in X \times X$, el conjunto $\{(a, b)\}$ es cerrado y, si $a \neq b$, entonces $(X \times X) \setminus \{(a, b)\} \in \mathcal{U}$. Esto prueba que $\bigcap \mathcal{U} = \Delta(X)$, así que la uniformidad $\mathcal{U}$ es separada. Por lo anterior, $\tau(\mathcal{U})$ es una topología de Hausdorff más gruesa que $\tau$, que es compacta, y entonces se da la igualdad $\tau(\mathcal{U}) = \tau$.

Para probar la unicidad de $\mathcal{U}$, sea $\mathcal{V}$ una uniformidad en $X$ tal que $\tau(\mathcal{V}) = \tau$. Aplicando la proposición 3.9 con $M = \Delta(X)$, se tiene que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Suponiendo que no se da la otra contención, existe algún entorno $U \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$. Esto implica que la familia $\Gamma_1 = \{V \cap [(X \times X) \setminus U] \mid V \in \mathcal{V}\}$ es base de un filtro $\mathcal{G}$ en $X \times X$. Como el espacio producto $(X, \tau) \times (X, \tau)$ es compacto, $\mathcal{G}$ tiene un punto de aglomeración $(c, d)$ y se tiene que $(c, d) \notin \Delta(X)$. Como el filtro $\mathcal{V}$ es más grueso que $\mathcal{G}$, $(c, d)$ también es punto de aglomeración de $\mathcal{V}$. Por hipótesis, el espacio $(X, \tau(\mathcal{V}))$ es de Hausdorff, así que, por el corolario 3.7, se tiene $(c, d) \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \mathrm{cl}(V) = \bigcap \mathcal{V} = \Delta(X)$ y esto es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{V} = \mathcal{U}$. □

**Corolario 3.14.** *Sea $f : (X, \mathcal{U}) \longrightarrow (Y, \mathcal{V})$ una función entre espacios uniformes, continua con respecto a $\tau(\mathcal{U})$ y $\tau(\mathcal{V})$. Si $(X, \tau(\mathcal{U}))$ es un espacio compacto Hausdorf, entonces $f$ es uniformemente continua.*

Se ha visto que los espacios uniformizables deben ser regulares. Sin embargo, todos los espacios topológicos son cuasiuniformizables [10], [14]. Dado un espacio topológico $(X, \tau)$, siempre es posible encontrar una cuasiuniformidad $\Psi$ sobre $X$ que tenga a $\tau$ como su topología inducida, es decir que $\tau(\Psi) = \tau$. Esto se logra construyendo la llamada **cuasiuniformidad de Pervin**, como se indica enseguida. Dado cualquier subconjunto $A$ del espacio $X$, se define la relación $S_A = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in A \Rightarrow y \in A\}$. Nótese que, independientemente de $A$, la relación $S_A$ siempre es un preorden. Como consecuencia de las propiedades de los preórdenes, se tiene que la familia $\mathcal{S}_\tau = \{S_G \mid G \in \tau\}$ cumple las condiciones suficientes para ser subbase de una cuasiuniformidad $\Psi$ en $X$. No es difícil comprobar que la cuasiuniformidad $\Psi$ induce a la topología $\tau$. Como ejemplo ilustrativo, veamos cómo se construye la cuasiuniformidad de Pervin que genera a la topología de Sierpinski. Sea el conjunto $X = \{0, 1\}$ con la topología $\tau = \{\varnothing, \{1\}, X\}$. En este caso los preórdenes $S_G$ son los siguientes subconjuntos de $X \times X$:

$$S_{\{1\}} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in \{1\} \Rightarrow y \in \{1\}\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

$$S_\varnothing = S_X = X \times X$$

Como $\mathcal{S}_\tau = \left\{S_{\{1\}}, X \times X\right\} = \left\{U \subseteq X \times X \mid S_{\{1\}} \subseteq U\right\}$, es claro que en este ejemplo particular, $\mathcal{S}_\tau$ es por sí misma una cuasiuniformidad en $X$, ya que $S_{\{1\}}$ es un preorden. Se sigue que, tanto la base $\mathcal{B}$ formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}_\tau$, así como la cuasiuniformidad $\Psi$ generada por $\mathcal{B}$, coinciden con $\mathcal{S}_\tau$, cosa que no sucede en general pero sí en este ejemplo. Calculando ahora las bases $\mathcal{B}(x)$ para los filtros de vecindades $\mathcal{N}_{\tau(\Psi)}(x), x \in X$, se tiene

$$\mathcal{B}(0) = \{B(0) \mid B \in \mathcal{B}\} = \left\{S_{\{1\}}(0), (X \times X)(0)\right\} = \{X\}$$

$$\mathcal{B}(1) = \{B(1) \mid B \in \mathcal{B}\} = \left\{S_{\{1\}}(1), (X \times X)(1)\right\} = \{\{1\}, X\}$$

Por tanto, la topología generada por $\Psi$ resulta ser $\tau(\Psi) = \{\varnothing, \{1\}, X\} = \tau$.

# 4 Filtros de Cauchy

Los filtros de Cauchy juegan un papel esencial en la bicompletación de los espacios cuasiuniformes ya que la bicompletación de un espacio $(X, \Psi)$ se construye utilizando filtros de Cauchy en la uniformidad asociada $\Psi^*$. En esta sección cubrimos algunas de las propiedades principales de los filtros de Cauchy en los espacios cuasiuniformes. Recordemos que una **base de filtro** en un conjunto $X$, es una familia no vacía $\Gamma$, de subconjuntos no vacíos de $X$, tal que la intersección de cualesquiera dos de sus elementos contiene a otro de sus elementos. Todo filtro es una base de filtro. Si $\Gamma$ es una base de filtro en $X$, entonces el conjunto $\{\ F \subseteq X \mid \exists B \in \Gamma : B \subseteq F\ \}$ es un filtro en $X$ [15]. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en $X$ y $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\Gamma$ es base de $\mathcal{F}$ si y sólo si todo elemento de $\mathcal{F}$ contiene a algún elemento de $\Gamma$. Sean $\mathcal{F}$ un filtro en $X$ y $A \subseteq X$. Si se definen los conjuntos $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ como $\Gamma_1 = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$ y $\Gamma_2 = \{F \cap (X \setminus A) \mid F \in \mathcal{F}\}$, entonces, o bien $\Gamma_1$ es base de un filtro en $X$ o bien $\Gamma_2$ es base de un filtro en $X$. La **traza** de $\mathcal{F}$ en $A$, dada por $\mathcal{F}_{|A} = \{A \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$, es un filtro en $A$ si y sólo si $A \cap F \neq \varnothing$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Si $\mathcal{G}$ es un filtro en $A \subseteq X$, entonces $\mathcal{G}$ es una base de filtro en $X$. Una **base de filtro abierta** en un espacio topológico $(X, \tau)$, es una base de filtro tal que todos sus elementos son conjuntos abiertos. Un **filtro abierto** $\mathcal{A}$ en el espacio $(X, \tau)$ [2], a semejanza de un filtro, es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos del espacio $X$ y es cerrado bajo intersecciones finitas pero, a diferencia de un filtro, todos sus elementos deben de ser conjuntos abiertos. Además, $\mathcal{A}$ no necesita ser cerrado bajo superconjuntos arbitrarios, sino únicamente bajo superconjuntos abiertos. Es decir, si $A \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq B \in \tau$, entonces $B \in \mathcal{A}$. Así que los filtros abiertos se definen dentro del contexto de un espacio topológico y consisten enteramente de conjuntos abiertos. En cambio los filtros se pueden definir sobre cualquier conjunto no vacío y sin hacer referencia a ninguna topología. La intersección arbitraria de filtros definidos sobre un mismo conjunto, también es un filtro sobre ese conjunto. Un **ultrafiltro** es un filtro maximal con respecto a la contención de conjuntos, es decir que no existe ningún filtro estrictamente más fino. Un filtro $\mathcal{F}$ se llama **principal** si y sólo si, existe un subconjunto no vacío, $A \subseteq X$, tal que $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid A \subseteq F\}$. Sean $\mathcal{F}$ un filtro en $X$ y $h : X \to Y$ una función. El **filtro imagen** de $\mathcal{F}$ en $Y$, es el filtro generado por la base $\Gamma = \{h(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$. En el caso particular de que $X \subseteq Y$ y que $h$ sea la inclusión, nos referimos al filtro imagen como «la extensión» de $\mathcal{F}$ a $Y$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un conjunto $X$, entonces el **filtro elemental asociado** con la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es [8]:

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \in A\}$$

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X$. Si se define, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \{x_k \mid k \geq n\}$, entonces la familia $\Gamma = \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es base del filtro elemental asociado a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El filtro elemental de una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es más fino que el filtro elemental de la sucesión original [1]. Con respecto a la convergencia, dados una base de filtro $\Gamma$ y un punto $x$ en un espacio topológico $(X, \tau)$, se dice que $\Gamma$ **converge** a $x$, si y sólo si toda vecindad de $x$ contiene a algún elemento de $\Gamma$. En tal caso también se dice que $x$ es un **límite** de $\Gamma$, o un **punto límite** de $\Gamma$. Esto se denota como $\Gamma \longrightarrow x$, Si $\mathcal{F}$ es un filtro en $X$, entonces $\mathcal{F}$ converge a $x$ si y sólo si $\mathcal{F}$ es un refinamiento del filtro de vecindades de x, es decir que $\mathcal{F} \longrightarrow x \iff \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Si un filtro $\mathcal{F}$ converge al punto $x$, entonces cualquier filtro más fino que $\mathcal{F}$, también converge a $x$. Es claro que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ si y sólo si, su filtro elemental también converge a $x$. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ los filtros elementales de las sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Si ambas sucesiones convergen al mismo punto, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Si decimos que dos sucesiones están relacionadas entre si cuando sus filtros elementales coinciden, entonces esta relación es de equivalencia. En esta forma tiene sentido considerar a los filtros elementales de sucesiones como a clases de equivalencia de las mismas. En particular, los filtros elementales de sucesiones convergentes, se pueden considerar como clases de equivalencia de sucesiones que convergen al mismo punto. Dados un punto $x$ y una base de filtro $\Gamma$ en un espacio topológico $(X, \tau)$, el punto $x$ se llama **punto de aglomeración** de $\Gamma$ si y sólo si, $x$ está en la cerradura de cada uno de los elementos de $\Gamma$. Si $\beta$ es una base de $\mathcal{N}(x)$, entonces $x$ es un punto de aglomeración de la base de filtro $\Gamma$ si y sólo si, para todo $B \in \beta$ y todo $G \in \Gamma$, su intersección es no vacía. Si $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ son dos bases del mismo filtro $\mathcal{F}$ y $x$ es un punto de aglomeración de $\Gamma_1$, entonces también es punto de aglomeración de $\Gamma_2$, así como de $\mathcal{F}$. Un punto $x$ es punto de aglomeración del filtro $\mathcal{F}$ si y sólo si existe algún filtro más fino que $\mathcal{F}$ y que converge a $x$. En particular, todos los puntos límite de un filtro son puntos de aglomeración de ese filtro.

**Definición 4.1.** [6] A una base de filtro $\Gamma$ en un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$ se le llama **de Cauchy** si y sólo si, para todo entorno $U \in \Psi$ existen, un punto $x \in X$ y un conjunto $G \in \Gamma$, tales que $G \subseteq U(x)$.

Como todo filtro es base de si mismo, un filtro $\mathcal{F}$ en $(X, \Psi)$ es de Cauchy si y sólo si, para cada entorno $U \in \Psi$ existe un punto $x \in X$ tal que $U(x) \in \mathcal{F}$. En este trabajo seguimos la nomenclatura de Fletcher y Lindgren [6]. Sin embargo, cabe mencionar que, a un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$, Cobzaş [3] lo llama «filtro $\Psi$-Cauchy por la izquierda». Asimismo, utiliza el término «filtro $\Psi$-Cauchy por la derecha» cuando se cumple que, para todo entorno $U \in \Psi$ existe un punto $x \in X$ tal que $U^{-1}(x) \in \mathcal{F}$. Estos filtros son simplemente los filtros de Cauchy en la cuasiuniformidad conjugada $\Psi^{-1}$. Es fácil ver que cualquier base de filtro $\Gamma$ que sea convergente con respecto a $\tau(\Psi)$, es de Cauchy. Asimismo, si $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ son dos bases de filtro en el mismo espacio cuasiuniforme, $\Gamma_1$ es de Cauchy y $\Gamma_2$ es más fina que $\Gamma_1$, entonces $\Gamma_2$ también es de Cauchy. Si $\Psi$ y $\mathcal{Y}$ son dos cuasiuniformidades en $X$ y $\mathcal{Y}$ es más fina que $\Psi$, entonces toda base de filtro que sea de Cauchy en $(X, \mathcal{Y})$, también es de Cauchy en $(X, \Psi)$. En particular, toda base de filtro que sea de Cauchy en la uniformidad asociada $\Psi^*$, también es de Cauchy tanto en $\Psi$ como en su cuasiuniformidad conjugada, $\Psi^{-1}$. En la uniformidad discreta, los únicos filtros de Cauchy son los filtros principales. En la uniformidad trivial, todos los filtros son de Cauchy. Dado un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$, si $\mathcal{F}$ es un filtro en $X$, entonces se llama **filtro minimal de Cauchy en $\Psi^*$** si y sólo si es un filtro de Cauchy en $(X, \Psi^*)$ y no contiene a ningún otro filtro que sea de Cauchy en $\Psi^*$.

**Proposición 4.2.** *Si $(X, \Psi)$ es un espacio cuasiuniforme y $\Gamma$ es una base de filtro en $X$, entonces $\Gamma$ es de Cauchy en $(X, \Psi^*)$ si y sólo si, para todo entorno $U \in \Psi$ existe un conjunto $G \in \Gamma$ tal que $G \times G \subseteq U$.*

*Demostración.* Supóngase que para cada $U \in \Psi$ existe $G \in \Gamma$ tal que $G \times G \subseteq U$. Sea $U \in \Psi$ y sea $G \in \Gamma$ tal que $G \times G \subseteq U$. Si $x \in G$, entonces $G \subseteq (U \cap U^{-1})(x)$. Por lo tanto, la base de filtro $\Gamma$ es de Cauchy en $\Psi^*$. Para la otra implicación, supongamos que $\Gamma$ es de Cauchy en $\Psi^*$ y sea $U \in \Psi$. Hay una $V \in \Psi$ tal que la composición $V \circ V$ está contenida en $U$. Para esta $V$ existen, un punto $x \in X$ y un conjunto $G \in \Gamma$ tales que $G \subseteq (V \cap V^{-1})(x)$. Si $(a,b) \in G \times G$, entonces $(a,x),(x,b) \in V$ y por lo tanto $(a,b) \in V \circ V$. Esto implica que $G \times G \subseteq U$. □

Una condición suficiente para que un filtro $\mathcal{F}$ sea de Cauchy en un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$, es que para todo entorno $U \in \Psi$, exista $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subseteq U$. En el caso general de los espacios cuasiuniformes, esta condición es suficiente pero no es necesaria. Sin embargo, en el caso de un espacio uniforme, sí es necesaria y normalmente se usa para definir a los filtros de Cauchy en los espacios uniformes. Consideremos el ejemplo siguiente. Sea $X = \{0, 1, 2\}$ y sea $P$ el preorden en $X$ dado por la desigualdad $\leq$ usual de los números reales, es decir $P = \{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y\}$. El conjunto singular $\mathcal{B} = \{P\}$, es base de la cuasiuniformidad $\Psi = \{U \subseteq X \times X \mid P \subseteq U\}$. El conjunto $\mathcal{F} = \{\{0, 1\}, X\}$ es un filtro en $X$. Sea $U \in \Psi$ y sea $z \in X$. Como $0 \leq z$, se tiene $(0, z) \in P \subseteq U$. Por lo tanto, $z \in U(0)$ lo que implica $X \subseteq U(0)$ y por lo tanto $U(0) = X \in \mathcal{F}$. Esto muestra que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $(X, \Psi)$. Sin embargo, como $(1, 0) \notin P$, entonces $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \nsubseteq P$ y por consecuencia también tenemos que $X \times X \nsubseteq P$. Esto implica que ningún $F \in \mathcal{F}$ cumple con la condición $F \times F \subseteq P$. Este ejemplo muestra que la condición: $\forall U \in \Psi : \exists F \in \mathcal{F} : F \times F \subseteq U$, no es necesaria para que un filtro sea de Cauchy en un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$.

**Proposición 4.3.** *Si $f : (X, \Psi) \to (Y, \mathcal{Y})$ es una función cuasiuniformemente continua y $\Gamma$ es una base de filtro de Cauchy en $(X, \Psi)$, entonces $f(\Gamma)$ es una base de filtro de Cauchy en $(Y, \mathcal{Y})$.*

*Demostración.* Como $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subseteq X$, por tanto $f(\Gamma)$ es una base de filtro en $Y$. Considérese un entorno $V \in \mathcal{Y}$. Como $f$ es cuasiuniformemente continua, existe un entorno $U \in \Psi$ tal que $(f(x), f(y)) \in V$ siempre que $(x, y) \in U$, para todo $x, y \in X$. Como $\Gamma$ es base de filtro de Cauchy en $(X, \Psi)$, entonces existen, un punto $x \in X$ y un conjunto $G \in \Gamma$, tales que $G \subseteq U(x)$. Esto implica que $f(G) \subseteq V(f(x))$ así que $f(\Gamma)$ es de Cauchy en $(Y, \mathcal{Y})$. □

**Proposición 4.4.** *Sean $X$ un conjunto y $\Gamma$ una base de filtro en $X$. Supóngase que se tiene una familia de espacios uniformes $\{(Y_i, \mathcal{V}_i)\}_{i\in I}$ y una familia de funciones $\{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$. Si $\mathcal{U}$ es la uniformidad más gruesa en $X$ tal que cada $f_i$ es uniformemente continua, entonces la base de filtro $\Gamma$ es de Cauchy en $\mathcal{U}$ si y sólo si, para cada $i \in I$, la base de filtro $f_i(\Gamma)$ es de Cauchy en $(Y_i, \mathcal{V}_i)$.*

**Corolario 4.5.** *Sean $(X, \Psi)$ un espacio cuasiuniforme, $\mathcal{F}$ un filtro en $X$ y $(Y, \mathcal{Y})$ un subespacio cuasiuniforme de $(X, \Psi)$. Si $\mathcal{F}$ induce un filtro $\mathcal{G}$ en $Y$ y $\mathcal{F}$ es de Cauchy en $\Psi^*$, entonces el filtro inducido $\mathcal{G}$ es de Cauchy en $\mathcal{Y}^*$.*

# 5 La bicompletación

**Definición 5.1.** [6] Un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$ se llama **completo** si y sólo si todo filtro de Cauchy en $X$ tiene un punto de aglomeración en $X$ con respecto a $\tau(\Psi)$. El espacio se llama **completo con respecto a la convergencia** si y sólo si todo filtro de Cauchy converge con respecto a $\tau(\Psi)$. Por último, se dice que $(X, \Psi)$ es **bicompleto** si y sólo si todo filtro de Cauchy con respecto a $\Psi^*$ tiene un punto límite con respecto a $\tau(\Psi^*)$, es decir, si $(X, \Psi^*)$ es completo con respecto a la convergencia.

Cobzaş [3] usa el término «$\Psi$-completo por la izquierda» para referirse a un espacio completo con respecto a la convergencia. Como $(\Psi^{-1})^* = \Psi^*$, es claro que $(X, \Psi)$ es bicompleto si y sólo si $(X, \Psi^{-1})$ también lo es. Si todo ultrafiltro de Cauchy converge en un espacio cuasiuniforme, entonces el espacio es completo. Cualquier espacio cuasiuniforme regular en el que todo filtro abierto de Cauchy tenga un punto de aglomeración, es completo.

**Definición 5.2.** Una **bicompletación** de un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$ es un espacio cuasiuniforme bicompleto $(Y, \mathcal{Y})$ que tiene un subespacio $(Z, \Upsilon)$ que cumple con estas dos propiedades: (i) $Z$ es denso en $\tau(\mathcal{Y}^*)$ y (ii) $(Z, \Upsilon)$ es cuasiunimórfico a $(X, \Psi)$.

**Proposición 5.3.** *Dado un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$, las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

(a) $\forall U \in \Psi, x \in X : \exists V \in \Psi : V = V^{-1}$ y $V^2(x) \subseteq U(x)$

(b) $\forall U \in \Psi, x \in X : \exists V \in \Psi : V^{-1}(V(x)) \subseteq U(x)$

(c) Para todo $x \in X$, la familia $\{U^{-1}(U(x)) \mid U \in \Psi\}$ es una base de $\mathcal{N}_{\tau(\Psi)}(x)$.

Se dice que un espacio cuasiuniforme es **localmente simétrico** si y sólo si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes de la proposición 5.3. Nótese que todo espacio uniforme es localmente simétrico.

**Proposición 5.4.** *Sea $(X, \Psi)$ un espacio cuasiuniforme localmente simétrico y sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $\Psi$. Si $p$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$, entonces $p$ es un punto límite de $\mathcal{F}$.*

*Demostración.* Sea $(X, \Psi)$ localmente simétrico y sea $p$ un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$, un filtro de Cauchy en $\Psi$. Dado un entorno $U \in \Psi$, como $(X, \Psi)$ es localmente simétrico, existe un entorno simétrico $V \in \Psi$ tal que $V^3(p) \subseteq U(p)$. Dado que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, hay un punto $x \in X$ tal que $V(x) \in \mathcal{F}$. Como $p$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$, se sigue que $V(x) \cap V(p) \neq \varnothing$. Esto implica que existe un punto $a \in V(x) \cap V(p)$. Sea $y \in V(x)$. Como $V$ es una relación simétrica, se tiene $(p, a), (a, x), (x, y) \in V$ y, por lo tanto, $y \in V^3(p)$, así que $V(x) \subseteq V^3(p) \subseteq U(p)$. Se concluye que $U(p) \in \mathcal{F}$, de modo que $\mathcal{N}(p) \subseteq \mathcal{F}$. $\square$

**Corolario 5.5.** *Todo espacio cuasiuniforme localmente simétrico que sea completo, también es completo con respecto a la convergencia.*

**Proposición 5.6.** *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y sea $C$ un subconjunto cerrado de $X$. Si $(X, \mathcal{U})$ es completo, entonces el subespacio uniforme $\left(C, \mathcal{U}_{|C \times C}\right)$ también es completo. Asimismo, si $(X, \mathcal{U})$ es completo con respecto a la convergencia, el subespacio $\left(C, \mathcal{U}_{|C \times C}\right)$ también lo es.*

Como consecuencia de la proposición 5.4, si $(X, \Psi)$ es un espacio cuasiuniforme, entonces el que $(X, \Psi)$ y $(X, \Psi^{-1})$ sean bicompletos es equivalente a que $(X, \Psi^*)$ sea completo. En aras de la brevedad, cuando $\Psi$ sea la única cuasiuniformidad bajo consideración en un conjunto $X$, adoptaremos la notación siguiente. Para cada $x \in X$, se utilizará el símbolo $\eta^*(x)$ para representar a $\mathcal{N}_{\tau(\Psi^*)}(x)$, el filtro de vecindades de $x$ en la topología simétrica $\tau(\Psi^*)$. Claramente, $\eta^*(x)$ es un filtro de Cauchy en $\tau(\Psi^*)$.

**Proposición 5.7.** *Sea* $(X, \Psi)$ *un espacio cuasiuniforme* $T_0$ *y sea* $(Y, \mathcal{Y})$ *un subespacio de* $(X, \Psi)$. *Si el subespacio* $(Y, \mathcal{Y})$ *es bicompleto, entonces* $Y$ *es cerrado en el espacio* $(X, \tau(\Psi^*))$.

*Demostración.* Supóngase que $Y$ no es cerrado en $\tau(\Psi^*)$. Por lo tanto existe un punto $p \in \mathrm{cl}(Y) \setminus Y$. Si $U \in \mathcal{Y}^*$, entonces $U \cap U^{-1} \in \mathcal{Y}^*$. Por el corolario 3.10, $p \in (U \cap U^{-1})(Y) \subseteq U(Y)$, así que existe $y \in Y$ tal que $p \in U(y)$. Esto implica que $U(y) \in \eta^*(p) \mid Y$. Se sigue que $\eta^*(p) \mid Y$ es un filtro de Cauchy en $\mathcal{Y}^*$. Como $(Y, \mathcal{Y})$ es bicompleto, el espacio $(Y, \mathcal{Y}^*)$ es completo y por ser uniforme es completo con respecto a la convergencia. Se tiene que el filtro $\eta^*(p) \mid Y$ converge a algún punto $q \in Y$, es decir que $\eta^*(q) \mid Y \subseteq \eta^*(p) \mid Y$. Como $(Y, \mathcal{Y})$ es $T_0$, entonces $(Y, \mathcal{Y}^*)$ es Hausdorff y esto implica que $p = q \in Y$, una contradicción. □

**Teorema 5.8.** *Sean* $(X, \Psi)$ *y* $(Y, \mathcal{Y})$ *espacios cuasiuniformes. Sea* $D \subseteq X$ *denso en* $(X, \tau(\Psi^*))$. *Sea* $f : \left(D, \Psi_{|D\times D}\right) \to (Y, \mathcal{Y})$ *una función cuasiuniformemente continua. Si el espacio* $(Y, \mathcal{Y})$ *es* $T_0$ *y bicompleto, entonces* $f$ *tiene una única extensión cuasiuniformemente continua* $g : (X, \Psi) \to (Y, \mathcal{Y})$ *que es continua entre las topologías simétricas* $\tau(\Psi^*)$ *y* $\tau(\mathcal{Y}^*)$.

*Demostración* Primero se prueba que $f$ tiene una extensión $g : X \to Y$ que es continua con respecto a $\tau(\Psi^*)$ y a $\tau(\mathcal{Y}^*)$. Sea $x \in X$. Como $\eta^*(x)$ es un filtro de Cauchy en $\Psi^*$, se tiene que, por el corolario 4.5, el filtro $\mathcal{F}_x = \{D \cap R \mid R \in \eta^*(x)\}$ es de Cauchy en la uniformidad asociada a $\Psi_{|D\times D}$. Como $f$ es cuasiuniformemente continua, de la proposición 4.3 se sigue que la familia $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}_x\}$ es base de un filtro $\mathcal{G}_x$ que es de Cauchy en $\mathcal{Y}^*$. El espacio $(Y, \mathcal{Y})$ es $T_0$ y bicompleto, así que $(Y, \tau(\mathcal{Y}^*))$ es un espacio de Hausdorff y el filtro $\mathcal{G}_x$ tiene un límite único al que denotamos como $g(x)$ para definir la función $g$.

Para probar que $g$ extiende a $f$, sea $x \in D$ y sea $G$ una vecindad de $f(x)$ en $(Y, \tau(\mathcal{Y}^*))$. Por tanto, $f^{-1}(G)$ es una vercindad de $x$ en la topología que $\tau(\Psi^*)$ induce en $D$, así que existe una vecindad de $x$, $R \in \tau(\Psi^*)$, tal que $f(D \cap R) \subseteq G$. Esto implica que $G \in \mathcal{G}_x$, así que $\mathcal{G}_x$ converge a $f(x)$, es decir que $g(x) = f(x)$.

Para demostrar que la función $g$ es cuasiuniformemente continua, considérese un entorno $V \in \mathcal{Y}$. Por el corolario 3.7, existe $V_1 \in \mathcal{Y}$ cerrado en la topología del espacio producto $(Y, \mathcal{Y}) \times (Y, \mathcal{Y}^{-1})$ y tal que $V_1^3 \subseteq V$. Como $f$ es cuasiuniformemente continua, existe un entorno $U \in \Psi$ tal que

$(f(x), f(y)) \in V_1$ siempre que la pareja $(x, y) \in U \cap (D \times D)$. Sea $U_1 \in \Psi$ tal que $U_1^3 \subseteq U$. Se afirma que si $(u, v) \in U_1$, entonces $(g(u), g(v)) \in V$. Sea $(u, v) \in U_1$ y sean $U_2 = U_1 \cap U_1^{-1}$, $V_2 = V_1 \cap V_1^{-1}$ y $u' \in D \cap U_2(u)$. Si $H$ es una vecindad de $g(u)$ en $\tau(\mathcal{Y}^*)$, entonces existe una vecindad $R$ de $u$ en $\tau(\Psi^*)$ tal que $f(D \cap R) \subseteq H$. Para todo $w \in D \cap R \cap U_2(u)$ se tiene que $f(w) \in H \cap V_2(f(u'))$. En consecuencia, $H \cap V_2(f(u'))$ es no vacío, así que $g(u) \in \mathrm{cl}_{\tau(\mathcal{Y}^*)}(V_2(f(u')))$. Ahora, sea $v' \in D \cap U_2(v)$. Se tiene $(u', v') \in U$ y por lo tanto $(f(u'), f(v')) \in V_1$. Por tanto, $(g(u), f(u')), (f(v') g(v)) \in V_2 \subseteq V_1$. Esto inplica que $(g(u), g(v)) \in V_1^3 \subseteq V$, así que $g$ es cuasiuniformemente continua.

Por último, como la topología $\tau(\mathcal{Y}^*)$ es de Hausdorff, si $h$ es una función continua de $\tau(\Psi^*)$ a $\tau(\mathcal{Y}^*)$ que coincide con $g$ en el subaspacio denso $D$ de $X$, entonces $h = g$. Por lo tanto, $g$ es la única extensión continua de $f$ de $\tau(\Psi^*)$ a $\tau(\mathcal{Y}^*)$. $\square$

**Corolario 5.9.** *Sean $(X, \Psi)$ y $(Y, \mathcal{Y})$ dos espacios cuasiuniformes, cada uno de ellos $T_0$ y bicompleto. Sean $D \subseteq X$, $E \subseteq Y$ subespacios densos de $(X, \tau(\Psi^*))$ y de $(Y, \tau(\mathcal{Y}^*))$ respectivamente. Si $f : \left(D, \Psi_{|D \times D}\right) \to \left(E, \mathcal{Y}_{|E \times E}\right)$ es un cuasiunimorfismo, entonces $f$ se puede extender a un cuasiunimorfismo de $(X, \Psi)$ a $(Y, \mathcal{Y})$.*

*Demostración* Por el teorema 5.8, $f$ tiene una extensión $g_1 : X \to Y$ cuasiuniformemente continua y $f^{-1}$ tiene una extensión $g_2 : Y \to X$ cuasiuniformemente continua. Esto implica que $g_2 \circ g_1$ es una extensión continua de la función identidad sobre el subespacio $D$ al espacio $X$. Asimismo, $g_1 \circ g_2$ es una extensión continua de la función identidad sobre el subespacio $E$ al espacio $Y$. Como las funciones identidad en $X$ y en $Y$ son las únicas extensiones continuas de las funciones identidad en $D$ y en $E$ respectivamente, se tiene $g_2 \circ g_1 = 1_X$ y $g_1 \circ g_2 = 1_Y$. En consecuencia, $g_1$ es un cuasiunimorfismo de $(X, \Psi)$ a $(Y, \mathcal{Y})$. $\square$

**Proposición 5.10.** *Sea $(X, \Psi)$ un espacio cuasiuniforme. Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $(X, \Psi^*)$, entonces existe un único filtro $\mathcal{G}$ que es minimal de Cauchy en $(X, \Psi^*)$ y que es más grueso que $\mathcal{F}$. Más aún, dada cualqier base $\Gamma$ de $\mathcal{F}$, la familia definida como $\Gamma_0 = \{U(G) \mid G \in \Gamma \text{ y } U = U^{-1} \in \Psi^*\}$ es base de $\mathcal{G}$.*

*Demostración* Sea $\Gamma$ una base de $\mathcal{F}$ y sean $U_1(G_1)$ y $U_2(G_2)$ elementos de $\Gamma_0$. Por tanto existe $G \in \Gamma$ tal que $G \subseteq G_1 \cap G_2$. Si $U = U_1 \cap U_2$, entonces

$U(G) \subseteq U_1(G_1) \cap U_2(G_2)$, así que $\Gamma_0$ es base de un filtro $\mathcal{F}_0$ en $X$. Dado un entorno $V \in \Psi^*$, existe un entorno simétrico $W \in \Psi^*$ tal que $W^3 \subseteq V$. Por la proposición 4.2, hay un conjunto $H \in \Gamma$ tal que $H \times H \subseteq W$. Se tiene que $W(H) \times W(H) \subseteq V$ y esto implica que el filtro $\mathcal{F}_0$ es de Cauchy en $(X, \Psi^*)$ y es más grueso que $\mathcal{F}$. Sea $\mathcal{G}$ un filtro de Cauchy en $(X, \Psi^*)$ más grueso que $\mathcal{F}$ y sea $S(B) \in \Gamma_0$. Por la proposición 4.2, existe un conjunto $A \in \mathcal{G}$ tal que $A \times A \subseteq S$. Como $\mathcal{G}$ es más grueso que $\mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$ y $A \cap B \neq \varnothing$. Se sigue que $A \subseteq S(B)$ y en consecuencia $S(B) \in \mathcal{G}$. Esto implica que $\Gamma_0 \subseteq \mathcal{G}$ y por tanto $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{G}$. Como todo filtro de Cauchy en $(X, \Psi^*)$ más grueso que $\mathcal{F}$ contiene a $\mathcal{F}_0$, se concluye que $\mathcal{F}_0$ es un filtro de Cauchy minimal en $(X, \Psi^*)$ y es el único filtro de Cauchy minimal más grueso que $\mathcal{F}$. □

**Corolario 5.11.** *Dado un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$ y un punto $x \in X$, el conjunto $\eta^*(x)$ es un filtro de Cauchy minimal en $(X, \Psi^*)$.*

**Teorema 5.12.** *Dado un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$, todo filtro de Cauchy minimal en $(X, \Psi^*)$ tiene una base formada por conjuntos que son abiertos en $\tau(\Psi^*)$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy minimal en $(X, \Psi^*)$ y sea $V$ un entorno en $\Psi^*$. Por el corolario 3.5, existe un entorno simétrico $U = U^{-1} \in \Psi^*$ tal que $U \subseteq V$ y además, para cada punto $x \in X$, su vecindad cuasiuniforme $U(x)$ es un conjunto abierto en $\tau(\Psi^*)$. En consecuencia, para cada subconjunto $A \subseteq X$, su vecindad cuasiuniforme $U(A)$ es un conjunto abierto en $\tau(\Psi^*)$ y está contenido en $V(A)$. Esto implica que la base de $\mathcal{F}$ dada en la proposición 5.10 está formada por conjuntos que son abiertos en $\tau(\Psi^*)$. □

**Proposición 5.13.** *Sea $(X, \Psi)$ un espacio cuasiuniforme y sea $D \subseteq X$ un subconjunto denso en la topología simétrica $\tau(\Psi^*)$. Si todo filtro de Cauchy en $\left(D, \Psi^*_{|D\times D}\right)$ converge en $(X, \tau(\Psi^*))$, entonces el espacio $(X, \Psi)$ es bicompleto.*

*Demostración.* Basta con probar que todo filtro $\mathcal{F}$ en $X$ que sea minimal de Cauchy en $\Psi^*$, converge. Como $D$ es denso en $\tau(\Psi^*)$ y como, además, por el teorema 5.12, todo elemento de $\mathcal{F}$ tiene un interior no vacío, $\mathcal{F}_{|D}$, la traza de $\mathcal{F}$ en $D$, es un filtro de Cauchy en $\left(D, \Psi^*_{|D\times D}\right)$ y por lo tanto converge en $(X, \tau(\Psi^*))$. Como $\mathcal{F}$ es más grueso que el filtro que determina $\mathcal{F}_{|D}$ en $X$, por la proposición 5.4, se sigue que $\mathcal{F}$ converge. □

**Teorema 5.14.** *Todo espacio cuasiuniforme $T_0$ tiene una bicompletación $T_0$.*

*Demostración.* Sea $(X, \Psi)$ un espacio cuasiuniforme $T_0$. Para demostrar la existencia de un espacio cuasiuniforme $\left(\widehat{X}, \widehat{\Psi}\right)$ que sea una bicompletación de $(X, \Psi)$, el primer paso consiste en definir al conjunto $\widehat{X}$ como el conjunto de todos los filtros de Cauchy minimales en $(X, \Psi^*)$. La cuasiuniformidad $\widehat{\Psi}$ se genera mediante una base como sigue. Para cada entorno $U \in \Psi$ se define la relación

$$\widehat{U} = \left\{ (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widehat{X} \times \widehat{X} \;\middle|\; \exists F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G} : F \times G \subseteq U \right\}.$$

A continuación se comprueba que la familia $\mathcal{B} = \left\{ \widehat{U} \;\middle|\; U \in \Psi \right\}$ cumple las condiciones para ser base de una cuasiuniformidad $\widehat{\Psi}$ en $\widehat{X}$. Como todo elemento de $\widehat{X}$ es un filtro de Cauchy en $\Psi^*$, para cada $U \in \Psi$ y cada $\mathcal{F} \in \widehat{X}$, la pareja $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ está en $\widehat{U}$. Sean $V_1, V_2 \in \Psi$ y sea $V = V_1 \cap V_2$. Se sigue que $V \in \Psi$ y que $\widehat{V} = \widehat{V_1} \cap \widehat{V_2}$. Dado cualquier entorno $U \in \Psi$ existe algún $V \in \Psi$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Si $(\mathcal{F}, \mathcal{G}), (\mathcal{G}, \mathcal{H}) \in \widehat{V}$, entonces existen $F \in \mathcal{F}$ y $G_1 \in \mathcal{G}$ tales que $F \times G_1 \subseteq V$. Similarmente, existen $G_2 \in \mathcal{G}$ y $H \in \mathcal{H}$ tales que $G_2 \times H \subseteq V$. Como $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$, se tiene que $F \times H \subseteq V \circ V$. Por lo tanto, $\widehat{V} \circ \widehat{V} \subseteq \widehat{U}$ y se tiene que $\mathcal{B}$ es base de una cuasiuniformidad $\widehat{\Psi}$ en $\widehat{X}$.

Como siguiente paso, para mostrar que el espacio cuasiuniforme $\left(\widehat{X}, \widehat{\Psi}\right)$ es $T_0$, considérense $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \widehat{X}$, dos filtros de Cauchy minimales en $\Psi^*$, y supongamos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ tienen las mismas vecindades en $\tau\left(\widehat{\Psi}\right)$. Por lo tanto, para todo $U \in \Psi$ se tiene que $(\mathcal{F}, \mathcal{G}), (\mathcal{G}, \mathcal{F}) \in \widehat{U}$. Esto implica que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ es un filtro de Cauchy en $\Psi^*$. Como $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son filtros de Cauchy minimales en $(X, \Psi^*)$ y $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ está contenido en ambos, se concluye que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Esto demuestra que si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son distintos, no pueden tener las mismas vecindades en $\tau\left(\widehat{\Psi}\right)$, así que el espacio $\left(\widehat{X}, \widehat{\Psi}\right)$ es $T_0$.

Para probar que el espacio $(X, \Psi)$ es cuasiunimórfico a un subespacio denso de $\left(\widehat{X}, \widehat{\Psi}\right)$, se empieza por definir la función $i : X \to \widehat{X}$ como $i(x) = \eta^*(x)$. Por el corolario 5.11, la función $i$ está bien definida. Dado un entorno $U \in \Psi$, existe algún entorno $V \in \Psi$ tal que $V^3 \subseteq U$. La función $i$ es cuasiuniformemente continua ya que, para todo $x, y \in X$, si $(x, y) \in V$, entonces $(\eta^*(x), \eta^*(y)) \in \widehat{U}$. Además si $(\eta^*(x), \eta^*(y)) \in \widehat{U}$, entonces $(x, y) \in U$. Esto implica que la inversa izquierda de $i$ también es cuasiuniformemente continua y por lo tanto $i$ es una inmersión cuasiuniforme.

Nótese que $\widehat{\Psi}^* = \widehat{\Psi^*}$. Para probar que $i(X)$ es denso en $\left(\widehat{X}, \tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)\right)$, se prueba que, si $\mathcal{F} \in \widehat{X}$, entonces $i(\mathcal{F})$ converge a $\mathcal{F}$ en $\left(\widehat{X}, \tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)\right)$. Sean $\mathcal{F} \in \widehat{X}$ y $U_1 \in \Psi$. Entonces existen $V_1 \in \Psi, F \in \mathcal{F}$ tales que $V_1^2 \subseteq U_1$ y $F \times F \subseteq V_1$. Sean $U = U_1 \cap U_1^{-1}$ y $V = V_1 \cap V_1^{-1}$. Para cada $x \in F$ se tiene que $F \times V(x) \subseteq U$ y por lo tanto $i(x) = \eta^*(x) \in \widehat{U}(\mathcal{F})$. Esto muestra que $i(F) \subseteq \widehat{U}(\mathcal{F})$, así que $i(\mathcal{F})$ converge a $\mathcal{F}$.

Por la proposición 5.13, para probar que $\left(\widehat{X}, \widehat{\Psi}\right)$ es bicompleto, es suficiente mostrar que, dado cualquier filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $(X, \Psi^*)$, su imagen $i(\mathcal{F})$ converge en $\left(\widehat{X}, \tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)\right)$. Por la proposición 5.10, existe un filtro $\mathcal{G}$ que es de Cauchy minimal en $(X, \Psi^*)$ y es más grueso que $\mathcal{F}$. De acuerdo con lo demostrado en el párrafo anterior, $i(\mathcal{G})$ converge a $\mathcal{G}$ en $\left(\widehat{X}, \tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)\right)$. Como $i(\mathcal{F})$ es más fino que $i(\mathcal{G})$, entonces $i(\mathcal{F})$ también converge y se tiene que $\left(\widehat{X}, \widehat{\Psi}\right)$ es bicompleto. □

En el caso de que $(X, \Psi)$ sea un espacio uniforme, la construcción de la bicompletación dada en la demostración del teorema 5.14 es equivalente a la completación canónica de los espacios uniformes tal como se expone, por ejemplo, en [1]. A la función $i : X \to \widehat{X}$ definida en la demostración del teorema 5.14 se le llama la **inmersión canónica** de $(X, \Psi)$ en $\left(\widehat{X}, \widehat{\Psi}\right)$. El teorema siguiente es una consecuencia directa del corolario 5.9,

**Teorema 5.15.** *Si un espacio cuasiuniforme $(X, \Psi)$ es $T_0$, entonces toda bicompletación $T_0$ del mismo es cuasiunimórfica a $\left(\widehat{X}, \widehat{\Psi}\right)$.*

Cuando $(X, \Psi)$ es un espacio cuasiuniforme $T_0$, al espacio $\left(\widehat{X}, \widehat{\Psi}\right)$ se le conoce como **la bicompletación** de $(X, \Psi)$. En este caso se puede identificar a $X$ con su imagen $i(X)$ y, al hacerlo, los filtros en $X$ que son de Cauchy minimales en $\Psi^*$, corresponden a las trazas de los filtros de vecindades de puntos de $\widehat{X}$ en $\tau\left(\widehat{\Psi}^*\right)$. Por último, finalizamos el capítulo con el teorema siguiente.

**Teorema 5.16.** *Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme de Hausdorff, entonces $\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)$ es un espacio uniforme de Haisdorff completo y cualquier espacio uniforme de Hausdorff completo que tenga un subespacio denso unimórfico a $(X,\mathcal{U})$, es unimórfico a $\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)$.*

# 6 Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros por su revisión exhaustiva de este trabajo. Sus comentarios permitieron la mejora significativa del contenido.

# Bibliografía

[1] N. Bourbaki, General Topology I, Springer, 1989.

[2] T. L. Chen, *The $\alpha$-clousure $\alpha X$ of a topological space $X$*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 22(3):620-624, 1969.

[3] S. Cobzaş, *Functional analysis in asymmetric normed spaces*, Birkhäuser - Springer, 2013.

[4] Á. Császár. *Foundations of general topology*, volume 35 of *Pure and Applied Mathematics*. Pergamon Press, 1963.

[5] P. Fletcher and W. F. Lindgren. *A construction of the pair completion of a quasi-uniform space*. *Canad. Math. Bull.*, 21(1):53–59, 1978.

[6] P. Fletcher and W. F. Lindgren. *Quasi-uniform spaces*. Marcel Dekker, Inc., 1982.

[7] I. M. James. *Topological and uniform spaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, first edition edition, 1987

[8] I. M. James. *Topologies and uniformities*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, revised edition edition, 1999.

[9] H. P. A. Künzi. *Nonsymmetric topology*. 4((Proc. Colloquium on Topology 1993 Szekszárd, Hungary)):303–338, 1995.

[10] H. P. A. Künzi. *An introduction to quasi-uniform spaces*. 486((Beyond Topology)):239–304, 2009.

[11] E. Minguzzi. *Quasi-pseudo-metrization of topological preordered spaces*. 159:2888–2898, 2012.

[12] L. Nachbin. *Sur les espaces uniformes ordonnés. Comptes Rendus Paris*, 226:774–775, 1948.

[13] L. Nachbin. *Topology and order*. D. Van Nostrand Co., Inc., 1965.

[14] W. J. Pervin. *Quasi-uniformization of topological spaces*. 147:316–317, 1962.

[15] G. Salicrup. *Introducción a la topología*. Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[16] D. Tamari. *On a generalization of uniform structures and spaces. Bull. Res. Council Israel*, 3:417–428, 1954.

[17] A. Weil. *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, volume fasc. 551 of *Actual. Sci. Industr.* 1937.

Universidad Tecnológica Mixteca
Km 2.5 Carretera a Acatlima,
Huajuapan de León, Oaxaca, C.P. 69000

numeronatural@gs.utm.mx
ricardo@gs.utm.mx
jmhm@mixteco.utm.mx

**Matemáticas y sus aplicaciones 19, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-861-4**

# Capítulo 4

# La compactación de Stone-Čech mediante $\mathcal{Z}$-filtros

**Jesús Fernando Tenorio Arvide, Cenobio Yescas Aparicio**[1]

**Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca**

**Resumen**

Presentamos una construcción clara y detallada de la compactación de Stone-Čech de un espacio completamente regular empleando la teoría de $\mathcal{Z}$-filtros y $\mathcal{Z}$-ultrafiltros. Entre otras cosas, abordamos hechos básicos de la teoría de los cero conjuntos para dar paso a lo correspondiente de los $\mathcal{Z}$-filtros, herramienta fundamental en la construcción deseada.

## 1 Introducción

En topología, la complejidad de trabajar algún problema sobre un espacio varía de muchas maneras y no todas las veces resulta tan dócil el análisis del problema en cuestión. Por ello resulta importante contar con todas las herramientas y técnicas posibles para llevar a buen término cualquier trabajo. Específicamente, dados un espacio topológico $X$ y un problema $\mathbf{P}$ sobre $X$, una manera de proceder en la búsqueda de una solución para $\mathbf{P}$ es hallar un espacio más grande $Z$ que contenga una copia del espacio $X$, esto con el propósito de utilizar las propiedades que tenga $Z$ y reflejarlas a la copia de $X$. De este modo, siendo los espacios compactos unos escenarios con una amplia y vasta cantidad de propiedades, es natural que se busque encajar espacios arbitrarios no compactos en un espacio compacto.

[1]Autor para correspondencia. Este trabajo fue realizado con el apoyo del programa de Estancias Posdoctorales por México-CONACYT, octubre de 2021 a septiembre de 2022.

Es así como uno recurre al concepto de compactación de un espacio, herramienta por demás utilizada en numerosos campos de las matemáticas, tales como en Geometría y en Topología de sistemas dinámicos. De hecho, la idea de compactación empieza su desarrollo a la par de los comienzos de la formalización de la topología. De acuerdo a [3], uno los primeros ejemplos de compactación se remonta a 1858, cuando B. Riemann dio el primer ejemplo de compactación, a saber, "la esfera de Riemann". Este espacio es lo que se conoce como la compactación por un punto del plano complejo $\mathbb{C}$ y tiene el espíritu de lo que hemos planteado en el párrafo anterior, esto es, problemas de un espacio, en este caso $\mathbb{C}$, son reformulados en un espacio más grande, una esfera en $\mathbb{R}^3$, que contiene una copia del plano complejo $\mathbb{C}$.

En general, para un espacio localmente compacto uno puede construir su compactación por un punto (para una lectura más profunda ver [8]). De hecho, es conocido que para un espacio topológico pueden existir más de una compactación y en la práctica se busca o escoge la compactación más adecuada para los objetivos que se tengan.

De acuerdo a [3], los estudios hechos por J. Von Neumann en Mecánica cuántica utilizando el anillo de las funciones continuas y acotadas, fueron el fundamento para que J. Munkres planteara el siguiente problema: *si $Y$ es una compactación de un espacio $X$, ¿bajo qué condiciones una función continua de valores reales sobre $X$ se puede extender a $Y$?* Según [3], en 1937, M. H. Stone y E. Čech, de forma independiente, establecieron respuestas para esta pregunta, usando resultados de la teoría de $C^*$-álgebras. La solución a ese problema es lo que se conoce como la compactación de Stone-Čech.

Típicamente, la compactación de Stone-Čech de un espacio completamente regular suele ser obtenida a través del uso de funciones continuas y acotadas y la topología producto (vease [14]). El propósito principal de este escrito es exponer una construcción clara y detallada de la compactación de Stone-Čech, utilizando la teoría de $\mathcal{Z}$-filtros y $\mathcal{Z}$-ultrafiltros, técnica poco frecuente con la cual se obtiene una construcción con un enfoque conjuntista y hace uso de propiedades internas de los espacios completamente regulares. Esperamos que el documento sea en sí mismo autocontenido en aquellos resultados que no son de un curso básico de topología general.

La exposición está dividida en cinco secciones. Después de la Introducción, en la Sección 2 recordamos herramienta básica que empleamos en el resto del escrito. La Sección 3 la dedicamos al análisis de la teoría de los cero conjuntos, demostrando hechos fundamentales de este tipo de conjuntos. En la Sección 4 exponemos los resultados de los $\mathcal{Z}$-filtros y $\mathcal{Z}$-ultrafiltros, que son útiles para nuestros objetivos. Finalmente, en la Sección 5 detallamos la construcción de la compactación de Stone-Čech. Es importante señalar que tal construcción sigue los pasos, de cierta manera, del algoritmo indicado en [14, Ejercicio 19J].

# 2 Preliminares

En este apartado enunciamos la notación y hechos, ampliamente conocidos en el folklore de topología general, que utilizamos en el desarrollo y obtención de los resultados importantes que queremos exponer. Para las propiedades no demostradas, indicamos alguna referencia adecuada para su consulta. Si el lector desea conocer con mayor detalle sobre estos preliminares le recomendamos los textos [5, 7, 14], de donde además, hemos tomado la notación que empleamos a lo largo del escrito.

En los espacios topológicos, el conocer y conseguir bases para una topología siempre aligera el quehacer matemático y simplifica cálculos que se lleguen a generar. De esta manera, similar a como se definen bases para los conjuntos abiertos, podemos también definir lo que es una base para los conjuntos cerrados.

**Definición 2.1.** Sean $X$ un espacio topológico y $\mathcal{C}$ una familia de conjuntos cerrados de $X$. Se dice que $\mathcal{C}$ es una *base para los conjuntos cerrados de* $X$ si cualquier conjunto cerrado de $X$ se puede ver como la intersección de alguna subfamilia de $\mathcal{C}$.

Con la definición anterior, es posible expresar la dualidad entre las bases de los conjuntos cerrados con las bases de los conjuntos abiertos como sigue.

**Proposición 2.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. Se tiene que $\mathcal{C}$ es una base para los conjuntos cerrados de $X$ si y solo si la familia de los complementos de los elementos de $\mathcal{C}$ es una base para los conjuntos abiertos de $X$.*

*Demostración.* Primero recordemos que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos de $X$ es una base para los abiertos de $X$ si todo abierto de $X$ es una unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$. Con ello basta considerar $\mathcal{B} = \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{C}\}$. Ahora, consideremos que $\mathcal{C}$ es una base para los conjuntos cerrados de $X$ y $A \subseteq X$ un conjunto abierto. Como $X \setminus A$ es un conjunto cerrado, existe una familia $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $X \setminus A = \bigcap \mathcal{C}'$. Así, $A = \bigcup_{F \in \mathcal{C}'} (X \setminus F)$ y

$\{X \setminus F \mid F \in \mathcal{C}'\} \subseteq \mathcal{B}$. Es decir, $\mathcal{B}$ es una base para los conjuntos abiertos de $X$. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de $X$ tal que $\mathcal{B} = \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{C}\}$ es una base para los conjuntos abiertos de $X$. Si $F$ es un conjunto cerrado de $X$, $X \setminus F$ es un conjunto abierto. Luego, existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $X \setminus F = \bigcup_{U \in \mathcal{B}'} U$. Así, $F = \bigcap_{U \in \mathcal{B}'} (X \setminus U)$ y con ello $\mathcal{C}$ es una base para los conjuntos cerrados de $X$. □

Un ejemplo particular del uso de la Proposición 2.2 aparece en la Proposición 3.6. Por otro lado, la utilidad de la Definición 2.1 queda de manifiesto en los siguientes tres resultados. Aquí vemos que ciertas propiedades topológicas sobre un espacio $X$ es suficiente trabajarlas sobre los subconjuntos cerrados básicos de $X$ y no con todos los cerrados de $X$, y los resultados obtenidos tendrán validez sobre todo los cerrados.

**Proposición 2.3.** *Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función inyectiva. Si $\mathcal{C}$ es una base para los subconjuntos cerrados de $X$, entonces $f$ es cerrada si y solo si para todo $C \in \mathcal{C}$, $f(C)$ es un conjunto cerrado de $Y$.*

*Demostración.* Supongamos que $f$ es cerrada y sea $C \in \mathcal{C}$. Luego, como $C$ es un conjunto cerrado de $X$, se sigue que $f(C)$ es un conjunto cerrado de $Y$. Recíprocamente, veamos que $f$ es cerrada. Sea $E$ un subconjunto cerrado de $X$. Dado que $\mathcal{C}$ es base para los subconjuntos cerrados de $X$, existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $E = \bigcap \mathcal{C}'$. En vista de que $f$ es inyectiva, obtenemos que $f(E) = \bigcap\{f(F) \mid F \in \mathcal{C}'\}$. Así, por hipótesis, $f(E)$ es un conjunto cerrado de $Y$. □

Sabemos que la definición de función continua, típicamente, viene dada en términos de conjuntos abiertos. Sin embargo, existen caracterizaciones útiles del concepto sin que incluyan explícitamente el uso de conjuntos abiertos, una de ellas es la siguiente equivalencia que utiliza la noción de base de cerrados.

**Proposición 2.4.** *Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si $\mathcal{C}$ es una base para los subconjuntos cerrados de $Y$, entonces $f$ es continua en $X$ si y solo si para todo $C \in \mathcal{C}$, $f^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado de $X$.*

*Demostración.* Supongamos que $f$ es continua en $X$ y sea $C \in \mathcal{C}$. Dado que $C$ es un conjunto cerrado de $Y$, obtenemos que $f^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado de $X$. Recíprocamente, veamos que $f$ es continua en $X$. Sea $E$ un subconjunto cerrado de $Y$. En vista de que $\mathcal{C}$ es una base para los subconjuntos cerrados de $Y$, existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $E = \bigcap \mathcal{C}'$. Luego, $f^{-1}(E) = \bigcap\{f^{-1}(F) \mid F \in \mathcal{C}'\}$.

Así, por hipótesis, obtenemos que $f^{-1}$ es un subconjunto cerrado de $X$. Por tanto, $f$ es continua en $X$. □

Para un espacio topológico $X$ y $A \subseteq X$, denotamos *la cerradura* o *clausura* de $A$ por $\overline{A}$. Recordemos que $\overline{A}$ es un subconjunto cerrado de $X$ y que una propiedad importante de la clausura es que puede ser obtenida como la intersección de los subconjuntos cerrados de $X$ que contienen al conjunto.

**Proposición 2.5.** *Sean $X$ un espacio topológico, $\mathcal{C}$ una base para los subconjuntos cerrados de $X$ y $A \subseteq X$. Se cumple $\overline{A} = \bigcap\{C \in \mathcal{C} \mid A \subseteq C\}$.*

*Demostración.* Tomemos cualesquiera $x \in \overline{A}$ y $C \in \mathcal{C}$ tal que $A \subseteq C$. Luego, dado que $C$ es un subconjunto cerrado de $X$, se tiene que $x \in C$. Así, $\overline{A} \subseteq \bigcap\{C \in \mathcal{C} \mid A \subseteq C\}$. Por otro lado, sea $x \in \bigcap\{C \in \mathcal{C} \mid A \subseteq C\}$. Al ser $\overline{A}$ un subconjunto cerrado de $X$ y $\mathcal{C}$ es una base para los conjuntos cerrados de $X$, existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\overline{A} = \bigcap \mathcal{C}'$. Luego, $\bigcap\{C \in \mathcal{C} \mid A \subseteq C\} \subseteq \bigcap \mathcal{C}'$. De donde, $x \in \overline{A}$. Por tanto, $\bigcap\{C \in \mathcal{C} \mid A \subseteq C\} \subseteq \overline{A}$. □

Ahora bien, un manera de generar topologías sobre un conjunto es generando una familia que cumpla las propiedades de una base de los conjuntos cerrados.

**Definición 2.6.** Sean $X$ un conjunto y $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de $X$. Se dice que $\mathcal{C}$ es *base para los conjuntos cerrados* para alguna topología en $X$ si

1. Siempre que $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \cup C_2$ es una intersección de elementos de $\mathcal{C}$.

2. $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$.

Por otro lado, es conveniente tener presentes algunos de los axiomas de separación de un espacio.

**Definición 2.7.** Sea $X$ un espacio topológico. Se dice que:

1. $X$ es un espacio *de Hausdorff* si para cada par de puntos distintos $x$ y $y$ de $X$, existen subconjuntos abiertos $U$ y $V$ de $X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

2. $X$ es un espacio *completamente regular* si $X$ es un espacio de Hausdorff y si dados $x \in X$ y un subconjunto cerrado no vacío $A \subseteq X$ con $x \notin A$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.

3. $X$ es un espacio *normal* si $X$ es un espacio de Hausdorff y para cualesquiera subconjuntos cerrados ajenos $F_1$ y $F_2$ de $X$, existen subconjuntos abiertos $A_1$ y $A_2$ de $X$ tales que $F_1 \subseteq A_1$, $F_2 \subseteq A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

**Observación 2.8.** Es importante añadir que en la Definición 2.7-2, es equivalente pedir que la función cumpla $f(x) = 0$ y $f(A) = \{1\}$. A lo largo del escrito usamos esto según sea requerido.

La prueba de la Proposición 2.9 se puede consultar en [4, Pág. 154].

**Proposición 2.9.** *Si $X$ es un espacio normal, entonces $X$ es un espacio completamente regular.*

**Definición 2.10.** Sea $X$ un espacio topológico. Se dice que $X$ es un espacio *compacto* si toda cubierta abierta de $X$ admite una subcubierta finita.

La siguiente propiedad puede consultarse en [14, Pág. 121].

**Proposición 2.11.** *Todo espacio Hausdorff y compacto es un espacio normal.*

**Definición 2.12.** Una familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos de un conjunto $X$ tiene la *propiedad de la intersección finita* si para cada subcolección finita $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, se cumple que $\bigcap \mathcal{P}' \neq \emptyset$.

Así tenemos una caracterización de compacidad bastante recurrida en la literatura, una demostración se puede consultar en [14, Teorema 17.4].

**Teorema 2.13.** *Sea $X$ un espacio topológico. Se tiene que $X$ es compacto si y solo si toda familia $\mathcal{P}$ de conjuntos cerrados no vacíos con la propiedad de la intersección finita cumple que $\bigcap \mathcal{P} \neq \emptyset$.*

En particular, se cumple:

**Corolario 2.14.** *Sea $X$ un espacio topológico. Se tiene que $X$ es compacto si y solo si toda familia $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados básicos no vacíos con la propiedad de la intersección finita cumple que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es un espacio compacto. Luego, por el Teorema 2.13, cualquier familia $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados básicos no vacíos con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Recíprocamente, sea $\mathcal{P}$ una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita. Para cada $F \in \mathcal{P}$, existe una familia de cerrados básicos $\mathcal{C}_F$ tal que $F = \bigcap \mathcal{C}_F$. Consideremos $\mathcal{C} = \bigcup_{F\in\mathcal{P}} \mathcal{C}_F$. Notemos que $\bigcap \mathcal{P} = \bigcap \mathcal{C}$. Veamos que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita. Basta probar que si $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$, entonces $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$. En efecto, para $H_1$ y $H_2$, existen $F_1$ y $F_2$ en $\mathcal{P}$ tales que $F_1 \subseteq H_1$ y $F_2 \subseteq H_2$. Dado que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad de la intersección finita, se sigue que $\emptyset \neq F_1 \cap F_2 \subseteq H_1 \cap H_2$. Así, $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por hipótesis, $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{C} = \bigcap \mathcal{P}$. Con ello, por el Teorema 2.13, $X$ es un espacio compacto. $\square$

En lo que resta de esta sección establecemos los conceptos básicos referentes a la noción de compactación de un espacio y, en particular, a lo correspondiente de la compactación de Stone-Čech.

Recordemos que dados dos espacios topológicos $X$ y $Y$ y una función biyectiva $f : X \to Y$, se dice que $f$ es un *homeomorfismo* si $f$ es continua y además la función $f^{-1}$ es continua. Si $f$ es un homeomorfismo, decimos que $X$ es un espacio *homeomorfo* a $Y$ y escribimos $X \simeq Y$.

Por otro lado, si $X$ y $Y$ son espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, consideremos $Z = f(X)$ como subespacio de $Y$. Se define y denota por $f^* : X \to Z$ la función dada por $f^*(x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Es inmediato que $f^*$ es una función sobreyectiva. Lo anterior, nos lleva a la siguiente noción.

**Definición 2.15.** Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si $f^*$ es un homeomorfismo, entonces se dice que $f$ es un *encaje topológico*, o simplemente un *encaje*, de $X$ en $Y$.

Dada la gran cantidad de herramientas que otorga trabajar sobre un espacio compacto, resulta muy natural querer encajar un espacio no compacto en un espacio que sí tenga esta propiedad.

**Definición 2.16.** Sea $X$ un espacio topológico. Una *compactación de $X$* es un par ordenado $(K, h)$, donde $K$ es un espacio de Hausdorff compacto tal que $h$ es un encaje de $X$ en $K$ y $h(X)$ es denso en $K$.

Notemos que al ser topológicamente el mismo espacio, es frecuente identificar $h(X)$ con $X$. Es importante hacer la siguiente aclaración.

**Observación 2.17.** Se tiene que solo los espacios completamente regulares pueden ser compactados, dado que un subconjunto de un espacio Hausdorff compacto es necesariamente completamente regular (ver [5, Teorema 3.5.1]).

Hay muchos ejemplos de compactaciones, algunos muy conocidos son:

**Ejemplo 2.18.** Sea $X = [0, 1)$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$. Se tiene que $Y = [0, 1]$ es una compactación de $X$. En efecto, sea $f : X \to Y$ la función dada por $f(x) = x$. Es fácil ver que $f^* \colon X \to f(X)$ es una función continua y además que $(f^*)^{-1}$ es continua. Luego, $f^*$ es un homeomorfismo. Para tener que $\overline{f(X)} = Y$, solo notemos que 1 es punto de acumulación de $X$.

**Ejemplo 2.19.** Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la topología usual. Se tiene que $Y = \mathbf{S}^2$, donde $\mathbf{S}^2$ es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, es una compactación de $X$. En efecto, el encaje de $X$ en $Y$ requerido es la función conocida como proyección estereográfica (ver [8, Pág. 236]). Los detalles de que efectivamente $Y$ es una compactación de $X$ se pueden consultar en [8, Pág. 400].

Se sabe de la teoría de compactaciones que una de las más estudiadas, empleadas y quizá más importantes, es la compactación de Stone-Čech. Para poder definirla, se requiere del resultado siguiente, del cual, una demostración que utiliza el espacio de funciones continuas y acotadas con valores reales, se puede consultar en [14, Definición 19.4 y Teorema 19.5].

**Teorema 2.20.** *Si $X$ es un espacio topológico completamente regular, entonces existen un espacio Hausdorff compacto $\beta X$ y una función $\rho_X : X \to \beta X$ tales que*

1. *$\rho_X$ es un encaje que satisface $\beta X = \overline{\rho_X(X)}$, y*
2. *si $K$ es un espacio Hausdorff compacto y $\rho : X \to K$ es una función continua entonces existe una función continua $\psi : \beta X \to K$ tal que $\rho = \psi \circ \rho_X$.*

El siguiente resultado dicta la unicidad del espacio $\beta X$ referido en el Teorema 2.20, la prueba puede ser consultada en [5, Teorema 3.6.1].

**Teorema 2.21.** *Sean $X$ un espacio topológico completamente regular, $K'$ un espacio compacto y Hausdorff y $f : X \to K'$ una función contiuna. Si $K'$ y $f$ satisfacen 1 y 2 del Teorema 2.20, entonces $K'$ y $\beta X$ son espacios homeomorfos.*

Una vez establecidos los Teoremas 2.20 y 2.21, enunciamos la siguiente definición relacionada a ellos.

**Definición 2.22.** Si $X$ es un espacio completamente regular, entonces al espacio $\beta X$ del Teorema 2.20 se le conoce como la *compactación de Stone-Čech de* $X$.

Recordemos que a la familia de compactaciones de un espacio completamente regular se le puede asignar un orden (vea [5] o [14]). Más aún, con este orden, la compactación de Stone-Čech resulta ser la compactación "más grande de esta familia". Si el lector gusta más información detallada acerca de lo anterior puede consultar [8], [13] o [14].

# 3 Cero conjuntos

Los cero conjuntos son una herramienta usual en el estudio del espacio de funciones continuas. Como se menciona en [6], son útiles para analizar las propiedades topológicas de un espacio con las propiedades algebraicas de su espacio de funciones continuas. Para nuestros propósitos, los cero conjuntos toman un papel bastante importante, puesto que son una familia de conjuntos que contiene suficiente información topológica para la descripción de un espacio completamente regular. Así, es fundamental detallar las propiedades principales de este tipo de conjuntos, a las cuales se recurrirá en adelante. Usamos [6] y [14] como los textos principales en el estudio de este tema.

**Definición 3.1.** Sean $X$ un espacio topológico y $Z \subseteq X$. Se dice que $Z$ es un *cero conjunto en* $X$, si existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = Z$.

Dado un espacio topológico $X$, denotamos por $\mathcal{Z}(X)$ al conjunto de todos los cero conjuntos en $X$. Esto es,

$$\mathcal{Z}(X) = \{Z \subseteq X \mid Z \text{ es cero conjunto en } X\}.$$

Como vemos a continuación, en cualquier espacio topológico, siempre existen cero conjuntos.

**Proposición 3.2.** *Sea $X$ un espacio topológico. Se tiene que $\emptyset, X \in \mathcal{Z}(X)$.*

*Demostración.* La función constante $f\colon X \to [0,1]$, definida por $f(x) = 1$, para cada $x \in X$, y la función constante $g\colon X \to [0,1]$, definida por $g(x) = 0$, para cada $x \in X$, son las funciones que hacen a $\emptyset$ y a $X$ cero conjuntos, respectivamente. □

Veamos ahora una propiedad importante de cualquier cero conjunto.

**Proposición 3.3.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $Z \in \mathcal{Z}(X)$, entonces $Z$ es un conjunto cerrado de $X$.*

*Demostración.* Sea $Z \in \mathcal{Z}(X)$. Tenemos que $Z = f^{-1}(\{0\})$, para alguna función continua $f : X \to [0,1]$. Dada la continuidad de $f$ y el hecho de que $\{0\}$ es un conjunto cerrado de $[0,1]$, $Z$ es un conjunto cerrado de $X$. □

En vista de la Proposición 3.3, vemos que la familia de todos los cero conjuntos está contenida en la familia de todos los conjuntos cerrados de un espacio $X$. Cabe señalar que existen espacios para los cuales la igualdad de estas dos familias se cumple. En efecto, consideremos un espacio discreto e infinito $X$. Para todo subconjunto cerrado $A$ de $X$, definimos $f : X \to [0,1]$ como $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \notin A$. Se tiene que $f$ es continua y hace a $A$ un cero conjunto. Por otro lado, también existen espacios para los que la contención es propia. Un ejemplo de este hecho se puede consultar en [5, Ejemplo 1.5.9], donde se muestra un espacio con subconjuntos cerrados no triviales, en el cual toda función continua del espacio a $[0,1]$ (o $\mathbb{R}$) es constante, así, los únicos cero conjuntos son el total y el vacío.

**Ejemplo 3.4.** Si $a \in [0,1]$, entonces $[0,a] \in \mathcal{Z}([0,1])$ y $[a,1] \in \mathcal{Z}([0,1])$. En efecto, la afirmación es clara si $a = 0$ o $a = 1$. Supongamos que $0 < a < 1$. Las funciones $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ y $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ definidas, respectivamente, para cada $x \in [0,1]$ por:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,a] \\ \frac{x-a}{1-a} & \text{si} \quad x \in [a,1] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{a-x}{a} & \text{si} \quad x \in [0,a] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [a,1] \end{cases}$$

son funciones continuas tales que $f_1^{-1}(\{0\}) = [0,a]$ y $f_2^{-1}(\{0\}) = [a,1]$.

Ahora veamos la manera en la que los cero conjuntos se comportan respecto a intersecciones y uniones. Para la demostración de estas propiedades, la cual incluimos por completitud del trabajo, es importante recordar la definición de convergencia uniforme para series de funciones (se puede consultar [1, Pág. 271]).

**Proposición 3.5.** *Sea $X$ un espacio topológico. Se cumple lo siguiente:*

1. *Si $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Z}(X)$, entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} Z_i \in \mathcal{Z}(X)$.*

2. *Si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$, entonces $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$.*

*Demostración.*
1. Sea $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Z}(X)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, fijemos una función continua $f_i : X \to [0,1]$ tal que $f_i^{-1}(\{0\}) = Z_i$. Para $x \in X$, dado que para todo $i \in \mathbb{N}$, $f_i(x) \leq 1$, se sigue que $\frac{f_i(x)}{2^i} \leq \frac{1}{2^i}$. Así, en vista de que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$, utilizando la prueba $M$ de Weierstrass ([1, Pág. 271]), obtenemos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i(x)}{2^i}$ converge uniformemente en $X$. Es decir, existe una función $g\colon X \to [0,1]$ tal que $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i(x)}{2^i}$, para todo $x \in X$. Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $g_k : X \to [0,1]$ como $g_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i(x)}{2^i}$, para todo $x \in X$. Recordando que la suma finita de funciones continuas es continua, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $g_k$ es continua. Luego, por [1, Teorema 9.2], concluimos que $g$ es continua. Veamos ahora que $g^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} Z_i$. Primero, mostremos que $g^{-1}(\{0\}) \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} Z_i$. Sea $x \in g^{-1}(\{0\})$, luego $0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i(x)}{2^i}$. Dado que todos los términos de la serie son mayores o iguales a cero, se sigue que para todo $i \in \mathbb{N}$, $f_i(x) = 0$. Con ello, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x \in f_i^{-1}(\{0\})$, es decir, $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} Z_i$. Así, $g^{-1}(\{0\}) \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} Z_i$. Ahora mostramos que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} Z_i \subseteq g^{-1}(\{0\})$. Sea $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} Z_i$. Tenemos que para toda $i \in \mathbb{N}$, $f_i(x) = 0$. Por tanto, $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i(x)}{2^i} = 0$. Así $x \in g^{-1}(\{0\})$, de lo cual obtenemos que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} Z_i \subseteq g^{-1}(\{0\})$, y por lo tanto $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} Z_i \in \mathcal{Z}(X)$.
2. Sean $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$. Tomemos dos funciones continuas $f_1 : X \to [0,1]$ y $f_2 : X \to [0,1]$ tales que $f_1^{-1}(\{0\}) = Z_1$ y $f_2^{-1}(\{0\}) = Z_2$. Definimos la función $f : X \to [0,1]$ por la asignación $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, para cada $x \in X$. Se tiene que $f$ es una función continua, pues $f_1$ y $f_2$ lo son. Veamos que $f^{-1}(\{0\}) = Z_1 \cup Z_2$. Para este fin, sea $x \in f^{-1}(\{0\})$. Luego, $f(x) = 0$; es decir, $f_1(x)f_2(x) = 0$. Así, o bien $f_1(x) = 0$ o bien $f_2(x) = 0$. En cualquier caso $x \in Z_1 \cup Z_2$. Recíprocamente, sea $x \in Z_1 \cup Z_2$. Luego, o bien $x \in Z_1$ o bien $x \in Z_2$. Así, o $f_1(x) = 0$ o $f_2(x) = 0$. Por tanto, $f(x) = f_1(x)f_2(x) = 0$ y $x \in f^{-1}(\{0\})$. Con todo, la igualdad deseada queda demostrada. Por tanto, $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$. □

Los cero conjuntos poseen suficiente estructura para describir la topología de un espacio completamente regular como vemos a continuación.

**Proposición 3.6.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio completamente regular. La familia $\mathcal{Z}(X)$ es base para los conjuntos cerrados de la topología $\tau$.*

*Demostración.* Veamos que la familia $\{X \setminus Z \mid Z \in \mathcal{Z}(X)\}$ es una base para topología $\tau$ (ver Proposición 2.2). Por la Proposición 3.3, para cada $Z \in \mathcal{Z}(X)$, $X \setminus Z$ es un conjunto abierto de $X$, es decir, $\{X \setminus Z \mid Z \in \mathcal{Z}(X)\} \subseteq \tau$. Ahora, fijemos $A \in \tau$ y $a \in A$. Demostremos que existe $Z \in \mathcal{Z}(X)$ tal que $a \in X \setminus Z \subseteq A$. Como $A$ es un conjunto abierto, $X \setminus A$ es un conjunto cerrado. Además, $a \notin X \setminus A$. Dado que $X$ es completamente regular, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(a) = 1$ y $f(X \setminus A) = \{0\}$. Notemos que $X \setminus A \subseteq f^{-1}(\{0\})$. Sea $Z = f^{-1}(\{0\})$. Se tiene que $Z \in \mathcal{Z}(X)$ y $a \in X \setminus Z \subseteq A$. De lo anterior, tenemos que $\{X \setminus Z \mid Z \in \mathcal{Z}(X)\}$ es una base para $\tau$, es decir, $\mathcal{Z}(X)$ es una base para los conjuntos cerrados de la topología $\tau$ de $X$. □

La siguiente es una propiedad de los cero conjuntos y una función continua.

**Proposición 3.7.** *Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Si $Z \in \mathcal{Z}(Y)$, entonces $f^{-1}(Z) \in \mathcal{Z}(X)$.*

*Demostración.* Si $Z \in \mathcal{Z}(Y)$, entonces existe una función continua $g : Y \to [0, 1]$ tal que $g^{-1}(\{0\}) = Z$. Considerando la función $g \circ f$, tenemos que $(g \circ f)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(Z)$. Por tanto, $f^{-1}(Z) \in \mathcal{Z}(X)$. □

Una herramienta recurrente en las secciones posteriores es la contenida en el siguiente lema. Denotamos por $\mathcal{N}(x)$ el conjunto de vecindades abiertas del punto $x$.

**Lema 3.8.** *Sean $X$ un espacio completamente regular y $x \in X$. Si $U \in \mathcal{N}(x)$, entonces existe $Z \in \mathcal{Z}(X)$ tal que $x \in Z \subseteq U$.*

*Demostración.* Sea $U \in \mathcal{N}(x)$ cualquiera. Como $X$ es completamente regular, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus U) = \{1\}$. Sea $Z = f^{-1}(\{0\})$. Luego, $Z \in \mathcal{Z}(X)$. Como $f(x) = 0$, tenemos que $x \in Z$. Además, $Z \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$. Dado que $X \setminus U \subseteq f^{-1}(\{1\})$, tenemos que $Z \cap (X \setminus U) = \emptyset$, es decir, $Z \subseteq U$. □

# 4 $\mathcal{Z}$-filtros y $\mathcal{Z}$-ultrafiltros

La teoría de filtros y ultrafiltros aparece por primera vez en 1908 en un trabajo de Riez [12], y es Cartan [2] quien en 1937 presenta la convergencia en Topología en términos de filtros, teoría que en 1940 desarrolla Bourbaki [5]. Recordemos que la motivación para la definición de filtros fue justamente la abstracción de las propiedades principales de la familia de vecindades de un punto. Por otro lado, es sabido, que dentro de la Teoría de filtros, hay tipos especiales de filtros que permiten describir nociones y resultados de Topología y de la Teoría de conjuntos de una forma sencilla. Para el propósito principal de nuestro documento, trabajamos sobre los denominados $\mathcal{Z}$-filtros. Si el lector desea consultar la teoría general de los filtros, ésta se puede encontrar en diversos textos. Los autores recomiendan, por ejemplo, [9] o [10].

En lo que sigue, utilizamos en todo momento la noción de cero conjunto, así como la notación $\mathcal{Z}(X)$.

**Definición 4.1.** Sea $X$ un espacio topológico. Un *$\mathcal{Z}$-filtro sobre $X$* es una colección $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Z}(X)$ con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. Si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$, entonces $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$.
3. Dados $Z_1 \in \mathcal{F}$ y $Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$, si $Z_1 \subseteq Z_2$, entonces $Z_2 \in \mathcal{F}$.

**Ejemplo 4.2.** Sean $X$ un espacio topológico y $x \in X$. La familia $\mathcal{F}_x = \{Z \in \mathcal{Z}(X) \mid x \in Z\}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro sobre $X$. En efecto, tenemos que $\emptyset \notin \mathcal{F}_x$, de lo contrario $x \in \emptyset$, una contradicción. Además, en vista de la Proposición 3.2, $X \in \mathcal{F}_x$. Así, $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$. Con ello se satisface la primera condición para ser $\mathcal{Z}$-filtro. Ahora, si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in Z_1$ y $x \in Z_2$. Luego, $x \in Z_1 \cap Z_2$. Por la Proposición 3.5-(1), $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$. De donde, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}_x$. Así, resta probar la tercera condición para ser $\mathcal{Z}$-filtro. Sean $Z_1 \in \mathcal{F}_x$ y $Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$ tales que $Z_1 \subseteq Z_2$. Notemos que $x \in Z_2$. Así, $Z_2 \in \mathcal{F}_x$. Por tanto, $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{Z}$-filtro y le llamamos el *$\mathcal{Z}$-filtro principal sobre $x$*.

A partir de aquí los $\mathcal{Z}$-filtros principales serán de uso constante en el resto del documento. Veamos las nociones de convergencia y de punto de acumulación de filtros para el caso de los $\mathcal{Z}$-filtros.

**Definición 4.3.** Sean $X$ un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro sobre $X$ y $p \in X$.

1. Se dice que $\mathcal{F}$ *converge a* $p$, si para cada $V \in \mathcal{N}(p)$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq V$.

2. Se dice que $\mathcal{F}$ tiene a $p$ como *punto de acumulación* si $p \in F$, para todo $F \in \mathcal{F}$.

Para indicar que $\mathcal{F}$ converge a $p$, escribimos $\mathcal{F} \to p$. A su vez, cuando $p$ es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$, lo denotamos por $\mathcal{F} \succ p$.

**Ejemplo 4.4.** En un espacio completamente regular $X$, el $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{F}_x$ del Ejemplo 4.2 es tal que $\mathcal{F}_x \to x$. En efecto, sea $V \in \mathcal{N}(x)$. Tenemos que $X \setminus V$ es un conjunto cerrado. Por el Lema 3.8, existe $Z \in \mathcal{Z}(X)$ tal que $x \in Z \subseteq V$. Como $Z \in \mathcal{F}_x$, se sigue que $\mathcal{F}_x \to x$.

El siguiente resultado indica que cuando un $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{F}$ se acumula en un punto, existe un $\mathcal{Z}$-filtro que lo refina y que converge al punto de acumulación de $\mathcal{F}$. En símbolos, esto lo escribimos como sigue.

**Proposición 4.5.** *Sean $X$ un espacio y $x \in X$. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro tal que $\mathcal{F} \succ x$, entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_x$.*

*Demostración.* Como $\mathcal{F} \succ x$, se sigue que para cada $Z \in \mathcal{F}$, $x \in Z$. Así, para cada $Z \in \mathcal{F}$, $Z \in \mathcal{F}_x$, es decir, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_x$. □

Establezcamos ahora otra noción trascendental para nuestros propósitos.

**Definición 4.6.** Sea $X$ un espacio topológico. Un $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{U}$ sobre $X$ es un *$\mathcal{Z}$-ultrafiltro* si es un $\mathcal{Z}$-filtro maximal, esto es, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro sobre $X$ tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Veamos una herramienta que permite comprobar si un $\mathcal{Z}$-filtro es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro sin la necesidad de interactuar explícitamente con la propiedad de maximalidad.

**Proposición 4.7.** *Sea $X$ un espacio topológico. Para un $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{U}$ sobre $X$, son equivalentes:*

*(1) $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro sobre $X$.*

*(2) Si $Z \in \mathcal{Z}(X)$ y $Z \cap F \neq \emptyset$, para cada $F \in \mathcal{U}$, entonces $Z \in \mathcal{U}$.*

*Demostración.*
(1)$\Rightarrow$(2) Supongamos que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro. Sea $Z \in \mathcal{Z}(X)$ tal que $Z \cap F \neq \emptyset$, para cada $F \in \mathcal{U}$. Veamos que $Z \in \mathcal{U}$. Fijemos $F \in \mathcal{U}$. Definamos el conjunto

$$\mathcal{Z}_F = \{Z' \in \mathcal{Z}(X) \mid Z \cap F \subseteq Z'\}.$$

Probemos que $\mathcal{Z}_F$ es un $\mathcal{Z}$-filtro. Es claro que $\mathcal{Z}_F \subseteq \mathcal{Z}(X)$. Ahora, puesto que $Z, F \in \mathcal{Z}_F$ y $Z \cap F \neq \emptyset$, tenemos $\mathcal{Z}_F \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{Z}_F$. Para ver que la familia $\mathcal{Z}_F$ es cerrada bajo intersecciones, tomemos $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_F$. Luego, $Z \cap F \subseteq Z_1$ y $Z \cap F \subseteq Z_2$. Así, $Z \cap F \subseteq Z_1 \cap Z_2$. De donde, por la Proposición 3.5-(1), $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}_F$. Por último, sea $Z' \in \mathcal{Z}(X)$ tal que $Z_1 \subseteq Z'$, para algún $Z_1 \in \mathcal{Z}_F$. Dado que $Z \cap F \subseteq Z_1$, se sigue, por transitividad que, $Z \cap F \subseteq Z'$. Por tanto, $Z' \in \mathcal{Z}_F$. Así, $\mathcal{Z}_F$ es un $\mathcal{Z}$-filtro.
Por otro lado, veamos que $\bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$ es un $\mathcal{Z}$-filtro. En efecto, es claro que $\bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F \subseteq \mathcal{Z}(X)$ y basta notar que cada $\mathcal{Z}_F \neq \emptyset$, para obtener $\bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F \neq \emptyset$. Además, como para cada $F \in \mathcal{U}$, $\emptyset \notin \mathcal{Z}_F$, obtenemos que $\emptyset \notin \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$. Sigue ver que intersecciones de elementos de $\bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$ permanecen en $\bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$. Para este fin, sean $Z_1, Z_2 \in \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$. Luego, $Z_1 \in \mathcal{Z}_{F_1}$ y $Z_2 \in \mathcal{Z}_{F_2}$ para algunos $F_1, F_2 \in \mathcal{U}$. De aquí, $Z \cap F_1 \subseteq Z_1$ y $Z \cap F_2 \subseteq Z_2$. Como $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{U}$, se sigue que $(Z \cap F_1) \cap (Z \cap F_2) \neq \emptyset$. Más aún, $(Z \cap F_1) \cap (Z \cap F_2) \subseteq Z_1 \cap Z_2$. Con esto, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}_{F_1 \cap F_2} \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$, así $Z_1 \cap Z_2 \in \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$. Ahora, sea $Z' \in \mathcal{Z}(X)$ tal que $Z_1 \subseteq Z'$, para algún $Z_1 \in \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$. Tenemos que $Z_1 \in \mathcal{Z}_{F_1}$, para algún $F_1 \in \mathcal{U}$, es decir, $Z \cap F_1 \subseteq Z_1$. Por transitividad, obtenemos que $Z \cap F_1 \subseteq Z'$. Luego, $Z' \in \mathcal{Z}_{F_1}$, y por tanto $Z' \in \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$. Con esto tenemos que $\bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$ es un $\mathcal{Z}$-filtro.
Ahora veamos que $\mathcal{U} = \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$. Tenemos que, para cada $F' \in \mathcal{U}$, $F' \in \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$, y así $\mathcal{U} \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F$. Dado que $\mathcal{U}$ es $\mathcal{Z}$-ultrafiltro (recordar Definición 4.6), obtenemos la igualdad. Finalmente, para cada $F \in \mathcal{U}$, $Z \in \mathcal{Z}_F$. Por lo tanto, $Z \in \bigcup_{F \in \mathcal{U}} \mathcal{Z}_F = \mathcal{U}$.
(2)$\Rightarrow$(1) Supongamos que se cumple (2). Sea $\mathcal{G}$ un $\mathcal{Z}$-filtro tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$. Por demostrar que $\mathcal{G} = \mathcal{U}$. Para ello solo falta ver que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$. Sea $G \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$, al ser $\mathcal{G}$ un $\mathcal{Z}$-filtro tenemos que para todo $F \in \mathcal{U}$, $G \cap F \in \mathcal{G}$. Puesto que $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro, $G \cap F \neq \emptyset$. Por (2) obtenemos ahora que $G \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$. Luego, $\mathcal{G} = \mathcal{U}$. Por tanto, $\mathcal{U}$ es $\mathcal{Z}$-ultrafiltro. □

La maximalidad del filtro del Ejemplo 4.2 se puede obtener fácilmente utilizando la Proposición 4.7, como vemos a continuación.

**Ejemplo 4.8.** Para un espacio completamente regular $X$ y $x \in X$, el $\mathcal{Z}$-filtro principal sobre $x$, $\mathcal{F}_x$, es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro. En efecto, sea $P \in \mathcal{Z}(X)$ tal que $P \cap Z \neq \emptyset$, para todo $Z \in \mathcal{F}_x$. Veamos que $P \in \mathcal{F}_x$. Supongamos lo contrario. Al ser $X \setminus P \in \mathcal{N}(x)$, se sigue del Lema 3.8 que existe $Z \in \mathcal{Z}(X)$ que cumple $x \in Z \subseteq X \setminus P$. Es claro que $Z \in \mathcal{F}_x$. Sin embargo, $P \cap Z = \emptyset$, lo cual contradice la elección de $P$. Se sigue que $x \in P$ y así, $P \in \mathcal{F}_x$. De la Proposición 4.7 tenemos que $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro.

Además de que los $\mathcal{Z}$-filtros principales $\mathcal{F}_x$ sean $\mathcal{Z}$-ultrafiltros, tenemos la siguiente propiedad de unicidad.

**Proposición 4.9.** *Sean $X$ un espacio completamente regular y $x \in X$. El $\mathcal{Z}$-filtro principal sobre $x$, $\mathcal{F}_x$, es el único $\mathcal{Z}$-ultrafiltro convergente a $x$.*

*Demostración.* En vista de los Ejemplos 4.4 y 4.8, resta demostrar la unicidad de $\mathcal{F}_x$. Sea $\mathcal{U}$ un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro convergente a $x$. Supongamos que $\mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{F}_x$. Fijemos $G \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{F}_x$. Por definición de $\mathcal{F}_x$, se cumple que $x \notin G$. Así, $X \setminus G \in \mathcal{N}(x)$. En vista de que $\mathcal{U} \to x$, existe $G' \in \mathcal{U}$ tal que $G' \subseteq X \setminus G$. Puesto que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro, $G \cap G' \in \mathcal{U}$. Esta última pertenencia contradice que $\mathcal{U}$ sea un $\mathcal{Z}$-filtro porque $G \cap G' \subseteq G \cap (X \setminus G) = \emptyset$. De esta manera llegamos a que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_x$. Como $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro, es decir, es maximal respecto a la contención con otros $\mathcal{Z}$-filtros, tenemos que $\mathcal{U} = \mathcal{F}_x$. Con lo anterior concluimos que $\mathcal{F}_x$ es el único $\mathcal{Z}$-ultrafiltro convergente a $x$. $\square$

Similarmente a la teoría de filtros y ultrafiltros, la existencia de $\mathcal{Z}$-ultrafiltros no triviales (en el sentido de que no sean de la forma $\mathcal{F}_x$) no es un hecho inmediato. Tal existencia está fundamentada en el Axioma de Elección y la prueba es análoga a la que se conoce en teoría de ultrafiltros. Camino a demostrar la versión para la teoría de $\mathcal{Z}$-filtros, recordemos el Axioma de elección en su versión de Lema de Kuratowski-Zorn. Los conceptos no definidos se pueden consultar en las Secciones I.3 e I.4 de [5].

**Lema 4.10** (Lema de Kuratowski-Zorn)**.** *Si $\mathfrak{C}$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathfrak{C}$ está acotado superiormente, entonces $\mathfrak{C}$ tiene un elemento maximal.*

**Proposición 4.11.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\mathfrak{B}$ es un conjunto no vacío totalmente ordenado de $\mathcal{Z}$-filtros sobre $X$, entonces $\bigcup \mathfrak{B}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro sobre $X$.*

*Demostración.* Veamos que $\bigcup \mathfrak{B}$ satisface las condiciones de ser $\mathcal{Z}$-filtro. Claramente, $\emptyset \notin \bigcup \mathfrak{B}$, pues $\emptyset \notin \mathcal{F}$, para cada $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}$. Además, $\bigcup \mathfrak{B} \neq \emptyset$ puesto que $\mathfrak{B} \neq \emptyset$. Ahora, sean $Z_1, Z_2 \in \bigcup \mathfrak{B}$. Como $\mathfrak{B}$ es totalmente ordenado, existe $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}$ tal que $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$. Al ser $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathfrak{B}$, tenemos que $Z_1 \cap Z_2 \in \bigcup \mathfrak{B}$. Finalmente, sean $Z_1 \in \bigcup \mathfrak{B}$ y $Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$ tales que $Z_1 \subseteq Z_2$. Es claro que existe $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}$ con $Z_1 \in \mathcal{F}$. Usando que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro obtenemos que $Z_2 \in \mathcal{F}$. Así, $Z_2 \in \bigcup \mathfrak{B}$. Así, hemos probado que $\bigcup \mathfrak{B}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro. □

**Teorema 4.12.** *Todo $\mathcal{Z}$-filtro está contenido en un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro sobre un espacio topológico $X$. Consideremos la familia

$$\mathfrak{C} = \{\mathcal{F}' \mid \mathcal{F}' \text{ es un } \mathcal{Z}\text{-filtro sobre } X \text{ y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'\}.$$

Notemos que $\mathfrak{C} \neq \emptyset$, pues $\mathcal{F} \in \mathfrak{C}$. Además, $\mathfrak{C}$ está parcialmente ordenado con el orden dado por $\subseteq$. Mostremos ahora que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathfrak{C}$ está acotado superiormente. Para ello sea $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ un conjunto totalmente ordenado. Por la Proposición 4.11, $\bigcup \mathfrak{B}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro. Tenemos que $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathfrak{B}$, para toda $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}$. Es decir, $\bigcup \mathfrak{B}$ es una cota superior del conjunto $\mathfrak{B}$. Como el conjunto totalmente ordenado en $\mathfrak{C}$ lo tomamos arbitrario, podemos aplicar el Lema de Kuratowski-Zorn y decir que $\mathfrak{C}$ tiene un elemento maximal. Sea $\mathcal{U}$ un elemento maximal de $\mathfrak{C}$. Ya que $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}$ entonces $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro, además $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Ahora solo queda mostrar que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro. En efecto, sea $\mathcal{G}$ un $\mathcal{Z}$-filtro tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$. Dado que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, entonces por transitividad obtenemos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. De aquí se sigue que $\mathcal{G} \in \mathfrak{C}$. Además, como $\mathcal{U}$ es un elemento maximal de $\mathfrak{C}$ con el orden $\subseteq$, entonces $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$. Con lo anterior, concluimos que $\mathcal{G} = \mathcal{U}$, lo cual prueba que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro. □

Presentamos otro tipo de $\mathcal{Z}$-filtros con bastante utilidad.

**Definición 4.13.** Sea $X$ un espacio topológico. Se dice que un $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{F}$ es *primo*, si para cada $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$ tales que $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F}$, tenemos que $Z_1 \in \mathcal{F}$ o $Z_2 \in \mathcal{F}$.

A partir de la Definición 4.13 tenemos el siguiente teorema, la propiedad resulta ser una condición necesaria para que cualquier $\mathcal{Z}$-filtro sea un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro.

**Teorema 4.14.** *Todo $\mathcal{Z}$-ultrafiltro es primo.*

*Demostración.* Sean $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro sobre un espacio topológico $X$ y $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$ tales que $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F}$. Supongamos que $Z_1 \notin \mathcal{F}$ y $Z_2 \notin \mathcal{F}$. Luego, por la Proposición 4.7, existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $Z_1 \cap F_1 = \emptyset$ y $Z_2 \cap F_2 = \emptyset$. Con lo anterior se sigue que $Z_1 \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$ y $Z_2 \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$. Dado que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ y $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F}$, por ser $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro tenemos que

$$\emptyset \neq (Z_1 \cup Z_2) \cap (F_1 \cap F_2) = (Z_1 \cap (F_1 \cap F_2)) \cup (Z_2 \cap (F_1 \cap F_2)).$$

Esto es una contradicción, puesto que $Z_1 \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$ y $Z_2 \cap (F_1 \cap F_2) = \emptyset$. Así, $Z_1 \in \mathcal{F}$ o $Z_2 \in \mathcal{F}$. □

Teniendo en mente la Proposición 3.6 y recordando las Definiciones 4.3-(2) y 4.13 tenemos un resultado importante.

**Teorema 4.15.** *En un espacio completamente regular $X$ todo $\mathcal{Z}$-filtro primo tiene a lo más un punto de acumulación.*

*Demostración.* Sean $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro primo sobre $X$ y $p, q$ puntos de acumulación de $\mathcal{F}$ tales que $p \neq q$. Como $X$ es un espacio de Hausdorff, existen dos subconjuntos abiertos básicos $U$ y $V$ de $X$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, en vista de la Proposición 3.6, tenemos que $X \setminus U \in \mathcal{Z}(X)$ y $X \setminus V \in \mathcal{Z}(X)$. Como $U \cap V = \emptyset$, $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$. Recordemos que $X \in \mathcal{F}$. Así, $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) \in \mathcal{F}$. Al ser $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro primo, o $X \setminus U \in \mathcal{F}$ o $X \setminus V \in \mathcal{F}$. Supongamos que $X \setminus U \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \succ p$, tenemos que $p \in X \setminus U$. Así, $(X \setminus U) \cap U \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Ahora, si suponemos que $X \setminus V \in \mathcal{F}$, obtenemos que $(X \setminus V) \cap V \neq \emptyset$, lo cual tampoco es posible. La contradicción surge de considerar que $p \neq q$. Por tanto, $p = q$, Así, $\mathcal{F}$ tiene a lo más un punto de acumulación. □

Para el siguiente resultado, recordemos la propiedad de la intersección finita (ver Definición 2.12).

**Lema 4.16.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro sobre $X$, entonces $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita.*

*Demostración.* Sea $\{Z_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq \mathcal{F}$. Veamos que $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} Z_i$. De la propiedad 2 de la definición de $\mathcal{Z}$-filtro, podemos deducir que $\bigcap_{i=1}^{n} Z_i \in \mathcal{F}$. Como $\emptyset \notin \mathcal{F}$, tenemos que $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} Z_i$. Con ello, $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita. □

**Proposición 4.17.** *Sea $X$ un espacio compacto y Hausdorff. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro sobre $X$, entonces $\mathcal{F}$ tiene puntos de acumulación.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro sobre $X$. Del Lema 4.16, tenemos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita. Al ser $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos cerrados de $X$ y $X$ compacto, por el Teorema 2.13, $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Sea $p \in \bigcap \mathcal{F}$. Luego, para todo $F \in \mathcal{F}$, $p \in F$. Recordando la Definición 4.3-(2), tenemos que $\mathcal{F} \succ p$. □

**Corolario 4.18.** *Sea $X$ un espacio compacto y Hausdorff. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro primo sobre $X$, entonces $\mathcal{F}$ tiene un único punto de acumulación.*

*Demostración.* Al ser $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro, por la Proposición 4.17, se asegura la existencia de puntos de acumulación de $\mathcal{F}$. Además, en vista de las Proposiciones 2.9 y 2.11, tenemos que $X$ es un espacio completamente regular. Así, dado que $\mathcal{F}$ es primo, por el Teorema 4.15, $\mathcal{F}$ tiene a lo más un punto de acumulación. Con todo, $\mathcal{F}$ tiene un único punto de acumulación. □

**Proposición 4.19.** *Sean $X$ un espacio completamente regular y $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I} \subseteq \mathcal{Z}(X)$. Si $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces existe un $\mathcal{Z}$-filtro que contiene a $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$.*

*Demostración.* Veamos que la familia $\mathcal{F}$, definida por

$$\mathcal{F} = \{Z \in \mathcal{Z}(X) : \text{existe } \mathcal{A} \subseteq \{Z_\lambda\}_{\lambda\in I} \text{ tal que } \mathcal{A} \text{ es finito y } \bigcap \mathcal{A} \subseteq Z\}.$$

es el $\mathcal{Z}$-filtro deseado: Primero, tenemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ya que para cada $\lambda \in I$, $Z_\lambda \in \mathcal{F}$. Además, $\emptyset \notin \mathcal{F}$, puesto que cada elemento de $\mathcal{F}$ contiene una intersección de una familia finita de $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ y $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Ahora, sean $Z_1$ y $Z_2$ elementos de $\mathcal{F}$. Luego, existen dos subconjuntos finitos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ de $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ tales que $\bigcap \mathcal{A}_1 \subseteq Z_1$ y $\bigcap \mathcal{A}_2 \subseteq Z_2$. Notemos que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es un subconjunto finito de $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$. Al cumplirse que $\bigcap(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \subseteq Z_1 \cap Z_2$, tenemos que $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$. Por último, sean $Z_1 \in \mathcal{F}$ y $Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$ tales que $Z_1 \subseteq Z_2$. Sabemos que existe $\mathcal{A} \subseteq \{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ finito con $\bigcap \mathcal{A} \subseteq Z_1$. Por transitividad tenemos que $\bigcap \mathcal{A} \subseteq Z_2$ y con ello, $Z_2 \in \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro que contiene a $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$. □

Es importante mencionar que un $\mathcal{Z}$-filtro sobre un espacio $X$ puede tener más de un punto de convergencia. Esto es, el punto de convergencia de un

$\mathcal{Z}$-filtro no es necesariamente único sobre un espacio arbitrario. El siguiente teorema muestra qué tipo de espacios garantizan la unicidad del punto de convergencia.

**Teorema 4.20.** *Si $X$ es un espacio topológico Hausdorff, entonces todo $\mathcal{Z}$-filtro convergente en $X$ converge a un único punto.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es Hausdorff y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{Z}$-filtro convergente en $X$. Supongamos que $x, y \in X$ son tales que $\mathcal{F} \to x$, $\mathcal{F} \to y$ y $x \neq y$. Por ser $X$ de Hausdorff, existen conjuntos abiertos $U$ y $V$ de $X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $V \cap U = \emptyset$. Puesto que $\mathcal{F} \to x$ y $\mathcal{F} \to y$, existen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$ tales que $Z_1 \subseteq U$ y $Z_2 \subseteq V$. Como $\mathcal{F}$ es $\mathcal{Z}$-filtro, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$. Sin embargo, tenemos que $Z_1 \cap Z_2 \subseteq U \cap V = \emptyset$, es decir, $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, lo que es una contradicción porque $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$. □

# 5 Construcción de la compactación de Stone-Čech

Ahora es momento de obtener la compactación de Stone-Čech de un espacio, para ello es importente recordar (de acuerdo a la Observación 2.17) que la construcción se realiza sobre espacios con la propiedad de ser completamente regular. Recalcamos que la construcción la hacemos utilizando los resultados que hemos expuesto en las secciones anteriores, a saber, las propiedades de los cero conjuntos de un espacio completamente regular y de la familia de los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros de dicho espacio. Los pasos a seguir son inspirados, de cierta manera, en el algoritmo indicado en [14, Ejercicio 19J]. Según se menciona en [13], Čech fue el precursor del uso de los cero conjuntos para esta construcción. Para iniciar, establecemos el conjunto sobre el cual trabajamos.

Para un espacio completamente regular $X$, escribimos

$$BX = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ es } \mathcal{Z}\text{-ultrafiltro sobre } X\}.$$

Además, para cada $Z \in \mathcal{Z}(X)$, establecemos $Z^* = \{\mathcal{U} \in BX \mid Z \in \mathcal{U}\}$.

**Observación 5.1.** En particular, para $X \in \mathcal{Z}(X)$ (vea Proposición 3.2), se tiene que $X^* = BX$. En efecto, para cualquier $\mathcal{U} \in BX$, obtenemos, en vista de la Proposición 4.7, que $X \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U} \in X^*$.

Con la notación anterior ya indicada, el propósito principal de lo que resta de esta sección es encaminar y asentar los ingredientes que nos permitan concluir que $BX = \beta X$, es decir, que $BX$ es la compactación de Stone-Čech del espacio $X$. Como consecuencia de la definición de los conjuntos $Z^*$ tenemos algunas de las siguientes propiedades, las cuales enunciamos porque serán requeridas más adelante.

**Lema 5.2.** *Sean $X$ un espacio completamente regular y $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$. Se cumple que:*

1. *$Z_1^* = \emptyset$ si y solo si $Z_1 = \emptyset$.*
2. *Si $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, entonces $Z_1^* \cap Z_2^* = \emptyset$.*
3. *$(Z_1 \cap Z_2)^* = Z_1^* \cap Z_2^*$.*
4. *$(Z_1 \cup Z_2)^* = Z_1^* \cup Z_2^*$.*
5. *Si $Z_1 \subseteq Z_2$, entonces $Z_1^* \subseteq Z_2^*$.*

*Demostración.* Sean $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$:
1. Supongamos que $Z_1 \neq \emptyset$ y fijemos $z \in Z_1$. Sabemos que $\mathcal{F}_z$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro en $X$ (vea Ejemplo 4.2) y, así, $Z_1 \in \mathcal{F}_z$. Luego, $\mathcal{F}_z$ testifica que $Z_1^* \neq \emptyset$. Recíprocamente, supongamos que $Z_1 = \emptyset$. Como no existe algún $\mathcal{Z}$-filtro que contenga al conjunto $\emptyset$ como elemento, $Z_1^* = \emptyset$.
2. Si $Z_1^* \cap Z_2^* \neq \emptyset$, entonces existe $\mathcal{U} \in Z_1^* \cap Z_2^*$. Luego, $\mathcal{U} \in Z_1^*$ y $\mathcal{U} \in Z_2^*$, es decir, $Z_1 \in \mathcal{U}$ y $Z_2 \in \mathcal{U}$. Al ser $\mathcal{U}$ un $\mathcal{Z}$-filtro, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{U}$, y con ello tenemos que $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$.
3. Por la Proposición 3.5-(1) tenemos que $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$, por lo que podemos definir $(Z_1 \cap Z_2)^*$. Si $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, entonces, por el inciso (1) del presente lema, $(Z_1 \cap Z_2)^* = \emptyset$. Por otro lado, por el inciso (2) del presente lema, $Z_1^* \cap Z_2^* = \emptyset$. Por tanto, $(Z_1 \cap Z_2)^* = Z_1^* \cap Z_2^*$. Supongamos ahora que $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$. Por (1) previo, podemos tomar $\mathcal{U} \in (Z_1 \cap Z_2)^*$. Dado que $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{U}$, $Z_1 \cap Z_2 \subseteq Z_1$ y $Z_1 \cap Z_2 \subseteq Z_2$, el que $\mathcal{U}$ sea un $\mathcal{Z}$-filtro implica que $Z_1 \in \mathcal{U}$ y $Z_2 \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U} \in Z_1^*$ y $\mathcal{U} \in Z_2^*$. Se sigue que $(Z_1 \cap Z_2)^* \subseteq Z_1^* \cap Z_2^*$. Recíprocamente, si $\mathcal{U} \in Z_1^* \cap Z_2^*$, entonces $\mathcal{U} \in Z_1^*$ y $\mathcal{U} \in Z_2^*$, es decir, $Z_1 \in \mathcal{U}$ y $Z_2 \in \mathcal{U}$. Puesto que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro, obtenemos que $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{U}$. De donde, $\mathcal{U} \in (Z_1 \cap Z_2)^*$. Así, $Z_1^* \cap Z_2^* \subseteq (Z_1 \cap Z_2)^*$.
4. Dado que $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$, por la Proposición 3.5-(2), $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$. Sea $\mathcal{U} \in (Z_1 \cup Z_2)^*$. En vista de que $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{U}$ y que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro, se

sigue del Teorema 4.14 que $Z_1 \in \mathcal{U}$ o $Z_2 \in \mathcal{U}$. De aquí, $\mathcal{U} \in Z_1^*$ o $\mathcal{U} \in Z_2^*$, esto es que $\mathcal{U} \in Z_1^* \cup Z_2^*$. Recíprocamente, sea $\mathcal{U} \in Z_1^* \cup Z_2^*$. Luego, $\mathcal{U} \in Z_1^*$ o $\mathcal{U} \in Z_2^*$. De donde, $Z_1 \in \mathcal{U}$ o $Z_2 \in \mathcal{U}$. Como $Z_1 \subseteq Z_1 \cup Z_2$ y $Z_2 \subseteq Z_1 \cup Z_2$, por ser $\mathcal{U}$ un $\mathcal{Z}$-filtro, obtenemos que $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in (Z_1 \cup Z_2)^*$.
5. Tomemos $\mathcal{U} \in Z_1^*$. Por definición tenemos que $Z_1 \in \mathcal{U}$. Con ello, utilizando que $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro y que $Z_1 \subseteq Z_2$, deducimos que $Z_2 \in \mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{U} \in Z_2^*$. Así, hemos probado la contención deseada. $\square$

Continuamos desarrollando la herramienta que utilizamos para dotar de una topología adecuada al conjunto $BX$. Es conveniente recordar la Definición 2.6.

**Proposición 5.3.** *Sea $X$ un espacio completamente regular. Se tiene que la familia $\mathcal{C}_{BX} = \{Z^* \mid Z \in \mathcal{Z}(X)\}$ es una base para los conjuntos cerrados de alguna topología en $BX$.*

*Demostración.* Comenzamos tomando $Z_1^*, Z_2^* \in \mathcal{C}_{BX}$ y veamos que $Z_1^* \cup Z_2^*$ es una intersección de elementos de $\mathcal{C}_{BX}$. Por Lema 5.2-(4), $Z_1^* \cup Z_2^* = (Z_1 \cup Z_2)^*$ y $(Z_1 \cup Z_2)^* \in \mathcal{C}_{BX}$. Ahora, toca ver que que $\bigcap \mathcal{C}_{BX} = \emptyset$. En efecto, por la Proposición 3.2, sabemos que $\emptyset \in \mathcal{Z}(X)$. Luego, $\emptyset^* \in \mathcal{C}_{BX}$. Esto es, por Lema 5.2, $\emptyset \in \mathcal{C}_{BX}$. Por tanto, $\bigcap \mathcal{C}_{BX} = \emptyset$. Con todo, $\mathcal{C}_{BX}$ es una base para los conjuntos cerrados de alguna topología en $BX$. $\square$

A partir de ahora, consideramos el conjunto $BX$ con la topología generada por la base de los conjuntos cerrados $\mathcal{C}_{BX}$, es decir, $BX$ ya lo trabajamos como un espacio topológico.

Enseguida nos encaminamos a probar que $BX$ admite una copia del espacio $X$. Para este fin, primero requerimos tener a la mano una función particular, la cual hace uso del $\mathcal{Z}$-filtro del Ejemplo 4.2 y de la Proposición 4.9 para garantizar su buena definición.

Para un espacio completamente regular $X$, denotamos por $h_{BX} : X \to BX$, la función definida por

$$h_{BX}(x) = \mathcal{F}_x,$$

para cada $x \in X$, donde $\mathcal{F}_x = \{Z \in \mathcal{Z}(X) \mid x \in Z\}$.

**Proposición 5.4.** *Para un espacio completamente regular $X$, la función $h_{BX}$ es inyectiva.*

*Demostración.* Sean $x, y \in X$ tales que $h_{BX}(x) = h_{BX}(y)$. Luego, $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$. Por el Ejemplo 4.4, tenemos que $\mathcal{F}_x \to x$ y como $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$, entonces también $\mathcal{F}_x \to y$. Dado que $X$ es Hausdorff, por el Teorema 4.20, obtenemos que $x = y$. $\square$

Requerimos de más propiedades de la función $h_{BX}$ para garantizar que es un encaje de $X$ en $BX$.

**Proposición 5.5.** *Sean $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$, donde $X$ es un espacio completamente regular. Se cumple lo siguiente:*

1. $h_{BX}(Z_1) = h_{BX}(X) \cap Z_1^*$.
2. $\overline{h_{BX}(Z_1)} = Z_1^*$.
3. $\overline{h_{BX}(Z_1 \cap Z_2)} = \overline{h_{BX}(Z_1)} \cap \overline{h_{BX}(Z_2)}$.
4. $\overline{h_{BX}(Z_1 \cup Z_2)} = \overline{h_{BX}(Z_1)} \cup \overline{h_{BX}(Z_2)}$.

*Demostración.* Sean $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$:
1. Primero notemos que $h_{BX}(X) \cap Z_1^* = \{h_{BX}(x) \in h_{BX}(X) \mid h_{BX}(x) \in Z_1^*\} = \{\mathcal{F}_x \in h_{BX}(X) \mid \mathcal{F}_x \in Z_1^*\} = \{\mathcal{F}_x \in h_{BX}(X) \mid Z_1 \in \mathcal{F}_x\}$. Ahora, sea $x \in Z_1$. Tenemos que $h_{BX}(x) \in h_{BX}(Z_1)$, es decir, $\mathcal{F}_x \in h_{BX}(Z_1)$. Por ser $Z_1 \in \mathcal{Z}(X)$ y $x \in Z_1$, se cumple que $Z_1 \in \mathcal{F}_x$. Así, $h_{BX}(x) \in h_{BX}(X) \cap Z_1^*$. Y se sigue que $h_{BX}(Z_1) \subseteq h_{BX}(X) \cap Z_1^*$. Ahora, sea $\mathcal{F}_x \in h_{BX}(X) \cap Z_1^*$. Luego $Z_1 \in \mathcal{F}_x$, lo cual implica que $x \in Z_1$. Como $\mathcal{F}_x = h_{BX}(x)$, tenemos que $\mathcal{F}_x \in h_{BX}(Z_1)$. Con ello, $h_{BX}(X) \cap Z_1^* \subseteq h_{BX}(Z_1)$. De lo anterior, obtenemos que $h_{BX}(Z_1) = h_{BX}(X) \cap Z_1^*$.
2. Del inciso (1) anterior tenemos que $h_{BX}(Z_1) = h_{BX}(X) \cap Z_1^*$, de lo cual se sigue que $h_{BX}(Z_1) \subseteq Z_1^*$. Por ser $Z_1^*$ un subconjunto cerrado básico de $BX$ (ver Proposición 5.3), tenemos que $\overline{h_{BX}(Z_1)} \subseteq Z_1^*$. Recordemos que $\overline{h_{BX}(Z_1)}$ es la intersección de todos los subconjuntos cerrados básicos de $BX$ que contienen a $h_{BX}(Z_1)$ (recordar Proposición 2.5). Esto es, $\overline{h_{BX}(Z_1)} = \bigcap \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A} = \{W^* \in \mathcal{C}_{BX} \mid h_{BX}(Z_1) \subseteq W^*\}$. De esta forma, veamos que $Z_1^* \subseteq \bigcap \mathcal{A}$. Sea $W^* \in \mathcal{A}$ arbitrario. Demostremos que $Z_1^* \subseteq W^*$. Para este fin, sea $z \in Z_1$ arbitrario. Como $h_{BX}(Z_1) \subseteq W^*$, se sigue que $h_{BX}(z) = \mathcal{F}_z \in W^*$. Es decir, $W \in \mathcal{F}_z$, y por la definición de $\mathcal{F}_z$, tenemos que $z \in W$. Así, $Z_1 \subseteq W$. Aplicando inciso (5) del Lema 5.2, obtenemos que $Z_1^* \subseteq W^*$, como se deseaba. Lo anterior completa la prueba de que la igualdad $\overline{h_{BX}(Z_1)} = Z_1^*$ se cumple.

3. Se sigue de (2) previo y del Lema 5.2-(3):

$$\overline{h_{BX}(Z_1 \cap Z_2)} = (Z_1 \cap Z_2)^* = Z_1^* \cap Z_2^* = \overline{h_{BX}(Z_1)} \cap \overline{h_{BX}(Z_2)}$$

4. Se sigue de (2) previo y del Lema 5.2-(4):

$$\overline{h_{BX}(Z_1 \cup Z_2)} = (Z_1 \cup Z_2)^* = Z_1^* \cup Z_2^* = \overline{h_{BX}(Z_1)} \cup \overline{h_{BX}(Z_2)}$$

Con todo, el resultado queda demostrado. □

En este momento estamos preparados para ver que la función $h_{BX}$ genera una copia del espacio $X$ en el espacio $BX$, más aún, una copia densa. Para ello, nuevamente tengamos en cuenta que $BX$ está dotado con la topología obtenida por $\mathcal{C}_{BX}$ (ver Proposición 5.3). Advertimos al lector que usamos la equivalencia de función cerrada dada en la Proposición 2.3. Además, el hecho conocido de que si $f$ es una función cerrada, continua y biyectiva, entonces $f$ es un homeomorfismo (ver [5, Proposición 1.4.18]).

**Proposición 5.6.** *Si $X$ es un espacio completamente regular, entonces*

1. *la función $h_{BX}$ es un encaje de $X$ en $BX$ y*

2. *$h_{BX}(X)$ es un conjunto denso en $BX$.*

*Demostración.*
1. Para ver que $h_{BX}$ es un encaje de $X$ en $BX$, mostremos que la función $h^*_{BX} : X \to h_{BX}(X)$, definida por $h^*_{BX}(x) = h_{BX}(x)$, para cada $x \in X$, es un homeomorfismo. Hacemos esto garantizando que $h^*_{BX}$ es una función biyectiva, cerrada y continua. En efecto, la biyectividad de $h^*_{BX}$ queda garantizada por la Proposición 5.4. Para ver que $h^*_{BX}$ es una función cerrada, y en vista de que $\mathcal{Z}(X)$ una base para los cerrados de $X$ (ver Proposición 3.6), tomemos $Z \in \mathcal{Z}(X)$ y comprobemos que $h^*_{BX}(Z)$ es un conjunto cerrado básico. Se sigue de la Proposición 5.5-(1), que $h^*_{BX}(Z) = h_{BX}(X) \cap Z^*$ es un conjunto cerrado básico en $h_{BX}(X)$, pues $Z^*$ es un conjunto cerrado básico en $BX$ (ver Proposición 5.3). Así, por la Proposición 2.3, concluimos que $h^*_{BX}$ es cerrada. Ahora veamos que $h^*_{BX}$ es continua. Para ello tomemos un conjunto cerrado básico en $h_{BX}(X)$, esto es, consideramos un conjunto de la forma $h_{BX}(X) \cap Z^*$, donde $Z \in \mathcal{Z}(X)$. De la Proposición 5.5-(1) y la biyectividad de $h^*_{BX}$ obtenemos que $(h^*_{BX})^{-1}(h_{BX}(X) \cap Z^*) = (h^*_{BX})^{-1}(h^*_{BX}(Z)) = Z$. Al

ser $Z$ un conjunto cerrado básico de $X$ (ver Proposición 3.6), se sigue que el conjunto $(h^*_{BX})^{-1}(h_{BX}(X) \cap Z^*)$ es un cerrado básico de $X$. Luego, en vista de la Proposición 2.4, tenemos que $h^*_{BX}$ es continua. Así, concluimos que $h^*_{BX}$ es un homeomorfismo. De este modo, $h_{BX}$ es un encaje de $X$ en $BX$.
2. Para ver que $\overline{h_{BX}(X)} = BX$, notemos que de la Observación 5.1 y de la Proposición 5.5-(2), obtenemos $\overline{h_{BX}(X)} = X^* = BX$. Por lo tanto, el conjunto $h_{BX}(X)$ es denso en $BX$. □

Resta garantizar que el espacio $BX$ es una compactación del espacio completamente regular $X$, lo que se obtiene mostrando que $BX$ es Hausdorff y compacto.

**Proposición 5.7.** *Si $X$ es un espacio completamente regular, entonces $BX$ es Hausdorff y compacto.*

*Demostración.* Veamos primero que $BX$ es Hausdorff. Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in BX$ tales que $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$. Luego, por la maximalidad de los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros, $\mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_2 \not\subseteq \mathcal{U}_1$. Sea $Z_1 \in \mathcal{U}_1$ tal que $Z_1 \notin \mathcal{U}_2$. Afirmamos que existe $Z_2 \in \mathcal{U}_2$ tal que $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$. En efecto, si no existiera $Z_2$, entonces $Z \cap Z_1 \neq \emptyset$, para todo $Z \in \mathcal{U}_2$. De donde, por la Proposición 4.7, $Z_1 \in \mathcal{U}_2$, lo cual no es posible. Al ser $Z_1$ y $Z_2$ elementos de $\mathcal{Z}(X)$, existen funciones continuas $f_1 : X \to [0,1]$ y $f_2 : X \to [0,1]$ tales que $f_1^{-1}(\{0\}) = Z_1$ y $f_2^{-1}(\{0\}) = Z_2$. Sea $g : X \to [0,1]$, la función definida por

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x) + f_2(x)},$$

para cada $x \in X$. Por construcción, tenemos que $g$ es continua. Además, dado que $Z_1$ y $Z_2$ son ajenos, queda garantizado que $g(Z_1) = \{0\}$ y $g(Z_2) = \{1\}$. Del Ejemplo 3.4 sabemos que $[0, \frac{2}{3}] \in \mathcal{Z}([0,1])$ y $[\frac{1}{3}, 1] \in \mathcal{Z}([0,1])$. Luego, por la continuidad de $g$ y en vista de la Proposición 3.7, se sigue que $Z_4 = g^{-1}([0, \frac{2}{3}]) \in \mathcal{Z}(X)$ y $Z_3 = g^{-1}([\frac{1}{3}, 1]) \in \mathcal{Z}(X)$. Note que por construcción $Z_3$ y $Z_4$ son tales que:

$$Z_3 \cap Z_1 = \emptyset, \quad Z_4 \cap Z_2 = \emptyset \quad \text{y} \quad X = Z_3 \cup Z_4.$$

Así, por el Lema 5.2 incisos (2), (3) y (4),

$$Z_3^* \cap Z_1^* = \emptyset, \quad Z_4^* \cap Z_2^* = \emptyset \quad \text{y} \quad X^* = Z_3^* \cup Z_4^*.$$

Además, dado que $\mathcal{U}_1 \in Z_1^*$ y $\mathcal{U}_2 \in Z_2^*$, tenemos que $\mathcal{U}_1 \notin Z_3^*$ y $\mathcal{U}_2 \notin Z_4^*$. Por la Observación 5.1, recordemos que se cumple $X^* = BX$. Así, tenemos que

$BX = Z_3^* \cup Z_4^*$. Como $BX \setminus (Z_3^* \cup Z_4^*) = \emptyset$, se deduce que $(BX \setminus Z_3^*) \cap (BX \setminus Z_4^*) = \emptyset$. Por tanto, $BX \setminus Z_3^*$ y $BX \setminus Z_4^*$ son conjuntos abiertos tales que:

$$\mathcal{U}_1 \in BX \setminus Z_3^*, \;\; \mathcal{U}_2 \in BX \setminus Z_4^* \quad \text{y} \quad (BX \setminus Z_3^*) \cap (BX \setminus Z_4^*) = \emptyset.$$

Con todo, $BX$ es Hausdorff.
Ahora, mostramos que $BX$ es un espacio compacto. Para ello mostremos, en vista del Corolario 2.14, que para una familia de conjuntos cerrados básicos arbitrarios $\{Z_\lambda^*\}_{\lambda\in I} \subseteq BX$ con la propiedad de la intersección finita se tiene que la familia posee intersección no vacía. Mostremos que $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ tiene la propiedad de intersección finita. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $\{Z_{\lambda_i}\}_{i=1}^n \subseteq \{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$. Por el Lema 5.2-(3), $\bigcap_{i=1}^n Z_{\lambda_i}^* = (\bigcap_{i=1}^n Z_{\lambda_i})^*$. Como $\{Z_\lambda^*\}_{\lambda\in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita, $\bigcap_{i=1}^n Z_{\lambda_i}^* \neq \emptyset$. Luego, por el Lema 5.2-(2), $\bigcap_{i=1}^n Z_{\lambda_i} \neq \emptyset$. Así, la familia $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ posee la propiedad de intersección finita. De la Proposición 4.19, sabemos que existe un $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{F}$ tal que $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I} \subseteq \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{U}$ un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro que contenga a $\mathcal{F}$ (este existe por Teorema 4.12). Luego, $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I} \subseteq \mathcal{U}$. De donde, para cada $\lambda \in I$, se cumple que $Z_\lambda \in \mathcal{U}$, o equivalentemente, $\mathcal{U} \in Z_\lambda^*$. Así, $\mathcal{U} \in \bigcap_{\lambda\in I} Z_\lambda^*$. Con ello, la familia $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in I}$ tiene intersección no vacía. De aquí, utilizando el Corolario 2.14 obtenemos que $BX$ es un espacio compacto. □

En vista de la Definición 2.16 y lo desarrollado hasta ahora, obtenemos que $BX$ es una compactación del espacio $X$.

**Teorema 5.8.** *Si $X$ es un espacio completamente regular, entonces $BX$ es una compactación de $X$.*

*Demostración.* Se sigue de la conjunción de las Proposiciones 5.6 y 5.7. □

Toca ahora establecer las razones que permiten concluir que $BX$ es, de hecho, la compactación de Stone-Čech de $X$. Señalamos que en el entendido de que un espacio completamente regular $X$ tiene una copia en $BX$, el siguiente resultado se puede interpretar diciendo que cualquier función continua de $X$ en un espacio compacto admite una extensión continua a $BX$.

**Teorema 5.9.** *Sean $X$ un espacio completamente regular y $K$ un espacio compacto y Hausdorff. Si $f : X \to K$ es una función continua, entonces existe una función continua $g : BX \to K$ tal que $f = g \circ h_{BX}$.*

*Demostración.* Construyamos una función continua $g : BX \to K$ tal que $f = g \circ h_{BX}$. Primero observemos que por las Proposiciones 2.9 y 2.11, $K$ es completamente regular. Sea $\mathcal{U} \in BX$. Notemos que por la Proposición 3.7, para cada $K_1 \in \mathcal{Z}(K)$, $f^{-1}(K_1) \in \mathcal{Z}(X)$. Veamos que la familia

$$\mathcal{G}_{\mathcal{U}} = \{K' \in \mathcal{Z}(K) \mid f^{-1}(K') \in \mathcal{U}\}$$

es un $\mathcal{Z}$-filtro sobre $K$. En efecto, para la primera condición para ser $\mathcal{Z}$-filtro, notemos que $\emptyset \notin \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$, de lo contrario $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{U}$ y esto no es posible dado que $\mathcal{U}$ es $\mathcal{Z}$-filtro. Además, por la Proposición 3.2, tenemos que $K \in \mathcal{Z}(K)$. De donde, como $X \in \mathcal{U}$ y $f^{-1}(K) = X$, obtenemos que $K \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. Así, $\mathcal{G}_{\mathcal{U}} \neq \emptyset$. Para la segunda condición requerida, sean $K_1, K_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. Luego, $f^{-1}(K_1) \in \mathcal{U}$ y $f^{-1}(K_2) \in \mathcal{U}$. De donde, al ser $\mathcal{U}$ un $\mathcal{Z}$-filtro, $f^{-1}(K_1) \cap f^{-1}(K_2) \in \mathcal{U}$. Pero $f^{-1}(K_1 \cap K_2) = f^{-1}(K_1) \cap f^{-1}(K_2)$. Por tanto, $f^{-1}(K_1 \cap K_2) \in \mathcal{U}$. Así, como en vista de la Proposición 3.5-(1), $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{Z}(K)$, concluimos que $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. Ahora, para la última condición, sean $K_1 \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ y $K_2 \in \mathcal{Z}(K)$ tales que $K_1 \subseteq K_2$. Tenemos $f^{-1}(K_1) \in \mathcal{U}$. Como $K_1 \subseteq K_2$, se sigue que $f^{-1}(K_1) \subseteq f^{-1}(K_2)$. Al ser $\mathcal{U}$ un $\mathcal{Z}$-filtro, $f^{-1}(K_2) \in \mathcal{U}$. Por tanto, $K_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. Así, hemos verificado que $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro. Más aún, se tiene que $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro primo. En efecto, dados $K_1, K_2 \in \mathcal{Z}(K)$ tales que $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$, se tiene que $f^{-1}(K_1) \cup f^{-1}(K_2) = f^{-1}(K_1 \cup K_2) \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro, por el Teorema 4.14, obtenemos que $f^{-1}(K_1) \in \mathcal{U}$ o $f^{-1}(K_2) \in \mathcal{U}$. Es decir, $K_1 \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ o $K_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$. Por otro lado, al ser $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ un $\mathcal{Z}$-filtro primo en el espacio compacto y Hausdorff $K$, por el Corolario 4.18, existe un único punto $q_{\mathcal{U}} \in K$ tal que $\mathcal{G}_{\mathcal{U}} \succ q_{\mathcal{U}}$. Definimos $g : BX \to K$ por $g(\mathcal{U}) = q_{\mathcal{U}}$, para todo $\mathcal{U} \in BX$. Veamos que $g$ es la función continua deseada. Para este fin, primero demostramos que $f = g \circ h_{BX}$. Note que tanto $f$ y $g \circ h_{BX}$ coinciden en dominio y codominio. Solo falta ver que para todo $x \in X$, $f(x) = (g \circ h_{BX})(x)$. En efecto, sea $x \in X$. Primero notemos que $g(h_{BX}(x)) = g(\mathcal{F}_x)$. Ahora, para el $\mathcal{Z}$-filtro primo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_x} = \{K' \in \mathcal{Z}(K) \mid f^{-1}(K') \in \mathcal{F}_x\}$, tenemos que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_x} \succ q_{\mathcal{F}_x} = g(\mathcal{F}_x)$. Por otro lado, en vista de que para todo $K' \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}_x}$, $f^{-1}(K') \in \mathcal{F}_x$, se sigue de la definición de $\mathcal{F}_x$ que $x \in f^{-1}(K')$. Luego, $f(x) \in \bigcap_{K' \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}_x}} K'$. Esto es, $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_x} \succ f(x)$. Así, $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_x} \succ f(x)$ y $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_x} \succ g(\mathcal{F}_x)$. Como $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_x}$ es un $\mathcal{Z}$-filtro primo sobre $K$, por el Corolario 4.18, hay un único punto de acumulación. Por lo tanto, $f(x) = g(\mathcal{F}_x)$. Así, $f(x) = (g \circ h_{BX})(x)$. Ahora probamos que $g$ es continua. Tenemos, por la Proposición 3.6, que la familia $\mathcal{Z}(K)$ es una base para los conjuntos cerrados en $K$. Para mostrar que $g$ es continua basta ver que la imagen inversa bajo $g$ de un cero conjunto es un conjunto cerrado de $BX$. En efecto, sea $F \in \mathcal{Z}(K)$. Primero mostremos que $g^{-1}(F) = (f^{-1}(F))^*$. De la Proposición 3.7, tenemos que $f^{-1}(F) \in \mathcal{Z}(X)$. Así, por la Proposición 5.5-(2), tenemos que $\overline{h_{BX}(f^{-1}(F))} = (f^{-1}(F))^*$. De aquí, dado que $f = g \circ h_{BX}$, tenemos que $\overline{g^{-1}(F)} = (f^{-1}(F))^*$ y así $g^{-1}(F) \subseteq (f^{-1}(F))^*$. Por otro lado, sea $\mathcal{U} \in (f^{-1}(F))^*$. Tenemos que $f^{-1}(F) \in \mathcal{U}$. Como $f^{-1}(F) \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{G}_\mathcal{U} = \{K' \in \mathcal{Z}(K) \mid f^{-1}(K') \in \mathcal{U}\}$, $F \in \mathcal{G}_\mathcal{U}$. Como $\mathcal{G}_\mathcal{U} \succ g(\mathcal{U})$, se sigue que $g(\mathcal{U}) \in F$. Por tanto, $\mathcal{U} \in g^{-1}(F)$. De esto, $(f^{-1}(F))^* \subseteq g^{-1}(F)$, y la igualdad $g^{-1}(F) = (f^{-1}(F))^*$ se tiene. De lo anterior se desprende que $g^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado de $BX$. De acuerdo a la Proposición 2.4, obtenemos que la función $g$ es continua. □

Gracias a todo lo anterior, concluimos con el siguiente teorema que el espacio construido $BX$ es la compactación de Stone-Čech.

**Teorema 5.10.** *Si $X$ es un espacio completamente regular, entonces $BX$ es la compactación de Stone-Čech de $X$.*

*Demostración.* Por el Teorema 5.8, tenemos que $BX$ es una compactación de $X$. Por el Teorema 5.9, $BX$ satisface las hipótesis del Teorema 2.21. Así, $BX \simeq \beta X$. Por tanto, $BX$ es la compactación de Stone-Čech, es decir, es la compactación que dicta el Teorema 2.20. □

# Agradecimientos

Los autores agradecen las observaciones hechas por los árbitros, con las cuales el trabajo mejoró sustancialmente.
El segundo autor agradece a la Universidad Tecnológica de la Mixteca todo el apoyo recibido para la realización de su estancia posdoctoral de octubre de 2021 a septiembre de 2022.

# Bibliografía

[1] Apostol, Tom M., *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, S. A. Segunda Edición, 2006.

[2] Cartan, Henri, *Théorie des filtres*, C. R. Acad. Sci. Paris 205, 1937.

[3] Chitra, Tarun, *The Stone-Čech Compactification*, Math presentations, Ithaca, New York 2009.

[4] Dugundji, James, *Topology*, Allyn and Bacon Inc, United States of America, 1976.

[5] Engelking, Ryszard, *General topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[6] Gillman, Leonard y Jerison, Meyer, *Rings of Continuos Functions*, Springer-Verlag, Princeton, 1960.

[7] Hernández Hernández, Fernando, *Teoría de conjuntos. Una introducción*, Sociedad Matemática Mexicana, Tercera Edición, 2011.

[8] Hinrichsen, Diederich; Fernández Muñiz, José L.; Fraguela Collar, Andrés y Álvarez Prieto, Ángel, *Topología General*, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[9] Jech, Thomas, *Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[10] Kuratowski, Kazimierz, *Topology*, Volumen I. Academic Press, New York and London, 1966.

[11] Munkres, James, *Topology*, Second edition, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.

[12] Riez, Frigyes, *Stetikeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti del IV Congresso Internazionale del Matematici, Roma 1908, vol. II, Roma, 1909.

[13] Walker, Russell C., *The Stone-Čech Compactification*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1974.

[14] Willard, Stephen, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1970.

Instituo de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca
Carretera a Acatlima, km 2.5, Huajuapan de León, Oaxaca, C.P. 69000.

`jtenorio@mixteco.utm.mx` [Jesús F. Tenorio]
`cenobio@mixteco.utm.mx` [Cenobio Yescas-Aparicio]

**Matemáticas y sus aplicaciones 19, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-861-4**

# Capítulo 5

# Arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y $2^X$

**David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y Esaú Alejandro Pérez Rosales**

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**Resumen**

Gracias a la estructura de $\mathbb{R}$, se sabe que $([0,1],\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. En un arco $C$, es natural preguntarse si los homeomorfismos del intervalo $[0,1]$ con $C$ preservan el orden, y de ser así el caso, podríamos "ordenar" a los elementos de un arco. Por otro lado, en un hiperespacio de un espacio métrico, la relación de contención "$\subseteq$" es de orden parcial. Estas ideas nos permiten definir el concepto de arco ordenado en un hiperespacio. En este trabajo se determinan condiciones para asegurar la existencia de arcos ordenados en dos hiperespacios específicos de un espacio métrico $X$, el hiperespacio de compactos $2^X$ y el hiperespacio de subcontinuos $C(X)$.

## 1 Introducción

El presente capítulo resume el trabajo realizado por el tercer autor como parte de su tesis de licenciatura en matemáticas ([12]). Este escrito consiste en una breve exposición de los teoremas de existencia de arcos ordenados en dos hiperespacios de un continuo, siguiendo los resultados expuestos en 1999 por Sam B. Nadler Jr. y Alejandro Illanes en los capítulos 14 y 15 de su obra *Hyperspaces: Fundamental and Recent Advances* ([6]). El propósito de este escrito es desarrollar de manera profunda las demostraciones expuestas en estos capítulos, a fin de facilitar la consulta a futuros lectores, así como ser fuente de inspiración para posibles futuros trabajos relacionados a la teoría de los continuos y sus hiperespacios.

# 2 Preliminares

En esta sección, presentaremos algunas definiciones y resultados útiles que se necesitarán en las secciones siguientes. A lo largo del presente trabajo, usaremos la letra $X$ para denotar un espacio métrico con métrica $d$. A la topología generada por la métrica $d$ se le denotará por $\tau_d$. Dado $x \in X$ y $r > 0$, se denotará por $B_d(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$ a la bola con centro en $x$ y radio $r$, omitiendo la referencia a la métrica cuando esto no provoque confusión. Dado $A \subseteq X$, los símbolos $\mathrm{Fr}_X(A)$ y $\overline{A}$ denotarán la frontera y la cerradura de $A$ en $X$, respectivamente. Salvo cuando sea necesario, se omitirá la referencia al espacio $X$. Por otro lado, se usarán los símbolos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ para denotar el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales, respectivamente. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ se considerará con la métrica euclidiana y la topología inducida por ésta. Finalmente, en el presente trabajo se supondrá verdadero el Axioma de Elección, o equivalentemente, el Lema de Zorn (todo conjunto parcialmente ordenado $L$, en el que cada cadena tiene una cota superior en $L$, admite un elemento maximal).

**Definición 2.1.** Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto. Dados un continuo $X$ y $Y \subseteq X$, diremos que $Y$ es un **subcontinuo** de $X$ si $Y$ es un continuo como subespacio de $X$ o bien, si $Y$ tiene exactamente un punto.

**Definición 2.2.** Un **arco** es un espacio métrico que es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Dado que $[0, 1]$ es un continuo, se sigue que todo arco también es un continuo.

**Definición 2.3.** Un espacio métrico $X$ es **arco conexo** si dados cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existe un arco en $X$ cuyos puntos extremos son $x$ y $y$.

**Observación 2.4.** Todo espacio métrico arco conexo es conexo.

El siguiente lema nos mostrará que para verificar la arco conexidad de un espacio métrico, es suficiente fijar un punto y construir arcos entre este punto fijo y los demás puntos.

**Lema 2.5.** *Sean $X$ un espacio métrico y $p \in X$. Si para cualquier $x \in X \setminus \{p\}$, existe un arco con puntos extremos $x$ y $p$, entonces $X$ es arco conexo.*

*Demostración.* Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si $x = p$ o $y = p$, por hipótesis, existe un arco con puntos extremos $x$ y $y$, y termina la prueba, así que supongamos que $x \neq p \neq y$. Entonces existen arcos $A_1$ y $A_2$ tales que $A_1$ tiene puntos extremos $x$ y $p$, y $A_2$ tiene puntos extremos $y$ y $p$. Sean $\alpha_1 : [0,1] \to A_1$ y $\alpha_2 : [0,1] \to A_2$ homeomorfismos tales que $\alpha_1(0) = x, \alpha_1(1) = p, \alpha_2(0) = y$ y $\alpha_2(1) = p$. Definamos $A = \{t \in [0,1] : \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$. Observemos que $A \neq \emptyset$ (ya que $1 \in A$) y $A$ está acotado inferiormente. Sea $m = \text{ínf}\, A$. Por [7, Lema 1, pág 161], $A$ es cerrado en $\mathbb{R}$, lo que implica que $m \in A$, con lo cual $\alpha_1(m) = \alpha_2(m)$. Definamos $\beta : [0,1] \to A_1 \cup A_2$ como

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{si} \quad t \in [0, m] \\ \alpha_2\left(\frac{1-t}{1-m} m\right) & \text{si} \quad t \in [m, 1] \end{cases}$$

Observemos que

- $\beta$ está bien definida, ya que $\alpha_1(m) = \alpha_2(m)$.
- $\beta(0) = \alpha_1(0) = x$ y $\beta(1) = \alpha_2(0) = y$.
- $\beta$ es continua por el Lema del Pegado, ya que $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son continuas.
- $\beta$ es inyectiva, ya que $\alpha_1$ y $\alpha_2$ lo son, y $\beta([0,m]) \cap \beta([m,1]) = \alpha_1([0,m]) \cap \alpha_2([0,m]) = \{\alpha_1(m)\} = \{\alpha_2(m)\}$.

Por lo tanto, $\beta([0,1])$ es un arco en $X$ con puntos extremos $x$ y $y$. Se concluye que $X$ es arco conexo. □

Un teorema muy importante en la teoría de los continuos, conocido como el Teorema de golpes en la frontera, enuncia lo siguiente.

**Teorema 2.6** (De golpes en la frontera)**.** *Sean $X$ un continuo y $U$ un subconjunto propio de $X$, abierto y no vacío. Si $K$ es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap \text{Fr}(U) \neq \emptyset$. En particular, $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.*

*Demostración.* Supongamos por contradicción que $K \cap \text{Fr}(U) = \emptyset$. Observemos que $K$ y $\text{Fr}(U)$ son subconjuntos cerrados de $\overline{U}$. Además, $K \neq \emptyset$.

Observemos también que $\mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$, ya que si $\mathrm{Fr}(U) = \emptyset$, entonces $U$ es un subconjunto cerrado y abierto de $X$, lo que contradice la conexidad de $X$.

Además, si existiese un subconjunto conexo $A$ de $\overline{U}$ tal que $A \cap K \neq \emptyset$, se tendría que $A \subseteq K$, y puesto que $K \cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$, entonces $A \cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$. Hemos probado que ningún subconjunto conexo de $\overline{U}$ intersecta tanto a $K$ como a $\mathrm{Fr}(U)$. Por el Teorema del cable cortado ([6, Teorema 12.9]), se tiene que $K$ y $\mathrm{Fr}(U)$ están separados en $\overline{U}$. Esto significa que existen $E$ y $F$ subconjuntos separados de $X$ tales que $\overline{U} = E \cup F$, $K \subseteq E$ y $\mathrm{Fr}(U) \subseteq F$.

Veamos que $E$ y $F \cup (X \setminus U)$ forman una separación de $X$. Observemos que $E \neq \emptyset$ y $F \cup (X \setminus U) \neq \emptyset$. Además,

$$E \cup [F \cup (X \setminus U)] = (E \cup F) \cup (X \setminus U) = \overline{U} \cup (X \setminus U) = X.$$

Finalmente, para ver que $E$ y $F \cup (X \setminus U)$ están separados en $X$, probaremos primero que $\overline{E} \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in \overline{E} \cap (X \setminus U)$. Como $\overline{E} \subseteq \overline{U}$, entonces $x \in \overline{U} \cap (X \setminus U) = \overline{U} \cap \overline{X \setminus U} = \mathrm{Fr}(U) \subseteq F$, es decir, $x \in \overline{E} \cap F$, lo que es una contradicción ya que $E$ y $F$ están separados. Así, $\overline{E} \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Por lo tanto,

$$\overline{E} \cap [F \cup (X \setminus U)] = (\overline{E} \cap F) \cup [\overline{E} \cap (X \setminus U)] = \emptyset \cup [\overline{E} \cap (X \setminus U)] = \overline{E} \cap (X \setminus U) = \emptyset$$

y

$$\begin{aligned} E \cap \overline{F \cup (X \setminus U)} &= E \cap \left(\overline{F} \cup \overline{X \setminus U}\right) \\ &= \left(E \cap \overline{F}\right) \cup \left(E \cap \overline{X \setminus U}\right) \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $E$ y $F \cup (X \setminus U)$ forman una separación de $X$. Como esto contradice la conexidad de $X$, se concluye que $K \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$.

La segunda parte del teorema se sigue de que $K \cap (X \setminus U) \supseteq (K \cap \overline{U}) \cap \overline{X \setminus U} = K \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$. $\square$

**Teorema 2.7.** *Sea $X$ un continuo.*

(a) *Si $A$ es un subcontinuo propio de $X$, $U$ un subconjunto abierto de $X$ y $A \subseteq U$, entonces existe $B$ subcontinuo de $U$ tal que $A \subsetneq B$.*

(b) *Existe un subcontinuo propio de $X$ con más de un punto.*

*Demostración.* (a) Sean $A$ un subcontinuo propio de $X$, $U \subseteq X$ abierto y $A \subseteq U$. Si $U = X$, entonces $B = X$ es el subcontinuo buscado y termina la prueba, así que supongamos que $U \subsetneq X$. Como $X$ es un espacio normal, existe $V$ subconjunto abierto tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Observar que $V \neq X$, ya que $V \subseteq U \subsetneq X$. Como $A$ es conexo y $A \subseteq \overline{V}$, existe una componente $B$ de $\overline{V}$ tal que $A \subseteq B$. Por el Teorema 2.6, se tiene que $B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, y como $A \subseteq V$, se sigue que $A \neq B$. Finalmente, observemos que $B$ es compacto (ya que $B$ es un cerrado de $X$ y $X$ es compacto), conexo y no vacío, es decir, $B$ es un subcontinuo de $U$.

(b) Sean $p \in X$ y $U \subsetneq X$ abierto tal que $p \in U$. Como $\{p\}$ es un subcontinuo propio de $X$ tal que $\{p\} \subseteq U$, por (a), existe $B$ subcontinuo de $U$ tal que $\{p\} \subsetneq B$. Por lo tanto, $B$ es el subcontinuo propio de $X$ buscado. □

Si $X$ es un espacio métrico, entenderemos por un **hiperespacio** de $X$ a una colección de subconjuntos de $X$ con alguna propiedad en particular. Por ejemplo, podemos considerar el hiperespacio de cerrados de $X$

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}.$$

Otros hiperespacios que se consideran en este trabajo son:

- $2^X = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto}\}$, conocido como el hiperespacio de compactos de $X$.
- $C(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto y conexo}\}$, que se conoce como el hiperespacio de subcontinuos de $X$.
- $F_1(X) = \{A \in CL(X) : |A| = 1\}$, que se conoce como el espacio de singulares de $X$.

**Observación 2.8.** En el caso de que $X$ sea compacto, los hiperespacios $CL(X)$ y $2^X$ coinciden, esto es, $CL(X) = 2^X$.

Sea $X$ un espacio métrico. Si $x \in X$ y $A \in CL(X)$, definimos y denotamos la distancia del punto $x$ al conjunto $A$ como

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Para cualquier $r > 0$ y $A \in CL(X)$, denotamos la **nube** alrededor de $A$ y radio $r$ como

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

Es posible dotar a $CL(X)$ de una métrica específica, llamada la métrica de Hausdorff.

**Definición 2.9.** Si $X$ es un espacio métrico con métrica acotada $d$, la **métrica de Hausdorff** para $CL(X)$ inducida por $d$, denotada por $H_d$, para cada $A, B \in CL(X)$ es

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}.$$

**Observación 2.10.** (1) La condición de que la métrica $d$ sea acotada nos asegura que el conjunto que define a $H_d(A, B)$ no es vacío (si $k > 0$ es una cota superior para $d$, entonces $A \subseteq N(k+1, B)$ y $B \subseteq N(k+1, A)$) y por ende su ínfimo existe, con lo cual $H_d(A, B)$ siempre está definida.

(2) Si $H_d(A, B) < \varepsilon$, entonces $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$. En efecto, si $H_d(A, B) < \varepsilon$, entonces $\varepsilon$ no es cota inferior del conjunto $\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que $A \subseteq N(\delta, B), B \subseteq N(\delta, A)$ y $\delta < \varepsilon$. Luego, se tiene que $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$.

(3) El recíproco del inciso anterior se cumple cuando $A$ y $B$ son compactos. En efecto, supongamos que $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$. Entonces $d(a, B) < \varepsilon$ para cada $a \in A$, y $d(b, A) < \varepsilon$ para cada $b \in B$. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = d(x, B)$ y $g(x) = d(x, A)$. Como $f$ y $g$ son continuas y $A$ y $B$ son compactos, entonces $f$ y $g$ alcanzan su máximo, es decir, existen puntos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que $d(a_0, B) = \text{máx}\{d(a, B) : a \in A\} < \varepsilon$ y $d(b_0, A) = \text{máx}\{d(b, A) : b \in B\} < \varepsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $\text{máx}\{d(a_0, B), d(b_0, A)\} < \delta < \varepsilon$, entonces $A \subseteq N(\delta, B)$ y $B \subseteq N(\delta, A)$, con lo cual $H_d(A, B) \leq \delta < \varepsilon$.

Los hiperespacios $CLC(X), 2^X, C(X), F_n(X)$ y $F(X)$ adquirirán la métrica de subespacio de $CL(X)$. La colección $CL(X)$ también puede dotarse de una topología específica, denominada la topología de Vietoris, que mencionamos a continuación:

**Definición 2.11.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. La **topología de Vietoris** $T_V$ para $CL(X)$ es la topología más pequeña con las siguientes propiedades:

(1) Si $U$ es un abierto de $(X,\tau)$, entonces $\{A \in CL(X) : A \subseteq U\}$ es un abierto de $(CL(X), T_V)$.

(2) Si $B$ es un cerrado de $(X,\tau)$, entonces $\{A \in CL(X) : A \subseteq B\}$ es un cerrado de $(CL(X), T_V)$.

Nuevamente, los hiperespacios $CLC(X), 2^X, C(X), F_n(X)$ y $F(X)$ tendrán la topología de subespacio heredada por la topología de Vietoris en $CL(X)$. Resulta natural preguntarse si la métrica de Hausdorff en $CL(X)$ induce la topología de Vietoris. La respuesta es afirmativa cuando y solo cuando $X$ es un espacio métrico compacto, como demuestra en [12, Teorema 1.19].

**Teorema 2.12.** [12, Corolarios 1.29 y 1.31] *Si $X$ es un espacio métrico compacto, entonces $2^X$ y $C(X)$ son compactos.*

**Definición 2.13.** Sean $X$ un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Una **función de Whitney** para $\mathcal{H}$ es una función continua $\omega : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$ con $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se tiene que $\omega(A) < \omega(B)$.

(2) $\omega(A) = 0$ si y solo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.

**Observación 2.14.** (1) El primer inciso de la definición anterior es equivalente a que $\omega : (\mathcal{H}, \subseteq) \to ([0,\infty), \leq)$ como función entre conjuntos parcialmente ordenados sea estrictamente creciente.

(2) Si $\omega : \mathcal{H} \to [0,\infty)$ es una función de Whitney para $\mathcal{H}$ y $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$, entonces $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es una función de Whitney para $\mathcal{N}$.

Las funciones de Whitney están estrechamente relacionadas con la estructura de arco en los hiperespacios, y su importancia radica en que siempre es posible construir una de estas funciones en cualquier hiperespacio de un compacto.

**Teorema 2.15.** *Si $X$ es un espacio métrico compacto, entonces cualquier hiperespacio de $X$ tiene una función de Whitney.*

*Demostración.* Si $\omega$ es una función de Whitney para $CL(X)$ y $\mathcal{H} \subseteq CL(X)$, por (2) de la Observación 2.14, $\omega\restriction_{\mathcal{H}}$ será una función de Whitney para $\mathcal{H}$. Así que bastará probar que existe una función de Whitney para $CL(X)$. Para ello, observemos que $X$ es separable (véase [12, Lema 1.40]), así que tomemos $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de $X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : X \to [0,1]$ como $f_n(x) = \frac{1}{1+d(z_n,x)}$. Ahora defínase para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\omega_n : CL(X) \to [0,1]$ como $\omega_n(A) = \text{diám}(f_n(A))$. Finalmente, definamos $\omega : CL(X) \to [0,1]$ como

$$\omega(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\omega_n(A).$$

Observemos que para todo $A \in CL(X)$, $0 \leq \omega_n(A) \leq 1$, con lo cual

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\omega_n(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\omega_n(A)$ converge por el criterio de comparación, por lo que $\omega$ está bien definida.

Veamos que $\omega$ es una función de Whitney para $CL(X)$. Observemos que $\omega_n = \text{diám} \circ f_n^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que los lemas [12, Lema 1.39] y [12, Lema 1.32] implican que $\omega_n$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Criterio M de Weierstrass, se tiene que $\omega$ es continua.

Ahora sean $A, B \in CL(X)$ con $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Como $A \subseteq B$, se tiene que $f_n(A) \subseteq f_n(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $\omega_n(A) = \text{diám}\, f_n(A) \leq \text{diám}\, f_n(B) = \omega_n(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para comprobar que $\omega(A) < \omega(B)$, será suficiente probar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\omega_m(A) < \omega_m(B)$. Para ello, sean $p \in B \setminus A$ y $r = \frac{1}{2}d(p, A)$. Notemos que $r > 0$, ya que $A$ es cerrado y $p \notin A$. Como $p \in X = \overline{Z}$, entonces $B(p, r) \cap Z \neq \emptyset$. Sea $z_m \in B(p, r) \cap Z$. Dado que $d(z_m, p) < r$, se tiene que

$$f_m(p) = \frac{1}{1 + d(z_m, p)} > \frac{1}{1 + r}. \tag{1}$$

Ahora, como $d(p, A) - d(z_m, A) \leq d(p, z_m) < r$, se tiene que $r + d(z_m, A) > d(p, A) = 2r$, lo que implica que $d(z_m, A) > r$, con lo cual

$$f_m(a) = \frac{1}{1 + d(z_m, a)} < \frac{1}{1 + r}. \tag{2}$$

para todo $a \in A$. Combinando (1) y (2), se tiene que

$$\sup f_m(A) \leq \frac{1}{1+r} < f_m(p). \tag{3}$$

Pero como $p \in B$, se deduce que

$$\sup f_m(A) < \sup f_m(B). \tag{4}$$

Por otro lado, como $A \subseteq B$, se cumple que $f_m(A) \subseteq f_m(B)$, con lo cual

$$\text{ínf}\, f_m(B) \leq \text{ínf}\, f_m(A). \tag{5}$$

Se sigue de (4) y (5) que $\omega_m(A) = \text{diám}\, f_m(A) < \text{diám}\, f_m(B) = \omega_m(B)$, lo que prueba que $\omega(A) < \omega(B)$.

Finalmente, veamos que $\omega$ satisface que $\omega(A) = 0$ si y solo si $A \in F_1(X)$. Así pues, sea $A \in CL(X)$. Supongamos que $A \in F_1(X)$, digamos, $A = \{x\}$. Luego, $\omega_n(A) = \text{diám}\, f_n(A) = \text{diám}\{f_n(x)\} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\omega(A) = 0$. Ahora supongamos que $A \notin F_1(X)$. Sean $x, y \in A$ con $x \neq y$, y sea $r = \frac{1}{2}d(x,y) > 0$. Como $Z$ es denso en $X$, existe $z_m \in B(x,r) \cap Z$. Notemos que $z_m \notin B(y,r)$ (de lo contrario, $d(x,y) < 2r$, lo que es una contradicción), lo que implica que $f_m(x) \neq f_m(y)$. Con esto, $\omega_m(A) = \text{diám}\, f_m(A) > 0$, luego, $\omega(A) > 0$.

De todo lo anterior, se concluye que $\omega$ es una función de Whitney, lo que prueba el teorema. □

# 3 Arcos ordenados en $C(X)$

Gracias a la estructura de $\mathbb{R}$, se sabe que $([0,1], \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. En un arco $C$, es natural preguntarse si los homeomorfismos del intervalo $[0,1]$ con $C$ preservan el orden, y de ser así el caso, podríamos "ordenar" a los elementos de un arco. La respuesta es afirmativa, basta definir el siguiente orden en $C$: si $h : [0,1] \to C$ es un homeomorfismo, defínase

$$h(p) \leq h(q) \text{ si y solo si } p \leq q.$$

En el caso de los hiperespacios, la relación de contención "$\subseteq$" es de orden parcial. Sin embargo, cuando hablamos de un arco $\alpha$ en un hiperespacio $\mathcal{H}$, entenderemos que el orden parcial en $\mathcal{H}$ restringido a $\alpha$ coincide con el orden total del arco $\alpha$. Esto queda establecido en la Definición 3.2, pero antes definamos el concepto de red:

**Definición 3.1.** Una colección $\mathcal{N}$ de conjuntos es una **red** o nido si para cualesquiera $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ se cumple que $N_1 \subseteq N_2$ o bien $N_2 \subseteq N_1$.

Una red desde $A_0$ hasta $A_1$ es una red $\mathcal{N}$ tal que $A_0, A_1 \in \mathcal{N}$ y $A_0 \subseteq N \subseteq A_1$ para cualquier $N \in \mathcal{N}$.

**Definición 3.2.** Sean $X$ un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Un **arco ordenado** en $\mathcal{H}$ es un arco en $\mathcal{H}$ que es también una red.

Una red compacta $\mathcal{N} \subseteq 2^X$ es una red que es también un subconjunto compacto de $2^X$.

**Lema 3.3.** *Sean $X$ un espacio métrico compacto, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ y $\omega$ una función de Whitney para $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{N}$ es una red compacta en $\mathcal{H}$, entonces $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Veamos que $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es inyectiva: sean $F, G \in \mathcal{N}$ con $F \neq G$. Por ser $\mathcal{N}$ una red, se tiene que $F \subseteq G$ o bien $G \subseteq F$, lo que implica que $\omega(F) < \omega(G)$ o bien $\omega(G) < \omega(F)$. En cualquier caso, $\omega(F) \neq \omega(G)$. Así, $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es inyectiva. Luego, es posible restringir el codominio de $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ a $\omega(\mathcal{N})$ para tener una función biyectiva. Además, $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es continua, ya que $\omega$ lo es, y como $\mathcal{N}$ es compacto, concluimos que $\omega \restriction_{\mathcal{N}}$ es un homeomorfismo. $\square$

Una red $\mathcal{M}$ desde $A_0$ hasta $A_1$ es maximal si no existe $\mathcal{N}$ red desde $A_0$ hasta $A_1$ tal que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N}$.

**Lema 3.4.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto y sean $A_0, A_1 \in C(X)$ con $A_0 \subseteq A_1$. Si $\mathcal{M}$ es una red maximal en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $A_1$, entonces $\mathcal{M}$ es compacto.*

*Demostración.* Dado que $\mathcal{M} \subseteq C(X)$ y $C(X)$ es compacto, bastará probar que $\mathcal{M}$ es un cerrado de $C(X)$. Para ello, sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}$ que converge a $A \in C(X)$ con respecto a la métrica de Hausdorff. Probaremos que $A \in \mathcal{M}$. Veamos primero que $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es una red. Como $\mathcal{M}$ es una red, solo resta verificar que si $M \in \mathcal{M}$, entonces $M \subseteq A$ o $A \subseteq M$. Así pues, sea $M \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es una red y $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{M}$, se tienen dos casos:

- **Caso 1:** $M \subseteq M_n$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$: en este caso, veamos que $K = \{B \in CL(X) : M \subseteq B\}$ es cerrado en $CL(X)$. Para ello, sea $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $K$ que converge a $L \in CL(X)$; veamos que $L \in K$, es decir, que $M \subseteq L$. Por [12, Proposición 1.23], bastará probar que $M \subseteq \limsup L_n$. Sea $x \in M$. Como $M \subseteq L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, si $U$ es un entorno de $x$, entonces $U \cap L_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $x \in \limsup L_n = L$. Esto prueba que $K$ es cerrado en $CL(X)$. Ahora bien, como la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A$, se cumple que $A \in K$, es decir, $M \subseteq A$.

- **Caso 2:** $M_n \subseteq M$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$: en este caso, observemos que el Teorema 2.12 implica que $C(M)$ es compacto, y como la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $A$, se tiene que $A \in C(M)$, en particular, $A \subseteq M$.

De ambos casos, se concluye que $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es una red. Ahora observemos que $A_0 \subseteq M_n \subseteq A_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $A_0 \subseteq A \subseteq A_1$. Así, hemos probado que $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es una red desde $A_0$ hasta $A_1$. Por la maximalidad de $\mathcal{M}$, se concluye que $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{A\}$, es decir, $A \in \mathcal{M}$. □

**Lema 3.5.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$. Si $\mathcal{M}$ es una red maximal en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $A_1$, entonces $\mathcal{M}$ es un arco desde $A_0$ hasta $A_1$.*

*Demostración.* Sea $\omega$ una función de Whitney para $C(X)$ (la cual existe por el Teorema 2.15). Sean $t_0 = \omega(A_0)$ y $t_1 = \omega(A_1)$. Como $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$, se sigue que $t_0 < t_1$. Además, como $\mathcal{M}$ es una red desde $A_0$ hasta $A_1$ y $A_0 \neq A_1$, se sigue que $\omega(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$. Más aún, por el Lema 3.4 se sabe que $\mathcal{M}$ es compacto, y por el Lema 3.3, se tiene que $\mathcal{M}$ es homeomorfo a $\omega(\mathcal{M})$. Así que para demostrar que $\mathcal{M}$ es un arco, será suficiente demostrar que $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$. Para ello, supongamos que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Entonces existe $x \in [t_0, t_1] \setminus \omega(\mathcal{M})$. Observar que $t_0 \neq x \neq t_1$, ya que $t_0, t_1 \in \omega(\mathcal{M})$. Definamos

$$S_0 = [t_0, x] \cap \omega(\mathcal{M}) \text{ y } S_1 = [x, t_1] \cap \omega(\mathcal{M}).$$

Notar que $S_0 \neq \emptyset$, ya que $t_0 \in S_0$. Sea $s_0 = \sup S_0$. Como $S_0$ es un cerrado de $\mathbb{R}$, entonces $s_0 \in S_0$, esto es, $s_0 \in \omega(\mathcal{M})$ y $t_0 \leq s_0 < x$. De igual forma, $S_1 \neq \emptyset$, ya que $t_1 \in S_1$. Sea $s_1 = \inf S_1$. Como $S_1$ es un cerrado de $\mathbb{R}$, entonces $s_1 \in S_1$, esto es, $s_1 \in \omega(\mathcal{M})$ y $x < s_1 \leq t_1$. Observemos que $s_0 < s_1$ y $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Sean $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ tales que $\omega(M_0) = s_0$ y $\omega(M_1) = s_1$. Dado que $\mathcal{M}$ es una red, $\omega(M_0) < \omega(M_1)$ y $\omega$ es una función de Whitney, se sigue que $M_0 \subsetneq M_1$. Además, $\mathcal{M} \subseteq C(X)$, lo que quiere decir que $M_0$ y $M_1$

son continuos. Como $M_0$ es un subcontinuo propio de $M_1$, por el Teorema 2.7 (a), existe un subcontinuo propio $B$ de $M_1$ tal que $M_0 \subsetneq B$.

Veamos ahora que $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red. Como $\mathcal{M}$ es una red, solo resta verificar que si $M \in \mathcal{M}$, entonces $M \subseteq B$ o $B \subseteq M$. Así pues, sea $M \in \mathcal{M}$. Dado que $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$, se tiene que $\omega(M) \leq s_0$ o $\omega(M) \geq s_1$.

- Si $\omega(M) \leq s_0 = \omega(M_0)$, dado que $\mathcal{M}$ es una red, se sigue que $M \subseteq M_0$; y como $M_0 \subseteq B$, se tiene que $M \subseteq B$.

- Si $\omega(M) \geq s_1 = \omega(M_1)$, usando nuevamente que $\mathcal{M}$ es una red, se tiene que $M_1 \subseteq M$; pero $B \subseteq M_1$, por lo que $B \subseteq M$.

De ambos incisos se concluye que $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red. Pero $B \in C(X)$, con lo cual $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red en $C(X)$. En suma, el hecho de que $s_0, s_1 \in \omega(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$ implica que $A_0 \subseteq M_0 \subseteq B \subseteq M_1 \subseteq A_1$. Hemos probado que $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $A_1$. Por la maximalidad de $\mathcal{M}$, se concluye que $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{B\}$, es decir, $B \in \mathcal{M}$. Sin embargo, dado que $M_0 \subsetneq B \subsetneq M_1$, se tiene que $s_0 < \omega(B) < s_1$, lo que contradice el hecho de que $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Esta contradicción proviene de suponer que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Por lo tanto, se concluye que $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$, lo que prueba el lema. □

**Lema 3.6.** *Si $X$ es un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in C(X)$ son tales que $A_0 \subseteq A_1$, entonces existe una red maximal en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $A_1$.*

*Demostración.* Defínase

$$\Lambda = \{\mathcal{N} \subseteq C(X) : \mathcal{N} \text{ es una red desde } A_0 \text{ hasta } A_1\}.$$

Observar que $\Lambda \neq \emptyset$, ya que $\{A_0, A_1\} \in \Lambda$. Además, $(\Lambda, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Veamos que toda cadena en $\Lambda$ tiene una cota superior en $\Lambda$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\Lambda$. Verifiquemos que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$ en $\Lambda$.

- Veamos primero que $\bigcup \mathcal{C}$ es una red. Sean $E, F \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tales que $E \in C_1$ y $F \in C_2$. Por ser $\mathcal{C}$ una cadena, se cumple que $C_1 \subseteq C_2$ o $C_2 \subseteq C_1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $C_1 \subseteq C_2$, entonces $E, F \in C_2$. Por ser $C_2$ una red, se tiene que $E \subseteq F$ o $F \subseteq E$. Así, hemos probado que $\bigcup \mathcal{C}$ es una red.

- Además, para cada $C \in \mathcal{C}$ se cumple que $A_0 \subseteq C \subseteq A_1$, por lo que $A_0 \subseteq \bigcup \mathcal{C} \subseteq A_1$.

- Finalmente, es claro que $C \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{C} \in \Lambda$ y $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$. Así, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $\mathcal{M}$ en $\Lambda$. Finalmente, observar que $\mathcal{M}$ es una red maximal en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $A_1$. □

Los lemas anteriores son útiles para demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 3.7.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$. Entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $A_1$.*

*Demostración.* Por el Lema 3.6, existe una red maximal $\mathcal{M}$ en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $A_1$. Ahora, por el Lema 3.5, $\mathcal{M}$ es un arco desde $A_0$ hasta $A_1$. Por la Definición 3.2, se concluye que $\mathcal{M}$ es un arco ordenado en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $A_1$. □

# 4 Arco conexidad de $2^X$ y $C(X)$

**Lema 4.1.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto y $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $2^X$ con más de un punto. Si $\mathcal{A}$ es una red, entonces $\mathcal{A}$ es también un arco ordenado.*

*Demostración.* Sea $\omega$ una función de Whitney para $2^X$ (la cual existe por el Teorema 2.15). Como $\mathcal{A}$ es una red compacta en $2^X$, por el Lema 3.3, se tiene que $\omega \restriction_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo. Así, $\omega(\mathcal{A})$ es un continuo, que resulta ser un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ con más de un punto. Por consiguiente, $\mathcal{A}$ es un arco, y por ser $\mathcal{A}$ una red, se concluye que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado. □

**Teorema 4.2.** *Si $X$ es un continuo, entonces $2^X$ y $C(X)$ son arco conexos.*

*Demostración.* Primero probaremos la arco conexidad de $2^X$: sea $K \in 2^X$ con $K \neq X$ y sea $A_0$ una componente de $K$. Como $A_0, X \in C(X)$ y $A_0 \neq X$, el Teorema 3.7 nos asegura la existencia de un arco ordenado $\alpha$ en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $X$. Sea $h$ un homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre $\alpha$ tal que $h(0) = A_0$ y $h(1) = X$. Definamos $f : [0, 1] \to 2^X$ como $f(t) = K \cup h(t)$. Se tiene que $f$ es continua por [12, Proposición 1.24]. Además, $f(0) = K$ y $f(1) = X$. Luego,

$f([0,1])$ es un subcontinuo de $2^X$ con más de un punto. Más aún, el hecho de que $\alpha$ sea un arco ordenado implica que $f([0,1])$ es una red desde $K$ hasta $X$. Así, por el Lema 4.1, $f([0,1])$ es un arco ordenado en $2^X$ desde $K$ hasta $X$.

Hemos probado que para cualquier $K \in 2^X$ con $K \neq X$, existe un arco en $2^X$ entre $K$ y $X$. Por el Lema 2.5, se concluye que $2^X$ es arco conexo.

Finalmente, probaremos que $C(X)$ es arco conexo. Si $A_0 \in C(X)$ con $A_0 \neq X$, por el Teorema 3.7, existe un arco en $C(X)$ desde $A_0$ hasta $X$. Nuevamente, el Lema 2.5 nos permite concluir que $C(X)$ es arco conexo. $\square$

**Corolario 4.3.** *Si $X$ es un continuo, entonces $2^X$ y $C(X)$ son continuos arco conexos.*

*Demostración.* Es consecuencia del Teorema 4.2 y la Observación 2.4. $\square$

# 5 El cubo de Hilbert encajado en $2^X$

Como consecuencia de la arco conexidad de $2^X$, asegurada por el Teorema 4.2, veremos que $2^X$ contiene un cubo de Hilbert siempre que $X$ sea un continuo. La prueba de este hecho se basa en la existencia de arcos en $2^X$. Para enunciar y probar este resultado, necesitaremos el siguiente lema:

**Lema 5.1.** [6, Lema 14.11] *Sean $X$ un continuo y $p \in X$. Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de $X \setminus \{p\}$ tales que:*

(a) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n$ tiene más de un punto.*

(b) $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$.

(c) $\lim A_n = \{p\}$.

**Teorema 5.2.** *Si $X$ es un continuo, entonces $2^X$ contiene un cubo de Hilbert.*

*Demostración.* Sea $p \in X$. Por el Lema 5.1, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de $X \setminus \{p\}$ que cumplen (a), (b) y (c) de dicho lema. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n$ es un continuo; por el Teorema 4.2, existe un arco $\alpha_n$ en $2^{A_n}$. Notar que $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es un cubo de Hilbert. Encajaremos $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ en $2^X$ de la siguiente manera: sea $(B_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Notar que $B_n \subseteq A_n$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\}$ en $2^X$. Definamos $h : \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n \to 2^X$ como

$$h\left((B_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup \{p\}.$$

Veamos que $h$ es continua e inyectiva.

Primero verificaremos que $h$ es continua: para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $B^k = (B_n^k)_{n=1}^{\infty}$; sea $B = (B_n)_{n=1}^{\infty}$ y supongamos que la sucesión $\{B^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ a $B$. Veamos que $\{h(B^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $2^X$ a $h(B)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de la función diámetro ([12, Lema 1.39]), se tiene que $\lim_{n\to\infty} \text{diám}(A_n) = \text{diám}(\lim A_n) = \text{diám}(\{p\}) = 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diám}(A_n) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$.

Como $\{B^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ a $B$ y la convergencia en $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es coordenada a coordenada, se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} B_1^k &= B_1, \\ \lim_{k\to\infty} B_2^k &= B_2, \\ &\vdots \\ \lim_{k\to\infty} B_{N-1}^k &= B_{N-1}. \end{aligned}$$

Entonces existen $K_1, \ldots, K_{N-1}$ tales que:

$$\begin{gathered} \text{si } k \geq K_1, \text{ entonces } H_d(B_1^k, B_1) < \varepsilon; \\ \text{si } k \geq K_2, \text{ entonces } H_d(B_2^k, B_2) < \varepsilon; \\ \vdots \\ \text{si } k \geq K_{N-1}, \text{ entonces } H_d(B_{N-1}^k, B_{N-1}) < \varepsilon. \end{gathered}$$

Defínase $K = \text{máx}\{K_1, \ldots, K_{N-1}\}$. Sea $n \geq N$.

**Afirmación:** $H_d(B_n^k, B_n) < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$: en efecto, sea $k \in \mathbb{N}$. Como $B_n, B_n^k \in 2^{A_n}$, por (3) de la Observación 2.10 bastará verificar que $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$ y $B_n \subseteq N(\varepsilon, B_n^k)$. Veamos que $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$. Sean $x \in B_n^k$

y $b \in B_n$. Como $B_n^k \subseteq A_n$ y $B_n \subseteq A_n$, entonces $x, b \in A_n$, de donde $d(x, B_n) \leq d(x, b) \leq \text{diám}(A_n) < \varepsilon$, con lo cual $x \in N(\varepsilon, B_n)$. Luego, $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$. Análogamente se prueba que $B_n \subseteq N(\varepsilon, B_n^k)$, lo que concluye que $H_d(B_n^k, B_n) < \varepsilon$.

Hemos probado que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $k \geq K$, se cumple que $H_d(B_n^k, B_n) < \varepsilon$. Veamos que $H_d(h(B^k), h(B)) < \varepsilon$ para todo $k \geq K$. Sea $k \geq K$. Por (3) de la Observación 2.10, bastará probar que $h(B^k) \subseteq N(\varepsilon, h(B))$ y $h(B) \subseteq N(\varepsilon, h(B^k))$. Sea $x \in h(B^k) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^k\right) \cup \{p\}$. Si $x = p$, entonces $x \in h(B) \subseteq N(\varepsilon, h(B))$, así que supongamos que $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^k$; entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n^k$. Como $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$, se cumple que $d(x, B_n) < \varepsilon$. Pero $B_n \subseteq h(B)$; se sigue que $d(x, h(B)) < \varepsilon$, es decir, $x \in N(\varepsilon, B_n)$. Esto prueba que $h(B^k) \subseteq N(\varepsilon, h(B))$. Análogamente se prueba que $h(B) \subseteq N(\varepsilon, h(B^k))$. Por lo tanto, $H_d(h(B^k), h(B)) < \varepsilon$ siempre que $k \geq K$. Esto prueba la continuidad de $h$.

Ahora veamos que $h$ es inyectiva: sean $(B_n)_{n=1}^{\infty}, (C_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ con $(B_n)_{n=1}^{\infty} \neq (C_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \neq C_m$. Como $B_m \subseteq A_m, C_m \subseteq A_m$ y $A_m \cap A_n = \emptyset$ si $n \neq m$, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Ahora, como $p \notin A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $p \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, con lo cual $(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \cup \{p\} \neq (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cup \{p\}$, es decir, $h((B_n)_{n=1}^{\infty}) \neq h((C_n)_{n=1}^{\infty})$. Esto prueba que $h$ es inyectiva.

De lo anterior, se concluye que $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ está encajado en $2^X$. □

# 6 Arcos ordenados en $2^X$

En el Teorema 3.7, dados $A_0, A_1 \in C(X)$ con $A_0 \neq A_1$, vimos una condición suficiente para la existencia de arcos ordenados entre $A_0$ y $A_1$. La condición era simplemente que $A_0 \subseteq A_1$. Sin embargo, si ahora $A_0, A_1 \in 2^X$, la condición no siempre es suficiente para asegurar la existencia de arcos ordenados en $2^X$ desde $A_0$ hasta $A_1$. Por ejemplo, consideremos $X = [0, 1], A_0 = \{0\}$ y $A_1 = \{0, 1\}$. Aquí, $A_0, A_1 \in 2^X$ y $A_0 \subseteq A_1$, pero la única red desde $A_0$ hasta $A_1$ es $\{\{0\}, \{0, 1\}\}$, la cual no es homeomorfa a $[0, 1]$ y por tanto, no es un arco. Luego, no existe arco ordenado en $2^X$ desde $A_0$ hasta $A_1$.

A partir de ahora, cuando digamos que $\alpha$ es un arco ordenado desde $A_0$ hasta $A_1$, entenderemos que $A_0 \subseteq A_1$ y que $A_0$ y $A_1$ son los puntos extremos de

$\alpha$. Hay que notar que un arco ordenado desde $A_0$ hasta $A_1$ no necesariamente es un arco ordenado desde $A_1$ hasta $A_0$.

**Lema 6.1.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto y sean $M_0, M_1 \in 2^X$ tales que $M_0 \subseteq M_1, M_0 \neq M_1$ y cada componente de $M_1$ intersecta a $M_0$. Entonces existe $C \in 2^X$ tal que $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$ y cada componente de $C$ intersecta a $M_0$.*

*Demostración.* Dado que $M_0 \subsetneq M_1$, tomemos $p \in M_1 \setminus M_0$. Sea $K_1$ la componente de $M_1$ que contiene a $p$. Por hipótesis, $K_1 \cap M_0 \neq \emptyset$. Sea $q \in K_1 \cap M_0$ y sea $K_0$ la componente de $M_0$ que tiene a $q$. Como $K_0$ es conexo, $q \in K_0 \cap K_1$ y $K_0 \subseteq M_1$, entonces $K_0 \subseteq K_1$. Más aún, $K_0 \subseteq K_1 \setminus \{p\}$, ya que $K_0 \subseteq M_0$ y $p \notin M_0$. Notemos que $K_0$ es compacto, ya que $K_0 \subseteq X$, $X$ es compacto y $K_0$ es cerrado en $X$. Así, $K_0$ es un subcontinuo propio de $K_1$. Por el Teorema 2.7 (a), existe $B$ subcontinuo de $K_1 \setminus \{p\}$ tal que $K_0 \subsetneq B$. Sea $C = M_0 \cup B$. Obsérvese que $C$ es un compacto no vacío de $X$, es decir, $C \in 2^X$. Además, $M_0 \subseteq C \subseteq M_1$. Como $K_0 \subsetneq B$, entonces $B \nsubseteq M_0$, lo que implica que $M_0 \subsetneq M_0 \cup B$, es decir, $M_0 \neq C$. Para ver que $C \neq M_1$, simplemente notemos que $p \in M_1$ y $p \notin C$. Solo resta verificar que cada componente de $C$ intersecta a $M_0$. Para ello, sea $L$ una componente de $C$. Se tienen dos casos:

(1) Si $L \cap B = \emptyset$, entonces $L \subseteq M_0$, y como $L \neq \emptyset$, se tiene que $L \cap M_0 \neq \emptyset$.

(2) Si $L \cap B \neq \emptyset$, dado que $B \subseteq C$ y $B$ es conexo, se tiene que $B \subseteq L$. Pero $K_0 \subseteq B$, así que $K_0 \subseteq L$. Como $K_0 \neq \emptyset$ y $K_0 \subseteq M_0$, se sigue que $L \cap M_0 \neq \emptyset$.

En ambos casos se concluye que $L \cap M_0 \neq \emptyset$, lo que completa la prueba. □

**Teorema 6.2.** *Sean $X$ un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in 2^X$ con $A_0 \neq A_1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Existe un arco ordenado en $2^X$ desde $A_0$ hasta $A_1$.*

(b) *$A_0 \subseteq A_1$ y cada componente de $A_1$ intersecta a $A_0$.*

*Demostración.* [(a)$\Rightarrow$(b)] Supongamos que existe $\alpha$ un arco ordenado en $2^X$ desde $A_0$ hasta $A_1$. Entonces $A_0 \subseteq A_1$, así que solo resta verificar que todas las componentes de $A_1$ intersectan a $A_0$. Supongamos por contradicción que existe una componente $K$ de $A_1$ tal que $K \cap A_0 = \emptyset$. Como $A_0 \subseteq A_1$, por el Teorema del cable cortado ([12, Teorema 1.7]), se tiene que $K$ y $A_0$ están separados en $A_1$. Entonces existen $E$ y $F$ subconjuntos de $X$ tales que $A_1 = E|F$, $A_0 \subseteq E$ y $K \subseteq F$. Definamos $\mathcal{E} = \{A \in \alpha : A \subseteq E\}$ y $\mathcal{F} = \{A \in \alpha : A \cap F \neq \emptyset\}$. Observemos lo siguiente:

- $\mathcal{E} \neq \emptyset$, ya que $A_0 \in \mathcal{E}$. También $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ya que $A_1 \in \mathcal{F}$.
- $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} = \alpha$. En efecto, si $A \in \alpha$, entonces $A \subseteq A_1 = E \cup F$. Si $A \subseteq E$, entonces $A \in \mathcal{E}$. Si $A \nsubseteq E$, entonces $A \cap F \neq \emptyset$, de donde $A \in \mathcal{F}$.
- $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset$, ya que $E \cap F = \emptyset$.
- $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son cerrados en $\alpha$. En efecto, como $E \cup F = A_1$ es cerrado y $E$ y $F$ están separados, entonces $E$ y $F$ son cerrados. Luego, $\mathcal{E}$ es cerrado en $\alpha$ (por la Definición 2.11). Por otro lado, $X \setminus F$ es abierto en $X$, de donde $\{A \in \alpha : A \subseteq X \setminus F\}$ es abierto en $\alpha$, con lo cual $\mathcal{F} = \alpha \setminus \{A \in \alpha : A \subseteq X \setminus F\}$ es cerrado en $\alpha$.

Los incisos anteriores implican que $\alpha$ es disconexo. Pero esto contradice el hecho de que $\alpha$ es un arco. Por lo tanto, concluimos que toda componente de $A_1$ intersecta a $A_0$.

[(b)$\Rightarrow$(a)] Supongamos (b) y definamos

$$\Lambda = \{\mathcal{N} \subseteq 2^X : \mathcal{N} \text{ es una red compacta desde } A_0 \text{ hasta } A_1 \text{ y para cada } N \in \mathcal{N},\ \text{cada componente de } N \text{ intersecta a } A_0\}.$$

Observar que $\Lambda \neq \emptyset$, ya que $\{A_0, A_1\} \in \Lambda$. Además, $(\Lambda, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Veamos que toda cadena en $\Lambda$ tiene una cota superior en $\Lambda$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\Lambda$. De la misma forma que en el Lema 3.6, se verifica que $\bigcup \mathcal{C}$ es una red desde $A_0$ hasta $A_1$ y es una cota superior para $\mathcal{C}$. Para ver que $\bigcup \mathcal{C} \in \Lambda$, solo resta demostrar que para todo $N \in \bigcup \mathcal{C}$, cada componente de $N$ intersecta a $A_0$. Sea $N \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existe $\mathcal{N} \in \mathcal{C}$ tal que $N \in \mathcal{N}$. Como $\mathcal{N} \in \Lambda$, se cumple que cada componente de $N$ intersecta a $A_0$.

Luego, por el Lema de Zorn, $\Lambda$ tiene un elemento maximal $\mathcal{M}$. Observar que $\mathcal{M}$ es una red compacta desde $A_0$ hasta $A_1$. Para ver que $\mathcal{M}$ es un arco ordenado en $2^X$ desde $A_0$ hasta $A_1$, solo resta probar que $\mathcal{M}$ es un arco. Para ello, sea $\omega$ una función de Whitney para $2^X$ (la cual existe por el Teorema 2.15). Sean $t_0 = \omega(A_0)$ y $t_1 = \omega(A_1)$. Como $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$, se sigue que $t_0 < t_1$. Además, como $\mathcal{M}$ es una red desde $A_0$ hasta $A_1$ y $A_0 \neq A_1$, se tiene que $\omega(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$. Más aún, $\mathcal{M}$ es compacto. Por el Lema 3.3, se tiene que $\mathcal{M}$ es homeomorfo a $\omega(\mathcal{M})$. Así que para demostrar que $\mathcal{M}$ es un arco, será suficiente demostrar que $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$. Para ello, supongamos que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Entonces existe $x \in [t_0, t_1] \setminus \omega(\mathcal{M})$. Observar que $t_0 \neq x \neq t_1$, ya que $t_0, t_1 \in \omega(\mathcal{M})$. Definamos

$$S_0 = [t_0, x] \cap \omega(\mathcal{M}) \text{ y } S_1 = [x, t_1] \cap \omega(\mathcal{M}).$$

Notemos que $S_0 \neq \emptyset$, ya que $t_0 \in S_0$. Sea $s_0 = \sup S_0$. Como $S_0$ es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $s_0 \in S_0$, esto es, $s_0 \in \omega(\mathcal{M})$ y $t_0 \leq s_0 < x$. De igual forma, $S_1 \neq \emptyset$, ya que $t_1 \in S_1$. Sea $s_1 = \text{ínf}\, S_1$. Como $S_1$ es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $s_1 \in S_1$, esto es, $s_1 \in \omega(\mathcal{M})$ y $x < s_1 \leq t_1$. Observemos que $s_0 < s_1$ y $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Sean $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ tales que $\omega(M_0) = s_0$ y $\omega(M_1) = s_1$. Dado que $\mathcal{M}$ es una red, $\omega(M_0) < \omega(M_1)$ y $\omega$ es una función de Whitney, se sigue que $M_0 \subsetneq M_1$. Veamos que cada componente de $M_1$ intersecta a $M_0$. Sea $L$ una componente de $M_1$. Como $M_1 \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \in \Lambda$, se tiene que $L \cap A_0 \neq \emptyset$. Además, dado que $M_0 \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es una red desde $A_0$ hasta $A_1$, se sigue que $A_0 \subseteq M_0$. Luego, $L \cap M_0 \neq \emptyset$. Por el Lema 6.1, existe $C \in 2^X$ tal que $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$ y cada componente de $C$ intersecta a $M_0$. Veamos que $C \in \mathcal{M}$; si probamos que $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Lambda$, por la maximalidad de $\mathcal{M}$, concluiremos lo deseado.

**Afirmación 1:** $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red: en efecto, como $\mathcal{M}$ es una red, solo queda probar que si $M \in \mathcal{M}$, entonces $M \subseteq C$ o $C \subseteq M$. Sea $M \in \mathcal{M}$. Como $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$, entonces $\omega(\mathcal{M}) \leq s_0$ o $\omega(\mathcal{M}) \geq s_1$. Dado que $\mathcal{M}$ es una red y $\omega$ una función de Whitney, en el primer caso se concluye que $M \subseteq M_0 \subseteq C$, mientras que en el segundo caso se concluye que $C \subseteq M_1 \subseteq M$.

**Afirmación 2:** $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red compacta: en efecto, $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red por la Afirmación 1, y es compacta por ser unión finita de compactos.

**Afirmación 3:** $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red desde $A_0$ hasta $A_1$. Esto se sigue del hecho de que $\mathcal{M}$ es una red desde $A_0$ hasta $A_1$ y de que $A_0 \subseteq M_0 \subseteq C \subseteq M_1 \subseteq A_1$.

**Afirmación 4:** Cada componente de $C$ intersecta a $A_0$: en efecto, sea $Q$ una componente de $C$, luego, $Q \cap M_0 \neq \emptyset$. Sea $z \in Q \cap M_0$ y sea $Q_0$ la componente de $M_0$ que tiene a $z$. Como $Q_0$ es un subconjunto conexo de $M_1$ que tiene a $z$, entonces $Q_0 \subseteq Q$. Ahora, como $M_0 \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \in \Lambda$, se tiene que $Q_0 \cap A_0 \neq \emptyset$. Luego, $Q \cap A_0 \neq \emptyset$.

De las cuatro afirmaciones anteriores, concluimos que $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Lambda$, de donde $C \in \mathcal{M}$. Pero $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$, lo que implica que $s_0 < \omega(C) < s_1$. Esto contradice el hecho de que $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Esta contradicción vino de suponer que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Por lo tanto, $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$, lo que prueba que $\mathcal{M}$ es un arco. Esto demuestra (a). $\square$

Si $\alpha$ es un arco ordenado en $2^X$ desde $A_0$ hasta $A_1$ y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, diremos que $\alpha$ empieza en $\mathcal{H}$ si $A_0 \in \mathcal{H}$. Cuando esto ocurra, diremos que $\alpha$ se queda en $\mathcal{H}$ si $\alpha \subseteq \mathcal{H}$.

**Corolario 6.3.** *Sean $X$ un espacio métrico compacto y $\alpha$ un arco ordenado en $2^X$. Si $\alpha$ empieza en $C(X)$, entonces $\alpha$ se queda en $C(X)$.*

*Demostración.* Supongamos que $\alpha$ es un arco ordenado en $2^X$ desde $A_0$ hasta $A_1$, donde $A_0 \in C(X)$. Veamos que $\alpha \subseteq C(X)$. Para ello, sea $B \in \alpha$ con $B \neq A_0$. Notemos que $A_0 \subseteq B$. Sea $\beta$ el subarco de $\alpha$ desde $A_0$ hasta $B$. Como $\beta \subseteq \alpha$, entonces $\beta$ es una red, es decir, $\beta$ es un arco ordenado en $2^X$ desde $A_0$ hasta $B$. Por el Teorema 6.2, cada componente de $B$ intersecta a $A_0$. Pero $A_0$ es un subconjunto conexo de $B$, con lo cual $B$ tiene solo una componente. Esto quiere decir que $B$ es conexo, es decir, $B \in C(X)$. Esto prueba que $\alpha \subseteq C(X)$, como queríamos. $\square$

# 7 Arco conexidad local de $2^X$ y $C(X)$

**Definición 7.1.** Un espacio topológico $Y$ es **localmente arco conexo en un punto** $p \in Y$ si para todo entorno $U$ de $p$ existe $V$ un subconjunto abierto arco conexo de $Y$ tal que $p \in V \subseteq U$. Decimos que un espacio topológico es **localmente arco conexo** si es localmente arco conexo en cada uno de sus puntos.

**Definición 7.2.** Un espacio topológico $Y$ es **localmente conexo en un punto** $p \in Y$ si para todo entorno $U$ de $p$, existe $V \subseteq Y$ abierto y conexo tal que $p \in V \subseteq U$. Decimos que $Y$ es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Un continuo localmente conexo es llamado un **continuo de Peano**.

**Observación 7.3.** Si un espacio topológico $Y$ es localmente arco conexo en un punto $p \in Y$, entonces $Y$ es localmente conexo en $p$. Como consecuencia, $Y$ es localmente conexo siempre que $Y$ sea localmente arco conexo.

**Observación 7.4.** La arco conexidad local y la conexidad local son propiedades topológicas.

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 6.2 y del Corolario 6.3.

**Corolario 7.5.** *Si $X$ es un continuo, los hiperespacios $2^X$ y $C(X)$ son localmente arco conexos en $X$.*

*Demostración.* Verifiquemos primero la arco conexidad local de $2^X$ en $X$. Sea $U \subseteq 2^X$ un entorno de $X$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $X \in B_{H_d}(X, \varepsilon) \subseteq U$. Veamos que $B_{H_d}(X, \varepsilon)$ es un subespacio arco conexo de $2^X$. Para ello, sea $A_0 \in B_{H_d}(X, \varepsilon)$ con $A_0 \neq X$. Por ser $X$ conexo, se satisface (b) del Teorema 6.2 (con $A_1 = X$); luego, existe $\alpha$ un arco ordenado en $2^X$ desde $A_0$ hasta $X$. Veamos que $\alpha \subseteq B_{H_d}(X, \varepsilon)$. Sea $A \in \alpha$, entonces $A_0 \subseteq A$. Como $H_d(A_0, X) < \varepsilon$, se sigue que $X \subseteq N(A_0, \varepsilon) \subseteq N(A, \varepsilon)$. Por otro lado, $A \subseteq X \subseteq N(X, \varepsilon)$. Por (3) de la Observación 2.10, se tiene que $H_d(A, X) < \varepsilon$, es decir, $A \in B_{H_d}(X, \varepsilon)$.

Hemos probado que para todo $A_0 \in B_{H_d}(X, \varepsilon) \setminus \{X\}$ existe un arco en $B_{H_d}(X, \varepsilon)$ con puntos extremos $A_0$ y $X$. Por el Lema 2.5, se concluye que $B_{H_d}(X, \varepsilon)$ es arco conexa. Esto prueba la arco conexidad local de $2^X$ en $X$.

La prueba de la arco conexidad local de $C(X)$ en $X$ se realiza de manera análoga al caso anterior, observando que ahora $A_0 \in C(X)$ y el Corolario 6.3 nos asegura que $\alpha \subseteq C(X)$. $\square$

**Corolario 7.6.** *Si $X$ es un continuo, los hiperespacios $2^X$ y $C(X)$ son localmente conexos en $X$.*

*Demostración.* Es consecuencia del Corolario 7.5 y la Observación 7.3. $\square$

# 8 Homogeneidad de $2^X$ y $C(X)$

En esta sección, dado un continuo $X$, estudiaremos la homogeneidad de los hiperespacios $2^X$ y $C(X)$. Es conveniente recordar que un espacio topológico

$X$ es homogéneo si para cada $x, y \in X$ existe $h : X \to X$ homeomorfismo tal que $h(x) = y$.

**Lema 8.1.** [8, Teorema 2.67] *Sea $X$ un continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *$X$ es un continuo de Peano.*

(b) *$2^X$ es un continuo de Peano.*

(c) *$C(X)$ es un continuo de Peano.*

Los siguientes teoremas caracterizan la homogeneidad de $2^X$ y de $C(X)$ cuando $X$ es un continuo.

**Teorema 8.2.** *Sea $X$ un continuo. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) *$2^X$ es homogéneo.*

(b) *$X$ es un continuo de Peano.*

(c) *$2^X$ es un cubo de Hilbert.*

*Demostración.* [(a)⇒(b)] Supongamos que $2^X$ es homogéneo. Como $X$ es un continuo, por el Corolario 4.2, $2^X$ es un continuo. Además, por el Corolario 7.6, $2^X$ es localmente conexo en $X$. Como $2^X$ es homogéneo, para cada $A \in 2^X$ existe un homeomorfismo que envía $X$ en $A$. Luego, $2^X$ es localmente conexo en cada uno de sus puntos, es decir, $2^X$ es localmente conexo y, por ende, es un continuo de Peano. Luego, por el Lema 8.1, $X$ es un continuo de Peano.

[(b)⇒(c)] Es consecuencia del Teorema de Curtis-Schori (véase [6, Teorema 11.3]).

[(c)⇒(a)] Por [9, Teorema 3.6], los cubos de Hilbert son homogéneos. □

Para el siguiente teorema, diremos que un arco $A$ contenido en $X$ es un arco libre si $A \setminus \{p, q\}$ es abierto de $X$, donde $p$ y $q$ son los puntos extremos de $A$.

**Teorema 8.3.** [6, Teorema 15.7] *Sea $X$ un continuo. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

(a) *$C(X)$ es homogéneo.*

(b) *$X$ es un continuo de Peano sin arcos libres.*

(c) *$C(X)$ es un cubo de Hilbert.*

# 9 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

# Bibliografía

[1] Barragán, F.; Romero, A.; Sánchez, S.; Grijalva, V., *Breve introducción a la métrica de Hausdorff*, Capítulo 3 en *Topología y sus aplicaciones 3* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[2] Chaves, L., *Estudio del n-ésimo hiperespacio de un continuo*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 2 de febrero de 2018.

[3] Córdova, V., *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 26 de agosto de 2011.

[4] Escobedo, R.; López, M. de J.; Serapio, I., *Una breve introducción a los hiperespacios de conjuntos*, Capítulo 8 en *Topología y sus aplicaciones 3* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[5] Grijalva, V., *Métrica de Hausdorff*, tesis de licenciatura en matemáticas aplicadas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, presentada en diciembre de 2013.

[6] Illanes, A.; Nadler, S. B. Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recents Advances*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[7] Iribarren, I., *Topología de espacios métricos*, Limusa, México, 2008.

[8] Márquez, N., *Introducción a los continuos de Peano*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada en julio de 2017.

[9] Maya, D.; van Mill, J., *Continuos homogéneos*, Capítulo 10 en *Topología y sus aplicaciones 4* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016.

[10] Nadler, S. B. Jr., *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

[11] Nadler, S. B. Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math, Vol.49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[12] Pérez, E., *Existencia de arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y $2^X$*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP, presentada el 24 de junio de 2022.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
esau.perez@alumno.buap.mx

**Matemáticas y sus aplicaciones 19, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-861-4**

# Capítulo 6

# La clase de las gráficas finitas es $SF_n$−cerrada II

**David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez**
**FCFM, BUAP**

**Resumen**

Un problema interesante en la teoría de hiperespacios de continuos es conocer las clases de continuos que son $\mathcal{H}$-*cerrada*, donde $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio del continuo $X$. Esto es, diremos que una clase de continuos $\lambda$ es $\mathcal{H}$-*cerrada* si para cualesquiera $X \in \lambda$ y $Y$ un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, se cumple que $Y \in \lambda$. En este trabajo se exponen dos resultados: sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, si $X$ y $Y$ son continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces *(i)* $X$ es un continuo localmente conexo casi enrejado si y solo si $Y$ es un continuo localmente conexo casi enrejado; *(ii)* $X$ es gráfica finita si y solo si $Y$ es gráfica finita.

## 1 Introducción

Desde 1968 se ha estudiado el tema de determinar cuando una clase de continuos es $\mathcal{H}$-*cerrada*. Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. El conjunto de los enteros positivos lo denotamos por $\mathbb{N}$.

Dado un continuo $X$ y $n \in \mathbb{N}$ se consideran clases de subconjuntos de $X$ que poseen alguna propiedad específica, a estas clases se les llama *hiperespacios*. Los hiperespacios más conocidos de $X$ son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es un subconjunto cerrado y no vacío de } X\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos }\} \text{ y} \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{aligned}$$

Note que $F_1(X) = \{\{x\}: x \in X\}$. Todos estos hiperespacios son considerados con la *métrica de Hausdorff* $H$ [19, Teorema 2.2]. El hiperespacio $F_n(X)$ se llama *n-ésimo producto simétrico* de $X$.

En 1979 Sam B. Nadler, Jr. introdujo el *hiperespacio suspensión de un continuo* $X$, $HS_1^1(X)$ (véase [42]). Después en 2004, Sergio Macías introdujo el *n-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo* $X$, $HS_n^n(X)$, donde $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ (véase [26]). Más aún, en 2008, Juan Carlos Macías introdujo el *n-ésimo pseudo-hiperespacio suspensión de un continuo* $X$, $HS_1^n(X)$ (véase [23]). El estudio del $(n, m)$*-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo* $X$, $HS_m^n(X)$, donde $n, m \in \mathbb{N}$, y $n \geq m$, es una generalización y ha ganado interés recientemente (véase [1]).

El *n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo* $X$ lo introdujo en el 2010 Franco Barragán Mendoza, considerado como el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, denotado por $SF_n(X)$, que se obtiene de $F_n(X)$ al identificar a $F_1(X)$ a un punto, con la topología cociente (véase [7]).

Para un continuo $X$, sea $\mathcal{H}(X)$ cualquiera de los hiperespacio mencionados anteriormente. Decimos que $X$ tiene *hiperespacio único* $\mathcal{H}(X)$ si la siguiente implicación se cumple: si $Y$ es un continuo y $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces $X$ es homeomorfo a $Y$.

El problema de encontrar condiciones para un continuo $X$ para que él tenga hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$ ha sido ampliamente estudiado (véase [1]–[6], [9], [10], [11], [9]–[18], [32], [26]–[33]).

En el año de 1978, S. B. Nadler, Jr. en [34, (0.61)] define:

La clase de continuos $\Lambda$ es *C-determinada* si $X, Y \in \Lambda$ tales que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces $X$ es homeomorfo a $Y$.

Una línea interesante es hallar las clases de continuos cuyos miembros son $C$-determinados. Generalizando la definición de clase $C$-determinada (no solo $C(X)$), para otros tipos de hiperespacios, en 2003, J. J. Charatonik en [5, pág. 247] introdujo la noción de clase $\mathcal{H}$*-determinada* para los hiperespacios $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X)\}$. De manera natural extendemos este concepto para todos los hiperespacios:

Dado un continuo $X$, denotamos por $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de $X$. La clase de continuos $\Lambda$ es $\mathcal{H}$*-determinada* si para cualesquiera $X, Y \in \Lambda$ tales que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, se cumple que $X$ es homeomorfo a $Y$.

Dado un continuo $X$, denotamos por $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de $X$. Una clase de continuos $\lambda$ es *$\mathcal{H}$-cerrada* si para cualesquiera $X \in \lambda$ y $Y$ un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, se cumple que $Y \in \lambda$.

En la literatura se puede observar que un camino para conocer continuos que tienen hiperespacio único es explorar los conceptos de clases $\mathcal{H}$-determinada y $\mathcal{H}$-cerrada. En este trabajo estamos interesados en el problema que sigue:

**Problema 1.1.** Determinar las clases de continuos que sean *$\mathcal{H}$-cerradas.*

Una *gráfica finita* es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos de tal manera que sean ajenos o se intersectan en uno o en ambos puntos extremos.

Dado un continuo $X$, los conceptos que siguen fueron introducidos en [10, págs. 1583 y 1584]:

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X \colon \text{ existe una gráfica finita } G \text{ en } X \text{ tal que } p \in \operatorname{int}_X(G)\},$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X),$$

$X$ es *casi enrejado* si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en $X$.

En relación al Problema 1.1, en el caso particular de las gráficas finitas se conocen los siguientes resultados:

(a) La clase de las gráficas finitas es $C_2$-cerrada (véase [27, pág. 356]).

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, la clase de las gráficas finitas es $C_n$-cerrada (véase [16, Teorema 3.8, pág. 186]).

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$. La clase de las gráficas finitas es $F_n$-cerrada (véase [9, Corolario 3.5]).

(d) Para cada $n \in \mathbb{N}$. La clase de las gráficas finitas es $HS_n$-cerrada (véase [38, Teorema 3.2]).

(e) Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$. La clase de las gráficas finitas es $HS_m^n$-cerrada (véase [1, Teorema 3.3]).

En relación con el Problema 1.1, en este capítulo se exponen dos resultados:

(f) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $X$ y $Y$ son continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces $X$ es un continuo localmente conexo casi enrejado si y solo si $Y$ es un continuo localmente conexo casi enrejado (véase el Teorema 7.1).

(g) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $X$ y $Y$ son continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces $X$ es gráfica finita si y solo si $Y$ es gráfica finita (véase el Teorema 7.2).

Cabe mencionar que los Teoremas 7.1 y 7.2 forman parte de la tesis doctoral del cuarto autor Germán Montero Rodríguez (véase [32] y [40]).

# 2 Nociones generales

A lo largo de este trabajo, si $X$ es un espacio topológico y $A$ un subconjunto de $X$, los símbolos $\mathrm{cl}_X(A)$, $\mathrm{bd}_X(A)$ e $\mathrm{int}_X(A)$ denotan la *cerradura* de $A$, la *frontera* de $A$ y el *interior* de $A$ en $X$, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto $A$ se representa por $|A|$. Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, representan el conjunto vacío, los números reales y el plano euclidiano, respectivamente.

Sean $X$ un espacio topológico y $p \in X$; un subconjunto $V$ de $X$ es una *vecindad* de $p$ si existe un conjunto abierto $U$ en $X$ tal que $p \in U \subset V$.

Sean $X$ un espacio métrico, con métrica $d$, $p \in X$, $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$. La *bola abierta* en $X$ con centro en $p$ y radio $\varepsilon$ es el conjunto $\{x \in X : d(p,x) < \varepsilon\}$, se denota por $B_X(p,\varepsilon)$ aunque escribimos $B(p,\varepsilon)$ cuando no pudiera haber confusión. La *nube* de radio $\varepsilon$ alrededor de $A$: $\{x \in X : d(x,a) < \varepsilon$, para algún $a \in A\}$, se denota por $N_X(\varepsilon, A)$ aunque escribimos $N(\varepsilon, A)$ cuando no pudiera haber confusión.

Sean $X$ un espacio topológico y $p \in X$. El espacio $X$ es *localmente conexo en $p$* si para cada conjunto abierto $U$ en $X$ tal que $p \in U$, existe un conjunto abierto y conexo $V$ en $X$ tal que $p \in V \subset U$. Si $X$ es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que $X$ es *localmente conexo*.

Un *arco* es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos que la métrica de $\mathbb{R}^n$ es la euclideana $||x||_n$. Una *$n$-celda* es un espacio topológico homeomorfo a la bola unitaria $B_n(\mathbf{0},1) =$

$\{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x||_n \leq 1\}$. Una *curva cerrada simple* es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_2 = 1\}$.

Un espacio topológico $X$ es *arco-conexo*, si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un arco contenido en $X$ que une a $x$ y $y$. Si $x \in X$, el espacio $X$ es *localmente arco-conexo en* $x$ si para cualquier abierto $U$ de $X$ tal que $x \in U$, existe $V$ abierto de $X$ y arco-conexo tal que $x \in V \subset U$. El espacio $X$ es *localmente arco-conexo* si es localmente arco-conexo en cada uno de sus puntos.

# 3 Gráficas finitas

Sean $X$ un continuo, $p \in X$ y $\beta$ un número cardinal. Decimos que *$p$ tiene orden en $X$* menor o igual a $\beta$, denotado por $ord(p, X) \leq \beta$, si $p$ tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ en $X$ tal que $|\operatorname{bd}_X(U)| \leq \beta$, para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que *$p$ tiene orden en $X$* igual a $\beta$ ($ord(p, X) = \beta$) si $ord(p, X) \leq \beta$ y $ord(p, X) \nleq \alpha$ para todo número cardinal $\alpha < \beta$. Sean $E(X) = \{x \in X \colon ord(x, X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X \colon ord(x, X) = 2\}$ y $R(X) = \{x \in X \colon ord(x, X) \geq 3\}$. Los elementos de $E(X)$ (respectivamente, $O(X)$ y $R(X)$) son llamados *puntos extremos* (respectivamente, *puntos ordinarios* y *puntos de ramificación*) de $X$.

Los resultados que se presentan en esta sección se elaboraron durante el desarrollo de la tesis doctoral del cuarto autor [40], estos se encuentran sumergidos en las demostraciones de resultados expuestos en la referencia [9]. Sin embargo, en nuestra versión fueron retomados, adaptados y escritos para nuestros fines de investigación.

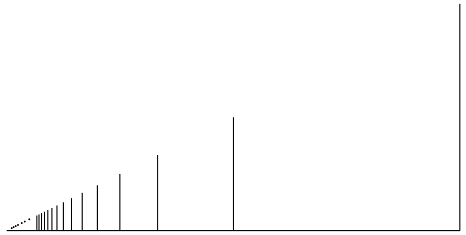


Figura 1: Continuo que no es una gráfica finita.

Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$. Un *$n$-odo simple* $Y$ es la unión de $n$ arcos $L_1, \ldots, L_n$ de $Y$ tales que $L_i \cap L_j = \{v\}$ si $i \neq j$ y $v$ es un punto extremo de los arcos $L_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. El punto $v$ es el *vértice* del $n$-odo simple $Y$. Un 3-odo simple es llamado *triodo simple*.

Dada una gráfica finita $X$, un *ciclo* en $X$ es una curva cerrada simple $J$ en $X$ tal que $J - \{a\}$ es un subconjunto abierto de $X$, para algún $a \in J$. Un *arco libre* en $X$ es un arco $\alpha$ en $X$ con puntos extremos $p$ y $q$ tales que $\alpha - \{p, q\}$ es abierto en $X$. Un *arco libre maximal* en $X$ es un arco libre en $X$ que es maximal, con respecto a la inclusión. Sean

$\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un ciclo en } X\}$,

$\mathcal{A}_E(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal tal que } |J \cap R(X)| = 1\}$,

$\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal en } X\} \cup \mathcal{A}_R(X)$.

Los elementos de $\mathcal{A}_S(X)$ son las *aristas* de la gráfica finita $X$.

**Lema 3.1.** *Sean $X$ una gráfica finita con $R(X) \neq \emptyset$ y $J, K \in \mathcal{A}_S(X)$. Entonces*

*(a) si $p \in \operatorname{int}_X(J)$, entonces $p \notin R(X)$,*

*(b) si $p \in \operatorname{bd}_X(K)$, entonces $p \in R(X)$ y*

*(c) si $J \neq K$, entonces $\operatorname{int}_X(J) \cap K = \emptyset$.*

*Demostración.* ($a$) Sean $p \in \operatorname{int}_X(J)$ y $U$ un subconjunto abierto de $X$ tal que $p \in U$. Entonces, existe un arco $L$ en $J$ tal que $p \in \operatorname{int}_J(L) \subset L \subset U \cap \operatorname{int}_X(J)$. Como $U \cap \operatorname{int}_X(J)$ es un subconjunto abierto de $X$, tenemos que $\operatorname{int}_J(L)$ es un subconjunto abierto de $X$. Así, $\operatorname{bd}_X(\operatorname{int}_J(L)) = L - \operatorname{int}_J(L)$. Como $L - \operatorname{int}_J(L)$ tiene a lo más dos elementos, tenemos que $\operatorname{bd}_X(\operatorname{int}_J(L))$ tiene a lo más dos elementos. Esto implica que $p \in E(X) \cup O(X)$. Así, $p \notin R(X)$.

($b$) Sean $p \in \operatorname{bd}_X(K)$ y $\mathcal{B}$ una base de vecindades de $p$ en $X$. Como $R(X) \neq \emptyset$ existe $q \in X - K$. Dado que $X$ es localmente conexo, existe $L$ un arco en $X$ con puntos extremos $p$ y $q$.

Caso 1. Supongamos que $K$ es un ciclo. Como $K - \{p\}$ es un subconjunto abierto de $X$ tenemos que $K \cap L = \{p\}$. Denotemos $r = d(p, q)$. Sea $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset B_X(p, r)$. Note que $\operatorname{bd}_X(U)$ tiene al menos tres elementos. Esto implica que $p \notin E(X) \cup O(X)$. Así, $p \in R(X)$.

Caso 2. Supongamos que $K$ es un arco. Note que $p$ es un punto extremo de $K$. Sea $a$ el otro punto extremo de $K$. Como $K - \{a, p\}$ es un subconjunto abierto de $X$, tenemos que $K \cap L \subset \{a, p\}$. Podemos suponer que $K \cap L = \{p\}$. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(p, \varepsilon) \subset K \cup L$. Sea $C_p$ la componente de $B_X(p, \varepsilon)$ tal que $p \in C_p$. Denotemos por $L_p = \mathrm{cl}_X(C_p)$. Note que $L_p$ es un arco. Más aún, $K \cup L_p$ es un arco libre. Esto contradice la maximalidad de $K$. Por lo tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos que $B_X(p, \varepsilon) \not\subset K \cup L$. Esto implica que existe un arco $M$ en $X$ tal que $(K \cup L) \cap M = \{p\}$. Sea $z$ el otro punto extremo de $M$ y sea $r = min\{d(a, p), d(p, q), d(p, z)\}$. Así, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset B_X(p, r)$. Note que $\mathrm{bd}_X(V)$ tiene al menos tres elementos. Así, $p \in R(X)$.

$(c)$ Sean $J \neq K$. Supongamos que existe $p \in \mathrm{int}_X(J) \cap K$. Como $p \in \mathrm{int}_X(J)$, por la parte $(a)$, tenemos que $p \notin R(X)$. Como $p \in K$, entonces $p \in \mathrm{int}_X(K)$ o $p \in \mathrm{bd}_X(K)$. Si $p \in \mathrm{bd}_X(K)$, por la parte $(b)$, tenemos que $p \in R(X)$, lo cual es una contradicción. Así, $p \in \mathrm{int}_X(K)$. Por lo tanto, $\mathrm{int}_X(J) \cap K = \mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K)$. Esto implica que, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K)$ es un subconjunto abierto y cerrado del conjunto conexo $\mathrm{int}_X(J)$. Así, $\mathrm{int}_X(J) = \mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K)$ y $\mathrm{int}_X(J) \subset \mathrm{int}_X(K)$. Por lo tanto, $J \subset K$. Esto contradice que $J \neq K$. □

**Ejemplo 3.2.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\left[\left(0, \frac{1}{2^n}\right), \left(1, \frac{1}{2^n}\right)\right]$ el segmento de recta que une los puntos $\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$ y $\left(1, \frac{1}{2^n}\right)$ en $\mathbb{R}^2$. Para para cada $k \in \{0, \ldots, 2^n\}$ sea $\left[\left(\frac{k}{2^n}, 0\right), \left(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]$. Sean

$$R_n = \bigcup_{k=0}^{2^n} \left[\left(\frac{k}{2^n}, 0\right), \left(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right].$$

Luego,

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \cup \left[\left(0, \frac{1}{2^n}\right), \left(1, \frac{1}{2^n}\right)\right]$$

es un continuo casi enrejado, véase la Figura 2.

**Lema 3.3.** *Si $X$ es una gráfica finita, entonces $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de $X$.*

*Demostración.* Note que $\mathcal{G}(X) = X$ y por [44, Teorema 9.10], $R(X)$ es un conjunto finito. Veamos que $X \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$.

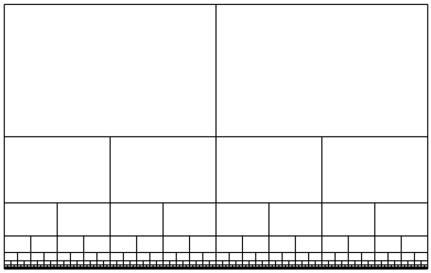


Figura 2: Continuo casi enrejado

Sea $p \in R(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos un punto $p_n \in B_X(p, \frac{1}{n}) - R(X)$. Como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $p$, entonces $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Así, $R(X) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Esto implica que

$$X = \mathcal{G}(X) = (\mathcal{G}(X) - R(X)) \cup R(X) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X)).$$

Por lo tanto, $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de $X$. □

# 4 Hiperespacios de un continuo

Dado un continuo $X$, los *hiperespacios* del continuo $X$ son clases de subconjuntos de $X$ que cumplen cierta propiedad específica.

Dados un continuo $X$ y $n \in \mathbb{N}$, consideremos los hiperespacios de $X$ siguientes.

$$\begin{array}{rcl} 2^X & = & \{A \subset X : A \text{ es no vacío y es cerrado de } X\}, \\ F_n(X) & = & \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \\ C_n(X) & = & \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{array}$$

Todos estos hiperespacios son considerados con la métrica de Hausdorff $H$ [19, Teorema 2.2]. El hiperespacio $F_n(X)$ es el *$n$-ésimo producto simétrico* de $X$ y $C_n(X)$ es el *$n$-ésimo hiperespacio* de $X$. Escribimos simplemente $C(X)$ para denotar a $C_1(X)$. Es claro que $C(X)$ es la clase de los subcontinuos de $X$, conocido como el *hiperespacio de los subcontinuos* de $X$. Note que $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es una copia isométrica de $X$.

Sean $X$ un continuo, $n, r \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_r$ subconjuntos no vacíos de $X$. El *vietórico* de $A_1, \ldots, A_r$, denotado por $\langle A_1, \ldots, A_r \rangle$, es el conjunto

$$\langle A_1, \ldots, A_r \rangle_{2^X} \cap F_n(X),$$

donde $\langle A_1, \ldots, A_r \rangle_{2^X}$, es el conjunto

$$\left\{ B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^{r} A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, r\} \right\}.$$

**Teorema 4.1.** *[19, Teorema 1.2] Si $X$ es un continuo con una topología $\tau$, entonces la colección*

$$\{\langle S_1, \ldots, S_r \rangle_{2^X} : S_i \in \tau \textit{ para cada } i \in \{1, \ldots, r\}, r \in \mathbb{N}\},$$

*es una base para la topología para $2^X$.*

La topología generada por la base mencionada en el Teorema 4.1 es conocida como la *topología de Vietoris*.

Sean $X$ un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos los siguientes subespacios del $n$-ésimo producto simétrico de $X$:

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) \colon A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ la cual es una } n\text{-celda}\}$$

y

$$R_n(X) = \{A \in F_n(X) \colon A \cap R(X) \neq \emptyset\}.$$

**Lema 4.2.** *Si $X$ es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.*

*Demostración.* Si $B \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces existe una $n$-celda $\mathcal{M}$ en $F_n(X)$ tal que $B \in \mathrm{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$. Así, existe un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $F_n(X)$ tal que $B \in \mathcal{U} \subset \mathrm{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Sea $B_1 \in \mathcal{U} - \{B\}$. Esto implica que $B_1 \in \mathcal{U} \subset \mathrm{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es una $n$-celda en $F_n(X)$, entonces $B_1 \in \mathcal{E}_n(X)$. Por tanto, $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. □

**Teorema 4.3.** *Si $X$ es un continuo localmente conexo y $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces ningún punto de $A$ es el vértice de un triodo simple de $X$.*

*Demostración.* Supongamos que existe un punto $p \in A$ tal que $p$ es el vértice de un triodo simple $T_0$ de $X$.

Sea $\mathcal{U}$ una vecindad de $A$ en $F_n(X)$ tal que $\mathcal{U}$ es una $n$-celda. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Vamos a suponer que $A = \{p, x_2, \dots, x_m\}$, donde $m \leq n$ y los puntos $p, x_2, \dots, x_m$ son diferentes entre sí. Eligiendo apropiadamente puntos cercanos al punto $x_m$, podemos encontrar un punto $B \in B_{F_n(X)}(A, \varepsilon)$ de tal manera que $B = \{p, x_2, \dots, x_n\}$ y los puntos $p, x_2, \dots, x_n$ son diferentes entre sí.

Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que los conjuntos $B_X(p, \varepsilon_0)$, $B_X(x_2, \varepsilon_0), \dots, B_X(x_n, \varepsilon_0)$ son ajenos por pares. Consideremos $\delta = \text{mín}\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$ y arcos $I_2, \dots, I_n$ de $X$ tales que $x_i \in I_i$ y $\text{diám}(I_i) < \delta$, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$. Por último, vamos a elegir un subtriodo $T$ de $T_0$ tal que $p$ es el vértice de $T$ y el $\text{diám}(T) < \delta$. De esta manera, obtenemos que $\langle T, I_2, \dots, I_n\rangle \subset B_{F_n(X)}(B, \delta) \subset \mathcal{U}$. Como $T, I_2, \dots, I_n$ son ajenos por pares, $T \times I_2 \times, \dots, \times I_n$ es homeomorfo a $\langle T, I_2, \dots, I_n\rangle$. Por lo tanto, el espacio $T \times I_2 \times, \dots, \times I_n$ está encajado en $\mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$, lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{U}$ es una $n$-celda. Esto completa la prueba. $\square$

**Teorema 4.4.** *Si $X$ es un continuo localmente conexo que no es una gráfica finita, entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $X$ contiene una gráfica finita con al menos $k$ aristas.*

*Demostración.* Consideremos dos arcos $\alpha$ y $\beta$ en $X$. Supongamos que $\alpha \cap \beta$ tiene una infinidad de componentes. Esto implica que $\alpha - (\alpha \cap \beta)$ tiene una infinidad de componentes. Sea $k \in \mathbb{N}$ cualquiera. Ahora, consideremos $k$ componentes, digamos $J_1, \dots, J_k$, de $\alpha - (\alpha \cap \beta)$. De aquí se sigue que $\beta \cup J_1, \dots, J_k$ es una gráfica finita con al menos $k$ aristas.

Supongamos que $\alpha \cap \beta$ tiene un número finito de componentes. Como $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ se tiene que $\alpha \cup \beta$ es una gráfica finita. Como $X$ no es una gráfica finita, por [44, Teorema 9.10], el continuo $X$ satisface una de las siguientes dos propiedades.

(a) Existe una infinidad de puntos $p \in X$ tales que $\text{ord}(p, X) > 2$.

(b) Existe un punto $q \in X$ tal que $\text{ord}(q, X) \geq \aleph_0$.

Supongamos que se cumple $(a)$. Esto implica que existe una sucesión de puntos diferentes entre sí $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ tales que $\text{ord}(p_m, X) > 2$, para cada $m \in$

$\mathbb{N}$. Por [33, Ejemplo 8 de 51, pág. 277], para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un triodo simple $T_m$ de $X$ tal que $p_m$ es el vértice de $T_m$.

Fijamos un punto $p \in X$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, sea $\alpha_i$ un arco que une los puntos $p$ con $p_i$. Por el supuesto al inicio de la prueba, tenemos que $Y = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{k+1} \cup T_1 \cup \cdots \cup T_{k+1}$ es una gráfica finita. Como cada $p_i$ es un punto de ramificación de $Y$, entonces $Y$ contiene al menos $k+1$ puntos de ramificación. Así, $Y$ contiene al menos $k$ aristas.

Supongamos que se cumple $(b)$. En este caso existe un punto $q \in X$ tal que $\operatorname{ord}(q, X) \geq \aleph_0$. Por [33, Ejemplo 8, pág. 277], $q$ es el vértice de un $k$-odo simple de $Y$. Así, $Y$ contiene al menos $k$ aristas. $\square$

**Teorema 4.5.** *[9, Lema 3.3] Si $\alpha$ es un arco en $F_n(X)$ y $\alpha$ une los elementos $A, B$, entonces $\bigcup \alpha$ tiene un número finito de componentes, cada una de ellas es localmente conexo e intersecta a ambos $A$ y $B$.*

**Lema 4.6.** *Si $X$ es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es denso en $F_n(X)$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $A \in \mathcal{U}$ arbitrario, digamos $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, para algún $m \leq n$.

**Caso 1**. Si $m = n$, entonces $A \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$.

**Caso 2**. Si $m < n$, como $\mathcal{U}$ es abierto en $F_n(X)$, existe $r > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$. Por [32, Proposición 2.22], existen $a_{m+1}, \ldots, a_n \in B_X(a_1, r)$ distintos de $a_1, \ldots, a_m$. Sea $B = \{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$. Como $H(A, B) < r$, se tiene que $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$, y por tanto $B \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$.

Por lo tanto, $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es denso en $F_n(X)$. $\square$

# 5 El producto simétrico suspensión

Sean $X$ un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. El $n$-ésimo producto simétrico suspensión de $X$, denotado por $SF_n(X)$, es el espacio cociente

$$SF_n(X) = F_n(X)/F_1(X)$$

que se obtiene de $F_n(X)$ al identificar a $F_1(X)$ a un punto, con la topología cociente, véase [7].

La función cociente $q_X$ es la proyección natural $q_X\colon F_n(X) \to SF_n(X)$ y $F_X$ denota el elemento $q_X(F_1(X))$. La restricción de $q_X$ al subespacio $F_n(X)-F_1(X)$ es un homeomorfismo, es decir,

$$q_X|_{F_n(X)-F_1(X)}\colon F_n(X) - F_1(X) \longrightarrow SF_n(X) - \{F_X\}$$

es un homeomorfismo. De ahora en adelante, escribimos

$$q^*_X = q_X|_{F_n(X)-F_1(X)}.$$

A continuación presentamos algunos ejemplos del $n$-ésimo producto simétrico suspensión del arco y del triodo simple, en el caso cuando $n = 2$.

**Ejemplo 5.1.** Sea $X$ un arco. En [30, pág. 51] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(X)$ es el triángulo en el plano con vértices en $(0, 0), (0, 1)$ y $(1, 1)$, es una 2-celda, donde $F_1(X)$ es homeomorfo al segmento que une el punto $(0, 0)$ con el punto $(1, 1)$. Si identificamos $F_1(X)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a este triángulo. Así, el hiperespacio $SF_2(X)$, también es una 2-celda.

**Ejemplo 5.2.** Sea $T$ un triodo simple. En [30, pág. 55] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(T)$ es una 2-celda $D_0$ que contiene tres 2-celdas, $D_1, D_2$ y $D_3$, pegadas de tal manera que $D_0 \cap D_i$ es un arco para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y la intersección $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ es un punto $p$. Además $F_1(T)$ está contenido en la frontera como variedad de $D_1, D_2, D_3$ y $F_1(T) \cap D_0 = \{p\}$. Así, al identificar $F_1(T)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a $F_2(T)$. Por tanto, $SF_2(T)$ es homeomorfo a $F_2(T)$.

Dada una gráfica finita $X$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, consideramos

$$\mathcal{N}_n(X) = \{A \in F_n(X) - F_{n-1}(X)\colon A \cap R(X) = \emptyset\}.$$

**Lema 5.3.** *Si $X$ es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $F_n(X)$. Por Lema 4.6, $\mathcal{U}\cap(F_n(X)-F_{n-1}(X)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U}\cap(F_n(X)-F_{n-1}(X))$ y supongamos que $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como $\mathcal{U}$ es abierto de $F_n(X)$, existe un $r_1 > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r_1) \subset \mathcal{U}$.

Sea $\delta = \text{mín}\{d(p_i, p_j) \colon i, j \in \{1, \ldots, n\}$ donde $i \neq j\}$. Sea $r = \text{mín}\{r_1, \frac{\delta}{2}\}$. Note que $B_X(p_i, r) \cap B_X(p_j, r) = \emptyset$, donde $p_i, p_j \in A$ y $i \neq j$. Como $X$ es una gráfica finita, por Lema 3.3, $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de $X$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X)) \neq \emptyset$. Así, existe $b_i \in B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X))$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Esto implica que $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X) \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. □

**Lema 5.4.** *Si $X$ es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.*

*Demostración.* Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Supongamos que $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como $p_i \notin R(X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $X$ es una gráfica finita, podemor encontrar $J_1, \ldots, J_n$ arcos ajenos por pares de $X$ tal que $(J_1 \cup \cdots \cup J_n) \cap R(X) = \emptyset$ y $p_i \in \text{int}_X(J_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Note que la asociación que manda $(t_1, \ldots, t_n)$ al conjunto $\{t_1, \ldots, t_n\}$ es un homeomorfismo. Así, $J_1 \times \cdots \times J_n$ es homeomorfo a $\langle J_1, \ldots, J_n \rangle$. Por tanto, $\langle J_1, \ldots, J_n \rangle$ es una $n$-celda y es vecindad de $A$ en $F_n(X)$. Por tanto, $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Luego, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$. □

El siguiente resultado es una caracterización de gráficas finitas, el cual nos ayuda en la prueba del resultado principal de este trabajo.

**Teorema 5.5.** *Un continuo localmente conexo $X$ es una gráfica finita si y solo si para algún (para cada) $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$ con un número finito de componentes.*

*Demostración.* Sean $X$ una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Se sigue del Lema 5.4 que $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Por otro lado, por el Lema 5.3, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.

Note que $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Por el Lema 5.4, $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Mostraremos que la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{E}_n(X)$. Para esto sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{E}_n(X)$. Por Lema 4.2, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Esto implica que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Como $X$ es una gráfica finita, por Lema 5.3, tenemos que $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X)$. Esto implica que $|A| = n$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Así, $|A \cap \text{int}_X(E_j)| = l_j$, donde $l_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $|A| = n$, tenemos que $l_1 + \cdots + l_m = n$. Así,

$A \in K_X(l_1, \ldots, l_m)$. Por lo tanto, la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{E}_n(X)$.

Como $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $F_n(X)$ es localmente conexo, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es localmente arco conexo, véase [44, Teorema 8.25]. Así, cada componente de $\mathcal{E}_n(X)$ intersecta a un conjunto de la forma $\mathcal{K}(i_1, \ldots, i_m)$. Como existe una cantidad finita de conjuntos $\mathcal{K}(i_1, \ldots, i_m)$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ tiene una cantidad finita de componentes.

Ahora, supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$, con $r$ componentes, donde $r \in \mathbb{N}$ y que $X$ no es una gráfica finita.

Como $F_n(X)$ es un continuo localmente conexo, las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son arco conexas [44, Teorema 8.26]. Por Teorema 4.4 existe una gráfica finita $G$ contenida en $X$ tal que $G$ contiene al menos $k = 2r + 1$ aristas. Supongamos que $J_1, \ldots, J_k$ son tales aristas de $G$. Consideramos puntos $p_i \in \text{int}_G(J_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Elegimos subconjuntos abiertos y conexos de $X$ ajenos por pares $V_1, \ldots, V_k$ tales que $p_i \in V_i$ y $V_i \cap G \subset \text{int}_G(J_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $\{p_i\} \in \langle V_i \rangle$ y $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$, podemos elegir elementos $A_i \in \langle V_i \rangle \cap \mathcal{E}_n(X)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Así, tenemos $2r+1$ conjuntos, digamos $A_1, \ldots, A_{2r+1}$. Por el principio de las casillas, existe una componente $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_n(X)$ que contiene tres de los conjuntos $A_i$, con $i \in \{1, \ldots, k\}$, podemos suponer que son $A_1$, $A_2$ y $A_3$ los que pertenecen a la componente $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es arco conexo, existe un arco $\alpha_1$ en $\mathcal{C}$ tal que $\alpha_1$ une a $A_3$ y $A_1$, y un arco $\alpha_2$ en $\mathcal{C}$ tal que $\alpha_2$ une a $A_3$ y $A_2$. Consideramos un punto $x \in A_3$. Por Teorema 4.5, existe $C_1$ y $C_2$ componentes de $\bigcup \alpha_1$ y $\bigcup \alpha_2$, respectivamente, tales que $x \in C_1 \cap C_2$. Así, $C = C_1 \cup C_2$ es un continuo localmente conexo de $\bigcup \alpha_1 \cup \bigcup \alpha_2$ que intersecta a $A_1, A_2$ y $A_3$.

Note que cada punto $p \in C$, pertenece a un elemento de $\mathcal{E}_n(X)$. Por Teorema 4.3, $p$ no es el vértice de un triodo simple de $X$, es decir, $C$ es un continuo localmente conexo sin triodos simples. Por [44, 8.40], $C$ es un arco o una curva cerrada simple. En cualquier caso, podemos concluir que existe un arco en $X$, el cual intersecta a los tres conjuntos $A_1, A_2$ y $A_3$. Sea $\beta$ un arco en $C$ con puntos extremos $a_1$ y $a_2$ tal que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ y $a_3 \in A_3 \cap \beta - \{a_1, a_2\}$. Por [44, Teorema 8.26] los conjuntos $V_1, \ldots, V_k$ son arco conexos. Como $a_3 \in V_3$, existe un arco $\alpha$ en $V_3$ con puntos extremos $a_3$ y $p_3$. Como los puntos de $\beta$ no son vértice de un triodo simple de $X$ y $a_3 \in \alpha \cap \beta$, entonces $\alpha \cap \beta$ es un arco. Como $a_1 \in V_1$ y $a_2 \in V_2$, entonces los puntos $a_1$

y $a_2$ no pertenecen a $V_3$. Esto implica que $a_1, a_2 \notin \alpha$ y que $\alpha \subset \beta$. Así, $\beta$ intersecta el arista $J_3$. Como $J_3$ tiene un vértice $v$ de un triodo simple de $X$, entonces $v \notin \beta$. Luego, $J_3 \not\subset \beta$. Nuevamente, como $\beta$ no contiene vértice de un triodo simple de $X$, tenemos que $a_1 \in J_3$ o $a_2 \in J_3$. Si $a_1 \in J_3$, entonces $a_1 \in V_1 \cap J_3$ y como $V_1 \cap G \subset \mathrm{int}_G(J_1)$, entonces $a_1 \in J_3 \cap \mathrm{int}_G(J_1)$, lo cual es una contradicción, ya que $J_1$ y $J_3$ son aristas de la gráfica finita $G$, véase el Lema 3.1. Por lo tanto, $X$ es una gráfica finita. □

# 6 Conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$

En esta parte vamos a definir una de las herramientas primordial para resolver el resultado de que la clase las gráficas finitas tienen hiperespacio $SF_n$-cerrado.

De ahora en adelante, cuando nos referimos a $X$ como una gráfica finita significa que $X$ tiene $E_1, \ldots, E_m$ aristas, con $m \in \mathbb{N}$.

Sean $X$ una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Dados $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $i_1 + \cdots + i_m = n$, consideramos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ como el subconjunto de $F_n(X)$ tal que cada elemento de $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ tiene exactamente $i_j$ puntos en el interior de la arista $E_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, es decir, $A \in \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ implica que $i_j = |A \cap \mathrm{int}_X(E_j)|$.

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación. Dados $j, l \in \{1, \ldots, m\}$ sean

$$\mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \text{ si } i_j = n$$

y

$$\mathcal{K}_X(j, l) = \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \text{ si } j \neq l \text{ y } i_j + i_l = n.$$

Note que $\mathcal{K}_X^j \subset \langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle$ y $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j) = \langle E_j \rangle$.

**Lema 6.1.** *Si $X$ es una gráfica finita entonces las siguientes propiedades se cumplen.*

*(a)* $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ *es arco conexo.*

*(b)* $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \cap \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m) = \emptyset$ *si y solo si existe* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que* $i_j \neq l_j$.

*(c) $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$.*

*Demostración. (a).* Sea $A, B \in \mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$, con $A \neq B$. Sea $M = \{j \in \{1,\ldots,m\} : i_j \neq \emptyset\}$. Fijamos $j \in M$. Notemos que $B \cap \mathrm{int}_X(E_j) \neq \emptyset$. Sea $A_j = A \cap \mathrm{int}_X(E_j)$ y $B_j = B \cap \mathrm{int}_X(E_j)$. Notemos que $A_j$ y $B_j$ son conjuntos no vacíos, $|A_j| = |B_j| = i_j$ y $A_j, B_j \in \langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle$.

**Afirmación**. Existe una función continua $\mu_j \colon [0,1] \to \langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle$ tal que $\mu_j(0) = A_j$, $\mu_j(1) = B_j$ y $|\mu_j(t)| = i_j$, para cada $t \in [0,1]$.

*Prueba de la afirmación.* Sea $L$ el subintervalo de $[0,1]$ tal que $\beta \colon L \to \mathrm{int}_X(E_j)$ es un homeomorfismo. Supongamos que $A_j = \{a_1,\ldots,a_{i_j}\}$ y $B_j = \{b_1,\ldots,b_{i_j}\}$. Para cada $k \in \{1,\ldots,i_j\}$, sea $r_{a_k}, r_{b_k} \in L$ tales que $\beta(r_{a_k}) = a_k$ y $\beta(r_{b_k}) = b_k$. Podemos suponer que $r_{a_k} < r_{a_{k+1}}$ y $r_{b_k} < r_{b_{k+1}}$. Sea $L_k$ el intervalos con puntos extremos $r_{a_k}$ y $r_{b_k}$. Consideramos la función $\alpha_k \colon [0,1] \to L_k$ tal que $\alpha_k(t) = r_{a_k} + t(r_{b_k} - r_{a_k})$, la cual es continua. Notemos que $\alpha_s(t) \neq \alpha_l(t)$ si $s, l \in \{1,\ldots,i_j\}$ con $s \neq l$ y $t \in (0,1)$. Sean $\gamma_k = \beta \circ \alpha_k$. Luego, la función $\mu_j \colon [0,1] \to \langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle$ definida como $\mu_j(t) = \{\gamma_1(t),\ldots,\gamma_{i_j}(t)\}$, para cada $t \in [0,1]$, es continua. Notemos que $\mu_j(0) = A_j$, $\mu_j(1) = B_j$ y $|\mu_j(t)| = i_j$, para cada $t \in [0,1]$. Por tanto nuestra Afirmación es verdadera.

Notemos que $\mu_j([0,1])$ es un continuo localmente conexo. Como $A \neq B$, existe $j_0 \in M$ tal que $A_{j_0} \neq B_{j_0}$. Como $A_{j_0}, B_{j_0} \in \mu_{j_0}([0,1])$, existe $\phi_0 : [0,1] \to \mu_{j_0}([0,1])$ tal que $\phi_0(0) = A_{j_0}$ y $\phi_0(1) = B_{j_0}$, la cual es una función continua e inyectiva.

Sea $\phi \colon [0,1] \to \mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ definida como $\phi(t) = \bigcup\{\mu_j(t) \colon j \in M - \{j_0\}\} \cup \phi_0(t)$, para cada $t \in [0,1]$. Notemos que $\phi$ es una función continua e inyectiva. Por tanto, $\phi([0,1])$ es un arco con puntos extremos $A$ y $B$. Así, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ es arco conexo.

*(b).* Supongamos que $A \in \mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m) \cap \mathcal{K}_X(l_1,\ldots,l_m)$. Por un lado, $|A \cap \mathrm{int}_X(E_j)| = i_j$ y por otro lado tenemos que $|A \cap \mathrm{int}_X(E_j)| = l_j$, para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$. Así, $i_j = l_j$, para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m) = \mathcal{K}_X(l_1,\ldots,l_m)$.

*(c).* Sea $A \in \mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$. Esto implica que $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Por Lema 5.4, $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Supongamos que $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$. Sean $I_1,\ldots,I_n$ arcos ajenos por pares de $X$ tales que $I_i \cap R(X) = \emptyset$ y $a_i \in \mathrm{int}_X(I_i)$, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Luego, $A \in \langle \mathrm{int}_X(I_1),\ldots,\mathrm{int}_X(I_n) \rangle$. Como $\langle I_1,\ldots,I_n \rangle$ es homeomorfo a $I_1 \times \cdots \times I_n$, tenemos que $\langle \mathrm{int}_X(I_1),\ldots,\mathrm{int}_X(I_n) \rangle$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. Note que si $B \in \langle \mathrm{int}_X(I_1),\ldots,\mathrm{int}_X(I_n) \rangle -$

$\{A\}$, entonces $|B| = n$. Dado $j \in \{1, \ldots, m\}$, como $|A \cap \mathrm{int}_X(E_j)| = i_j$, entonces $\mathrm{int}_X(E_j)$ contiene $i_j$ de los arcos $I_1, \ldots, I_n$. Digamos que que $\mathrm{int}_X(E_j)$ contiene los arcos $I_1, \ldots, I_{i_j}$. Así, $B \cap \mathrm{int}_X(I_1) \subset \mathrm{int}_X(E_j), \ldots, B \cap \mathrm{int}_X(I_{i_j}) \subset \mathrm{int}_X(E_j)$. Como los arcos $I_1, \ldots, I_n$ son ajenos por pares, tenemos que $|B \cap \mathrm{int}_X(E_j)| = i_j$. Esto implica que $B \in \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Así, tenemos

$$\langle \mathrm{int}_X(I_1), \ldots, \mathrm{int}_X(I_n) \rangle \subset \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m).$$

Por lo tanto, $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. □

**Teorema 6.2.** *[26, Teorema 3.1] Para un continuo localmente conexo $X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

*(a) $X$ es casi enrejado.*

*(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.*

*(c) Cada subconjunto abierto y no vacío de $X$ contiene un arco libre de $X$.*

**Teorema 6.3.** *[26, Teorema 2.5] Sean $X$ un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$. Si $A \in F_n(X)$ y $\mathcal{U}$ es una vecindad de $A$ en $F_n(X)$, entonces existe una colección finita $V_1, \ldots, V_{|A|}$ de subconjuntos ajenos por pares, abiertos y conexos de $X$ tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_{|A|} \rangle \subset \mathrm{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$.*

**Teorema 6.4.** *[26, Teorema 3.5] Sea $X$ un continuo localmente conexo tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso en $F_n(X)$, donde $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $A \in F_{n-1}(X)$, entonces no existe vecindades de $A$ en $F_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$.*

**Teorema 6.5.** *Si $X$ es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$.*

*Demostración.* Por Lema 5.4, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.

Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Por Teorema 4.3, no existen puntos de $A$ que sean el vértice de un triodo simple de $X$, es decir, $A \cap R(X) = \emptyset$. Como $X$ es una gráfica finita, por Teorema 5.5, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Supongamos que $A \in F_{n-1}(X)$. Por Teorema 6.4, no existen vecindades de $A$ en $F_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$, lo cual es una contradicción ya que $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Esto implica que $A \in F_n(X) - F_{n-1}(X)$. Por tanto, $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$. □

El siguiente resultado nos dice cómo son las componentes del subespacio $\mathcal{E}_n(X)$, para una gráfica finita $X$.

**Teorema 6.6.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $X$ es una gráfica finita, entonces las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son los conjuntos de la forma:*

$$\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m).$$

*Demostración.* Suponga que $X$ es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Note que $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Así, la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es un subconjunto de $\mathcal{N}_n(X)$. Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, sea $l_k = |A \cap \operatorname{int}_X(E_k)|$. Como $|A| = n$, entonces $l_1 + \cdots + l_m = n$. Así, $A \in \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m)$. Luego, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto de la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Por tanto, $\mathcal{N}_n(X)$ es la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Por el Teorema 6.5, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Por el Lema 6.1, los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ son abiertos, conexos y ajenos por pares de $\mathcal{E}_n(X)$, y por tanto, éstos son las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$. □

**Teorema 6.7.** *[7, Teorema 5.2] Sean $X$ un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Entonces $X$ es localmente conexo si y solo si $SF_n(X)$ es localmente conexo.*

**Teorema 6.8.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $X$ es un continuo localmente conexo casi enrejado, entonces no existen vecindades de $F_X$ en $SF_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $SF_n(X)$ tal que $F_X \in \mathcal{U}$. Por un lado, $\mathcal{U} - \{F_X\}$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$, y como la función cociente $q_X^*$ es continua, entonces $(q_X^*)^{-1}(\mathcal{U} - \{F_X\})$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Sea $\mathcal{V} = (q_X^*)^{-1}(\mathcal{U} - \{F_X\})$. Sea $\{a\} \in F_1(X)$. Como $q_X$ es continua, existe un $\delta > 0$ tal que

$$q_X(B_{F_n(X)}(\{a\}, \delta)) \subset \mathcal{U}. \tag{1}$$

Como $X$ es conexo, la cardinalidad de $B_X(a, \delta)$ no es finito. Así, podemos tomar $b \in B_X(a, \delta)$ tal que $b \neq a$. Luego, $\{a, b\} \in B_{F_n(X)}(\{a\}, \delta)$. Por (1), $q_X^*(\{a, b\}) \in \mathcal{U}$. Más aún, $q_X^*(\{a, b\}) \in \mathcal{U} - \{F_X\}$. Así, $\{a, b\} \in \mathcal{V}$.

Como $X$ es un continuo localmente conexo casi enrejado, por Teorema 6.2, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Como $\{a, b\} \in F_{n-1}(X)$ y $\mathcal{V}$ es una vecindad de $\{a, b\}$ en $F_n(X)$, por Teorema 6.4, tenemos que $\mathcal{V}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Así, $q_X^*(\mathcal{V}) = \mathcal{U} - \{F_X\}$, no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Como $\mathcal{U} - \{F_X\} \subset \mathcal{U}$, tenemos que $\mathcal{U}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. □

**Teorema 6.9.** *[12, Proposición 1] Sean $X$ un continuo y $k \in \mathbb{N}$.*

*(a) Si $V \subset X$ es una $k$-celda y $U$ es un subconjunto abierto de $X$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces existe una $k$-celda $\tau$ tal que $\tau \subset U \cap V$.*

*(b) Si $V \subset X$ es tal que $V \approx I^\infty$ y $U$ es un subconjunto abierto de $X$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $U \cap V$ contiene un espacio homeomorfo a $I^\infty$.*

Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y un continuo $Z$, consideramos la siguiente notación.

$$\mathcal{SE}_n(Z) = \{A \in SF_n(Z) \colon A \text{ tiene una vecindad en } SF_n(Z) \text{ la cual es una } n\text{-celda}\}.$$

**Teorema 6.10.** *Sean $X$, $Y$ continuos localmente conexos casi enrejados y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$.*

*(a) Entonces $q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)) = \mathcal{SE}_n(Y)$*

*(b) Si $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(q_X^*(A)) \neq F_Y$, para cada $A \in \mathcal{E}_n(X)$.*

*Demostración. (a)* Por el Teorema 6.5, $\mathcal{E}_n(Y) \subset F_n(Y) - F_1(Y)$. Sean $A \in \mathcal{E}_n(Y)$ y $\mathcal{U}$ una vecindad de $A$ en $F_n(Y)$ tal que $\mathcal{U}$ es una $n$-celda. Por el Teorema 6.9, podemos suponer que $\mathcal{U} \subset F_n(Y) - F_1(Y)$. Como $q_Y^*$ es un homeomorfismo, $q_Y^*(\mathcal{U})$ es una vecindad de $q_Y^*(A)$ en $SF_n(Y)$ la cual es una $n$-celda. Así, $q_Y^*(A) \in \mathcal{SE}_n(Y)$. Por tanto, $q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)) \subset \mathcal{SE}_n(Y)$.

Por otro lado, por el Teorema 6.8, $F_Y \notin \mathcal{SE}_n(Y)$. Así, $\mathcal{SE}_n(Y) \subset SF_n(Y) - \{F_Y\}$. Como $q_Y^*$ es un homeomorfismo, de manera similar al párrafo anterior, $(q_Y^*)^{-1}(\mathcal{SE}_n(Y)) \subset \mathcal{E}_n(Y)$. Así, $q_Z^*(\mathcal{E}_n(Y)) = \mathcal{SE}_n(Y)$.

*(b)* Se sigue del Teorema 6.8 y el inciso *(a)*. □

**Lema 6.11.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $X$ y $Y$ son gráficas finitas y $h$ es un homeomorfismo entre los hiperespacios $SF_n(X)$ y $SF_n(Y)$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = (q_X^*)^{-1}(h^{-1}(q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)))$.*

*Demostración.* Por el Teorema 6.10*(a)*, tenemos que

$$q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)) = \mathcal{SE}_n(Y) = h(\mathcal{SE}_n(X)) = h(q_X^*(\mathcal{E}_n(X))).$$

□

**Lema 6.12.** *Sean $X$ un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$ si y solo si $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$.*

*Demostración.* Como $q_X^*\colon F_n(X) - F_1(X) \to SF_n(X) - \{F_X\}$ es un homeomorfismo, entonces $q_X^*(\mathcal{E}_n(X) - F_1(X)) = \mathcal{SE}_n(X) - \{F_X\}$. Así, $\mathcal{E}_n(X) - F_1(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X) - F_1(X)$ si y solo si $\mathcal{SE}_n(X) - \{F_X\}$ es un subconjunto denso de $SF_n(X) - \{F_X\}$. Así, el resultado se sigue del hecho de que $F_n(X) - F_1(X)$ es denso en $F_n(X)$ y $SF_n(X) - \{F_X\}$ es denso en $SF_n(X)$. □

# 7 La clase de las gráficas finitas es $SF_n$−cerrada

En esta sección vamos a mostrar dos clases de continuos que son $SF_n$-cerradas, ambos resultados responden al Problema 1.1. La primer clase es la de los continuos localmente conexos casi enrejados. Como una consecuencia de este resultado mostramos que la clase de las gráficas finitas es $SF_n$-cerrada.

**Teorema 7.1.** *Sean $X$ y $Y$ continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces $X$ es un continuo localmente conexo casi enrejado si y solo si $Y$ es un continuo localmente conexo casi enrejado.*

*Demostración.* Sea $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo y supongamos que $X$ es un continuo localmente conexo casi enrejado. Por el Teorema 6.7, $Y$ es un continuo localmente conexo. Por el Teorema 6.2, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$ y así, por el Lema 6.12, $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$. Así, $h(\mathcal{SE}_n(X))$ es un subconjunto denso de $SF_n(Y)$. Como $h(\mathcal{SE}_n(X)) = \mathcal{SE}_n(Y)$, por el Lema 6.12, tenemos que $\mathcal{E}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $F_n(Y)$. Así, por el Teorema 6.2, $Y$ es un continuo localmente conexo casi enrejado. □

El resultado que sigue demuestra que la clase de las gráficas finitas es $SF_n$-cerrada. Este teorema es una contribución para probar que las gráficas finitas tienen hiperespacio $n$-ésimo producto simétrico suspensión único (véase [32, Teorema 3.8] o bien [40]).

**Teorema 7.2.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $X, Y$ son continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces $X$ es gráfica finita si y solo si $Y$ es gráfica finita.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es una gráfica finita. Por el Teorema 5.5, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$ con un número finito de componentes. Por Lema 6.12, tenemos que $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$; más aún, por Teorema 6.10 (a), $\mathcal{SE}_n(X)$ tiene un número finito de componentes. Así, $\mathcal{SE}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $SF_n(Y)$ con un número finito de componentes. Por otro lado, por el Teorema 7.1, $Y$ es un continuo localmente conexo casi enrejado. Por el Lema 6.12 y Teorema 6.10 (a), tenemos que $\mathcal{E}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $F_n(Y)$ con un número finito de componentes. Por el Teorema 5.5, $Y$ es una gráfica finita. $\square$

# Agradecimientos

Es de suma importancia agradecer a los árbitros(as) el trabajo que realizaron con sus observaciones y tiempo dedicado a este trabajo, como resultado de todo ello se logró presentar este capítulo.

# Bibliografía

[1] G. Acosta (2002), *Continua with unique hyperspace*, Continuum Theory, 33–49. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 130, New York and Basel: Marcel Dekker, Inc. 2002.

[2] G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glas. Math. Ser. III 44 (1) (2009), 195–210.

[3] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, *Dendrites without unique hyperspace,* Houst. J. Math. 35 (2) (2009), 451–467.

[4] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique hyperspace $C(X)$*, Topol. Appl. 157 (2010), 2069–2085.

[5] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace $HS_m^n(X)$ for a finite graph $X$ is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.

[6] J. G. Anaya, E. Castañeda-Alvarado, A. Illanes, *Continua with unique symmetric product.* Comment. Math. Univ. Carolin. 54 (2013), 397–406.

[7] F. Barragán, *On the n-fold symmetric product suspensions of continuum,* Topology Appl. 157 (2010), 297–604.

[8] J. J. Charatonik, *Recent research in hyperespaces theory*, Extracta Mathematicae 18 (2) (2003), 235–262.

[9] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topol. Appl. 153 (2006), 1434–1450.

[10] V. Córdova-Salazar, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product,* Topology. Appl. 268(1) (2019), doi:https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.106917.

[11] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph,* I, Fund. Math. 62 (1968) 265–286.

[12] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum,* Topology Appl. 138 (2004), 109–124.

[13] L.A. Guerrero-Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products,* Topology Appl. 191 (2015), 16–27.

[14] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.

[15] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of hyperspaces,* Rocky Mt. J. Math. 45 (1) (2015), 213–236.

[16] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products,* Topol. Appl. 160 (2013), 1577–1587.

[17] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace,* Houst. J. Math. 33 (3) (2007), 795–805.

[18] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique hyperspace* $C_2(X)$, Topol. Appl. 156 (2009), 549–557.

[19] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace* $HS_n(X)$, Topol. Proc. 44 (2014), 75–95.

[20] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique symmetric products,* Topol. Proc. 34 (2009), 175–190.

[21] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique n-fold hyperspace suspension,* Topol. Appl. 196 (2015), 652–667.

[22] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product,* Topol. Appl. 209 (2016), 1–13.

[23] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique n-fold hyperspace suspension*, Houston J. Math. 44 (4) (2018), 1335-1365.

[24] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique n-fold hyperspace,* Topol. Proc. 32 (2008), 321–337.

[25] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique n-fold hyperspace,* Topol. Appl. 158 (2011), 244–251.

[26] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products,* J. Math. Res. 4 (4) (2012), 1–9.

[27] A. Illanes, *The hyperspace* $C_2(X)$ *for a finite graph* $X$ *is unique,* Glas. Mat. 37 (57) (2002) 347–363.

[28] A. Illanes, *Finite graphs* $X$ *have unique hyperspaces* $C_n(X)$*,* Topol. Proc. 27 (2003) 179–188.

[29] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces,* Quest. Answ. Gen. Topol. 30 (2012), 21–44.

[30] A. Illanes, *Models of Hyperspaces,* Topol. Proc. 41 (2013), 39–64.

[31] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[32] A. de Jesús Libreros López, *Rigidez del producto simétrico para continuos alambrados*, Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2018.

[33] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N.Y., 1968.

[34] J. C. Macías, *On the n-fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, Glas. Mat. 43 (2008), 439–449.

[35] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topol. Appl. 138 (2004) 125–138.

[36] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua, II*, Glasnik Mat. 41(61)(2006), 335–343.

[37] S. Macías, *Topics on continua*, 2nd ed., Springer, Cham, Switzerland, 2018.

[38] S. Macías, S. B. Nadler, Jr., *Absolute n-fold hyperspace suspensions*, Colloq. Math. 105 (2006), 221–231.

[39] G. Montero-Rodríguez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique n-fold symmetric product suspension*, por aparecer en Houston J. Math.

[40] G. Montero Rodríguez, *Las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único*, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Tesis de Doctorado por presentarse.

[41] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique n-fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 2019–233.

[42] S. B. Nadler, Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math. 5 (1) (1979), 125–132.

[43] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[44] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction.* Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
mjlopez@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
gmontero.fcfm.buap@gmail.com

Matemáticas y sus aplicaciones 19, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-861-4

# Capítulo 7

# $(n, m)-$fold hyperspace suspension of continua

**Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero**
**FCFM, BUAP**

**Abstract**

Let $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$ and $X$ be a metric continuum. We consider the hyperspaces $C_n(X)$ (respectively, $F_n(X)$) of all nonempty closed subsets of $X$ with at most $n$ components (respectively, $n$ points). The $(n, m)-$fold hyperspace suspension of $X$ was defined in 2018 by J.G. Anaya, D. Maya and F. Vázquez-Juárez in [1], to be the quotient space $C_n(X)/F_m(X)$, denoted by $HS^n_m(X)$. In this chapter we give proofs of some properties for this hyperspace, which generalize the respective properties of the $n-$fold hyperspace suspension.

## 1 Introduction

Through the years, the study of of hyperspaces of sets has become a relevant field in continuum theory.

Recall that a *continuum* is a nonempty compact, connected metric space. A *subcontinuum* is a continuum contained in a continuum $X$. The set of positive integers is denoted by $\mathbb{N}$.

Given a continuum $X$ and $n \in \mathbb{N}$, we consider the following hyperspaces of $X$:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ is a nonempty closed subset of } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ has at most } n \text{ components}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ has at most } n \text{ points}\}, \text{ and}$$

$$C(X) = C_1(X).$$

All these hyperspaces are metrized by the Hausdorff metric [19, Theorem 2.2]. The hyperspaces $F_n(X)$ and $C_n(X)$ are called the $n-$*fold symmetric product of* $X$ and the $n-$*fold hyperspace* of $X$, respectively. It is important to note that whenever $X$ is a continuum, all these hyperspaces are continua (see [30, 1.8.8, 1.8.9, 1.8.12]).

In 2004 Sergio Macías introduced the $n-$fold hyperspace suspension of a continuum in [26]. Later, in 2008, Juan C. Macías introduced the $n-$fold pseudo-hyperspace suspension of a continuum $HS_1^n(X)$, in [23]. Furthermore, the hyperspace $HS_1^n(X)$ has been addressed in [9], [13], [14], [23], [26]–[33]. In 2018 José G. Anaya, David Maya and Francisco Vázquez-Juárez introduced the $(n,m)-$fold hyperspace suspension, denoted by $HS_m^n(X)$, is defined as the quotient topology between $C_n(X)$ and $F_m(X)$ for each $n \in \mathbb{N}$, with $n \geq m$. Therefore, it is a generalization of the $n-$fold hyperspaces suspension stated in the latter research, see [1]. The fact that $HS_m^n(X)$ is a continuum follows from [35, Theorem 3.10].

For a continuum $X$ and $n, m \in \mathbb{N}$ satisfying that $m \leq n$, the symbol $q_X^{(n,m)}$ denotes the natural projection $q_X^{(n,m)} \colon C_n(X) \to HS_m^n(X)$, and $F_X^m$ denotes the element $q_X^{(n,m)}(F_m(X))$. Notice that

$$q_X^{(n,m)}|_{C_n(X)-F_m(X)} \colon C_n(X)-F_m(X) \to HS_m^n(X)-\{F_X^m\} \textit{ is a homeomorphism.} \tag{1}$$

# 2 Notations and definitions

Given a subset $A$ in a metric space $X$, $\mathrm{int}_X(A)$, $\mathrm{cl}_X(A)$, and $\mathrm{Bd}_X(A)$, denote the *interior*, the *closure*, and the *boundary* of $A$ in $X$, respectively. If $d$ is the metric of $X$, $\varepsilon > 0$, $Z \subset X$, and $z \in X$, the set $\{x \in X \colon d(z,x) < \varepsilon\}$ is denoted by $B_d(z,\varepsilon)$, or $B(z,\varepsilon)$ when there is no possibility of confusion. Let $N(\varepsilon, Z) = \bigcup\{B(z,\varepsilon) \colon z \in Z\}$. Given subsets $U_1, \ldots, U_r$ of $X$, with $r, n \in \mathbb{N}$, let

$$\langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n = \{A \in C_n(X) \colon A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r \text{ and } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ for each } i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

It is known by [19, Theorem 1.2] that the family of all sets of the form $\langle U_1, \ldots, U_r \rangle_n$, where $r \in \mathbb{N}$ and each $U_i$ is an open set in $X$, is a basis for the topology in $C_n(X)$, known as *Vietoris topology.* In this chapter, by a *map* we mean a continuous function. Now, allow us to recall some definitions of several concepts we will be working with.

**Definición 2.1.** Let $(X, d)$ be a bounded metric space. The **Hausdorff metric** for $H_d$, is defined as follows: for any $A, B \in 2^X$,

$$H_d(A, B) = \inf\{r > 0\colon A \subset N(B, r) \textit{ and } B \subset N(A, r)\}.$$

By [19, Theorem 2.2], $H_d$ is indeed a metric for $2^X$.

**Definición 2.2.** A topological space $Z$ is said to be **contractible** provided that the identity map from $Z$ onto $Z$ is homotopic to a constant mapping from $Z$ into $Z$.

**Definición 2.3.** Let $X$ be a metric space and let $A$ be a subset of $X$. We say that $A$ is a **retract** of $X$ if there exists a map $r : X \to A$ such that $r(a) = a$ for each $a \in A$. The map $r$ is called a **retraction**.

**Definición 2.4.** A continuum is **uniformly pathwise connected** if it is the continuous image of the cone over the Cantor set.

**Definición 2.5.** A closed subset $A$ of a continuum $X$ with metric $d$ is said to be a $Z-$**set** in $X$ provided that for each $\varepsilon > 0$, there exists a map $f_\varepsilon : X \to X/A$ such that $d(f_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$, for each $x \in X$.

**Definición 2.6.** [8, p. 16] Let $A, B$ be two sets with equivalence relations $R, S$, respectively. A function $f : A \to B$ is said to be **relation-preserving** provided that $aRa'$ implies $f(a)Sf(a')$.

**Definición 2.7.** A continuum is said to be **colocally connected**, when each one of its points has a local base of open sets whose complements are connected.

**Definición 2.8.** The continuum $X$ is **aposyndetic** if for each pair of points $x$ and $y$ of $X$, there exists a subcontinuum $W$ of $X$ such that $x \in \mathrm{int}_X(W) \subset W \subset X - \{y\}$. A continuum $X$ is **finitely aposyndetic** provided that for each finite subset $F$ of $X$ and point $x$ of $X$ not in $F$, there exists a subcontinuum $W$ of $X$ such that $x \in \mathrm{int}_X(W) \subset W \subset X - F$.

**Definición 2.9.** A continuum $X$ has the **property (b)** provided that each map $f : X \to \mathcal{S}^1$ is homotopic to a constant, where $\mathcal{S}^1$ is the unit circle.

**Definición 2.10.** A continuum $X$ has the **property of Kelley** provided that for each $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that if $p$ and $q$ are two points of $X$ satisfying $d(p, q) < \delta$, and if $A$ is a subcontinuum of $X$ containing $p$, then there exists a subcontinuum $B$ of $X$ such that $q \in B$ and $H(A, B) < \varepsilon$, where $H$ is the Hausdorff metric.

**Definición 2.11.** A continuum $X$ is said to be **hereditarily indecomposable** if $A \cap B = \emptyset$, or $A \subset B$, or $B \subset A$, for each $A, B \in C(X)$.

It is easy to see that hereditarily indecomposable continua have the property of Kelley.

**Definición 2.12.** Let $X$ be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. A map $\mu : C_n(X) \to [0, 1]$ is a **strong size map** provided that:

(a) $\mu(A) = 0$ if $A \in F_n(X)$,

(b) if $A \subset B$, $A \neq B$ and $B \notin F_n(X)$, then $\mu(A) < \mu(B)$, and

(c) $\mu(X) = 1$.

**Definición 2.13.** A map between continua $X$ and $Y$ is said to be **monotone** provided that point inverses are connected (equivalently, if inverse images of subcontinua of $Y$ are connected).

**Definición 2.14.** An **order arc** in $2^X$ is an arc $\alpha$ in $2^X$ such that if $A, B \in \alpha$, then $A \subset B$ or $B \subset A$.

**Definición 2.15.** A continuum $X$ is **unicoherent** provided that for each pair $A$ and $B$ of subcontinua of $X$ such that $X = A \cup B$, $A \cap B$ is connected. We say that $X$ is **hereditarily unicoherent** if each subcontinuum of X is unicoherent.

**Definición 2.16.** Let $X$ be a topological space, $p \in X$ and $\beta$ be a cardinal number. We say that $p$ **has order less than or equal to** $\beta$ *in* $X$, written $\text{ord}(p, X) \leq \beta$, whenever $p$ has a basis of neighborhoods $\mathfrak{B}$ in $X$ such that the cardinality of $\text{Bd}_X(U)$ is less than or equal to $\beta$, for each $U \in \mathfrak{B}$. We say that $p$ **has order equal to** $\beta$ *in* $X$ ($\text{ord}(p, X) = \beta$) provided that $\text{ord}(p, X) \leq \beta$ and $\text{ord}(p, X) \nleq \alpha$ for any cardinal number $\alpha < \beta$.

**Definición 2.17.** Let $X$ be a continuum and let $E(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x, X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x, X) = 2\}$ and $R(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x, X) \geq 3\}$. The elements of $E(X)$ (respectively, $O(X)$ and $R(X)$) are called **end points** (respectively, **ordinary points** and **ramification points**) of $X$.

**Definición 2.18.** A **finite graph** is a continuum which is a finite union of arcs such that every two of them meet at a subset of their end points. A **simple** $n-$**od** is a finite graph that is the union of $n$ arcs emanating from a single point $v$ and otherwise disjoint to one another.

**Definición 2.19.** A finite-dimensional continuum $X$ is a **Cantor manifold** if for any subset $A$ of $X$ such that $\dim[A] \leq \dim[X] - 2$, then $X - A$ is connected.

# 3 Preliminaries

In this section we present several results (with their correspondent references) that will be useful through this work.

**Lemma 3.1.** *[34, (1.8)] Let $A_0, A_1 \in 2^X$ be such that $A_0 \neq A_1$. Then, the following two statements are equivalent:*

*(a) there exists an order arc in $2^X$ from $A_0$ to $A_1$,*

*(b) $A_0 \subset A_1$ and each component of $A_1$ intersects $A_0$.*

**Lemma 3.2.** *[8, Theorem 4.3 p. 126] Let $X, Y$ be spaces with equivalence relations $R$ and $S$, respectively, and let $f : X \to Y$ be a relation-preserving, continuous map. Then, passing to the quotient, the map $f_* : X/R \to Y/S$ is also continuous.*

**Lemma 3.3.** *[15, Lemma 2.8] Let $X$ be a non-degenerate continuum and $Z$ be a nowhere dense subcontinuum of $X$. Let $q : X \to X/Z$ be the natural function of the quotient space $X/Z$. Then $\mathrm{Bd}_{X/Z}(q(A)) = q(\mathrm{Bd}_X(A))$, where $A$ is any closed subset of $X$.*

**Lemma 3.4.** *[15, Lemma 2.9] Let $X$ be a compact metric space, $A$ and $Z$ be closed subsets of $X$ such that $A \cap Z \neq \emptyset$, and $q : X \to X/Z$ and*

*$r : A \to A/(A \cap Z)$ be the natural function of the respective quotient spaces. If $Y$ is another closed subset of $X$ such that $A \cap Y = A \cap Z$ and $p : X \to X/Y$ is the natural function of the quotient space, then*

*(a) the function $g : q(A) \to A/(A \cap Z)$ given by $g(q(x)) = r(x)$, for each $x \in A$, is a homeomorphism.*

*(b) the function $h : q(A) \to p(A)$ given by $h(q(x)) = p(x)$, for each $x \in A$, is a homeomorphism.*

Throughout this work, $\mathcal{Q}$ denotes the Hilbert cube.

**Lemma 3.5.** *[19, Theorem 11.9.1] Any homeomorphism between two $Z-$sets of a Hilbert cube, can be extended to a homeomorphism of $\mathcal{Q}$ onto $\mathcal{Q}$.*

**Lemma 3.6.** *[36, 7.4] The dimension of a nonempty metric space is not changed by adding a point to the space.*

We use the following notations: $\dim[X]$ stands for the dimension of $X$, $\dim_p[X]$ stands for the dimension of $X$ at the point $p \in X$, as in [36, p. 5].

**Lemma 3.7.** *[7, Lemma 3.1] If $X$ is a finite dimensional continuum and $n \in \mathbb{N}$, then $\dim[F_n(X)] \leq n \cdot \dim[X]$.*

**Lemma 3.8.** *[12, Proposition 1 (a) p. 798] Let $X$ be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If $V \subset X$ is an $n-$cell and $U$ is an open set in $X$ such that $U \cap V \neq \emptyset$, then there is an $n-$cell $\mathcal{T} \subset U \cap V$.*

**Lemma 3.9.** *[36, 10.3] If $X$ is a finite dimensional continuum and $A$ is a nowhere dense subset of $X$, $\dim[X] = \dim[X - A]$.*

**Lemma 3.10.** *[36, 7.3] Let $X = Y \cup Z$, where $\dim(Y) \leq n$ and $\dim(Z) \leq n$. If at least one of $Y$ and $Z$ is closed in $X$, then $\dim(X) \leq n$.*

**Lemma 3.11.** *[24, Theorem 3.4] Let $X$ be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. Then $C_n(X)$ contains an $n-$cell.*

*Proof.* Let $A_1, \ldots, A_n \in C(X)$ such that $A_i \neq A_j$ for each $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ and $i \neq j$. For each $i \in \{1, \ldots, n\}$, take $a_i \in A_i$. By Lemma 3.1, there exists an order arc $\alpha_i : [0, 1] \to C_n(X)$ such that $\alpha_i(0) = \{a_i\}$ and $\alpha_i(1) = A_i$, for each $i \in \{1, \ldots, n\}$. Hence, the function $\gamma : [0, 1]^n \to C_n(X)$ given by $\gamma(t_1, \ldots, t_n) = \alpha_1(t_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_n)$ is an embedding of $[0, 1]^n$ into $C_n(X)$. $\square$

Using similar arguments as in Lemma 3.11, the next result can be proved.

**Lemma 3.12.** *[24, Theorem 3.5] Let $X$ be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If $X$ contains $n$ pairwise disjoint decomposable subcontinua, then $C_n(X)$ contains a $2n-$cell.*

**Lemma 3.13.** *[9, Theorem 4.1] Let $X$ be a continuum. Then, $HS(X)$ is colocally connected.*

**Lemma 3.14.** *[30, 6.5.1] Let $X$ be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If $A$ is a proper subcontinuum of $X$, then $C_n(X) - C_n(A)$ is arcwise connected.*

**Lemma 3.15.** *[30, 6.5.2] Let $X$ be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If $A \in C_n(X)$ is such that $C_n(X) - \{A\}$ is not arcwise connected, then $A$ is connected.*

**Lemma 3.16.** *[30, 6.5.3] A nondegenerate continuum $X$ is indecomposable if and only if for each $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X) - \{X\}$ is not arcwise connected.*

**Lemma 3.17.** *[24, Theorem 4.8] If $X$ is a continuum and $n \in \mathbb{N}$, then each map from $C_n(X)$ to the unit circle, $\mathcal{S}^1$, is homotopic to a constant map. In particular, we have that $C_n(X)$ is unicoherent.*

**Lemma 3.18.** *[7, Theorema 4.1] Let $X$ be a locally connected continuum. Then, $C(X) \times \mathcal{Q}$ is homeomorphic to $\mathcal{Q}$. Moreover, $C(X)$ is homeomorphic to $\mathcal{Q}$ if and only if $X$ is nondegenerate and does not contains free arcs.*

**Lemma 3.19.** *[21, Theorem 2, p. 434] If $X$ is a contractible space with respect to $Y$, then so is every set which can be obtained from $X$,*

*(a) by a rectraction,*

*(b) by a continuous monotone transformation (if $X$ is compact),*

*(c) by an open transformation (if $X$ is compact).*

**Lemma 3.20.** *[19, Theorem 19.7] If a continuum is contactible with respect to $\mathcal{S}^1$, then the continuum is unicoherent.*

**Lemma 3.21.** *[2, Corollary 1] Let $X$ be an unicoherent and aposyndetic continuum. Then for any $n \in \mathbb{N}$, $X$ is $n-$aposyndetic.*

**Lemma 3.22.** *[24, Theorem 3.2] Let $n \in \mathbb{N}$. The continuum $X$ is locally connected if and only if $C_n(X)$ is locally connected.*

**Lemma 3.23.** *[34, (1.208.2)] Let $X$ be a continuum. Then, $C(X) - F_1(X)$ is locally connected if and only if $X$ is locally connected.*

**Lemma 3.24.** *[34, (1.49)] If $\Lambda$ is a subcontinuum of $2^X$ such that $\Lambda \cap C(X) \neq \emptyset$, then $\bigcup \Lambda$ is a subcontinuum of $X$.*

**Lemma 3.25.** *[17, Theorem 2.3] If $X$ is a contractible continuum, then $F_n(X)$ is contractible for each $n \in \mathbb{N}$.*

**Lemma 3.26.** *[22, Theorem 2.1] If $X$ is a continuum such that $\dim[X] = 2$, then $\dim[C(X)]$ is infinite.*

**Lemma 3.27.** *[19, Theorem 72.5] If $X$ is a continuum such that $\dim[X] \geq 3$, then $\dim[C(X)]$ is infinite.*

**Lemma 3.28.** *[31, Theorem 2.4] Let $X$ be a finite graph, $n \in \mathbb{N}$ and $A \in C_n(X)$. Then,*

$$\dim_A[C_n(X)] = 2n + \sum_{p \in R(X) \cap A} [ord(p) - 2].$$

**Lemma 3.29.** *[35, 8.40 (b)] Let $X$ be a locally connected continuum that does not contain a simple $3-$od, then $X$ is an arc or a simple closed curve.*

**Lemma 3.30.** *[36, 10.6, 10.8] Let $n \in \mathbb{N}$.*

*(a) $I^n$ can not be separated by a subset of dimension less or equal than $n-2$.*

*(b) A connected $n-$manifold can not be separated by a subset of dimension less or equal than $n-2$.*

**Lemma 3.31.** *[28, Theorem 4.6] The hyperspaces $C_n([0,1])$ and $C_n(\mathcal{S}^1)$ are $2n-$dimensional Cantor manifolds, for each $n \in \mathbb{N}$.*

**Lemma 3.32.** *[4, Theorem 25.2] Let $A, B \subset \mathcal{Q}$ be such that they have the same shape in the sense of Borsuk. Then, $\mathcal{Q} - A$ is homeomorphic to $\mathcal{Q} - B$.*

**Lemma 3.33.** *[37, (1.4), p. 43 ] If $A - X$ is not connected, giving a separation $X - A = A_1 \cup A_2$, there exists a closed subset $A'$ of $A$ and a separation $X - A' = A'_1 \cup A'_2$, where $A'_1 \subset A_1$ and $A'_2 \subset A_2$.*

# 4 Dimension

Results presented in this section are a generalization of those respective results for the $n-$fold hyperspace suspension of a continuum. We give the appropriate reference in each one of them.

**Theorem 4.1.** *[11, Theorem 5.4] If $X$ is a decomposable continuum and $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$, then $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$ is arcwise connected.*

*Proof.* The result for case $n = m = 1$ follows from [9, Theorem 3.3], whereas the proof for case $1 < m = n$ is given in [26, Lemma 6.1]. Suppose that $m < n$. By [26, Lemma 6.1], it is enough to prove that for each $A \in F_n(X) - F_m(X)$, there exists an arc $\alpha : [0, 1] \to C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$ such that $\alpha(0) = A$ and $\alpha(1) \in C_n(X) - (\{X\} \cup F_n(X))$. Let $A \in F_n(X) - F_m(X)$ and $p \in A$. Since $X$ is a decomposable, there exists $Z \in C(X)$ such that $p \in Z$ and $Z \neq X$. As $C(X)$ is arcwise connected, there exists an order arc $\beta : [0, 1] \to C(X)$ such that $\beta(0) = \{p\}$ and $\beta(1) = Z$. Let $\alpha : [0, 1] \to C_n(X)$ be given by $\alpha(t) = \beta(t) \cup A$. Notice that $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = Z \cup A$ and $\alpha(t) \in C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$, for each $t \in [0, 1]$. Hence, it is possible to join an element in $F_n(X) - F_m(X)$ to an element in $C_n(X) - (\{X\} \cup F_n(X))$ and the result follows. □

**Theorem 4.2.** *If $X$ is a finite-dimensional continuum and $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$, then $\dim[C_n(X)]$ is finite if and only if $\dim[HS_m^n(X)]$ is finite. Moreover, if either $\dim[C_n(X)]$ is finite or $\dim[HS_m^n(X)]$ is finite, then $\dim[C_n(X)] = \dim[HS_m^n(X)]$ (see [11, Theorem 3.1]).*

*Proof.* Suppose that $\dim[C_n(X)]$ is finite. Since $C_n(X) - F_m(X)$ is homeomorphic to $HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$. By Lemma 3.6, we have that $\dim[HS_m^n(X)] = \dim[HS_m^n(X) - \{F_X^m\}]$. Observe that $C_n(X) = (C_n(X) - F_m(X)) \cup F_m(X)$ and since $F_m(X)$ is a nowhere dense subset of $C_n(X)$, by Lemma 3.9 it follows that $\dim[C_n(X)] = \dim[C_n(X) - F_m(X)]$. Therefore, $\dim[C_n(X)] = \dim[HS_m^n(X)]$.

On the other hand, suppose that $\dim[HS_m^n(X)$ is finite. By Lemma 3.6, $\dim[HS_m^n(X)] = \dim[HS_m^n(X) - \{F_X^m\}]$. Since $HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$ is homeomorphic to $C_n(X) - F_m(X)$, we have that $\dim[HS_m^n(X)] = \dim[C_n(X) - F_m(X)]$. Suppose that $\dim[C_n(X)]$ is infinite. By Lemma 3.7, $\dim[F_m(X)] \leq m \cdot \dim[X]$. Notice that $C_n(X) = (C_n(X) - F_m(X)) \cup F_m(X)$, it follows that

$\dim[HS_m^n(X)]$ is infinite, a contradiction. Hence, $\dim[C_n(X)]$ is infinite. Since $F_m(X)$ is nowhere dense in $C_n(X)$, by Lemma 3.9 $\dim[C_n(X)] = \dim[C_n(X) - F_m(X)]$, and the result follows. □

**Theorem 4.3.** *If $X$ is a continuum and $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$, then $HS_m^n(X)$ contains an $n-$cell (see [26, Theorem 3.7]).*

*Proof.* By Lemma 3.11, $C_n(X)$ contains an $n-$cell $\mathcal{M}$. Moreover, since $C_n(X) - F_m(X)$ is a dense open subset of $C_n(X)$, we have that $((C_n(X) - F_m(X)) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$. By Lemma 3.8, there exists an $n-$cell $\mathcal{N}$ such that $\mathcal{N} \subset C_n(X) - F_m(X)$. Thus, $HS_m^n(X)$ contains an $n-$cell. □

Using the fact that the continuum $C_n(X)$ contains a $2n-$cell (see Lemma 3.12) whenever $X$ contains $n$ pairwise disjoint decomposable subcontinua, the next result is stated.

**Theorem 4.4.** *If $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$ and $X$ is a continuum that contains $n$ pairwise disjoint decomposable subcontinua, then $HS_m^n(X)$ contains a $2n-$cell (see [26, Theorem 3.8]).*

*Proof.* By Lemma 3.12, $C_n(X)$ contains an $2n-$cell $\mathcal{M}$. Moreover, $C_n(X) - F_m(X)$ is a dense open subset of $C_n(X)$, it follows that $((C_n(X) - F_m(X)) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$. By Lemma 3.8, there exists an $2n-$cell $\mathcal{N}$ such that $\mathcal{N} \subset C_n(X) - F_m(X)$. Thus, $HS_m^n(X)$ contains an $2n-$cell. □

# 5 Aposyndesis

In this section, several results about aposyndesis will be proved, which generalize those results for the $n-$fold hyperspace suspension, see [26].

**Theorem 5.1.** *If $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$ and $X$ is a continuum, then $HS_m^n(X)$ has property (b) (see [26, Theorem 4.1]).*

*Proof.* By Lemma 3.17, $C_n(X)$ has the property (b) for any $n \in \mathbb{N}$. Let $\mathcal{A} \in HS_m^n(X)$. If $\mathcal{A} = F_X^m$, then $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}) = F_m(X)$ which is a connected subset of $C_n(X)$. On the other hand, if $\mathcal{A} \neq F_X^m$, using relation (1), $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A})$ is a one-point set. Hence, $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A})$ is a connected subset of $C_n(X)$. Therefore, $q_X^{(n,m)}$ is a monotone map. Since $HS_m^n(X)$ is a monotone image of continuum satisfying property (b), by Lemma 3.19, we conclude that $HS_m^n(X)$ has the property (b). □

**Theorem 5.2.** *If $X$ is a continuum and $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$, then $HS_m^n(X)$ is colocally connected (see [26, Theorem 4.2]).*

*Proof.* Case $n = m = 1$ is already proved in Lemma 3.13.

Suppose $n \geq 2$ and let $\mathcal{A} \in HS_m^n(X)$. We are going to consider three cases:

**Case 1.** $\mathcal{A} = F_X^m$.

For any $\varepsilon > 0$, let $\mathcal{U}_\varepsilon = B_H(F_m(X), \varepsilon)$. Notice that $\{q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$ forms a base of open sets about $F_X^m$. Fix $\varepsilon > 0$. Let $\mathcal{B} \in HS_m^n(X) - q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon)$. Thus, $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B}) \in C_n(X) - \mathcal{U}_\varepsilon$. By Lemma 3.1, there exists an order arc $\alpha : [0, 1] \to C_n(X)$ such that $\alpha(0) = (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B})$ and $\alpha(1) = X$ and $\alpha([0, 1]) \subset C_n(X) - \mathcal{U}_\varepsilon$. Notice that $q_X^{(n,m)} \circ \alpha : [0, 1] \to HS_m^n(X)$ is an arc from $\mathcal{B}$ to $q_X^{(n,m)}(X)$ satisfying $(q_X^{(n,m)} \circ \alpha)([0, 1]) \subset HS_m^n(X) - q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon)$, which implies that this space is arcwise connected.

**Case 2.** $\mathcal{A} = q_X^{(n,m)}(X)$.

For any $\varepsilon > 0$, let $\mathcal{U}_\varepsilon = B_H(X, \varepsilon)$. Observe that $\{q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$ forms a base of open sets about $q_X^{(n,m)}(X)$. Fix $\varepsilon > 0$. Let $\mathcal{B} \in HS_m^n(X) - q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon)$. Thus, $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B}) \in C_n(X) - \mathcal{U}_\varepsilon$. Let $D \in F_m((q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B}))$. By Lemma 3.1, there exists an order arc $\alpha : [0, 1] \to C_n(X)$ such that $\alpha(0) = D$ and $\alpha(1) = (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B})$. Moreover, $\alpha([0, 1]) \subset C_n(X) - \mathcal{U}_\varepsilon$. Hence, $q_X^{(n,m)} \circ \alpha : [0, 1] \to C_n(X)$ is an arc such that $(q_X^{(n,m)} \circ \alpha)(0) = F_X^m$, $(q_X^{n,m} \circ \alpha)(1) = D$ and $(q_X^{(n,m)} \circ \alpha)([0, 1]) \subset HS_m^n(X) - q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon)$. Therefore, $HS_m^n(X) - q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon)$ is an arcwise connected space.

**Case 3.** $\mathcal{A} \in HS_m^n(X) - \{F_X^m, q_X^{(n,m)}(X)\}$.

For any $\varepsilon > 0$, let $\mathcal{U}_\varepsilon = B_H((q_X^{n,m})^{-1}(\mathcal{A}), \varepsilon)$. Thus, $\{q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$ forms a base of open sets about $\mathcal{A}$. Fix $\varepsilon > 0$ such that $q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon) \cap \{F_X^m, q_X^{(n,m)}(X)\} = \emptyset$. Let $\mathcal{B} \in HS_m^n(X) - q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon)$. If $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B}) \not\subseteq (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A})$, by Lemma 3.1 there exists an order arc $\alpha : [0, 1] \to C_n(X)$ such that $\alpha(0) = (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B})$ and $\alpha(1) = X$. Thus, $\alpha([0, 1]) \subset C_n(X) - B_H((q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}), \varepsilon)$. Hence, $q_X^{(n,m)} \circ \alpha$ is an arc from $\mathcal{B}$ to $q_X^{(n,m)}(X)$ such that $q_X^{(n,m)} \circ \alpha \subset HS_m^n(X) - \mathcal{U}_\varepsilon$, as desired.

On the other hand, suppose that $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B}) \subset (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A})$. Let $D \in F_m((q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B}))$. By Lemma 3.1, there exists an order arc $\beta : [0, 1] \to C_n(X)$ such that $\beta(0) = D$ and $\beta(1) = (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{B})$. Thus, $\beta([0, 1])$ is contained in $C_n(X) - B_H((q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}), \varepsilon)$. Hence, $q_X^{(n,m)} \circ \beta : [0,1] \to HS_m^n(X)$ is an arc from $F_X^m$ to $\mathcal{B}$ and $(q_X^{(n,m)} \circ \beta)([0,1]) \subset HS_m^n(X) - q_X^{(n,m)}(\mathcal{U}_\varepsilon)$. Therefore, the last space is arcwise connected. □

Since colocal connectedness implies aposyndesis, we have the next result:

**Corollary 5.3.** *If $X$ is a continuum and $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \le n$, then $HS_m^n(X)$ is aposyndetic (see [26, Corollary 4.3]).*

From this, we can prove the following result.

**Theorem 5.4.** *If $X$ is a continuum and $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \le n$, then $HS_m^n(X)$ is finitely aposyndetic (see [26, Corollary 4.4]).*

*Proof.* By Theorem 5.1, $HS_m^n(X)$ has the property (b) for any $n, m \in \mathbb{N}$, $m \le n$. By Lemma 3.20, $HS_m^n(X)$ is unicoherent. By Corollary 5.3, $HS_m^n(X)$ is aposyndetic. Finally, by Lemma 3.21, any aposyndetic unicoherent continuum is finitely aposyndetic. □

# 6 Local conectedness

Next result will be useful in the proof of the equivalence of local conectedness between a continuum $X$ and its $HS_m^n(X)$ hyperspace.

**Theorem 6.1.** *If $X$ is a continuum, $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \le n$ and $C_n(X) - F_m(X)$ is locally connected, then $X$ is locally connected (see [26, Lemma 5.1]).*

*Proof.* Case $n = m = 1$ is already proved in Lemma 3.23.

Suppose that $n \ge 2$ and $n \ge m$. Let $x \in X$ and $U$ be an open neighborhood of $x$. Then there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that $\mathrm{cl}_X(B_d(x, \varepsilon_0)) \subset U$. Let $K$ be a component of $\mathrm{cl}_X(B_d(x, \varepsilon_0))$ containing $x$. Thus, $K$ is a nondegenerate subcontinuum of $X$ satisfying $x \in K \subset U$. Notice that $K \in \langle U \rangle_n$. Moreover, $K \in \langle U \rangle_n - F_m(X)$, as $K$ is a nondegenerate subcontinuum. Since $C_n(X) - F_m(X)$ is locally connected, there exists $\mathcal{V}$ a connected open subset of $C_n(X) - F_m(X)$ such that $K \in \mathcal{V} \subset \mathrm{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \subset \langle U \rangle_n - F_m(X)$. Since $\mathcal{V}$ is open, there exists $\varepsilon > 0$ such that $B_{H_d}(K, \varepsilon) \cap C_n(X) \subset \mathcal{V}$. Observe that $K \in \mathrm{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V}) \cap C(X)$. By Lemma 3.24, we have that $C = \bigcup \mathrm{cl}_{C_n(X)}(\mathcal{V})$

is a subcontinuum of $X$. Let $y \in B_d(x,\varepsilon)$. Hence, we have that $K \cup \{y\} \in B_{H_d}(K,\varepsilon) \cap C_n(X) \subset \mathcal{V}$ and $y \in C$. Then, $x \in \text{int}_X(C) \subset U$, so that, $X$ is connected im kleinen at $x$. Since $x$ is an arbitrary point, $X$ is connected im kleinen at every point which implies that $X$ is locally connected, see [35, 5.22 (b)]. □

**Theorem 6.2.** *A continuum $X$ is locally connected if and only if $HS_m^n(X)$ is locally connected for any $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$ (see [11, Theorem 3.2]).*

*Proof.* Suppose that $X$ is a locally connected continuum. By Lemma 3.22, $C_n(X)$ is a locally connected continuum for every $n \in \mathbb{N}$. Since the natural projection $q_X^{(n,m)}$ is a continuous function, $HS_m^n(X)$ is locally connected.

On the other hand, suppose that $HS_m^n(X)$ is locally connected. Since $HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$ is an open subset of $HS_m^n(X)$, $HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$ is locally connected. By (1), $C_n(X) - F_m(X)$ is locally connected. By Theorem 6.1, $X$ is locally connected. □

# 7 General properties

In this section, we discuss some miscellaneous properties about the $(n,m)-$fold hyperspace suspension.

**Theorem 7.1.** *If $X$ is a contractible locally connected continuum without free arcs and $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$, then $HS_m^n(X)$ is homeomorphic to $\mathcal{Q}$. In particular, $HS_m^n(X)$ is homeomorphic to $C_n(X)$ (see [26, Theorem 5.3]).*

*Proof.* Since $X$ is a locally connected continuum without free arcs, $C_n(X)$ is homeomorphic to the Hilbert cube (for case $n = 1$ see Lemma 3.18). As $X$ is contractible, we have that $F_m(X)$ is contractible, by Lemma 3.25. Hence, $F_m(X)$ has the shape of a point in the sense of Borsuk, [3, 5.5 p. 28]. By Lemma 3.32, $C_n(X) - F_m(X)$ is homeomorphic to $\mathcal{Q} - \{p\}$ for some $p \in \mathcal{Q}$. Since $C_n(X) - F_m(X)$ is homeomorphic to $HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$, it follows that $\mathcal{Q} - \{p\}$ is homeomorphic to $HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$. Thus, $HS_m^n(X)$ is homeomorphic to $\mathcal{Q}$. □

**Corollary 7.2.** *If $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$, then $HS_m^n(\mathcal{Q})$ is homeomorphic to $\mathcal{Q}$ (see [26, Corollary 5.4]).*

**Theorem 7.3.** *If $X$ is a continuum and $n, m, s \in \mathbb{N}$ with $m \leq s < n$, then $HS_m^s(X)$ can be embedded in $HS_m^n(X)$ (see [27, Theorem 4.1]).*

*Proof.* Let $i_{s,n} : C_s(X) \to C_n(X)$ be the inclusion map, $q_X^{(s,m)} : C_s(X) \to HS_m^s(X)$ and $q_X^{(n,m)} : C_n(X) \to HS_m^n(X)$ be quotient maps. We denote $q_X^{(s,m)}(F_m(X)) = F_X^{(s,m)}$ and $q_X^{(n,m)}(F_m(X)) = F_X^{(n,m)}$.

Since

$$\{\{A\} \colon A \in C_n(X) - F_m(X)\} \cup \{F_m(X)\}$$

and

$$\{\{B\} \colon B \in C_s(X) - F_m(X)\} \cup \{F_m(X)\},$$

are two partitions of $C_n(X)$ and $C_s(X)$, respectively; then $i_{s,n}$ is a relation-preserving. Now, let $h_{s,n} : HS_m^s(X) \to HS_m^n(X)$ be given by

$$h_{s,n}(\mathcal{A}) = \begin{cases} F_X^{(n,m)} & if\, \mathcal{A} = F_X^{(s,m)} \\ q_X^{(n,m)}(i_{s,m}((q_X^{(s,m)})^{-1}(\mathcal{A}))) & if\, \mathcal{A} \neq F_X^{(s,m)}. \end{cases}$$

Notice that $h_{s,n}$ is a continuous function by Lemma 3.2. Moreover, as $h_{s,n}$ is defined, it is clear that $h_{s,n}$ is a one-to-one function. Since the spaces are compacta, $h_{s,n}$ is an embedding and the result follows. $\square$

**Theorem 7.4.** *Let $X$ be a continuum, $n, m \in \mathbb{N}$ such that $m \leq n$ and $A \in C_n(X)$. Then, $C_n(X) - \{A\}$ is not arcwise connected if and only if $HS_m^n(X) - \{q_X^{(n,m)}(A), F_X^m\}$ is not arcwise connected (see [30, 7.5.1]).*

*Proof.* Suppose that $C_n(X) - \{A\}$ is not arcwise connected. By Lemma 3.15, $A \in C(X)$. We will consider two cases.

**Case 1.** $X \neq A$.

By Lemma 3.14, $C_n(X) - C_n(A)$ is arcwise connected. Let $\mathcal{C}_1$ be an arcwise component of $C_n(X) - \{A\}$ such that $C_n(X) - C_n(A) \subset \mathcal{C}_1$. Notice that $X \in \mathcal{C}_1$. Moreover, observe that $C_n(A) - \{A\}\mathcal{C}_1$. Thus, there exists $B \in C_n(A) - \{A\}$ such that $B \notin \mathcal{C}_1$. Let $\mathcal{C}_2$ be the arcwise component of $C_n(X) - \{A\}$ such that $B \in \mathcal{C}_2$. Since $C_n(X)$ is arcwise conneceted, every arc joining $B$ with $X$ must pass through $A$. Assume $HS_m^n(X) - \{q_X^{(n,m)}(A), F_X^m\}$ is arcwise conneceted. Then, there exists an arc $\alpha : [0,1] \to HS_m^n(X) - \{q_X^{(n,m)}(A), F_X^m\}$ such that $\alpha(0) = q_X^{(n,m)}(B)$ and $\alpha(1) = q_X^{(n,m)}(X)$. Using relation (1), $((q_X^{(n,m)})^{-1} \circ \alpha)([0,1])$ is an arc in $C_n(X) - (\{A\} \cup F_m(X))$ joining $B$ and $X$, which is a contradiction. Therefore, $HS_m^n(X) - \{q_X^{(n,m)}(A), F_X^m\}$ is not arcwise connected.

**Case 2.** $X = A$.

By [30, Theorem 6.5.3], $X$ is indecomposable. Let $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ pairwise different composants of $X$. By [30, Theorem 6.5.15], $\langle \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n \rangle_n$ and
$\langle \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n \rangle_n$ are arcwise components of $C_n(X) - \{X\}$. Notice that $\langle \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n \rangle_n$ and $\langle \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n \rangle_n$ are subsets of $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$. Thus, $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X)$ is not arcwise connected. Hence, $HS_m^n(X) - \{q_X^{(n,m)}(X), F_X^m\}$ is not arcwise connected.

Now suppose that $HS_m^n(X) - \{q_X^{(n,m)}(A), F_X^m\}$ is not arcwise connected. Allow us to consider two cases.

**Case 1'**. $X \neq A$.

Suppose that $C_n(X) - \{A\}$ is arcwise connected. Notice that $C_n(X) - (\{A\} \cup F_m(X))$ is not arcwise connected. In a similar way as Case 1 when $C_n(X) - \{A\}$ is not arcwise connected, we can construct $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ arcwise components of $C_n(X) - (\{A\} \cup F_m(X))$ and $B \in C_n(X) - (\{A\} \cup F_m(X))$ such that $X \in \mathcal{C}_1$, $B \neq X$ and $B \in \mathcal{C}_2$. Thus, every arc joining $B$ with $X$ intersects $F_m(X)$. Since $C_n(X) - F_m(X)$ is arcwise connected, there exists an arc $\alpha \subset C_n(X) - F_m(X)$ joining $B$ with $X$ such that $\alpha \cap F_m(X) = \emptyset$. This is a contradiction, which implies that $C_n(X) - \{A\}$ is not arcwise connected.

**Case 2'**. $X = A$.

By Lemma 4.1, $C_n(X) - (\{X\} \cup F_m(X))$ is not arcwise connected. By Theorem 4.1, $X$ is an indecomposable continuum. By Lemma 3.16, $C_n(X) - \{X\}$ is not arcwise connected, as desired. □

**Theorem 7.5.** *If $X$ is a continuum, $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$ and $(q_X^{(n,m)})(A) \in HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$ is such that $HS_m^n(X) - \{F_X^m, (q_X^{(n,m)})(A)\}$ is not arcwise connected, then $A \in C(X)$ (see [30, 7.1.31]).*

*Proof.* By Theorem 7.4 and Lemma 3.15, the result follows. □

**Theorem 7.6.** *Let $X$ be a continuum and $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$. If $C_n(X)$ is a finite–dimensional Cantor manifold such that* $\dim[C_n(X)] \geq n+2$*, then $HS_m^n(X)$ is a finite–dimensional Cantor manifold (see [26, Theorem 3.9]).*

*Proof.* Let $k = \dim[C_n(X)]$. According to Theorem 4.2, $\dim[HS_m^n(X)] = k$. Suppose $HS_m^n(X)$ is not a Cantor manifold. Hence, there exists a subset $\mathcal{A}$ of

$HS_m^n(X)$ such that $\dim[\mathcal{A}] \leq k-2$ and $HS_m^n(X)-\mathcal{A}$ is not connected. Hence, there exist $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ a separation of $HS_m^n(X) - \mathcal{A}$ and by Lemma 3.33, there exist a closed subset $\mathcal{A}'$ of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ nonempty open subsets of $HS_m^n(X)$ such that $HS_m^n(X) - \mathcal{A}' = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ where $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1$ and $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_2$. Hence, $C_n(X) - (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}') = (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{D}) \cup (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{E})$, where $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{D})$ and $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{E})$ are disjoint open subsets of $C_n(X)$. In order to reach a contradiction, we will see that $\dim[(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}')] \leq k-2$ so that, $C_n(X)$ is not a Cantor manifold. Consider two cases.

**Case 1**. $F_X^m \notin \mathcal{A}'$.

Since $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}')$ is homeomorphic to $\mathcal{A}'$, it follows that $\dim[(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}')] \leq k-2$.

**Case 2**. $F_X^m \in \mathcal{A}'$.

By Lemma 3.26 and Lemma 3.27, $\dim[X] = 1$. Observe that $(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}') = (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}' - \{F_X^m\}) \cup (q_X^{(n,m)})^{-1}(\{F_X^m\}) = (q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}' - \{F_X^m\}) \cup F_m(X)$. By Lemma 3.7, $\dim[F_m(X)] \leq m$. Since $m \leq n \leq k-2$ and $\dim[(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}' - \{F_X^m\})] \leq \dim[\mathcal{A}'] \leq k-2$, by Lemma 3.10, we conclude that $\dim[(q_X^{(n,m)})^{-1}(\mathcal{A}')] \leq k-2$. □

**Theorem 7.7.** *Let $n, m \in \mathbb{N}$ be such that $m \leq n$. The hyperspaces $HS_m^n([0,1])$ and $HS_m^n(\mathcal{S}^1)$ are $2n-$dimensional Cantor manifolds (see [26, Corollary 3.10]).*

*Proof.* Case $n = m$ is already proved in [26, Corollary 3.10].

Suppose that $m < n$, by Lemma 3.31 we have that $C_n([0,1])$ and $C_n(\mathcal{S}^1)$ are $2n-$dimensional Cantor manifolds. Since $n \geq 2$ and $2n \geq n+2$, the result follows by Theorem 7.6. □

# 8 Questions

For what continua $X$ does the natural embedding in the proof of Theorem 7.3 embed $HS_m^s(X)$ as a retract of $HS_m^n(X)$? In particular, what about the case when $X$ is $\mathcal{S}^1$?

For what continua $X$, can $HS_m^s(X)$ be embedded in $HS_m^n(X)$ as a retract $(s < n)$?

What continua $X$ have the property that $HS_m^n(X)$ is contractible for each $n, m \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$?

# 9 Acknowledgment

The authors wish to thank the referees by their time and valuable observations regarding this work, that improved significantly its quality.

# Bibliography

[1] J.G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace $HS_m^n(X)$ for a finite graph $X$ is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.

[2] D.E. Bennett, *Aposyndetic properties of unicoherent continua*, Pacific J. Math. 37 (1971) 585–589.

[3] K. Borsuk, *Theory of Shape*, Lectures, Fall, 1970, in: Lecture Notes Series, vol. 28, Aarhus Universitet, Matematisk Institut, 1973.

[4] T.A. Chapman, *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, in: CBMS Regional Conf. Ser. Math., vol. 28, American Mathematical Society, Providence, RI, 1976.

[5] J.J. Charatonik, *Recent research in hyperspaces theory*, Extracta Math. 18 (2) (2003), 235–262.

[6] J.J. Charatonik, W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Mat. Comun. 22, Sociedad Matemática Mexicana, México, (1998), 227–253.

[7] D.W. Curtis, R.M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101 (1978) 19–38.

[8] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.

[9] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum,* Topology Appl. 138 (2004), 109–124.

[10] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua,* Rocky Mountain J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.

[11] G. Hernández-Valdez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Uniqueness of the* $(n, m)-$*fold hyperspace suspension for continua*, sent to Topology Appl. (2022).

[12] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace,* Houston J. Math. 33 (3) (2007), 795–805.

[13] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace* $HS_n(X)$*,* Topology Proc. 44 (2014), 75–95.

[14] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique* $n-$*fold hyperspace suspension,* Topology Appl. 196 (2015), 652–667.

[15] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique* $n-$*fold hyperspace suspension,* Houston J. Math. Volume 44, Number 4, (2018), 1335–1365.

[16] A. Illanes, *Finite graphs* $X$ *have unique hyperspaces* $C_n(X)$*,* Topology Proc. 27 (2003), 179–188.

[17] A. Illanes, S. Macías, S.B. Nadler, Jr., *Symmetric products and* $\mathcal{Q}-$*manifolds*, Contemp. Math. 246 (1999) 137–141.

[18] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces,* Questions Answers Gen. Topology 30 (2012), 21–44.

[19] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[20] W. Kuperberg, *Uniformly pathwise connected continua*, in: N.M. Stavrakas, K.R. Allen (Eds.), Studies in Topology, Proc. Conf. Univ. North Carolina, Charlotte, NC, 1974, Academic Press, New York, 315–324, 1975.

[21] K. Kuratowski, *Topology Vol. II*, Academic Press, New York, (1968).

[22] M. Levin, Y. Sternfeld, *The space of subcontinua of a 2-dimensional continuum is infinitely dimensional*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 125, (1997), 2771–2775.

[23] J.C. Macías, *On the $n-$fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, Glas. Mat. Ser. III 43 (2008), 439–449.

[24] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum $X$*, Topology Appl. 109 (2001), 237–256.

[25] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X, II*, Topology Proc. 25 (2000), 255–276.

[26] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138 (2004), 125–138.

[27] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua, II*, Glas. Mat. Ser. III 41(61)(2006), 335–343.

[28] S. Macías, S.B. Nadler, Jr., *n-fold hyperspace, cones, and products,* Topology Proc. 26 (2001–2002), 255–270.

[29] S. Macías and S.B. Nadler, Jr., *Various Types of Local Connectedness in $n-$fold Hyperspaces*, Topology Appl., 154 (2007), 39–53.

[30] S. Macías, *Topics on continua*, 2nd ed., Springer, Cham, Switzerland, 2018.

[31] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n-fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. 32 (2006), 783–799.

[32] G. Montero-Rodríguez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique n-fold symmetric product suspension*, por aparecer en Houston J. Math.

[33] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique $n-$fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 219–233.

[34] S.B. Nadler, Jr., *H*yperspaces of sets. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.

[35] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

[36] S.B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas Serie Textos 18, Sociedad Matemática Mexicana, Mexico, 2002.

[37] G. Whyburn, *Analytic Topology*, American Mathematical Society, vol. 28, 1942.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

gerardo.hernandezval@alumnos.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
mjlopez@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

# Índice de autores

Matemáticas y sus aplicaciones 19
Editado por Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco está a disposición en pdf en la página
de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros
a partir del 26 de octubre de 2022
peso del archivo: 6 MB
El apoyo de la edición es de Leonardo Ramírez Aparicio.