Fernando Macías Romero

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchinango, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas como el ESDEPED y elaborador de programas de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 35 tesis de licenciatura, 8 de maestría y 5 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los de *Matemáticas y sus aplicaciones.*

Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.

BUAP FCFM CIMA

BUAP ediciones

ISBN: 978-607-525-765-5
9 786075 257655

Matemáticas y sus aplicaciones 17

Matemáticas y sus aplicaciones 17

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

David Herrara Carrasco

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en Matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Ha sido miembro organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications. Es miembro de Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado varios artículos, en revistas internacionales. Es autor de varios libros (como coautor, con otros profesores de la FCFM); es editor de algunos libros. Además, ha concluido la dirección de tesis: 4 de doctorado, 7 de maestría y más de 26 de Licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis de licenciatura y del posgrado.

Matemáticas y sus aplicaciones 17

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Primera edición: 2021

ISBN: 978-607-525-765-5

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764
http://publicaciones.buap.mx/

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552
www.fcfm.buap.mx

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 17

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el
International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Comité científico internacional

Contenido

Presentación

Las International Conferences On Mathematics and its Applications (CIMA) llevan ya 16 años realizándose, año tras año. Aquí participa como organizadora la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) en compañía de sus estudiantes. Contamos con la participación de matemáticos de nivel internacional en estos CIMA. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado Seventh International Conference on Mathematics ant its Applications (7CIMA, 2020), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 7CIMA, 2020 como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la FCFM de la BUAP. Es por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Agradecemos infinitamente a Antonio de Jesús Libreros López por su apoyo en la edición de esta obra 17.

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Topología

Matemáticas y sus aplicaciones 17, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-765-5

Capítulo 1

Espacios de Alexandroff

Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García
FCFM, BUAP

Resumen

En un espacio topológico la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto pero la intersección infinita de este tipo de conjuntos no necesariamente es un conjunto abierto. Esta última propiedad es la que caracteriza a los espacios de Alexandroff, clase que se explora introductoriamente en este capítulo. Un ejemplo especial de este tipo de espacios lo constituye la clase de los espacios finitos, lo que origina que tengan un papel muy importante en la topología digital, procesamiento de imágenes y aplicaciones de inteligencia artificial que tienen que ver con estructuras espaciales.

1 Introducción

Es conocido que en un espacio topológico (X, τ) la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto pero que si consideramos una cantidad infinita, su intersección no necesariamente es un conjunto abierto. Sin embargo, la propiedad de que la intersección infinita de conjuntos abiertos sea un conjunto abierto, es la que caracteriza a los espacios de Alexandroff. El primer estudio sobre este tipo de espacios lo hizo P.S. Alexandroff en [1] bajo el nombre de espacios discretos. En la actualidad este nombre no es apropiado ya que un espacio discreto es un espacio donde los conjuntos singulares son conjuntos abiertos.

El objetivo de este trabajo es dar la definición y propiedades básicas que satisfacen los espacios de Alexandroff. La clase de los espacios finitos es un caso especial de espacios de Alexandroff, lo que origina que tengan un papel muy importante en la topología digital, rama de las matemáticas que estudia propiedades geométricas y topológicas de imágenes digitales que surgen en diferentes áreas científicas, como en geociencias, neurociencias e imágenes médicas; en general es un tema que se conecta con el procesamiento de imágenes así como con las aplicaciones de la inteligencia artificial que tratan con estructuras espaciales (ver por ejemplo [19], [20], [9], [23]).

Como otra de las aplicaciones de esta clase de espacios se tienen algunas versiones del teorema de la curva de Jordan que se pueden probar usando ejemplos específicos de espacios de Alexandroff (ver por ejemplo [9] y [10]).

En la sección 2 de este capítulo se dan los resultados generales que se usarán en este trabajo.

En la sección 3 se da la definición de espacio de Alexandroff y se demuestra que esta definición es equivalente a que cada punto del espacio tenga un abierto mínimo (en el sentido de la contención); estos conjuntos resultarán ser compactos y conexos lo que da como consecuencia que estos espacios sean localmente compactos y localmente conexos. Se demostrará que ser un espacio de Alexandroff es un propiedad hereditaria y que se mantiene bajo productos finitos aunque no para productos infinitos. Aquí se verá que un espacio T_1 es de Alexandroff si y sólo si es discreto. También, en esta clase de espacios, se dan una equivalencia de los axiomas de separación T_0 y regular, así como una caracterización de las clases de espacios segundo numerables, separables y Lindeloff.

En la sección 4 se verá que si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, éste determina una relación de preorden en el conjunto X y que cada relación de preorden en X determina un espacio (X, τ), el cual es de Alexandroff; también que cada espacio de Alexandroff T_0 determina una relación de orden parcial sobre X y cada orden parcial determina un espacio de Alexandroff T_0. Se caracterizan los abiertos mínimos en términos de esta relación de orden parcial con la cual se trabaja en lo que resta del capítulo.

En la sección 5 se dan las definiciones de conjuntos preabierto, semiabierto, precerrado, semicerrado, abierto regular y cerrado regular, que son conceptos estrechamente relacionados con generalizaciones del concepto de continuidad. En la clase de los espacios de Alexandroff, se dan equivalencias entre las dos primeras clases de conjuntos y las últimas cuatro.

En la sección 6 se da la definición de los espacios de Alexandroff Artinianos y las dos equivalencias mencionadas en el párrafo anterior pero ahora en esta nueva clase de espacios.

2 Resultados generales

En esta sección daremos los resultados generales necesarios para llevar a buen fin este trabajo. Todos los conceptos no definidos se pueden consultar en [6].

En la siguiente definición se recopilan los conceptos básicos que se usan en este capítulo.

Definición 2.1. Un espacio topológico (X, τ) es

1. T_0 si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que:

$$(x \in U \text{ y } y \notin U) \text{ o } (y \in U \text{ y } x \notin U).$$

2. T_1 si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen conjuntos abiertos $U, V \subset X$ tales que:

$$(x \in U \text{ y } y \notin U) \text{ y } (y \in V \text{ y } x \notin V).$$

3. Regular si para todo $x \in X$ y todo conjunto abierto $U \subset X$

$$\text{existe un conjunto abierto } V \subset X \text{ tal que } x \in V \subset cl_X(V) \subset U.$$

4. Separable si existe un conjunto $D \subset X$ tal que

$$cl_X(D) = X \text{ y } |D| \leq \omega.$$

5. Lindeloff si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

6. Compacto si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

7. Conexo si los únicos abiertos y cerrados son el vacío y el total.

8. Localmente compacto si cada $x \in X$ tiene un abierto tal que su cerradura es compacto.

9. Localmente conexo si cada $x \in X$ tiene una base de abiertos conexos.

10. Cero dimensional si cada $x \in X$ tiene una base de abiertos y cerrados.

Observemos que en la definición de espacio regular no se pide que el espacio sea T_1, así como en la definición de espacio compacto, Lindelof y localmente compacto no se pide que el espacio sea T_2.

Lema 2.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *X es un espacio T_1*

2. *$cl_X(\{x\}) = \{x\}$ para todo $x \in X$.*

De aquí en adelante al conjunto $cl_X(\{x\})$ lo denotaremos simplemente como $cl_X(x)$.

También recordemos que una función $f : X \to Y$, entre los espacios topológicos X y Y, es continua en $x \in X$ si para cada conjunto abierto $V \subset Y$ tal que $f(x) \in V$, existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$; y que es abierta si para cada conjunto abierto $U \subset X$, $f(U)$ es un conjunto abierto en Y. La siguiente proposición también recopila dos hechos básicos.

Proposición 2.3. *Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función diremos que*

1. *$W \subset X \times Y$ es un conjunto abierto si para cada $(x,y) \in W$ existen conjuntos abiertos $U \subset X$, $V \subset Y$ tales que $(x,y) \in U \times V \subset W$.*

2. *f es continua si para cada conjunto abierto $V \subset Y$ se tiene que $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X.*

3 Espacios de Alexandroff

En esta sección daremos la definición de espacio de Alexandroff, y caracterizaremos los conjuntos abiertos en dichos espacios a través de una base canónica. Veremos que estos conjuntos son compactos y conexos de donde se tendrá que estos espacios son localmente compactos y localmente conexos.

También se demostrará que ser un espacio de Alexandroff es un propiedad hereditaria y que se mantiene bajo productos finitos aunque no para productos infinitos; se caracterizaran las funciones continuas entre estos espacios así como también la propiedad de ser T_0, T_1 y regular.

Definición 3.1. Sea (X,τ) un espacio topológico. Diremos que (X,τ) es un espacio de Alexandroff si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Ejemplo 3.2. 1) Si $X=\{0,1\}$ y $\tau=\{\{0\},\emptyset,X\}$, entonces (X,τ) es un espacio de Alexandroff.

2) Si $\tau=\{\emptyset\}\cup\{A\subset\mathbb{N} : x\in A \text{ implica que } x^2\in A\}$, entonces $(\mathbb{N},\tau)$ es un espacio de Alexandroff.

3) Observemos que, en general, cualquier topología finita es de Alexandroff así que, en particular, cualquier espacio finito es uno de esta clase.

4) También, si X es un conjunto y $A\subset X$, entonces no es difícil probar que $\tau_1=\{X\}\cup\{U\subset X : U\subset A\}$ y $\tau_2=\{\emptyset\}\cup\{U\subset X : A\subset U\}$ son topologias de Alexandroff definidas sobre X.

Teorema 3.3. *Si (X,τ) es un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *(X,τ) es un espacio de Alexandroff.*

2. *Para cada $x\in X$ existe un conjunto abierto $U(x)\subset X$ tal que para cualquier otro conjunto abierto $U\subset X$ tal que $x\in U$, se tiene que $U(x)\subset U$.*

Demostración. 1) implica 2). Supongamos que X es un espacio de Alexandroff.

Si consideramos para cada $x\in X$ la familia

$$\beta=\{U\subset X : x\in U \text{ y } U \text{ es un conjunto abierto}\},$$

entonces, ya que X es un espacio de Alexandroff,

$$U(x)=\bigcap\beta=\bigcap\{U\subset X : x\in U \text{ y } U \text{ es un conjunto abierto}\}$$

es un conjunto abierto tal que $x\in U(x)$.

De la definición de $U(x)$ se sigue que si W es un conjunto abierto tal que $x\in W$, entonces $U(x)\subset W$.

2) implica 1). Ahora supongamos que para cada $x\in X$ existe un conjunto abierto $U(x)\subset X$ con $x\in U(x)$ tal que para todo conjunto abierto $U\subset X$ tal que $x\in U$ se tiene que $U(x)\subset U$.

Si consideramos una familia de conjuntos abiertos $\{U_i : i \in I\}$ y $x \in \bigcap\{U_i : i \in I\}$, entonces para todo $i \in I$ se tiene que $U(x) \subset U_i$ para todo $i \in I$ lo cual implica que

$$x \in U(x) \subset \bigcap\{U_i : i \in I\}$$

y $U(x)$ es un conjunto abierto; esto implica que $\bigcap\{U_i : i \in I\}$ es un conjunto abierto y, por consiguiente (X, τ) es un espacio de Alexandroff. □

Ejemplo 3.4. 1) Sean $X = \{0, 1\}$ y $\tau = \{\{0\}, \emptyset, X\}$. Como ya se dijo antes, (X, τ) es un espacio de Alexandroff, y en este caso se tiene que:

$$U(0) = \{0\} \text{ y } U(1) = X.$$

2) Si $X = \mathbb{N}$ y $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{N} : x \in A \text{ implica que } x^2 \in A\}$, entonces en este caso, para cada $x \in \mathbb{N}$

$$U(x) = \{x^{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}.$$

De aquí en adelante, cada vez que se considere un espacio de Alexandroff, al conjunto abierto $U(x)$ lo llamaremos el abierto minimal que contiene a x en el sentido del inciso 2. del Teorema 3.3.

Del Teorema 3.3 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.5. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, entonces*

1. $\beta = \{U(x) : x \in X\}$ *es una base de* X.

2. $\gamma_x = \{U(x)\}$ *es base local de* X *en el punto* x.

Observemos que si β_1 es otra base de X, del Teorema 3.5, se sigue que $|\beta| \leq |\beta_1|$.

El siguiente resultado nos muestra otras propiedades que satisface $U(x)$ para cada $x \in X$.

Teorema 3.6. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, entonces para cada $x \in X$, $U(x)$ satisface las siguientes afirmaciones:*

1. $U(x)$ *es compacto para cada* $x \in X$,

2. $U(x)$ *es conexo para cada* $x \in X$,

3. $y \in U(x)$ *si y sólo si* $x \in cl_X(y)$,

Demostración. 1) Sea $x \in X$ y $\{U_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de $U(x)$.

Como $\{U_i : i \in I\}$ es cubierta abierta de $U(x)$ y $x \in U(x)$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$ de donde aplicando el Teorema 3.3 inciso 2 se sigue que

$$U(x) \subset U_{i_0}.$$

Por lo tanto $U(x)$ es compacto para cada $x \in X$.

2) Sean $U, V \subset X$ conjuntos abiertos en X tales que $U(x) \subset U \cup V$ y $U \cap V \cap U(x) = \emptyset$.

Como $U(x) \subset U \cup V$ y $U \cap V \cap U(x) = \emptyset$ y $x \in U(x)$, entonces ($x \in U$ y $x \notin V$) o ($x \in V$ y $x \notin U$) de donde aplicando el Teorema 3.3 inciso 2 se sigue que

$$U(x) \subset U \text{ o } U(x) \subset V.$$

Por lo tanto $U(x)$ es conexo para cada $x \in X$.

3) Supongamos que $y \in U(x)$ y sea $V \subset X$ un conjunto abierto tal que $x \in V$. Del Teorema 3.3 inciso 2 se sigue que $U(x) \subset V$ lo cual implica que $y \in V$, de donde se sigue que $V \cap \{y\} \neq \emptyset$.

Por lo tanto $x \in cl_X(y)$.

Ahora si $x \in cl_X(y)$ como $x \in U(x)$, entonces $U(x) \cap \{y\} \neq \emptyset$ lo cual implica que $y \in U(x)$. □

Como una consecuencia del Teorema 3.6, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.7. *Sea* (X, τ) *un espacio de Alexandroff, entonces*

1. X *es localmente compacto.*

2. X *es localmente conexo.*

Los siguientes teoremas muestran que el ser un espacio de Alexandroff se mantiene bajo productos finitos y cocientes.

Teorema 3.8. *Si* (X, τ) *es un espacio de Alexandroff y* $Y \subset X$ *un subespacio, entonces* Y *es un espacio de Alexandroff tal que para cada* $y \in Y$

$$V(y) = U(y) \cap Y$$

donde $V(y)$ *es el conjunto abierto minimal en* Y *que contiene a* y *y* $U(y)$ *el conjunto abierto minimal en* X *que contiene a* y.

Demostración. Sea $\{W_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos de Y, entonces para cada $i \in I$ existe un conjunto abierto V_i en X tal que $W_i = V_i \cap Y$ de donde se sigue que

$$\bigcap\{W_i : i \in I\} = \bigcap\{V_i \cap Y : i \in I\} = \bigcap\{V_i : i \in I\} \cap Y$$

y dado X es un espacio de Alexandrof, entonces $\cap\{V_i : i \in I\}$ es un conjunto abierto de X lo cual implica que

$$\bigcap\{W_i : i \in I\}$$

es un conjunto abierto de Y.

Sea $y \in Y$ y $V(y)$ el conjunto abierto minimal de Y tal que $y \in V(y)$, entonces existe un conjunto abierto U de X tal que $y \in U$ y

$$V(y) = U \cap Y.$$

Como $y \in U$, entonces $y \in U(y) \subset U$ de donde se sigue que $U(y) \cap Y \subset U \cap Y \subset V(y)$ lo cual implica que $U(y) \cap Y \subset V(y)$ y como $U(y) \cap Y$ es un conjunto abierto en Y tal que $y \in U(y) \cap Y$, entonces $V(y) \subset U(y) \cap Y$.

Por lo tanto

$$V(y) = U(y) \cap Y.$$

□

Teorema 3.9. *Si (X, τ) y (Y, σ) son espacios de Alexandroff, entonces $X \times Y$ es un espacio de Alexandroff con*

$$U(x, y) = U(x) \times U(y).$$

donde $U(x, y)$ es el abierto minimal en $X \times Y$ que contiene a (x, y) y $U(x), U(y)$ los abiertos minimales que contienen a x y y respectivamente.

Demostración. Sea $\{W_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos de $X \times Y$ que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que son abiertos básicos canónicos del producto topológico de X con Y, entonces para cada $i \in I$ existen conjuntos abiertos $U_i \subset X$ y $V_i \subset Y$, respectivamente, tales que $W_i = U_i \times V_i$.

Como

$$\bigcap\{W_i : i \in I\} = \bigcap\{U_i \times V_i : i \in I\} = \bigcap\{U_i : i \in I\} \times \bigcap\{V_i : i \in I\}$$

y dado que X y Y son espacios de Alexandroff, $\bigcap\{U_i : i \in I\}$ y $\bigcap\{V_i : i \in I\}$ son conjuntos abiertos en X y Y, respectivamente, lo cual implica que $\bigcap\{W_i : i \in I\}$ es un conjunto abierto en $X \times Y$.

Ahora, como $U(x, y)$ es un conjunto abierto en $X \times Y$ tal que $(x, y) \in U(x, y)$, entonces existen conjuntos abiertos U, V en X, Y respectivamente tales que
$$x \in U, y \in V \text{ y } (x, y) \in U \times V \subset U(x, y).$$
Como $x \in U$ y $y \in V$, entonces $x \in U(x) \subset U$ y $y \in U(y) \subset V$ de donde se sigue que
$$(x, y) \in U(x) \times U(y) \subset U(x, y)$$
y como $U(x) \times U(y)$ es un conjunto abierto en $X \times Y$ tal que $(x, y) \in U(x) \times U(y)$ y $U(x, y)$ es el mínimo abierto tal que $(x, y) \in U(x, y)$, entonces
$$U(x, y) \subset U(x) \times U(y)$$
lo cual implica que
$$U(x, y) = U(x) \times U(y).$$
□

Corolario 3.10. *Si $(X, \tau_1), \cdots, (X, \tau_n)$ son espacios de Alexandroff, entonces el producto topológico $X_1 \times \cdots \times X_n$, es un espacio de Alexandroff.*

Como se comenta más adelante, como consecuencia del Teorema 3.18, la propiedad de ser espacio de Alexandroff no se preserva para productos infinitos.

Teorema 3.11. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, entonces cualquier espacio cociente de X, $X/\sim$ es un espacio de Alexandroff.*

Demostración. Si $\bigcap\{W_i : i \in I\}$ es cualquier intersección arbitraria de conjuntos abiertos de $X/\sim$ y $f : X \to X/\sim$ la función cociente, entonces $f^{-1}(W_i)$ es un conjunto abierto para cada $i \in I$ lo cual implica que $f^{-1}(\bigcap\{W_i : i \in I\})$ es un conjunto abierto y como
$$f^{-1}(\bigcap\{W_i : i \in I\}) = \bigcap\{f^{-1}(W_i) : i \in I\}$$
se tiene que $\bigcap\{W_i : i \in I\}$ es un conjunto abierto de $X/\sim$.

Por lo tanto, $X/\sim$ es un espacio de Alexandroff. □

Teorema 3.12. *Si $f : X \to Y$ es una función con X, Y espacios de Alexandroff y $x \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *f es continua en x.*
2. *$f(U(x)) \subset U(f(x))$.*

Demostración. 1) implica 2). Como f es continua en x, existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset U(f(x))$; además es claro que $x \in U(x) \subset U$, de donde se sigue que $f(U(x)) \subset U(f(x))$.

2) implica 1). Sea $V \subset Y$ un conjunto abierto tal que $f(x) \in V$, entonces $U(f(x)) \subset V$ lo cual implica que $f(U(x)) \subset V$.

Por lo tanto f es continua en x. $\square$

Como se hace notar después del Teorema 3.18, la propiedad de Alexandroff no se preserva bajo funciones continuas. El siguiente teorema da las condiciones sobre una función continua para que la propiedad sí se preserve.

Teorema 3.13. *Si $f : X \to Y$ es una función sobre, abierta y continua, entonces*

1. *Si X es un espacio de Alexandroff, entonces Y es un espacio de Alexandroff.*
2. *Para cada $y \in Y$, $U(y) = f(U(x))$ con $y = f(x)$.*

Demostración. 1. Sea $\{V_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos abiertos de Y. Como f es continua y V_i es un conjunto abierto, entonces $f^{-1}(V_i)$ es un conjunto abierto en X para cada $i \in I$ de donde se sigue que $\bigcap\{f^{-1}(V_i) : i \in I\}$ es un conjunto abierto, lo cual implica que $f^{-1}(\bigcap\{V_i : i \in I\})$ es un conjunto abierto y como f es sobre y abierta, entonces $f(f^{-1}(\bigcap\{V_i : i \in I\})) = \bigcap\{V_i : i \in I\}$ es un conjunto abierto.

Por lo tanto Y es un espacio de Alexandroff.

2. Sea $y \in U(y)$. Como f es continua existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset U(y)$; además es claro que $x \in U(x) \subset U$, de donde se sigue que $f(U(x)) \subset U(y)$ y como f es abierta y $y \in f(U(x))$, entonces $U(y) \subset f(U(x))$.

Por lo tanto $U(y) = f(U(x))$. $\square$

Corolario 3.14. *Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces X es un espacio de Alexandroff si y sólo si Y es un espacio de Alexandroff.*

Teorema 3.15. *Si $f : X \to Y$ es una función con X y Y espacios de Alexandroff, entonces f es una función abierta si $f(U(x))$ es un conjunto abierto para toda $x \in X$.*

Demostración. Sea $U \subset X$ un conjunto abierto y $y \in f(U)$.

Como $y \in f(U)$, entonces existe $x \in U$ tal que $f(x) = y$ y $U(x) \subset U$ lo cual implica que $y \in f(U(x)) \subset f(U)$.

Por lo tanto f es abierta. □

Teorema 3.16. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *X es un espacio T_0*

2. *$U(x) = U(y)$ implica $x = y$.*

Demostración. 1) implica 2). Supongamos que X es un espacio T_0.

Como X es un espacio T_0, dados $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $y \in U$ y $x \notin U$ lo cual implica que

$$(x \in U(x) \text{ y } y \notin U(x)) \text{ o } (y \in U(y) \text{ y } x \notin U(y))$$

en cualquiera de los casos se sigue que $U(x) \neq U(y)$.

2) implica 1). Supongamos que $U(x) = U(y)$ implica $x = y$.

Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces $U(x) \neq U(y)$ lo cual implica que $U(x) \nsubseteq U(y)$ o $U(y) \nsubseteq U(x)$.

Sin perdida de generalidad supongamos que $U(x) \nsubseteq U(y)$.

Como $U(x) \nsubseteq U(y)$, entonces $x \notin U(y)$ ya que, en caso contrario si $x \in U(y)$, entonces del Teorema 3.3 se sigue que $U(x) \subseteq U(y)$.

Por lo tanto $y \in U(y)$ y $x \notin U(y)$.

El caso $U(y) \nsubseteq U(x)$ se hace en forma similar.

Con lo cual concluimos que X es un espacio T_0. □

Ejemplo 3.17. 1) Sea $X = \{0, 1\}$ y $\tau = \{\{0\}, \emptyset, X\}$, entonces (X, τ) es un espacio de Alexandroff.

Como

$$U(0) = \{0\} \text{ y } U(1) = X$$

entonces

$$0 \in U(0) \text{ y } 1 \notin U(0).$$

Por lo tanto (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0.

2) Sea $X = \mathbb{N}$ y $\tau = \{A \subset \mathbb{N} : x \in A \,\text{implica que}\, x^2 \in A\}$, entonces (X, τ) es un espacio de Alexandroff.

Como para cada $x \in \mathbb{N}$

$$U(x) = \{x^{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

Dados $x, y \in \mathbb{N}$ con $x < y$, entonces

$$y \in U(y) \text{ y } x \notin U(y).$$

Por lo tanto (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0.

Teorema 3.18. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *X es un espacio T_1*

2. *$U(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$.*

Demostración. 1) implica 2). Supongamos que X es un espacio T_1.

Como X es un espacio T_1, entonces $cl_X(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Por lo tanto, si $y \in U(x)$, entonces $x \in cl_X(y)$ lo cual implica que $y = x$ de donde se sigue que

$$U(x) = \{x\}.$$

2) implica 1). Supongamos que $U(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$.

Como $U(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$, entonces para $y \in X$ con $y \neq x$ se tiene que $x \notin U(y)$ así que $y \notin cl(\{x\})$ y con esto se concluye que $cl(\{x\}) = \{x\}$.

Por lo tanto X es T_1. □

Del Teorema 3.18 se sigue que si (X, τ) es un espacio de Alexandroff y T_1, entonces X es un espacio discreto. Obviamente cualquier espacio discreto es de Alexandroff pues todos los conjuntos son abiertos. Por tal motivo centraremos nuestra atención a espacios de Alexandroff T_0. También de aquí obtenemos que la propiedad de ser espacio de Alexandroff no se preserva para productos infinitos: si consideramos una familia infinita de espacios con un solo punto, entonces cada uno de ellos es T_1 y de Alexandroff y si el producto topológico de la familia tuviera esta última propiedad, al ser T_1, tendría que ser discreto, lo cual es falso. Como una consecuencia más del teorema anterior tenemos que la propiedad de Alexandroff no se preserva bajo imágenes continuas: basta considerar a X como el conjunto de naturales con la topología discreta, a Y como el conjunto de racionales con la topología relativa heredada de los reales con la topología usual y una biyección entre X y Y; esta función será una función continua, X con la propiedad de Alexandroff y Y sin esta propiedad. El Teorema 3.13 da condiciones sobre una función continua para que la propiedad se preserve.

Teorema 3.19. *Sea (X, τ) un espacio de Alexandroff, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio regular.*

2. *$U(x) = cl_X(U(x))$ para todo $x \in X$.*

Demostración. 1) implica 2). Supongamos que X es un espacio regular.

Como X es un espacio regular para cada $x \in X$ y el conjunto abierto $U(x)$, existe un conjunto abierto $W \subset X$ tal que $x \in W \subset cl_X(W) \subset U(x)$.

Dado que $x \in W$, entonces $x \in U(x) \subset W$ lo cual implica que $cl_X(U(x)) \subset cl_X(W)$ de donde se sigue que $cl_X(U(x)) \subset U(x)$.

Por lo tanto $U(x) = cl_X(U(x))$ para todo $x \in X$.

2) implica 1). Supongamos que $U(x) = cl_X(U(x))$ para todo $x \in X$. Sea $U \subset X$ un conjunto abierto y $x \in U$, entonces $x \in U(x) \subset cl_X(U(x)) \subset U$.

Por lo tanto X es un espacio regular. □

De los Teoremas 3.3 y 3.8 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.20. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff y regular, entonces X es cero dimensional.*

Para finalizar con esta sección probaremos sendas caracterizaciones de las clases de espacios segundo numerables, separables y Lindeloff en la categoría de los espacios de Alexandroff y T_0.

Teorema 3.21. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff y T_0, entonces X satisface las siguientes afirmaciones*

1. *X es segundo numerable si y sólo si $|X| \leq \omega$.*
2. *X es separable si y sólo si existe $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ tal que $X = \bigcup\{cl_X(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$.*
3. *X es de Lindeloff si y sólo si $X = \bigcup\{U(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ para algún $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$.*

Demostración. 1. Si $|X| \leq \omega$, entonces del Teorema 3.5 se sigue que X es segundo numerable.

Ahora si X no es segundo numerable del Teorema 3.5 se sigue que $|X| > \omega$.

2. Supongamos que X es separable.

Como X es separable, entonces existe un conjunto $D \subset X$ tal que

$$D \text{ es denso y } D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como para cada $x \in X$, $U(x) \cap D \neq \emptyset$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \in U(x)$ lo cual implica que $x \in cl_X(x_{n_0})$.

Por lo tanto $X = \bigcup\{cl_X(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Ahora supongamos que $X = \bigcup\{cl_X(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ para algún $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$.

Como $X = \bigcup\{cl_X(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$, afirmamos que el conjunto

$$D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es un conjunto denso y numerable en X. Es claro que D es numerable.

Ahora probaremos que D es denso en X.

Sea $U \subset X$ un conjunto abierto y $x \in X$ tal que $x \in U$, entonces $x \in U(x) \subset U$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in cl_X(x_{n_0})$, lo cual implica que $x_{n_0} \in U(x)$ de donde se sigue que $U \cap D \neq \emptyset$.

Por lo tanto X es separable.

3. Supongamos que X es de Lindeloff.

Como $\beta = \{U(x) : x \in X\}$ es base de X, entonces β es cubierta de X el cual es de Lindeloff así que existe $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ tal que $X = \bigcup\{U(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Ahora supongamos que hay un conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ tal que $X = \bigcup\{U(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ y que $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ es una cubierta abierta de X, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $i_n \in I$ tal que $x_n \in U_{i_n}$ y como $U(x_n) \subset U_{i_n}$, entonces $X = \bigcup\{U_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Por lo tanto X es de Lindeloff. $\square$

4 Relaciones de orden y espacios de Alexandroff

En esta sección estudiaremos la relación que hay entre los espacios de Alexandroff y las relaciones de preorden lo cual permitirá caracterizar a los elementos de la base formada por los abiertos minimales del espacio de Alexandroff en términos de algún orden parcial definido sobre X.

Recordemos que dado un conjunto X y una relación $\preceq$ en X, $\preceq$ es un preorden en X si

1. $x \preceq x$ para todo $x \in X$ y
2. Si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$ para todo $x, y, z \in X$,

En este caso se dirá que $(X, \preceq)$ es un conjunto preordenado.

Si además se satisface que

$$x \preceq y \text{ y } y \preceq x \ \text{ implica que } x = y$$

ésta relación recibe el nombre de orden parcial y se dirá que $(X, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 4.1. Si en $\mathbb{Z}$ definimos la relación $\leq_d$ como:

$$2k \leq_d 2k+1 \text{ y } 2k+2 \leq_d 2k+1 \text{ y } k \leq_d k \text{ para cada } k \in \mathbb{Z},$$

entonces lo que obtenemos es un orden parcial sobre $\mathbb{Z}$, conocido como el orden digital, es decir, $(\mathbb{Z}, \leq_d)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Teorema 4.2. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0, entonces la relacion $\leq$ dada como*

$$x \leq y \textit{ si y solo si } y \in U(x)$$

es un orden parcial en X.

Demostración. 1. Como para todo $x \in X$, $x \in U(x)$, entonces $x \leq x$.

2. Sean $x, y, z \in X$ tales que $x \leq y$ y $y \leq z$.

Como $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $y \in U(x)$ y $z \in U(y)$, dado que $U(y)$ es el conjunto abierto minimal tal que $y \in U(y)$, entonces $U(y) \subset U(x)$ de donde se sigue que $z \in U(x)$ lo cual implica que

$$x \leq z.$$

3. Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$.

Como $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $y \in U(x)$ y $x \in U(y)$ lo cual implica que $U(x) \subset U(y)$ y $U(y) \subset U(x)$ de donde se sigue que

$$U(x) = U(y).$$

Si $x \neq y$ como X es T_0 existe un conjunto abierto U tal que

$$(x \in U \text{ y } y \notin U) \; o \; (x \notin U \text{ y } y \in U)$$

lo cual implica que

$$y \notin U(x) \; o \; x \notin U(y)$$

es decir

$$U(x) \neq U(y).$$

lo cual no puede pasar.

Por lo tanto $x = y$. □

Corolario 4.3. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0, entonces*

$$x \leq y \textit{ si y sólo si } x \in cl_X(y)$$

Teorema 4.4. *Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si consideramos a la familia τ de subconjuntos $U \subset X$ tales que si $x \in U$ y $x \preceq y$ entonces $y \in U$, y para cada $x \in U$ a los subconjuntos $U_x = \{y \in X : x \preceq y\}$, entonces las siguientes afirmaciones se satisfacen*

1. *τ es una topología para X.*

2. *Para cada $x \in X$ se tiene que $U_x \in \tau$.*

3. *Para cada $x \in X$ y cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se sigue que $U_x \subset U$.*

4. *(X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0.*

Demostración. 1. Sean $\{U_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos tales que $U_i \in \tau$ para cada $i \in I$, $x \in \bigcup\{U_i : i \in I\}$ y $x \preceq y$.

Como $x \in \bigcup\{U_i : i \in I\}$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$ de donde se sigue que $y \in U_{i_0}$ lo cual implica que $y \in \bigcup\{U_i : i \in I\}$.

Por lo tanto $\bigcup\{U_i : i \in I\} \in \tau$.

Ahora sean $U_1, ..., U_n \in \tau$ tales que $x \in \bigcap\{U_i : i \in \{1, \cdots, n\}\}$ y $x \preceq y$.

Como $x \in \bigcap\{U_i : i \in \{1, \cdots, n\}\}$, entonces $x \in U_i$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ de donde se sigue que $y \in U_i$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ y de aquí que $y \in \bigcap\{U_i : i \in \{1, \cdots, n\}\}$.

Por lo tanto $\bigcap\{U_i : i \in \{1, \cdots, n\}\} \in \tau$.

Ademas $\emptyset, X \in \tau$. Por lo tanto τ es una topología para X.

2. Sean $y \in U_x$ y $y \preceq z$.

Como $y \in U_x$, entonces $x \preceq y$ lo cual implica que $x \preceq z$, de donde se sigue que $z \in U_x$.

Por lo tanto $U_x \in \tau$.

3) Sea $x \in X$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$.

Se sigue de la definición de U_x y U que $U_x \subset U$. Por lo tanto U_x es el abierto mínimo que contiene a x. Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.3 se tiene que (X, τ) es un espacio de Alexandroff.

4) Sean $x, x' \in X$. Será suficiente ver que si $U_x = U_{x'}$, entonces $x = x'$. Si $U_x = U_{x'}$, entonces $x' \in U_x$ y $x \in U_{x'}$ de donde se sigue que $x' \preceq x$ y $x \preceq x'$ lo cual implica que $x = x'$.

Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.16, tenemos que (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0. □

A la topología τ del teorema anterior la denotaremos por $\tau_{\preceq}$ y diremos que es la topología generada por el orden parcial $\preceq$.

Ejemplo 4.5. Si consideramos a $(\mathbb{Z}, \leq_d)$ y τ_d la topología generada por este orden parcial, entonces por el Teorema 4.4 se tiene que $(\mathbb{Z}, \tau_d)$ es un espacio de Alexandroff, que es conocido como la Línea digital o Línea de Khalimsky cuyos abiertos minimales son

$$U(2n) = \{2n-1, 2n, 2n+1\} \text{ y } U(2m+1) = \{2m+1\}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Para más información sobre este espacio se pueden consultar [8] y [17].

Teorema 4.6. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0, entonces*

$$U(x) = U_x \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración. Sea $x \in X$. Si $y \in U(x)$, entonces $x \leq y$ de donde se sigue que $y \in U_x$.

Ahora, si $y \in U_x$, entonces $x \leq y$ de donde se sigue que $y \in U(x)$. Por lo tanto $U(x) = U_x$ para todo $x \in X$. □

Los teoremas 4.4 y 4.6 muestran que cualquier orden parcial $\preceq$ definido sobre un conjunto X define una topología $\tau_\preceq$ tal que $(X, \tau_\preceq)$ es un espacio de Alexandroff T_0 y que cualquier topología de Alexandroff T_0, definida sobre X es la generada por algún orden parcial en X, de manera precisa, el orden $\leq$ que se definió en el Teorema 4.2.

Teorema 4.7. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y $A \subset X$, entonces*

1. *A es un conjunto abierto si y sólo si para cada $x \in A$ y $y \in X$ tales que $x \leq y$ implica que $y \in A$,*

2. *A es un conjunto cerrado si y sólo si para cada $x \in A$ y $y \in X$ tales que $y \leq x$ implica que $y \in A$.*

Demostración. 1) Sean A un conjunto abierto, $x \in A$ y $y \in X$ tales que $x \leq y$. Como A es un conjunto abierto, entonces $x \in U(x) \subset A$ y dado que $x \leq y$ se tiene que $y \in U(x) \subset A$ lo cual implica que $y \in A$.

Ahora demostraremos que A es un conjunto abierto. Sea $x \in A$. Afirmamos que $U(x) \subset A$, ya que si $y \in U(x)$, entonces $x \leq y$ lo cual implica que $y \in A$, es decir, A es un conjunto abierto.

2) Sean $x \in A$ y $y \in X$ tales que $y \leq x$. Como A es un conjunto cerrado, entonces $cl_X(x) \subset A$ y dado que $y \leq x$ implica que $y \in cl_X(x)$, de donde se sigue que $y \in A$.

Ahora sea $x \in (X \setminus A)$. Afirmamos que $U(x) \subset (X \setminus A)$ ya que si existe $y \in U(x)$ y $y \notin (X \setminus A)$, entonces $y \in A$ y dado que $y \in U(x)$ implica que $x \leq y$ de donde se sigue que $x \in A$ lo cual no puede ser.

Por lo tanto A es un conjunto cerrado. $\square$

Teorema 4.8. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0, $x \in X$, $A \subset X$ y $V_x = \{y \in X : y \leq x\}$, entonces*

1. $cl_X\{x\} = V_x$,
2. $Int_X(A) = \{x \in A : U_x \subset A\}$,
3. $cl_X(A) = \bigcup\{cl_X\{x\} : x \in A\} = \bigcup\{V_x : x \in A\}$.

Demostración. 1) Si $y \in cl_X(x)$, entonces $y \leq x$ lo cual implica que $y \in V_x$ y si $y \in V_x$, entonces $y \leq x$, así que $y \in cl_X(x)$.

2) Si $x \in Int_X(A)$, entonces existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subset A$ y esto implica que $x \in U_x \subset U$, de donde se sigue que $U_x \subset A$ y $x \in A$. Y es claro que si $x \in A$ y $U_x \subset A$, entonces $x \in Int_X(A)$.

3) Si $x \in A$, entonces $\{x\} \subset A$ lo que significa que $cl_X\{x\} \subset cl_X(A)$.

También si $x \in A$, entonces $x \in \{x\} \subset cl_X\{x\}$ lo cual implica que $A \subset \bigcup\{cl_X(x) : x \in A\}$ y como $\bigcup\{cl_X(x) : x \in A\}$ es un conjunto cerrado, entonces $cl_X(A) \subset \bigcup\{cl_X(x) : x \in A\}$. $\square$

Definición 4.9. Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff y $x, y \in X$, diremos que x y y son comparables si $x \leq y$ o $y \leq x$.

Teorema 4.10. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff y $x, y \in X$ con $x \leq y$, entonces existe una función continua $f : [0, 1] \to X$ tal que*

$$f(t) = y \text{ si } 0 \leq t < 1 \text{ y } f(t) = x \text{ si } t = 1.$$

Demostración. Sean $x, y \in X$ y supongamos que $x \leq y$. Definamos $f : [0, 1] \to X$ tal que

$$f(t) = y \text{ si } 0 \leq t < 1 \text{ y } f(t) = x \text{ si } t = 1.$$

Ahora sea $U \subset X$ un conjunto abierto, entonces se pueden dar los siguientes casos:

1. Si $x \in U$, como $x \leq y$, entonces $y \in U_x \subset U$ lo cual implica que $f^{-1}(U) = [0,1]$.

2. Si $x \notin U$, entonces $f^{-1}(U) = \emptyset$ si $y \notin U$ y $f^{-1}(U) = [0,1)$ si $y \in U$.

Por lo tanto f es continua. □

Definición 4.11. Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, entonces

1. Una cerca en X es un conjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tal que x_i y x_{i+1} son comparables.

2. X es conexo por orden si para cualesquiera $x, y \in X$, existe una cerca $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tal que $x_1 = x$ y $x_n = y$.

3. X es conexo por caminos si para cualesquiera $x, y \in X$ existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Teorema 4.12. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff conexo, entonces es conexo por orden.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y consideremos el siguiente conjunto

$$A = \{x \in X : \text{ existe una cerca de } x_0 \text{ a } x\}.$$

Afirmamos que A es un conjunto abierto y cerrado.

i) Sean $x \in A$ y $y \in U_x$. Como $x \in A$, entonces existe una cerca $\{x_1, ..x_n\}$ tal que $x_0 = x_1, \cdots, x = x_n$, de donde se sigue que $\{x_1, \cdots, x_n, y\}$ es una cerca de x_0 a y lo cual implica que $y \in A$, es decir $U_x \subset A$. Por lo tanto A es un conjunto abierto.

ii) Un razonamiento similar demuestra que si $x \in A$, entonces $cl_X(x) \in A$, entonces, aplicando el Teorema 4.8, se sigue que

$$A = \bigcup\{cl_X(x) : x \in A\} = cl_X(A)$$

lo cual implica que A es un conjunto cerrado en X.

Por lo tanto A es un conjunto abierto y cerrado en X y como este es conexo, entonces $A = X$.

Con lo cual concluimos que X es conexo por orden. □

Ahora como todo espacio conexo por caminos es siempre conexo aplicando el Teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.13. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff conexo por caminos, entonces es conexo por orden.*

Teorema 4.14. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, entonces $cl_X(U)$ es denso para todo conjunto abierto $U \subset X$ si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:*

1. *El preorden de X es un orden total.*

2. *X tiene máximo.*

Demostración. 1) Sean $U \subset X$ un conjunto abierto, $x \in U$ y $y \in X$. Como X es totalmente ordenado, entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.

i) Si $x \leq y$, entonces $y \in U_x \subset U \subset cl_X(U)$.

ii) Si $y \leq x$, entonces $y \in V_x = \{z \in X : z \leq x\} \subset cl_X(U)$ lo cual se sigue del Teorema 4.7.

En cualquiera de los casos, si $y \in X$, entonces $y \in cl_X(U)$, lo cual implica que $cl_X(U) = X$.

2) Sean T=máx X y $U \subset X$ un conjunto abierto.

Si $x \in U$, entonces $U_x \subset U$ y como $x \leq T$, se tiene que $T \in U_x$ lo cual implica que $T \in U$. Por lo tanto, dado $W \subset X$ un conjunto abierto, tenemos que $T \in W$ lo cual se sigue del Teorema 4.7 lo cual implica que $U \cap W \neq \emptyset$. Por lo tanto $cl_X(U) = X$. □

Corolario 4.15. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0, entonces X es conexo si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones*

1. *El preorden de X es un orden total.*

2. *X tiene máximo.*

3. *X tiene mínimo.*

Demostración. 1. y 2. Se siguen del Teorema 4.14.

3. Si L=mín X, entonces $X = U_L$ el cual es conexo. □

5 Conjuntos preabiertos y semiabiertos en espacios de Alexandroff

En esta sección caracterizaremos a los conjuntos preabiertos, precerrados, semiabiertos, semicerrados, abiertos regulares y cerrados regulares en espacios de Alexandroff, para lo cual iniciaremos la sección dando las definiciones y resultados necesarios.

Definición 5.1. Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$ diremos que:

1. A es un conjunto preabierto si $A \subset Int_X[cl_X(A)]$.
2. A es un conjunto precerrado si $cl_X[Int_X(A)] \subset A$.
3. A es un conjunto semiabierto si $A \subset cl_X[Int_X(A)]$.
4. A es un conjunto semicerrado si $Int_X[cl_X(A)] \subset A$.
5. A es un conjunto α-abierto si $A \subset Int_X[cl_X(Int_X(A))]$.
6. A es un conjunto abierto regular si $A = Int_X[cl_X(A)]$.
7. A es un conjunto cerrado regular si $A = cl_X[Int_X(A)]$.
8. A es un conjunto nada denso si $Int_X[cl_X(A)] = \emptyset$.

Observemos que, directamente de las definiciones, no es difícil probar que, si (X, τ) es un espacio topológico y $A, B \subset X$, entonces:

1. Si A es un conjunto abierto, entonces A es un conjunto preabierto.
2. Si A es un conjunto abierto, entonces A es un conjunto semiabierto.
3. Si A es un conjunto abierto, entonces A es un conjunto α-abierto.
4. Si A es un conjunto denso, entonces A es un conjunto preabierto.
5. Si A es un conjunto α-abierto, entonces A es un conjunto preabierto y semiabierto.
6. Si A es un conjunto abierto regular, entonces A es un conjunto preabierto y semicerrado.

Antes de centrarnos en la clase los espacios de Alexandroff haremos un recuento de las propiedades generales relacionadas con estos conceptos. Al lector interesado en ampliar su conocimiento sobre estos temas, lo remitimos a [3], [7] y [11].

Proposición 5.2. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A, B \subset X$, entonces*

1. *Si A es un conjunto preabierto y semiabierto, entonces A es un conjunto α-abierto.*

2. *Si A es un conjunto abierto y B es un conjunto preabierto, entonces $A \cap B$ es un conjunto preabierto.*

3. *A es un conjunto α-abierto si y sólo si A es un conjunto preabierto y semiabierto.*

Proposición 5.3. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un conjunto preabierto.*

2. *Existen un conjunto abierto $U \subset X$ y un conjunto denso $D \subset X$ tales que $A = U \cap D$.*

Vamos a considerar los siguientes conjuntos:

1. $PO(X, \tau) = \{A \subset X : A \subset Int_X[cl_X(A)]\}$

2. $SO(X, \tau) = \{A \subset X : A \subset cl_X[Int_X(A)\}$

3. $\tau_\alpha = \{A \subset X : A \subset Int_X(cl_X[Int_X(A)])\}\}$

Proposición 5.4. *Si (X, τ) es un espacio topologico y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$PO(X, \tau)$ es una topología.*

2. *Para cualesquiera $D_1, D_2, \subset X$ conjuntos densos, $D_1 \cap D_2$ es un conjunto denso.*

Ahora sí, regresemos a nuestra clase de estudio: los espacios de Alexandroff.

Teorema 5.5. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y $D \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *D es un conjunto denso en X.*

2. *Para cada $x \in X$, existe $d \in D$ tal que $x \leq d$.*

Demostración. 1) implica 2). Sea D es un conjunto denso en X. Como D es un conjunto denso en X, entonces para cada $x \in X$, $x \in cl_X(D)$; por lo tanto, del Teorema 4.8 existe $d \in D$ tal que $x \in V_d$. Concluimos que para cada $x \in X$, $x \leq d$.

2) implica 1). Supongamos que para cada $x \in X$ existe $d \in D$ tal que $x \leq d$. Para ver que D es denso será suficiente ver que para cada $x \in X$, $U_x \cap D \neq \emptyset$.

Como para cada $x \in X$ existe $d \in D$ tal que $x \leq d$, se tiene que para cada $x \in X$, $d \in U_x$ lo cual implica que para cada $x \in X$, $U_x \cap D \neq \emptyset$. De aquí, D es un conjunto denso en X. $\square$

Teorema 5.6. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un conjunto preabierto de X.*

2. *Para todo $x \in X \setminus A$, si $V_x \cap A \neq \emptyset$, entonces $U_x \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. 1) implica 2). Si A es un conjunto preabierto de X, entonces $A \subset Int_X[cl_X(A)]$ y dado que $V_x \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X \setminus A$, entonces existe $y_x \in V_x \cap A$ lo cual implica que $y_x \in V_x$ y $y_x \in A$. Como $y_x \in A$, entonces $y_x \in Int_X[cl_X(A)]$ de donde se sigue que $U_{y_x} \subset cl_X(A)$ y dado que $y_x \in V_x$, entonces $x \in U_{y_x}$, lo cual implica que $x \in cl_X(A)$ por lo tanto existe $x_0 \in A$ tal que $x \in V_{x_0}$ de donde se sigue que $x_0 \in U_x$, es decir $x_0 \in U_x \cap A$. Por lo tanto $U_x \cap A \neq \emptyset$.

2) implica 1). Supongamos que A no es un conjunto preabierto, entonces existe $y \in A$ tal que $y \notin Int_X[cl_X(A)]$, es decir $y \in A$ y $U_y \not\subset cl_X(A)$ de donde se sigue que existe $y_0 \in U_y$ tal que $y_0 \notin cl_X(A)$, lo cual implica que para todo $z \notin A$, $z \geq y_0$. Por lo tanto $U_{y_0} \cap A = \emptyset$ y $\{y\} \subset V_{y_0} \cap A$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto A es un conjunto preabierto. $\square$

Corolario 5.7. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un conjunto precerrado.*

2. *Para toda $x \in A$, si $V_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, entonces $U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.*

3. *Para toda $x \in A$ si $U_x \subset A$, entonces $V_x \subset A$.*

Demostración. 1) si y sólo si 2). A es un conjunto precerrado si y sólo si $X \setminus A$ es un conjunto preabiero, y si aplicamos la Proposición 5.3, si y sólo si para todo $x \in A$ si $V_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, entonces $U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

2) si y sólo si 3). Para todo $x \in A$ si $V_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, entonces $U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ si y sólo si para todo $x \in A$, si $U_x \cap (X \setminus A) = \emptyset$, entonces $V_x \cap (X \setminus A) = \emptyset$ si sólo si para todo $x \in A$ si $U_x \subset A$, entonces $V_x \subset A$. $\square$

Teorema 5.8. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es semiabierto.*

2. *Para todo $x \in A$, existe $y \in A$ tal que $x \in V_y$ y $U_y \subset A$.*

Demostración. 1) implica 2). Sea A un conjunto semiabierto. Si $x \in A$, entonces $x \in cl_X[Int_X(A)]$ lo cual implica que existe $y \in Int_X(A)$ tal que $x \in V_y$, de donde se sigue que $x \in V_y$ y $U_y \subset A$.

2) implica 1). Supongamos que para todo $x \in A$ existe $y \in A$ tal que $x \in V_y$ y $U_y \subset A$. Si $x \in A$, entonces existe $y \in A$ tal que $x \in V_y$ y $U_y \subset A$, lo cual implica que $y \in Int_X(A)$ y como $x \in V_y$, entonces $x \in cl_X[Int_X(A)]$. Por lo tanto A es semicerrado. $\square$

Corolario 5.9. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un conjunto semicerrado.*

2. *Para todo $x \in X \setminus A$ existe $y \in X \setminus A$ tal que $x \in V_y$ y $U_y \subset X \setminus A$.*

Demostración. Sea $A \subset X$. A es un conjunto semicerrado si y sólo si $X \setminus A$ es un conjunto semiabierto si y sólo si para todo $x \in X \setminus A$ existe $y \in X \setminus A$ tal que $x \in V_y$ y $U_y \subset X \setminus A$. $\square$

Teorema 5.10. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un abierto regular.*

2. *Para todo $x \in X \setminus A$ existe $y \in X \setminus A$ tal que $x \in V_y$, $V_y \subset X \setminus A$ y $U_y \subset X \setminus A$.*

Demostración. 1) implica 2). Si A es un abierto regular, entonces A es un conjunto preabierto y semicerrado; por lo tanto, como A es un conjunto semicerrado, dado $x \in X \setminus A$ existe $y \in X \setminus A$ tal que $x \in V_y$ y $U_y \cap A = \emptyset$, y como A es un conjunto preabierto, entonces $U_y \cap A = \emptyset$ y $V_y \cap A = \emptyset$.

2) implica 1). Para todo $x \in X \setminus A$ existe $y \in X \setminus A$ tal que $x \in V_y$ y $U_y \subset X \setminus A$. Si suponemos que $A \neq Int_X[cl_X(A)]$, entonces

i) existe $a \in A \setminus Int_X[cl_X(A)]$ o

ii) existe $b \in Int_X[cl_X(A)] \setminus A$.

Analicemos cada uno de estos casos.

i) Si existe $a \in A \setminus Int_X[cl_X(A)]$, entonces $a \in A$ y $a \notin Int_X[cl_X(A)]$ lo cual implica que $U_a \not\subset cl_X(A)$ de donde se sigue que existe $c \in U_a$ tal que $c \notin cl_X(A)$. Como $c \notin cl_X(A)$ se sigue que $c \notin A$ lo cual implica que existe $y \in X \setminus A$ tal que

$$c \in V_y,\ U_y \cap A = \emptyset \text{ y } V_y \cap A = \emptyset.$$

Dado que $c \in U_a$ y $c \in V_y$, entonces $a \leq c \leq y$ lo cual implica que $a \in V_y$. Por lo tanto $a \notin A$ lo cual es una contradicción.

ii) Si existe $b \in Int_X[cl_X(A)] \setminus A$, entonces $b \in Int_X[cl_X(A)]$ y $b \notin A$, así que existe $y \in X \setminus A$ tal que

$$b \in V_y,\ U_y \cap A = \emptyset \text{ y } V_y \cap A = \emptyset.$$

Como $b \in Int_X[cl_X(A)]$, entonces $U_b \subset cl_X(A)$ y como $y \in U_b$, $y \in cl_X(A)$, de donde se sigue que existe $c \in A$ tal que $y \in V_c$, es decir $c \in U_y$ y así, $U_y \cap A \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto A es un abierto regular. □

Corolario 5.11. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es cerrado regular.*

2. *Para todo $x \in A$, existe $y \in A$, tal que $x \in V_y$, $U_y \subset A$ y $V_y \subset A$.*

6 Espacios de Alexandroff Artinianos

En esta sección se caracterizan los mismos conjuntos de la sección anterior pero en la clase de los espacios de Alexandroff Artinianos, clase que se define a continuación.

Definición 6.1. Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0, entonces diremos que

1. X satisface la condición de cadena ascendente (ACC) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_i \leq \cdots$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots$.

2. X satisface la condición de cadena descendente (DCC) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_i \geq \cdots$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots$.

Cuando el espacio (X, τ) satisfaga la ACC diremos que es un espacio de Alexandroff Artiniano y si satisface la DCC diremos que es un espacio de Alexandroff Noetheriano.

Sean (X, τ) un espacio de Alexandroff T_0 y $A \subset X$. Denotaremos con M el conjunto de elementos maximales de X, con m el conjunto de elementos minimales de X, con $M(A)$ el conjunto de elementos maximales de A y con $m(A)$ el conjunto de elementos minimales de A.

Es claro que si $x \in M$, entonces $U_x = \{x\}$; si $x \in m$, entonces $V_x = \{x\}$ y si x=máx X, entonces $V_x = X$.

Lema 6.2. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 Artiniano, M el conjunto de elementos maximales de X, entonces para todo $x \in (X \setminus M)$ existe $y \in M$ tal que $x \leq y$.*

Demostración. Sea $x \in (X \setminus M)$, como X es Artiniano existe $x_1 \in X$ tal que $x \leq x_1$, si $x_1 \in M$ terminamos; en caso contrario repetimos el proceso y, de esta manera, podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_i \leq \cdots$. Como X es Artiniano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots$, y bastará elegir a y como x_n. □

Teorema 6.3. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0 Artiniano y $A \subset X$, entonces*

1. *$Int_X(A) = \emptyset$ si y sólo si $A \cap M = \emptyset$.*

2. *$cl_X(A) = \bigcup\{V_x : x \in M(A)\}$.*

3. *A es denso si y sólo si $M \subset A$.*

4. *A es nada denso si y sólo si $M \cap A = \emptyset$.*

5. *Si $|M| = 1$, entonces A es denso o nada denso.*

Demostración. 1) Supongamos que $Int_X(A) = \emptyset$ y que existe $x \in A \cap M$, entonces $x \in A$ y $x \in M$ lo cual implica que $U_x = \{x\}$ de donde se sigue que $U_x \subset A$ y así, $Int_X(A) \neq \emptyset$ lo cual es una ontradicción.

Por lo tanto $A \cap M = \emptyset$.

Ahora supongamos que $A \cap M = \emptyset$ y que $Int_X(A) \neq \emptyset$, entonces existe $y \in Int_X(A)$ de donde se sigue que $U_y \subset A$ lo cual implica que $y \in A$ y como $A \cap M = \emptyset$ tenemos que $y \notin M$, entonces por el Lema 6.2 existe un elemento maximal $z \in X$ tal que $y \leq z$ lo que implica que $z \in U_y \subset A$ de donde se obtiene que $z \in A \cap M$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $Int_X(A) = \emptyset$.

2) Si $x \in A$, entonces por el Lema 6.2 existe un elemento maximal $y \in A$ tal que $x \leq y$ de donde se sigue que $V_x \subset V_y$ lo cual implica que

$$cl_X(A) = \bigcup\{V_x : x \in A\} \subset \bigcup\{V_x : x \in M(A)\} \subset cl_X(A).$$

3) Si $A \subset X$ es un conjunto denso y $x \in M$, entonces $U_x = \{x\}$ y $U_x \cap A \neq \emptyset$ lo cual implca que $x \in A$. Por lo tanto $M \subset A$. Ahora, si $M \subset A$, entonces $M(A) = M$ lo cual implica que

$$cl_X(A) = \bigcup\{V_x : x \in M(A)\} = \bigcup\{V_x : x \in M\} = X.$$

Por lo tanto M es denso en X.

4) Supongamos que A es un conjunto nada denso, entonces $Int_X[cl_X(A)] = \emptyset$, de donde se sigue que $M \cap cl_X(A) = \emptyset$ lo cual implica que $M \cap A = \emptyset$. Y si $M \cap A = \emptyset$, entonces $x \notin M(A)$ para todo $x \in M$, lo cual implica que $x \notin cl_X(A)$ para todo $x \in M$, de donde se sigue que $Int_X[cl_X(A)] = \emptyset$.

5) Se sigue de 3) y 4). □

Teorema 6.4. *Sea (X, τ) un espacio de Alexandroff T_0, Artiniano y $A \subset X$. Si A es un conjunto preabierto, entonces $M(A) \subset M$.*

Demostración. Sea $A \subset X$ un conjunto preabierto y $x \in M(A)$. Como X es Artiniano, por el Lema 6.2, existe $y \in M$ tal que $x \leq y$ lo que implica que $x = y$ o $x < y$. Si $x = y$, entonces $x \in M$.

Si $x < y$, como $x \in M(A)$, entonces $y \notin A$. Afirmamos que $y \notin cl_X(A)$ ya que en caso contrario, por el Teorema 6.3 inciso 2 se sigue que existe $z \in M(A)$ tal que $y \in V_z$ lo cual implica que $y \leq z$ con lo que se obtiene que $x < y \leq z$ y como $x, z \in M(A)$, entonces $x = z$ lo cual implica que $x = y$ lo cual no puede ser, por lo tanto $y \notin cl_X(A)$.

Como $y \notin cl_X(A)$, entonces $y \notin Int_X[cl_X(A)]$, pero $x \in A \subset Int_X[cl_X(A)]$ y como $x < y$, se tiene que $y \in U_x \subset Int_X[cl_X(A)]$ que es una contradicción, con lo cual concluimos que $x = y$.

Por lo tanto $M(A) \subset M$. □

Teorema 6.5. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0, Artiniano y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un conjunto precerrado.*

2. *Para todo $x \in A \cap M$, $V_x \subset A$.*

Demostración. 1) implica 2). Si A es un conjunto precerrado, entonces $A = F \cup (X \setminus D)$ con $F \subset X$ un conjunto cerrado y $D \subset X$ un conjunto denso, de donde aplicando el Teorema 6.3 inciso 3 se sigue que $M \subset D$. Ahora, si $x \in A \cap M$, entonces $x \in A$ y $x \in M$ lo cual implica que $x \in F \cup (X \setminus D)$ y $x \in D$ de donde se sigue que $x \in F$ y como F es un conjunto cerrado, entonces $V_x \subset F \subset A$.

2) implica 1). Si $x \in A \cap M$, entonces $V_x \subset A$ de donde se sigue que $\bigcup\{V_x : x \in A \cap M\} \subset A$.

Si

$$F = \bigcup\{V_x : x \in A \cap M\} \text{ y } X \setminus D = A \setminus F$$

es claro que $F \subset A$, F es un conjunto cerrado y que $M \cap (X \setminus D) = \emptyset$ lo cual implica que D es un conjunto denso y dado que $A = F \cup (X \setminus D)$, entonces A es un conjunto precerrado. □

Corolario 6.6. *Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff T_0, Artiniano y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un conjunto preabierto.*

2. *Para todo* $x \in (X \setminus A) \cap M$, $V_x \cap A = \emptyset$.

3. *Para toda* $x \in A$, $U_x \cap M \subset A$.

Demostración. 1) si y sólo si 2). A es un conjunto preabierto, si y sólo si $X \setminus A$ es un conjunto precerrado, si y sólo si $V_x \subset X \setminus A$ para todo $x \in (X \setminus A) \cap M$, si y sólo si $V_x \cap A = \emptyset$ para todo $x \in (X \setminus A) \cap M$.

2) implica 3). Supongamos que existe $x \in A$ tal que $U_x \cap M$ no esté contenido en A, entonces existe $y \in U_x \cap M$ y $y \notin A$ de donde se sigue que $y \in U_x$ y $y \in (X \setminus A) \cap M$ y esto impica que $x \in V_y$ y $y \in (X \setminus A) \cap M$, es decir $V_y \cap A \neq \emptyset$ con $y \in (X \setminus A) \cap M$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, para toda $x \in A$, $U_x \cap M \subset A$.

3) implica 2). Supongamos que existe $x \in (X \setminus A) \cap M$ tal que $V_x \cap A \neq \emptyset$, entonces existe $y \in V_x \cap A$. Como $y \in A$, entonces, por hipótesis, $U_y \cap M \subset A$ y dado que $y \in V_x$ se tiene que $x \in U_y$; de esta manera se obtiene que $x \in U_y \cap M$ y así, $x \in A$ que contradice el hecho de que $x \in (X \setminus A)$. Por lo tanto, para toda $x \in A$, $U_x \cap M \subset A$. □

Corolario 6.7. *Si* (X, τ) *es un espacio de Alexandroff* T_0*, Artiniano con* T=*máx* X *y* $A \subset X$*, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un conjunto preabierto.*

2. $T \in A$.

3. *A es un conjunto denso.*

Corolario 6.8. *Si* (X, τ) *es un espacio de Alexandroff* T_0*, Artiniano con* T=*máx* X *y* $A, B \subset X$*, entonces*

1. *Si A es un conjunto abierto, A es un conjunto denso.*

2. *Si* A, B *son conjuntos abiertos, entonces* $A \cap B \neq \emptyset$.

3. $V_T = X$.

Corolario 6.9. *Si* (X, τ) *es un espacio de Alexandroff* T_0 *y Artiniano con* T=*máx* X*, entonces* X *es un espacio conexo.*

Corolario 6.10. *Si* (X, τ) *es un espacio de Alexandroff* T_0 *y Artiniano con* L=*mín* X*, entonces* $U_L = X$.

Teorema 6.11. *Si (X,τ) es un espacio de Alexandroff T_0, Artiniano y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un conjunto semiabierto.*

2. *$M(A) \subset M$.*

Demostración. 1) implica 2). Si A es un conjunto semiabierto, entonces para todo $x \in A$ existe $y \in A$ tal que $x \in V_y$ y $U_y \subset A$.

Si suponemos que $M(A)$ no está contenido en M, entonces existe $x_0 \in A$ maximal tal que $x_0 \notin M$. Como $x_0 \in A$, existe $y \in A$ tal que $x_0 \in V_y$ y $U_y \subset A$, lo cual implica que $U_{x_0} \subset A$, pero $x_0 \notin M$ así que existe $z \in X$ tal que $z \in U_{x_0}$ y $z \notin A$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $M(A) \subset M$.

2) implica 1). Es inmediato. □

Corolario 6.12. *Si (X,τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y Artiniano, entonces todo conjunto preabierto es un conjunto semiabierto.*

Corolario 6.13. *Si (X,τ) es un espacio de Alexandroff T_0, Artiniano y $A \subset X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *A es un conjunto preabierto.*

2. *A es un conjunto α-abierto.*

Lema 6.14. *Si (X,τ) es un espacio de Alexandroff T_0, Artiniano y $D_1, D_2 \subset X$ son conjuntos densos, entonces $D_1 \cap D_2$ es un conjunto denso.*

Demostración. Si D_1, D_2 son conjuntos densos, entonces $M \subset D_1$ y $M \subset D_2$ lo cual implica que $M \subset D_1 \cap D_2$. Por lo tanto $D_1 \cap D_2$ es un conjunto denso. □

Teorema 6.15. *Si (X,τ) es un espacio de Alexandroff T_0 y Artiniano, entonces $PO(X,\tau)$ es una topología.*

Demostración. Se sigue del Teorema 5.4 y el Lema 6.14. □

Agradecimientos

Los autores agradecen al árbitro la minuciosa revisión que hizo de este capítulo. Sus comentarios y sugerencias enriquecieron de manera sustancial la primera versión de este capítulo. Por supuesto que cualquier error u omisión que aún permanezca, aunque sea involuntaria, es exclusiva responsabilidad de los autores.

Bibliografía

[1] P. S. Alexandroff, *Diskrete Raüme*, Mat. Sb. (N.S.) 2 (1937), 501-518.

[2] F. G. Arenas, *Alexandroff spaces*, Acta Univ. Comenianae, vol. LXVIII, 1 (1999), 17-25.

[3] J. Dontchev, *Survey on preopen sets*, The Proceedings of the Yatsushiro Topological Conference (1988), 1-18.

[4] M. S. Elatrash and H. B. Mahdi, *On Artinian T_0 Alexandroff spaces*, Journal of the Islamic University 13 2 (2005), 33-36.

[5] M. S. Elatrash and S. F. Alsamak, *Preopen and semi-open in T_0-Alexandroff space*, M. Elatrash et al., J. Al- Aqsa Unv 10(SE) (2006), 396-414.

[6] R. Engelking, *General topology*, Heldermann, Sigma series in pure mathematics, vol 6, 1989.

[7] M. Ganster, *Preopen sets and resolvable spaces*, Kyungpook Math. J. 27 2 (1987), 135-143.

[8] P. Gnanachandra, S. Jafari and L. Thingar, *Topological properties of the digital line*, Fundamental Journal of Math. and Appl. 3 (2020), 25-28.

[9] E. Khalymsky, R. Kopperman and P. Meyer, *Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets*, Topology and its and Appl. 36 (1990), 1-17.

[10] R. Kopperman, P. Meyer and R. Wilson, *A Jordan surface theorem for three-dimensional digital spaces*, Discrete and Comp. Geometry 6 (1991), 155-161.

[11] N. Levine, *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, 70 (1963), 36-41.

[12] H. B. Mahdi and M. S. Elatrash, *On T_0-Alexandroff spaces*, Journal of the Islamic University, vol. 13, 2 (2005), 19-46.

[13] H. Mahdi and M. S. Elatrash, *Characterization of Lower Separation Axioms in T_0 Alexandroff Spaces*, First Conference on Mathematical Sciences, Zarqa Private University Jordan (2006), 77-89.

[14] H. Mahdi and L. Elostah, *On uppper bounded T_0 Alexandroff Spaces*, Int. J.Contemp. Math . Sciences 9 (2014), 361-364.

[15] H. Mahdi and A. El Mabhouh, *Dimension and Continuity on T_0 Alexandroff Spaces*, International Mathematical Forum 5 (2010), 1131-1140.

[16] H. Mahdi and A. El Mabhouh, *Betwen Scott and Alexandroff Topology*, Journal of Islamic University 19 (2011), 47-56.

[17] N. Mariappan and M. Lellis Thivagar, *Some Separation Properties of the Digital Line*, International Journal of Computer Appl., 64 (10), (2013), 39-41.

[18] H. Othman- H. Mahdi, *Alexandroff Lattice Spaces*, Pure Mathematical Sciences 6 (2017), 1-10.

[19] A. Rosenfeld, ed., *Digital Picture Analysis*, Springer, Berlin, 1976.

[20] A. Rosenfeld, *Digital topology*, Amer. Math. Monthly, 86 (1979), 621-630.

[21] I. L. Reilly and M. K. Vamanamurthy, *On some questions concerning preopen sets*, Kyungpook Math. J. 3 (1990), 87-93.

[22] D. Rose, G. Scible and D. Walsh, *Research article Alexandroff Spaces*, Journal of Advances Studies in Topology 24 (2012), 41-43.

[23] F. Ségonne and B. Fischl, *Integration of topological constraints in medical image segmentation* in Biomedical Image Analysis: Methodologies and Applications (2007). Recuperado en http://florent.segonne.free.fr/research/papers/07itcmiss.pdf

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

mibarra@fcfm.buap.mx
maga@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 17, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-765-5

Capítulo 2

Hiperespacios vía propiedades relativas

Jesús Díaz-Reyes[1], Jesús Fernando Tenorio Arvide[2]

Instituto de Física y Matemáticas,
Universidad Tecnológica de la Mixteca

Resumen

En este capítulo exponemos algunos hechos interesantes del estudio de propiedades topológicas relativas en hiperespacios. Específicamente, abordamos el análisis del siguiente problema general:
Dados un espacio topológico X y Y un subconjunto de X, analizar las posibles relaciones entre las siguientes proposiciones:

1. Y^+ tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en $\mathrm{CL}(X)$;

2. Y tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en X,

donde $\mathcal{R}$ es una propiedad topológica relativa.
Consideramos los casos cuando $\mathcal{R}$ corresponde a las propiedades relativas que se desprenden tanto de los axiomas de separación T_1, T_2, T_3 y T_4, así como de la noción de compacidad.

1 Introducción

En [4], A. V. Arhangel'skii y H. M. M. Genedi introducen la teoría de propiedades topológicas relativas, donde fueron definidos varios tipos de propiedades relativas de los axiomas de separación y de la noción de compacidad. Una exposición sumaria de este tema puede encontrarse en [3]. Esta teoría es una

[1]Beneficiario del proyecto "Apoyos posdoctorales en Cuerpos Académicos Consolidados y En Consolidación" de PRODEP, Oficio Núm. 511-6/2020-2909, correspondiente a la estancia posdoctoral realizada de mayo de 2020 a abril de 2021.

[2]Autor para correspondiencia.

rama importante de investigación en topología, entre otras aplicaciones, ayuda a saber cómo está localizado un espacio Y en un superespacio X. Una propiedad topológica relativa se define para un espacio topológico X y un subespacio $Y \subseteq X$, y a grandes rasgos, es aquella que generaliza una propiedad global del espacio en el siguiente sentido: cuando Y coincide con X, entonces la propiedad relativa debe ser la misma que la global. Por ejemplo, una propiedad relativa de compacidad es la siguiente: dado un espacio topológico X y un subespacio Y de X, decimos que Y es *compacto en* X si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita para Y. Note que si $Y = X$, entonces lo que describe la propiedad relativa es que X es compacto. Una propiedad relativa más de la compacidad es como sigue: se dice que Y es *internamente compacto en* X si dado un subconjunto $Z \subseteq Y$ cerrado en X, se tiene que Z es un espacio compacto. Nuevamente, si $Y = X$, entonces se está hablando de la propiedad de compacidad de X. Por lo anterior, distinguimos que de una propiedad topológica, se pueden desprender una o más propiedades relativas. Otra aplicación de las propiedades relativas es que con ellas podemos generalizar resultados de una manera natural. Por ejemplo, el Teorema de Tychonoff establece que el producto $\Pi_{s\in S}X_s$ es compacto si y solo si cada X_s es compacto. Una generalización podría ser la siguiente: $\Pi_{s\in S}Y_s$ es compacto en $\Pi_{s\in S}X_s$ si y solo si cada subespacio Y_s es compacto en X_s. Este segundo tipo de aplicación es en el que nos enfocamos en el presente trabajo.

Por otra parte, la teoría de hiperespacios se ha convertido en una rama de la topología bastante fructífera en cuanto a sus aportes dentro de la misma topología como en otras áreas. Recordemos que un hiperespacio de un espacio topológico X es una colección de subconjuntos de X considerada con alguna topología. La teoría de los hiperespacios tiene sus orígenes alrededor de 1900, con los trabajos de F. Hausdorff [8] y L. Vietoris [11]. Dado un espacio topológico X, dentro de los hiperespacios más conocidos tenemos el hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ que consiste de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados en X. Este hiperespacio ha sido estudiado y considerado con varias topologías. Sin embargo, en este trabajo, únicamente lo tomamos con la topología de Vietoris, pues es la topología más estudiada en los hiperespacios y resulta de mayor interés para un público más amplio. Más aún, el uso de la topología de Vietoris ha permitido desarrollar grande aportes en la resolución del siguiente problema clásico en hiperespacios.

Problema 1.1. Dado un espacio topológico X, estudiar las posibles relaciones entre las siguiente proposiciones:

1. $\mathrm{CL}(X)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$;

2. X tiene la propiedad $\mathcal{P}$,

para alguna propiedad topológica $\mathcal{P}$.

Un camino natural para la investigación es atacar el Problema 1.1 vía propiedades topológicas relativas. Precisamente, atender el siguiente problema.

Problema 1.2. Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Analizar las posibles relaciones entre las siguientes proposiciones:

1. $H(Y)$ tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en $\mathrm{CL}(X)$;

2. Y tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en X,

donde $\mathcal{R}$ es alguna propiedad topológica relativa y $H(Y)$ es un subespacio de $\mathrm{CL}(X)$.

Claramente, el Problema 1.2 es mucho más general que el Problema 1.1. De esta forma, usando propiedades relativas se podrían generalizar resultados clásicos que se conocen y que se resuelven en el Problema 1.1, con propiedades globales. Un primer estudio de este tópico donde se atiende el Problema 1.2 se encuentra [6]. Ahí, al hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ se le dota de la topología denominada "hit and miss" y $H(Y)$ es considerado como el conjunto de los elementos en $\mathrm{CL}(X)$ contenidos en Y. En el presente trabajo, con el objetivo de ilustrar algunas soluciones del Problema 1.2, exponemos los resultados relevantes de [6], considerando el hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ con la topología de Vietoris, con la finalidad de hacerlos accesibles para un público amplio. Además, en la medida de lo posible, hacemos una exposición detallada, pensando en que incluso los estudiantes de matemáticas que hayan asistido a un curso básico de topología, logren captar la esencia general de esta teoría. En la Sección 2 establecemos la teoría preliminar que utilizamos en toda la exposición. Ahí es donde recordamos las definiciones de los axiomas de separación T_1, T_2, T_3 y T_4, así como el concepto de compacidad. De igual modo, describimos los hechos fundamentales de los hiperespacios y terminamos presentando algunas versiones relativas de los axiomas de separación mencionados y de la compacidad. La Sección 3 está dedicada a la exposición de los resultados principales, es decir, el estudio del Problema 1.2, con las versiones relativas de los axiomas de separación y de la compacidad. Concluimos la sección y todo el trabajo brindando al lector una serie de preguntas abiertas que hacen aún más interesante el estudio de las propiedades relativas en hiperespacios y que muestran los posibles caminos que se pueden seguir en la investigación de esta rama de la topología.

2 Preliminares

En esta sección presentamos, por completitud del capítulo, algunos hechos generales conocidos. La notación que empleamos es la estándar de la matemática actual. Para las notaciones y definiciones no establecidas en esta sección, por ejemplo, lo referente a las nociones básicas de la topología general: base y subbase para un espacio, vecindades, topología de subespacios, cerradura de un conjunto, subconjuntos cerrados, subconjuntos abiertos, puntos aislados, cubiertas abiertas, entre otras, el lector puede consultar [7].

Definiciones básicas

Entre las topologías con las que se puede dotar un conjunto no vacío X, están aquellas que adicionalmente cumplen ciertas propiedades que ayudan a determinar cuándo es posible separar, mediante subconjuntos abiertos, ciertos subconjuntos ajenos de X. Estas propiedades actualmente se les llama axiomas de separación. A continuación, mencionamos aquellos axiomas que juegan un rol importante en este trabajo.

Definición 2.1. Se dice que un espacio topológico X es:

1. T_1 si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existe un subconjunto abierto U en X tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$.

2. T_2 o *Hausdorff* si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

3. T_3 o *regular* si X es T_1 y para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F en X tal que $x \notin F$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $x \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

4. T_4 o *normal* si X es T_1 y para cada par de subconjuntos cerrados y ajenos A, B en X, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Existen caracterizaciones de los axiomas de separación que a menudo son empleadas en la resolución de problemas en topología.

Observación 2.2. Sea X un espacio topológico. Se cumple lo siguiente:

1. X es T_1 si y solo si para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X.

2. X es regular si y solo si para cada $x \in X$ y cada subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

3. X es normal si y solo si para cada subconjunto cerrado F en X y cada subconjunto abierto U en X que contenga a F, existe un subconjunto abierto V en X tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Otro concepto fundamental que empleamos aquí es el de compacidad. Noción importante dentro de la topología y, por su utilidad, en algunas otras áreas de la matemática.

Definición 2.3. Se dice que un espacio topológico Hausdorff X es *compacto* si toda cubierta abierta de X contiene una subcubierta finita para X.

Hiperespacios

Por otra parte, se sabe que una rama de la topología que ha sido bastante desarrollada es la teoría de los hiperespacios. Uno de los primeros hiperespacios que se definieron para un espacio topológico X fue el de los subconjuntos cerrados y no vacíos en X, el cual denotamos por $\mathrm{CL}(X)$. Formalmente, la familia

$$\mathrm{CL}(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

es considerada con la topología de Vietoris, la cual denotamos por τ_V. Si bien existen otras topologías que se le pueden dar a la familia $\mathrm{CL}(X)$, en este trabajo solo consideramos la de Vietoris. Una forma de definir esta topología es como sigue. Considere un espacio topológico (X, τ). Dada una cantidad finita $A_1, \ldots, A_n$ de subconjuntos de X, se define el subconjunto $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ de $\mathrm{CL}(X)$ como:

$$\left\{ F \in \mathrm{CL}(X) : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ y } F \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Una base para la topología de Vietoris de $\mathrm{CL}(X)$ es la familia:

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \in \tau, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Por otro lado, puesto que en algunas ocasiones es conveniente trabajar con una subbase de una topología, recordemos que la familia

$$\mathcal{S} = \{\langle U \rangle : U \in \tau\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \tau\}$$

es una subbase para τ_V. Una demostración de que $\mathcal{B}_V$ es una base y $\mathcal{S}$ es una subbase para τ_V se puede consultar en [9, Teorema 1.2].

Conviene tener en cuenta la siguiente notación que es muy utilizada en hiperespacios. Dado un espacio topológico X y $U \subseteq X$, ponemos:

$$U^- = \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \cap U \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad U^+ = \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \subseteq U\}.$$

Puesto que $\langle U \rangle = U^+$ y $\langle X, U \rangle = U^-$, la subbase para la topología de Vietoris, se puede escribir como

$$\mathcal{S} = \{U^+ : U \in \tau\} \cup \{U^- : U \in \tau\}.$$

Un hecho ampliamente conocido, por lo que omitimos su demostración, es la siguiente relación que se tiene entre la cerradura de un subconjunto abierto básico en $\mathrm{CL}(X)$ con la cerradura en el espacio X (vea [10, Lema 2.3.2]).

Lema 2.4. *Sean X un espacio topológico T_1 y $n \in \mathbb{N}$. Si $U_1, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos en X, entonces $\overline{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle} = \langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \rangle$.*

Por otro lado, cabe señalar que la topología de Vietoris permite que las propiedades topológicas de un espacio X y la de su hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$ interactúen entre sí, como se puede observar en el teorema siguiente, resultado de E. Michael importantísimo en la teoría de los hiperespacios.

Teorema 2.5. *([10, Teorema 4.9]) Sea X un espacio topológico. Se cumple lo siguiente:*

(1) Si X es T_1, entonces $\mathrm{CL}(X)$ *es T_1.*

(2) X es regular si y solo si $\mathrm{CL}(X)$ *es Hausdorff.*

(3) X es normal si y solo si $\mathrm{CL}(X)$ *es regular.*

(4) X es compacto si y solo si $\mathrm{CL}(X)$ *es compacto.*

Propiedades topológicas relativas

Ahora, presentamos lo concerniente a propiedades topológicas relativas. En vista de los objetivos del trabajo, solamente nos enfocamos en tener presentes las nociones que requerimos. Salvo que se especifique lo contrario, en todo lo que resta del escrito tomamos X como un espacio topológico T_1 y Y siempre es un subespacio no vacío de X. Comenzamos con lo referente a los axiomas relativos de separación y después presentamos algunas propiedades relativas de compacidad. En su mayoría, estos conceptos fueron ampliamente estudiados por Arhangel'skii y H. M. M. Genedi en [4], artículo publicado en ruso. El lector interesado en conocer de su contenido, puede consultar [3].

En los diagramas que presentamos, establecemos las relaciones que guardan las nociones correspondientes a alguna definición, donde las flechas significan inclusión de clases y ninguna de éstas es reversible. Para los intereses del escrito, dividimos en tres partes los distintos tipos de axiomas de separación. Comenzamos con los siguientes, los cuales fueron tomados de [3, p.88 y 89]. El lector puede observar que en cualquiera de las siguientes definiciones, cuando $Y = X$, las versiones relativas indicadas coinciden efectivamente con la propiedad global de la cual provienen.

Definición 2.6. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es *T_1 en X* si para cada punto $y \in Y$ el subconjunto $\{y\}$ es cerrado en X (aquí, X no necesariamente T_1).

(b) Y es *Hausdorff en X*, si para cualquier par de puntos diferentes $y_1, y_2 \in Y$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(c) Y es *fuertemente Hausdorff en* X, si cualquier par de puntos diferentes $y_1 \in Y$ y $y_2 \in X$, existen subconjuntos abiertos U, V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

En el diagrama de la Figura 1 establecemos las relaciones que guardan las nociones en la Definición 2.6.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es fuertemente} \\ \text{Hausdorff en } X \end{array}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} Y \text{ es Hausdorff} \\ \text{en } X \end{array}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{Y \text{ es } T_1 \text{ en } X} \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{Y \text{ es Hausdorff}} \\
\boxed{Y \text{ es } T_1} &
\end{tikzcd}
$$

Figura 1

Formalmente, las implicaciones quedan establecidas en el siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se cumple lo siguiente:*

(a) Si Y es fuertemente Hausdorff en X, entonces Y es Hausdorff en X y Y es T_1 en X.

(b) Si Y es T_1 en X, entonces Y es un espacio T_1.

(c) Si Y es Hausdorff en X, entonces Y es un espacio Hausdorff.

Demostración. (a) Supongamos que Y es fuertemente Hausdorff en X. Es inmediato que Y es Hausdorff en X. Demostremos que Y es un espacio T_1 en X. Sea $y \in Y$, verifiquemos que $X \setminus \{y\}$ es un conjunto cerrado en X, para ello, elijamos $x \in X \setminus \{y\}$. Dado que $y \in Y$, $x \in X$ y $x \neq y$, por hipótesis, existen subconjuntos ajenos y abiertos U y V en X tales que $y \in U$ y $x \in V$.

Se cumple que $x \in V \subseteq X \setminus \{y\}$. Se concluye que $\{y\}$ es un subconjunto cerrado de X.

(b) Supongamos que Y es T_1 en X. Sea $y \in Y$. De la hipótesis, $\{y\}$ es un subconjunto cerrado en X. Por lo tanto, $\{y\} \cap Y = \{y\}$ es un conjunto cerrado en Y.

(c) Supongamos que Y es Hausdorff en X. Sean $y_1, y_2 \in Y$ puntos diferentes. Por hipótesis, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Claramente, $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son subconjuntos ajenos y abiertos en Y con $y_1 \in U \cap Y$ y $y_2 \in U \cap Y$. □

A continuación, presentamos versiones relativas del axioma de regularidad, de las cuales, regular, superregular y fuertemente regular se encuentran en [3, p.89]. El concepto de internamente regular es tomado de [5].

Definición 2.8. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es *superregular en* X, si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto cerrado F en X tal que $y \notin F$, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V en X, tales que $y \in U$ y $F \subseteq V$.

(b) Y es *internamente regular en* X, si para cada $y \in Y$ y cada subconjunto F de Y cerrado en X tal que $y \notin F$, existen dos subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $y \in U$ y $F \subseteq V$.

(c) Y es *regular en* X, si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto cerrado F en X tal que $y \notin F$, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$.

(d) Y es *fuertemente regular en* X, si para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F en X tales que $x \notin F$, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $x \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$.

En el diagrama de la Figura 2 establecemos las relaciones que guardan las nociones en la Definición 2.8.

De manera explícita, para comodidad de los lectores, damos las demostraciones de las implicaciones indicadas.

Proposición 2.9. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se cumple lo siguiente:*

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Y es fuertemente regular en X}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{Y es regular en X}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \boxed{\text{Y es internamente regular en X}} \\
& \boxed{\text{Y es superregular en X}} \arrow[u, Rightarrow] & \boxed{\text{Y es regular}}
\end{tikzcd}
$$

Figura 2

(a) *Si Y es fuertemente regular en X, entonces Y es regular en X.*

(b) *Si Y es regular en X, entonces Y es internamente regular en X y Y es un espacio regular.*

(c) *Si Y es superregular en X, entonces Y es regular en X.*

Demostración. En vista de que las demostraciones de (a) y (c) son inmediatas, las omitimos.

(b) Supongamos que Y es regular en X.

Afirmación 1: Y es internamente regular en X.

En efecto, sean $y \in Y$ y F un subconjunto de Y cerrado en X tales que $y \notin F$. Por hipótesis, existen dos subconjuntos ajenos y abiertos U y V en X tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$. Dado que $F \subseteq Y$, se tiene que $F \cap Y = F$. Así, $y \in U$ y $F \subseteq V$.

Afirmación 2: Y es un espacio regular.

En efecto, sean $y \in Y$ y F un subconjunto cerrado en Y tales que $y \notin F$. Luego, existe un subconjunto cerrado F^* en X tal que $F^* \cap Y = F$. Note que $y \notin F^*$. Por hipótesis, existen dos subconjuntos ajenos y abiertos U y V en X tales que $y \in U$ y $F = F^* \cap Y \subseteq V$. Claramente, $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son conjuntos abiertos en Y tales que $y \in U \cap Y$, $F \subseteq V \cap Y$ y $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. $\square$

Veamos ahora algunas versiones relativas de la normalidad, de las cuales fuertemente normal, normalidad relativa y cercanamente normal, se tomaron de [3, p. 89]; internamente normal, se obtuvo de [2, p. 28] y supernormal, se seleccionó de [6, Definición 2].

Definición 2.10. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es *fuertemente normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados y ajenos A y B en Y, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(b) Y es *normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \cap Y \subseteq U$, $B \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(c) Y es *cercanamente normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X, existen subconjuntos U y V abiertos en Y tales que $A \cap Y \subseteq U$, $B \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(d) Y es *internamente normal en* X, si para cada par de subconjuntos cerrados ajenos A y B en X contenidos en Y, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(e) Y es *supernormal en* X, si para cada dos subconjuntos cerrados ajenos A y B en X con $A \subseteq Y$, existen subconjuntos U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Las relaciones que guardan los conceptos en la Definición 2.10, se resumen en el diagrama de la Figura 3.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Y es fuertemente normal en X}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{Y es normal en X}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{Y es internamente normal en X}} \\
\boxed{\text{Y es normal}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{Y es cercanamente normal en X}} & \boxed{\text{Y es supernormal en X}} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Figura 3

Las implicaciones del diagrama de la Figura 3 quedan establecidas en el siguiente resultado.

Proposición 2.11. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se cumple lo siguiente:*

(a) Si Y es fuertemente normal en X, entonces Y es normal en X y Y es un espacio normal.

(b) Si Y es normal en X, entonces Y es internamente normal en X y Y es cercanamente normal en X.

(c) Si Y es un espacio normal, entonces Y es cercanamente normal en X.

(d) Si Y es supernormal en X, entonces Y es internamente normal en X.

Demostración. (a) Supongamos que Y es fuertemente normal en X.
Afirmación 1: Y es normal en X.

En efecto, sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en X. Es evidente que $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son subconjuntos ajenos y cerrados en Y. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$.
Afirmación 2: Y es un espacio normal.

En efecto, sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en Y. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Claramente, $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son conjuntos ajenos y abiertos en Y tales que $A \subseteq U \cap Y$ y $B \subseteq V \cap Y$.

(b) Supongamos que Y es normal en X.
Afirmación 1: Y es internamente normal en X.

En efecto, sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en X contenidos en Y. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$. Como $A \cap Y = A$ y $B \cap Y = B$, se concluye que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.
Afirmación 2: Y es cercanamente normal en X.

En efecto, sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en X. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$. Claramente, $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son conjuntos ajenos y abiertos en Y tales que $A \cap Y \subseteq U \cap Y$ y $A \cap Y \subseteq V \cap Y$.

(c) Supongamos que Y es un espacio normal. Sean A y B un subconjuntos ajenos y cerrados en X. Se sigue que $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son subconjuntos ajenos y cerrados en Y. Por hipótesis, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en Y tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $A \cap Y \subseteq V$.

Las demostración de (d) es inmediata. □

Finalmente, respecto a propiedades topológicas relativas, en la Definición 2.12, recordamos dos versiones relativas de compacidad. La noción de compacto en X la tomamos de [3, p. 95]. A su vez, de fecha más reciente, la de internamente compacto en X, fue introducida en [2, p. 35].

Definición 2.12. Sean X un espacio topológico Hausdorff y Y un subespacio de X. Se dice que:

(a) Y es *compacto en* X si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita para Y.

(b) Y es *internamente compacto en* X si para cada subconjunto $Z \subseteq Y$ el cual es cerrado en X, se tiene que Z es un espacio compacto.

Los conceptos de la Definición 2.12 se comportan como lo muestra el diagrama de la Figura 4.

$$\boxed{\text{Y es compacto}} \Longrightarrow \boxed{\text{Y es compacto en X}} \Longrightarrow \boxed{\text{Y es internamente compacto en X}}$$

Figura 4

Las implicaciones del diagrama de la Figura 4 quedan establecidas en la siguiente proposición.

Proposición 2.13. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Se cumple lo siguiente:*

(a) Si Y es un espacio compacto, entonces Y es compacto en X.

(b) Si Y es compacto en X, entonces Y es internamente compacto en X.

Demostración. (a) Supongamos que Y es un espacio compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Claramente, $\mathcal{U}^* = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de Y. Por hipótesis, existen $U_1, \ldots, U_n$ tales que $Y = (U_1 \cap Y) \cup \cdots \cup (U_n \cap Y)$. Se tiene que, $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ para Y.

(b) Sea $Z \subseteq Y$ cerrado en X. Como Y es compacto en X y $Z \subseteq Y$, se sigue que Z es compacto en X.

Afirmación: Z es un espacio compacto.

En efecto, sea $\mathcal{U}^*$ una cubierta abierta para Z. Para cada $U^* \in \mathcal{U}^*$, existe un conjunto abierto U en X tal que $U \cap Y = U^*$. Puesto que Z es un subconjunto cerrado en X, se sigue que $\mathcal{U} = \{U : U^* \in \mathcal{U}^*\} \cup \{X \setminus Z\}$ es una cubierta abierta para X. Como Z es compacto en X, existe $\{U_1, \ldots, U_n\}$ subcubierta finita de $\mathcal{U}$ para Z. Claramente, $\{U_1^*, \ldots, U_n^*\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}^*$ para Z. $\square$

3 Propiedades relativas en $\mathrm{CL}(X)$

En [1], Arhangel'skii logra generalizar resultados de invariantes cardinales empleando la teoría de propiedades topológicas relativas. En dicho artículo propone aplicar esta misma idea a la teoría de hiperespacios analizando el subespacio $\mathcal{F}(Y, X)$ de $\mathrm{CL}(X)$ con la topología de Vietoris, donde Y es un subconjunto de X y $\mathcal{F}(Y, X)$ denota el conjunto de elementos en $\mathrm{CL}(X)$ que están contenidos en Y [1, Problema 2]. En otras palabras, Arhangel'skii propone realizar un estudio del Problema 1.2 cuando $H(Y) = \mathcal{F}(Y, X)$. En vista de la notación que establecimos en la Sección 2, el lector puede distinguir que la familia $\mathcal{F}(Y, X)$ es precisamente $\langle Y \rangle$ o bien Y^+. Los autores preferimos utilizar esta última notación, que es la empleada en [6], para distinguir el subespacio $\mathcal{F}(Y, X)$. De esta forma, el Problema 1.2, se plantea como sigue.

Problema 3.1. Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Analizar las posibles relaciones entre las siguientes proposiciones:

1. Y^+ tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en $\mathrm{CL}(X)$;

2. Y tiene la propiedad $\mathcal{R}$ en X,

donde $\mathcal{R}$ es alguna propiedad topológica relativa.

En este trabajo, centramos nuestra atención en el estudio del Problema 3.1, cuando la propiedad topológica relativa $\mathcal{R}$ corresponde a las versiones relativas de los axiomas de separación y a las de compacidad que hemos establecido en las Definiciones 2.6-2.12. Para este estudio hemos considerado, principalmente como eje central, exponer versiones relativas de los enunciados del Teorema 2.5. Cabe señalar que estos resultados presentados, son una generalización de lo establecido en el Teorema 2.5, cuando Y coincide con X.

Comenzamos con una versión relativa del enunciado (1) en el Teorema 2.5.

Teorema 3.2. *Sean X un espacio topológico (no necesariamente T_1) y Y un subconjunto de X. Si Y es un espacio T_1, entonces Y^+ es T_1 en $\mathrm{CL}(X)$.*

Demostración. Para ver que Y^+ es T_1 en $\mathrm{CL}(X)$, fije cualquier punto $A \in Y^+$. Mostremos que $\mathrm{CL}(X) \setminus \{A\}$ es un subconjunto abierto en $\mathrm{CL}(X)$. Sea $C \in \mathrm{CL}(X) \setminus \{A\}$. Puesto que $C \neq A$, tenemos dos casos:

Caso 1. Existe $c \in C \setminus A$. En este caso, consideremos el subconjunto abierto $\langle X, X\setminus A\rangle$ en $\mathrm{CL}(X)$. Claramente, $C \in \langle X, X\setminus A\rangle$ y $\langle X, X\setminus A\rangle \subseteq \mathrm{CL}(X)\setminus\{A\}$.
Caso 2. Existe $a \in A \setminus C$. Por hipótesis, $\{a\}$ es un subconjunto cerrado en Y y A es un subconjunto cerrado en X. Así, como $\{a\} = \{a\} \cap A$, se tiene que $\{a\}$ es un subconjunto cerrado en X. Luego, $\langle X \setminus \{a\}\rangle$ es un subconjunto abierto en $CL(X)$; además, $C \in \langle X \setminus \{a\}\rangle$ y $\langle X \setminus \{a\}\rangle \subseteq \mathrm{CL}(X) \setminus \{A\}$. Con todo, $\mathrm{CL}(X) \setminus \{A\}$ es un subconjunto abierto en $\mathrm{CL}(X)$. □

Corolario 3.3. *(Teorema 2.5-(1)) Sea X un espacio topológico. Se cumple que si X es T_1, entonces $\mathrm{CL}(X)$ es T_1.*

Del diagrama de la Figura 1 es inmediato el siguiente corolario, que corresponde a la Proposición 3.1 en [6].

Corolario 3.4. *Sean X un espacio topológico (no necesariamente T_1) y Y un subconjunto de X. Si Y es T_1 en X, entonces Y^+ es T_1 en $\mathrm{CL}(X)$.*

El ejemplo siguiente muestra que el recíproco del Teorema 3.2 y el recíproco del Corolario 3.4 no son verdaderos.

Ejemplo 3.5. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$. Consideremos el espacio topológico (X, τ) y el subespacio $Y = \{a, b, c\}$ de X. Claramente, Y no es un espacio T_1, y por el diagrama de la Figura 1, Y no es T_1 en X.

Por otra parte, se tiene que $\mathrm{CL}(X) = \{X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ y $Y^+ = \{\{a, b\}\}$. Ahora, como $\mathrm{CL}(X) \setminus \{\{a, b\}\} = \langle X, \{c, d\}\rangle$, tenemos que $\{\{a, b\}\}$ es un subconjunto cerrado en $\mathrm{CL}(X)$. De donde, Y^+ es T_1 en $\mathrm{CL}(X)$.

En lo que concierne a la obtención de una versión relativa del enunciado (2) del Teorema 2.5, note que es necesario considerar varias situaciones, ya que contamos con dos versiones relativas para el axioma de separación Hausdorff y tres versiones relativas para el axioma de regularidad. Hasta el momento, solo se conoce la siguiente equivalencia.

Teorema 3.6. *([6, Teorema 3.2]) Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Se cumple que Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$ si y solo si Y es internamente regular en X.*

Demostración. Supongamos que Y^+ es fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$ y Y no es internamente regular en X, esto es, podemos encontrar un subconjunto F de Y que es cerrado en X y un punto $y \in Y$ con $y \notin F$, tales que F y y no pueden estar separados por subconjuntos abiertos y ajenos en X. Note que F y $F \cup \{y\}$ son elementos diferentes de Y^+, así podemos encontrar dos subconjuntos abiertos básicos y ajenos en $\mathrm{CL}(X)$, $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$, tales que $F \in \mathcal{U}$ y $F \cup \{y\} \in \mathcal{V}$. Sea $J = \{j \in \{1, \ldots, m\} : y \in V_j\}$ y $J' = \{j \in \{1, \ldots, m\} : y \notin V_j\}$, denotamos

$$H = \bigcap \{V_j : j \in J\};$$

dado que $y \in H$ y $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, existe un punto $z \in (\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap H$. Ahora, el conjunto

$$\{z, u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{v_j : j \in J'\},$$

donde $u_i \in F \cap U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $v_j \in F \cap V_j$ para $j \in J'$, pertenece a $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, lo cual es una contradicción. De aquí, Y es internamente regular en X.

Recíprocamente, supongamos que Y es regular en X. Sean A y B dos puntos de Y^+ tales que $A \neq B$. Sin perder generalidad, supongamos que existe $a \in A \setminus B$. Note que $a \in Y$ y B es un subconjunto de Y que es cerrado en X y $a \notin B$. Como Y es internamente regular en X, existen dos subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $a \in U$ y $B \subseteq V$. Es claro que $A \in \langle X, U \rangle$ y $B \in \langle V \rangle$, más aún, $\langle X, U \rangle \cap \langle V \rangle = \emptyset$. Por lo tanto Y^+ es Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$. $\square$

Corolario 3.7. *(Teorema 2.5-(2)) Sea X un espacio topológico. Se cumple que X es regular si y solo si $\mathrm{CL}(X)$ es Hausdorff.*

Una pregunta interesante que surge es si la propiedad relativa de regularidad en el Teorema 3.6 puede ser reemplazada por alguna otra de las establecidas en el diagrama de la Figura 2, o si es posible reemplazar la propiedad relativa de Hausdorff por alguna otra de las que conforman el diagrama de la Figura 1. El siguiente ejemplo muestra que suponer la regularidad de Y en X no garantiza que Y^+ sea fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$.

Ejemplo 3.8. Sean X' un conjunto infinito y p, q dos puntos diferentes que no pertenecen a X'. Definimos $X = X' \cup \{p, q\}$ con la topología siguiente: Los puntos de X' son aislados y las vecindades básicas de x, para $x \in \{p, q\}$, son de la forma $\{x\} \cup (X' \setminus F)$, donde F es un subconjunto finito de X'. Es claro que X es un espacio T_1. Ahora, consideremos el subespacio $Y = X' \cup \{p\}$.
Afirmación 1: Y es regular en X.

En efecto, sean $y \in Y$ y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado en X tales que $y \notin F$. Luego, $y \in X'$ o $y = p$. Si $y \in X'$, es trivial encontrar los subconjuntos abiertos deseados. Si $y = p$, entonces existe un subconjunto finito A de X' con la propiedad que $(\{p\} \cup X' \setminus A) \cap F = \emptyset$. De donde, $F \subseteq A \cup \{q\}$, y así, $U = \{p\} \cup (X' \setminus A)$ y $V = A$ son subconjuntos abiertos en X, ajenos y tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subseteq V$. Por lo tanto, Y es regular en X. Se tiene además, puesto que los conjuntos $\{p\}$ y $\{q\}$ no poseen vecindades ajenas en X, que Y no es fuertemente regular en X y Y no es superregular en X.
Afirmación 2: Y^+ no es fuertemente regular en $\mathrm{CL}(X)$.
En efecto, se sigue de la imposibilidad de separar con subconjuntos abiertos en $\mathrm{CL}(X)$ los puntos $\{p\} \in Y^+$ y $\{q\} \in \mathrm{CL}(X)$. Por lo tanto, Y^+ no es fuertemente regular en $\mathrm{CL}(X)$.

¿Existe una caracterización de la propiedad fuertemente Hausdorff de Y^+ en $\mathrm{CL}(X)$ en términos de alguna versión relativa de regularidad de Y en X? Una respuesta parcial a esta cuestión es la proposición siguiente.

Proposición 3.9. *[6, Proposición 3.3]) Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Si Y es superregular en X y Y es fuertemente regular en X, entonces Y^+ es fuertemente Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$.

Demostración. Fijemos dos puntos $A \in Y^+$ y $B \in \mathrm{CL}(X)$ tales que $A \neq B$. Tenemos dos casos:
Caso 1. Existe $a \in A \setminus B$. Dado que $a \in Y$, B es un subconjunto cerrado en X tal que $a \notin B$ y Y es superregular en X, entonces existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Es claro que $\langle X, U \rangle$ y $\langle V \rangle$ son subconjuntos abiertos en $\mathrm{CL}(X)$. Además, no es difícil ver que $A \in \langle X, U \rangle$, $B \in \langle V \rangle$ y $\langle X, U \rangle \cap \langle V \rangle = \emptyset$.
Caso 2. Existe $b \in B \setminus A$. En vista de que Y es fuertemente regular en X, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $b \in U$, $A \cap Y \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Dado que $A \subseteq Y$, se tiene que $A \subseteq V$. Es sencillo ver que $\langle X, U \rangle$ y $\langle V \rangle$ son subconjuntos abiertos en $\mathrm{CL}(X)$ tales que $A \in \langle V \rangle$, $B \in \langle X, U \rangle$ y $\langle X, U \rangle \cap \langle V \rangle = \emptyset$.

Por lo tanto, en cualquier caso, los subconjuntos A y B pueden ser separados por subconjuntos abiertos en $\mathrm{CL}(X)$. De aquí, Y^+ es fuertemente Hausdorff en $\mathrm{CL}(X)$. $\square$

Ahora, es el turno de tratar la posibilidad de una versión relativa de la parte (3) del Teorema 2.5. Para este fin son necesarios los siguientes lemas.

El primero de ellos garantiza una caracterización de la propiedad de superregularidad en términos de la cerradura de subconjuntos abiertos, tal y como se hace para el caso de la regularidad de un espacio.

Lema 3.10. *([6, Lema 3.1]) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X, se tiene que Y es superregular en X si y solo si para cada $y \in Y$ y para cada subconjunto abierto U en X tal que $y \in U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración. Supongamos que Y es superregular en X. Sean $y \in Y$ y U un subconjunto abierto en X tales que $y \in U$. Dado que $X \setminus U$ es cerrado en X y $y \notin X \setminus U$, se sigue por hipótesis que existen subconjuntos abiertos W_1 y W_2 en X tales que $y \in W_1$, $X \setminus U \subseteq W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Sea $V = W_1$. Luego, $\overline{V} \subseteq X \setminus W_2$. Así, $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Recíprocamente, veamos que Y es superregular en X. Sean $y \in Y$ y F un subconjunto cerrado en X tal que $y \notin F$. Dado que $X \setminus F$ es abierto en X y $y \in X \setminus F$, se sigue por hipótesis que existe un subconjunto abierto V en X tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus F$. De donde, V y $X \setminus \overline{V}$ son subconjuntos abiertos en X, ajenos, tales que $y \in V$ y $F \subseteq X \setminus \overline{V}$. Así, Y es superregular en X. □

A su vez, la supernormalidad queda caracterizada de la siguiente manera.

Lema 3.11. *([6, Lema 3.2]) Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio Y de X se tiene que Y es supernormal en X si y solo si para cada $A \subseteq Y$ cerrado en X y cualquier subconjunto abierto U en X tal $A \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subset U$.*

Demostración. Supongamos que Y es supernormal en X. Sean $A \subseteq Y$ un subconjunto cerrado en X y U un subconjunto abierto en X tales que $A \subseteq U$. Dado que $X \setminus U$ es cerrado en X y $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$, se sigue por hipótesis que existen subconjuntos abiertos W_1 y W_2 en X tales que $A \subseteq W_1$, $X \setminus U \subseteq W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Poniendo $V = W_1$, tenemos que $\overline{V} \subseteq X \setminus W_2$. Así, $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Recíprocamente, veamos que Y es supernormal en X. Sean $A \subseteq Y$ un subconjunto cerrado en X y B un subconjunto cerrado en X tales que $A \cap B = \emptyset$. Dado que $X \setminus B$ es abierto en X y $A \subseteq X \setminus B$, se sigue por hipótesis que existe un subconjunto abierto V en X tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus B$. De donde, V y $X \setminus \overline{V}$ son subconjuntos ajenos y abiertos en X tales que $A \subseteq V$ y $B \subseteq X \setminus \overline{V}$. Así, Y es supernormal en X. □

Teorema 3.12. *([6, Teorema 3.6]) Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Se tiene que Y^+ es superregular en* $\mathrm{CL}(X)$ *si y solo si Y es supernormal en X.*

Demostración. Supongamos que Y^+ es superregular en $\mathrm{CL}(X)$. Utilizamos el Lema 3.11 para demostrar que Y es supernormal en X. Sean $A \subseteq Y$ un subconjunto cerrado en X y U cualquier subconjunto abierto en X tal que $A \subseteq U$. Es claro que $A \in Y^+$ y $A \in \langle U \rangle$. Luego, por hipótesis y por el Lema 3.10, existe un subconjunto abierto, que lo podemos suponer abierto básico, $\langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ en $\mathrm{CL}(X)$ tal que $A \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \subseteq \overline{\langle V_1, \ldots, V_m \rangle} \subseteq \langle U \rangle$. Sea $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. Claramente se tiene que V es abierto en X, $A \subseteq V \subseteq \overline{V}$ y $\overline{V} = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{V_j}$. Además, $\overline{V} \in \langle \overline{V_1}, \ldots, \overline{V_m} \rangle$. Así, del Lema 2.4, obtenemos que $\overline{V} \in \langle U \rangle$, esto es, $\overline{V} \subseteq U$. Por tanto, Y es supernormal en X.

Recíprocamente, supongamos que Y es supernormal en X. Demostremos que Y^+ es superregular en $\mathrm{CL}(X)$ utilizando el Lema 3.10. Sea $A \in Y^+$ y sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ un subconjunto abierto básico en $\mathrm{CL}(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Notemos que $A \subseteq Y$ es un subconjunto cerrado en X y que el subconjunto $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ es un abierto en X que contiene a A. Luego, por hipótesis y por el Lema 3.11, existe un subconjunto abierto V en X tal que $A \subseteq V \subset \overline{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Por otra parte, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $x_i \in A \cap U_i$; note que $x_i \in Y$ y $x_i \in U_i$. Aplicando el Lema 3.11 nuevamente, se sigue que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe un subconjunto abierto V_i en X tal que $x_i \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$. Definimos $\mathcal{W} = \langle V, V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle$. Evidentemente $A \in \mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{W}}$. Finalmente, del Lema 2.4 y de la construcción de los subconjuntos V_i, se obtiene que $\overline{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{U}$. De donde, $A \in \mathcal{W} \subseteq \overline{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, por el Lema 3.10, Y^+ es superregular en $\mathrm{CL}(X)$. □

Corolario 3.13. *(Teorema 2.5-(3)) Sea X un espacio topológico. Se cumple que X es normal si y solo si* $\mathrm{CL}(X)$ *es regular.*

Por otro lado, analizando el Teorema 2.5, notamos que la compacidad es una de las propiedades topológicas en donde se estabilizan X y su hiperespacio $\mathrm{CL}(X)$. Específicamente, la parte (4) del Teorema 2.5, garantiza que X es compacto si y solo si $\mathrm{CL}(X)$ lo es. Este resultado es fundamental en la teoría de los hiperespacios. De hecho, una pieza clave en su demostración es el Lema Alexander, el cual establece, como el lector puede recordar, que un espacio es compacto si y solo si toda cubierta con elementos de una subbase admite una subcubierta finita. De esta manera, al pensar en poseer una forma relativa de la parte (4) del Teorema 2.5, debemos contar con una versión relativa del Lema de Alexander. En el siguiente resultado se resuelve esta situación.

Lema 3.14. *([6, Lema 4.1]) Sea $\mathcal{L}$ una subbase para un espacio de Hausdorff X. Se tiene que Y es compacto en X si y solo si cada cubierta de X por elementos de $\mathcal{L}$ tiene una subfamilia finita que cubre a Y.*

Demostración. Si Y es compacto en X, entonces es es obvio que cada cubierta de X por elementos de $\mathcal{L}$ tiene una subfamilia finita que cubre a Y.

Recíprocamente, supongamos que Y no es compacto en X. Luego, existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tal que ninguna subfamilia finita de $\mathcal{U}$ cubre Y. Sea $\mathcal{H}$ la familia de todas las cubiertas abiertas de X que no tienen subcubiertas finitas de Y. Note que $\mathcal{H} \neq \emptyset$, pues $\mathcal{U} \in \mathcal{H}$. No es difícil demostrar que si $\mathcal{D}$ es un subconjunto de $\mathcal{H}$ linealmente ordenado por la contención, entonces $\bigcup \mathcal{D}$ es una cota superior para $\mathcal{D}$ que está en $\mathcal{H}$. Así, del Lema Kuratowski-Zorn (vea [7, p. 8]), existe un elemento maximal $\mathcal{M} \in \mathcal{H}$.
Afirmación: Para cada $M \in \mathcal{M}$ y para cada colección de subconjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tal que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subseteq M$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $V_i \in \mathcal{M}$.

En efecto, supongamos que la afirmación previa es falsa, esto es, que existe $M_0 \in \mathcal{M}$ y existe una colección finita de subconjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tales que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subseteq M_0$, de tal forma que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $V_i \notin \mathcal{M}$. Por la maximalidad de $\mathcal{M}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{M} \cup \{V_i\} \notin \mathcal{H}$, es decir, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existen subconjuntos $M_{i,0}, M_{i,1}, \ldots, M_{i,k}$ tales que $Y \subseteq V_i \cup \bigcup_{j=1}^{k} M_{i,j}$. Luego, renumerando los subconjuntos $M_{i,j}$,

$$Y \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i \cup \bigcup_{k=1}^{m} M_k \right) \subseteq \left(M_0 \cup \bigcup_{k=1}^{m} M_k \right)$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esto implica que $\mathcal{M} \notin \mathcal{H}$, lo cual es una contradicción, y la demostración de la afirmación está completa.

Ahora, sean $x \in X$ y $M \in \mathcal{M}$ tales que $x \in M$. Dado que $\mathcal{L}$ es una subbase para X, existen $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{L}$ tales que $x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subseteq M$. De la afirmación anterior, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $S_i \in \mathcal{M}$. Así, $x \in S_i \cap M$. Luego $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X, la cual tiene una subfamilia finita que cubre a Y (pues de lo contrario se contradice la maximalidad de $\mathcal{M}$). Pero esto no es posible por nuestra suposición inicial. Por lo tanto, Y es compacto en X. $\square$

Con lo anterior, estamos en posibilidades de demostrar una versión relativa de la parte (4) del Teorema 2.5.

Teorema 3.15. *([6, Teorema 4.1]) Sean X un espacio topológico Hausdorff y Y un subconjunto de X. Se tiene que Y^+ es compacto en* $\mathrm{CL}(X)$ *si y solo si Y es compacto en X.*

Demostración. Supongamos que Y^+ es compacto en $\mathrm{CL}(X)$. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de X. Por el Lema 3.17, $\{\langle X, U_\alpha\rangle : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de $\mathrm{CL}(X)$. En vista de que Y^+ es compacto en $\mathrm{CL}(X)$, existe un subconjunto finito F de I tal que $Y^+ \subseteq \bigcup_{i\in F}\langle X, U_i\rangle$. Afirmamos que $Y \subseteq \bigcup_{i\in F} U_i$. En efecto, dado $y \in Y$ se sigue que $\{y\} \in Y^+$, entonces existe $j \in F$ tal que $\{y\} \in \langle X, U_j\rangle$, es decir, $y \in U_j$ para algún $j \in F$. Se concluye que Y es compacto en X.

Recíprocamente, supongamos Y es compacto en X. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\mathrm{CL}(X)$. Por el Lema 3.14, podemos asumir que $\mathcal{U}$ esta formada por subconjuntos subbásicos en $\mathrm{CL}(X)$, es decir, $\mathcal{U} = \mathcal{W}^+ \cup \mathcal{V}^-$, donde

$$\mathcal{W}^+ = \{\langle W_i\rangle : i \in I\} \text{ y } \mathcal{V}^- = \{\langle X, V_j\rangle : j \in J\},$$

con W_i y V_j subconjuntos abiertos en X para cada $i \in I$ y cada $j \in J$.

Es evidente que $\{W_i : i \in I\} \cup \{V_j : j \in J\}$ es un cubierta abierta de X. Sea $F = X \setminus \bigcup_{j\in J} V_j$. Sin perder generalidad podemos suponer que $F \neq \emptyset$. Para cada $j \in J$, $F \notin \langle X, V_j\rangle$. Así, $F \in \langle W_i\rangle$ para algún $i \in I$. De donde, $X \setminus W_i \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$, y por consecuencia, $Y \setminus W_i \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$. Note también que $Y \setminus W_i$ es compacto en X. De aquí, existe $\{V_1, \ldots, V_n\}$ contenido en $\{V_j : j \in J\}$ tal que

$$Y \setminus W_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j. \tag{1}$$

Finalmente, probamos que $Y^+ \subseteq (\bigcup_{j=1}^{n}\langle X, V_j\rangle) \cup \langle W_i\rangle$. Sea $A \in Y^+$. Si $A \notin \langle W_i\rangle$, existe un punto $a \in A \setminus W_i$. Por (1), $A \cap V_j \neq \emptyset$, para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$. Esto es, $A \in \langle X, V_j\rangle$. Por lo tanto, Y^+ es compacto en $\mathrm{CL}(X)$. □

Corolario 3.16. *(Teorema 2.5-(4)) Sea X un espacio topológico. Se cumple que X es compacto si y solo si* $\mathrm{CL}(X)$ *es compacto.*

Es natural preguntarse si la equivalencia en el Teorema 3.15 se preserva al remplazar compacidad por internamente compacto. El siguiente resultado, muestra que al menos una de las implicaciones se cumple. Antes, es necesario el siguiente lema.

Lema 3.17. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de X. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces la familia $\mathcal{U}^- = \{\langle X, U\rangle : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de* $\mathrm{CL}(X)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X y sea $A \in \mathrm{CL}(X)$. Luego, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \cap U \neq \emptyset$, esto es, $A \in \langle X, U\rangle$. Por lo tanto, $\{\langle X, U\rangle : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de $\mathrm{CL}(X)$. □

Teorema 3.18. *([6, Teorema 4.2]) Sean X un espacio topológico Hausdorff y Y un subconjunto de X. Si Y^+ es internamente compacto en* $\mathrm{CL}(X)$*, entonces Y es internamente compacto en X.*

Demostración. Sea Z un subconjunto de Y tal que Z es cerrado en X. Mostremos que Z es un espacio compacto. Para esto, primero note que $\langle Z\rangle \subseteq Y^+$ ya que Z es un subconjunto de Y, y que $\langle Z\rangle$ es un subconjunto cerrado en $\mathrm{CL}(X)$ pues $\langle Z\rangle = \mathrm{CL}(X) \setminus \langle X, X \setminus Z\rangle$. De donde, como Y^+ es internamente compacto en $\mathrm{CL}(X)$, se obtiene que $\langle Z\rangle$ es un espacio compacto.

Ahora, considere una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Z. Dicha cubierta la podemos extender a una cubierta $\mathcal{U}^*$ formada por subconjuntos abiertos en X, como se hizo en el Lema 3.17, $(\mathcal{U}^*)^-$ es una cubierta de $\langle Z\rangle$ formada por subconjuntos abiertos de $\mathrm{CL}(X)$. Como $\langle Z\rangle$ es un espacio compacto, es posible hallar una subfamilia finita de $(\mathcal{U}^*_F)^-$ de $(\mathcal{U}^*)^-$ que cubre $\langle Z\rangle$. Claramente, la familia $\mathcal{U}^*_F$ cubre a Z y es finita; así la familia $\mathcal{U}_F$, formada por subconjuntos abiertos en Z, es una subfamilia finita de $\mathcal{U}$ que cubre Z. Se concluye que Z es un espacio compacto. □

Preguntas abiertas

A manera de conclusión presentamos algunas preguntas que resultan de manera inmediata en vista de la teoría existente y de lo que hemos desarrollado. Esto muestra lo amplio que aún puede ser el presente tema y que existen muchas posibilidades de continuar la investigación en esta área de estudio.

Comenzamos observando que del Teorema 3.2 y del diagrama de la Figura 1, surge la siguiente cuestión.

Pregunta 1. *Sea X es un espacio topológico que no es T_1 y Y un subconjunto de X. Supongamos que Y es un espacio T_1, ¿es cierto Y^+ es un espacio Hausdorff o que Y^+ es Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$*?*

Por otro lado, en vista del Teorema 3.6 y de los diagramas en las Figuras 1 y 2, resultan las siguientes interrogantes.

Pregunta 2. *Sea X es un espacio topológico que no es T_1 y Y un subconjunto de X.*

1. *Supongamos que Y^+ es fuertemente Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$*. ¿Se cumple que Y es superregular en X o que Y es fuertemente regular en X? Cabe señalar que en [6, Ejemplo 2], se garantiza un ejemplo de espacios Y y X tales que Y^+ es fuertemente Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$ *y Y no es regular en X.*

2. *Bajo el supuesto de que Y^+ es Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$*, ¿es cierto que Y es superregular en X o que Y es fuertemente regular en X?*

3. *Si Y es superregular en X, ¿se cumple que Y^+ es fuertemente Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$ *o que Y^+ es Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$*?*

4. *Supongamos que Y es fuertemente regular en X. ¿Es cierto que Y^+ es fuertemente Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$ *o que Y^+ es Hausdorff en* $\mathrm{CL}(X)$*?*

A su vez, el Teorema 3.12 y los diagramas en las Figuras 2 y 3 sustentan varias cuestiones, por mencionar algunas, las siguientes.

Pregunta 3. *Sea X es un espacio topológico que no es T_1 y Y un subconjunto de X.*

1. *Si Y^+ es superregular en* $\mathrm{CL}(X)$*, ¿es cierto que Y es normal en X o que Y es fuertemente normal en X o que Y es cercanamente normal en X?*

2. *Suponiendo que Y^+ es regular en* $\mathrm{CL}(X)$*, ¿se cumple que Y es internamente normal en X o que Y es cercanamente normal en X?*

3. *Bajo el supuesto de que Y es supernormal en X, ¿es cierto que Y^+ es fuertemente regular en* $\mathrm{CL}(X)$*?*

4. *Si Y es normal en X, ¿es cierto que Y^+ es regular en* $\mathrm{CL}(X)$ *o que Y^+ es fuertemente regular en* $\mathrm{CL}(X)$*?*

Finalmente, de los Teoremas 3.15 y 3.18, y el diagrama en la Figura 4, algunas cuestiones que surgen son las siguientes.

Pregunta 4. *Sea X es un espacio topológico Hausdorff y Y un subconjunto de X.*

1. *Supongamos que Y^+ es compacto en* $\mathrm{CL}(X)$*. ¿Es cierto que Y es un espacio compacto?*

2. *Cuando Y^+ es internamente compacto en* $\mathrm{CL}(X)$*, ¿se cumple que Y es compacto en X o que Y es un espacio compacto?*

3. *Al suponer que Y es compacto en X, ¿se obtiene que Y^+ es un espacio compacto?*

4. *Si Y es internamente compacto en X, ¿es cierto que Y^+ es internamente compacto en* $\mathrm{CL}(X)$*? Esto es, ¿se cumple el recíproco del Teorema 3.18?*

Agradecimientos

Los autores agradecen las observaciones hechas por los árbitros, con las cuales el trabajo mejoró sustancialmente.
El primer autor agradece a la Universidad Tecnológica de la Mixteca todo su apoyo para la realización de su estancia posdoctoral de mayo de 2020 a abril de 2021.

Bibliografía

[1] A. V. Arhangel'skii, *A generic theorem in the theory of cardinal invariants of topological spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 36, (1995) 305–325.

[2] A. V. Arhangel'skii, *Relative normality and dense subspaces*, Topology Appl. 123 (2002) 27–36.

[3] A. V. Arhangel'skii, *Relative topological properties and relative topological spaces*, Topology Appl. 70 (1996) 87–99.

[4] A. V. Arhangel'skii y H. M. M. Genedi, *Beginnings of the theory of relative topological properties*, in: General Topology. Spaces and Mappings (MGU, Moscow, 1989) 3–48 (en ruso).

[5] A. V. Arhangel'skii, y J. Tartir, *A characterization of compactness by a relative separation property*, Questions and Answers in General Topology, 14 (1996) 49–52.

[6] J. Díaz-Reyes, I. Martínez-Ruiz y A. Ramírez-Páramo, *Relative topological properties of hyperspaces*, Mathematica Slovaca, 69, 3 (2019), 675–684.

[7] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[8] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[9] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., "Hyperspaces: fundamentals and recent advances", Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[10] E. A. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152–182.

[11] L. Vietoris, *Bereiche zweiter Ordnung*, Monatshefte fur Mathematik und Physik, 32 (1922), 258–280.

Instituo de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca
Carretera a Acatlima, km 2.5, Huajuapan de León, Oaxaca, C.P. 69000.

`jdeisauzs@gmail.com` [Jesús Díaz-Reyes]
`jtenorio@mixteco.utm.mx` [Jesús F. Tenorio]

Matemáticas y sus aplicaciones 17, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-765-5

Capítulo 3

Las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico único

David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez
FCFM, BUAP

Resumen

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos el hiperespacio de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X con a lo más n puntos, $F_n(X)$. En este capítulo probamos lo siguiente: si X es una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ y Y es un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces Y es homeomorfo a X.

1 Introducción

Primero vamos a definir el ente de nuestro trabajo, un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Como es usual, el conjunto de los números enteros positivos lo denotamos por $\mathbb{N}$ y su cardinal lo denotamos por $\aleph_0$.

Dado un continuo X, se considera la colección de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X, denotada y definida por $2^X = \{A \subset X : A$ es no vacío y cerrado de $X\}$, esta colección se dota de la topología de Vietoris o de la métrica de Hausdorff y, se le llama *hiperespacio de cerrados* de X. También se considera la colección de todos los subcontinuos de X, denotada y definida por $C(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo$\}$, considerado como subespacio de 2^X, y es llamado el *hiperespacio de subcontinuos de* X. De igual manera, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el hiperespacio

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ puntos}\}$$

llamado el n-ésimo producto simétrico de X. Note que, el primer producto simétrico de X es el hiperespacio $F_1(X)$ de los subconjuntos singulares de X, y por las definiciones tenemos que X es homeomorfo a $F_1(X)$. El concepto de producto simétrico lo introdujeron K. Borsuk y S. M. Ulam en [3].

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X, es decir, $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X), F_n(X)\}$. Un concepto importante en la teoría de los continuos y sus hiperespacios es el siguiente: decimos que X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$, si para cualquier continuo Y tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.

El objetivo de este capítulo es demostrar esta propiedad para cuando X es una gráfica finita y $\mathcal{H}(X)$ es el n-ésimo producto simétrico de X. Concretamente vamos a presentar una prueba del resultado:

Si X es una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$ y Y es un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y (véase el Teorema 5.4).

Cabe mencionar que este resultado se debe a Enrique Castañeda y Alejandro Illanes [4, Corolario 5.9].

2 Preliminares

Dado un subconjunto A de un continuo X, el *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de A en X, son denotados por $\mathrm{int}_X(A)$, $\mathrm{cl}_X(A)$ y $\mathrm{bd}_X(A)$, respectivamente. Si d es la métrica del continuo X, $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, denotamos la bola con centro en p y de radio $\varepsilon > 0$ por $B_X(p, \varepsilon) = \{x \in X : d(p, x) < \varepsilon\}$. Para cualesquiera $A \subset X$, definimos la *nube* de radio ε alrededor de A, como el conjunto $N_X(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon, \text{ para algún } a \in A\}$.

Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, representan el conjunto vacío, los números reales y el plano euclidiano, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A la denotamos por $|A|$.

Un *arco* es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Una *curva cerrada simple* es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_2 = 1\}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, una *n-celda* es un espacio topológico homeomorfo a la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$, $B_n(\mathbf{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_n \leq 1\}$.

Sean X un continuo y $x \in X$. Sea β un número cardinal. Decimos que x *tiene orden menor o igual que* β *en* X, denotado por $\operatorname{ord}(x, X) \leq \beta$, cuando x tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ en X tal que la cardinalidad de la frontera de U en X es menor o igual que β, para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que x *tiene orden igual que* β, *en* X ($\operatorname{ord}(x, X) = \beta$) si cumple que $\operatorname{ord}(x, X) \leq \beta$ y $\operatorname{ord}(x, X) \nleq \alpha$, para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$. Sea $E(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x, X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x, X) = 2\}$ y $R(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}(x, X) \geq 3\}$. Los elementos de $E(X)$ (respectivamente, $O(X)$ y $R(X)$) se llaman *puntos extremos* (respectivamente, *puntos ordinarios* y *puntos de ramificación*) de X.

Para $n \geq 3$, un *n-odo simple* Y es la unión de n arcos $J_1, \ldots, J_n$ en Y con la propiedad $J_l \cap J_k = \{v\}$ si $l \neq k$ y v es un punto extremo de los arcos J_l. El punto v es llamado el *vértice* de Y. Un 3-odo simple es llamado *triodo simple*.

Un continuo es una *gráfica finita* si es la unión finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan únicamente en uno o en ambos de sus puntos extremos.

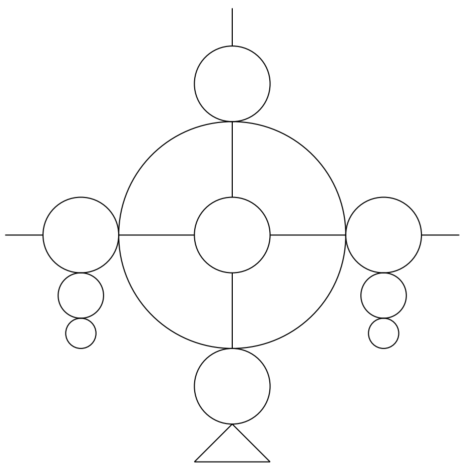


Figura 1: Gráfica finita

Para más conceptos y resultados relacionados con la teoría de este capítulo se puede consultar el libro de Illanes y Nadler [12].

También se puede consultar otros trabajos relacionados a éste, véase [8]-[12].

Dada una gráfica finita X, un *arco libre* en X es un arco J con puntos extremos x y z tal que $J - \{x, z\}$ es un subconjunto abierto de X. Un *arco libre maximal* en X es un arco libre en X el cual es maximal con respecto a la inclusión de conjuntos. Un *ciclo* en X es una curva cerrada simple J en X tal que $J - \{p\}$ es un subconjunto abierto en X para algún $p \in J$. Consideremos las colecciones:

$$\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un ciclo en } X\},$$
$$\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal en } X\} \cup \mathcal{A}_R(X),$$
$$\mathcal{A}_E(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal tal que } |J \cap R(X)| = 1\}.$$

Los elementos de $\mathcal{A}_S(X)$ se conocen como *aristas* de la gráfica finita X.

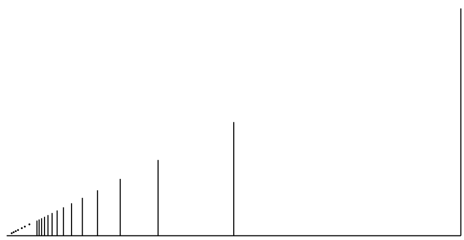


Figura 2: Continuo el cual no es una gráfica finita.

Lema 2.1. *Sean X una gráfica finita con $R(X) \neq \emptyset$ y $J, K \in \mathcal{A}_S(X)$. Entonces*

(a) si $p \in \mathrm{int}_X(J)$, entonces $p \notin R(X)$,

(b) si $p \in \mathrm{bd}_X(K)$, entonces $p \in R(X)$ y

(c) si $J \neq K$, entonces $\mathrm{int}_X(J) \cap K = \emptyset$.

Demostración. (a) Sean $p \in \mathrm{int}_X(J)$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Entonces, existe un arco L en J tal que $p \in \mathrm{int}_J(L) \subset L \subset U \cap \mathrm{int}_X(J)$. Como $U \cap \mathrm{int}_X(J)$ es un subconjunto abierto de X, tenemos que $\mathrm{int}_J(L)$ es un subconjunto abierto de X. Así, $\mathrm{bd}_X(\mathrm{int}_J(L)) = L - \mathrm{int}_J(L)$. Como $L - \mathrm{int}_J(L)$ tiene a lo más dos elementos, tenemos que $\mathrm{bd}_X(\mathrm{int}_J(L))$ tiene a lo más dos elementos. Esto implica que $p \in E(X) \cup O(X)$. Así, $p \notin R(X)$.

(b) Sean $p \in \mathrm{bd}_X(K)$ y $\mathcal{B}$ una base de vecindades de p en X. Como $R(X) \neq \emptyset$ existe $q \in X - K$. Dado que X es localmente conexo, existe L un arco en X con puntos extremos p y q.

Caso 1. Supongamos que K es un ciclo. Como $K - \{p\}$ es un subconjunto abierto de X tenemos que $K \cap L = \{p\}$. Denotemos $r = d(p, q)$. Sea $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset B_X(p, r)$. Note que $\mathrm{bd}_X(U)$ tiene al menos tres elementos. Esto implica que $p \notin E(X) \cup O(X)$. Así, $p \in R(X)$.

Caso 2. Supongamos que K es un arco. Note que p es un punto extremo de K. Sea a el otro punto extremo de K. Como $K - \{a, p\}$ es un subconjunto abierto de X, tenemos que $K \cap L \subset \{a, p\}$. Podemos suponer que $K \cap L = \{p\}$. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(p, \varepsilon) \subset K \cup L$. Sea C_p la componente de $B_X(p, \varepsilon)$ tal que $p \in C_p$. Denotemos por $L_p = \mathrm{cl}_X(C_p)$. Note que L_p es un arco. Más aún, $K \cup L_p$ es un arco libre. Esto contradice la maximalidad de K. Por lo tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos que $B_X(p, \varepsilon) \not\subset K \cup L$. Esto implica que existe un arco M en X tal que $(K \cup L) \cap M = \{p\}$. Sea z el otro punto extremo de M y sea $r = min\{d(a, p), d(p, q), d(p, z)\}$. Así, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset B_X(p, r)$. Note que $\mathrm{bd}_X(V)$ tiene al menos tres elementos. Así, $p \in R(X)$.

(c) Sean $J \neq K$. Supongamos que existe $p \in \mathrm{int}_X(J) \cap K$. Como $p \in \mathrm{int}_X(J)$, por la parte (a), tenemos que $p \notin R(X)$. Como $p \in K$, entonces $p \in \mathrm{int}_X(K)$ o $p \in \mathrm{bd}_X(K)$. Si $p \in \mathrm{bd}_X(K)$, por la parte (b), tenemos que $p \in R(X)$, lo cual es una contradicción. Así, $p \in \mathrm{int}_X(K)$. Por lo tanto, $\mathrm{int}_X(J) \cap K = \mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K)$. Esto implica que, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K)$ es un subconjunto abierto y cerrado del conjunto conexo $\mathrm{int}_X(J)$. Así, $\mathrm{int}_X(J) = \mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K)$ y $\mathrm{int}_X(J) \subset \mathrm{int}_X(K)$. Por lo tanto, $J \subset K$. Esto contradice que $J \neq K$. $\square$

Teorema 2.2. *Un espacio X es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto en X son conjuntos abiertos en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un conjunto abierto en X y C una componente de U. Sea $p \in C \subset U$. Como X es localmente conexo, tenemos que existe un conjunto abierto y conexo V en X, tal que $p \in V \subset U$. Luego, por la maximalidad de C, $p \in V \subset C$. Por lo tanto, C es un conjunto abierto en X.

Recíprocamente, sean $p \in X$ y U un conjunto abierto en X que contiene a p. Consideremos la componente de U que contiene a p, digamos C. Por hipótesis, C es un conjunto abierto y conexo en X. Note que $p \in C \subset U$, así X es localmente conexo. $\square$

El siguiente resultado menciona que la conexidad local se preserva bajo funciones continuas, en espacios métricos, compactos y conexos.

Lema 2.3. *Sean X y Y continuos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sean U un conjunto abierto de Y y C una componente de U. Consideramos $x \in f^{-1}(C)$. Sea C_x la componente de $f^{-1}(U)$ tal que $x \in C_x$. Como X es localmente conexo y $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X, por el Teorema 2.2, tenemos que C_x es un conjunto abierto de X. Como f es continua, entonces $f(C_x)$ es conexo. Además, $f(x) \in f(C_x) \subset U$. Como C es componente de U y $f(x) \in C$, entonces $f(C_x) \subset C$. Así, $C_x \subset f^{-1}(C)$. Es dedir, $f^{-1}(C)$ es un subconjunto abierto de X. Luego, $X - f^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de X. Note que f es una función cerrada. De donde $f(X - f^{-1}(C)) = Y - C$ es un subconjunto cerrado de Y. Así, C es un conjunto abierto de Y. Por el Teorema 2.2, se concluye que Y es localmente conexo. $\square$

En el resultado que sigue citamos una caracterización de las gráficas finitas, una demostración de éste se puede ver en [22, Teorema 9.10].

Teorema 2.4. *Un continuo X es una gráfica finita si y solo si se cumplen las condiciones:*

(a) Para cada $x \in X$, $\mathrm{ord}(x, X) < \aleph_0$ y

(b) Para cada $x \in X$, $\mathrm{ord}(x, X) \leq 2$, excepto para una cantidad finita.

Dado un continuo X, consideremos la colección

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ la cual es una gráfica finita}\}.$$

Concluimos estos Preliminares con el siguiente resultado.

Lema 2.5. *Si X es una gráfica finita, entonces $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X.*

Demostración. Note que $\mathcal{G}(X) = X$. Se sigue del Teorema 2.4 que $R(X)$ es un conjunto finito.

Vamos a probar que $X \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Para esto sea $p \in R(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos un punto $p_n \in B_X(p, \frac{1}{n}) - R(X)$. Note que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto p, se sigue que $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Así, $R(X) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Esto implica que

$$X = \mathcal{G}(X) = (\mathcal{G}(X) - R(X)) \cup R(X) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X)).$$

Por lo tanto, $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X. $\square$

3 Hiperespacios de un continuo

Existen colecciones interesantes con las cuales nos permiten conocer propiedades topológicas del espacio base, concretamente en teoría de los continuos, son los hiperespacios de continuos.

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos las siguientes colecciones:

$$\begin{aligned}
2^X &= \{A \subset X \colon A \text{ es no vacío y cerrado de } X\},\\
F_n(X) &= \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\},\\
C_n(X) &= \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},\\
C(X) &= C_1(X) \text{ y}\\
F_1(X) &= \{\{x\} \colon x \in X\}.
\end{aligned}$$

La colección 2^X se considera con la métrica de Hausdorff H, veáse [25, Teorema 0.2], y es llamado el *hiperespacio de los subconjuntos no vacíos y cerrados de* X. De esta manera $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son considerados como subespacios de 2^X, por otro lado, $C(X)$ es llamado el *hiperespacio de subcontinuos de* X. El hiperespacio $F_n(X)$ es conocido como el *n-ésimo producto simétrico* de X.

Definición 3.1. Sean X un continuo, $r \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_r$ subconjuntos no vacíos de X. El *vietórico* de $A_1, \ldots, A_r$, denotado por $\langle A_1, \ldots, A_r\rangle$, es el conjunto $\langle A_1, \ldots, A_r\rangle_{2^X} \cap F_n(X)$ donde $\langle A_1, \ldots, A_r\rangle_{2^X}$ es el conjunto

$$\left\{B \in 2^X \colon B \subset \bigcup_{i=1}^r A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, r\}\right\}.$$

Teorema 3.2. *[25, Teorema 0.11] Si X es un continuo con una topología τ, entonces la colección*

$$\{\langle S_1, \ldots, S_r\rangle_{2^X} : S_i \in \tau \textit{ para cada } i \in \{1, \ldots, r\}, r \in \mathbb{N}\},$$

es una base para una topología para 2^X.

La topología generada por la base mencionada en el Teorema 3.2 es conocida como la *topología de Vietoris*.

Lema 3.3. *Si* X *es un continuo y* $n \in \mathbb{N}$*, con* $n \geq 2$*, entonces* $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ *es un subconjunto denso de* $F_n(X)$.

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $A \in \mathcal{U}$. Supongamos que $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, donde $m \leq n$. Si $m = n$, entonces $A \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$.

Supongamos que $m < n$. Como $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$, existe un $r > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$. Consideremos puntos $a_{m+1}, \ldots, a_n \in B_X(r, a_1)$ todos diferentes de $a_1, \ldots, a_m$ y sea $B = \{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$. Note que $H(A, B) < r$. Así, $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$. Esto implica que $B \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$. Por tanto, $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. □

Lema 3.4. *Sean* X *una gráfica finita,* $E \in \mathcal{A}_S(X)$ *y* $m, n \in \mathbb{N}$ *con* $m \leq n$*. Si* $A, B \in \langle \mathrm{int}_X(E)\rangle$ *tales que* $|A| = |B| = m$*, entonces existe un arco* $\mathcal{A}$ *contenido en* $\langle \mathrm{int}_X(E)\rangle$ *con puntos extremos* A *y* B*; además si* $C \in \mathcal{A}$*, entonces* $|C| = m$.

Demostración. Supongamos que $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Consideramos un homeomorfismo $\beta\colon (0,1) \longrightarrow \mathrm{int}_X(E)$. Para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, sean $r_{a_l}, r_{b_l} \in (0,1)$ tales que $\beta(r_{a_l}) = a_l$ y $\beta(r_{b_l}) = b_l$. Sea T_l el intervalo con puntos extremos r_{a_l} y r_{b_l}. Definimos, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, la función

$$\alpha_l\colon [0,1] \longrightarrow T_l \text{ tales que } \alpha_l(t) = r_{a_l} + t(r_{b_l} - r_{a_l}).$$

En caso de que $r_{a_l} = r_{b_l}$, entonces α_l es una función constante. En cualquier caso, α_l es una función continua. Note lo siguiente: si $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ y $t \in (0,1)$, entonces $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$. Supongamos que $\alpha_i(t) = \alpha_j(t)$ y que si $j \geq i$, entonces $r_{a_j} \geq r_{a_i}$ y $r_{b_j} \geq r_{b_i}$. Así, $r_{a_i} + t(r_{b_i} - r_{a_i}) = r_{a_l} + t(r_{b_l} - r_{a_l})$. Luego, $r_{a_i} - r_{a_j} = t(r_{b_j} - r_{b_i} + r_{a_i} - r_{a_j})$. Como $r_{a_i} \neq r_{a_j}$, tenemos que

$$t = \frac{r_{a_i} - r_{a_j}}{(r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})}. \tag{1}$$

Como $t \in (0,1)$ y $r_{a_i} - r_{a_j} < 0$, tenemos que (1) implica que $r_{a_i} - r_{a_j} > (r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})$. Así, $0 > r_{b_j} - r_{b_i}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$. Así, $\gamma_l = \beta \circ \alpha_l \colon [0,1] \longrightarrow \operatorname{int}_X(E)$ es una función continua.

Afirmación. La función $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow \langle \operatorname{int}_X(E) \rangle$ definida, para cada $t \in [0,1]$, como $\alpha(t) = \{\gamma_1(t). \ldots, \gamma_m(t)\}$ es continua.

Prueba de la Afirmación. Notemos que $\alpha(0) = \{\beta(\alpha_1(0)), \ldots, \beta(\alpha_m(0))\} = \{a_1, \ldots, a_m\} = A$. Así, $\alpha(0) = A$. De manera similar $\alpha(1) = B$ y $|\alpha(t)| = m$, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$. Sean $t_0 \in [0,1]$ y $\varepsilon_0 > 0$. Como $\beta \circ \alpha_l$ es continua en t_0, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, existe $\delta_l > 0$, tal que si $t \in [0,1]$ y $|t_0 - t| < \delta_l$, entonces $d(\beta(\alpha_l(t_0)), \beta(\alpha_l(t))) < \varepsilon_0$. Sea $\delta_0 = \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Si $t \in [0,1]$ y $|t_0 - t| < \delta_0$, entonces $d(\beta(\alpha_l(t_0)), \beta(\alpha_l(t))) < \varepsilon_0$, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$. Así, $\alpha(t_0) \subset N(\epsilon_0, \alpha(t)))$ y $\alpha(t) \subset N(\epsilon, \alpha(t_0))$. Luego, $H(\alpha(t_0), \alpha(t)) < \varepsilon_0$. Por lo tanto, α es continua. Así la Afirmación está probada.

Como $[0,1]$ es localmente conexo, por Lema 2.3, tenemos que $\alpha([0,1])$ es localmente conexo. En particular, $\alpha([0,1])$ es arco conexo. Así, existe un arco $\mathcal{A}$ en $\alpha([0,1]) \subset \langle \operatorname{int}_X(E) \rangle$ con puntos extremos A y B. $\square$

4 Los espacios $\mathcal{N}_n(X)$ y $\mathcal{E}_n(X)$

En el desarrollo de este trabajo hay dos colecciones importantes, $\mathcal{N}_n(X)$ y $\mathcal{E}_n(X)$, que vamos a introducir en esta sección y veremos propiedades relevantes de éstas.

Dada una gráfica finita X y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, consideramos la colección

$$\mathcal{N}_n(X) = \{A \in F_n(X) - F_{n-1}(X) \colon A \cap R(X) = \emptyset\}.$$

Lema 4.1. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $F_n(X)$. Por el Lema 3.3, $\mathcal{U} \cap (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U} \cap (F_n(X) - F_{n-1}(X))$ y supongamos que $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como $\mathcal{U}$ es abierto de $F_n(X)$, existe un $r_1 > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r_1) \subset \mathcal{U}$. Sea $\delta = \text{mín}\{d(p_i, p_j) \colon i, j \in \{1, \ldots, n\}$, donde $i \neq j\}$. Sea $r = \text{mín}\{r_1, \frac{\delta}{2}\}$. Note que $B_X(p_i, r) \cap B_X(p_j, r) = \emptyset$, donde $p_i, p_j \in A$ y $i \neq j$. Como X es una gráfica finita, por el Lema 2.5,

$\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X)) \neq \emptyset$. Ahora, consideremos puntos $b_i \in B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X))$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pongamos $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Se tiene que $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. □

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideramos el subespacio de $F_n(X)$

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X)\colon \text{ A tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ la cual es una } n\text{-celda}\}.$$

Lema 4.2. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.*

Demostración. Si $B \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces existe una n-celda $\mathcal{M}$ en $F_n(X)$ tal que $B \in \mathrm{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$. Así, existe un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $F_n(X)$ tal que $B \in \mathcal{U} \subset \mathrm{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Sea $B_1 \in \mathcal{U} - \{B\}$. Esto implica que $B_1 \in \mathcal{U} \subset \mathrm{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es una n-celda en $F_n(X)$, entonces $B_1 \in \mathcal{E}_n(X)$. Por tanto, $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. □

Lema 4.3. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Supongamos que $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Sean $J_1, \ldots, J_n$ arcos ajenos por pares de X tales que $(J_1 \cup \cdots \cup J_n) \cap R(X) = \emptyset$ y $p_i \in \mathrm{int}_X(J_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Note que la asociación que manda $(t_1, \ldots, t_n)$ al conjunto $\{t_1, \ldots, t_n\}$ es un homeomorfismo. Así, $J_1 \times \cdots \times J_n$ es homeomorfo a $\langle J_1, \ldots, J_n \rangle$. De donde, $\langle J_1, \ldots, J_n \rangle$ es una n-celda y es una vecindad de A en $F_n(X)$. Luego, $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$. □

Teorema 4.4. *Si X es un continuo localmente conexo y $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces no existen puntos de A que sean el vértice de un triodo simple de X.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $p \in A$ tal que p es el vértice de un triodo simple T_0 de X.

Sea $\mathcal{U}$ una vecindad de A en $F_n(X)$ tal que $\mathcal{U}$ es una n-celda. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Vamos a suponer que $A = \{p, x_2, \ldots, x_m\}$, donde $m \leq n$ y los puntos $p, x_2, \ldots, x_m$ son diferentes entre sí. Eligiendo apropiadamente puntos cercanos a x_m, podemos encontrar un punto $B \in B_{F_n(X)}(A, \varepsilon)$ de tal manera que $B = \{p, x_2, \ldots, x_n\}$ y los puntos $p, x_2, \ldots, x_n$ son diferentes entre sí.

Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que los conjuntos $B_X(p, \varepsilon_0)$, $B_X(x_2, \varepsilon_0), \ldots, B_X(x_n, \varepsilon_0)$ son ajenos por pares. Consideremos $\delta = \text{mín}\{\varepsilon, \varepsilon_0\}$ y arcos $I_2, \ldots, I_n$ de X tales que $x_i \in I_i$ y $\text{diám}(I_i) < \delta$, para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$. Por último, vamos a elegir un subtriodo T de T_0 tal que p es el vértice de T y el $\text{diám}(T) < \delta$. De esta manera, obtenemos que $\langle T, I_2, \ldots, I_n\rangle \subset B_{F_n(X)}(B, \delta) \subset \mathcal{U}$. Como $T, I_2, \ldots, I_n$ son ajenos por pares, $T \times I_2 \times, \ldots, \times I_n$ es homeomorfo a $\langle T, I_2, \ldots, I_n\rangle$. Por lo tanto, el espacio $T \times I_2 \times, \ldots, \times I_n$ está encajado en $\mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$, lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{U}$ es una n-celda. Esto completa la prueba. □

Teorema 4.5. *Si X es un continuo localmente conexo que no es una gráfica finita, entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, X contiene una gráfica finita con al menos k aristas.*

Demostración. Consideremos dos arcos α y β en X. Supongamos que $\alpha \cap \beta$ tiene una infinidad de componentes. Esto implica que $\alpha - (\alpha \cap \beta)$ tiene una infinidad de componentes. Sea $k \in \mathbb{N}$ cualquiera. Ahora, consideremos k componentes, digamos $J_1, \ldots, J_k$, de $\alpha - (\alpha \cap \beta)$. De aquí se sigue que $\beta \cup J_1, \ldots, J_k$ es una gráfica finita con al menos k aristas.

Supongamos que $\alpha \cap \beta$ tiene un número finito de componentes. Como $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ se tiene que $\alpha \cup \beta$ es una gráfica finita. Como X no es una gráfica finita, por el Teorema 2.4, el continuo X satisface una de las siguientes dos propiedades.

(a) Existe una infinidad de puntos $p \in X$ tales que $\text{ord}(p, X) > 2$.

(b) Existe un punto $q \in X$ tal que $\text{ord}(q, X) \geq \aleph_0$.

Supongamos que se cumple (a). Esto implica que existe una sucesión de puntos diferentes entre sí $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ tales que $\text{ord}(p_m, X) > 2$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por [18, Ejemplo 8 de 51, pág. 277], para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un triodo simple T_m de X tal que p_m es el vértice de T_m.

Fijamos un punto $p \in X$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, sea α_i un arco que une los puntos p con p_i. Por el supuesto al inicio de la prueba, tenemos que $Y = \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{k+1} \cup T_1 \cup \cdots \cup T_{k+1}$ es una gráfica finita. Como cada p_i es un punto de ramificación de Y, entonces Y contiene al menos $k+1$ puntos de ramificación. Así, Y contiene al menos k aristas.

Supongamos que se cumple (b). En este caso existe un punto $q \in X$ tal que $\mathrm{ord}(q, X) \geq \aleph_0$. Por [18, Ejemplo 8, pág. 277], q es el vértice de un k-odo simple de Y. Así, Y contiene al menos k aristas. Esto termina la prueba. $\square$

El siguiente resultado es muy útil para el desarrollo de nuestro objetivo, una prueba la puede encontrar en [4, Lema 3.3].

Teorema 4.6. *Si α es un arco en $F_n(X)$ que une los elementos A y B, entonces $\bigcup \alpha$ tiene un número finito de componentes tal que cada una de ellas es localmente conexa e intersecta a los conjuntos A y B.*

De ahora en adelante, cuando nos referimos a X como una gráfica finita, vamos a asumir que

$$X \text{ tiene } m \text{ aristas, } E_1, \ldots, E_m, \quad \text{con } m \in \mathbb{N}.$$

Sea X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Dados $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $i_1 + \cdots + i_m = n$, consideramos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ como el subconjunto de $F_n(X)$ tal que cada miembro de $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ tiene exactamente i_j elementos en el interior de la arista E_j, para cada $i_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir,

$$\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) = \{A \in F_n(X) \colon \mid A \cap \mathrm{int}_X(E_j) \mid = i_j, \text{ para cada } \\ j \in \{1, \ldots, m\} \text{ y } i_1 + \cdots + i_m = n\}.$$

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación:

$$\mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \text{ si } i_j = n \text{ para algún } j \in \{1, \ldots, m\} \text{ y}$$

$$\mathcal{K}_X(i_1, i_2) = \mathcal{K}_X(i_1, i_2, \ldots, i_m) \text{ si } i_1 \neq 0, i_2 \neq 0 \text{ y } i_j = 0, \text{ para cada} \\ j \in \{3, \ldots, m\}.$$

Note que $\mathcal{K}_X^j \subset \langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle$ y $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j) = \langle E_j \rangle$.

Haciendo uso del Lema 3.4, podemos probar las siguientes propiedades de los conjuntos definidos anteriormente.

Lema 4.7. *Si X es una gráfica finita y $m \in \mathbb{N}$, donde m es el número de aristas de X, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(a) $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ *es arco conexo.*

(b) $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)\cap\mathcal{K}_X(l_1,\ldots,l_m)=\emptyset$ *si y solo si existe* $j\in\{1,\ldots,m\}$ *tal que* $i_j\neq l_j$.

(c) $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ *es un subconjunto abierto de* $\mathcal{E}_n(X)$.

Demostración. (a) Sea $A,B\in\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$. Si $A,B\subset \mathrm{int}_X(E_j)$, para algún $E_j\in\mathcal{A}_S(X)$, por el Lema 3.4, existe un arco con puntos extremos A y B, es decir, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ es arco conexo.

Para cada $j\in\{1,\ldots,m\}$, sea $A_j=A\cap\mathrm{int}_X(E_j)$ y $B_j=B\cap\mathrm{int}_X(E_j)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_1,\ldots,A_k,B_1,\ldots,B_k$ son conjuntos no vacíos, con $k\leq m$. Así, $A=A_1\cup\cdots\cup A_k$ y $B=B_1\cup\cdots\cup B_k$. Note que para cada $j\in\{1,\ldots,k\}$, los conjuntos A_j y B_j cumplen las condiciones del Lema 3.4. Así, para cada $j\in\{1,\ldots,k\}$, existe un arco $\mathcal{A}_j$, con puntos extremos A_j,B_j, tal que $|C|=i_j$, para cada $C\in\mathcal{A}_j$. Así, existe un homeomorfismo $\alpha_j\colon[0,1]\longrightarrow\mathcal{A}_j$, para cada $j\in\{1,\ldots,k\}$. Así, de manera similar como en la prueba del Lema 3.4, la función $\alpha\colon[0,1]\longrightarrow\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ definida como:

$$\alpha(t)=\bigcup_{j=1}^{k}\alpha_j(t) \tag{2}$$

es continua. También, $\alpha(0)=A$ y $\alpha(1)=B$. Por tanto, por Lema 2.3, $\alpha([0,1])$ es un continuo localmente conexo, en particular, es arco conexo. Así, existe un arco $\mathcal{A}$ en $\alpha([0,1])\subset\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ con puntos extremos A y B. Por lo tanto, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ es arco conexo.

(b) Se sigue de la definición de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$.

(c) Sea $A\in\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$. Esto implica que $A\in\mathcal{N}_n(X)$. Por Lema 4.3, $A\in\mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)\subset\mathcal{E}_n(X)$. Supongamos que $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Sean $I_1,\ldots,I_n$ arcos ajenos por pares de X tales que $I_i\cap R(X)=\emptyset$ y $a_i\in\mathrm{int}_X(I_i)$, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$. Luego, $A\in\langle\mathrm{int}_X(I_1),\ldots,\mathrm{int}_X(I_n)\rangle$. Note que $\langle\mathrm{int}_X(I_1),\ldots,\mathrm{int}_X(I_n)\rangle\subset\mathcal{N}_n(X)$. Por Lema 4.3, $\langle\mathrm{int}_X(I_1),\ldots,\mathrm{int}_X(I_n)\rangle$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. Es claro que si $B\in\langle\mathrm{int}_X(I_1),\ldots,\mathrm{int}_X(I_n)\rangle-\{A\}$, entonces $|B|=n$. Dado $j\in\{1,\ldots,m\}$, como $|A\cap\mathrm{int}_X(E_j)|=i_j$, entonces $\mathrm{int}_X(E_j)$ contiene i_j de los arcos $I_1,\ldots,I_n$. Como los arcos $I_1,\ldots,I_n$ son ajenos por pares, tenemos que $|B\cap\mathrm{int}_X(E_j)|=i_j$. Esto implica que $B\in\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$. Así, $\langle\mathrm{int}_X(I_1),\ldots,\mathrm{int}_X(I_n)\rangle\subset\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. □

El siguiente resultado es una caracterización de las gráficas finitas, el cual es de gran importancia para el propósito de este trabajo.

Teorema 4.8. *Un continuo localmente conexo X es una gráfica finita si y solo si $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$ con un número finito de componentes, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Se sigue del Lema 4.3 que $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Por otro lado, por el Lema 4.1, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.

Note que $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Por el Lema 4.3, $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Mostraremos que la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{E}_n(X)$. Para esto sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{E}_n(X)$. Por Lema 4.2, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Esto implica que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Como X es una gráfica finita, por Lema 4.1, tenemos que $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X)$. Esto implica que $|A| = n$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Así, $|A \cap \operatorname{int}_X(E_j)| = l_j$, donde $l_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $|A| = n$, tenemos que $l_1 + \cdots + l_m = n$. Así, $A \in K_X(l_1, \ldots, l_m)$. Por lo tanto, la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{E}_n(X)$.

Como $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $F_n(X)$ es localmente conexo, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es localmente arco conexo, véase [22, Teorema 8.25]. Así, cada componente de $\mathcal{E}_n(X)$ intersecta a un conjunto de la forma $\mathcal{K}(i_1, \ldots, i_m)$. Como existe una cantidad finita de conjuntos $\mathcal{K}(i_1, \ldots, i_m)$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ tiene una cantidad finita de componentes.

Ahora, supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$, con r componentes, donde $r \in \mathbb{N}$ y que X no es una gráfica finita.

Como $F_n(X)$ es un continuo localmente conexo, las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son arco conexas [22, Theorem 8.26]. Por Teorema 3.2 existe una gráfica finita G contenida en X tal que G contiene al menos $k = 2r + 1$ aristas. Supongamos que $J_1, \ldots, J_k$ son tales aristas de G. Consideramos puntos $p_i \in \operatorname{int}_G(J_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Elegimos subconjuntos abiertos y conexos de X ajenos por pares $V_1, \ldots, V_k$ tales que $p_i \in V_i$ y $V_i \cap G \subset \operatorname{int}_G(J_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $\{p_i\} \in \langle V_i \rangle$ y $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$, podemos elegir elementos $A_i \in \langle V_i \rangle \cap \mathcal{E}_n(X)$, para cada

$i \in \{1, \ldots, k\}$. Así, tenemos $2r+1$ conjuntos, digamos $A_1, \ldots, A_{2r+1}$. Por el principio de las casillas, existe una componente $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_n(X)$ que contiene tres de los conjuntos A_i, con $i \in \{1, \ldots, k\}$, podemos suponer que son A_1, A_2 y A_3 los que pertenecen a la componente $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es arco conexo, existe un arco α_1 en $\mathcal{C}$ tal que α_1 une a A_3 y A_1, y un arco α_2 en $\mathcal{C}$ tal que α_2 une a A_3 y A_2. Consideramos un punto $x \in A_3$. Por Teorema 3.3, existe C_1 y C_2 componentes de $\bigcup \alpha_1$ y $\bigcup \alpha_2$, respectivamente, tales que $x \in C_1 \cap C_2$. Así, $C = C_1 \cup C_2$ es un continuo localmente conexo de $\bigcup \alpha_1 \cup \bigcup \alpha_2$ que intersecta a A_1, A_2 y A_3.

Note que cada punto $p \in C$, pertenece a un elemento de $\mathcal{E}_n(X)$. Por Teorema 4.4, p no es el vértice de un triodo simple de X, es decir, C es un continuo localmente conexo sin triodos simples. Por [22, 8.40], C es un arco o una curva cerrada simple. En cualquier caso, podemos concluir que existe un arco en X, el cual intersecta a los tres conjuntos A_1, A_2 y A_3. Sea β un arco en C con puntos extremos a_1 y a_2 tal que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ y $a_3 \in A_3 \cap \beta - \{a_1, a_2\}$. Por [22, Teorema 8.26] los conjuntos $V_1, \ldots, V_k$ son arco conexos. Como $a_3 \in V_3$, existe un arco α en V_3 con puntos extremos a_3 y p_3. Como los puntos de β no son vértice de un triodo simple de X y $a_3 \in \alpha \cap \beta$, entonces $\alpha \cap \beta$ es un arco. Como $a_1 \in V_1$ y $a_2 \in V_2$, entonces los puntos a_1 y a_2 no pertenecen a V_3. Esto implica que $a_1, a_2 \notin \alpha$ y que $\alpha \subset \beta$. Así, β intersecta el arista J_3. Como J_3 tiene un vértice v de un triodo simple de X, entonces $v \notin \beta$. Luego, $J_3 \not\subset \beta$. Nuevamente, como β no contiene vértice de un triodo simple de X, tenemos que $a_1 \in J_3$ o $a_2 \in J_3$. Si $a_1 \in J_3$, entonces $a_1 \in V_1 \cap J_3$ y como $V_1 \cap G \subset \operatorname{int}_G(J_1)$, entonces $a_1 \in J_3 \cap \operatorname{int}_G(J_1)$, lo cual es una contradicción, ya que J_1 y J_3 son aristas de la gráfica finita G, véase el Lema 2.1. Por lo tanto, X es una gráfica finita. $\square$

Teorema 4.9. *Si X es una gráfica finita y $A \in F_{n-1}(X)$, con $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$, entonces A no tiene vecindades en $F_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una vecindad de A en $F_n(X)$. Como $A \in F_{n-1}(X)$, podemos considerar puntos distintos, $p_1, \ldots, p_{n-1}$, de X y subarcos ajenos por pares $I_1, \ldots, I_{n-1}$ de X tales que $p_i \in I_i - E(I_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y $\langle I_1, \ldots, I_{n-1} \rangle \subset \mathcal{U}$.

Dado $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, existe un homeomorfismo $f_i : [0,1]^2 \to F_2(I_i)$ tal que $f_i([0,1] \times \{0\}) = F_1(I_i)$ y $f_i(\frac{1}{2}, 0) = \{p_i\}$. Consideramos la función

$\alpha_i : [0,1] \to F_1(I_i)$, dada por $\alpha_i(t) = f_i(t,0)$. Con esto definimos $\phi : [0,1]^{n-1} \times [-1,1] \to \mathcal{U}$ de la siguiente manera:

$$\phi(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} f_1(t_1,t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}), & \text{si } t_n \geq 0, \\ \alpha_1(t_1) \cup f_2(t_2,-t_n) \cup \alpha_3(t_3) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}), & \text{si } t_n \leq 0. \end{cases}$$

Note que ϕ es una función continua con la siguiente propiedad: para cada $z \in [0,1]^{n-1} \times [-1,1]$, se tiene que $\phi(z) \in \langle I_1,\ldots,I_{n-1}\rangle \subset \mathcal{U}$.

Veamos que ϕ es inyectiva. Para esto suponga que $\phi(t_1,\ldots,t_n) = \phi(s_1,\ldots,s_n)$.

Caso I. $t_n, s_n \geq 0$. Esto implica que $f_1(t_1,t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) = f_1(s_1,s_n) \cup \alpha_2(s_2) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(s_{n-1})$. Como los arcos $I_1,\ldots,I_{n-1}$ son ajenos por pares, se obtiene que $f_1(t_1,t_n) = f_1(s_1,s_n)$, $f_2(t_2,0) = f_2(s_2,0),\ldots, f_{n-1}(t_{n-1},0) = f_{n-1}(s_{n-1},0)$. Como cada $f_1,\ldots,f_{n-1}$ es inyectiva, $(t_1,\ldots,t_n) = (s_1,\ldots,s_n)$.

Caso II. $t_n, s_n \leq 0$. Se logra de manera similar que el Caso I.

Caso III. $s_n \leq 0 \leq t_n$. Esto implica que $f_1(t_1,t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) = \alpha_1(s_1) \cup f_2(s_2,-s_n) \cup \alpha_3(s_3) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(s_{n-1})$. Así, $f_1(t_1,t_n) = f_1(s_1,0)$, $f_2(t_2,0) = f_2(s_2,-s_n)$, $f_3(t_3,0) = f_3(s_3,0),\ldots, f_{n-1}(t_{n-1},0) = f_{n-1}(s_{n-1},0)$. Así, $(t_1,\ldots,t_n) = (s_1,\ldots,s_n)$.

En cualquier caso ϕ es inyectiva.

Denotemos por $\mathcal{C}$ =Im ϕ. Se tiene que $\mathcal{C}$ es una n-celda tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$. Consideramos el arco $\mathcal{A} = \{p_1,p_2,p_4,\ldots,p_{n-1}\} \cup f_3(\{\frac{1}{2}\} \times [0,1])$ y note que $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$. Observemos que el elemento

$$\phi(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2},0) = f_1(\frac{1}{2},0) \cup f_2(\frac{1}{2},0) \cup \cdots \cup f_{n-1}(\frac{1}{2},0) = \{p_1,\ldots,p_{n-1}\}$$

el cual pertenece a $\mathcal{A}$. Por otro lado, si $t > 0$, el conjunto $\{p_1,p_2,p_4,\ldots,p_{n-1}\} \cup f_3(\frac{1}{2},t)$ tiene dos puntos distintos sobre el arco I_3 y para cada $z = (t_1,\ldots,t_n) \in [0,1]^{n-1} \times [-1,1]$, se tiene que $\phi(z) \cap I_3 = \alpha_3(t_3)$, el cual es un conjunto singular. Con esto, tenemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{\phi(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2},0)\}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ es la unión de una n-celda $\mathcal{C}$ y el arco $\mathcal{A}$ el cual intersecta a $\mathcal{C}$ en un único punto el cual es un punto extremo de $\mathcal{A}$ y se encuentra en el interior como variedad de $\mathcal{C}$, (estos espacios son conocidos como n- sombrillas). Por el Teorema de la Invarianza del Dominio, tenemos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Como $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} \subset \mathcal{U}$, se concluye que $\mathcal{U}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema 4.10. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$.*

Demostración. Por el Lema 4.3 se tiene que $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.

Ahora, sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Por el Teorema 4.4, no existen puntos de A que sean el vértice de un triodo simple de X, es decir, $A \cap R(X) = \emptyset$. Supongamos que $A \in F_{n-1}(X)$. Por el Teorema 4.9, tenemos que A no tiene vecindades en $F_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$. Esto contradice el hecho de que $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Esto implica que $A \in F_n(X) - F_{n-1}(X)$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$. □

El siguente resultado nos dice quiénes son los conjuntos que son las componentes del subespacio $\mathcal{E}_n(X)$, para una gráfica finita X.

Teorema 4.11. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son los conjuntos de la forma:*

$$\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m), \text{ donde } i_1 + \cdots + i_m = n.$$

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Note que $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Así, la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X$ $(i_1, \ldots, i_m)$ está contenida en $\mathcal{N}_n(X)$. Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Esto implica que $|A| = n$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Ahora, para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, sea $l_k = |A \cap \text{int}_X(E_k)|$. Como $|A| = n$, tenemos que $l_1 + \cdots + l_m = n$. Así, $A \in \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m)$ y, en consecuencia, A pertenece a la unión de todos los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. De donde la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ coincide con el conjunto $\mathcal{N}_n(X)$. Por el Lema 4.10, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Se sigue del Lema 4.7 que los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ son abiertos, conexos y ajenos por pares de $\mathcal{E}_n(X)$. Esto prueba que éstos son las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$. □

5 Unicidad del hiperespacio $F_n(X)$ para X gráfica finita

Dados X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, consideramos la colección

$$R_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap R(X) \neq \emptyset\}.$$

El siguiente resultado es uno de los principales objetivos de este trabajo.

Teorema 5.1. *Sean X y Y continuos tales que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que X es una gráfica finita si y solo si Y es una gráfica finita.*

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita. Por [19, Lema 2] tenemos que $F_n(X)$ es un continuo localmente conexo. Sea $h : F_n(X) \to F_n(Y)$ un homeomorfismo. Se sigue que $F_n(Y)$ es un continuo localmente conexo, nuevamente por [19, Lema 2] obtenemos que Y es un continuo localmente conexo. Por el Teorema 4.8, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$ con un número finito de componentes. Como h es un homeomorfismo, $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$. Luego, $\mathcal{E}_n(Y)$ es un subconjunto abierto y denso en $F_n(Y)$ con un número finito de componentes. Nuevamente, el Teorema 4.8 implica que Y es una gráfica finita. □

Teorema 5.2. *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$. Para cada $A \in F_n(X)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $A \in F_1(X) - R_n(X)$;

(b) $A \notin \mathcal{E}_n(X)$ *y* A *tiene una base de vecindades* β *en* $F_n(X)$ *tal que* $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$ *es arco conexo, para cada* $\mathcal{U} \in \beta$.

Demostración. Supongamos (b). Como $A \notin \mathcal{E}_n(X)$, por el Teorema 4.10 tenemos que $A \in F_{n-1}(X) \cup R_n(X)$. Supongamos que $A = \{p_1, \ldots, p_r\}$, donde $1 \leq r \leq n$ y que todos los puntos $p_1, \ldots, p_r$ son diferentes. Sea $\delta_1 > 0$ tal que las bolas $B_X(\delta_1, p_1), \ldots, B_X(\delta_1, p_r)$ son ajenas por pares. Sea $\mathcal{U} \in \beta$ tal que $\mathcal{U} \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$ y sea $\delta > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(\delta, A) \subset \mathcal{U}$. Así,

$$B_{F_n(X)}(\delta, A) \subset \mathcal{U} \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A). \tag{3}$$

Vamos a probar que $A \notin R_n(X)$. Supongamos lo contrario, esto es, suponga que $A \in R_n(X)$.

Supongamos que $p_r \in R(X)$. Esto implica, que existen $J, L \in A_S(X)$ tales que $p_r \in J \cap L$. Consideremos dos conjuntos de n puntos diferentes, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_n\}$, de $X - R(X)$ tales que $d(x_i, p_i) < \delta$ y $d(y_i, p_i) < \delta$, para cada $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. Se sigue que $\{x_r, \ldots, x_n\} \subset B_X(\delta, p_r) \cap J$ y $\{y_r, \ldots, y_n\} \subset B_X(\delta, p_r) \cap L$. Denotemos $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $C = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Notemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, $d(x_i, p_i) < \delta$ implica que $x_i \in B_X(\delta, p_i)$ y $p_i \in B_X(\delta, x_i)$.

Por otro lado, como $\{x_r, \ldots, x_n\} \subset B_X(\delta, p_r)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \{x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r, \ldots, x_n\} &\subset B_X(\delta, p_1) \cup \cdots \cup B_X(\delta, p_{r-1}) \cup B_X(\delta, p_r) \\ &= N(\delta, A). \end{aligned}$$

Esto es, $B \subset N(\delta, A)$. Como $p_r \in B_X(\delta, x_r)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \{p_1, \ldots, p_r\} &\subset B_X(\delta, x_1) \cup \cdots \cup B_X(\delta, x_r) \\ &\subset B_X(\delta, x_1) \cup \cdots \cup B_X(\delta, x_r) \cup \cdots \cup B_X(\delta, x_n) \\ &= N(\delta, B). \end{aligned}$$

Es decir, $A \subset N(\delta, B)$. De donde, $H(A, B) < \delta$. Así, $B \in B_{F_n(X)}(\delta, A)$. Por la ecuación (3) tenemos que $B \in \mathcal{U}$. Como $|B| = n$ y $B \cap R(X) = \emptyset$, por el Teorema 4.10, tenemos que $B \in \mathcal{E}_n(X)$. Así, $B \in \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$. De manera similar $C \in \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$. Ahora, como $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$ es arco conexo, existe una función continua $\alpha\colon [0, 1] \to \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X) \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = C$.

Consideremos $V = \bigcup U$, donde U es la componente de $B_X(\delta_1, p_r) - \{p_r\}$ tal que $\{x_r, \ldots, x_n\} \cap U \neq \emptyset$. Sea $W = (B_X(\delta_1, p_r) - \{p_r\}) - U$. Notemos que U y W son subconjuntos abiertos de $B_X(\delta_1, p_r) - \{p_r\}$ tales que $V \cap W = \emptyset$, $\{x_r, \ldots, x_n\} \subset V$, $\{y_r, \ldots, y_n\} \subset W$ y $B_X(\delta_1, p_r) - \{p_r\} = V \cup W$.

Como $\alpha(t) \in \mathcal{E}_n(X)$, para cada $t \in [0, 1]$, se sigue del Teorema 4.10 que $\alpha(t) \in \mathcal{N}_n(X)$, es decir, $|\alpha(t)| = n$ y $\alpha(t) \cap R(X) = \emptyset$. En particular, $p_r \notin \alpha(t)$. Más aún, como $\alpha(t) \in \mathcal{U}$, por la ecuación (3), $\alpha(t) \in B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$. Así, $H(\alpha(t), A) < \delta_1$. Luego, $\alpha(t) \subset N(\delta_1, A)$. Luego, $\alpha(t) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \cdots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup V \cup W$.

Definimos las colecciones

$$K_1 = \{t \in [0, 1]\colon \alpha(t) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \cdots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup V\}$$

y

$$K_2 = \{t \in [0, 1]\colon \alpha(t) \cap W \neq \emptyset\}.$$

Note que $[0, 1] = K_1 \cup K_2$. Como W no intersecta a $B_X(\delta_1, p_1), \ldots, B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup V$ tenemos que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Además, $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = C$, se sigue que $0 \in K_1$ y $1 \in K_2$.

Ahora, sea $t \in K_1$. Tenemos que $\alpha(t) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \cdots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup V$. Suponga que $\alpha(t) = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Sea $\delta_0 > 0$ tal que $B_X(\delta_0, t_1), \ldots, B_X(\delta_0, t_n)$ son ajenos por pares y cada uno de ellos está contenido en un conjunto de la forma $B_X(\delta_1, p_i)$ o en V. Dado que α es continua, existe $r_0 > 0$ tal que si $|s-t| < r_0$, entonces $H(\alpha(s), \alpha(t)) < \delta_0$. Así

$$\alpha(s) \subset N(\delta_0, \alpha(t)) = \bigcup_{i=1}^{n} B_X(\delta_0, t_i) \subset (\bigcup_{i=1}^{r-1} B_X(\delta_1, p_i)) \bigcup V.$$

De donde, $\alpha(s) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \cdots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup V$. Así, $s \in K_1$. Por lo tanto, K_1 es un subconjunto abierto de $[0,1]$.

Sea $w \in K_2$. Esto implica $\alpha(w) \cap W \neq \emptyset$. Supongamos que $\alpha(w) = \{w_1, \ldots, w_n\}$ y que w_n es un elemento de W. Sea $\delta_0 > 0$ tal que $B_X(\delta_0, w_1), \ldots,$ $B_X(\delta_0, w_n)$ son ajenos por pares y $B_X(\delta_0, w_n) \subset W$. Dado que α es continua, existe $r_0 > 0$ tal que si $|s-w| < r_0$, entonces $H(\alpha(s), \alpha(w)) < \delta_0$. Así,

$$\alpha(s) \subset N(\delta_0, \alpha(w)) = \bigcup_{i=1}^{n-1} B_X(\delta_0, w_i) \bigcup B_X(\delta_0, w_n).$$

Como $|s-w| < r_0$ se sigue que $\alpha(s) \cap B_X(\delta_0, w_n) \neq \emptyset$. Como $B_X(\delta_0, w_n) \subset W$, tenemos que $\alpha(s) \cap W \neq \emptyset$. Así, $s \in K_2$. Por lo tanto, K_2 es un subconjunto abierto de $[0,1]$.

Con todo K_1 y K_2 forman una separación del intervalo $[0,1]$. Esta contradicción demuestra que $A \notin R_n(X)$.

Por lo tanto, concluimos que $A \in F_{n-1}(X) - R_n(X)$.

Por otro lado, supongamos que $A \notin F_1(X)$, es decir, $r > 1$. Elegimos conjuntos $\{x_{r+1}, \ldots, r_n\} \in B_X(\delta, p_1) - \{p_1\}$ y $\{y_{r+1}, \ldots, y_n\} \in B_X(\delta, p_r) - \{p_r\}$, donde los puntos $x_{r+1}, \ldots, r_n$ son todos distintos entre sí y los puntos $y_{r+1}, \ldots, y_n$ también. Consideremos $B = \{p_1, \ldots, p_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ y $C = \{p_1, \ldots, p_r, y_{r+1}, \ldots, y_n\}$. Note que $B, C \in \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$. Por la elección de β, existe una función continua $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X) \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = C$.

Ahora, definimos las colecciones

$$T_1 = \{t \in [0,1] \colon \alpha(t) \text{ contiene exactamente un punto de } B_X(\delta_1, p_1)\}$$

y

$$T_2 = \{t \in [0,1] \colon \alpha(t) \text{ contiene más de un punto de } B_X(\delta_1, p_1)\}.$$

Notemos que $[0,1] = T_1 \cup T_2$, $1 \in T_1, 0 \in T_2$ y $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

Ahora, vamos probar que T_1 y T_2 son subconjuntos abiertos del intervalo $[0,1]$.

Dado $t \in T_2$, consideremos $\alpha(t) = \{w_1, \ldots, w_n\}$, donde $w_1, \ldots, w_n$ son puntos distintos entre sí. Sabemos que $\alpha(t)$ contiene al menos dos puntos de $B_X(\delta_1, p_1)$. Supongamos que tales puntos son $w_1, w_2 \in B_X(\delta_1, p_1)$. Sea $\delta_0 > 0$ tal que las bolas $B_X(\delta_0, w_1), \ldots, B_X(\delta_0, w_n)$ son ajenas por pares y $B_X(\delta_0, w_1) \cup B_X(\delta_0, w_2) \subset B_X(\delta_1, p_1)$. Dado que α es continua, tenemos que existe $r_0 > 0$ tal que si $|s-t| < r_0$, entonces $H(\alpha(s), \alpha(t)) < \delta_0$. De donde

$$\alpha(s) \subset N(\delta_0, \alpha(t)) = \bigcup_{i=1}^{n} B_X(\delta_0, w_i)$$

y $\alpha(s) \cap B_X(\delta_0, w_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, existen puntos $s_1 \in \alpha(s) \cap B_X(\delta_0, w_1)$ y $s_2 \in \alpha(s) \cap B_X(\delta_0, w_2)$. Como $B_X(\delta_0, w_1) \cup B_X(\delta_0, w_2) \subset B_X(\delta_1, p_1)$, entonces $\alpha(s)$ contiene al menos dos puntos en $B_X(\delta_1, p_1)$. Esto implica que $s \in T_2$. Por lo tanto, T_2 es un subconjunto abierto de $[0,1]$.

Ahora, vamos a probar que T_1 es un subconjunto abierto de $[0,1]$. Sea $t \in T_1$ y supongamos que $\alpha(t) = \{w_1, \ldots, w_n\}$, donde $w_1, \ldots, w_n$ son puntos diferentes entre sí. Podemos suponer que w_1 es el único punto de $\alpha(t)$ tal que $w_1 \in B_X(\delta_1, p_1)$. Como $\alpha(t) \in \mathcal{U}$, tenemos que $\alpha(t) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \cdots \cup B_X(\delta_1, p_r)$. Así, tomamos $\delta_0 > 0$ tal que los conjuntos $B_X(\delta_0, w_1), \ldots, C_X(\delta_0, w_n)$ son ajenos por pares y cada uno de ellos está contenido en un conjunto de la forma $B_X(\delta_1, p_j)$, para algún $j \in \{1, \ldots, r\}$. Como w_1 es el único punto que pertenece a $B_X(\delta_1, p_1)$, tenemos que $B_X(\delta_1, p_1) \cap (B_X(\delta_0, w_2) \cup \cdots \cup B_X(\delta_0, w_n)) = \emptyset$. Dado que α es continua, existe $r_0 > 0$ tal que si $s \in [0,1]$ con $|s-t| < r_0$, entonces $H(\alpha(s), \alpha(t)) < \delta_0$. De donde

$$\alpha(s) \subset N(\delta_0, \alpha(t)) = \bigcup_{i=1}^{n} B_X(\delta_0, w_i)$$

y $\alpha(s) \cap B_X(\delta_0, w_i) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, existe un único punto, digamos s_1, tal que $s_1 \in B_X(\delta_0, w_1)$. Como $B_X(\delta_0, w_1) \subset B_X(\delta_1, p_1)$, entonces $\alpha(s)$ tiene exactamente un punto en $B_X(\delta_1, p_1)$. Luego, $s \in T_1$. Por lo tanto, T_1 es un subconjunto abierto de $[0,1]$.

Con todo el intervalo $[0,1]$ no es conexo. Esta contradicción demuestra que $A \in F_1(X) - R_n(X)$. Es decir, se satisface la parte (a).

Ahora supongamos (a). Supongamos que $A = \{p\}$ para algún $p \in X - R(X)$. Así, existe un $\delta > 0$ tal que $B_X(\delta, p) \subset J$, para algún $J \in \mathcal{A}_S(X)$ y $B_X(\delta, p) \cap R(X) = \emptyset$. Así, $B_X(\delta, p)$ es homeomorfo a un subintervalo L de $[0, 1]$. Identificamos $B_X(\delta, p)$ con L. Sea $\beta = \{B_{F_n(X)}(\eta, A) : 0 < \eta < \delta\}$. Así, β es una base de vecindades de A en $F_n(X)$. Vamos a probar que si $\eta > 0$ y $B, C \in B_{F_n(X)}(\eta, A) \cap \mathcal{E}_n(X)$, con $B \neq C$, existe un arco en $B_{F_n(X)}(\eta, A) \cap \mathcal{E}_n(X)$ con extremos B y C. Como $B, C \in N(\delta, p) = L$, podemos suponer que $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ y $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, con $b_1 < \cdots < b_n$ y $c_1 < \cdots < c_n$. Definimos, $\alpha : [0, 1] \to B_{F_n(X)}(\eta, A) \cap \mathcal{E}_n(X)$ como $\alpha(t) = \{tb_1 + (1-t)c_1, \ldots, tb_n + (1-t)c_n\}$. Notemos que α es una función continua tal que $\alpha(0) = C$ y $\alpha(1) = B$. Por lo tanto, $B_{F_n(X)}(\eta, A) \cap \mathcal{E}_n(X)$ es arco conexo. Como $A \in F_1(X)$, y $n \geq 4$, por el Teorema 4.10, $A \notin \mathcal{E}_n(X)$. Con esto se cumple (b). □

Teorema 5.3. *Sean X y Y gráficas finitas y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$. Si $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Sea $h : F_n(X) \to F_n(Y)$ un homeomorfismo. Esto implica que $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$. Por el Teorema 5.2, tenemos que $h(F_1(X) - R_n(X)) = F_1(Y) - R_n(Y) \subset F_1(Y)$. Como $F_1(X) - R_n(X)$ es denso en $F_1(X)$ y $F_1(Y)$ es compacto, entonces $h(F_1(X)) \subset F_1(Y)$. De manera similar, podemos obtener que $h^{-1}(F_1(Y)) \subset F_1(X)$. Por lo tanto, $h(F_1(X)) = F_1(Y)$. Es decir, $F_1(X)$ es homeomorfo a $F_1(Y)$. Así, X es homeomorfo a Y. □

El siguiente es el resultado principal de este capítulo. Es una consecuencia de los Teoremas 5.1 y 5.3.

Teorema 5.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$. Si X es una gráfica finita y Y un continuo tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

6 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros el tiempo dedicado a la minuciosa revisión de este trabajo. Las sugerencias dieron como resultado la calidad de este material.

Bibliografía

[1] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace $HS_m^n(X)$ for a finite graph X is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.

[2] F. Barragán, *On the n-fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. 157 (2010) 597–604.

[3] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875–882.

[4] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.

[5] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua,* Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.

[6] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace,* Houston J. Math. 33 (3) (2007), 795–805.

[7] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$,* Topology Proc. 44 (2014), 75–95.

[8] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, G. Montero Rodríguez, *Dendritas $C-$Determinadas* (Caítulo 8), Matemáticas y su Aplicaciones 4, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014, págs. 183–207, Primera Edición, ISBN: 978 607 487 791 5.

[9] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, G. Montero Rodríguez, *Indescomponibilidad* (Caítulo 8), Matemáticas y su Aplicaciones 5, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2015, págs. 187–213, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-934-6.

[10] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, G. Montero Rodríguez, *Continuos con hiperespacio rígido $C_n(X)$* (Caítulo 7), Matemáticas y su Apli-

caciones 9, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2018, págs. 141–161, Primera Edición, ISBN: 978-607-525-520-0.

[11] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, G. Montero Rodríguez, *Los continuos enrejados tienen* $(n, m)-$*ésimo hiperespacio suspensión único* (Caítulo 7), Matemáticas y sus Aplicaciones 12, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2019, págs. 151–166, Primera Edición, ISBN: 978-607-525-616-0.

[12] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, G. Montero Rodríguez, *La clase de las gráficas finitas es* SF_n-*cerrada* (Caítulo 7), Matemáticas y su Aplicaciones 15, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2020, págs. 147–167, Primera Edición, ISBN: 978-607-525-696-2.

[13] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products,* Journal of Mathematics Research 4(4) (2012), 1–9.

[14] A. Illanes, *Finite graphs* X *have unique hyperspaces* $C_n(X)$*,* Topology Proc. 27 (2003), 179–188.

[15] A. Illanes, *Models of hyperspaces*, Topology Proc. 41 (2013), 39–64.

[16] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[17] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[18] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Polish Scientific Publishers and Academic Press, Inc. New York, 1968.

[19] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric product of continua*, Topology Proc. 22 (1997), 125–138.

[20] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138 (2004), 125–138.

[21] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique n-fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 2019–233.

[22] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

[23] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx
mjlopez@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx
218570078@alumnos.fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 17, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-765-5

Capítulo 4

On the $n-$fold hyperspace suspension of continua and the uniqueness of hyperspaces

Gerardo Hernández Valdez, Alexander Bykov, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Abstract

Let $n \in \mathbb{N}$ and X be a metric continuum. We consider the hyperspaces $C_n(X)$ (respectively, $F_n(X)$) of all nonempty closed subsets of X with at most n components (respectively, n points). The $n-$fold hyperspace suspension of X was defined in 2004 by S. Macías, to be the quotient space $C_n(X)/F_n(X)$, denoted by $HS_n(X)$. In this chapter we give proofs of some properties for this hyperspace. Also, we present several advances on the theory of uniqueness of hyperspaces for some collections of continua.

1 Introduction

Recently, the study of the uniqueness of hyperspaces has become a relevant field in continuum theory. In this context, the $n-$fold hyperspace suspension $HS_n(X)$ has been addressed in [18].

Recall that a *continuum* is a nonempty compact, connected metric space. A *subcontinuum* is a continuum contained in a continuum X. The set of positive integers is denoted by $\mathbb{N}$.

Given a continuum X and $n \in \mathbb{N}$, we consider the following hyperspaces of X:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ is a nonempty closed subset of } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ has at most } n \text{ components}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ has at most } n \text{ points}\}, \text{ and}$$

$$C(X) = C_1(X).$$

All these hyperspaces are metrized by the Hausdorff metric [12, Theorem 2.2]. The hyperspaces $F_n(X)$ and $C_n(X)$ are called the *n-fold symmetric product of* X and the *n-fold hyperspace* of X, respectively.

Let X be a continuum and let $n \in \mathbb{N}$. We denote by $HS_n(X)$ the $n-fold$ $hyperspace\ suspension\ of\ X$, defined to be the quotient space $C_n(X)/F_n(X)$. The latter space is obtained from $C_n(X)$ by identifying $F_n(X)$ to a one-point set with the quotient topology. By [26, Theorem 3.10], $HS_n(X)$ is a continuum.

In 2004 S. Macías introduced the $n-$fold hyperspace suspension of a continuum in [18]. Later, in 2008, J. C. Macías introduced the n-fold pseudo-hyperspace suspension of a continuum $HS_1^n(X)$, in [15]. Furthermore, the hyperspace $HS_1^n(X)$ has been addressed in [5], [7], [8], [15], [18] – [24]. The study of $(n,m)-$fold hyperspace suspension, $HS_m^n(X)$, defined as the quotient topology between $C_n(X)$ and $F_m(X)$ for $n \geq m$ is therefore a generalization of the latter research, see [1].

For a continuum X and $n, m \in \mathbb{N}$ satisfying that $m \leq n$, the symbol $q_X^{(n,m)}$ denotes the natural projection $q_X^{(n,m)}\colon C_n(X) \to HS_m^n(X)$, and F_X^m denotes the element $q_X^{(n,m)}(F_m(X))$. Notice that

$$q_X^{(n,m)}|_{C_n(X)-F_m(X)}\colon C_n(X) - F_m(X) \to HS_m^n(X) - \{F_X^m\}$$

is a homeomorphism.

For the purposes of this work, we will be interested mainly in the case $n = m$, using the following notation:

$$q_X^n : C_n(X) \to C_n(X)/F_n(X)$$

denotes the natural projection and $q_X^n(F_n(X) = F_X^n$.

For a continuum X, let $\mathcal{H}(X)$ be any of the hyperspaces defined above. We say that X has *unique hyperspace* $\mathcal{H}(X)$, whenever the following implication holds: if Y is a continuum and $\mathcal{H}(X)$ is homeomorphic to $\mathcal{H}(Y)$, then X is homeomorphic to Y.

The main topics of this work are summarized up in the following general problems.

(1) To summarize general properties of this hyperspace.

(2) To present advances on the uniqueness of hyperspaces of certain families of continua.

Particularly, this chapter aims the study of the latter problems for the $(n, m)-$hyperspace suspension of a continuum X, that is currently being analyzed by the authors.

2 Definitions and Preliminary Results

Given a subset A in X, $\mathrm{int}_X(A)$, $\mathrm{cl}_X(A)$, and $\mathrm{Bd}_X(A)$, denote the *interior*, the *closure*, and the *boundary* of A in X, respectively. If d is the metric of X, $\varepsilon > 0$, $Z \subset X$, and $z \in X$, the set $\{x \in X : d(z, x) < \varepsilon\}$ is denoted by $B_d(z, \varepsilon)$, or $B(z, \varepsilon)$ when there is no possibility of confusion. Let $N(\varepsilon, Z) = \bigcup\{B(z, \varepsilon) : z \in Z\}$. Given subsets $U_1, \dots, U_r$ of X, with $r \in \mathbb{N}$, let

$$\langle U_1, \dots, U_r \rangle_n = \{A \in C_n(X) : A \subset U_1 \cup \dots \cup U_r \text{ and } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ for each } i \in \{1, \dots, r\}\}.$$

It is known by [12, Theorem 1.2] that the family of all sets of the form $\langle U_1, \dots, U_r \rangle_n$, where $r \in \mathbb{N}$ and each U_i is an open set in X, is a basis for the topology in $C_n(X)$. In this paper, by *map* we mean continuous function.

Definition 2.1. *A topological space Z is said to be contractible provided that the identity map from Z onto Z is homotopic to a constant mapping from Z into Z.*

Definition 2.2. *A retraction is a map $r : Y \to Y$ such that $r(r(y)) = r(y)$ for each $y \in Y$. A subset Z of Y is said to be a retract of Y provided that there exists a retraction of Y onto Z. Finally, a compactum K is called an absolute retract provided that whenever K is embedded in a metric space Y, the embedded copy of K is a retract of Y.*

Definition 2.3. *A continuum is uniformly pathwise connected if it is the continuous image of the cone over the Cantor set [13, 3.5].*

Definition 2.4. *A continuum is said to be colocally connected, when each one of its points has a local base of open sets whose complements are connected.*

Definition 2.5. *The continuum X is aposyndetic if for each pair of points x and y of X, there exists a subcontinuum W of X such that $x \in \mathrm{int}_X(W) \subset W \subset X - \{y\}$. A continuum X is finitely aposyndetic provided that for each finite subset F of X and point x of X not in F, there exists a subcontinuum W of X such that $x \in \mathrm{int}_X(W) \subset W \subset X - F$.*

Definition 2.6. *A continuum X has the property of Kelley provided that for each $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that if p and q are two points of X satisfying $d(p, q) < \delta$, and if A is a subcontinuum of X containing p, then there exists a subcontinuum B of X such that $q \in B$ and $H(A, B) < \varepsilon$, where H is the Hausdorff metric.*

Definition 2.7. *A continuum X is said to be hereditarily indecomposable if $A \cap B = \emptyset$, or $A \subset B$, or $B \subset A$, for each $A, B \in C(X)$.*

It is easy to see that hereditarily indecomposable continua have the property of Kelley.

Definition 2.8. *Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. A map $\mu : C_n(X) \to [0, 1]$ is a strong size map provided that:*

(1) $\mu(A) = 0$ if $A \in F_n(X)$,

(2) if $A \subset B$, $A \neq B$ and $B \notin F_n(X)$, then $\mu(A) < \mu(B)$, and

(3) $\mu(X) = 1$.

Definition 2.9. *A free arc in a continuum X is an arc J with extreme points x and y such that $J - \{x, y\}$ is an open set in X.*

Definition 2.10. *A finite graph is a continuum that can be written as the union of finitely many arcs, each two of which are either disjoint or intersect only at one or both of their extreme points.*

For purpose of this paper, we also introduce the following notions. Given a continuum X, let

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x \text{ has a neighborhood } G \text{ in } X \text{ such that } G \text{ is a finite graph}\},$$

and let

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Recall that, as in [6], a continuum X is said to be *almost meshed* whenever the set $\mathcal{G}(X)$ is a dense subset of X. An almost meshed continuum X is *meshed* when X has a basis of neighborhoods $\mathfrak{B}$ such that $U - \mathcal{P}(X)$ is connected, for each element $U \in \mathfrak{B}$.

Definition 2.11. *Let X be a continuum, $n \in \mathbb{N}$, Λ be a class of continua, and $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X), HS_n(X)\}$. The class of continua Λ is said to be $\mathcal{H}$-*determined *if X is homeomorphic to Y when $\mathcal{H}(X)$ is homeomorphic to $\mathcal{H}(Y)$, for any two continua X and Y in Λ (as in [2]).*

We use the following notations: $\dim[X]$ stands for the dimension of X, $\dim_p[X]$ stands for the dimension of X at the point $p \in X$, as in [27, p. 5], and $\mathcal{Q}$ denotes the Hilbert cube.

Definition 2.12. *An order arc in 2^X is an arc α in 2^X such that if $A, B \in \alpha$, then $A \subset B$ or $B \subset A$.*

Finally, we consider the next useful result about the existence of order arcs.

Theorem 2.1. *[25, 1.8] Let $A_0, A_1 \in 2^X$ such that $A_0 \neq A_1$. Then, the following two statements are equivalent:*

(i) there exists an order arc in 2^X from A_0 to A_1,

(ii) $A_0 \subset A_1$ and each component of A_1 intersects A_0.

Corollary 2.2. *[9, Corollary 2.7] A contractible compact metric space K which is a Z-set of $\mathcal{Q}$ satisfies that $\mathcal{Q}/K$ is homeomorphic to $\mathcal{Q}$.*

Lemma 2.3. *[9, Lemma 2.8] Let X be a non-degenerate continuum and Z be a nowhere dense subcontinuum of X. Let $q : X \to X/Z$ be the natural function of the quotient space X/Z. Then $\mathrm{Bd}_{X/Z}(q(A)) = q(\mathrm{Bd}_X(A))$, where A is any closed subset of X.*

Lemma 2.4. *[9, Lemma 2.9] Let X be a compact metric space, A and Z be closed subsets of X such that $A \cap Z \neq \emptyset$, and $q : X \to X/Z$ and $r : A \to A/(A \cap Z)$ be the natural function of the respective quotient spaces. If Y is another closed subset of X such that $A \cap Y = A \cap Z$ and $p : X \to X/Y$ is the natural function of the quotient space, then*

(a) the function $g : q(A) \to A/(A \cap Z)$ given by $g(q(x)) = r(x)$, for each $x \in A$, is a homeomorphism.

(b) the function $h : q(A) \to p(A)$ given by $h(q(x)) = p(x)$, for each $x \in A$, is a homeomorphism.

Lemma 2.5 (Anderson's Homogeneity Theorem). *[12, Theorem 11.9.1] Any homeomorphism between two Z-sets of a Hilbert cube, can be extended to a homeomorphism of $\mathcal{Q}$ onto $\mathcal{Q}$.*

3 General properties of the $n-$fold hyperspace suspensions

The proofs of the results of this section are similar to the proofs given in the literature, such as [18] and [19]. We give the appropriate references and include some proofs for completeness and the convenience of the reader.

Theorem 3.1. *[18, 3.1] If X is a continuum, then $HS_n(X)$ is uniformly pathwise connected for any $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 3.2. *Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. Then, $HS_n(X)$ is locally arcwise connected at $q_X^n(X)$ and F_X^n. Moreover, any neighborhood of F_X^n in $HS_n(X)$ contains a simple closed curve passing through F_X^n.*

Proof. By [21, 2.3], $C_n(X)$ is locally arcwise connected at X. Hence, $HS_n(X)$ is locally arcwise connected at $q_X^n(X)$. Let $\mathcal{U}$ be an open set of $HS_n(X)$ containing F_X^n. Then $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$ is an open set of $C_n(X)$ containing $F_n(X)$. Now, let $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ be a strong size map. Since $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$ is open and $\mu(F_n(X)) = 0$ and μ is open, there exists $t_0 < 1$ such that $[0,t_0] \subset \mu((q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}))$. We claim that there exists $t \in \mu((q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})) - [0,t_0]$ such that $\mu^{-1}([0,t)) \subset (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$. Suppose this is not true. Then for each $n \in \mathbb{N}$, there exists $B_n \in \mu^{-1}\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$. Since $C_n(X)$ is a continuum, without loss of generality, we may assume that the sequence $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to a point B of $C_n(X)$. In fact, $B \in C_n(X) - (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$. Since μ is continuous, $\mu(B) \leq t_0$, a contradiction. Therefore, there exists $t \in \mu((q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})) - [0,t_0]$ sucht aht $\mu^{-1}([0,t)) \subset (q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$. Since μ is monotone, $\mu^{-1}([0,t))$ is connected. Clearly, $q_X^n(\mu^{-1}([0,t)))$ is an open arcwise subset of $HS_n(X)$ and $q_X^n(\mu^{-1}([0,t))) \subset \mathcal{U}$. Therefore, $HS_n(X)$ is locally arcwise connected at F_X^n. From this point of view, according to arguments in the previous paragraph, it is easy to see that for any neighborhood of F_X^n, there exist simple closed curves passing through F_X^n. □

A direct consequence of the existence of order arcs in $C_n(X)$ and Theorem 3.2 is the next important result.

Corollary 3.3. *Let X be a continuum. Then $HS_n(X)$ is a locally connected at F_X^n for any $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 3.4. *Let $n \in \mathbb{N}$. If X is an indecomposable continuum having the property of Kelley, then $q_X^n(X)$ and F_X^n are the only points at which $HS_n(X)$ is locally connected.*

Proof. By Corollary 3.3, $HS_n(X)$ is locally connected at F_X^n. By Theorem [17, Theorem 3.7], X is the only point at which $C_n(X)$ is locally connected. Since $q_X^n|_{C_n(X)-F_n(X)}$ is an open map (a homeomorphism indeed), we conclude that $HS_n(X)$ is locally connected at $q_X^n(X)$. □

Theorem 3.5. *If X is a hereditarily indecomposable continuum, then $q_X^n(X)$ and F_X^n are the only points at which $HS_n(X)$ is locally connected for any $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. Since X is a hereditarily indecomposable continuum, it has the property of Kelley, by [25, 16.27]. By Theorem 3.4, since X has the property of Kelley, $q_X^n(X)$ and F_X^n are the only points at which $HS^n(X)$ is locally connected. □

Theorem 3.6. *[18, 4.2] Let X be a continuum. Then $HS_n(X)$ is colocally connected for any $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 3.7. *[18, 4.3] Let X be a continuum. Then $HS_n(X)$ is aposyndetic for any $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 3.8. *[18, 4.4] Let X be a continuum. Then, $HS_n(X)$ if finitely aposyndetic for any $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 3.9. *[18, 5.1] If X is a continuum and $C_n(X) - F_n(X)$ is locally connected, then X is locally connected for any $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 3.10. *[18, 3.6] Let X be a finite-dimensional continuum and $n \in \mathbb{N}$. Then $\dim[C_n(X)] < \infty$ if and only if $\dim[HS^n(X)] < \infty$. Moreover, if either $\dim[C_n(X)] < \infty$ or $\dim[HS_n(X)] < \infty$, then $\dim[C_n(X)] = \dim[HS_n(X)]$.*

Theorem 3.11. *[22, 7.1.30] Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If $\mathcal{A} \in HS_n(X) - \{q_X^n(X), F_X^n\}$, then $HS_n(X) - \{q_X^n(X), \mathcal{A}\}$ is arcwise connected.*

Theorem 3.12. *[22, 7.1.31] Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If $\mathcal{A} \in HS_n(X) - \{F_X^n\}$ is such that $HS_n(X) - \{F_X^n, \mathcal{A}\}$ is not arcwise connected, then $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}) \in C(X)$.*

Theorem 3.13. *[22, 7.5.1] Let X be a continuum, $n \in \mathbb{N}$ and $A \in C_n(X)$. Then, $C_n(X) - \{A\}$ is not arcwise connected if and only if $HS_n(X) - \{q_X^n(A), F_X^n\}$ is not arcwise connected.*

The next results are consequence of the existence of order arcs in $C_n(X)$.

Theorem 3.14. *[18, 3.7] If X is a continuum, then $HS_n(X)$ contains an n-cell for any $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 3.15. *[18, 3.8] If X is a continuum that contains n pairwise disjoint decomposable subcontinua, then $HS_n(X)$ contains a $2n$-cell for any $n \in \mathbb{N}$.*

We now focus our attention into the concept of contractibility. First, recall the following result:

Theorem 3.16. *[19, 3.1] If X is an absolute rectract, then $F_n(X)$ is a strong deformation retract of 2^X.*

An immediate result that follows directly from this theorem is stated:

Corollary 3.17. *If X is an absolut retract and $n \in \mathbb{N}$, then $F_n(X)$ is a strong deformation retract of $C_n(X)$.*

Theorem 3.18. *If X is an absolute rectract, then $HS_n(X)$ is contractible for $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. Since $F_n(X)$ is a strong deformation retract of $C_n(X)$, there exists a map $H : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ such that $H(A,0) = A$, $H(A,1) = r(A)$ and $H(B,t)) = B$ for each $A \in C_n(X)$, each $B \in F_n(X)$ and $t \in [0,1]$, where $r : C_n(X) \to F_m(X)$ is a retraction.

Consider the function $G : HS_n(X) \times [0,1] \to HS_n(X)$ defined by

$$G(\mathcal{A}, t) = \begin{cases} q_X^n(H((q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}), t)), & \mathcal{A} \neq F_X^n \\ F_X^n, & \mathcal{A} = F_X^n \end{cases}$$

Note that $G(\mathcal{A}, 0) = \mathcal{A}$ and $G(\mathcal{A}, 1) = F_X^n$ and G is continuous by [4, 4.3, p.126]. Therefore, $HS_n(X)$ is contractible. $\square$

Using analogous arguments as in the proof of Theorem 3.18, the following result can be proved.

Theorem 3.19. *[19, 5.1] Let X be a continuum. If X is contractible, then $HS_n(X)$ is contractible.*

Now allow us to proceed with this section stating the following result about local connectedness, as well as several implications.

Lemma 3.20. *[18, 5.1] Let X be a continuum and $n \in \mathbb{N}$. If $C_n(X) - F_n(X)$ is locally connected, then X is locally connected.*

Theorem 3.21. *[18, 5.2] A continuum X is locally connected if and only if $HS_n(X)$ is locally connected for any $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. If X is locally connected, then, by [17, 3.2], $C_n(X)$ is locally connected. Thus, since $HS_n(X) = q_X^n(C_n(X))$, $HS_n(X)$ is locally connected [14, Theorem 5, p.257]. If $HS_n(X)$ is locally connected, then $HS_n(X)\{F_n^X\}$ is locally connected [14, Theorem 3, p.230]. Since $q_X^n|_{C_n(X)-F_n(X)} : C_n(X) - F_n(X) \to HS_n(X) - \{F_n^X\}$is a homeomorphism, we have that $C_n(X) - F_n(X)$ is locally connected. Therefore, by Lemma 3.20, X is locally connected. $\square$

Theorem 3.22. *[18, 5.3] If X is a contractible locally connected continuum without free arcs, then $HS_n(X)$ is homeomorphic to the Hilbert cube for any $n \in \mathbb{N}$. In particular, $HS_n(X)$ is homeomorphic to $C_n(X)$.*

Theorem 3.23. *[18, 5.4] $HS_n(\mathcal{Q})$ is homeomorphic to $\mathcal{Q}$, for any $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 3.24. *[18, 5.7] If X is a continuum such that $HS_n(X)$ is homeomorphic to either $HS_n([0,1])$ or $HS_n(S^1)$, then X is homeomorphic to either $[0,1]$ or S^1 for any $n \in \mathbb{N}$.*

To conclude this section, we present the following result about hereditarily indecomposable continua, that will be helpful in the next section.

Theorem 3.25. *Let X be a hereditarily indecomposable continuum, and let n, m be positive integers greater or equal than two. If Y is a continuum such that there exists a homeomorphism $h : HS_n(X) \to HS_m(Y)$, then Y is homeomorphic to X.*

Proof. Observe that $h(\{F_X^n, q_X^n(X)\} = \{F_Y^m, q_Y^m(Y)\}$, since F_X^n and $q_X^n(X)$ are the only points at which $HS_n(X)$ is locally connected.

Let $\mathcal{A} \in HS_n(X)$ be such that $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{X}) \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$. THen,$C_n(C) - \{(q_X^n(\mathcal{X})\}$ is not arcwise connected due to [16, 6.9]. Hence, by Theorem 3.13 $HS_n(X) - \{q_X^n(\mathcal{A}, F_X^n\}$ is not arcwise connected. As h is a homeomorphism, $HS_m(Y) - \{q_Y^m(h(\mathcal{A}), F_Y^m\}$ is not arcwise connected. By Theorem 3.11 and 3.12, it follows that $h(q_X^n(X)) = q_Y^m(Y)$ and $h(F_X^n) = F_Y^m$, and $(q_Y^m)^{-1}(h(\mathcal{A})) \in C(Y)$.

Let $g : C_n(X) - F_n(X) \to C_m(Y) - F_m(Y)$ be the homeomorphism defined by

$$g(A) = (q_Y^m)^{-1}\left(h\left(q_X^n(A)\right)\right)$$

.

Notice that $g(X) = Y$. Allow us to prove that $g(C(X) - F_1(X)) \subset C(Y) - F_1(Y)$.

Let $\mathcal{A} \in HS_n(X)$ be such that $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}) \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$. Then, by [22, 6.5.8], $C_n(X) - \{(q_X^n)^{-1}(\mathcal{A})\}$ is not arcwise connected. Hence, by Theorem 3.13, we obtain that $HS_n(X) - \{\mathcal{A}, F_X^n\}$ is not arcwise connected. Since h is a homeomorphism, $HS_m(Y) - \{h(\mathcal{A}), F_Y^m\}$ is not arcwise connected. Using Theorem 3.12 and since $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{A}) \notin F_1(X)$, it follows that $(q_Y^m)^{-1}(h(\mathcal{A})) \in C(Y) - F_1(Y)$.

By the proof of [22, 7.9.5], $g|_{C(X)-F_1(X)}$ can be extended to a map $\hat{g} : C(X) \to C(Y)$ in such a way that $\hat{g}$ is one-to-one and $\hat{g}(F_1(X)) \subset F_1(Y)$.

Let $Z \in C(Y)$ such that $F_1(Z) = \hat{g}(F_1(X))$. Then, $\hat{g}(C(X)) = C(Z)$. Since $\hat{g}(X) = Y$, we have that $Y \in C(Z)$. Hence, $Z = Y$ and $\hat{g}(F_1(X)) = F_1(Y)$. Thus, Y is homeomorphic to X. □

4 Uniqueness of hyperspaces

In [24] it is proved that finite graphs have unique hyperspace $HS_1^n(X)$. In Theorem 4.6, we prove that meshed continua have unique hyperspace $HS_m^n(X)$ for any $m \in \mathbb{N} - \{1\}, n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ with $m \leq n$. Since a finite graph is a meshed continuum, our result is complementary to [24, Theorem 5.7].

For a finite graph, we have the following results:

Theorem 4.1. *[1, Theorem 3.3] The class of finite graph is HS_n-determined, for each $n \in \mathbb{N}$.*

Theorem 4.2. *[1, Theorem 3.6] Let X be a finite graph, then $HS_n(X)$ has unique hyperspace $HS_n(X)$ for $n \in \mathbb{N}$.*

The proof of the following result is similar to the one in [9, Theorem 3.6].

Theorem 4.3. *The elements of the class of almost meshed locally connected continua are HS_n-determined, for any $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$.*

From Theorem 4.3 and [9, Theorem 3.6], we obtain the following result.

Corollary 4.4. *The elements of the class of almost meshed locally connected continua are HS_n-determined, for any $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$.*

Theorem 4.5. *Let X be a meshed continuum. If Y is a continuum such that $HS_n(X)$ is homeomorphic to $HS_n(Y)$, then Y is a meshed continuum for any $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$.*

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$. Since X is a locally connected continuum [6, Lemma 2], by Theorem 3.21, we have that $HS_n(X)$ is a locally connected continuum. Hence, $HS_n(Y)$ is a locally connected continuum. Again, by Theorem 3.21, we obtain that Y is a locally connected continuum.

Let $h\colon HS_n(X) \to HS_n(Y)$ be a homeomorphism, $A \in C_n(X)$ and $B \in C_n(Y)$ such that $h(q_X^n(A)) = F_Y^n$ and $h^{-1}(q_Y^n(B)) = F_X^n$. Let $\mathcal{K} = C_n(X) - (F_n(X) \cup \{A\})$ and $\mathcal{L} = C_n(Y) - (F_n(Y) \cup \{B\})$. Define $g\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ as $g = (q_Y^n)^{-1} \circ h \circ q_X^n|_{\mathcal{K}}$, which is a homeomorphism. Since $\mathcal{K}$ and $\mathcal{L}$ are open subsets of $C_n(X)$ and $C_n(Y)$, respectively, we have that $\dim_W[C_n(X)] = \dim_W[\mathcal{K}] = \dim_{g(W)}[\mathcal{L}] = \dim_{g(W)}[C_n(Y)]$, for each $W \in \mathcal{K}$. This implies $g(\mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{K}) = \mathcal{F}_n(Y) \cap \mathcal{L}$. By [6, Theorem 5], we obtain that $\mathcal{F}_n(X)$ is a dense subset of $C_n(X)$. Since $\mathcal{K}$ is an open subset of $C_n(X)$, we obtain that $\mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{K}$ is a dense subset of $\mathcal{K}$. Hence, $\mathcal{F}_n(Y) \cap \mathcal{L}$ is a dense subset of $\mathcal{L}$. Since $\mathcal{L}$ is a dense subset of $C_n(Y)$, we have that $\mathcal{F}_n(Y)$ is a dense subset of $C_n(Y)$. By [6, Theorem 5], we have that Y is a meshed continuum. □

The following are the main results of this section.

Theorem 4.6. *[8, Theorem 3.4] Let X be a meshed continuum, $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. Then X has unique hyperspace $HS_n(X)$.*

Theorem 4.7. *Let X be a hereditarily indecomposable continuum and $n \in \mathbb{N}$. Then X has unique hyperspace $HS_n(X)$.*

Proof. Let Y be a continuum such that there exists a homeomorphism $h : HS_n(X) \to HS_n(Y)$. By Theorem 3.25, Y is homeomorphic to X. Hence, X has unique hyperspace $HS_n(X)$ $\square$

Next, we focus our attention into finding collections of continua that do not have unique $n-$fold hyperspace suspension.

Using Theorem 3.22, we begin this section with the following result.

Theorem 4.8. *If X is a contractible locally connected continuum without free arcs, then X does not have unique hyperspace $HS_n(X)$, for any $n \in \mathbb{N}$.*

To illustrate Theorem 4.8, take D_r, D_k dendrites as constructed in [3, 2] with $r, k \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. Observe that these dendrites are not homeomorphic, however $HS_n(D_r)$ and $HS_n(D_k)$ are, by Theorem 3.24.

Finally, the main result of this section:

Theorem 4.9. *[9, 3.7] Let X be an almost meshed dendrite and $n, r \in \mathbb{N}$, such that $r \geq n$. Suppose there exists a contractible closed subset B of $\mathcal{P}(X)$ and pairwise disjoint nonempty open subsets $U_1, \ldots, U_{r+1}$ of X such that $X - B = \bigcup_{i=1}^{r+1} U_i$ and for each $i \in \{1, 2, ..., r+1\}$, $B \subset \mathrm{cl}_X(U_i)$. Then X does not have unique hyperspace $HS_n(X)$.*

Proof. Fix a point $b \in B$. By [6, Theorem 18], there exists a dendrite D without free arcs and disjoint to X such that $Y = X \cup_b D$ is not homeomorphic to X. Notice that Y is a dendrite. Since $b \in \mathrm{cl}_X(U_i)$, for each $i \in \{1, \ldots, r+1\}$, by the proof of [6, Theorem 22], we have that $C_n(Y)$ is homeomorphic to $C_n(X)$. In fact, the homeomorphism $h : C_n(X) \to C_n(Y)$ constructed in such proof satisfies $h(A) = A$, for each $A \in C_n(X) - C_n(X, B)$. In particular, $h(F_n(\mathcal{G}(X))) = F_n(\mathcal{G}(X))$ and since X is an almost meshed continuum, we obtain that

$$h(F_n(X)) = h(\mathrm{cl}_{C_n(X)} F_n(\mathcal{G}(X))) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)} F_n(\mathcal{G}(X)) = F_n(X).$$

Let $\mathcal{A} = C_n(Y)/F_n(X)$ and $q^n_{X,Y} : C_n(Y) \to \mathcal{A}$ the quotient function. Since

$$q^n_X|_{C_n(X)-F_n(X)} \colon C_n(X) - F_n(X) \to HS_n(X) - \{F^n_X\},$$
$$h|_{C_n(X)-F_n(X)} \colon C_n(X) - F_n(X) \to C_n(Y) - F_n(X),$$

$$q^n_{X,Y}|_{C_n(Y)-F_n(X)} \colon C_n(Y) - F_n(X) \to \mathcal{A} - \{F^n_{X,Y}\}.$$

are homeomorphisms, where $q^n_{X,Y}(F_n(X)) = \{F^n_{X,Y}\}$, we have that $HS_n(X) - \{F^n_X\}$ is homeomorphic to $\mathcal{A} - \{F^n_{X,Y}\}$. Hence, $q^n_{X,Y}(F_n(X))$ is homeomorphic to $\mathcal{A}$. So, to prove this theorem, we only need to show that $\mathcal{A}$ is homeomorphic to $HS_n(Y)$.

Let $R = D \cup_b B$. We are going to prove that $q^n_Y(C_n(Y,R))$ and $q^n_{X,Y}(C_n(Y,R))$ are Hilbert cubes. By [6, Theorem 16], $C_n(Y,R)$ is a Hilbert cube and by part (a) of [9, Lemma 2.9], we have that $q^n_Y(C_n(Y,R))$ is homeomorphic to $C_n(Y,R)/F_n(Y,R)$ and $q^n_{X,Y}(C_n(Y,R))$ is homeomorphic to $C_n(Y,R)/F_n(X,B)$. By Corollary 2.2, it is sufficient to show that $F_n(Y,R)$ and $F_n(X,B)$ are contractible and that they are Z-sets of $C_n(Y,R)$.

Claim 1. $F_n(Y,R)$ and $F_n(X,B)$ are contractible.

Proof of Claim. Observe that B is a compact contractible subset of X. By [22, 1.3.11], B is arcwise connected. Hence, B is a subcontinuum of X which also implies that B is a dendrite itself, due to [3, Theorem 1.3 (a)]. Thus, R is a dendrite and a subcontinuum of Y. Notice that, by [3, Theorem 1.2 (4)], each subcontinuum of Y is a strong deformation retract of Y, so there exists a map $H_1 \colon Y \times [0,1] \to Y$ such that $H_1(y,0) = y$, $H_1(y,1) \in R$ and $H_1(a,t) = a$, for each $y \in Y$, $a \in R$ and $t \in [0,1]$. Now, we define $G_1 : F_n(Y,R) \times [0,1] \to F_n(Y,R)$ by $G_1(E,t) = H_1(E \times \{t\})$. Clearly, G_1 is a map (because G_1 is the restriction of the composition of the function on $2^Y \times [0,1]$ given by $(E,t) \mapsto E \times \{t\} \in 2^{Y\times[0,1]}$ followed by the induced function $H_1^* : 2^{Y\times[0,1]} \to 2^Y$) and satisfies $G_1(A,0) = A$, for each $A \in F_n(Y,R)$, and $G_1(F_n(Y,R) \times \{1\}) = F_n(R)$. Since R is contractible [3, Theorem 1.2 (21)], there exists $c \in R$ and a map $H_2 : R \times [0,1] \to R$ such that $H_2(a,0) = a$ and $H_2(a,1) = c$, for each $a \in R$. We define $G_2 : F_n(R) \times [0,1] \to F_n(R)$ by $G_2(E,t) = H_2(E \times \{t\})$, for each $E \in F_n(R)$ and $t \in [0,1]$. In a similar way, it can be proved that G_2 is a map. Since $G_2(G_1(E,1),0) = G_1(E,1)$ we can define the function $G : F_n(Y,R) \times [0,1] \to F_n(Y,R)$ by

$$G(E,t) = \begin{cases} G_1(E,2t), & \text{if } E \in F_n(R) \text{ and } t \in [0,\frac{1}{2}], \\ G_2(G_1(E,1),2t-1), & \text{if } E \in F_n(R) \text{ and } t \in [\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

which is also a map. Moreover, G is a homotopy between the identity function of $F_n(Y,R)$ and a constant function. Thus, $F_n(Y,R)$ is contractible. Under similar arguments, it can be proved that $F_n(X,B)$ is contractible.

Since Y is locally connected, we can assume that the metric of Y, say d, is convex. Using the function Φ_ε, defined above, we have that $\Phi_\varepsilon(C_n(Y,R)) \subset$

$C_n(Y,R) - F_n(Y,R)$. Hence, $F_n(Y,R)$ and $F_n(X,B)$ (which is a closed subset of $F_n(Y,R)$) are Z-sets of $C_n(Y,R)$. By Corollary 2.2, we have that

$$q_Y^n(C_n(Y,R)) \text{ and } q_{X,Y}^n(C_n(Y,R)) \text{ are Hilbert cubes.} \tag{1}$$

On the other hand, by Lemma 2.3, we have that

$$\mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}(q_{X,Y}^n(C_n(Y,R))) = q_{X,Y}^n(\mathrm{Bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y,R))) \tag{2}$$

and

$$\mathrm{Bd}_{HS_n(Y)}(q_Y^n(C_n(Y,R))) = q_Y^n(\mathrm{Bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y,R))). \tag{3}$$

Moreover, by part (b) of Lemma 2.4, there exists a natural homeomorphism $h_1 : q_{X,Y}^n(C_n(X)) \to q_Z^n(C_n(X))$ such that

$$h_1(q_{X,Y}^n(A)) = q_Y^{(n,m)}(A), \text{ for each } A \in C_n(X).$$

Since $\mathrm{Bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y,R)) \subset \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(Y) - C_n(Y,R)) \subset C_n(X)$, we have that

$$h_1(q_{X,Y}^n(\mathrm{Bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y,R)))) = q_Y^n(\mathrm{Bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y,R))).$$

By equations (2) and (3), we have that

$$h_1(\mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}(q_{X,Y}^n(C_n(Y,R)))) = \mathrm{Bd}_{HS_n(Y)}(q_Y^n(C_n(Y,R))).$$

Claim 2. The space $\mathrm{Bd}_{HS_n(Y)}(q_Y^n(C_n(Y,R)))$ is a Z-set of $q_Y^n(C_n(Y,R))$.

Proof of Claim. Denote by η a metric for the hyperspace $HS_n(Y)$. Let $\varepsilon > 0$. Since $C_n(Y)$ is a compact subset of 2^Y, it is known that q_Y^n is a uniformly continuous function. Hence, there exists $\delta > 0$ such that if $P, Q \in C_n(Y)$ with $H(P,Q) < \delta$, then $\eta(q_Y^n(P), q_Y^n(Q)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

By [6, Theorem 22, Claim 2], there exists a continuous function

$$g_\delta : C_n(Y,R) \to C_n(Y,R) - \mathrm{Bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y,R))$$

such that $H(g_\delta(A), A) < \delta$ for all $A \in C_n(Y,R)$.

On the other hand, since regular sets are $Z-$sets of the Hilbert cube, there is a map

$$\gamma : q_Y^n(C_n(Y,R)) \to q_Y^n(C_n(Y,R)) - \{F_Y^n\}$$

with $\eta(\gamma(L), L) < \frac{\varepsilon}{2}$ for each $L \in q_Y^n(C_n(Y,R))$. Now, let $f = q_Y^n|_{C_n(Y) - F_n(Y)}$. By Lemma 2.3, it follows that $\mathrm{Bd}_{HS_n(Y)}(q_Y^n(C_n(Y,R))) = q_Y^n(\mathrm{Bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y,R)))$.

Therefore, we may define the map

$$f_\varepsilon : q_Y^n(C_n(Y,R)) \to q_Y^n(C_n(Y,R)) - \mathrm{Bd}_{HS_n(Y)}(q_Y^n(C_n(Y,R)))$$

as $f_\varepsilon(L) = q_Y^n \circ g_\delta \circ f^{-1} \circ \gamma(L)$ for each $L \in q_Y^n(C_n(Y,R))$.

Given $L \in q_Y^n(C_n(Y,R))$, we have that $H(g_\delta(f^{-1}(\gamma(L))), f^{-1}(\gamma(L))) < \delta$. Hence,
$\eta(q_Y^n(g_\delta(f^{-1}(L))), q_Y^n(f^{-1}(\gamma(L)))) < \frac{\varepsilon}{2}$. Thus, $\eta(f_\varepsilon(L), \gamma(L)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Since $\eta(\gamma(L), L) < \frac{\varepsilon}{2}$, it follows that $\eta(f_\varepsilon(L), L) < \varepsilon$. From here, the Claim is true.

Under arguments analogous to those in the previous claim, we obtain that $\mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}(q_{X,Y}^n(C_n(Y,R)))$ is a Y-set of $q_{X,Y}^n(C_n(Y,R))$. Since

$$h_1|_{\mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}(q_{X,Y}^n(C_n(Y,R)))} : \mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}(q_{X,Y}^n(C_n(Y,R))) \to \mathrm{Bd}_{HS_n(Y)}(q_Y^n(C_n(Y,R)))$$

is a homeomorphism and using sentence (1), by Anderson's Homogeneity Theorem (Lemma 2.5) there exists a homeomorphism

$$h_2 : q_{X,Y}^n(C_n(Y,R)) \to q_Y^n(C_n(Y,R))$$

such that $h_2(A) = h_1|_{\mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}(q_{X,Y}^n(C_n(Y,R)))}(A)$, for each $A \in \mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}(q_{X,Y}^n(C_n\,(Y,R)))$. We define $h : \mathcal{A} \to HS_n(Y)$ by

$$h(A) = \begin{cases} h_1(A), & \text{if } A \in \mathrm{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} - q_{X,Y}^n(C_n(Y,R))), \\ h_2(A), & \text{if } A \in q_{X,Y}^n(C_n(Y,R)). \end{cases}$$

Then h is a homeomorphism. Therefore X does not have unique hyperspace $HS_n(X)$. $\square$

5 Acknowledgment

The authors wish to thank the referees by their time and valuable observations regarding this work, that improved significantly its quality.

Bibliography

[1] J.G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace $HS_m^n(X)$ for a finite graph X is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.

[2] J.J. Charatonik, *Recent research in hyperspaces theory*, Extracta Mathematicae 18 (2) (2003), 235–262.

[3] J.J. Charatonik, W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Mat. Comun. 22, Sociedad Matemática Mexicana, México, (1998), 227–253.

[4] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.

[5] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum,* Topology Appl. 138 (2004), 109–124.

[6] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua,* Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.

[7] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$,* Topology Proc. 44 (2014), 75–95.

[8] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique n-fold hyperspace suspension,* Topology Appl. 196 (2015), 652–667.

[9] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique n-fold hyperspace suspension,* Houston J. Math. Volume 44, Number 4, (2018), 1335–1365.

[10] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$,* Topology Proc. 27 (2003), 179–188.

[11] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces,* Questions Answers Gen. Topology 30 (2012), 21–44.

[12] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[13] W. Kuperberg, *Uniformly pathwise connected continua*, in: N.M. Stavrakas, K.R. Allen (Eds.), Studies in Topology, Proc. Conf. Univ.

North Carolina, Charlotte, NC, 1974, Academic Press, New York, 315–324, 1975.

[14] K. Kuratowski, *Topology Vol. II*, Academic Press, New York, (1968).

[15] J.C. Macías, *On the n-fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, Glas. Mat. 43 (2008), 439–449.

[16] S. Macías, *On the hyperspaces Cn(X) of a continuum X*, Topology Appl. 109 (2001), 237–256.

[17] S. Macías, *On the hyperspaces Cn(X) of a continuum X, II*, Top. Proc. 25 (2000), 255–276.

[18] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138 (2004), 125–138.

[19] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua, II*, Glasnik Mat. 41(61)(2006), 335–343.

[20] S. Macías, S.B. Nadler Jr., *n-fold hyperspace, cones, and products,* Topology Proc. 26 (2001–2002), 255–270.

[21] S. Macías and S. B. Nadler, Jr., *Various Types of Local Connectedness in $n-$fold Hyperspaces*, Topology Appl., 154 (2007), 39 – 53.

[22] S. Macías, *Topics on continua*, 2nd ed., Springer, Cham, Switzerland, 2018.

[23] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n-fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. 32 (2006), 783–799.

[24] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique n-fold pseudo-hyperspace suspension*, Top. Proc. 52 (2018), 219–233.

[25] S.B. Nadler Jr., *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, volume 49 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* New York-Basel: Marcel Dekker Inc., 1978.

[26] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

[27] S.B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas Serie Textos 18, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2002.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

gerardo.hernandezval@alumnos.buap.mx
abykov@fcfm.buap.mx
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Probabilidad y Estadística

Matemáticas y sus aplicaciones 17, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-765-5

Capítulo 5

Rastreo de índices con horizonte aleatorio y soporte finito

Octavio Paredes Pérez, Víctor Hugo Vázquez Guevara y Hugo Adán Cruz Suárez
FCFM, BUAP

Abstract

Este trabajo está relacionado con la teoría de los Procesos de Decisión de Markov con Horizonte Aleatorio y Soporte Finito [1, 3, 4, 5, 8, 10]. El criterio de rendimiento empleado para evaluar la calidad de las políticas es el de recompensa total esperada. Uno de los principales objetivos de la ciencia de datos es ayudar a tomar mejores decisiones. Los Procesos de Decisión de Markov proporcionan un sistema útil para crear e implementar un proceso en la toma de decisiones en donde existen varios escenarios posibles y cuyos resultados son en parte al azar [1] – [11].

1 Introducción

Los procesos de decisión de Markov (PDM), proporcionan un marco matemático para la toma de decisiones secuenciales en situaciones en las que los resultados son en parte al azar y en parte bajo el control de un tomador de decisiones. Los PDM son útiles para el estudio de una amplia gama de problemas de optimización resueltos a través de la técnica de programación dinámica [1] – [11]. Un PDM es un proceso estocástico controlado que puede ser a tiempo discreto o continuo (en este trabajo se considerará el primero de estos escenarios), en cada etapa, el proceso se encuentra en algún estado y el tomador de decisiones puede elegir cualquier acción que esté disponible para dicho estado. El proceso responde en la siguiente etapa moviéndose al azar a un nuevo estado y dando al tomador de decisiones una recompensa, el problema central de los PDM es encontrar una "política óptima": una función que especifica las acciones del observador en cada etapa y que maximice la utilidad esperada o en su defecto que minimice los costos o penalizaciones. Los PDM se pueden resolver mediante programación lineal o programación dinámica, en este trabajo nos enfocaremos en la programación dinámica. Los PDM son usualmente estudiados considerando un horizonte finito fijo. Sin embargo, existe la posibilidad de que factores externos obliguen a concluir el proceso antes de lo planeado. De esta manera, es necesario considerar al horizonte como una variable aleatoria, la cual puede ser independiente del proceso.

2 Procesos de Decisión de Markov con horizonte finito determinista

Se resolverá el problema de interés por medio de un Proceso de Decisión de Markov, para ello se introducirá primero su definición en el caso en que se cuenta con horizonte finito.

Definición 2.1. Un Modelo de Decisión de Markov estacionario con horizonte $N \in \mathbb{N}$, consiste del conjunto (E, A, D, Q, r_n, g) con $n = 0, 1, \ldots, N-1$, en donde

- E es un espacio de Borel, llamado espacio de estados, dotado con la σ-álgebra $\mathfrak{E}$.

- $D \subset E \times A$ es un subconjunto medible de $E \times A$ y denota al conjunto de las posibles combinaciones estado-acción. Asumimos que D contiene la gráfica de alguna función medible $f : E \to A$, i.e. $(x, f(x)) \in D$ para cada $x \in E$. El conjunto de estas funciones está denotado por $\mathbb{F}$ y sus elementos son llamados selectores de la multifunción $x \to D(x)$. Para cada $x \in E$, el conjunto $D(x) = \{a \in A | (x, a) \in D\}$ es el conjunto de acciones admisibles para el estado x.

- $r_n : D \to \mathbb{R}$ es una función medible para cada $n = 1, 2, ..., N$, que proporciona la recompensa en una etapa del sistema, si el estado actual es x y la acción a es elegida.

- $g : E \to \mathbb{R}$ es una función medible, que proporciona la recompensa terminal del sistema (en el instante N) si el estado es x.

Cuando la transición de un estado a otro del sistema es influenciado por factores que redefinen la ley de transición de dichos estados, es posible expresarlas de la siguiente forma. Supongamos que $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ son variables aleatorias en el espacio medible $(Z, \mathfrak{Z})$. A estas variables se les llamará *perturbaciones*.

- Z es el espacio de perturbaciones, equipada con la σ-álgebra $\mathfrak{Z}$.

- Q^Z es un kérnel de transición estocástico para $B \in \mathfrak{Z}$ y $(x, a) \in D$. $Q^Z(B|x, a)$ denota la probabilidad de que la perturbación de la transición del sistema esté en B si el estado actual es x y la acción $a \in D(x)$ es tomada. Se le conoce como la ley de distribución de Z.

- $T : D \times Z \to E$ es una función medible del sistema y es conocida como la función de transición. $T(x, a, z)$ que proporciona el siguiente estado del sistema cuando la acción a es tomada y la perturbación z ocurre.

- Q es un kérnel de transición estocástico de E dado D para cualquier par fijo $(x, a) \in D$, la función $B \mapsto Q(B|x, a)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathfrak{E}$ y $(x, a) \mapsto Q(B|x, a)$ es medible para cualquier $B \in \mathfrak{E}$. La cantidad $Q(B|x, a)$ nos proporciona la probabilidad de que el estado; en la etapa siguiente, esté en B si el estado actual es x y la acción a es tomada, y puede ser descrita apartir de la función de transición T y el kérnel Q^Z comos igue:

$$Q(B|x, a) := Q^Z(\{z \in Z|T(x, a, z) \in B\}|x, a), \ B \in \mathfrak{E}.$$

Los conceptos que a continuación se enuncian, constituyen (*grosso modo*) el mecanismo encargado de la toma de decisiones como complemento del modelo antes descrito.

Definición 2.2.

a) Una *regla de decisión determinista-markoviana* en el instante n, es una función medible $f_n : E \to A$, tal que $f_n(x) \in D(x)$ para cualquier $x \in E$. Denotamos a F como el conjunto de todas las reglas de decisión determinista-markovianas.

b) Una sucesión de reglas de decisión $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ con $f_n \in F$ es llamada una *política* o *estrategia*.

Existen otros tipos de políticas, tanto más generales como más particulares. El conjunto de todas la políticas es denotado por Π, una referencia importante que aborda la clasificación de las políticas es [6]. La formalización del Modelo de Decisión de Markov bajo un espacio de probabilidad, nos permitirá asociarle una medida de probabilidad y en consecuencia se prodrá definir la esperanza matemática, que es de gran interés para el desarrollo de estos modelos. Consideremos un Modelo de Decisión de Markov en N etapas. Así, con el fin de ser matemáticamente más precisos, es posible definirlo de manera formal, es decir, asociándolo con un espacio de probabilidad. La *construcción canónica* de este espacio es como sigue[1]. Definimos un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ en donde

$$\Omega = E^N, \ \ \mathcal{F} = \mathfrak{E} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{E}.$$

Los elementos de Ω son de la forma $\omega = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ y las variables aleatorias X_1, $X_2, \ldots$, X_{N-1} están definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$ por

$$X_n(\omega) = X_n(x_0, x_1, \ldots, x_N) = x_n.$$

en donde $X_n(\omega)$ es la n-ésima proyección de ω.

Sean $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ una política fija y $x \in E$ el estado inicial del sistema. Entonces por el Teorema de Ionescu-Tulcea [1], existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}_x^\pi$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que:

i) $\mathbb{P}_x^\pi(x_0 \in B) = \delta_x(B)$ para cada $B \in \mathfrak{E}$ y

ii) $\mathbb{P}_x^\pi(X_{n+1} \in B|X_0, X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{P}_x^\pi(X_{n+1} \in B|X_n) = Q(B|X_n, f_n(X_n))$.

La expresión *ii)* es llamada *Propiedad de Markov*. La variable aleatoria X_n representa el estado del sistema en el instante n y a (X_n) se le conoce como *Proceso de Decisión de Markov*. Ahora se tendrá que imponer un supuesto que garantice que cualquier esperanza que aparezca, esté bien definida. Para esto, se denotará por $x^+ = max\{0, x\}$ a la parte positiva de x.

Suposición 2.3. *Se tiene que para $x \in E$*

$$\delta_N(x) := \sup_\pi \mathbb{E}_x^\pi[\sum_{k=0}^{N-1} r_n^+(X_k, \ f_k(X_k)) + g^+(X_N)] < \infty.$$

Se observa además que la suposición 2.3 se satisface si r_n y g están acotadas superiormente. Para poder determinar qué tan buena es una política se introducirá un criterio de rendimiento para cada estrategia. Se define para cada política $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ a la función $V(\pi, x)$ por

$$V(\pi, x) := \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} r_k(X_k,\ f_k(X_k)) + g(X_N) \right],\ \ x \in E. \tag{1}$$

$V(\pi, x)$ es llamada la recompensa total esperada de la política π. La función de valor óptimo V^* está definida por

$$V^*(x) := \sup_{\pi \in \Pi} V(\pi, x),\ x \in E.$$

$V^*(x)$ es la máxima recompensa total esperada. Las funciones $V(\pi, x)$ y $V^*(x)$ están bien definidas ya que

$$V(\pi, x) \leq V^*(x) \leq \delta_N(x) < \infty,\ \ x \in E.$$

En general, la existencia de una política óptima no está garantizada. Se tendrá que hacer la siguiente Suposición adicional sobre la estructura del problema para asegurarlo.

Suposición 2.4. *Existen conjuntos*

$$\mathbb{M} \subset \mathbb{M}(E) := \{v : E \to [-\infty, \infty) | v es\ medible, \}$$

y $\Delta \subset F$ tales que:

(i) $g \in \mathbb{M}$.

(ii) Si $v \in \mathbb{M}$ entonces $\mathcal{T}_n v$ está bien definida y $\mathcal{T}_n v \in \mathbb{M}$, (donde $\mathcal{T}_n v(x) := \sup_{a \in D(x)} \{r_n(x, a) + \int v(x') Q(dx'|x, a)\}$, $(x, a) \in D$).

(iii) Para cualquier $v \in \mathbb{M}$ existe un maximizador de v, $f \in \Delta$; i.e., $\mathcal{T}_{f,n} v(x) := r_n(x, f(x)) + \int v(x') Q(dx'|x, f(x)) = \mathcal{T}_n v(x)$, $x \in E$.

El siguiente Teorema proporciona un método de solución para los Problemas de Decisión de Markov.

Teorema 2.5. *Sean $V_0, V_1, \ldots, V_N$ funciones sobre E definidas por*

$$V_N(x) := g(x),$$

y para $n = N-1, N-2, \ldots, 0$

$$V_n(x) := sup_{D(x)}[r_n(x,a) + \int_E V_{n+1}(y)Q(dy|x,a)]. \tag{2}$$

Estas funciones son medibles y además, para cada $n = 0, \ldots, N-1$, existe un selector $f_n \in F$ tal que $f_n(x) \in D(x)$ alcanza su máximo en (2) para todo $x \in E$; es decir, $\forall x \in E$ y $n = 0, \ldots, N-1$, se tiene que

$$V_n(x) = r_n(x, f_n) + \int V_{n+1}(y)Q(dy|x, f_n).$$

Entonces la política determista markoviana $\pi^* = (f_0, \ldots, f_{N-1})$ es óptima, y la función de valor V^* es igual a V_0, i.e.,

$$V^*(x) = V_0(x) = V(\pi^*, x)\ \forall x \in E.$$

3 Procesos de decisión de Markov con horizonte aleatorio

En la literatura se encuentran referencias en donde se estudian problemas de control a tiempo discreto con horizonte aleatorio [3, 4, 5, 10], modelados mediante la teoría de los Procesos de Decisión de Markov. Se han considerado; por ejemplo, las siguientes condiciones: distribución de probabilidad arbitraria para el horizonte con soporte finito o distribución geométrica para el soporte infinito. Sea τ una variable aleatoria asociada a un espacio de probabilidad $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P})$. Se supondrá que la distribución de τ es conocida, con función de masa de probabilidad dada por $\rho_n := \mathbb{P}(\tau = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ donde N es un número entero positivo o $N = \infty$. Consideremos ahora un modelo de decisión de Markov $(E, A, \{D(x) : x \in E\}, Q, r)$ y se define el siguiente criterio de rendimiento

$$V^\tau(\pi, x) := \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\tau} r(x_n, a_n)\right], \tag{3}$$

$\pi \in \Pi$, $x \in E$, $\mathbb{E}$ denota el valor esperado con respecto a la distribución conjunta del proceso $\{(x_n, a_n)\}$ y τ. Luego, consideremos el correspondiente problema de control óptimo. Para ello, definamos a la siguiente función de valor óptimo

$$V^\tau(x) := \sup_{\pi\in\Pi} V^\tau(\pi, x), \ \forall x \in E. \tag{4}$$

De esta manera, el problema de control óptimo con horizonte aleatorio consiste en encontrar una política $\pi^* \in \Pi$ tal que $V^\tau(\pi^*, x) = V^\tau(x)$, para todo $x \in E$. Se considerará la siguiente Suposición que nos permitirá mostrar la equivalencia entre la función definida en la ecuación (3) y el criterio de rendimiento (1).

Suposición 3.1. *Para cualquier $x \in E$ y $\pi \in \Pi$ el proceso inducido*

$$\{(x_n, a_n)|n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

es independiente de τ.

Entonces, bajo la Suposición 3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} V^\tau(\pi, x) &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\tau} r(x_n, a_n)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\tau} r(x_n, a_n)|\tau\right]\right] \\ &= \sum_{m=0}^{N} \mathbb{E}_x^\pi\left[\sum_{n=0}^{m} r(x_n, a_n)\right]\rho_m \\ &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{n=m}^{N} \mathbb{E}_x^\pi\left[r(x_n, a_n)\right]\rho_m \\ &= \mathbb{E}_x^\pi\left[\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_n r(x_n, a_n)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

En donde $\pi \in \Pi$, $x \in E$ y $\mathbb{P}_n := \sum_{m=n}^{N} \rho_m = \mathbb{P}(\tau \geq n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Con esto se muestra una equivalencia entre un problema de control óptimo con horizonte aleatorio τ y un problema de control óptimo con horizonte $N+1$, con recompensa por etapa no homogéneo dado por $\mathbb{P}_n r$ y costo terminal igual a cero. Supongamos que $N < \infty$, entonces como ya se observó en (5), en este caso el criterio de rendimiento se reduce a:

$$V^{\tau}(\pi, x) = \mathbb{E}_x^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}_n r(x_n, a_n)\right],$$

donde $\pi \in \Pi$, $x \in E$ y donde $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\tau \geq n)$.

Notemos que el Teorema 3.3 supone la existencia de maximizadores, pero en algunas ocasiones éstos pueden darse explícitamente, sin embargo, desde un punto de vista teórico es necesario considerar la siguiente Suposición.

Suposición 3.2.

(a) La función de costo por etapa c es semicontinua inferiormente, no negativa e inf-compacta en $D(x)$.

(b) La ley de transición Q es fuertemente continua o débilmente continua.

El subsecuente Teorema proporciona la ecuación de programación dinámica que permite resolver el problema de control óptimo con horizonte aleatorio cuando la distribución del horizonte tiene soporte finito ($N < \infty$), la demostración se puede ver encontrar en [10].

Teorema 3.3. *Sean V_0, V_1,...,V_{N+1} funciones sobre E definidas por*

$$V_{N+1}(x) := 0$$

y para $n = N$, $N-1$,..., 0,

$$V_n(x) := \max_{a \in D_n(x)} [\mathbb{P}_n c(x, a) + \int_E V_{n+1}(y) Q(dy|x, a)], \tag{6}$$

para cada $x \in E$.

Bajo la Suposición 3.2, estas funciones son medibles y para cada $n = 0, 1, \ldots, N$, existe $f_n \in F$ tal que $f_n(x) \in D(x)$ alcanza el máximo en (6) para todo $x \in E$, esto es

$$V_n = \mathbb{P}_n r(x, f_n(x)) + \int_E V_{n+1}(y) Q(dy|x, f_n(x)),$$

$x \in E$ y $n = 0, 1, \ldots, N$. Entonces la política $\pi^* = \{f_0, \ldots, f_N\}$ es óptima y la función de valor óptimo está dada por

$$V^{\tau}(x) = V^{\tau}(\pi^*, x) = V_0(x),$$

$x \in E$.

En el contexto del horizonte aleatorio con soporte finito, la suposición 2.4 tiene un matiz ligeremente diferente como consecuencia de la forma no estacionaria de la recompensa en cada etapa.

Suposición 3.4. *Existen conjuntos*

$$\mathbb{M} \subset \mathbb{M}(E) := \{v : E \to [-\infty, \infty) | v es\ medible, \}$$

y $\Delta \subset F$ tales que:

(i) La función idénticamente cero pertenece a $\mathbb{M}$.

(ii) Si $v \in \mathbb{M}$ entonces $\mathcal{T}_n v$ está bien definida y $\mathcal{T}_n v \in \mathbb{M}$, (donde $\mathcal{T}_n v(x) := \sup_{a \in D(x)}\{\mathbb{P}_n r(x, a) + \int v(x')Q(dx'|x, a)\}$, $(x, a) \in D$).

(iii) Para cualquier $v \in \mathbb{M}$ existe un maximizador de v, $f \in \Delta$; i.e., $\mathcal{T}_{f,n} v(x) := \mathbb{P}_n r(x, f(x)) + \int v(x')Q(dx'|x, f(x)) = \mathcal{T}_n v(x)$, $x \in E$.

La teoría presentada en las secciones anteriores consideran de manera subyacente a la maximización como criterio de optimización. Sin embargo, en las secciones posteriores, se considerarán problemas de minimización relacionados con expresiones del tipo

$$\mathbb{E}_x^{\pi}\left[\sum_{k=0}^{N-1} c(X_k,\ f_k(X_k)) + h(X_N)\right],\ \ x \in E.$$

Pero, dicho problema puede ser encajado en la teoría descrita previamente al considerar $r(x, a) = -c(x, a)$ y $g(x) = -h(x)$.

4 Mercados Financieros

Se considerará un mercado financiero [1, 9] de N-periodos con d activos riesgosos y un bono sin riesgo. Se asumirá que las variables aleatorias están definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega', \mathcal{F}', P)$ con filtración $(\mathcal{F}_n)$ y $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. El mercado financiero está dado por:

- Un bono sin riesgo con $S_0^0 \equiv 1$ y

$$S_{n+1}^0 := S_n^0(1 + i_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

  donde i_{n+1} denota la tasa de interés determinista para el periodo $[n, n+1)$. Si la tasa de interés es constante; i.e., $i_n \equiv i$, entonces $S_n^0 = (1+i)^n$.

- Existen d activos riesgosos y el proceso de precios asociado con el k-ésimo activo está dado por $S_0^k = s_0^k$ y

$$S_{n+1}^k = S_n^k \tilde{R}_{n+1}^k, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

  El proceso (S_n^k) se supone que es adaptado con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)$ para cualquier k. Además, se supondrá que $\tilde{R}_{n+1}^k > 0$ $\mathbb{P}$-c.s. para cualesquiera k y n con s_0^k determinista. $\tilde{R}_{n+1}^k$ es el cambio de precio relativo en el intervalo $[n, n+1)$ para el activo riesgoso k.

De aquí y en adelante se considerará la siguiente notación: $S_n := (S_n^1, \ldots, S_n^d)$, $\tilde{R}_n := (\tilde{R}_n^1, \ldots, \tilde{R}_n^d)$ y $\mathcal{F}_n^S := \sigma(S_0, \ldots, S_n)$. Como (S_n) es $\mathcal{F}_n$ adaptado se tiene que: $\mathcal{F}_n^S \subset \mathcal{F}_n$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Se asumirá también que, $(\mathcal{F}_n)$ es la filtración generada por el precio de las acciones, es decir $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^S$.

Definición 4.1. Un portafolio o cartera de negociación es un proceso estocástico $\mathcal{F}_n$ adaptado $\phi = (\phi_n^0, \phi_n)$ donde $\phi_n^0 \in \mathbb{R}$ y $\phi_n = (\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d) \in \mathbb{R}^d$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. La cantidad ϕ_n^k denota el monto de dinero que es invertido en el activo k durante el intervalo de tiempo $[n, n+1)$.

Finalmente, se considerará la siguiente Suposición para que las esperanzas expresadas en la sección subsecuente estén bien definidas.

Suposición 4.2. *Tenemos que* $\mathbb{E}\|R\| := |R_1| + \ldots + |R_d| < \infty$, *donde* $R \in \mathbb{R}^d$ *y* $R_k := \frac{\tilde{R}^k}{1+i_n} - 1$ *para cada* $k = 1, \ldots, d$.

5 Problema de rastreo de índice con horizonte aleatorio y soporte finito

El problema de rastreo de índice puede considerarse como una aplicación de cobertura de media y varianza en un mercado incompleto [1]. Supongamos que tenemos un mercado financiero con un bono sin riesgo y d activos riesgosos y que además, existe un activo no comerciable cuyo proceso de precios $(\hat{S}_n)$ evoluciona conforme a

$$\hat{S}_{n+1} = \hat{S}_n \hat{R}_{n+1}.$$

La variable aleatoria positiva $\hat{R}_{n+1}$ que es el cambio de precio relativo del activo no negociado puede ser correlacionada con R_{n+1}. Asumimos que los vectores aleatorios $(R_1, \hat{R}_1), (R_2, \hat{R}_2), \ldots$ son independientes y la distribución conjunta de $(R_n, \hat{R}_n)$ es conocida. El objetivo ahora es rastrear el activo no negociado lo más cercanamente posible para invertir en el mercado financiero. El error de rastreo es medido en términos de la distancia cuadrática de la riqueza del portafolio al proceso de precios $(\hat{S}_n)$.

El problema de rastreo de índice considerando al horizonte aleatorio τ que tiene soporte finito está dado por:

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{x\hat{s}} \left[\sum_{n=0}^{\tau} (X_n^{\phi} - \hat{S}_n)^2 \right] \to \min, \\ \phi = (\phi_n) \text{ es un portafolio o cartera de negociación,} \end{cases} \tag{7}$$

donde ϕ_n es $\mathcal{F}_n = \sigma(R_1, \ldots, R_n, \hat{R}_1, \ldots, \hat{R}_n)$ medible. Este problema puede ser formulado como un problema lineal cuadrático [1]. Es importante señalar que, el espacio de estados del modelo de decisión de Markov incluye (además de la riqueza) el precio del activo no negociado. Así el modelo de decisión consta de los siguientes componentes

- $E := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ de modo que, si$(x, \hat{s}) \in E$ entonces x es la riqueza y $\hat{s}$ el valor del activo no negociado,
- $A := \mathbb{R}^d$ donde $a \in A$ es la cantidad de dinero que es invertida en cada activo riesgoso,
- $D(x, \hat{s}) := A$,

- $\mathcal{Z} := (-1,\infty)^d \times \mathbb{R}_+$ donde $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{Z}$, z_1 es el riesgo relativo del activo negociado y z_2 es el cambio de precio relativo del activo no negociado.

- La función de transición está dada por

$$T((x,\hat{s}), a, (z_1, z_2)) := M_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + B_n a,$$

donde $M_n = \begin{pmatrix} 1+i_{n+1} & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ y $B_n = \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $Q^Z(\cdot|(x,\hat{s}),a)$ se define como la distribución conjunta de $(R_{n+1}, \hat{R}_{n+1})$ (independiente de $((x,\hat{s}),a)$),

- $r((x,\hat{s}),a) := -(x-\hat{s})^2$,

- $g(x,\hat{s}) := -(x-\hat{s})^2$.

Y, en el contexto del Teorema 3.3 tenemos que

- $r_n((x,\hat{s}),a) := -\mathbb{P}_n(x-\hat{s})^2$ y

- el nuevo costo terminal es la función idénticamente cero.

El problema (7) puede ser resuelto por el modelo de decisión de Markov descrito anteriormente. La función de valor (función de costo) está dada por

$$V(x,\hat{s}) := \inf_{\pi} \mathbb{E}^{\pi}_{x\hat{s}} \left[\sum_{k=0}^{\tau} (X_k - \hat{S}_k)^2 \right], \ (x,\hat{s}) \in \mathbb{E}$$

y $V_0(x,\hat{s})$ es el mínimo valor del problema (7). Si definimos a

$$W := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

el problema es equivalente a minimizar

$$\mathbb{E}^{\pi}_{x\hat{s}} \left[\sum_{k=0}^{\tau} \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix} \right] = \mathbb{E}^{\pi}_{x\hat{s}} \left[\sum_{k=0}^{N+1} \mathbb{P}_k \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix} \right].$$

Teorema 5.1. *a) Sean las matrices $\tilde{W}_n$ definidas de forma recursiva por*

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_{N+1} &:= \mathbb{P}_{N+1} W = 0 \\
\tilde{W}_N &:= \mathbb{P}_N W \\
\tilde{W}_n &:= \mathbb{P}_n W + \mathbb{E}[M_{n+1}^T \tilde{W}_{n+1} M_{n+1}] - \mathbb{E}[M_{n+1}^T \tilde{W}_{n+1} B_{n+1}] \\
&\quad \left(\mathbb{E}[B_{n+1}^T \tilde{W}_{n+1} B_{n+1}]\right)^{-1} \mathbb{E}[B_{n+1}^T \tilde{W}_{n+1} M_{n+1}].
\end{aligned}$$

Entonces $\tilde{W}_n$ es simétrica, semidefinida positiva y la función de valor del problema (7) está dada por

$$V_{N+1}(x, \hat{s}) = 0$$

$$V_n(x, \hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \tilde{W}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}, \ (x, \hat{s}) \in E$$

para $n = 0, \ldots, N$.

b) El portafolio óptimo $\pi^* = (f_0^*, \ldots, f_N^*)$ es lineal y dado por

$$f_n^*(x, \hat{s}) = -\left(\mathbb{E}[R_{n+1} R_{n+1}^T]\right)^{-1} \mathbb{E}\left[\left(R_{n+1}, \ \frac{w_{21}}{(1 + i_{n+1}) w_{11}} \hat{R}_{n+1} R_{n+1}\right)\right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de W son denotados por w_{ij}.

Proof. Como primer paso se comprobará la Suposición 3.4. En este caso es razonable asumir que

$$\mathbb{M} := \{v : E \to \mathbb{R}_+ | v(x, \hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \ \textit{con } L \text{ simétrica y definida positiva}\}.$$

y de manera adicional se asumirá que la función idénticamente cero también es un elemento de $\mathbb{M}$. Además,

$$\Delta := \{f : E \to A | f(x, \hat{s}) = C(x, \hat{s}) \text{ para algún } C \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\}.$$

La parte i) se cumple directamente debido a la elección del conjunto $\mathbb{M}$. Sea ahora $v \in \mathbb{M}$, es decir, existe L una matriz cuadrada de dimensión 2, simétrica y definida positiva tal que

$$v(x, \hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} .$$

Veamos ahora que $\mathcal{T}_n v \in \mathbb{M}$ y de manera simultánea, hallemos al optimizador de v dentro de Δ. De manera particular, analicemos el caso en que $n = N$:

$$\begin{aligned}
V_N(x, \hat{s}) = \mathcal{T}_N v(x, \hat{s}) &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{\mathbb{P}_N(x, \hat{s}) L \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + \mathbb{E} v[T_{N+1}((x, \hat{s}), a, (z_1, z_2))]\} \\
&= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{\mathbb{P}_N(x, \hat{s}) L \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + 0\} \\
&= \mathbb{P}_N(x, \hat{s}) L \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{P}_N L(x, \hat{s}) \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\
&= (x, \hat{s}) \mathbb{P}_N L \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $\mathbb{P}_N \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right)^T L \left(\begin{smallmatrix} x \\ \hat{s} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{M}$.

En particular si $L = W$, tenemos que

$$V_N(x, \hat{s}) = (x, \hat{s}) \tilde{W}_N \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}.$$

Consideremos ahora que $0 \leq n < N$, entonces

$$\mathcal{T}_n v(x) = \inf_{a\in\mathbb{R}^d}\left\{\mathbb{P}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2\end{pmatrix}^T L \right.\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2\end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2\end{pmatrix}^T L \right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}\right] a + a^T\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}^T L \right.$$

$$\left.\left.\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}\right] a\right\},$$

como L es simétrica y definida positiva, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}\right]$$

es también simétrica y definida positiva [1], por lo tanto regular y la función entre llaves es convexa en a (para $x \in E$ fija). Optimizando a la función $\mathcal{T}_n v(x)$ con respecto de a obtenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{T}_n v(x)}{\partial a}$$

$$= \frac{\partial\left[\mathbb{P}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix}\right]}{\partial a}$$

$$+ \frac{\partial\left[\begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2\end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2\end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix}\right]}{\partial a}$$

$$+ \frac{\partial\left[2\begin{pmatrix} x \\ \hat{s}\end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2\end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}\right] a\right]}{\partial a}$$

$$+ \frac{\partial\left[a^T\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}\right] a\right]}{\partial a} = 0$$

Así, tenemos que el único punto mínimo está dado por

$$a^* = -\left(\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{pmatrix}^T L\begin{pmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{pmatrix}\right]\right)^{-1}$$
$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T\\ 0\end{pmatrix}^T L\begin{pmatrix}(1+i_{n+1}) & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\ \hat{s}\end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$a^* = -\left(\mathbb{E}\left[z_1 z_1^T\right]\right)^{-1}\mathbb{E}\left[z_1, \frac{\ell_{21}}{\ell_{11}(1+i_{n+1})}z_2 z_1\right]\begin{pmatrix}x\\ \hat{s}\end{pmatrix} \in \Delta.$$

En donde ℓ_{ij} representa a la coordenada (i,j) de la matrix L. Dado que z_1 es el riesgo relativo del activo negociado (R) y z_2 es el cambio de precio relativo del activo no negociado $(\hat{R})$ podemos reescribir a la expresión recientemente obtenida como:

$$a^* = -\left(\mathbb{E}\left[R_{n+1}R_{n+1}^T\right]\right)^{-1}\mathbb{E}\left[R_{n+1}, \frac{\ell_{21}}{\ell_{11}(1+i_{n+1})}\hat{R}_{n+1}R_{n+1}\right]\begin{pmatrix}x\\ \hat{s}\end{pmatrix}.$$

Al sustituir en $\mathcal{T}_n v(x)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_n v(x) = {} & \mathbb{P}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T W \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\
& + 2 \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
& \left(- \left(\mathbb{E}\left[R_{n+1} R_{n+1}^T \right] \right)^{-1} \mathbb{E}\left[R_{n+1}, \frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right) \\
& + \left(- \left(\mathbb{E}\left[R_{n+1} R_{n+1}^T \right] \right)^{-1} \mathbb{E}\left[R_{n+1}, \frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right)^T \\
& \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
& \left(- \left(\mathbb{E}\left[R_{n+1} R_{n+1}^T \right] \right)^{-1} \mathbb{E}\left[R_{n+1}, \frac{w_{21}}{w_{11}(1+i_{n+1})} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right) \\
= {} & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \Bigg\{ \mathbb{P}_n W + \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \\
& - \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left(\mathbb{E}\left[R_{n+1} R_{n+1}^T \right] \right)^{-1} \\
& \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix} 1+i_{n+1} & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \Bigg\} \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}.
\end{aligned}
$$

ya que la matriz escrita entre llaves es simétrica y definida positiva [1] (Teorema 2.6.3).

Supongamos ahora que,

$$
V_{n+1}(x, \hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \tilde{W}_{n+1} \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}
$$

Como consecuencia de la argumentación anterior y el Teorema 3.3, se desprende directamente que

$$V_n(x,\hat{s}) = (x,\hat{s})\tilde{W}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix},$$

y que

$$f_n^*(x,\hat{s}) = -\left(\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}\right]\right)^{-1}$$
$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}(1+i_{n+1})z_1^T \\ 0\end{pmatrix}^T L \begin{pmatrix}(1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, de la expresión recursiva que se desprende de la discusión previa, tenemos que la función de valor $V_0(x,\hat{s}) = (x,\hat{s})\tilde{W}_0 \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}$, en donde

$$\tilde{W}_0 = \mathbb{P}_0 W + \mathbb{E}[M_1^T \tilde{W}_1 M_1] - \mathbb{E}[M_1^T \tilde{W}_1 B_1]\left(\mathbb{E}[B_1^T \tilde{W}_1 B_1]\right)^{-1}\mathbb{E}[B_1^T \tilde{W}_1 M_1]$$

□

6 Conclusiones

A través de la aplicación de la Teoría de Procesos de decisión de Markov con horizonte aleatorio con soporte finito, se evidenció la potencia y versatilidad de esta clase de Procesos estocásticos controlados. Dicha aplicación giró en torno al problema referido como "‘Rastreo de índices"’.

El resultado obtenido como consecuencia de la discusión presentada en este trabajo versa sobre la obtención de la política óptima del problema de Rastreo de índice cuando el horizonte del problema es una variable aleatoria discreta de soporte finito. Se logró observar que dicha política coincide con aquella obtenida para el mismo problema pero con horizonte fijo [1]. Por otro lado, la función de valor depende de la función de masa de la variable que modela al horizonte del problema. Además, se encontró que las iteraciones propias de la solución a través de la técnica de Programación Dinámica son relativamente simples en cuanto a su estructura (en particular la función de valor).

Bibliography

[1] Bäuerle N., Rieder U., *Markov Decision Processes with Aplications to Finance*. Springer Verlang, ISBN9783642183232, 2011.

[2] Bertsekas D. P. and S. E. Shreve, *Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case*. Athena Scientific. ISBN1886529264, 1978.

[3] Chatterjee D., Cinquemani E., Chaloulos G. Lygeros J., *Stochastic Control up to a Hitting Time: Optimality and Rolling-Horizon Implentatio*. arxiv 0806.3008.2009.

[4] Cruz-Suárez H., Ilhuicatzi-Roldán R., Montes-de-Oca R., *Markov Decision Processes on Borel Spaces with Total Cost and Random Horizon*. Journal of Optimization Theory and Applications. 2012.

[5] Cruz-Suárez H., Ilhuicatzi-Roldán R., Chávez-Rodríguez, S., *Markov Decision Processes with Time-Varying Discount Factors and Random Horizon*. Kybernetika, Vol.53, No.**1**, 82–98, 2017.

[6] Hernández-Lerma O., Laserre J. B., *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic OPtimality Criteria*. Springer-Verlag. ISBN9781461268840, 1996.

[7] Hernández-Lerma O., Laserre J. B., *Further Topics on Discrete-Time Markov Control Processes*. Springer-Verlag. ISBN9781461205616, 1970.

[8] Iida T., Mori M., *Markov Deecision Processes with Random Horizon*. Journal of the Operations Research. Vol. **39**, 592–603, 1996.

[9] Prigent, J., *Weak convergence of financial markets*. Springer-Verlag, Berlin, ISBN9783540711490, 2003.

[10] Ilhuicatzi-Roldán M, Cruz-Suaréz H., *Procesos de Decisión de Markov con Horizonte Aleatorio*. Tesis de Doctorado, BUAP, 2013.

[11] Vázquez-Guevara V., Cruz-Suárez H., Velasco-Luna F., *Optimal assignment of sellers in a store with a random number of clients via the armed bandit model.* RAIRO-Oper.Res. Volume **51**, number 4, 2017.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

octavio.paredespe@alumno.buap.mx
vvazquez@fcfm.buap.mx
hcs@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 17, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-765-5

Capítulo 6

Métricas de riesgo con precios del WTI, BRENT, MME y evaluación de eficiencia con análisis retrospectivo en la crisis COVID19

Ambrosio Ortiz Ramírez[1]

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional[1]

Abstract

En este trabajo se aplican modelos de Valor en Riesgo (VaR) a portafolios compuestos por posiciones en precios del barril de petróleo: West Texas Intermediate (WTI), BRENT, y Mezcla Mexicana de Exportación (MME). Los modelos de VaR aplicados son: simulación histórica, paramétrico y mixturas normales, con una muestra de precios del 29/12/2017 al 04/01/2021 obtenidos de la base de datos Federal Reserve Economic Data (FRED) y de Banxico. Se ejecuta también una prueba de análisis retrospectivo (Backtesting). La evidencia empírica muestra que uno de los efectos de la crisis del COVID19 se observa en los precios de los futuros del barril de petróleo en cuanto al riesgo mercado, de tal manera que el modelo que tuvo el menor número de rebases o excepciones de VaR ha sido el modelo de simulación histórica para el portafolio formado por precios del WTI, BRENT y MME con ponderaciones iguales. Sin embargo, la prueba de Kupiec muestra que ningún modelo es confiable para estimar el VaR al 99%, pero para el VaR al 95% los modelos paramétrico y mixturas normal son confiables. En el caso del CVaR la prueba de Kupiec indica que todos los modelos son confiables para estimar el CVaR al 97.5% para el portafolio con pesos iguales.

1 Introducción

El petróleo ha sido fundamental para el desarrollo industrial, tomando protagonismo a partir de finales del siglo XIX. Volviéndose rápidamente la principal fuente de energía para la producción industrial. Se encuentra presente, de manera directa o indirecta, en los procesos productivos, por ejemplo, en la industria química, en el sector agrícola y el industrial. Por esta razón los países productores de petróleo han adoptado este sector como una pieza clave dentro de sus economías, según el Banco Mundial [2] en algunas economías la explotación y exportación del petróleo llega a ser la principal fuente de riqueza, fenómeno llamado por los especialistas como "economías petrolizadas". Durante el 2017, dentro de las economías más dependientes del petróleo, este sector representó el 13.5% del PIB, mientras para el caso particular de México representó el 1.3% del PIB.

En este contexto en la literatura se encuentran distintos estudios que analizan el comportamiento y la producción del insumo del tema de estudio. La mayor parte de estas investigaciones se centran en la volatilidad del precio del petróleo, ya que la volatilidad se considera como un causante del desequilibrio de oferta y demanda, puede provenir de los ciclos económicos, agitaciones políticas, guerras y condiciones climáticas desfavorables [10]. Esto afecta no solamente a las economías petrolizadas, si no a la economía mundial, por ejemplo, para el caso particular de México, que ocupó el puesto número 11 del ranking mundial de producción durante el 2018 y no se considera una economía petrolizada según datos de la OPEP (Organización de Países Exportadores de Petróleo), además los ingresos petroleros toman un rol protagónico en la estructuración del presupuesto anual. Un trabajo que aborda el efecto del precio del WTI está en [18] en el que analizan el impacto de la volatilidad del precio internacional del petróleo en los rendimientos de los índices accionarios en términos reales de Argentina, Brasil, Colombia, Chile y Perú, mediante la estimación de un modelo vector autorregresivo estructural con efectos GARCH en media y los rendimientos del WTI. Señalan que la volatilidad del petróleo es relevante para los rendimientos accionarios reales de manera inmediata sólo para Colombia, con algunos efectos asimétricos ante choques positivos y negativos del precio internacional del petróleo en los demás países, estos efectos tienen implicaciones en el desarrollo económico, portafolios de inversión vinculados al petróleo y las políticas del uso de energías renovables.

A finales del 2019 se detectó la presencia de un virus denominado COVID 19, los efectos aún tiene repercusión en la economía mundial al entrar en una crisis que ha derivado en una disminución o inclusive valores negativos en indicadores como el PIB, entre otros severos efectos. Varios estudios se han generado sobre esta crisis. En [8] proponen la hipótesis que los casos y muertes por COVID-19 contribuyeron a la volatilidad del precio del petróleo, con datos de series de tiempo por hora para una muestra que contiene más de 4,000 observaciones (de julio de 2019 a junio de 2020) del WTI, muestran que los casos y muertes por COVID-19 han contribuido entre un 8% y un 22% a la volatilidad diaria del WTI. Otros trabajos que abordan esta crisis son: [11], [15], [22], por mencionar algunos. Esta investigación se sitúa entre la numerosa literatura reciente sobre la conexión entre la pandemia actual y el mercado energético, puesto que desde un enfoque de portafolios con precios de los tres principales indicadores del mercado de petróleo: WTI, BRENT y MME, se mide su riesgo mercado con el Valor en riesgo (VaR), o una medida robusta que es el Conditional Value at Risk (CVaR). Una reflexión sobre las características teóricas del VaR y CVaR que el Comité de Basilea sobre Regulación Bancaria ha venido recomendando se discute en [5], entre sus hallazgos, menciona que se debe elegir entre una medida que satisfaga los requitos de "elicitability" y coherencia en relación con un análisis retrospectivo sólido. Por ejemplo, en [6] aplican la teoría de valores extremos a la distribución condicional de los residuales estandarizados con modelos GARCH, EGARCH y TGARCH, construyen medidas de riesgo dinámicas para la estimación del VaR y CVaR de las posiciones larga y corta de la MME, al ejecutar un proceso de validación estadística mediante la prueba de Kupiec determinan que los modelos propuestos con teoría de valores extremos tuvieron un mejor desempeño para estimar correctamente las pérdidas de las posiciones corta y larga a cualquier nivel de confianza. En [9] se aborda la capacidad predictiva de los modelos de VaR y CVaR por simulación histórica, paramétrico y simulación Monte Carlo con cópulas elípticas a portafolios bivariados de las acciones de AMXL, WALMEX y tipo de cambio FIX, concluyen que modelo con cópula t-Student es el más eficiente por mostrar el menor número de excepciones.

En [19] cuantifican el VaR con los precios del barril de petróleo BRENT, WTI, MME y analizan el desempeño de la estimación del VaR a un día mediante la prueba de Kupiec con modelos GARCH con distribuciones alternativas en las innovaciones: alfa-estable, t-Student generalizada asimétrica y normal en un período de alta volatilidad. Concluyen que el modelo VaR-estable es más robusto en comparación con los demás considerados al impactar directamente en la previsión de reservas. En [3] con datos del mercado europeo de opciones sobre futuros del WTI del 2011 al 2016, obtienen estimaciones de riesgo VaR y CVaR basadas en la primera derivada del precio de la opción con respecto al precio de ejercicio a diferentes niveles de confianza, con lo que evitan estimar la cola de la distribución del rendimiento. Su análisis retrospectivo indica que tales medidas de riesgo implícitas son alternativas válidas a los modelos de simulación histórica.

Este capítulo está organizado como sigue, en la sección siguiente 2 se describen: modelo de mixturas gaussianas, sus propiedades más importantes y su estimación de parametros por el método EM (Expectation-Maximization) según [7]. En la sección 3 se desarrollan las fórmulas analíticas para el calculo del VaR y CVaR para el caso delta-normal, delta mixtura gaussiana y simulación histórica. En la sección 4 se presenta un análisis de resultados de la aplicación de la metodología propuesta, comenzando con un análisis cualitativo y luego con la prueba de Kupiec. Por último, en la sección 5 se presentan las conclusiones del presente trabajo indicando algunas extensiones por explorar en la agenda futura de investigación.

2 Metodología

En lo que sigue se presenta la teoría para el cálculo de VaR y CVaR para mixturas gaussianas de acuerdo con [12].

El valor de una portafolio de inversión al tiempo t denotado por V_t es una función del tiempo y de un conjunto de factores de riesgo $(\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R} : V_t = f(t, \mathbf{Y}_t)$. Se definen los cambios en los factores de riesgo como $\mathbf{X}_t = \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_{t-1}$ y la pérdida del portafolio como $L_t = (V_t - V_{t-1})$. La aproximación lineal de L_{t+1} es:

$$L_{t+1} = \left(f_t\left(t, \mathbf{Y}_t\right) + \sum_{j=1}^{d} f_{Y_j}\left(t, \mathbf{Y}_t\right) X_{t+1,j} \right) \tag{1}$$

donde los subíndices de f representan derivadas parciales y solo los cambios $X_{t+1,j}$ son aleatorios. Si se supone que tales cambios se distriuyen como una Normal entonces L_{t+1} es Normal. Esto da origen al método Delta-Normal para el cálculo de Valor en Riesgo (VaR) descrito en [13].

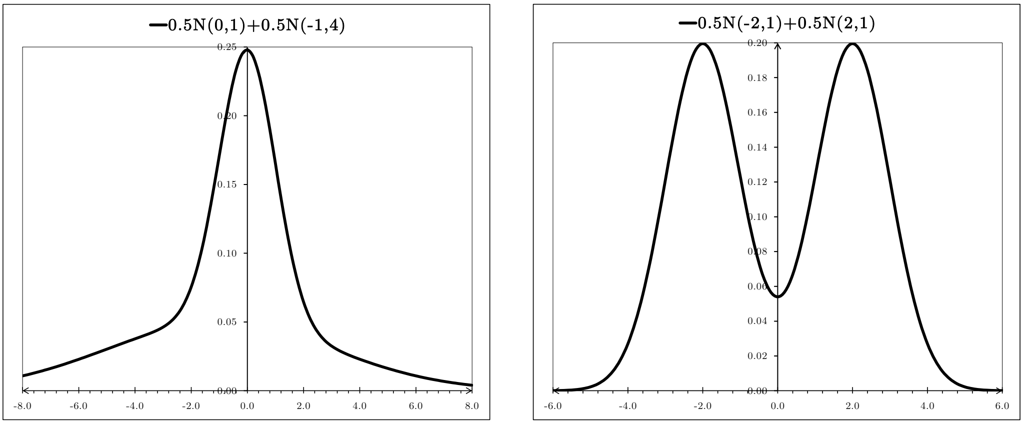
Sin embargo, la evidencia empírica muestra que en la gran mayoría de los activos financieros se observan rendimientos que no cumplen con el supuesto de normalidad. En particular, la frecuencia con que se observan rendimientos extremos es mayor que la probabilidad de que observen dichos rendimientos bajo la normal. Esta característica se denomina leptocurtosis, colas anchas o elongación en exceso. También es posible observar alternadamente períodos de alta y baja volatilidad, distribuciones asimétricas o dependencia en las colas en las distribuciones conjuntas.

Mezclas de distribuciones normales finitas

Un modelo de mixtura se refiere a un modelo probabilístico utilizado para describir una población que consiste en observaciones generadas a partir de diferentes distribuciones subyacentes. Generalmente, se supone que estas distribuciones tienen la misma forma paramétrica, pero pueden tener diferentes valores de parámetros. Para variables aleatorias continuas y de valor real un modelo de mixtura gaussiana (MMG) es el modelo de mixtura más utilizado. En esta clase de modelos, se supone que cada componente de la mixtura tiene una distribución normal. Para un número dado de componentes, los parámetros del modelo se pueden estimar de manera eficiente utilizando un algoritmo de Expectation-Maximization (EM) [7], tal método se adapta muy bien tanto a la dimensión como al tamaño de un conjunto de datos. Como resultado, los modelos basados mixturas gaussianas tienen una amplia aplicación en la solución de diversos problemas, que van desde la agrupación no supervisada de datos para la detección de anomalías, control estadístico de procesos, recuperación y segmentación de imágenes, seguimiento de objetos en tiempo real, entre otros. Debido a su gran popularidad y la disponibilidad de algoritmos para su estimación se puede encontrar en varias plataformas como Julia, R, Matlab, Python, etc. Las mixturas son versátiles, ocupan un lugar entre las distribuciones paramétricas y las no paramétricas. En una mixtura típica sus componentes provienen de una distribución paramétrica, pero las ponderaciones están basadas en datos empíricos que son no paramétricos. Al igual que existen ventajas en el uso de distribuciones paramétricas y no paramétricas, existen ventajas entre usar una o varias componentes. Al agregar componentes, se puede aproximar cualquier conjunto de datos con una precisión gradual. Sin embargo, a medida que se tenga un número creciente de componentes, las conclusiones que se obtengan podrían no ser confiables en lo general.

Al combinar dos distribuciones normales, se pueden generar varias distribuciones con propiedades y formas interesantes. Por ejemplo, al mezclar dos distribuciones normales con la misma media, pero diferentes varianzas, se obtiene una mixtura simétrica que muestra un exceso de curtosis. Al cam-

Figure 1: Mixturas sesgada y bimodal a partir de normales.



(a) Mixtura sesgada (b) Mixtura bimodal

Fuente: elaboración propia.

biar el parámetro de la media se genera una distribución con sesgo positivo o negativo. La figura 1 muestra un ejemplo de mixturas generadas a partir de la normal. La figura (6.2(a)) es una mixtura sesgada y con exceso de curtosis. Si se mueven las medias la mixtura que resulta será bimodal; es decir, su densidad muestra dos máximos diferentes, como se muestra en la figura (6.2(b)). En las siguientes partes se plantean la parte teórica sobre las mixturas gaussianas y su relación con las métricas de riesgo.

Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio denotado por $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ se distribuye de acuerdo a una mixtura (finita) gaussiana (MG) cuando su función de densidad se escribe como sigue:

$$f_X\left(x;\Theta\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i \varphi_i\left(x;\mu_i,\Sigma_i\right),$$

donde $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1, p_i \in (0,1)$ y $\varphi_i(\cdot,\mu_i,\Sigma_i), i = 1,\ldots,k$ son densidades normales d-variadas con parámetros $\mu_i \in \mathbb{R}^d$ y $\Sigma_i \in \mathbb{R}^{d\times d}$ son matrices positivas definidas.

En este marco, se interpreta que existe una partición del espacio muestral

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{i=1} \Omega_i, \Omega_h \cap \Omega_l = \emptyset, h \neq l$, tal que cada una de las densidades φ_i rige sobre el subconjunto Ω_i. Además, $p_i = P(\Omega_i)$ y la probabilidad posterior de cada subconjunto es:

$$P(\Omega_j | X = x) = \frac{p_j \varphi_j(x)}{\sum_{i=1}^{k} p_i \varphi_i(x)}$$

Debido a la linealidad de la integral, la definición anterior se puede escribir en términos de la función de distribución en lugar de la densidad. Es importante destacar que la familia de mixturas gaussianas finitas es un modelo muy flexible, por lo cual se mencionan algunas de sus propiedades [16]:

1. Incluye a la distribución normal (con $k = 1$).

2. Una mixtura gaussiana finita univariada de k componentes admite $3k-1$ parámetros, por lo que es útil para modelar discrepancias continuas de la normal como asimetría, leptocurtosis, modelos de contaminación ambiental, multimodalidad, etc., con frecuencia con sólo $k = 2$.

3. Es relativamente sencillo simular muestras de una mixtura gaussiana, por lo que se puede usar en procesos de Monte Carlo o en *bootstrap*.

4. Se ajusta a hechos estilizados en finanzas, a diferencia de otras distribuciones como la t-Student o la familia de distribuciones hiperbólicas; *v.g.* , a regímenes de volatilidad de algún mercado.

5. Es cerrada bajo convolución.

La última propiedad sirve para obtener métricas de riesgo de interés en este trabajo. Dado que la hereda de la normal, se enuncian las siguientes propiedades para los casos normal y MG:

1. **Caso Normal**. Si $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_d(\mu, \mathbf{\Sigma})$ y $l(x) = -(c + \omega^\top \mathbf{x})$, entonces $l(\mathbf{X}) \sim \mathcal{N}(\mu_l, \sigma_l^2)$, con $\mu_l = -(c + \omega^\top \mu)$ y $\sigma_l^2 = \omega^\top \mathbf{\Sigma} \omega$.

2. **Caso Mixtura Normal**. Si $\mathbf{X} \sim \mathrm{MG}_d\left(\mathbf{p}, \{\mu_i\}_{i=1}^k, \{\Sigma_i\}_{i=1}^k\right)$ y $l(\mathbf{x}) = -\omega^\top \mathbf{x}$ entonces $l(\mathbf{X}) \sim \mathrm{MG}\left(\mathbf{p}, \{\mu_{l_j}\}_{j=1}^k, \left\{\sigma_{l_j}^2\right\}_{j=1}^k\right)$, donde $\mu_{l_j} = -\omega^\top \mu_j$ y $\sigma_{l_j}^2 = \omega^\top \mathbf{\Sigma}_j \omega, j = 1, \ldots, k$.

Estimación de parámetros

Como ya se describió la construcción de la distribución de mixturas gaussianas se partirá de una muestra aleatoria de tamaño n, en la cual X_j es un vector d-dimensional con función de densidad de probabilidad $f(x_j)$ en $\mathbb{R}^d$, donde x_j representa una observación del vector X_j.

Cuando se tienen especificadas las densidades excepto por el valor de un conjunto de parámetros $\Theta = (p_i, \mu_i, \sigma_i^2)_{i=1}^k$, la estimación de dichos parámetros se hace mediante máxima verosimilitud. Entonces, dada una muestra aleatoria, el logaritmo de la función de verosimilitud es:

$$\begin{aligned} L(\Theta) &= \prod_{n}^{j=1} \sum_{k}^{i=1} p_i \varphi_i(x_j), \\ \mathcal{L}(\Theta) &= \ln L(\Theta) = \sum_{n}^{j=1} \ln \left[\sum_{k}^{i=1} p_i \varphi_i(x_j) \right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Para simplificar la notación, sea la dimensión $d = 1$. Para obtener los estimadores máximo verosímil se debe resolver el problema:

$$\begin{gathered} \operatorname{Max}_{\Theta} \mathcal{L}(\Theta) \\ \text{s.a.} \sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \end{gathered}$$

Al resolver el problema de optimización en tiempo discreto se tiene un sistema de $2k+1$ ecuaciones como sigue:

$$\begin{gathered} \sum_{n}^{j=1} \frac{\varphi_h'(x_j)}{\sum_{k}^{i=1} p_i \varphi_i(x_j)} = 0, h = 1, 2, \ldots, k. \\ \sum_{n}^{j=1} \frac{\varphi_h(x_j)}{\sum_{k}^{i=1} p_i \varphi_i(x_j)} = \varphi, h = 1, 2, \ldots, k. \\ \sum_{k}^{i=1} p_i = 1. \end{gathered} \tag{3}$$

La solución a este problema no se encuentra de manera cerrada pero si a través de iteraciones, para este tipo de problemas es común la utilización del algoritmo Esperanza y Maximización, a consecuencia de ciertas características como la estabilidad numérica, la fácil ejecución y la convergencia rápida a un máximo local.

En el paso de Esperanza se estima la probabilidad posterior, dada la muestra, de cada uno de los subconjuntos de la partición del espacio muestral por:

$$p_h = \frac{1}{n}\sum_{n}^{i=1} \mathbb{P}\left(\Omega_h | X = x_i\right), \text{ para } h = 1, 2, \ldots, k.$$

Para una mixtura finita univariada los pasos del algoritmo EM se resumen en los pasos siguientes:

1. **Paso de Esperanza**.

$$p_h = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\Omega_h | X = x_i\right),$$

donde :

$$\mathbb{P}\left(\Omega_h | X = x_i\right) = \frac{\frac{p_h}{\sigma_h}\varphi\left(\frac{x_i-\mu_h}{\sigma_h}\right)}{\sum_{j=1}^{k}\frac{p_j}{\sigma_j}\varphi\left(\frac{x_i-\mu_j}{\sigma_j}\right)}.$$

2. **Paso de Maximización**.

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathbb{P}\left(\Omega_j | X = x_i\right)}{\sum_{h=1}^{n}\mathbb{P}\left(\Omega_j | X = x_h\right)}\right)x_i,$$

$$\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathbb{P}\left(\Omega_j | X = x_i\right)}{\sum_{h=1}^{n}\mathbb{P}\left(\Omega_j | X = x_h\right)}\right)(x_i - \mu_j)^2.$$

La aplicación del algoritmo EM para mixturas gaussianas finitas se resume como sigue: si se cuenta con un conjunto de valores iniciales $p_j^{(0)}, \mu_j^{(0)}, \sigma_j^{2(0)}$ con $(j = 1, \ldots, k)$ en cada iteración se estiman recursivamente las probabilidades posteriores de cada elemento de la partición $\mathbb{P}\left(\Omega_j | X = x_i\right)$, las probabilidades p_j, el vector de medias μ_j y las varianzas σ_j^2. El algoritmo se ejecuta hasta que se cumpla un criterio de convergencia asociado al método numérico elegido.

3 Medidas de riesgo: VaR y CVaR

El CVaR responde a una pregunta importante: ¿Cuáles son la pérdidas más allá del VaR?, además es una medida de riesgo que cumple con el axioma de subaditividad [1], evitando así una de las mayores críticas al VaR. Sin embargo, puesto que se concentra en la cola de la distribución de pérdidas y ganancias, la confiabilidad de esta medida puede ser difícil de medir. Desde un punto de vista de administración de riesgos financieros, es deseable modelar todo lo posible sobre la cola de la distribución. El CVaR nos dice algo en este tema, pero es potencialmente inestable y un análisis retrospectivo tiene sus dificultades técnicas. El VaR no proporciona información de la cola, pero es más resistente a los valores atípicos. Como administradores de riesgos, es importante comprender estas compensaciones.

Suponga que un agente tiene un portafolio de activos a un horizonte de tiempo dado, entonces al hacer el *mark to market*, es decir, se valora el portafolio ante cambios en los factores de riesgo por lo que se genera una distribución de pérdidas y ganancias, ya sea para cada activo y para el portafolio, entonces se supone que ese vector se puede modelar como una variable aleatoria sobre la cual se pueden construir ciertas medidas de riesgo ya conocidas, como el VaR y el CVaR para la parte de medición del riesgo mercado.

Una aproximación a la distribución de pérdidas es expresarla en términos de las derivadas parciales respecto del tiempo y los factores de riesgo de manera lineal, la cual está dada por la ecuación (1). Si la función f tiene derivadas de segundo orden no despreciables, la aproximación anterior puede incluirlas, con lo que se tendría un modelo Delta-Gamma.

Los momentos de la variable aleatoria de pérdida son conocidos, a partir de la ecuación (1) y con el supuesto $f_t = 0$:

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}\left(L_{t+1}\right) = \sum_{j=1}^{d} f_{Y_j}\left(t, \mathbf{Y}_t\right) \mathrm{E}\left(X_{t+1,j}\right) = \omega_t^{\top} \mu = \mu_L. \\
\mathrm{Var}\left(L_{t+1}\right) = \mathrm{Var}\left[\sum_{j=1}^{d} f_{Y_j}\left(t, \mathbf{Y}_t\right) \mathrm{E}\left(X_{t+1,j}\right)\right] = \omega_t^{\top} \mathbf{\Sigma} \omega_t = \sigma_L^2 \mu_l. \\
\text{con } \mu' = \left[\mathrm{E}\left(X_{t+1}\right)\right]_{j=1}^{d} \quad \text{y} \quad \Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_{t+1,i}, X_{t+1,j}).
\end{gathered} \tag{4}$$

En lo sucesivo se supone que los rendimientos X_t provienen de un proceso estacionario, es decir, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y se puede eliminar el subíndice t. Enseguida se definen las métricas de riesgo VaR y en la siguiente sección CVaR. Sea L la variable aleatoria asociada a la pérdida y $F_L :\to [0,1]$ su función de distribución. Según [21] el VaR a un nivel de confianza $\alpha \in (0,1)$ se define como:

$$\mathrm{VaR}\left(\alpha\right) = \inf_{u\in\mathbb{R}}\left\{F_L\left(u\right) \geq \alpha\right\}$$

Suponga además que el valor absoluto de la distribución de L es finito, *i.e.*, $\mathrm{E}|L| < \infty$. El CVaR para un nivel de confianza $\alpha \in (0,1)$ está dado por:

$$\mathrm{CVaR}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} \mathrm{VaR}\left(u\right) du$$

Observación. Cuando la distribución de pérdida sea continua el VaR es el percentil α de la distribución de pérdida y que el CVaR es el promedio de los percentiles sobre todos los niveles de confianza mayores o iguales a α. En este caso, la siguiente propiedad propone un resultado útil para su cálculo [17]:

$$\mathrm{CVaR}(\alpha) = \mathrm{E}\left[L\left|L > \mathrm{VaR}(\alpha)\right.\right]. \tag{5}$$

Si la distribución de L es de localización y escala, el calculo del VaR solo depende de los momentos expresados en (4):

$$\mathrm{VaR}\left(\alpha\right) = \omega^{\top}\mu + q_{\alpha}\big(\omega^{\top}\boldsymbol{\Sigma}\omega\big)^{1/2} = \mu_L + q_{\alpha}\sigma_L, \tag{6}$$

donde q_α es el percentil α de la distribución F_L con parámetros de localización 0 y escala 1. La Propiedad 1 garantiza que bajo el modelo paramétrico Delta-Normal L se distribuye como una normal univariada, y en este caso la ecuación (6) proporciona el estimador de VaR, aunque en la práctica se debe verificar si es normal.

Por último, para el modelo Delta-mixtura gaussiana (Delta-MG), la Propiedad 2 garantiza que la distribución de L es una mixtura gaussiana univariada finita, y bajo estos supuestos es necesario resolver numéricamente para q_α la ecuación:

$$F_L\left(q_\alpha; \Theta\right) - \alpha = 0. \tag{7}$$

Por otra parte, el método de simulación histórica es un enfoque no paramétrico basado en datos históricos para calcular el VaR. En este enfoque el riesgo se modela directamente de la distribución empírica de las pérdidas y ganancias, en la práctica es relativamente fácil de implementar. Este método modela con precisión el riesgo en posiciones no lineales y complejas, así como instrumentos lineales simples, además proporciona una distribución completa de las potenciales pérdidas y ganancias del portafolio que por lo general es asimétrica. Si los factores de riesgo subyacentes exhiben comportamiento no normal tales como colas gordas o efecto de reversión a la media, entonces el VaR resultante incluirá estos efectos. Sin embargo, el riesgo en la cola de la distribución se verá reflejado si el conjunto de datos histórico incluye eventos de esa clase. Sea L la distribución empírica de las pérdidas, una manera de calcular el VaR es con un estadístico de orden como sigue:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}(\alpha) = L_{(\lfloor n\alpha \rfloor)} \tag{8}$$

donde $L_{(\lfloor n\alpha \rfloor)}$ es el j-ésimo estadístico de orden, n es el tamaño de la muestra y $\lfloor n\alpha \rfloor$ es el mayor entero que es menor o igual a $n\alpha$.

A pesar de su relativa facilidad de aplicación algunas desventajas de este método son: el supuesto de que los rendimientos de los activos son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) se tiene que validar empíricamente, se requiere de historia suficiente de cambios de precios y puede ser inadecuado para el análisis de riesgo de un derivado y otorga el mismo peso a todas las observaciones, incluyendo datos antiguos.

Deducción CVaR para normal y MG

Para el modelo de SH su cálculo se deduce a partir de la distribución empírica de la ecuación (5), que es:

$$\mathrm{CVaR}(\alpha) = \frac{1}{(1-\alpha)n} \sum_{j=n\alpha+1}^{n} L_{(\lfloor n\alpha \rfloor)} \tag{9}$$

Para el caso de la distribución normal siguiendo a [17] considere $L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y $q_\alpha = \mathrm{VaR}\,(\alpha)$ el percentil α de F_L, esto es, $F_L(q_\alpha) = \alpha$. Sea $f_L(\cdot) = \varphi(\cdot; \mu, \sigma^2)$ la densidad de L y $\varphi(\cdot) = \varphi(\cdot; 0, 1)$ la densidad de la normal estándar con percentil α igual a z_α. A partir de la ecuación (5) y la distribución de pérdida L, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}(\alpha) &= \mathrm{E}\left[L\,|L > \mathrm{VaR}(\alpha)\right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{+\infty}^{q_\alpha} u f_L(u)\,du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{+\infty}^{q_\alpha} u\varphi\left(u;\mu,\sigma^2\right)du \end{aligned} \tag{10}$$

al hacer el cambio de variable $u = \sigma z + \mu$, $\left(z_\alpha = \frac{q_\alpha - \mu}{\sigma}, du = \sigma dz\right)$ de donde resulta:

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}(\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{z_\alpha}^{+\infty} (\sigma z + \mu)\,\varphi(z)\,dz \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\sigma\int_{z_\alpha}^{+\infty} z\varphi(z)\,dz + \mu\int_{z_\alpha}^{+\infty}\varphi(z)\,dz\right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[-\sigma\varphi(z) + \mu\Phi(z)\right]\Big|_{z_\alpha}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\sigma\varphi(z_\alpha) + \mu\left(1-\Phi(z_\alpha)\right)\right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\sigma\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right) + \mu(1-\alpha)\right] \\ &= \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Para el caso de la mixtura gaussiana sea $L \sim \mathrm{MG}(p,\mu,\sigma)$. Anteriormente se tenía que $q_\alpha = \mathrm{VaR}(\alpha)$se obtiene al resolver la ecuación (7). A partir de la definición en (5) y de L se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}(\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha}^{+\infty} u f_L(u)\,du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha}^{+\infty} u\sum_{j=1}^{k} p_j\varphi\left(u;\mu_j,\sigma_j^2\right)du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k} p_j\int_{q_\alpha}^{+\infty} u\varphi\left(u;\mu_j,\sigma_j^2\right)du \end{aligned} \tag{12}$$

La integral dentro de la suma es la misma que en (10) pero que el límite de integración depende de la componente particular. Al hacer el cambio de variable $\mu = \sigma_j z + \mu_j$ y con $z_{j,\alpha} = (q_\alpha - \mu_j)/\sigma_j$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}(\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k} p_j\left[\sigma_j\varphi\left(z_{j,\alpha}\right) + \mu_j\left(1-\Phi\left(z_{j,\alpha}\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k} p_j\Phi\left(-z_{j,\alpha}\right)\left[\mu_j + \sigma_j\frac{\varphi\left(z_{j,\alpha}\right)}{\Phi\left(-z_{j,\alpha}\right)}\right] \end{aligned} \tag{13}$$

Observación. El término $z_{j,\alpha}$ depende de α a través de q_α y de la componente a través de los parámetros μ_j y σ_j pero no es el percentil α de la distribución de la j-ésima componente, es decir, no es el caso que $\Phi\left(z_{j,\alpha}\right) = \alpha$. En otras palabras, el cociente $\frac{\mu_j+\sigma_j\varphi(z_{j,\alpha})}{\Phi(-z_{j,\alpha})}$ no es el VaR(α) de la j-ésima componente. En resumen, las expresiones analíticas para el cálculo del CVaR se muestran a continuación:

Table 1: Expresiones analíticas para el CVaR.

Método	Expresión
Simulación Histórica	$\widehat{\mathrm{CVaR}(\alpha)} = \frac{1}{(1-\alpha)n}\sum_{j=n\alpha+1}^{n} L_{(\lfloor n\alpha\rfloor)}$
Delta-Normal	$\mathrm{CVaR}(\alpha) = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\varphi\left(\Phi^{-1}\left(\alpha\right)\right)$
Delta-MG	$\mathrm{CVaR}(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k}\left[p_j\Phi\left(-z_{j,\alpha}\right)\left(\mu_j + \sigma_j\frac{\varphi\left(z_{j,\alpha}\right)}{\Phi\left(-z_{j,\alpha}\right)}\right)\right]$

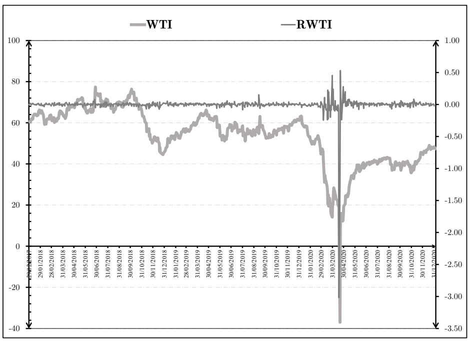
Fuente: elaboración propia.

donde $z_{j,\alpha} = \frac{(q_\alpha-\mu_j)}{\sigma_j}$ y q_α satisface (7).

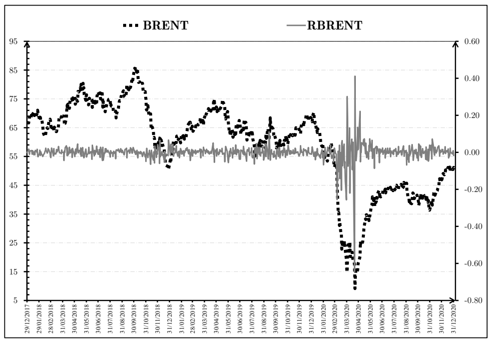
4 Análisis y Discusión de Resultados

En este apartado se calculan los rendimientos de los precios del barril de petróleo de West Texas Intermediate, BRENT y Mezcla Mexicana de Exportación del periodo 02/01/2018–04/01/2021 con 765 observaciones de precios expresados en dólares americanos (USD) por barril. La información se obtuvo de la Federal Reserve Economic Data (FRED) y de Banxico. Como el lector nota en la figura 2, se observa un comportamiento de precios influenciado por eventos extremos a inicios del 2020 en las tres series.

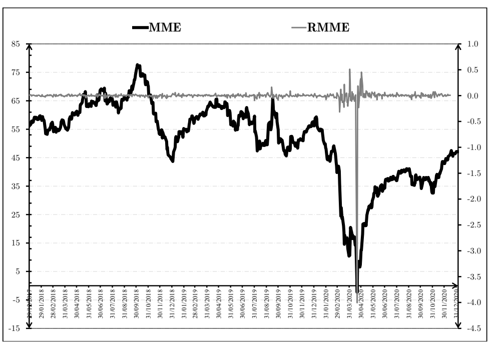
Figure 2: Precios y rendimientos de WTI (6.3(a)), BRENT (6.3(b)) y MME (6.3(c)).



(a) Precios y rendimientos de WTI.



(b) Precios y rendimientos de BRENT.



(c) Precios y rendimientos de MME.

Es pertinente mencionar que la información de los precios que se muestra corresponde a los precios de los contratos futuros de cada barril de petróleo, puesto que se considera como precio spot a esos precios, asimismo, de acuerdo con [21], este tipo de contratos se negocian en una bolsa de valores, con plazos y cantidades estandarizadas, lo cual implica que se liquidan diariamente, pero al ser materias primas en su fórmula teórica de valuación está una tasa de acarreo (constante) que refleja los costos de almacenamiento, entonces, ya que estos precios dependen de la dinámica del mercado, al no haber suficiente demanda, los precios mostraron una tendencia acelerada a la baja probablemente causada por la pandemia del covid-19, inclusive se observaron precios negativos para el WTI y MME el día 20 de abril de 2020; en el caso del WTI el día 17 de abril del 2020 cerró en 18.31USD y el 20 de abril en -36.98USD con un rendimiento negativo del -302%, la MME pasó de 14.35USD a -2.37USD en las mismas fechas, con un rendimiento negativo de -117%, en el caso del BRENT el día 20 de abril cerró en 17.36USD y el día 21 del mismo mes cerró en 9.12 con un rendimiento de -64%. A partir de esas fecha se observa una tendencia alcista hacia niveles previos de finales del 2019.

El cuadro 2 muestra los resultados de normalidad en los rendimientos de cada componente y del portafolio con pesos iguales medinte la prueba de Jarque-Bera al 5% de significancia. La hipótesis nula es que los datos provienen de una distribución normal con media y varianza desconocidas, la hipótesis alternativa es que no provienen de tal distribución. Es todos los casos se rechaza la hipótesis nula.

Table 2: Resultados prueba de normalidad de rendimientos.

	RPWTI	RPBRENT	RPMME	RendiPortPEp
Desición	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar
p-value	0.001000	0.001000	0.001000	0.001000
Estadística	6035543.48	169951.80	9366436.03	1293368.28
valor crítico	5.91	5.91	5.91	5.91

Fuente: elaboración propia.

El cuadro 3 muestra la estadística descriptiva de los rendimientos del período 02/01/2020 al 04/01/2021 obtenida mediante Excel. Se observa un promedio negativo muy cercano a cero para los tres activos y para el portafolio con pesos iguales. El componente que tuvo un mayor coeficiente de variación son los rendimientos de la MME, lo que implica que es el componente con la mayor dispersión, en cambio, el componente con menor coeficiente de variación son los rendimientos de BRENT. El componente que tuvo la mayor desviación estándar (diaria), curtosis y rango es MME. Respecto al coeficiente de asimetría, todos los componentes presentan un valor negativo, lo que indica que su distribución es sesgada hacia la derecha. Los valores mínimos de los tres componentes se observaron el 20 de abril del 2020. Esto tuvo un efecto en el análisis retrospectivo que se discute en la siguiente sección.

Table 3: Estadística descriptiva de los rendimientos de WTI, BRENT, MME y portafolio equiponderado.

	RPWTI	RPBRENT	RPMME	RendiPEp
Media	-0.0155	-0.0124	-0.0012	-0.0155
C.V.	13.9727	5.8083	234.5415	7.4204
Desv. Estd.	0.2162	0.0717	0.2708	0.1148
VarianzaM	0.0467	0.0051	0.0733	0.0132
Curtosis	151.1508	31.2474	186.6435	73.2451
C. Asimetría	-11.1996	-2.2006	-12.8182	-6.9179
Rango	3.5505	1.0557	4.5169	1.6406
Mínimo	-3.0197	-0.6437	-4.0042	-1.2817
Máximo	0.5309	0.4120	0.5127	0.3589
Obs.	257	257	257	257

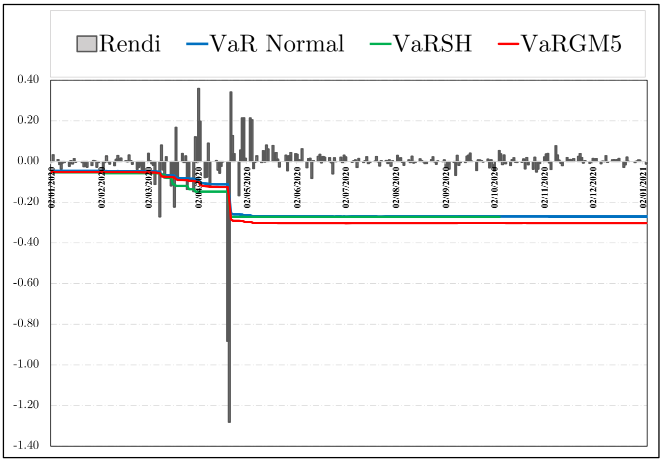
Fuente: elaboración propia.

Resultados del Análisis Retrospectivo

En esta parte se calcula el VaR (en rendimiento) por tres métodos: histórico, paramétrico y mixturas gaussianas, al 99% a un horizonte de tiempo de 1 día. En el caso del CVaR se calculó al 97.5% y a un día cuya justificación está en [4]. El método de estimación de los parámetros de las mixturas es el método EM descrito anteriormente. Se analizan los resultados obtenidos de dichos modelos mediante el *backtesting* con la prueba de Kupiec. Para realizar el análisis retrospectivo se considera un portafolio con pesos iguales y una posición de una unidad con una ventana móvil de 250 días. Se parte de precios de cierre a partir del 31/12/2019 como primer dato y rendimientos desde el 02/01/2020 hasta concluir el 04/01/2021. Se obtiene el VaR, la posición back, las pérdidas y ganancias reales del portafolio y de cada posición, los resultados se comparan con el VaR.

La figura 3 muestra los resultados del backtesting del portafolio con pesos iguales por los métodos: histórico, paramétrico y con mixturas gaussianas. Para este caso se observan un total de 33 excepciones o rebases de VaR durante 2020, siendo el modelo de simulación histórica con el menor número de excepciones durante el periodo del backtesting con 10 en total, como sigue: febrero con 1, marzo con 7 y abril con 2, el de mixturas gaussianas presentó 11 excepciones. El modelo que mostró el mayor número de excepciones es el modelo paramétrico con 12 excepciones.

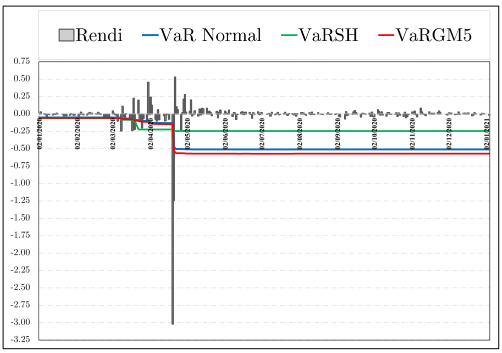
Figure 3: Resultados de backtesting del portafolio con pesos iguales por cuatro métodos.



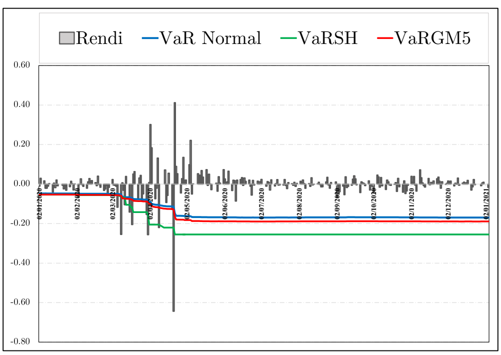
Fuente: elaboración propia.

La figura 4 muestra los resultados del backtesting para cada activo, en los tres componentes el modelo que presentó el menor número de excepciones es el modelo de simulación histórica con 25, mixturas gaussianas con 32 y paramétrico con 36, esto se verifica con el conteo de excepciones de VaR del portafolio con precios ponderados iguales, por componente y por modelo del cuadro 4.

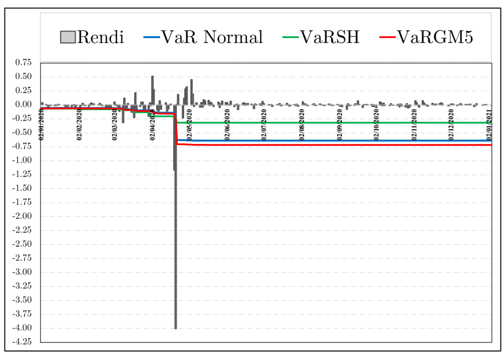
Figure 4: Resultados de backtesting del componente: WTI (6.5(a)), BRENT (6.5(b)) y MME (6.5(c)).



(a) Rendimientos y backtesting de WTI.



(b) Rendimientos y backtesting de BRENT.



(c) Rendimientos y backtesting de MME.

Table 4: Conteo de excepciones de VaR del portafolio, por componente y por modelo.

Excepciones de VaR				
Modelo	VaR Normal	VaR-SH	VaR-GM	Suma
WTI	10	7	8	25
BRENT	13	10	11	34
MME	13	8	13	34
PreciosPond.	12	10	11	33
Total	48	35	43	

Fuente: elaboración propia.

El cuadro 5 muestra los resultados de la validación estadística mediante la prueba de Kupiec[1] para el portafolio con pesos iguales, por componente y VaR al 99%. El nivel de signficancia es de 0.01. Los resultados de la interpretación de la prueba indican que ningún modelo es confiable para estimar el VaR al 99%. A nivel de componente individual sólo el modelo de simulación histórica es confiable para WTI.

[1]Los valores–p mayores o iguales al 0.01 ó 0.05 de significancia indican que el modelo es confiable para estimar el VaR.

Table 5: Resultado de la validación estadística de VaR por modelo y composición.

Modelo	Prueba Kupiec	Razón de verosimilitud	p-value	Excs. esperadas	Excs. reales
Portafolio pesos iguales					
Paramétrico	Rechazar	18.4780	1.72E-05	2.57	12
Histórico	Rechazar	12.5330	3.99E-04	2.57	10
Mixturas N.	Rechazar	15.4100	8.65E-05	2.57	11
WTI					
Paramétrico	Rechazar	12.5327	4.00E-04	2.57	10
Histórico	No Rechazar	5.2456	2.20E-02	2.57	7
Mixturas N.	Rechazar	7.4253	6.43E-03	2.57	8
BRENT					
Paramétrico	Rechazar	21.7207	3.15E-06	2.57	13
Histórico	Rechazar	12.5327	4.00E-04	2.57	10
Mixturas N.	Rechazar	15.4102	8.65E-05	2.57	11
MME					
Paramétrico	Rechazar	21.7207	3.15E-06	2.57	13
Histórico	Rechazar	7.4253	6.43E-03	2.57	8
Mixturas N.	Rechazar	21.7207	3.15E-06	2.57	13

Fuente: elaboración propia.

El cuadro 6 muestra los resultados de la validación estadística mediante la prueba de Kupiec para el portafolio con pesos iguales, por componente y VaR al 95%. El nivel de signficancia es de 0.05. Los resultados de la prueba indican que los modelos paramétrico o normal y mixturas son confiables para la estimación del VaR al 95%. A nivel de componente se observa lo mismo para WTI y MME. En el caso el BRENT todos los modelos son confiables.

Table 6: Resultado de la validación estadística de VaR por modelo y composición.

Modelo	Prueba Kupiec	Razón de verosimilitud	p-value	Excs. esperadas	Excs. reales
Portafolio pesos iguales					
Paramétrico	No Rechazar	3.6070	5.75E-02	12.85	20
Histórico	Rechazar	6.9069	8.59E-03	12.85	23
Mixturas N.	No Rechazar	3.6070	5.75E-02	12.85	20
WTI					
Paramétrico	No Rechazar	1.9424	1.63E-01	12.85	18
Histórico	Rechazar	6.9069	8.59E-03	12.85	23
Mixturas N.	No Rechazar	1.9424	1.63E-01	12.85	18
BRENT					
Paramétrico	No Rechazar	1.2865	2.57E-01	12.85	17
Histórico	No Rechazar	1.9424	1.63E-01	12.85	18
Mixturas N.	No Rechazar	1.2865	2.57E-01	12.85	17
MME					
Paramétrico	No Rechazar	2.7178	9.92E-02	12.85	19
Histórico	Rechazar	4.6046	3.19E-02	12.85	21
Mixturas N.	No Rechazar	2.7178	9.92E-02	12.85	19

Fuente: elaboración propia.

En cuanto a los resultados del análisis retrospectivo con CVaR el cuadro 7 exhibe el conteo de excepciones de CVaR del portafolio con precios ponderados iguales, por componente y por modelo. El modelo de simulación histórica presentó el menor número de rebases de CVaR, los otros dos modelos presentan casi el mismo número de rebases.

Table 7: Conteo de excepciones de CVaR del portafolio, por componente y por modelo.

Excepciones de CVaR				
Modelo	CVaR Normal	CVaR-SH	CVaR-GM	Suma
WTI	13	7	13	33
BRENT	15	10	14	39
MME	14	8	14	36
PreciosPond.	13	7	13	33
Total	55	32	54	

Fuente: elaboración propia.

El cuadro 8 muestra los resultados de la validación estadística mediante la prueba de Kupiec (nivel de significancia del 0.01) para el portafolio con pesos iguales y CVaR al 97.5%. Los resultados de la interpretación de la prueba indican que todos los modelos son confiables para estimar el CVaR al 97.5%.

Table 8: Resultado de la validación estadística de CVaR por modelo.

Modelo	Prueba Kupiec	Razón de verosimilitud	p-value	Excs. esperadas	Excs. reales
97.5%					
Paramétrico	No Rechazar	5.3476	2.08E-02	6.425	13
Histórico	No Rechazar	0.0513	8.21E-01	6.425	7
Mixturas N.	No Rechazar	5.3476	2.08E-02	6.425	13
Fuente: elaboración propia.					

5 Conclusiones

En este capítulo se presentó la teoría sobre las mezclas de normales, sus propiedades y un método de estimación denominado EM. Se desarrolló una metodología basada en mixturas gaussianas, distribución normal y simulación histórica al obtener las expresiones analíticas para el cálculo del VaR y CVaR.

A partir de una muestra de precios del 29/12/2017 al 04/01/2021 obtenidos de la base de datos Federal Reserve Economic Data (FRED) y de Banxico se aplican modelos de Valor en Riesgo (VaR) a portafolios compuestos por posiciones en precios del barril de petróleo: West Texas Intermediate (WTI), BRENT, y MME. Los modelos de VaR aplicados son: simulación histórica, paramétrico y mixturas normales. Asimismo, se ejecuta una prueba de análisis retrospectivo (backtesting) al portafolio con pesos iguales y en cada posición con una ventana de 250 días. El análisis de los resultados indica que la crisis del COVID19 tiene un impacto en los precios de los futuros del barril de petróleo, ya que se observó una tendencia bajista desde principios del 2020, además, en el caso del WTI y MME mostraron precios de cierre negativos. Desde un punto de riesgo mercado cuantificado por el VaR, CVaR y complementado con el análisis retrospectivo, se determinó que el modelo que tuvo el menor número de rebases o excepciones de VaR ha sido el modelo de simulación histórica para el portafolio formado por precios del WTI, BRENT y MME con ponderaciones iguales. A nivel de componente se tiene que el WTI tuvo un total de 25 excepciones, BRENT y MME con 34 y portafolio equiponderado con 33 excepciones. La prueba de Kupiec muestra que ningún modelo es confiable para estimar el VaR al 99%, pero para el VaR al 95% sólo los modelos paramétrico y mixturas normales son confiables, mientras que todos los modelos son confiables para estimar el CVaR al 97.5%.

Una explicación de ello y por los resultados obtenidos es que los eventos extremos no son considerados en los modelos de VaR clásicos. No obstante, el objetivo principal de los modelos VaR no es medir la adecuación del capital de los bancos, sino estimar la exposición al riesgo y los límites operativos de cada mesa de negociación de manera diaria. En otras palabras, el VaR es una herramienta estándar para medir riesgos. Por último, estos eventos extremos se deben considerar en la evaluación de la adecuación del capital.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación: *"Análisis del riesgo mercado con mixturas gaussianas y precios de barril de petróleo"* con clave SIP-20202171, de la Escuela Superior de Economía del Instituto

Politécnico Nacional. De la misma manera, los autores agradecemos a los árbitros sus valiosas observaciones y recomendaciones.

Bibliography

[1] Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, y D. Heath, *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance, **9**(3) (1999), 203-228.

[2] Banco Mundial (2019). Rentas del petróleo (% del PIB): Banco Mundial. Obtenido de Grupo Banco Mundial: https://datos.bancomundial.org/indicador/NY.GDP.PETR.RT.ZS

[3] Barone–Adessi, G., Finta, M. A., Legnazzi, C. y Sala, C. (2019). *WTI crude oil option implied VaR and CVaR: An empirical application*, Journal of Forecasting, **38**(6), 552-563. https://doi.org/10.1002/for.2580

[4] Chang, Chia-L., Jimenez-Martin, J.A., Maasoumi, E., McAleer, M. y Pérez-Amaral, T. (2019). *Choosing expected shortfall over VaR in Basel III using stochastic dominance*, International Review of Economics & Finance, 60, 95-113. https://doi.org/10.1016/j.iref.2018.12.016

[5] Chen, J. M. (2014). *Measuring market risk under the basel accords: VaR, stressed VaR, and expected shortfall*, AESTIMATIO, The IEB International Journal of Finance, **8**, 184–201. https://www.ieb.es/ww2017/wp-content/uploads/2014/07/85.pdf

[6] De Jesús Gutiérrez, R., Ortiz Calisto, E., García Salgado, O., y Ángeles Morales, V. (2016). *Medición del riesgo de la cola en el mercado del petróleo mexicano aplicando la teoría de valores extremos condicional*, EconoQuantum, **13**(2), 77–98. https://doi.org/10.18381/eq.v13i2.6022

[7] Dempster, A. P., Laird, N. M. y Rubin, D. B. (1977). *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*, Journal of the Royal Statistical Society B, **39**(1), 1–38. http://www.jstor.org/stable/2984875

[8] Devpura N., Narayan P.K. (2020). *Hourly oil price volatility: the role of COVID-19*, Energy RESEARCH LETTERS, **1**(2). `https://doi.org/10.46557/001c.13683`

[9] Guzmán Trujillo, J., Martínez Palacios, M. T. y Ortiz-Ramírez, A. (2018). *VaR y CVaR con cópulas elípticas: una aplicación a portafolios de inversión bivariados con análisis retrospectivo*, en Matemáticas y sus Aplicaciones 10, capítulo 6, pp. 121-154, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. ISBN: 978-607-525-521-7. Disponible aquí.

[10] Hung-Chun, L., Ming-Chih, L., y Ching-Mo, C. (2009). *The role of SGT distribution in Value-at-Risk estimation: evidence from the WTI crude oil market*, Investment Management and Financial Innovations, **61**(1), 86–95.

[11] Iyke, B. N. (2020). *COVID-19: The reaction of US oil and gas producers to the pandemic* Energy RESEARCH LETTERS, **1**(2). `https://doi.org/10.46557/001c.13912`

[12] Rosales-Contreras, J. (2015). *Estimación de métricas de riesgo de mercado usando mixturas gaussianas*, Contaduría y Administración, **61**(1), 202–219. `http://dx.doi.org/10.1016/j.cya.2015.09.008`

[13] Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk.* Third Edition. McGraw-Hill.

[14] Kupiec, P., (1995). *Techniques for verifying the accuracy of risk management models*, Journal of Derivatives, **3**(2), 73–84. `https://doi.org/10.3905/jod.1995.407942`

[15] Liu, L., Wang, E.-Z. y Lee, C.-C. (2020). *Impact of the COVID-19 pandemic on the crude oil and stock markets in the US: A time-varying analysis*, Energy RESEARCH LETTERS, **1**(1). `https://doi.org/10.46557/001c.13154`

[16] McLachlan, G. y Peel, D. (2000). Finite Mixture Models. EUA: Wiley.

[17] McNeil, A. J., Frey, R. y Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. Revised edition. Princeton University Press.

[18] Rodríguez-Benavides, D., Venegas-Martínez, F., Hoyos-Reyes, L. F., (2019). *Impacto de la volatilidad del precio internacional del petróleo en los rendimientos accionarios de los principales mercados de América Latina*, Estocástica: finanzas y riesgo, **9**(2), 129–161, julio-dic.

[19] Serrano Bautista, R. y Núñez Mora, J. A., (2019). *Valor en Riesgo en el sector petrolero: un análisis de la eficiencia en la medición del riesgo de la distribución α-estable versus las distribuciones t-Student generalizada asimétrica y normal*, Contaduría y Administración, **65**(2), e173. http://dx.doi.org/10.22201/fca.24488410e.2019.2021

[20] Tan, K. y Chu, M. (2012). *Estimation of portfolio return and value at risk using a class of Gaussian mixture distributions*, The International Journal of Business and Finance Research, **6**(1), 97–107.

[21] Venegas-Martínez, F., *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición, Cengage, México (2008).

[22] Zhifeng Liu, Toan Luu Duc Huynh, Peng-Fei Dai (2021). *The impact of COVID-19 on the stock market crash risk in China, Research in International Business and Finance*, 57. https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2021.101419

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Alcaldía Miguel Hidalgo
Ciudad de México, C.P. 11340

amortiz@ipn.mx

Modelación matemática

Matemáticas y sus aplicaciones 17, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-765-5

Capítulo 7

Fourier Series Method with Circular and Spheric Harmonics applied to physical phenomena regarding the direct problem solution

Jesús Alonso Arriaga Hernández[1], Bolivia Cuevas Otahola[2], José Jacobo Oliveros Oliveros[1] and María Monserrat Morín Castillo[2]
FCFM-BUAP[1], FCE-BUAP[2]

Abstract

In this chapter, we show the construction of mathematical models to represent and study physical phenomena. To this aim, we use boundary problems, direct problem, and their corresponding solutions, obtained by the Fourier Series Method (FSM), as a generalization of the Fourier Series. We propose models using boundary problems in differential equations with boundary conditions suitable for the analyzed physical phenomena, determining the corresponding solution applying the FSM. In this context, the direct problem provides a solution to the boundary problem constrained to the last region edge, allowing to establish correlations between the sources, generating the phenomenon and the performed measurements by a given sensor (electrical, luminous, magnetic, etc, depending on each phenomenon). The relevance of the generalization of the Fourier Series is on the analysis it performs in each variable (time and space) and frequencies (both in space and time), with the corresponding coefficients being a linear combination of spheric or circular harmonics, depending on the dimension of the model space, 2D o 3D respectively. We show the extent, limitations, results, and comparison of the FSM with other techniques. We highlight that the solution to the boundary problem we proposed is analytical and unique (except the constants) depending continuously on the input data, with small changes in the source producing small changes in the problem solution.

1 Introduction

Mathematical modeling is widely used in a large variety of research works, in some cases, considered differently than boundary problems, or without the mathematical rigor or formalism, taking the hypothesis, antithesis, and proofs as a consequence of the logical interpretation of the phenomenon [1, 2, 3]. This is attributed to the divergence of physical concepts, modifying the interpretation, and conditions affecting the involved equations, with the subsequent need for an important correction of the model to unify both, the mathematical and physical interpretation. In order to experimentally reproduce a given natural phenomenon, large amounts of information and data are required to validate the solution of a model describing such a specific event, following the directions of the scientific method which allows analyzing phenomena theoretically and experimentally using several tools (mathematics, physics, chemistry, etc.) emphasizing the applications of integral transforms, Differential Equations (DE), function series, Fourier Series, Taylor Series, etc. [2, 4]. Thus, it is possible to create a guide for performing proper mathematical modeling of phenomena with an understanding of a large number of parameters (or a subset of the total set of parameters in some cases) or essential parameters determining an optimal solution considering the attributes and characteristics of the studied phenomenon. For instance, in optical design finding the proper location of the focus is crucial [5, 6, 7]; in the design of new algorithms the integral transform is fundamental to the physical-computational comprehension of the problem [8]; in the reconstruction of a signal with alterations (noise), the physical-electronic conception of a given parameter is vital [9]. However, we recall that considering the whole set of attributes is more computationally-demanding, requiring non-conventional numerical techniques, and more rigorous theoretical analysis. Considering these limitations, several works include the Fourier Series with its mathematical formalism, mathematical and harmonic analysis [10]: such as the work by [11] and [12], in which the Fourier Series and Transforms are used to build filters to optimize their results, considering the noise and non-visible errors in the data, as well as works in photonics where the analysis requires diffusor materials to obtain 3D in-vivo images, [13]. On the other hand, in physics, several problems are related to the wave, Schrödinger's and Helmholtz equations ([14] and [15] respectively) among other second-order or higher-order (even order) differential equations (DE). The potential complexity of such equations requires taking special care during the analysis of the phenomenon [2, 4, 16], leading to coupled equations or integrodifferential equations [17], which can be considered within the boundary problem with Cauchy, Robin, Dirichlet or other initial conditions [10, 18], as required by the model.

The scope of this chapter is to show a method to generalize the Fourier Series of space and time functions, allowing us to perform a generalized study instead of an analysis in time and/or frequencies. This method determines a solution in space for each time interval. The series coefficients are determined in terms of the dimension of the space where the model equations and conditions are defined (as subspaces of $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$, which we refer to as 2D or 3D, respectively). Such coefficients are a linear combination of circular or spheric harmonics used to determine the analytical solution in terms of the Fourier Series. Generally speaking, the whole region is not necessarily homogeneous in each of its subregions, leading to modifications in the solution expressed as Fourier Series. The DE (differential equation), and boundary conditions are used to determine the Fourier coefficients of the solution, which are expressed in terms of the Fourier coefficients of the source. Therefore, the system solution obtained from the coefficients equation system as well as the DE, boundary conditions, and continuity, determines the solution to the boundary problem, which we call the Fourier Series Method (FSM) [2, 4, 19]. Considering this, we write the functions in terms of Fourier Series, using the boundary and continuity conditions of the solution, providing a solution of the direct problem, and, hence, determining the solution of the boundary problem constrained to the outer edge of our model. Besides, in this chapter, we mention the necessary conditions to apply these methods as well as some properties for the involved functions (source, measurement, boundary conditions, etc.) [20]. In order to illustrate some applications of the FSM, we give some examples from other research works to show the extents of the method.

In Section 2, we illustrate the modeling of a wavefront (W) analysis by means of a boundary problem solved by the ITE. The solution to such a problem can be obtained straightforward applying the information in successive sections. In Sec. 3 and 4, we show an example easily applicable to the analysis of electroencephalographic phenomena in the recognition of additional points and the subsequent typical EEG measurement. It is also applicable to sources phenomena (electromagnetic, bioelectrical, etc). Finally, in Subsec. 4, we show our proposal as an alternative solution method in photonics, diffraction, and beams propagation in physics.

2 Necessary conditions and limitations

In order to apply the FSM, it is necessary in the first place to write all the involved functions in the phenomenon in terms of the Fourier Series. The boundary conditions should be applied to these functions with the aim of manipulating them following the model conditions. Hence, the functions should be continuous in the whole region Ω and twice differentiable in each of the subregions constituting the proper region (this is the first condition to be satisfied in order to apply the FSM) in subsets of $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ [1, 2]. Thus, the solution of the boundary problems is harmonic in one of the regions.

One limitation of our approach in the modeling by regions is due to geometrical problems since the FSM is only applicable in simple cases (circles, squares, spheres, etc.). In cases with more complex geometries, the problem can be modeled by using conformal mappings [3, 19, 21]. On the other hand, the FSM considers several procedures and points of view to solve the problems in mathematical modeling as a direct or inverse problem, according to the phenomenon requirements and the desired solution. The inverse problem, in particular, is out of the scope of the work developed in this chapter, but it will be treated in a forthcoming research work. We focus on the direct problem, which has been widely used in solving the Poisson Equation, Helmholtz Equation [15], and the Eigenvalues Equation in Quantum Mechanics [14], where the solution is constrained to the edge of the boundary problem modeling the phenomenon. Such a solution is interpreted as a direct measurement performed in the outer layer or in a region close to the outer boundaries of the model. In order to illustrate the mathematical modeling using boundary problems and the direct problem, we consider the model proposed in the work by [22], where the wavefront (W) is obtained from the Irradiance Transport Equation (ITE) [23] described as follows:

$$\begin{cases} I\overrightarrow{\triangledown}^2 W = -f & \text{in } \Omega_1, \\ \mu_1 = 0 & \text{in } \partial\Omega_1, \\ \mu_2 = 0 & \text{in } \Omega_2, \end{cases} \tag{1}$$

with I the irradiance captures, $f = (1/I_1)(\Delta I/\Delta z)$, $\mu_1 = \overrightarrow{\triangledown}\overrightarrow{u}$, $\mu_2 = \overrightarrow{u}$;

and $\overrightarrow{u} = I\overrightarrow{\bigtriangledown}W$. Considering the normal derivative ($\overrightarrow{n}$) to the region Ω_1 ($\overrightarrow{\bigtriangledown}u \cdot \overrightarrow{n}$), Eq. (1) is transformed into:

$$\begin{cases} I\overrightarrow{\bigtriangledown}^2 W = -f & \text{in } \Omega_1, \\ I\overrightarrow{\bigtriangledown}W \cdot \overrightarrow{n} = \varphi & \text{in } \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2}$$

Observing Eq. (2) we identify the physical phenomenon modeled as a boundary problem, as well as an additional condition for the application of FSM, deduced from the Green's formulae [2, 19, 21], the so-called compatibility condition. This condition establishes a relation between the source function (f) in the region where it is located (in this case Ω_1, as $L_2(\Omega_1)$ functions [1, 2]) and the normal derivative of the solution

$$\int_{\Omega_1} f + \int_{\partial\Omega_1} \varphi = 0. \tag{3}$$

The previously stressed arguments also hold for simple complex source functions (f), as the sources with fractal symmetry [2, 3]. Moreover, if the source function f is harmonic, then $\triangle f = 0$ and if W is the solution of the boundary problem it is also bi-harmonic ($\triangle^2 W = \nabla^2 W = 0$). Thus, the solution of the direct problem is found from $W\mid_{\partial\Omega_1}$ (i.e. the potential W constrained by the boundary of Ω_1) [24, 25, 2, 26, 27].

Applications

As we have mentioned before the problems with the potential to be modeled in regions using simple geometries can be treated using the FSM, considering them as boundary problems where the functions can be expressed as Fourier Series expansion [1, 2]. For instance, in the field of epidemiology where the model analyses a DE, usually a fist order, such as the rate of population or agent variation within another set, in which the predictions are estimated from the sample set [28, 29]; in electromagnetism beams-related problems, signals, EEG, MEG, wavefront, cavitation, electrostatic, potentials, and equipotential surfaces, and other problems can be solved using this method. In quantum mechanics, the FSM is applied to the wave equation in several systems, eigenvalues equations, oscillators, n-bodies, particles, etc. The classical theorems of vectorial calculus can be applied to re-write the potentials accordingly to apply the FSM given the capabilities of the DEs [4, 15, 16, 26].

Description of the FSM

We recall the previously mentioned conditions Eq. (3) to illustrate the use of the Fourier Series with circular harmonics (2D case) and spherical harmonics (3D case) in functions depending on space and time t. We consider the harmonic oscillator conditions [2], and apply the operator $\triangle_{r,\theta}$ to the function $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ (which allows performing variable separation). Hence, we obtain the Laplace Equation in terms of R and Θ.

$$r^2R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' = 0, \tag{4}$$

solving the DEs in Eq. (4) using the separation constant λ [4, 19], we obtain

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \\ \qquad \Theta'' + \lambda\Theta = 0, \end{cases} \tag{5}$$

to deduce the following solutions

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} A_0 + B_0\theta & \text{if } \lambda = 0, \\ A_1Cos(n\theta) + B_1Sin(n\theta) & \text{if } n = \sqrt{\lambda} \neq 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$R(r) = \begin{cases} C_0 + D_0log(r) & \text{if } \lambda = 0, \\ C_1r^n + D_1r^{-n} & \text{if } n = \sqrt{\lambda} \neq 0, \end{cases} \tag{7}$$

with A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1, D_0, and D_1 constants, $n \in \mathbb{N}$ is obtained from the periodicity of the solutions of the DE for Θ given in Eq. (5). The functions $R(r) = r^n, r^{-n}$ are the solutions of the DE for R given in Eq. (5). The terms Sin and Cos are the general solution of the Θ function, the so-called circular harmonics [2, 19, 26]. Subsequently, the generic solution is given by $y = y_1 + y_2$ with

$$y_1(r,\theta) = \left[C_0 + D_0log(r)\right]\left[A_0 + B_0\theta\right], \tag{8}$$

$$y_2(r,\theta) = \left[C_1r^n + D_1r^{-n}\right]\left[A_1Cos(n\theta) + B_1Sin(n\theta)\right], \tag{9}$$

with y_2 the generalized Fourier Series of the FSM in the 2D cases. We draw particular attention to the circular harmonics [19], $A_1Cos(n\theta) + B_1Sin(n\theta)$, and to the dependence of Θ on time t. On the other hand, in the 3D case, we apply the operator $\triangle_{r,\theta,\phi}$ to the function $V = R(r)Y(\theta, \phi)$ satisfying the Laplace Equation. From the variable separation procedure, we obtain

$$\begin{cases} r^2R'' + \mu R = 0, \\ \frac{1}{sin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right] + \mu Y = 0, \end{cases} \tag{10}$$

with μ the separation constant. The solutions of the shown differential equations Eq. (10) are given by $V = V_1V_2V_3$, with

$$V_1(r) = b_1r^l + b_2r^{-(1+l)}, \tag{11}$$

$$V_2(\phi) = c_1Cos(m\phi) + c_2Sin(m\phi), \tag{12}$$

$$V_3(\theta) = a_1{P_m}^l(Cos(\theta)) + a_2{Q_m}^l(Cos(\theta)), \tag{13}$$

with a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 constants, m and l integers, and the terms ${P_m}^l$ ${Q_m}^l$ are Legendre functions constituting the spherical harmonics in V_3 [2, 19].

Subsequently, the coefficients are computed in the FSM to determine the solution of the direct problem associated with the boundary problem modeling the phenomenon. Such procedure is not straightforward, due to the complexity given by the total number of equations and conditions in the equations system from which the potential coefficients are computed. Such systems are expressed in terms of the Fourier coefficients of the source function, which are computed from integrals computationally expensive depending on the source function type [2, 19].

It should be noticed that the series obtained from linear combinations of the (infinite) basis elements i.e. the Fourier Series [19, 21], is a solution of the Laplace Equation, which can be treated as a differential equation (applying the Laplacian operator) or as a series (expressing the solution in terms of the base). The functions series $u_n = \sum_{k=1}^{n}\left[a_kcos(k\theta) + b_ksin(k\theta)\right]$, (with a_1 and b_1 the series coefficients) formed by the partial sums of the Fourier Series, for which hold that the functions $\left\{u_n^{'}\right\}$ and $\left\{u_n^{''}\right\}$ converge uniformly. The previously stressed arguments are given in virtue of the following theorem establishing the conditions over an interval that can be extended to more general regions [2, 3, 19, 21].

Theorem 2.1. *Suppose $\{f_n\}$ is a sequence of functions, differentiable on $[a,b]$ and such that $\{f_n(x_0)\}$ converges for some point x_0 on $[a,b]$. If $\{f'_n\}$ converges uniformly on $[a,b]$, then $\{f_n\}$ converges on $[a,b]$, to a function f and for $x \in [a,b]$ then*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x). \tag{14}$$

Proof. The proof of this result has been extensively studied. The reader can find the proof in the 152 of [21] and in the pages, 105 - 107 at [19]. □

3 FSM applied to a 2D model of 3 regions

We simulate a 2D physical phenomenon (a medical or a signal problem) to illustrate the construction of a boundary problem as a mathematical model with a solution obtained by applying the FSM. Such phenomenon is considered as a subspace of $\mathbb{R}^2$ [3] with a source function in the center of three concentric regions Ω_1, Ω_2 and Ω_3, with radii R_1, R_2 and R_3 such that $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_3$ (see Fig. 1 (a)), considering that each region has a feature of the medium (electrical constants, transmittance, etc.). Without loss of generality, we can set the source function $f(x,y,t)$ as a charged electrode, a photodiode, a doped cell by a given isotope, a bioelectric source within the region Ω. In the latter case, if the source is in the region Ω_1, Ω can represent the head as a conductor region, with an Electroencephalogram (EEG) being a solution of the direct problem in the scalp. Regarding body regions with electrical activity capable of producing a bioelectromagnetic field, the Maxwell equations are suitable for such regions analysis. For example, from the Faraday-Lenz law $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ (with $\overrightarrow{B}$ the magnetic field and $\overrightarrow{E}$ the electric field) we can verify that (if the variations of $\overrightarrow{B}$ are small in the measurement times of $\overrightarrow{E}$) $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = 0$. This is widely known as the quasi-static approximation of the Maxwell Equations (with application to electronics, physics, electroencephalography, electrocardiography, medicine, etc.) as developed by [30] and [31]. From the previous arguments, it follows that a scalar field exists (u)

satisfying $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\bigtriangledown} u$. Thus, to construct the boundary problem, we consider the equation of continuity to be satisfied

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{J}^{T} = 0, \tag{15}$$

where ρ is the charge density and $\overrightarrow{J}^{T}$ is the total electric current density. In virtue of the Gauss law, $\overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{E} = \rho/\epsilon$, with ϵ the dielectric constant. If the phenomenon satisfies that $\overrightarrow{J}^{T} = \overrightarrow{J}^{p} + \sigma \overrightarrow{E}$ with σ the electric conductivity [31], $\sigma \overrightarrow{E}$ represents the Ohmic current and $\overrightarrow{J}^{p}$ the activity of a bioelectric source (large conglomerates of cells, such as neurons, working simultaneously and capable of producing a large field visible in the EEG or in another type of impulse measurable using electrodes). Several assumptions can be made, for example: if we consider the work by [30], the conditions of the electrostatic equilibrium approximation in which $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ are satisfied, showing (after a very brief period of time) that charge density is constant. Moreover, such a time interval was associated with the medium conductivity and with the vacuum dielectric constant. Thus, the following holds

$$-\sigma \overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{E} = \overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{J}^{p} = -\sigma \overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \left(-\overrightarrow{\bigtriangledown} u\right), \tag{16}$$

the first equation is obtained from the boundary problem in Ω_1.

$$\sigma \triangle u = \overrightarrow{\bigtriangledown} \cdot \overrightarrow{J}^{p} = f. \tag{17}$$

From Eq. (17) and considering that the source is defined in $\overline{\Omega_1}$, the potentials u_i $(i = 1, 2, 3)$ satisfy:

$$\begin{cases} \sigma_1 \Delta u_1(r, \theta, t) = f(r, \theta, t) & \text{in } \Omega_1, \\ \sigma_2 \Delta u_2(r, \theta, t) = 0 & \text{in } \Omega_2, \\ \sigma_3 \Delta u_3(r, \theta, t) = 0 & \text{in } \Omega_3, \end{cases} \tag{18}$$

we have performed a coordinate change from the rectangular to the polar system (r, θ to take full advantage of the model symmetry) [1, 2, 3, 26, 32]. From Eq. (18), we establish another condition to apply the FSM, namely, the regions Ω_i $(i = 1, 2, 3)$ must be open and disjoint sets (with simple geometry) [1, 2, 3]. Considering this, an analysis is required in the boundaries, since in the edges the proper overlapping conditions are proposed in order to guarantee the existence and unicity of the solution of the problem to be built in the region Ω. Thus, $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} \cup \Omega_3$, and $\overline{\Omega_1}$ is the closure of Ω_1 [3, 21]. We define the edges (interfaces) as $s_1 = \partial\Omega_1 = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ (interface between the regions Ω_1 and Ω_2); $s_2 = \overline{\Omega_2} \cap \overline{\Omega_3}$ as the outer edge of Ω_2 (interface between Ω_2 and Ω_3), and $s_3 = \partial\Omega$ the outer edge of Ω_3 (interface of the region Ω and the medium).

We subsequently identify the phenomenon features with the aim of building the interface and edges conditions. In this case, we have considered the so-called transmission conditions corresponding to the continuity of the potential and the normal components of the current in the interfaces separating the different regions [2, 19]. The transmission conditions are given by [2]:

$$\begin{cases} u_1(r,\theta,t) = u_2(r,\theta,t) & \text{in } s_1, \\ u_2(r,\theta,t) = u_3(r,\theta,t) & \text{in } s_2. \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1}(r,\theta,t) = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1}(r,\theta,t) & \text{in } s_1, \\ \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2}(r,\theta,t) = \sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial n_2}(r,\theta,t) & \text{in } s_2, \\ \sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial n_3}(r,\theta,t) = 0 & \text{in } s_3. \end{cases} \tag{20}$$

We illustrate the previously stressed arguments in Fig. 1 (a), where we show the construction of the regions, with the corresponding edges and with the source function f located in the center of Ω_1. The source function in this case is a free charge. This layout constitutes the construction of the boundary problem that models the analyzed phenomenon, giving place to the next step, which is the determination of the Fourier Series for each function $u_i, i = 1, 2, 3$, with the corresponding restrictions of the function u in the boundary of Ω (which coincides with u_3), i.e. the solution of the direct problem $u_3|_{s_3}$.

Application of the FSM: Fourier Series expansion

The source function $f(r,\theta,t)$ is considered as the stimulus or perturbation in several media or regions originating a potential u (medium reaction to the presence of the source) in the whole region Ω. The source function complexity increases following the model requirement and the phenomenon interpretation. Such a function can have fractal symmetry as in the case of the bioelectric sources, implying an additional condition to apply the FSM in terms of source for the solution of the direct problem. Without loss of generality the source function is required to be defined as follows:

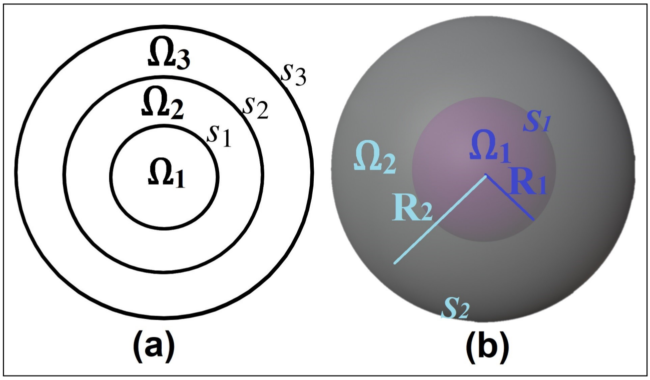


Figure 1: In (a) we illustrate the construction of the regions (Ω_1, $i = 1, 2, 3$) and the edges and interfaces (s_i,$i = 1, 2, 3$) from the first model; in (b) we show the model of two disjoint 3D regions Ω_1 and Ω_2, with radii R_1 and R_2 separated by the edges s_1 and s_2. The source function is defined in the inner region Ω_1.

$$f\left(r,\theta\right) := \begin{cases} \text{harmonic} & \text{if } f\left(r,\theta\right) \in \Omega_1, \\ 0 & \text{if } \left(r,\theta\right) \notin \Omega_1. \end{cases} \tag{21}$$

Hence, the source function is written as a Fourier Series [2, 19], as

$$f(r,\theta,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k^1(t)r^k cos(k\theta) + f_k^2(t)r^k sin(k\theta)\right], \tag{22}$$

with $f_k^1(t)$ and $f_k^2(t)$ the Fourier Series coefficients, which are time-dependent functions in the quasi-static approximation of the Maxwell Equations (if the phenomenon is independent of time, the coefficients are constant). If there are no sources in the interfaces separating the regions Ω_i, $i = 1, 2, 3$ the compatibility condition Eq. (3) follows:

$$\int_{\Omega_1} f = 0, \tag{23}$$

this property ensures the existence of a unique solution (classic or weak) of the boundary problem in Eqs. (18) - (20), excluding the constants (unique in a quotient space) [2, 19]. On the other hand, from the functions y_i Eqs. (8) and (9) we consider the general problem Eq. (9) including the circular harmonics to properly build the potential functions in their corresponding Fourier Series, as follows:

$$u_1(r,\theta,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[a_k^1(t)r^k + b_k^1(t)r^{k+2}\right] cos(k\theta) + \left[c_k^1(t)r^k + d_k^1(t)r^{k+2}\right] sin(k\theta) \right\}, \tag{24}$$

$$u_2(r,\theta,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[a_k^2(t)r^k + b_k^2(t)r^{-k}\right] cos(k\theta) + \left[c_k^2(t)r^k + d_k^2(t)r^{-k}\right] sin(k\theta) \right\}, \tag{25}$$

$$u_3(r,\theta,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[a_k^3(t)r^k + b_k^3(t)r^{-k}\right] cos(k\theta) + \left[c_k^3(t)r^k + d_k^3(t)r^{-k}\right] sin(k\theta) \right\}, \tag{26}$$

as a generalization of the works by [33] and [34]. It should be noticed that the function u_1 equals zero at the origin. Since each term of the series is zero (when evaluating at $r = 0$), the theorem 2.1 holds. If we recall Eq. (22) (our known source function), the Fourier coefficients are obtained from

$$\begin{cases} f_k^1(t) = T_1(t)\int_{\Omega_1} f(r,\theta,t)r^k cos(k\theta)rdrd\theta, \\ f_k^2(t) = T_2(t)\int_{\Omega_1} f(r,\theta,t)r^k sin(k\theta)rdrd\theta. \end{cases} \tag{27}$$

where $T_1(t)$ and $T_2(t)$ are a function of the coefficients in the Eq. (27), showing the evolution of the phenomenon in time. The following step of the FSM is the determination of the coefficients $a_k^i(t)$, $b_k^i(t)$, $c_k^i(t)$, and $d_k^i(t)$ (for each potential in each region, with $i = 1, 2, 3$). Such coefficients are obtained using the complete set of equations and boundary conditions of the model for each k and time t.

Application of the FSM: coefficients determination

The equations of the boundary problem can be regarded as the mathematical instructions indicating how to handle the Fourier Series Eqs. (22) - (26). The FSM goes beyond the mathematical modeling since it focuses on determining the coefficients of the solution Fourier Series. Thus, from the first expression in Eq. (18), we expand the term $\Delta_{r,\theta}u_1(r,\theta,t)$ obtaining

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(4k+k)a_k^1(t){R_1}^k cos(kx)+(4k+k)b_k^1(t){R_1}^k sin(kx) = \\ \frac{1}{\sigma_1}\sum_{n=0}^{\infty} f_k^1(t){R_1}^k cos(kx)+f_k^2(t){R_1}^k sin(kx),\end{aligned} \tag{28}$$

hence, we find the first relation between the source function coefficients and the potential u_1

$$\begin{cases} b_k^1(t) = \frac{f_k^1(t)}{4\sigma_1(k+1)}, \\ d_k^1(t) = \frac{f_k^2(t)}{4\sigma_1(k+1)}. \end{cases} \tag{29}$$

We highlight that the FSM is a method that allows determining the coefficients of the potential functions $u_i(r,\theta,t)$ $(i=1,2,3)$ at each time (if the problem is time-dependent and if the quasi-static approximation holds) to obtain the analytical solution as each of the u_i in the whole region Ω. In this particular case, we are illustrating the solution of the direct problem is given as the solution of the boundary problem constrained to the boundary $u\mid_{\partial\Omega} = u_3\mid_{\partial\Omega}$. From the conditions in Eq. (19) it follows that the radius r should take the value R_1 over s_1, R_2 over s_2 and R_3 over s_3, hence

$$\begin{cases} a_k^1(t)+b_k^1(t){R_1}^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(a_k^2(t)+b_k^2(t){R_1}^{-2k}\right), \\ c_k^1(t)+d_k^1(t){R_1}^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(c_k^2(t)+d_k^2(t){R_1}^{-2k}\right). \end{cases} \tag{30}$$

On the other hand, the normal derivative satisfies $\frac{\partial u_i}{\partial n} = \overrightarrow{\bigtriangledown} u_i\cdot\overrightarrow{n}$ [3, 2, 26]. We re-write this derivative straightforwardly in polar coordinates as $\overrightarrow{n} = r\widehat{e_r}$ and $\overrightarrow{\bigtriangledown}_{(r,\theta)}$, since the normal derivative satisfies $\frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{\partial u_i}{\partial r}r$. The latter step is optional, and was performed to simplify the problem since is this case polar coordinates simplify the equations. However, a change to polar coordinates will not simplify every problem considering each specific boundary conditions, the model geometry and the differential operators. For example, is consider in [34] a square region in their model to describe a physical phenomenon. Hence, in our analysis, the normal derivative allows obtaining the following expression from Eq. (20)

$$\begin{cases} b_k^2(t) = a_k^2(t){R_1}^{2k} - \frac{\sigma_1 {R_1}^{2k}}{\sigma_2}\left[a_k^1(t) + b_k^1(t)\frac{(k+2){R_1}^2}{k}\right], \\ d_k^2(t) = c_k^2(t){R_1}^{2k} - \frac{\sigma_1 {R_1}^{2k}}{\sigma_2}\left[c_k^1(t) + d_k^1(t)\frac{(k+2){R_1}^2}{k}\right], \end{cases} \tag{31}$$

subsequently, from the last expression in 20 and considering an additional condition required to apply the FSM, the so-called zero-flux condition in the interface with the medium (i.e., between the outer boundary of Ω and the medium), we obtain

$$\begin{cases} b_k^3(t) = a_k^3(t){R_3}^{2k}, \\ d_k^3(t) = c_k^3(t){R_3}^{2k}. \end{cases} \tag{32}$$

We obtain, from the previous analysis, 16 expressions, considering the orthogonality of the sine and cosine functions for the series expansion. From these expressions, we obtain the equation system in Eqs. (29) - (32), with solutions (for each i_1, $i = 1, 2, 3$) expressed in terms of the Fourier coefficients of the source $f_k^1(t)$ and $f_k^2(t)$ as follows

$$u_i(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_i\left[f_k^1(t)cos\,(k\theta) + f_k^2(t)sin\,(k\theta)\right], \tag{33}$$

for each $i = 1, 2, 3$, with the auxiliary variables Z_i given by

$$Z_1 = \frac{{R_1}^{k+2}}{4k\sigma_1(k+1)}\left[1 - \frac{{R_1}^{2k}}{{R_3}^{2k}}\right], \tag{34}$$

$$Z_2 = -\frac{{R_1}^{2k+2}}{4k\sigma_2(k+1)}\left[{R_2}^{-k} + \frac{{R_2}^{k}}{{R_3}^{2k}}\right], \tag{35}$$

$$Z_3 = -\frac{{R_1}^{2k+2}}{2k\sigma_3(k+1){R_3}^{k}}. \tag{36}$$

In order to determine the direct problem solution, we focus on determining $u_3|_{s_3}$ using the previous equations. We consider the solution as a measurement in the boundary of Ω, simulating the effects of placing a sensor in the interface between the region Ω and the outer medium (in the boundary), which can be considered to have null conductivity of the air in the medium (satisfying the zero-flux conduction). In order to physically illustrate the previously stressed arguments, we show the following example, assuming f as a free charge in a dimensionless phenomenon considering

$$\begin{cases} f(x,y,t) = 12\,(x^2 - y^2)\,T(t) \\ f(r,\theta,t) = 12r^2 cos(2\theta)T(t) \end{cases}, \tag{37}$$

with the function $T(t)$ representing the phenomenon evolution in time. We considered the time as a dimensionless variable within the interval $t = [0,1]$ with a step size of $p = 0.0001$ (bearing in mind that the direct problem is solved at each time interval, solving $1/p$ direct problems in total). In Fig. 1 we show the simulated model and in Eq. (37) the corresponding source function; in Fig. 2 we show the boundary problem solution as well as some examples of the direct problem solution in three different points. In Fig. 2 (a) we show the boundary problem solution and each potential u_1, u_2, and u_3, given their corresponding interaction with the source in Eq. (37), observing a certain degree of stability given the lack of significative changes from $t = 0.4\,\mathrm{sec}$. We show the simulated measurements (performed with a given electrical measurement sensor) in the outer boundary of s_3 $(u|_{s_3})$ in blue, black, and brown points, respectively. In Fig. 2 (b) we show the simulated measurement in the blue point in (a) ($u|_{s_3}$, only in the blue point), where we observe a certain increase up to $t = 3$, where a certain degree of stability of the potential u is reached. In (c) we show the simulated measurement in the black point, with a peak at $t = 0.1$. In (d) we show the simulated measurement in the brown point, with potential function values dropping. We show a general stability trend in u starting at $t = 0.3$ and ensured at $t \geq 0.4$.

Application of the FSM to a 2 regions 3D model

In this section, we illustrate the solution of a 3D case with a free charge in two volumetric regions (Ω_1 and Ω_2), with a source function f in the center of Ω_1. The two spherical regions Ω_1 (purple sphere) and Ω_2 (translucid green sphere) (disjoint open sets, following the FSM conditions), with radii R_1 and R_2, and the corresponding edges s_1 and s_2 serving as interfaces ($s_1 = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \partial\Omega_1$) between the regions; and ($s_2 = \partial\Omega$, con $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2$) with the outer medium (respectively, as shown in Fig. 2 (b)). The boundary problem, in this case, is similar to the problem described in Eqs. (18) - (20), with the source function

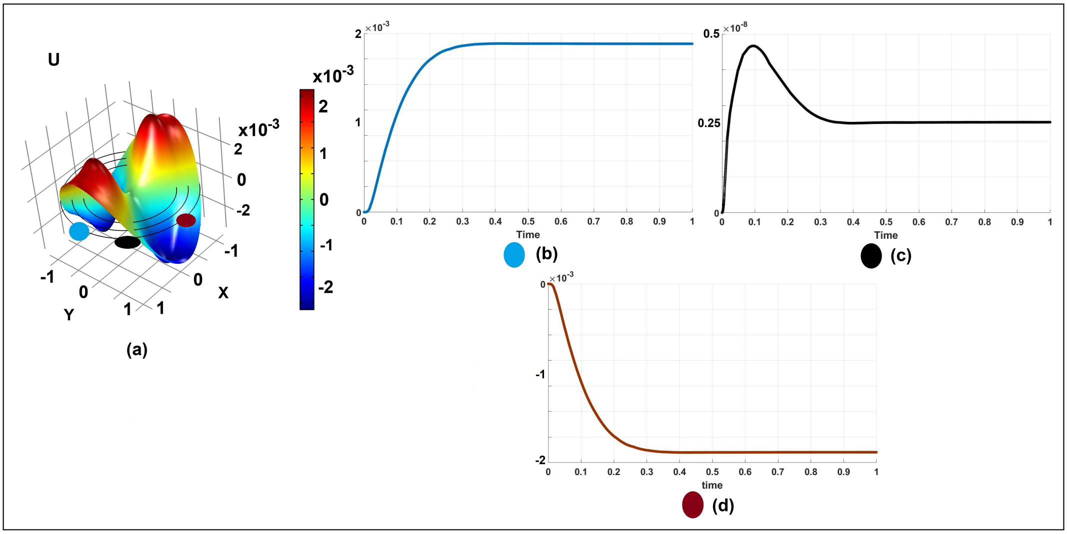


Figure 2: (a) Solution u of the direct problem (surface plot) along the tree regions Ω_i $(i = 1, 2, 3)$. Measurement simulations $(u_3|_{s_3})$ over s_3 in (b), (c) and (c) for the blue, black, and brown points in (a), respectively.

in Eq. (21) satisfying Eq. (23). Moreover, f requires modifications in order to change the number of the equations according to the geometry and to set the conditions for using spherical harmonics [φ^l_m, described in Eqs. (11) - (13)] for obtaining the Fourier Series (as indicated by the FSM). The resulting Fourier Series describing the source function is described by:

$$f(r, \theta, \phi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=-m}^{m} f^l_m(t) r^m \varphi^l_m(\theta, \phi), \tag{38}$$

with the Fourier coefficients $f^l_m(t)$ given by:

$$f^l_m = T(t) \int_{\Omega_1} f(r, \theta, \phi) r^m \varphi^l_m d\Omega_1. \tag{39}$$

The Fourier series in terms of the spherical harmonics of the potential functions u_1 and u_2 are given (similar to Eq. (27) but as a linear combination of the spherical harmonics) by:

$$u_1(r,\theta,\phi,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} \left(A_m^l(t)r^m + B_m^l(t)r^{m+2}\right)\varphi_m^l\left(r,\theta,\phi\right), \tag{40}$$

$$u_2(r,\theta,\phi,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} \left(C_m^l(t)r^m + D_m^l(t)r^{-m-1}\right)\varphi_m^l\left(r,\theta,\phi\right), \tag{41}$$

with $T(t)$ the function representing the source and model evolution in time. Moreover, $l \neq 0$ in all cases for the spherical harmonics φ_m^l Eqs. (39) - (41). The 3D problem is solved by considering the boundary problem equations, re-written from Eq. (18) to Eq. (20) to be suitable for the two regions, with an equivalent analysis for building the model described in Secs. 2, 2, and 3, obtaining the following model:

$$\Delta u_1(r,\theta,t) = f(r,\theta,t), \text{ en } \Omega_1, \tag{42}$$

$$\Delta u_2(r,\theta,t) = 0, \text{ en } \Omega_2, \tag{43}$$

$$u_1(r,\theta,t) = u_2(r,\theta,t), \text{ sobre } S_1, \tag{44}$$

$$\sigma_1\frac{\partial u_1}{\partial n_1}(r,\theta,t) = \sigma_2\frac{\partial u_2}{\partial n_1}(r,\theta,t), \text{ sobre } s_1, \tag{45}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2}(r,\theta,t) = 0, \text{ sobre } s_2. \tag{46}$$

The radius r equals R_1 and R_2 in s_1 and s_2, respectively. We apply the differential operators to obtain an equation system (depending on the coefficients) to explicitly determine the solution u ($u_i = u\mid_{\Omega_i}, i = 1,2$, with u_1 the boundary problem solution in the region Ω_1 and u_2 the solution in the region Ω_2). Thus, from Eq. (42) we obtain

$$\Delta u_1(r,\theta,\phi,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} B_m^l(t)(4m+6)r^m\varphi_m^l\left(r,\theta,\phi\right), \tag{47}$$

subsequently from Eq. (45), we obtain the following expression simultaneously

$$\frac{\partial u_1(r,\theta,\phi,t)}{\partial n_1} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} \left(mA_m^l(t)r^{m-1} + (n+2)\, B_m^l(t)r^{m+}\right) \varphi_m^l\,(r,\theta,\phi)\,, \tag{48}$$

$$\frac{\partial u_2(r,\theta,\phi,t)}{\partial n_1} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} \left(mC_m^l(t)r^{m-1} + (n+1)D_m^l(t)r^{-m-2}\right) \varphi_m^l\,(r,\theta,\phi)\,, \tag{49}$$

proceeding analogously to Eq. (49), we obtain the last model relation from Eq. (46). We follow some heavy but simple algebraic steps to obtain the following coefficients relations

$$B_m^l(t) = \frac{f_m^l(t)}{4m+6}, \tag{50}$$

$$A_m^l(t) = C_m^l(t)\left(1 + \frac{m{R_2}^{2m+1}}{m+1}\right) + \frac{f_m^l(t)}{4m+6}{R_1}^2, \tag{51}$$

$$D_m^l(t) = m\frac{C_m^l(t)}{m+1}{R_2}^{2m+1}, \tag{52}$$

$$C_m^l(t) = -(m+1)f_m^l(t){R_1}^{2m+3}Z_{mR}, \tag{53}$$

where Z_{mR} is given by

$$Z_{mR} = \frac{2\sigma_1}{(4m+6)\left[(m+1)(\sigma_1-\sigma_2){R_1}^{2m+3} + ((m+1)\sigma_2 - m\sigma_1){R_2}^{2m+1}\right]}, \tag{54}$$

with σ_i $(i = 1, 2)$ the model electric conductivities. Hence, the analytical solution of the boundary problem provided by the FSM allows obtaining the potential functions in series form as follows:

$$u_1(r,\theta,\phi,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} \left\{\frac{1}{2m+3} - Z_{mR}{R_1}^{2m+1}\left[(m+1) + m{R_2}^{2m+1}\right]\right\} f_m^l(t){R_1}^{m+2}, \tag{55}$$

$$u_2(r,\theta,\phi,t) = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m}\left(\frac{2m+1}{m}\right) Z_{mR} f_m^l(t) {R_1}^{2m+3} {R_2}^{m}. \tag{56}$$

As in the case of the 2D problem, the FSM gives the direct problem solution, constraining the boundary problem solution u Eqs. (42) - (46) to the outer edge of Ω $(u_2|_{s_2})$. In Fig. 3, we show the results assuming a free electric charge that behaves as the source function in Eq. (37) in the inner region Ω_1 (as a proper subset of another set, in this particular case of Ω and Ω_2). We show the direct problem solution at $t = 1$ (as well as dimensionless). In Fig. 3 (a) we show the 3D solution u, in Fig. 3 (b) we show the solution u_2, and in Fig. 3 (c) the solution u_1. We recall the direct problem solution $u_2|_{s_2}$ we obtained by solving the dimensionless problem, reproducing accurately the results in Fig. 2 (b), (c), and (d), when taking similar measurements on the disk in the 3D solution equator in Fig. 3 (a).

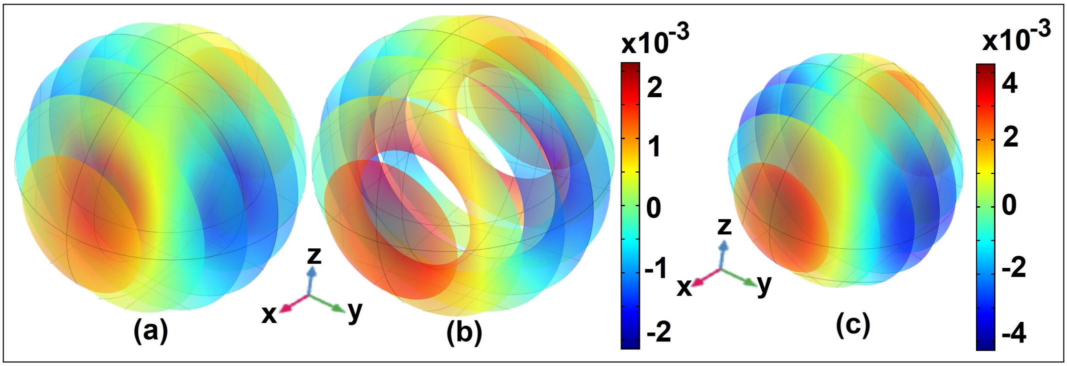


Figure 3: (a) Direct problem solution u $(u = \bigcup_{i=1}^{3} u_i)$ along the 3D space in Ω. (b) u_2 and (c) u_1 for the source in Eq. (37) at $t = 1$.

4 Results analysis

The algorithms, data processing, and the rest of the computational tools used in this research were developed and implemented in Matlab ®, Python, and COMSOL®. The runs were performed in two gamin computers with graphic cards of 1408 Cuda cores, 6 GB gddr5 memory, 32 Gb of RAM, and 12 threads processors. In all the mathematical models corresponding to the different physical phenomena, we applied the dimensionless conditions with times in the interval $t = [0, 1]$ and with step size p at each time (as mentioned before). We used the Finite Element Method (FEM) to solve the problems with three different mesh sizes $h = 0.1, 0.05, 0.025$ [2, 35] in order to compare the results. We have reported the results only for $h = 0.025$. Several examples were performed in Python for each result simulating the mesh, the model, as well as the solution obtained using the FEM to validate and test our results. We obtained the first set of results for the simple source function as follows

$$\begin{cases} f(x, y, t) = (x^2 - y^2)\,[1 + (x^2 + y^2)]T(t), \\ f(r, \theta, t) = r^2 cos(2\theta)[1 + r^2]T(t), \end{cases} \tag{57}$$

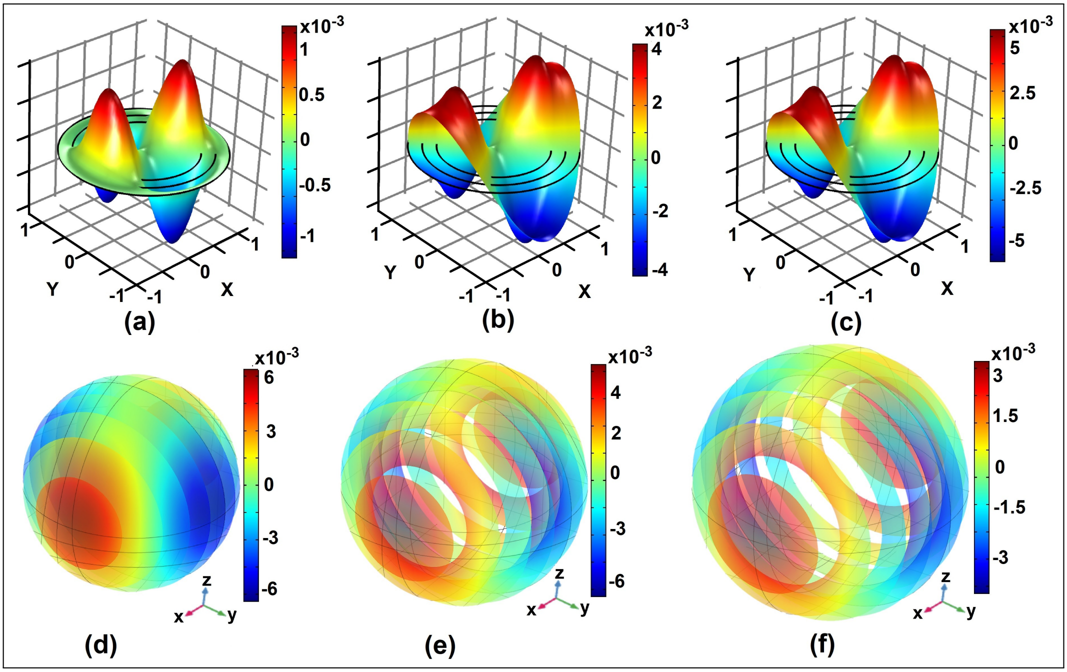


Figure 4: Solution u in Ω considering the 3-regions case. In the first place for the 2-dimensional case at different times $t = 0.01$ in (a), $t = 0.06$ in (b) and $t = 1$ in (c). Subsequently for the 3-dimensional case in each region in time steps of $t = 0.07$: in (d) Ω_1, in (e) Ω_2 and in (f) Ω_3.

with f the source function described in Eq. (57). f Belongs to $L_2(\Omega)$ [2, 35] and is used in the 2D and 3D models for a region Ω constituted by three regions. The errors between the analytical solution u_a (FSM) and the numerical solution u_n (EFM), are given by $e_n = \|u_a - u_n\|_{L2(\partial\Omega)}$. In Fig. 4 we show the obtained results in the 2D case at different times: $t = 0.01$ in (a), $t = 0.06$ in (b) and $t = 1$ in (c); and the 3D case solution at one time ($t = 0.07$) in the inner regions Ω_1, Ω_2 and Ω_3, in (d), (e) and (f), respectively. We show the obtained result from the solution u ($u_i = u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2, 3$) in the whole region Ω, considering the conductivities $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$ and $\sigma_3 = 1$ and the radii $R_1 = 0.8$, $R_2 = 1$ and $R_3 = 1.2$, obtaining an error $e_n = 3.507x10^{-8}$ for the 2D case and $e_n = 7.339x10^{-7}$ between the numerical solutions obtained in COMSOL and Matlab. On the other hand the errors between the analytical and the numerical solutions are $e_a = 7.6325x10^{-5}{}_{L2(\Omega)}$ for the 2D case and of $e_a = 0.703x10^{-3}$ for the 3D case.

Modeling and FSM application; second example

In this section, we illustrate the application of the mathematical modeling and of the FSM in solving boundary problems of models in the literature in order to compare the reported results with those obtained using the method we proposed in this research. We give as the first example the work by [22] we have shown previously in Sec. 2.

We refer to the work by [36], as a second example. In their first equation is shown an equation describing the behavior of the electrical field (as a vectorial function), which we use to build a source function. In their first and only figure are shown the results for three different Gaussian pulses. Such work provides the required theory to model the phenomenon, and thus we model it using a boundary problem and solve it applying the FSM. The proposed model is constituted by three spherical regions (to ensure a greater similarity with the original phenomenon) fitting accurately to the considered source function f in Ω_1. The radii are properly described following the beam propagation and the last region considers the medium interface (the air in this case, with a suitable electrical permittivity and zero conductivity), in order to simulate the measurement regions (3 regions) and the phenomenon qualitatively. Thus, we solve the 3D case (considering the beams propagation) using spherical harmonics, as well as the dimensionless problem, normalizing the constants in the work by [36], and subsequently obtaining in our case the expected solution $u_3|_{\partial\Omega}$ (con $\Omega = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} \cup \Omega_3$) for different points with slight differences over $s_3 = \partial\Omega$ (outer boundary of Ω or interface with the medium).

Considering s_3, gives us an infinite number of possibilities to obtain a measurement (due to the continuity of the solutions [1, 2, 21]), to emulate the conditions of symmetry of the phenomenon by [36]. We search for measurements around the propagation axis of our simulation as well as a solution related to the vectorial field in Eq. (1) (in the work by [36]) with $\overrightarrow{E}\cdot\widehat{e}_x$). Such measurements were performed in 5 different points of s_3, reproducing the expected results, shown in Fig. 5 (a) by the points $P_1 = (1.192, 0.101, 0)$, $P_2 = (1.192, -0.101, 0)$, $P_3 = (1.192, 0, -0.101)$, $P_4 = (1.192, 0, 0.101)$, and $P_5 = (1.2, 0, 0)$. Given the proximity between the corresponding curves, only 3 curves are distinguishable (brown, blue, and black), associated with the points P_1, P_4, and P_5. We compare our results with those reported by [36], and we find differences around $t = 1$ and the maximum energy fraction. Such differences are a result of considering the dimensionless problem, giving strikingly different electromagnetic phenomenon units and medium dispersion, which is reflected in several properties such as electromagnetic permittivity, resistivity, and conductivity. Regarding the first time value, we have not considered any pulse initial conditions, we have only considered the general phenomenon, which justifies the modification. The errors obtained when comparing the results (the 3 curves plots) are $2.83x10^{-2}$, $1.005x10^{-2}$, and $17.833x10^{-2}$ for the brown, blue, and black curves, respectively.

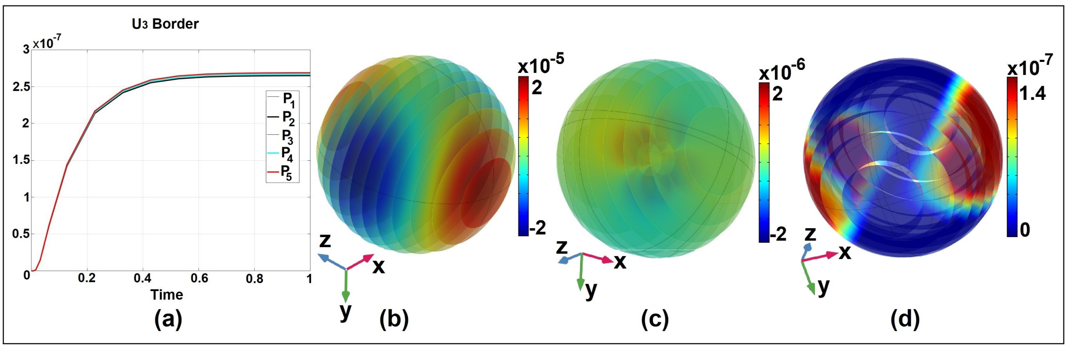


Figure 5: (a) Curves associated to the measurements in brown, blue and black for the points $P_1 = (1.192, 0.101, 0)$, $P_4 = (1.192, 0, 0.101)$ and $P_5 = (1.2, 0, 0)$, respectively, at a time in $t = [0, 1]$. The curves compare well with the results by [36] (their Fig. 1). 3D solution at $t = 1$ in (b) for the inner region Ω_1, (c) for the intermediate region Ω_2 and (d) for the outer region Ω_3.

Bearing in mind one of the features of the FSM applied to the 3D model, we are able to determine the solution of the model boundary problem in all the regions, and in general in the whole model space (where the regions and times were considered). In the 3D case, the measurements can be performed in the inner parts of each region ($\Omega_1 i$ $(i = 1, 2, 3)$, with the knowledge of the propagation medium considered as an advantage when determining any inclination with respect to the original model or an inaccurate interpretation in the propagation according to the points where the measurements are considered. In Fig. 5 (b), (c), and (d), we show the boundary problem solution applying the FSM to the three spherical regions at $t = 1$. We notice that the potential functions u_i $(i = 1, 2, 3)$ remain stable in time ($t = [0, 1]$) according the energy measurements shown in the color bar for each region with conductivities $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$ and $\sigma_3 = 1$ for Ω_1 in (b), Ω_2 in (c) and Ω_3 in (d), respectively.

Conclusions

In the work presented in this chapter, we address several mathematical modeling related-topics, as well as other ones related to boundary problems, direct problem solution, and Fourier Series generalization. These topics allowed us to build a method to obtain an analytical solution of the physical phenomena in regions with a simple geometry (in certain cases, it is possible to depart from a complex geometry to a simple geometry using transformations or isomorphisms [1, 2, 21]) and a source function with its complexity given by each phenomenon requirements. The models were built from 2D and 3D bases, ensuring the solution of a wide variety of problems in physics, bearing in mind that time can be regarded as another function, additional to the space-dependent functions (as we have mentioned when building the spheric and circular harmonics). Moreover, we draw particular attention to the 3D solution, as a solution containing the 2D solution obtained by solving the boundary problem with the direct problem solution, which enables us to have more control over the solution manipulation as well as in the phenomena comprehension and visualization. On the other hand, the latter depends on each researcher's expertise to interpret the boundary problem since an error in a boundary condition may lead to numerical instability, giving place to an erroneous solution or large dispersion. We do not intend to substitute problems such as the beams propagation, solitons or photonics, etc. Instead, we propose a method to obtain an efficient analytical solution that does not require an implicit solution but depends on the construction of the model and the boundary problem, thus taking advantage of the simplicity of the Fourier Series manipulation, its elegance, and bases, as well as in the convergence of the determined solution given by the analyzed problem set by a phenomenon (Theorem 2.1). Finally, we comment that our results accomplish the objective to show the efficiency and extents of FSM in several addressed problems with acceptable errors below 1%.

This method represents a different alternative to other methods offering only one solution for given specific points in time and space (measurements), instead of our proposed analytic general solution that holds for the whole space and time.

Acknowledgments

The authors also thank CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México), for the support given during the course of this investigation.

Bibliography

[1] Tom Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1974.

[2] Roland Glowinski and Pekka Neittaanmäki, *Partial Differential Equations: Modelling and Numerical Simulation*, Springer Netherlands, 2008.

[3] Ignacio Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Limusa-Wiley, 2010.

[4] M. L. Krasnov, G. K. Makarenko and A. I. Kiselev, *Problems and Exercises in the Calculus of Variations*, MIR, 1985.

[5] K. von Bieren, Lens Design for Optical Fourier Transform Systems, (OSA) *App. Opt.* **10** (1971) 2739-2742.

[6] François Roddier, Wavefront sensing and the irradiance transport equation, (OSA) *App. Opt.* **29** (1990) 1402-1403.

[7] Daniel Malacara *Optical shop testing*, John Wiley, 2007.

[8] Roger L. Easton, A. J. Ticknor and H. H. Barrett, Two-dimensional complex Fourier transform via the Radon transform, (OSA) *App. Opt.* **24** (1985) 3817-3824.

[9] T. F. Quatieri, S. H. Nawab and J. S., Frequency sampling of the short-time Fourier-transform magnitude for signal reconstruction, (OSA) *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 1523-1526.

[10] Steven G. Krantz *A Panaroma of Harmonic Analysis*, Math. Assoc. of America, 1999.

[11] Mitsuo Takeda, H. Ina and S. Kobayashi, Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry, (OSA) *J. Opt. Soc. Am.* **72** (1982) 156-160.

[12] Kazuichi Ichikawa, Adolf W. Lohmann and Mitsuo Takeda, Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transform method: experiments, (OSA) *Appl. Opt.* **27** (1988) 3433-3436.

[13] Nick Antipa, Garce Kuo, Reinhard Heckel, Ben Mildenhall, Emrah Bostan, Ren Ng and Laura Waller, DiffuserCam: lensless single-exposure 3D imaging, (OSA) *Optica* **5** (2018) 1-9.

[14] Luis de la Peña *Introducción a la mecánica cuántica*, F. de Cul. Econo., 2014.

[15] Joseph T. Verdeyen *Laser Electronics*, Prentice Hall, 1995.

[16] Leonard Mandel and Emil Wolf *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge U. Press, 1995.

[17] Abdul-Majid Wazwaz *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications*, Springer, 2011.

[18] Willi Freeden, Zuhair Nashed and Michael Schreiner *Spherical Sampling*, Springer Int. Pub., 2018.

[19] Rene Dennemeyer *Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, 1968.

[20] Titzhak Katznelson *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge U. Press, 2004.

[21] Walter Rudin *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[22] Jesus A. Arriaga-Hernández, Bolivia T. Cuevas-Otahola, José Oliveros-Oliveros and María Morín-Castillo, Two-dimensional Legendre polynomials as a basis for interpolation of data to optimize the solution of the irradiance transport equation analyzed as a boundary problem on surfaces testing, (OSA) *App. Opt.* **58** (2019) 5057-5066.

[23] Michael Reed Teague Deterministic phase retrieval: a Green's function solution, (OSA) *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 1434-1441.

[24] Wenqi Lu, Jinming Duan, David Orive-Miguel, Lionel Herve and Lain B. Styles, Graph- and finite element-based total variation models for the inverse problem in diffuse optical tomography, (OSA) *Biomed. Opt. Express* **10** (2019) 2684-2707.

[25] Valery S. Sizikov, Vadim Evseev, Alexander Fateev and Sønnic Clausen, Direct and inverse problems of infrared tomography, (OSA) *App. Opt.* **55** (2016) 208-220.

[26] V. S. Vladimirov *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker Inc., 1971.

[27] Psang D. Lin and Barry Johnson, Application of derivative matrices of skew rays to direct and inverse problems of Risley and tilting orthogonal double-prism systems, (OSA) *J. Opt. Soc. Am. A* **34** (2017) 2203-2212.

[28] Jonathan J. Ryder, Mary-Jo Hoare, Daria Pastok, Michael Bottery, Michael Boots, Andrew Fenton, David Atkinson, Robert J. Knell and Gregory D. D. Hurst, Disease Epidemiology in Arthropods Is

Altered by the Presence of Nonprotective Symbionts, (The U. of Chicago Press J.) *The American Naturalist* **183** (2014) E89-E104.

[29] Esposito F 1982 The Data Analysis In Epidemiology: A Methodology To Reduce Complexity, *Proc. SPIE* **375** 377-384.

[30] Leon Heller *Variational Principles for the Return Current in Encephalography*, Springer P. 547-550, 1989.

[31] Jukka Sarvas, Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem, (IOPs) *Phy. in Med. and Bio.* **32** (1987) 11-22.

[32] Valentin Mijailov *Differential equations in partial derivatives*, MIR, 1978.

[33] B. I. Golubov, On a theorem of Bellman on Fourier Coefficients, (IOPs) *Russian Acad. of Sci. Sb. Math.* **83** (1995) 321-330.

[34] J. R. Downes and D. A. Faux, The Fourier-series method for calculating strain distributions in two dimensions, (IOPs) *J. of Physics: Condensed Matter* **9** (1997) 4509-4520.

[35] Susanne Brenner and Ridgway Scott *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer New York, 2007.

[36] Scott M. Sepke and Donald P. Umstadter, Analytical solutions for the electromagnetic fields of flattened and annular Gaussian laser modes. III. Arbitrary length pulses and spot sizes, (OSA) *J. Opt. Soc. Am. B* **23** (2006) 2295-2302.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Avenida San Claudio y 14 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72592

jesus.arriagahdz@correo.buap.mx
bolivia.cuevasotahola@viep.com.mx
maria.morin@correo.buap.mx
oliveros@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 17, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-765-5

Capítulo 8

Design of an embedded system in a device FPGA for the electroencephalographic signal analysis

María Monserrat Morín Castillo[1], Manuel Alejandro Centeno Bautista[1], José Eligio Moisés Gutiérrez Arias[1], Héctor Ramírez Díaz[2], Alina Santillán Guzmán[3], José Eladio Flores Mena[1], José Julio Conde Mones[4]
FCE, BUAP[1], Instituto Tecnológico de Eldorado[2] UPAEP[3], FCFM, BUAP[4]

Abstract

An implementation of an embedded system based on a FPGA of a source identification algorithm is performed. This is based on quasi-static mathematical models of a conductor-medium. A synthetic source (representing an epileptic focus) is generated, whose behavior emulates that from a bioelectric source. For the implementation of the source identification algorithm, a serial communication module is developed, which allows a good communication with a PC. In order to test the performance of the embedded system, the algorithm uses synthetic data, assuming that the measurements are registered from the scalp, and recovers the source that originates them, under the assumption that the source is generated on the cerebral cortex. The embedded system reads, filters and saves the data in order to use them to recover the source.

1 Introducción

The digital electroencephalogram (DEEG) is based on the use of electronic systems which detect and register patterns of brain waves through an electroencephalogram, and then the computer stores them for synchronous and asynchronous analyses. In this way, data can be stored in hard drives, memory sticks, or other digital storage devices. The DEEG has many advantages, as compared to the encephalogram (EEG) registered in paper, such as the detection of instantaneous events, storage, quantification, and ease the data. The flexibility of DEEG allows changes in the recording parameters such as set-up, filters and scales of horizontal and vertical visualization during the measurements.

The electroencephalographic signals, also known as rhythms, have different frequency bands, for example delta, theta, alpha, beta, and gamma (0.1-4 Hz, 4-7 Hz, 8-12 Hz, 13-30 Hz, 30-60 Hz, respectively) [1]. With an EEG it is possible to know if there is some abnormality in the brain. Nowadays, there is software that allows the analysis and treatment of EEG data [2]. One of them is the BESA (Brain Electrical Source Analysis) software [3]. This shows a low resolution 3D image of the brain, where electric activity can be found while doing certain activities. Another software to process data and obtain information about the electric brain activity is the LORETA (Low Resolution Brain Electromagnetic Tomography) algorithm or any of its variations [4].

In order to perform a digital signal processing, devices such as the DSP (Digital Signal Processor) of general purpose or the ASIC technology (Application-Specific Integrated Circuit) are used. The choice of any of these two depends on the particular requirements of each project. The DSP has to be chosen to fulfill the needs of the project. However, in most of the cases, it is not completely possible. The latter is more expensive, especially in its early development stage, since it needs to be redesigned and also to manufacture each device. Besides these technologies, there exists the FPGA (Field Programmable Gate Array), which is a device made by logical blocks and connections among them. The main characteristic of the FPGA is that both, the blocks and the connections, can be reconfigured to get a desired behavior of the device. The configuration is done by using software and programming languages (for example VHDL, which stands for Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language) [5].

The FPGA, when reconfigured, allows the design to be adapted completely to the needs of signal processing. Therefore, if something (parameters, processing step, etc) needs to be changed, corrections are done easily.

This makes the FPGA capable of a better adaptation to the needs of each design [5, 6].

In the biosignal analysis field, the FPGA has taken great importance because of its flexibility. For instance, in the case of EEG signals, new algorithms can be used not only to do a basic processing, but also to find relationships among the different channels of an EEG, as in [5], where the coherence-wavelet is calculated and this is implemented in a FPGA to obtain the correlation between two EEG signals. This type of analysis has been used to detect different brain disorders. Moreover, FPGAs have been used for bioimpedance measurements applications, since the FPGA showed low power consumption and low resource usage [7].

The FPGA provides a faster and cheaper solution than the one obtained by an ASIC, which requires a great number of resources in terms of time and money to obtain a prototype. Moreover, for the FPGA it is just necessary to program the device itself and then implement it on a printed circuit board (PCB) to start testing the prototypes. In the case of the ASIC, a failure in the design leads to a remanufacture of the device. In other words, one of the advantage of the FPGA is that if the design is not robust enough, it only has to be reprogrammed.

In the present time, the scientific community has shown great interest in the analysis and identification of bioelectric sources, in particular those that produces epileptic seizures which are detected, mainly, with the EEG.

The need to study this kind of sources is due to the fact that epilepsy is an illness that affects around 50 million people worldwide, which means that this is one of the main neurological disorders [8], characterized by excessive electrical activity. Epilepsy can be generalized (when abnormal neuronal discharges exist and affect the whole brain, resulting in unconsciousness or muscular spams) or focused (where alterations are found in one or more zones of the brain). At first, in patients that suffers focal epilepsy, the treatment is pharmacological. However, if patients do not respond properly, a surgery is needed for the resection of the damaged zone in which epileptic seizures are produced, thus an adequate identification allows that only the affected part is removed [9]. For that reason, it is of great importance the accurate localization of the sources where the epileptiform seizures are produced.

On the other hand, and due to the electric behavior of these sources, it is allowed to study them from a physical point of view and to represent them through mathematical models, known as conductor-medium models, from which two particular problems are associated: Electroencephalographic Direct Problem (EDP), which allows to know the potential produced by a known source; and the Electroencephalographic Inverse Problem (EIP), which consists of identifying the source or the main characteristics of the source, given the potential. For the study of the EIP, first the direct problem is analyzed [9]. The inverse problem has a mathematic characteristic which affects the identification of the source and consists of the following: Given two measurements that are close to each other, the sources which produce them, not necessarily are close as well, when this happens it said that the problem is ill-posed or that the solution of the problem is unstable. To correct this instability, the method of regularization of Tikhonov is used [10].

These boundary problems have been developed and proved in different works [9, 10]. Moreover, preliminary results in an FPGA were presented in [11]. However, it is important to mention that there are not many works about the implementation of the identification problem in a FPGA, and hence, that is the reason and importance of the present work, which will be validated by using synthetic signals in order to prove that the implementation is correct and that the source identification can be achieved.

2 Materials and methods

Electric activity from the brain can be represented by means of a classic mathematical model that considers the head as two concentric circles. Each circle is a region, one represents the brain and the other represents the other layers that formed the head (cranium, intracranial liquid, scalp). Each region is denoted by Ω_i, and has an associated electric conductivity σ_i, different and constant in each region, and delimited by a frontier S_i, as observed in the figure1. The mathematical model of a conductor-medium allows the use of the electrical characteristics of the medium, shown in [10] and written as follows:

$$\Delta u_1 = f, \qquad \text{in} \quad \Omega_1, \tag{1}$$

$$\Delta u_2 = 0, \qquad \text{in} \quad \Omega_2, \tag{2}$$

where u_i represents the potential produced in the region Ω_i . The symbol Δ represents the Laplacian. The frontier conditions considered are:

$$u_1 = u_2; \quad \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + J.n_1, \qquad \text{on} \quad S_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \qquad \text{on} \quad S_2. \tag{4}$$

where S_1, is the surface that separates the regions Ω_1 from Ω_2, S_2 is the surface that separates regions Ω_2 of external environment (air), n_i is the normal vector to the evaluated surface S_i, J is the ohmic current.

From the mathematical model the source recovering algorithm (SRA) analyzed and tested in [12], is proposed, which allows the identification in an approximate way to the source that produces the EEG, when the potential u over Ω is known.

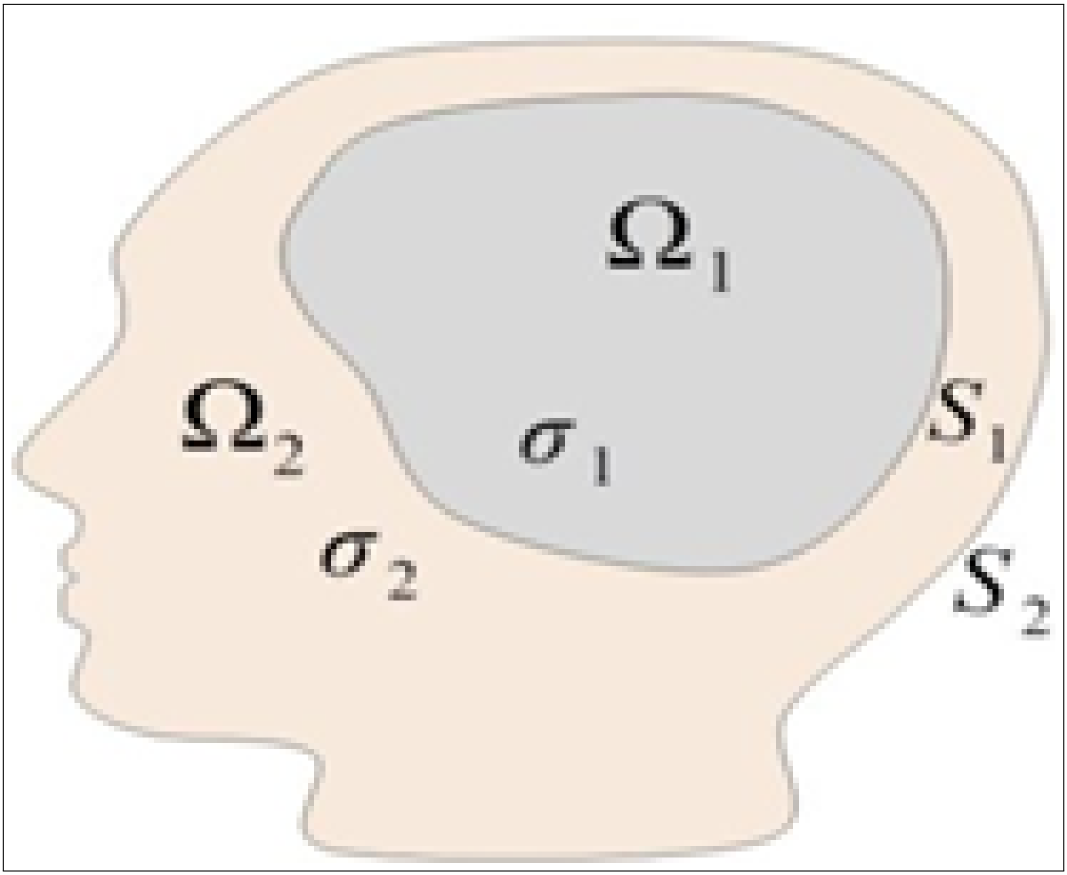


Figure 1: Schematic representation of the head in two conductor layers.

On the other hand, from the mathematical point of view, it is known that the SRA is an ill-posed problem, so it is necessary to implement some regularization technique.

For the representation of the synthetic source, the Fourier V_k^1, V_k^2 coefficients are used and satisfy the boundary problem (1 -4), in case of $J.n_1 = 0$. Such coefficients correspond to the series representation of the EEG signal, needed to calculate the reconstructed source, i.e., the source is represented in the form

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{14} \frac{R_2 a_k}{R_2(a_k)^2 + \alpha R_1} \left[V_k^1 cosk\theta + V_k^2 senk\theta\right] \tag{5}$$

with

$$\alpha_k = \frac{2R_1^{k+1} R_2^{2k}}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} \tag{6}$$

where $g(\theta)$ is the value of the recovered source, calculated in the angle θ. This angle is determined by the number of channels in the measurements of EEG.

V_k^1 y V_k^2 are the coefficients of the Fourier series that characterize the EEG described in a synthetic way; σ_1 y σ_2 denote the conductivities of each region; θ is the angle of separation of the electrodes; α corresponds to the parameter of regularization of Tikhonov; and R_1 y R_2 are the radios of the brain and the head respectively [9, 10].

The above equations allow the representation of a synthetic EEG source through the described model of a conductor-medium. The above equations allow the representation of a synthetic EEG source through the described model of a conductor-medium.

FPGA's implementation and tests

To implement the FPGA filters, we use the language VDHL and the compiler Xilinx ISE to do the programming of the mentioned filters. Four low-band filters were designed to test the implementation. A new project was elaborated for each filter, which allows us to test individually. In this project, a contaminated signal was generated in the following form: As the first step, a sinusoidal signal of 10 HZ was loaded, then a sinusoidal signal of 25 Hz with a random amplitude between 0 and 1 was loaded. This contaminated signal was recovered after applying the filter.

In the Figure 2 shows the structure of the modules to implement and test in the FPGA. There is a counter that allows selecting the path of the memory of the ROM that contains the data of the sinusoidal signal. The data are sending to the filter.

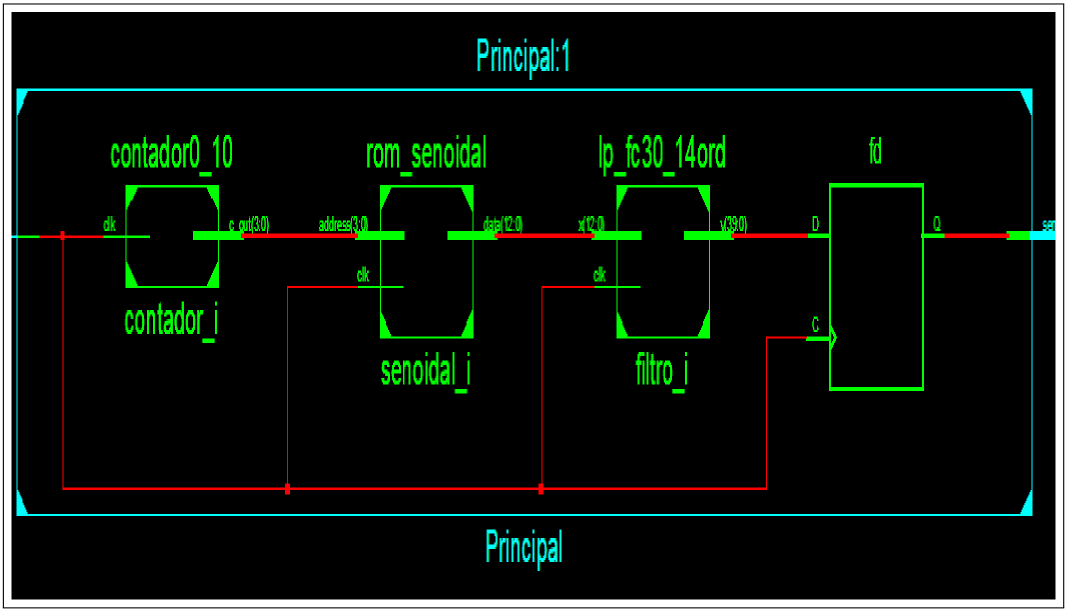


Figure 2: Schematic of the FIR filter.

The output shows the obtained values, which correspond to the values of the input signal. To display the results, we use decimal notation, but the output is in the binary system, can be seen figure 3.

Each filter has a low consumption of FPGA resources. Figure 4 shows the use of resources by each filter and its respective sinusoidal signal module.

As the report generated by ISE shows, the amount of resources used is mainly DSPs. The DSPE48 take care of the signal processing, this includes arithmetic operations. As the design can be problematic when implementing all the filters, they have been redesigned to be a little more efficient the use of FPGA resources.

In Figure 6, it is shown that the number of resources decreased in general; what increased is the number of LUT-FF, which indicates the correlation of the design with the correctly used resources. Thus, the design has made better use of the FPGA resources since no DSP48E module was used for

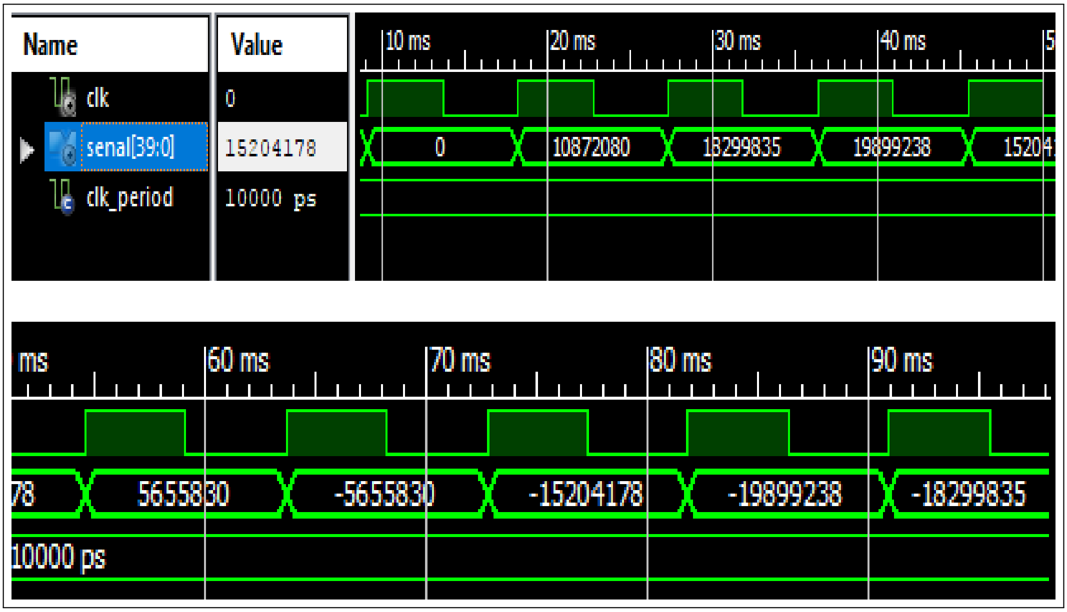


Figure 3: Output of the implemented filter simulation.

Device Utilization Summary (estimated values)			
Logic Utilization	Used	Available	Utilization
Number of Slice Registers	540	11440	4%
Number of Slice LUTs	858	5720	15%
Number of fully used LUT-FF pairs	211	1187	17%
Number of bonded IOBs	41	160	25%
Number of BUFG/BUFGCTRLs	1	16	6%
Number of DSP48A1s	8	16	50%

Figure 4: Resources used in filter design.

its implementation. However, we must not lose sight that what is being implemented is itself a DSP due to the operating characteristics.

Device Utilization Summary (estimated values)			[-]
Logic Utilization	Used	Available	Utilization
Number of Slice Registers	58	11440	0%
Number of Slice LUTs	71	5720	1%
Number of fully used LUT-FF pairs	58	71	81%
Number of bonded IOBs	41	160	25%
Number of BUFG/BUFGCTRLs	1	16	6%

Figure 5: Resources used in the filter redesign

Once the filters performance is verified in VHDL implementation, the filters are adapted in MATLAB. The schematic of the implementation of the six filters in the FPGA can be seen in Figure 6.

However, the design of this stage consumes many FPGA resources, as shown in Figure 4.23. It can be seen that the use of specific modules such as DSPs is low, which guarantees that the use of these components is adequate. However, as more memory space is required by the filters, their coefficients, the gates required are greater than those counted by the FPGA.

3 General description of the data flow

In the present work, the FPGA is going to process EEG data previously obtained with a certain EEG measurement system or with synthetic signals. For the implementation of the source identification algorithm is necessary to

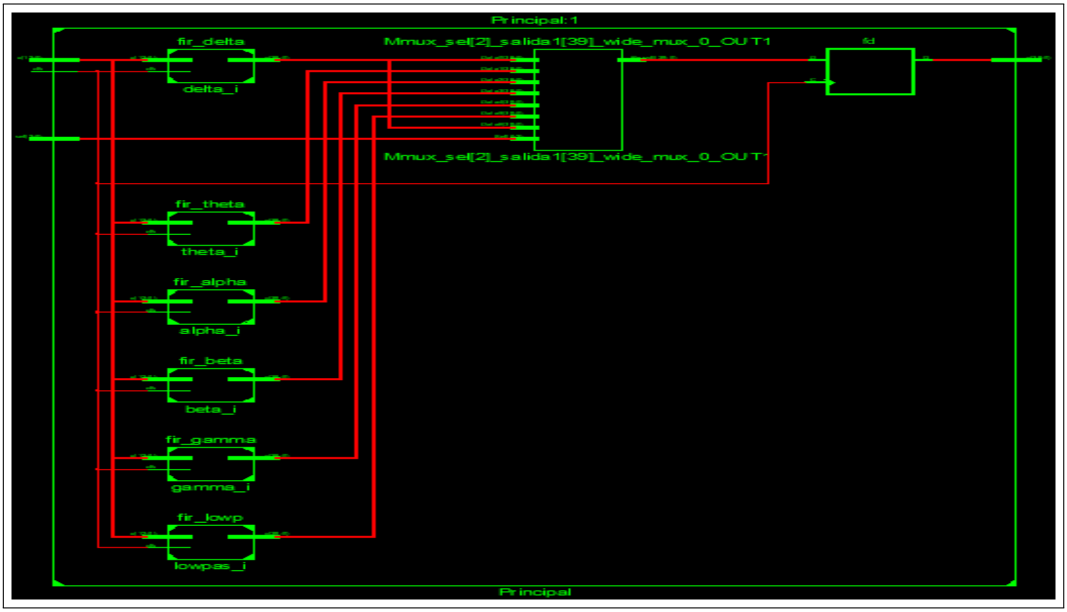


Figure 6: Schematic design of the implementation of the five band-pass FIR filters and the low-pass FIR filter

describe the way that the EEG signals require to reach the FPGA in order to be processed and then visualize the results, as shown in the Figure7.

Figure 7: Diagram that shows the data to reach the FPGA in order to be processed.

At first, the EEG signals could be obtained with an EEG system. In this case, the embedded system is able to take the recordings from the EPOC+ from the EMOTIV Corporation [13] (although, in order to validate the algorithm implemented in the FPGA, synthetic signals are used). Then, the obtained signals are sent wirelessly to the computer through a protocol owned by the same firm. When data arrive at the computer, using the software along with the app, they can be stored in a ".edf " format. Then, data in ".edf" format are converted into the adequate format (through MATLAB) to be sent from the computer to the FPGA. To achieve this, a script that performs several stages in order to send the data is coded. First, the reading of the data is done, the data are in ".edf" format; next, the script chooses the channels (signals) to be sent to the FPGA, previously defined inside the code. Then, all data are converted into a fixed point format (binary system), as described in the next section. This is done in this way since the FPGA cannot directly read numbers in the decimal system, it only works with binary numbers.

Once the FPGA receives the data in fixed point format, they are sent by serial communication, and then stored to be processed.

For the internal storage, a RAM (Random Access Memory) is designed inside the FPGA. Data are then processed in the FPGA and again stored in the RAM. Finally, the data are sent back to the computer by serial communication. Then, the script transforms the binary format data to decimal and shows results on the computer screen for the interpretation by the user. In the next section, the processing inside the FPGA is described.

4 Processing of data in the FPGA

To process the data, it is assumed that all data are found in the proper format. In order to validate the performance of the embedded system, synthetic and semi-synthetic signals were used. However, real EEG signals from the EPOC+ can be used, as previously described. The processing includes the filtering of the signals, which will be described furthermore.

The programming of the FPGA was done in VHDL, using a Basys 3 development board, which has integrated a FPGA of the Artix-7 family (XC7A35T-1CPG236C number given by the firm) of the Xilinx Brand. A modular scheme is implemented to perform all the processing steps that the FPGA achieves. The control in the execution sequence of the modules is done through a main module that implements a states machine.

The serial communication module is the first one that has to work for both, receiving data from the computer and send data back after the processing is done in the FPGA. The set-up to send and receive data is 9600 Bauds, 8 data bits, 1 stop-bit, no-parity bit. Data are sent from the computer to the FPGA in 8 bit packages, due to the fact that the total length of each individual datum is 24 bits. This is in this way due to the fixed-point representation: 1 bit of sign, 7 bits for the integer part, and 16 bits for the fractional part.

Once the packages are received, they are reconstructed to form the complete 24-bits. Then, they are stored in a RAM designed in the FPGA, where 12 sections were implemented to store individually each EEG signal. Every section is able to store 512 samples. Since the EEG has a sample rate of 128 samples per second (per each signal), the RAM is able to store 4 seconds of EEG data.

When EEG signals are measured, they can be contaminated with artifacts or distortions, which can be of different nature, such as error in the measurement equipment, eye movements, and muscular movements, among others, [1]. The way to eliminate some of these artifacts is through filters; the process of filtering is important to reduce a misinterpretation of the EEG and hence limits the problem of clinical adverse effects. For that reason, in order to overcome this problem and clean the signals, a low-pass filter is implemented to mainly eliminate muscular artifacts.

The current stored data in the FPGA are sent to the next module (low-pass filter) in which an FIR (Finite Impulse Response) filter with a cutoff frequency of 30 Hz and order equal to 50 is implemented. As mentioned above, this filter eliminates the muscle artifacts, which can have frequencies above 30 Hz. The filtering is performed per channel (one signal at a time). The filtered data are stored again in the RAM overwriting the previous data. The filtered signals are then processed by the source localization algorithm module. In this stage, all the channels are read at the same time, but one sample is taken at a time. The algorithm computes the first 30 Fourier coefficients of the signal that has been read, [14]. To compute the sines and cosines, the angles (previously established according to the orientation of the electrodes, which are not changing since they followed the 10-20 International System, [1] are stored. The results are saved again in the RAM overwriting the data.

Finally, the data are decomposed into 8-bit packages to be sent to the computer by serial communication.

In the Figure 8, the schematic diagram previously described is shown, where the data go from the reception of the FPGA to be processed to the algorithm of source identification and then sent back to the computer.

5 Results and discussion

The filtering module was tested separately. Synthetic EEG signals were created to test the low-pass filter. They were generated by superposition of the

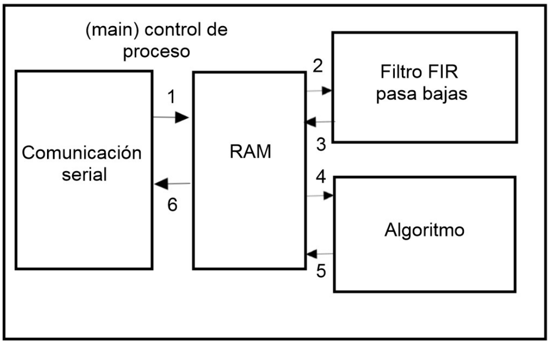


Figure 8: Scheme of the data, from the reception of the FPGA to the source identification algorithm and the way back.

signals with the frequencies corresponding to the brain waves with simulated epileptic spikes. In Figure 4, one of the synthetic signals with the presence of three spikes is shown, one in the second 5, another one in the second 7.2 and the third one in the second 10.4. For this signal, delta wave (low frequency signal) was used.

The synthetic signal previously described was created through a mathematical model, and it was contaminated with muscle artifacts taken from a real EEG signal which was filtered with a Butterworth band-pass filter of sixth order from 30 to 60 Hz in order to capture the muscle artifact only. By using synthetic signals, it is possible to know exactly how the original signals look-like and hence have a control of what the algorithm is doing. In Figure 5, the contaminated signal is shown. The artifact, in this case, was added to the third spike in order to observe its ability to recover the spike's shape, since these artifacts can appear at anytime.

The low-pass filter previously described was applied to the contaminated signal. In Figure 6, the filtered signal is presented. As it can be observed, the spike was recovered successfully.

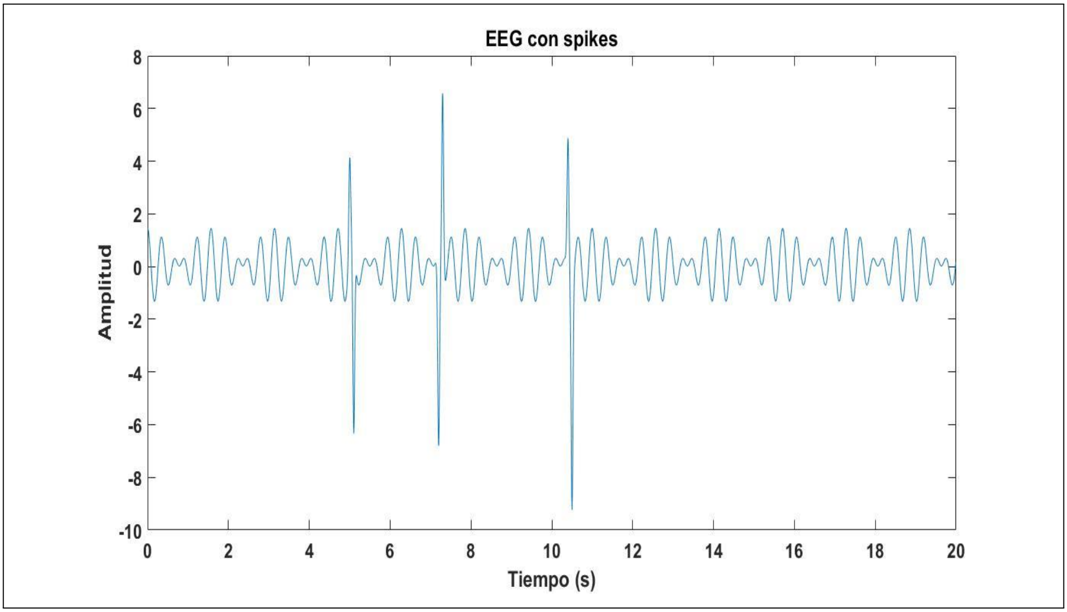


Figure 9: Synthetic EEG signal with three spikes, one at second 5, another in the second 7.2, and the third one at second 10.4.

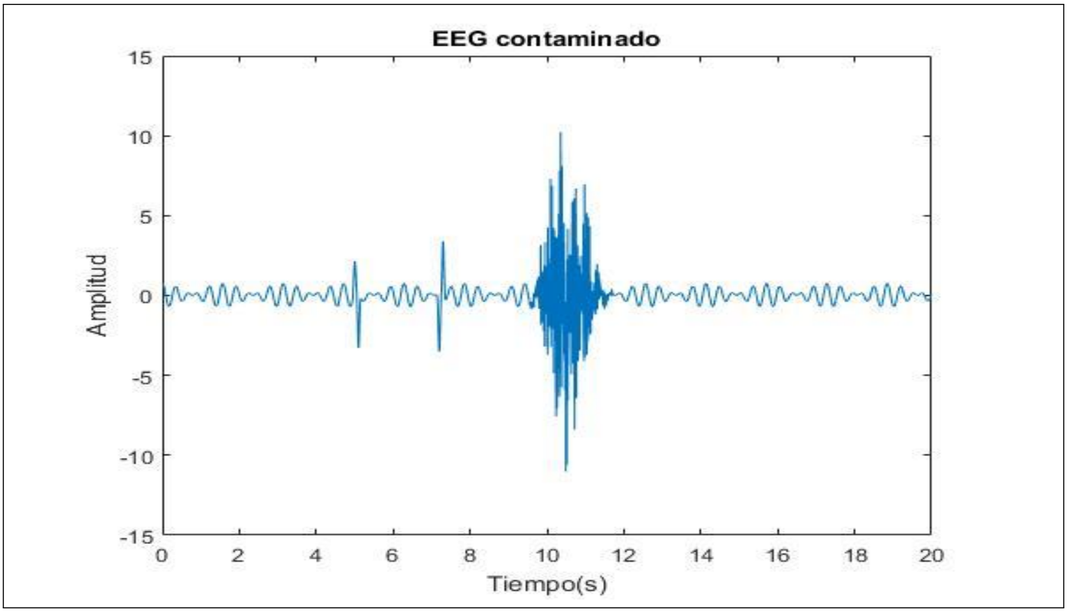


Figure 10: EEG contaminated signal with muscle artifact in the third spike

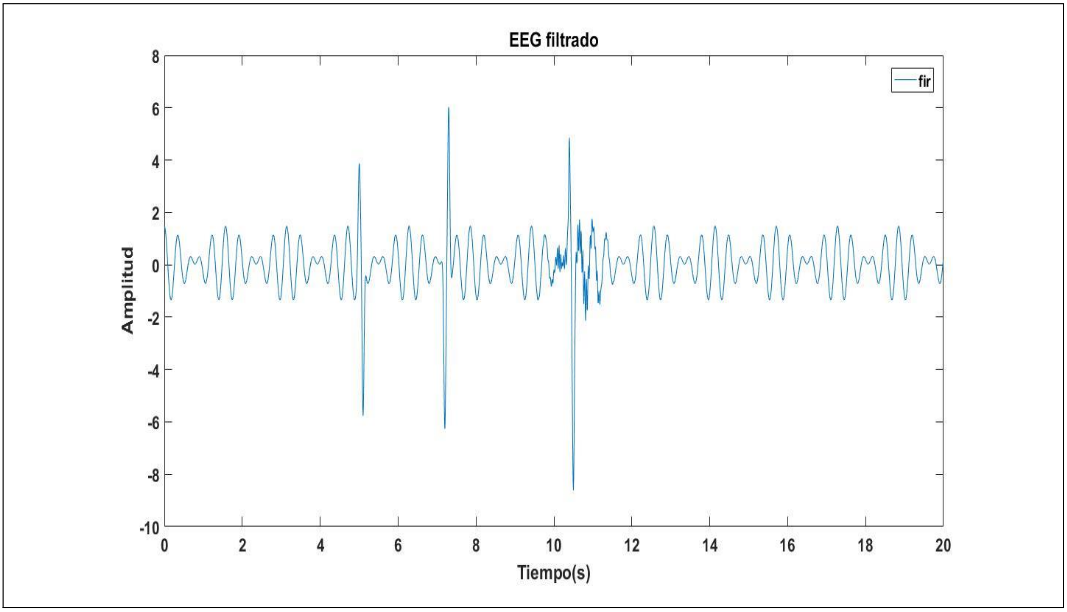


Figure 11: Filtered EEG signal. The third spike is now observed after removing the muscle artifact.

To test the performance of all modules implemented in the FPGA, 12 EEG signals were used. These signals were generated using the mathematical model described before, which proposes a Gauss bell type source. Then, this original source is compared to the results obtained from the FPGA. In Figure 7, the original (created) source is shown. This source is designed to simulate an EEG register as if it was obtained from the scalp.

Once the synthetic EEG is generated, it is sent by serial communication to the FPGA to be processed. The obtained results are recovered and displayed on the computer. In Figure 8, the recovered source obtained by the FPGA is shown.

It is observed that there is no significant variation between the original (created) one and the recovered.

Another test to validate the performance of the algorithm was by using a more realistic EEG signal. In other words, the previously created synthetic EEG signal (with the generated Gauss bell type source) is added to a segment of a real EEG signal from a healthy subject. This new semisynthetic signal is sent to the FPGA and the results are observed in Figure 9. It is appreciated

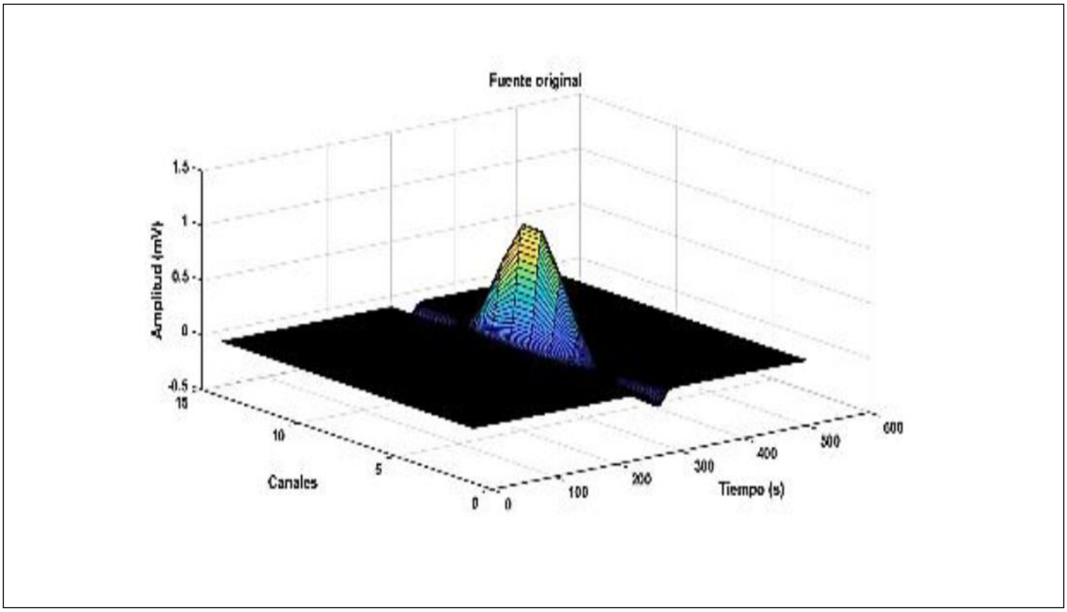


Figure 12: Original (created) source. The shape of the bell function is shown

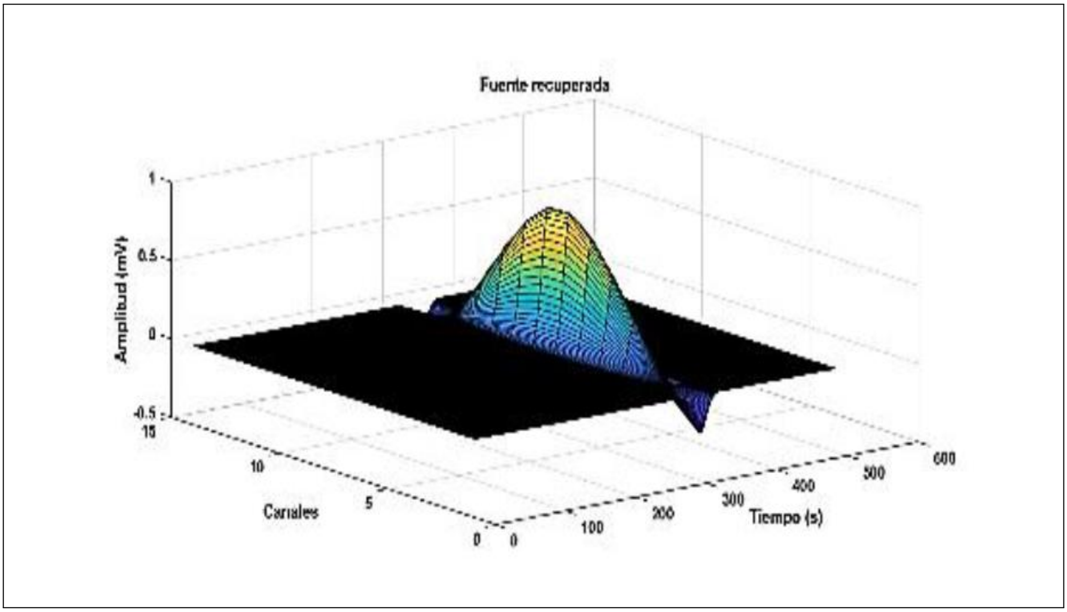


Figure 13: Recovered source obtained by the FPGA.

that in the recovered source (the above graph), i.e. the results from the FPGA, the basic shape of the bell function is preserved and is in the same location as the semisynthetic original signal (the graph from below).

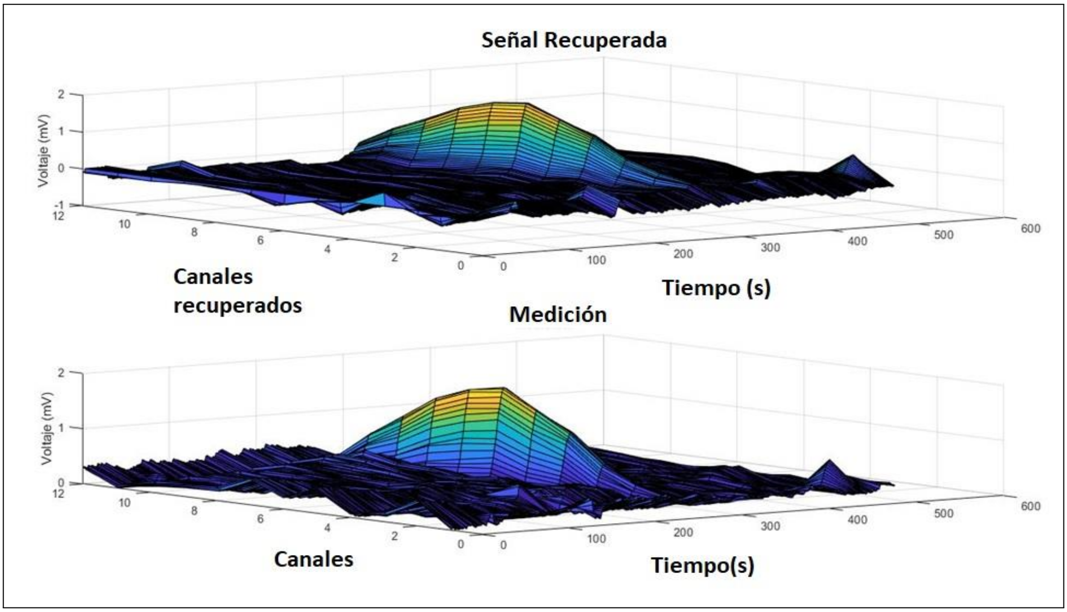


Figure 14: Comparative graph that shows the recovered source, above, and the original synthetic source, below

6 Conclusions

In this work, an algorithm implemented in VHDL for the recovering of the cortical sources is presented. This algorithm was validated with a source created synthetically and with semisynthetic EEG signals, by superposing the synthetic signal to a real EEG. In the presented cases it was possible to recover the source with slight variations, but showing that the algorithm is able to be implemented in a FPGA. The designed filters were tested using synthetic and semisynthetic signals. In both cases, the filters worked properly. Therefore, they were implemented in the FPGA to recover the sources. Furthermore, in a parallel manner to carry on the implementation of the algorithm, a serial communication module was developed. Generally, this type of modules is found in more robust devices where it is not necessary to design or program anything to use the serial communication, hence the importance of this step in this work. As a future step, it is proposed that the device has the ability to obtain data directly from the EEG and the results could be displayed in an interface, such as a screen. Furthermore, it is planned that the device could select different characteristics for the analysis of the signals. One of these possibilities is to choose different filters to analyze the signals by frequency bands (cerebral rhythms) or to get rid of different kinds of artifacts that the signal could present.

Acknowledgements

This work has been supported by CONACYT, in the frame of a scholarship for the master degree in Ciencias de la Electrónica, FCE-BUAP.

Bibliography

[1] Sanei S and Chambers J.A., *EEG signal processing*, John Wiley & Sons: England, 2007.

[2] Mareels, M. Cook y A. Varsavsky, *Epileptic seizures and the EEG Massachusetts*, CRC Press, 2011.

[3] Livio PerriEmail R., Berchicci M., Bianco V., Spinelli D., Di Russo F., *Brain waves from an "isolated" cortex: contribution of the anterior insula to cognitive functions*, Brain Structure and Function **223** (2018), 1343-1355.

[4] Fahim Gohar A., Omer S., Asima K., *Recent trends and advances in solving the inverse. Inverse Problems in Science and Engineering*, 2018, 1-18.

[5] Yahya T. Qassim, Tim R.H. Cutmore, David D. Rowlands, *FPGA implementation of wavelet coherence for EEG and ERP signals*, Microprocessors and Microsystems, 2017, 1-10

[6] Zoltan German-Sallo, *Signal processing using FPGA structures.*, The 7th International Conference Interdisciplinarity in Engineering, **12** (2014), 112-118.

[7] Raphael C. M. Pereira, Allan C. Oliveira, André A. Mariano, *FPGA-Based Implementation of a Biomedical Signal* ,Processing Unit for Bioimpedance Measurement Application, 2014.

[8] Megiddo I, Colson A, Chisholm D, Dua T, Nandi A, Laxminarayan R, *Health and economic benefits of public financing of epilepsy treatment in India: An agent-based simulation model.*, Epilepsia Official Journal of the International League Against Epilepsy **57** (2016), 464-474.

[9] Bob K., Alpo B., Agostinho C. R., Kim D. N., John G., *A simple format for exchange of digitized polygraphic recordings.* Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, **82**, (1992), 391-393.

[10] Morín Castillo M. M., Netzahualcóyotl Bautista C., Oliveros Oliveros J.J, Conde Mones J.J, Santillán Guzmán A., *Identificación estable de fuentes asociadas a focos epilépticos ubicadas sobre la corteza.*, Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, **40**, (2019), 1-14

[11] Centeno Bautista M.A., Morín Castillo M. M., Ramírez Díaz H., Oliveros Oliveros J.J., Santillán Guzmán A., Netzahualcóyotl Bautista C., Gutiérrez Arias M , *Implementación de un algoritmo de identificación de fuentes como ayuda en el diagnóstico de epilepsias focales*, Memorias del XLI Congreso Nacional de Ingeniería Biomédica, 2018.

[12] Morín Castillo M. M., Netzahualcóyotl Bautista C., Oliveros Oliveros J. J., Conde Mones J., Juárez H, *Stable identification of sources located on separation interfaces of two different homogeneous media* , Advances in Differential Equations and Control Processes, **20**, (2019), 53-97.

[13] EMOTIV , *Emotiv https://www.emotiv.com/*, 2021

[14] Morín Castillo M. M., Oliveros Oliveros J. J., Conde Mones J., Fraguela A , *A Regularization Strategy for the Inverse. Problem of Identification of Bioelectrical Sources for the Case of Concentric Spheres* , Far East Journal of Applied Mathematics, **77**, (2013), 1-20.

Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

Instituto Tecnológico Superior de ElDorado
Avenida Tecnológico S/N,
Colonia Rubén Jaramillo
Eldorado, Sinaloa, C.P. 80450

Universidad Popular Autónoma de Puebla, UPAEP
21 Sur, 1103. Colonia Barrio de Santiago,
Puebla, Pue. C.P. 72410

maria.morin@correo.buap.mx
alexcenba@hotmail.com
jose.gutierrez@correo.buap.mx
cronopio23_@hotmail.com
alina.santillan@upaep.mx
jefloresmena@gmail.com
juliocondem@hotmail.com

Índice de autores

Matemáticas y sus aplicaciones 17
Editado por Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco está a disposición en pdf en la página
de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros
a partir del 9 de noviembre de 2021
peso del archivo: 6 MB
El cuidado de la edición es de Antonio de Jesús Libreros López.