



**Fernando Macías Romero**

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchinango, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas como el ESDEPED y elaborador de programas de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 35 tesis de licenciatura, 8 de maestría y 5 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los de *Matemáticas y sus aplicaciones*.



*Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.*

**BUAP**

**FCFM**

**CIMA**

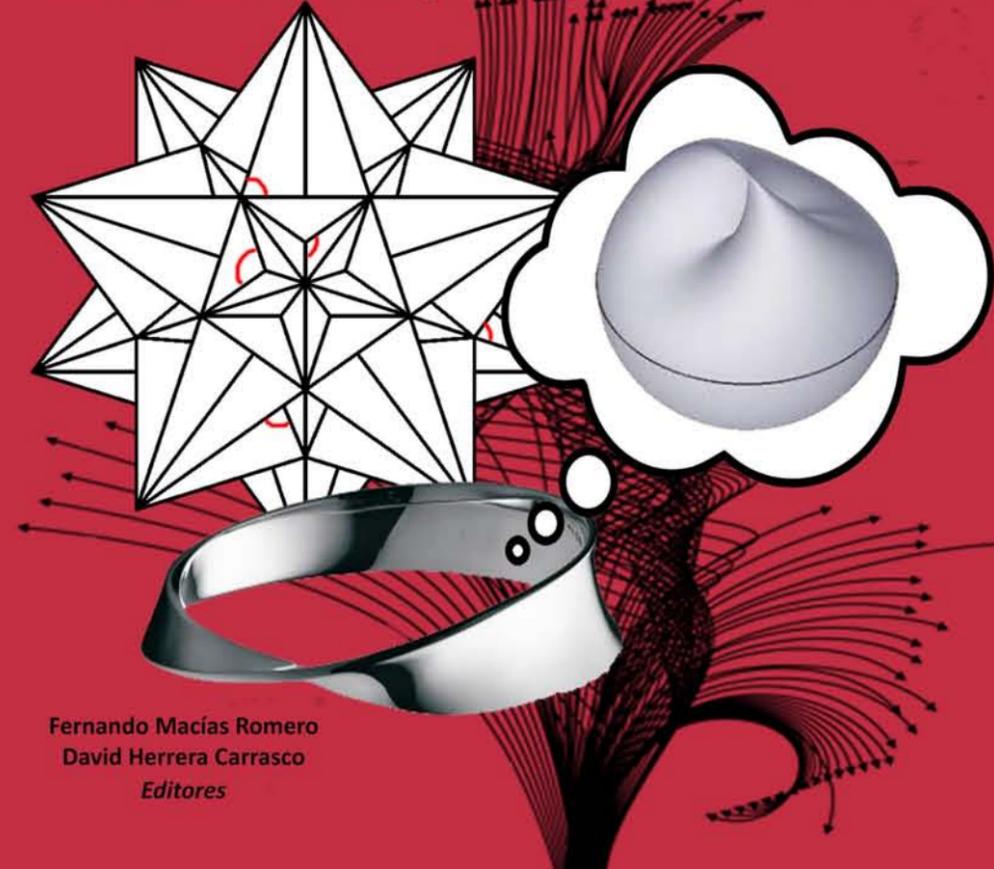
**BUAP**  
**ediciones**



*Matemáticas y sus aplicaciones 16*



## **Matemáticas y sus aplicaciones 16**



**Fernando Macías Romero**  
**David Herrera Carrasco**  
*Editores*



**David Herrera Carrasco**

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en Matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Ha sido miembro organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications. Es miembro de Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado varios artículos, en revistas internacionales. Es autor de varios libros (como coautor, con otros profesores de la FCFM); es editor de algunos libros. Además, ha concluido la dirección de tesis: 4 de doctorado, 7 de maestría y más de 26 de Licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis de licenciatura y del posgrado.

*Matemáticas y sus aplicaciones*  
*16*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco  
Editores

Primera edición: 2021

ISBN: 978-607-525-764-8

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000  
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00  
[www.buap.mx](http://www.buap.mx)

Dirección General de Publicaciones  
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000  
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764  
<http://publicaciones.buap.mx/>

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B  
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570  
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552  
[www.fcfm.buap.mx](http://www.fcfm.buap.mx)

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA • *Rector*: Ma. Lilia Cedillo Ramírez • *Secretario General*: José Manuel Alonso Orozco • *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: José Carlos Bernal Suárez • *Director General de Publicaciones*: Luis Antonio Lucio Venegas • *Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Hecho en México  
Made in Mexico

# Matemáticas y sus aplicaciones 16

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

## Editores

Fernando Macías Romero  
David Herrera Carrasco

## Comité científico internacional

Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Hugo Adán Cruz Suárez (BUAP), Luis Miguel de la Cruz Salas (UNAM), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (BUAP), Miguel Antonio Jiménez Pozo (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Fernando Macías Romero (BUAP), Daria Michalik (UKSW, PL), Nayeli Berenice Quiñones Baldazo (BUAP), Abigail Rodríguez Nava (UAM), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Saúl Alonso Zavala Ortiz (I.T. Ensenada).



# Contenido

Presentación 1

Homenaje académico a Fernando Macías Romero en  
ocasión de su 60 aniversario

Capítulo 1. Fernando Macías Romero en ocasión de su 60  
aniversario 5

*David Herrera Carrasco y María del Rocío Macías Prado*

## Álgebra

Capítulo 2. La conjetura de Quillen a través del anillo de  
Burnside 45

*Itzel Rosas Martínez, David Villa Hernández, César Cejudo Castilla*

## Educación matemática

Capítulo 3. Estudio de la comprensión de ángulos y triángu-  
los de estudiantes de preparatoria según el Modelo de Van  
Hiele 77

*Lidia Aurora Hernández Rebollar, Israel Molina Lara, José Eduardo  
Reynoso Lara*

## Análisis matemático

<b>Capítulo 4. Linear combination of trigonometric polynomial operators</b>	107
<i>Jorge Bustamante González</i>	
<b>Capítulo 5. Algunos resultados relacionados con la dinámica de <math>\lambda ze^z</math>, <math>\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}</math></b>	129
<i>Patricia Domínguez Soto, Wendy Rodríguez Díaz</i>	
<b>Topología</b>	
<b>Capítulo 6. El hiperespacio <math>K(X)</math></b>	151
<i>Felipe de Jesús Aguilar Romero, Patricia Domínguez Soto, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero</i>	
<b>Capítulo 7. Status de la unicidad de hiperespacios de continuos</b>	177
<i>Mauricio Esteban Chacón Tirado, David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López, María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero</i>	
<b>Índice de autores</b>	203

# Presentación

Mostraremos principalmente los resultados de International Conference On Mathematics and its Applications (CIMA), que lleva 16 años realizándose, ininterrumpidamente donde participa como organizadora la Academia de Matemáticas de la FCFM en compañía de estudiantes de la FCFM. Contamos con la participación de matemáticos de nivel internacional en estos (CIMA). Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Seventh International Conference on Mathematics and its Applications* (7CIMA, 2020), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 7CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 7CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a Antonio de Jesús Libreros López por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

*Fernando Macías Romero*  
*David Herrera Carrasco*  
*Editores*



---

**Homenaje académico a Fernando  
Macías Romero en ocasión de su  
60 aniversario**

---



## Capítulo 1

### Fernando Macías Romero en ocasión de su 60 aniversario

David Herrera Carrasco<sup>1</sup>, María del Rocío Macías Prado  
FCFM, BUAP<sup>1</sup>

#### Resumen

Con este capítulo hacemos un homenaje a Fernando Macías Romero en ocasión de sus segundos 30 años. Describimos parte de la ejemplar trayectoria de trabajo de este sobresaliente matemático originario de la Sierra Norte de Puebla.

## 1 Breve introducción a la vida y actividad académica de Fernando Macías Romero





CONACYT

## 2 Introducción

Fernando Macías Romero nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchinango, Puebla, México a las 4:20 hrs. Fernando es moreno, de temperamento regular, tiene ojos cafés claros un poco razgados, complexión robusta, poco cabello y de pies grandes. Desde su nacimiento ha convivido con mucha familia, en su mayoría, de la materna.

Sus estudios de nivel básico los hizo en ese pueblo mágico, pero su sed de conocimiento y superación lo hicieron salir de su ciudad natal para llegar a la capital del estado en 1975, encaminado por su primo Renato Cabrera Macías. A pesar de que su bisabuela materna le dijo a su mamá, ¿para qué Fernando se va a ir a estudiar la preparatoria en Puebla?, mejor que él ya trabaje y que sea como tu papá, él sin saber leer ni escribir mira, hasta dónde llegó. ¿Cómo vas a sacar agua de una piedra?

Dejar a su madre y a sus hermanos atrás, siendo él el mayor, le costó mucho, pero siempre en sus pensamientos estaba la esperanza de reunirse de nuevo.

Llegó a estudiar en la preparatoria Emiliano Zapata de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). Por su tía Consuelo Macías Oropeza, la tía Maura y el tío Armando le dieron hospedaje en la ciudad de San Martín Texmelucan. Durante un semestre, se trasladó todos los días desde esa ciudad al Edificio Carolino. Para el periodo siguiente, decidió vivir en Puebla con un

compañero en un local cerca de la central de abastos, la dueña, era familiar de éste. El lugar, era un local que antes había sido tortillería, junto a uno que era una tortillería; dormía en el piso. Rentaban con servicio de alimentos; para desayunar ella le dejaba a su entera disposición un galón de leche helada de la cual le costaba tomarse tan solo un vasito de leche. Sin embargo, cuando regresaba de la prepa, a la casera no le daba tiempo hacer la comida y en lo que la hacía, los dos bachilleres, quedaban encargados de la tortillería; por lo que caían en las garras del olor a tortilla recién hecha que terminaban comiendo con limón y sal. Fueron tiempos muy difíciles en lo económico: lo que recibía no le era suficiente para vivir. Un tiempo después consiguió hospedaje en la “7 Poniente y casi 16 de Septiembre”, en un departamento del centro de la capital poblana en un departamento tres hospedados dormían en el mismo cuarto (adaptado). Más tarde, casi todos se fueron a vivir a un edificio muy antiguo en la “5 Oriente casi esquina con 3 Sur”. Al principio del cuarto (y último) semestre de sus estudios de preparatoria, un par de embusteros le ofrecieron un certificado de preparatoria. Confiado de conseguirlo, cambió su escuela preparatoria por clases de oyente en Ingeniería Civil, en 1978. Al final del semestre, no recibió, afortunadamente, el certificado y regresó a la escuela para terminar sus estudios, con mucha disciplina y envidia. La carrera de computación lo sedujo y comenzó a estudiarla en 1979. Sin embargo, le bastaron las primeras clases para saber que a lo que se quería dedicar eran las matemáticas. En aquel entonces no era necesario mucho papeleo para cambiar de carrera: simplemente hizo la petición a la secretaria en turno en el Departamento Escolar y movieron su archivo a la pila de la licenciatura en matemáticas. Cabe mencionar que en esa época, estudiar matemáticas era cosa de locos, lo cual no lo disuadió de tomar este camino. En uno de los cursos que llevó en el primer semestre de la carrera, tuvo la fortuna de conocer a una de las personas más importante de su vida, su ángel de la guarda, Fernando Velázquez Castillo (conocido como profe Ferruco). Al final del curso, cuando Macías estaba comiendo una torta, que contenía una mini salchicha, desde lo alto de un edificio de la ECFM el profe Ferruco le gritaba -Macías, -Macías; y Macías no escuchaba hasta que el profe Ferruco le gritó «¡pinche Macías!» lo buscaba para ofrecerle su departamento amueblado, sin pagar renta ni luz ni agua, ya que el profe Ferruco se iba de año sabático, en momentos precarios de la vida de Macías, lo salvo para seguir estudiando matemáticas.

En 1980, su mamá y sus hermanos se mudaron a Puebla con ayuda de

Macías, él se fue a vivir con ellos y apoyó a su mamá en todo lo que se necesitaba. En esta etapa de su vida, su mamá, prestigiosa cocinera, abrió una fonda donde “salvó” a muchos comensales con sus exquisitos platillos. Ahí, Fernando logró satisfacer su hambre de leñador y así continuar cursando la carrera. Como la llegada de su familia a la ciudad significó problemas económicos, sus responsabilidades extraescolares aumentaron. Mientras estudiaba la carrera (segundo semestre de 1981), tuvo la oportunidad de dar clases en la preparatoria Enrique Cabrera, iniciándose así su carrera profesional en la UAP. El 1 de septiembre de 1982 fue contratado como auxiliar de docencia (ahora se llama Técnico Académico) en la (entonces) ECFM, mientras continuaba impartiendo clases en la preparatoria.

El 31 de agosto de 1984, se tituló de Licenciado en Matemáticas con la tesis *No hay Quinto Malo o Escuela y Secuela de Euclides*, asesorado por el sabio y generoso Agustín Contreras Carreto, quien le contagió su amor por la geometría, por el campo traviesa, etc.

Al término de su licenciatura, se dedicó a participar en seminarios de álgebra moderna junto con el bardo Juan Angoa Amador y con el ahora su Sensei, el primer autor. También estudiaba en los seminarios de investigación en álgebra que organizaba en la (entonces) UAP el mítico Raymundo Bautista Ramos. Juan Angoa y el primer autor comenzaron a estudiar la maestría en la UNAM. La carga académica de Macías no le permitió acompañarlos en esta nueva aventura.

El 19 de febrero de 1988 se casa con María del Rocío Prado Lobato, el amor de su vida.

Por ahí de 1989, Macías y el primer autor tomaron un curso de reparación de televisores que los llevó inmediatamente después a estudiar la licenciatura en electrónica en la ECFM; a Fernando le faltaron solo dos cursos para ser pasante.

Al cabo de un tiempo, motivado por su esposa, por su pasión por las matemáticas y por el amor al álgebra que despertaron en él los seminarios mencionados de párrafos arriba, aunado a que por esas fechas las carreras de Computación y Electrónica se separaron de la FCFM se crearon las condiciones para superación académica. Macías logró—al fin—comenzar sus estudios

de maestría en la FCFM BUAP. Ahí conoció a excelentes profesores que ahora son sus grandes amigos como Miguel Antonio Jiménez Pozo, Andrés Fraguella Collar y Alexander Bykov, además del bondadoso Raúl Escobedo. Macías tenía la esperanza de que su amigo, Arnoldo Bezanilla López, le dirigiera una tesis en variable compleja; él, en cambio, lo mandó a estudiar el artículo: J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Mat. Comun. 22, Sociedad Matemática Mexicana, México, (1998), 227–253. Fernando buscó apoyo para entender las sutilezas de esta disciplina en la que él era un neófito, encontró al docto Raúl Escobedo Conde. No pasó mucho tiempo para que la topología le arrebatara al álgebra su corazón.

En tiempos del «Big Bang de la Teoría de los Continuos e hiperespacios» en las «Primeras jornadas veraniegas de topología (1996)» Fernando se puso de acuerdo con Raúl para que él y la espléndida Isabel Puga (de la Facultad de Ciencias de la UNAM) le dirigieran la tesis de maestría. El 12 de septiembre de 1997, defendió su tesis, intitulada *El Margen de los Continuos*, dando inicio formalmente a su relación inseparable con los continuos. Ya encarreado el ratón (macías), se inscribió al doctorado en la FCFM, presentando su examen el 21 de junio de 2002. Su trabajo de tesis se llamó *Propiedades Topológicas de los Continuos de Margen Cero*. Apoyado por los ilustres Bety Puga, Raúl Escobedo y Jorge Bustamante González. Mientras Fernando se desarrollaba como matemático, no descuidó su interés por la divulgación de la Matemática. Cuando él estudiaba la maestría, él y Jacobo Oliveros organizaron un seminario semanal llamado «épsilon sobre dos», donde invitaban de ponentes a matemáticos locales y de la UNAM.

En 2005, dando continuidad al trabajo de las colegas Soraya Gómez y Estrada y la sin par Esperanza Guzmán Ovando, Fernando convocó a la organización de la «Primera Gran Semana de las Matemáticas (PGSNM)», que se convertiría en una actividad anual de nivel nacional que se realizó con este nombre (GSNM) hasta 2013. El tamaño de estas reuniones académicas creció inesperadamente con el paso de los años, expandiéndose en 2014 al Primer Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones (1CIMA). Desde su primera edición (acabamos de realizar la octava), han llegado invitados nacionales y extranjeros que trabajan en diversas áreas de la matemática. La organización del CIMA sigue vigente hasta la fecha, aún en medio de la pandemia.

El 4 de enero de 2011 fallece el padre de crianza de Fernando.

A la par de la organización de estos congresos (CIMA), Fernando ha estado a cargo del trabajo editorial de las publicaciones anuales “Matemáticas y sus Aplicaciones”, que en este año llegó a su número 17. Estos libros son producto de las conferencias impartidas en los CIMA (y antes, en las GSNM). Su carrera académica no solo se ha limitado a la divulgación científica. A partir del año 2000, dio inicio a su aventura en la formación de nuevos investigadores. Desde aquel entonces a la fecha, ha dirigido treinta y cinco tesis de licenciatura, ocho de maestría (dos más en proceso) y cinco de doctorado (tres más en proceso). Aunque de debut tardío, Fernando logró convertirse en un investigador reconocido entre sus colegas continuólogos (apoyado por Raúl Escobedo, Isabel Puga, Alejandro Illanes, Verónica Martínez de la Vega, Sergio Macías, etc.). Con actividades disciplinadas y constantes, ha contribuido para situar a la FCFM como uno de los lugares más importantes en la disciplina a nivel nacional. Aquí ponemos una breve semblanza de su carrera de investigador.

Así como su deseo de estudiar lo llevó a la ciudad de Puebla a principios de los ochenta, su trayectoria como investigador lo ha llevado a varios lugares fuera de México en los últimos años. Ha compartido su trabajo en eventos académicos en lugares como la IV Reunión Conjunta entre la Sociedad Matemática Americana y la Sociedad Matemática Mexicana que se realizó en Denton, Texas, E.U. (1999) ; la University of Louisiana at Lafayette, en Lafayette, Louisiana, E. U. (2000); la Universidad de San Carlos, Prage, República Checa.(2006); la Universidad Jaume I, de Castellón, España (2007); el Instituto Educativo Tecnológico de Mesolongi, en Naupacto, Grecia (2010); en el City College, CUNY, Nueva York, Nueva York (2011), E.U.; la Universidad de Ciencias Pedagógicas Juan Marinello en Matanzas, Cuba (2012); la Shimane University, Matsue, Japón (2013); el State University of São Paulo (UNESP), São José do Rio Preto, Brazil (2014); la Universidad Antonio Nariño en Bogotá, Colombia (2015); la Universidad Normal de Minnan en Zhangzhou, China (2015); la Universidad de Leicester en Inglaterra (2016); Busán, República de Corea (2017); la Universidad de Malpete en Estambul, Turquía (2018) y la Universidad de Witwatersrand en Johannesburgo, Sudáfrica (2019), entre otros.

Desde 1980, Fernando jugaba baloncesto, en el primer y segundo tiempo, por lo menos dos veces a la semana, junto con Juan Angoa, Jaime Arroyo, Agustín Contreras, Manuel Ibarra (desde 1986), primer autor, Raúl Linares, Armando Martínez (desde 1986), Celestino Soriano; quienes, desde entonces han sido sus más grandes amigos de toda la vida (más de 40 años). Dichos encuentros se realizaban en CU (en la mayoría de las veces) teniendo como adversarios deportivos a equipos de estudiantes de la FCFM y de otras escuelas. El tercer tiempo se realizaba en «la Escuelita» acompañados de ponentes extraordinarios. Hasta como en 2018, se acabaron estos amistos encuentros deportivos.

Fernando también recuerda a la mayoría de sus alumnos, en especial a los que ha asesorado en tesis o en proyectos científicos y académicos.

Macías recuerda a sus maestros de licenciatura que se mantienen laborando en la FCFM como el eximio Juan Alberto Escamilla. También recuerda a sus compañeros que entraron a la licenciatura el mismo año 1979 y que se mantienen laborando en la FCFM como los célebres Francisco S. Tajonar Sanabria y Pablo R. Zeleny Vázquez.

Macías está muy agradecido con: (1) todos sus amigos de la Academia de Matemáticas de licenciatura y de posgrado con quienes sigue compartiendo proyectos, acreditaciones, organización de congresos, etc. (2) todos los continuólogos del país y del extranjero por su interacción científica con ellos. (3) todos los matemáticos del mundo, en particular con los topólogos (UNAM, UAMéx, UANACH, UTM, UDLAP, etc. ).

El 14 de febrero de 2015 Fernando conoce a su padre biológico.

Actualmente se encuentra investigando en teoría de los continuos e hiperespacios con el primer autor y con M. de J. López junto a sus actuales estudiantes de doctorado Germán Montero, Antonio Libreros y Gerardo Hernández.

Después de una fuerte disciplina y esfuerzos sobrehumanos por mantenerse en el camino, Fernando goza de prestigio académico, con una carrera de investigador en ascenso. Más allá de esto, se ha vuelto famoso entre la comunidad de la FCFM, BUAP por su carisma, su jornada de trabajo de hasta doce horas diarias, su capacidad inusitada para hacer amigos, sus cualidades

como gestor, administrador, organizador y editor, y por su manera peculiar de formar nuevas generaciones de investigadores.

Retoños: María Fernanda (1988), segundo autor (1991), Fernando (1993) y Alejandro (2004).

Su figura de compañero incondicional, amigo incansable, progresista, congruente y honesto nos hacen sentirnos afortunados de habernos encontrado con él en nuestro camino.

### 3 Estrellitas

1. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores NIVEL 1. Vigencia: del 1 de enero de 2021 al 31 de diciembre de 2024.
2. Es miembro del Perfil PRODEP. Vigencia: del 6 de noviembre de 2017 al 8 de noviembre de 2023.
3. Es miembro del Cuerpo Académico BUAP-CA-32 Topología y sus aplicaciones. Nivel Consolidado. Vigencia: del 8 de noviembre de 2017 al 7 de noviembre de 2022.
4. Es miembro del Padrón de Investigadores BUAP, Vigencia 1 de enero de 2021 al 31 de diciembre de 2024.
5. Su máximo nivel de estudios: Doctorado en Ciencias (Matemáticas) con tesis y examen de grado con dos publicaciones indizadas.
6. Profesor Investigador Titular C de Tiempo Completo.

### 4 Antecedentes académicos

1. Profesor Hora Clase del 15 de septiembre de 1984 al término del segundo semestre lectivo del mismo año, en la Escuela de Ciencias Químicas de la UAP.
2. Profesor Hora Clase del 16 de octubre de 1982, al término del segundo semestre lectivo del mismo año y Profesor Medio Tiempo “A” del 16 de octubre de 1983 al término del segundo semestre lectivo del mismo año, en la Preparatoria “Enrique Cabrera Barroso” de la UAP.

3. Auxiliar de Docencia “A” del 1 de septiembre de 1982 al término del primer semestre lectivo de 1983, ECFM, UAP.
4. Profesor Tiempo Completo “B” del mes de febrero de 1985 al término del primer semestre lectivo del mismo año, ECFM, BUAP.
5. Profesor Tiempo Completo “A” del 2 de septiembre de 1985 al 30 de octubre de 1991, DEFINITIVO a partir del 8 de abril de 1991 en la ECFM BUAP.
6. Profesor Investigador Asociado “B”, tiempo completo, del 1 de noviembre de 1991 al 31 de mayo de 2004.
7. Profesor Investigador Titular “A”, tiempo completo, del 1 de junio de 2004 al 14 de agosto de 2012 en la BUAP.
8. Profesor Investigador Titular “B”, tiempo completo, del 15 de agosto de 2012 al 17 de mayo de 2015 en la BUAP.
9. Profesor Investigador Titular “C”, tiempo completo, del 18 de mayo de 2015 a la fecha en la BUAP.

## 5 Director de tesis

Director de 35 Tesis de Licenciatura concluidas. Director de 8 Tesis de Maestría concluidas. Director de 5 Tesis de Doctorado concluidas.

### Tesis de licenciatura dirigidas

1. Nombre del estudiante: Antonio Peláez Morales. Título de la Tesis: Los Continuos Encadenables. Titulado el 25 de agosto de 2000. Título: Licenciado en Matemáticas, FCFM, BUAP. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.
2. Nombre del estudiante: Ignacio Flores Xelhuantzi. Título de la Tesis: La  $s$ -conexidad en los Continuos. FCFM, BUAP. Titulado el 1 de febrero de 2002. Título obtenido: Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.
3. Nombre del estudiante: Armando Espíndola Pozos. Título de la Tesis: Funciones Continuas entre Continuos. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulado el 26 de julio de 2002. Título obtenido: Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.
4. Nombre del estudiante: Carlos Palomino Jiménez. Título de la Tesis: Margen de Continuos en el Plano Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP

Titulado el 14 de febrero de 2003. Título obtenido: Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

5. Nombre del estudiante: David Carrillo Vázquez. Título de la Tesis: Los Continuos de Peano Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP Titulado el 20 de septiembre de 2004. Título obtenido: Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

6. Nombre del estudiante: Jorge Otero González. Título de la tesis: Gráficas en Continuos. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulado el 3 de diciembre 2004. Título obtenido: Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

7. Nombre del estudiante: Eduardo Herrera Ortiz. Título de la tesis: Introducción a la teoría de la dimensión. Número de matrícula 990020647. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulado el 30 de septiembre de 2005. Título obtenido: Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

8. Nombre de la estudiante: Alicia Santiago Santos. Título de la tesis: El Teorema de Clasificación de Superficies. Número de matrícula 200020707. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulada el 6 de diciembre de 2005. Título: Licenciada en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

9. Nombre de la estudiante: Magdalena López Adauta. Título de la tesis: Un curso de Geometría Euclidiana. Número de matrícula 990003401. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulada el 9 de diciembre de 2005. Título: Licenciada en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

10. Nombre del estudiante: Israel Rojas Pérez. Título de la tesis: El Teorema de la Curva de Jordan. Número de matrícula: 990009093. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulado el 11 de diciembre de 2006. Título: Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

11. Nombre del estudiante: Dulce María Flores Sánchez. Título de la tesis: Un Estudio de Dendritas. Matrícula: 200014099 Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulada el 10 de diciembre de 2008 Título: Licenciada en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

12. Nombre del estudiante: Vicente Ledezma Santiago. Título de la tesis: Desarrollo de Habilidades Matemáticas en el Nivel Medio Superior. Matrícula: 870251200 Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulado: 15 de diciembre de 2008. Título obtenido: Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

13. Nombre del estudiante: Yaziel Pacheco Juárez. Título de la tesis: Propiedades del Producto de Espacios Topológicos. Matrícula: 200324672 Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulada: 27 de febrero de 2009. Título obtenido: Licenciada en Matemáticas Aplicadas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

14. Nombre del estudiante: Luis Alberto Guerrero Méndez. Título de la tesis: Clases de Continuos Localmente Conexos. Matrícula: 200214966. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Titulado el 26 de junio de 2009. Título obtenido: Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

15. Nombre del estudiante: María Teresa Domínguez Pliego. Título de la tesis: Una Introducción a los Límites Inversos. Matrícula: 990000660. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Inició: 8 de enero de 2007. Titulada el 20 de julio de 2010. Título obtenido: Licenciada en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

16. Nombre de la estudiante: Guillermina Izelo Castillo. Título de la tesis: Razonamiento Deductivo en la Resolución de Problemas. Matrícula: 8422003. FCFM, BUAP. Titulada: 8 de abril de 2011. Título obtenido: Licenciada en la Enseñanza de las Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. Folio de Acta de Examen 66481.

17. Nombre del estudiante: Faustino Agustín Romano Velázquez. Título de la tesis: Singularidades Casi-Homogéneas Polares. Matrícula 200607887. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Inició: 31 enero de 2010. Fecha de examen: 24 de mayo de 2011. Título obtenido: Mención honorífica: CUM LAUDE Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. La tesis se encuentra en: <http://www.fcfm.buap.mx/sec-acad/tesisL/FaustinoAgustinRomanoVelazquez.pdf>; con mención honorífica. <http://www.fcfm.buap.mx/sec-acad/tesisL/sotero.pdf>. Folio de Acta de Examen 67176

18. Nombre del estudiante: Vianey Córdova Salazar. Título de la tesis: Propiedades Básicas de los Hiperespacios. Matrícula: 200503228. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Inició: 8 de enero de 2010. Fecha de examen profesional: 26 de agosto de 2011. Título obtenido: Licenciada en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. La tesis se encuentra en <http://www.fcfm.buap.mx/sec-acad/tesisL/VianeyCordovaSalazar.pdf>. Folio de Acta de Examen 0069066

19. Nombre del estudiante: Juan Manuel Ramírez Contreras. Título de la

tesis: Una propuesta didáctica sobre la enseñanza de la geometría en el nivel medio superior. Matrícula: 200224847. FCFM, BUAP. Fecha de examen: 30 de marzo de 2012. Título obtenido: Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. La tesis se encuentra en <http://www.fcfm.buap.mx/sec-acad/tesisL/JuanManuelRamirezContreras.pdf> Folio de Acta de Examen 74408.

20. Nombre de la estudiante: Betsy Christian Cuevas Martínez. Título de la tesis: Propiedades básicas del  $n$ -ésimo hiperespacio de un continuo. Matrícula: 200309955. FCFM, BUAP. Examen profesional: 22 de junio de 2012. Título obtenido: Licenciada en Matemáticas Aplicadas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. La tesis se encuentra en <http://www.fcfm.buap.mx/sec-acad/tesisL/BetsyChristianCuevasMartinez.pdf>. Folio de Acta de Examen 75985.

21. Nombre de la estudiante: María Castro Sánchez. Tesis: *Introducción a las funciones de Whitney*. Matrícula: 200714778. Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Examen profesional: 9 de agosto de 2013. Título obtenido: Licenciada en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. La tesis se encuentra en <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/MariaCastroSanchez.pdf>. Folio BUAP: 0085314.

22. Nombre de la estudiante: María del Rocío Macías Prado. Título de la tesis: Modelos de Hiperespacios. Matrícula: 200814588. FCFM, BUAP. Examen profesional: 28 de agosto de 2013. Título obtenido: Licenciada en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/MariaDelRocioMaciasPrado.pdf>. Mención honorífica: AD HONORUM Folio BUAP: 0085607.

23. Nombre del estudiante: Gerardo Ahuatzi Reyes. Título de la tesis: Los continuos enrejados tienen  $n$ -ésimo hiperespacio único. Matrícula: 200525774 FCFM, BUAP. Examen Profesional: 30 de mayo de 2014. Folio: 92632. Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

24. Nombre del estudiante: Alejandro Rodríguez Zepeda. Título de la tesis: Productos Topológicos. Matrícula 990020951 Facultad a la que pertenece: FCFM, BUAP. Examen Profesional: 30 mayo 2014. Folio: 92640. Licenciado en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

25. Nombre del estudiante: Cristina Sánchez López. Título de la tesis: *Propiedad del punto fijo: Lema de Sperner*. Matrícula: 200730194. Folio 93185. FCFM, BUAP. Examen Profesional: 30 de junio de 2014. Título: Licenciada

en Matemáticas. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

26. Nombre del estudiante: Lázaro Flores De Jesús. Título de la tesis: *Continuos localmente conexos*. Matricula: 200930643. Institución: FCFM de la BUAP. Licenciada en Matemáticas Examen profesional: 4 de diciembre de 2015 Director de Tesis: Fernando Macías Romero. Folio: 0105532

27. Patricia del Pilar Macías Patraca 200500723 Fecha de examen profesional: 14 de diciembre de 2015. Folio: 0105977. Título de la tesis: *Elementos básicos del  $n$ -ésimo pseudohiperespacio suspensión de continuos*. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

28. Lucero Guadalupe Contreras Hernández. 200933687. Fecha de examen profesional: 4 julio 2016. Tesis: *Continuos, construcciones y propiedades*. <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/LuceroGuadalupeContrerasHernandez.pdf>. Folio: 0110574. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

29. Antonio de Jesús Libreros López. 201104476. 5 de julio de 2016. Tesis: *Espacios cociente y encajes*. <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/AntonioDeJesusLibrerosLopez.pdf>. Folio: 0110682. Mención honorífica: CUM LAUDE. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

30. Nancy Márquez Lázaro 990009528. 11 de agosto de 2017. Folio: 0119541. tesis: *Introducción a los continuos de Peano*. Folio: 0119541. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

31. Levent Arturo Chaves Moreno matrícula. 201324531 2 de febrero 2018. Folio BUAP: 0123113. Estudio del  $n$ -ésimo hiperespacio de un continuo. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/LeventArturoChavesMoreno.pdf>. Mención honorífica: CUM LAUDE.

32. Mabel Priscila Martínez Sandoval, matrícula: 201113713. Licenciatura en Matemáticas. Examen 21 de noviembre de 2018. Tesis: Introducción a la teoría de la dimensión inductiva pequeña. Folio BUAP: 0129226. <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/MabelPriscilaMartinezSandoval.pdf> Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

33. Patricia Aguilar Rangel. No. matricula 200225611. Título de la tesis: Introducción a los espacios métricos compactos y conexos 22 de febrero de 2019. Folio BUAP: 0131325. Lic. Mate. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. <https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/>

matematicas/PatriciaAguilarRangel.pdf.

34. Nombre del estudiante: Felipe de Jesús Aguilar Romero. Número de matrícula: 201344131. Título de tesis: *Dinámica en el intervalo y en su hiperespacio de compactos*. Licenciatura en Matemáticas Aplicadas 9 de diciembre de 2019. Folio BUAP: 0138837 Director de Tesis: Fernando Macías Romero. <https://www.fcfm.buap.mx/docencia/tesis/licenciatura-ma>.

35. Nombre del estudiante: Fabián Valdivia Pérez. Título de la tesis: *Matemática de los siglos XV-XVIII*. Matrícula 980021165. Institución: FCFM, BUAP. Licenciatura en Matemáticas. 8 de septiembre de 2021. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

## Tesis de maestría dirigidas

Dirección de 8 tesis de maestría concluidas:

1. Nombre del estudiante: Francisco Vázquez Juárez. Título de la tesis: *Propiedades de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado*. Matrícula: 254700579 Institución: FCFM BUAP. Grado obtenido: Maestro en Ciencias (Matemáticas) Fecha de examen: 28 de mayo de 2010. Folio de acta de examen 60546. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

2. Nombre del estudiante: Eduardo Herrera Ortiz. Título de la tesis: *Teoría de la Dimensión*. Matrícula: 254700579. Institución: FCFM BUAP. Grado obtenido: Maestro en Ciencias Matemáticas. Fecha de examen: 25 de febrero de 2011. Folio de Acta de Examen: 65535

3. Nombre del estudiante: Luis Alberto Guerrero Méndez. Título de la tesis: *Dendritas y productos simétricos*. Matrícula: 204702073. FCFM BUAP. Grado obtenido: Maestro en Ciencias Matemáticas. Fecha de examen de grado, 18 de mayo de 2012. Folio de acta de examen 75744. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

4. Nombre del estudiante: Vianey Córdova Salazar. Título de la tesis: *Gráficas finitas  $X$  con hiperespacio único  $C_n(X)$* . Número de matrícula 212470171. Institución: FCFM BUAP. Grado obtenido: Maestro en Ciencias Matemáticas. Fecha de examen: 6 de junio de 2014. Folio de acta de examen: 92789. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

5. Nombre del estudiante: Germán Montero Rodríguez. Título de la tesis: *Rigidez de hiperespacios*. Número de matrícula: 213470925. Institución: FCFM BUAP. Grado obtenido: Maestro en Ciencias Matemáticas. Inició: 16

de agosto de 2013. Fecha de examen: 14 de agosto de 2015. Folio de acta de examen: 102141. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

6. Nombre del estudiante: Lázaro Flores de Jesús. Título de la tesis: Continuos Whitney determinados Número de matrícula: 216470050. Núm. de CVU 737265. Institución: FCFM BUAP. Grado obtenido: Maestro en Ciencias Matemáticas. Inició: 8 de enero de 2016. Fecha de examen: 12 de marzo de 2018. Folio de acta de examen: 0123880. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

7. Nombre del estudiante: Antonio de Jesús Libreros López Título de la tesis: Continuos con  $n$ -ésimo producto simétrico único. Número de matrícula: 216470298. Núm. de CVU: 773067. Institución: FCFM BUAP. Grado obtenido: Maestría en Matemáticas. Fecha de examen: 5 de julio de 2018. Folio de acta de examen: 083462. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

8. Nombre del estudiante: Gerardo Hernández Valdez. Título de la tesis: *Sobre el  $(n, m)$  hiperspacio suspensión de un continuo*. Número de matrícula: 217470734. Núm. de CVU: 850840. FCFM, BUAP. Grado obtenido: Maestría en Matemáticas. Fecha de examen: 4 de julio de 2019. Folio de acta de examen: 0135620. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

#### Tesis de Maestría en Ciencias en Proceso:

1. Nombre del estudiante: Felipe de Jesús Aguilar Romero. *Hiperespacios únicos en  $C_n(p, X)$* . Número de matrícula: 220470113. Núm. de CVU: 1028106. Institución: FCFM BUAP. Grado por obtener: Maestro en Ciencias Matemáticas. Inició: enero de 2020. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

2. Nombre del estudiante: Leonardo Ramírez Aparicio. Tesis: *Unicidad de los hiperespacios para continuos de Peano*. Número de matrícula: 221470064. Núm. de CVU: 1097611. Institución: FCFM BUAP. Inició: enero de 2021. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

### Tesis de doctorado dirigidas

Dirección concluida de 5 Tesis de Doctorado.

1. Nombre del estudiante: Francisco Vázquez Juárez. Título de la tesis: *Continuos localmente conexos y casi enrejados con hiperspacio único  $F_n(X)$*

*y gráficas finitas con hiperespacio único*  $C_n(X)/F_n(X)$ . Matrícula: 205702875  
 Institución: FCFM BUAP. Grado obtenido: Doctor en Ciencias Matemáticas  
 Fecha Inicio: 16 de agosto de 2010 Fecha de término: 7 de julio de 2014.  
 Folio de acta de examen 93313. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.  
 MathSciNet ID: 987314

2. Nombre del estudiante: Luis Alberto Guerrero Méndez. Título de la tesis: *Los continuos enrejados tienen segundo y tercero producto simétrico único*. Matrícula: 212570813 Institución: FCFM BUAP. Grado obtenido: Doctor en Ciencias (Matemáticas) Fecha Inicio: 13 de agosto de 2012 . Fecha de término: 27 de junio de 2016. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. Folio: 11699

3. Nombre del estudiante: Adolfo Maceda Méndez. Título de la tesis: *Complejos cúbicos difusos e imágenes digitales n-dimensionales en tono de gris*. Número de matrícula: 235701197. Institución: FCFM BUAP. Grado obtenido: Doctorado en Ciencias (Matemáticas). Fecha Inicio: 4 de agosto de 2014. Titulado: 1 de junio de 2018. Folio BUAP: 0125849

4. Nombre del estudiante: José Gerardo Ahuatzí Reyes. Título de la tesis: *Dendritas que son determinadas por sus niveles positivos de Whitney*. Número de matrícula: 215571041 CVU: 383242 Institución: FCFM BUAP. Doctorado en Ciencias (Matemáticas). Fecha Inicio: 15 de agosto de 2015. Titulado: 14 noviembre de 2019. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. Folio BUAP: 0138813.

5. Nombre del estudiante: Vianey Córdova Salazar. Título de la tesis: *Los continuos casi enrejados localmente conexos tienen tercer producto simétrico único*. Número de matrícula: 214570943. Institución: FCFM BUAP. Doctorado en Ciencias (Matemáticas). Fecha de término: 25 de noviembre de 2019. Director de Tesis: Fernando Macías Romero. Folio BUAP: 0139895.

Tesis de Doctorado en Ciencias en Proceso:

1. Nombre del estudiante: Germán Montero Rodríguez. Título de la tesis: *Las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único*. Número de matrícula: 218570078. CVU: 552119. Institución: FCFM BUAP. Grado por obtener: Doctorado en Ciencias (Matemáticas). Fecha Inicio: 8 de enero de 2018. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

2. Nombre del estudiante: Antonio de Jesús Libreros López. Título de la tesis: *La rigidez del segundo y tercer producto simétrico para continuos arco indescomponibles*. Número de matrícula: 218570567. Núm. de CVU: 773067.

Institución: FCFM BUAP. Título por obtener: Doctor en Ciencias Matemáticas. Inició: agosto de 2018. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

3. Nombre del estudiante: Gerardo Hernández Valdez Título de la tesis: *Sobre el  $(n, m)$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo*. Número de matrícula: 219570563. Núm. de CVU: 850840. Institución: FCFM BUAP. Título por obtener: Doctor en Ciencias Matemáticas. Inició: septiembre de 2019. Director de Tesis: Fernando Macías Romero.

## 6 Apoyo al proceso de Enseñanza–Aprendizaje

Programas 2017 en los que Fernando Macías participó como elaborador Cálculo Integral en Varias Variables; Análisis Matemático en  $\mathbb{R}^n$ ; Análisis Matemático en Espacios Métricos; Variable Compleja 1. <https://www.fcfm.buap.mx/docencia/licenciatura-matematicas>.

## 7 Gestión Académica

1. Coordinador del Posgrado en Matemáticas en la FCFM de la BUAP del 4 de marzo de 2015 al 31 de marzo de 2019.

2. Miembro del Comité Académico del Posgrado en Matemáticas en la FCFM de la BUAP a partir del 1 de abril de 2019 a la fecha.

3. Coordinador de las Licenciaturas en Matemáticas en la FCFM, BUAP de marzo de 2021 a la fecha. <https://www.fcfm.buap.mx/academiam/>.

4. Evaluador de Expedientes Generales, nombramiento realizado por la Comisión Institucional del Programa de Estímulos al Desempeño del Personal Docente de la BUAP (a) del 14 de marzo al 3 de mayo de 2016. (b) del 19 de febrero al 5 de abril de 2018.

5. Integrante del Comité de Contraloría Social «DES Ciencias Exactas» número de Registro 2016-11-S245-511-11-21-114-000-5/1 del programa de fortalecimiento de la calidad en instituciones educativas (PROFOCIE) versión 2015 Desde mayo de 2016 a diciembre 2016.

6. Comité de revalidación de estudios de los estudiante venezolana durante otoño de 2016: Karla Andreina Carrero Vera para que ingresara al Posgrado en Matemáticas de la FCFM, en Primavera de 2017.

7. Comité de revalidación de estudios de los estudiante venezolano durante otoño de 2016: Uvencio José Giménez Mujica para que ingresara al Posgrado en Matemáticas de la FCFM, en Primavera de 2017.

8. Miembro del Jurado del Examen de Admisión al programa de Doctorado en Ciencias (Matemáticas), realizado el día lunes 27 de noviembre de 2017, en el edificio FM2/302-C, a las 10:00 hrs. Además de haber evaluado el examen se realizó una entrevista el día 5 de diciembre de 2017 a los aspirantes a ingresar.

9. Editor de publicación periódica encargado del diseño, ordenamiento y seguimiento de las políticas editoriales de la revista responsable de la coordinación y seguimiento de los trabajos de un comité editorial de publicaciones de carácter académico de los Libros de matemáticas y sus aplicaciones 1—17.

10. Comité de revalidación de estudios de los estudiante de doctorado durante Primavera de 2017: Adolfo Maceda para que ingresara al Posgrado en Matemáticas de la FCFM, en Otoño de 2017.

11. Evaluador de proyectos de investigación Evaluador de una propuesta de un proyecto en la UAEMex cada año desde 2017 a la fecha.

12. En 2019, el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología Nacional de Ciencia y Tecnología le pidió Evaluar las solicitudes presentadas en la: «Convocatoria 2019 (1) Estancias Posdoctorales Vinculadas al Fortalecimiento de la Calidad del Posgrado Nacional».

13. Responsable de la Comisión de Titulación y de Exámenes Profesionales de la Academia de Matemáticas. Desde 2019 a la fecha. <https://www.fcfm.buap.mx/docencia/tesis/licenciatura-m>.

12. Impartió la Conferencia de Puertas Abiertas BUAP 7 de mayo de 2021

13. Jurado de tesis licenciatura de Brian Eliezer Ortega Santiago el 4 de mayo de 2021.

## 8 Libros publicados

1. Fernando Macías Romero (otros autores: Juan Angoa Amador, Jaime Arroyo García, Agustín Contreras Carreto, David Herrera Carrasco, Manuel Ibarra Contreras, Raúl Lineras Gracia, Armando Martínez García, Celestino Soriano Soriano, Fernando Velázquez Castillo) *Cálculo Diferencial en una Variable*, Fomento Editorial de la BUAP, marzo de 2005, tiraje de 1000 ejemplares,

ISBN 968 863 817 X, 261 páginas. Primera Reimpresión 2014. Segunda Reimpresión 2018.

2. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. *Matemáticas y sus Aplicaciones 1*. Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP. Primera Edición, ISBN: 978-607-487-338-2. Tiraje de 283 ejemplares. 334 páginas. Publicado el 30 de septiembre de 2011.

3. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. *Matemáticas y sus Aplicaciones 2*. Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP. Primera Edición, ISBN: 978-607-487-600-0. Tiraje de 240 ejemplares. 312 páginas. Publicado el 1 de octubre de 2013.

4. Editor Fernando Macías Romero. *Matemáticas y sus Aplicaciones 3*. Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP. Primera Edición, ISBN: 978-607-487-659-8. Tiraje de 300 ejemplares. 238 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2013.

5. Editor Fernando Macías Romero. *Matemáticas y sus Aplicaciones 4*. Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP. Primera Edición, ISBN: 978-607-487-791-5. Tiraje de 500 ejemplares. 248 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2014.

6. Editor Fernando Macías Romero. *Matemáticas y sus aplicaciones 5*. Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 137-164, Primera Edición 2015, ISBN: 978-607-487-934-6. Tiraje de 500 ejemplares. 224 páginas. Publicado el 19 de octubre de 2015.

7. Editor Fernando Macías Romero. *Matemáticas y sus aplicaciones 6*, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP. Primera Edición 2015, ISBN: 978-607-487-975-9. Tiraje de 500 ejemplares. 272 páginas. Publicado el 7 de diciembre de 2015.

8. Editor Fernando Macías Romero. *Matemáticas y sus aplicaciones 7*. Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, Primera Edición 2016, ISBN: 978-607-525-135-6. Tiraje de 500 ejemplares. 270 páginas. Publicado el 7 de diciembre de 2016.

9. Editores María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero. *Matemáticas y sus aplicaciones 8*, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP. Primera Edición 2017, ISBN: 978-607-525-376-3. Tiraje de 500 ejemplares. 240 páginas. Publicado el 7 de noviembre de 2017.

10. Coordinadores: David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero. *Matemáticas y sus aplicaciones 9*, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP. Primera Edi-

ción 2018, ISBN: 978-607-525-520-0. Tiraje de 500 ejemplares. 176 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.

11. Coordinadores: David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero. Matemáticas y sus aplicaciones 10, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-521-7. Tiraje de 500 ejemplares. 184 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.

12. Coordinadores: David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero. Matemáticas y sus aplicaciones 11, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP. Primera Edición 2019, ISBN: 978-607-525-615-3. Versión electrónica en

<https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. 209 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2019.

13. Coordinadores: David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero. Matemáticas y sus aplicaciones 12, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP. Primera Edición 2019, ISBN: 978-607-525-616-0. Tiraje de 500 ejemplares. 208 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2019.

14. Editores: Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco. Matemáticas y sus aplicaciones 13, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-695-5. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.

15. Editores: Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco. Matemáticas y sus aplicaciones 14, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-695-5. Versión electrónica en

<https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.

16. Editores: Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco. Matemáticas y sus aplicaciones 15, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 135 - 160. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-696-2. Versión electrónica en

<https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.

17. Editores: Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco. Mate-

máticas y sus aplicaciones 16, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP. Primera Edición 2021, ISBN: 978-607-525-764-8. Versión electrónica en

<https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 9 de noviembre de 2021.

18. Editores: Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco. Matemáticas y sus aplicaciones 17, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP. Primera Edición 2021, ISBN: 978-607-765-696-5. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 9 de noviembre de 2021.

## 9 Publicación de 37 capítulos de libro

1. Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *La Topología de los Hiperespacios* (Capítulo 26), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 291–300, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-338-2. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 283 ejemplares. 334 páginas. Publicado el 30 de septiembre de 2011.

2. Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Dendritas Locales* (Capítulo 27), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 301–312, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-338-2. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 283 ejemplares. 334 páginas. Publicado el 30 de septiembre de 2011.

3. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *¿Tienen las Dendritas Locales Producto Simétrico Único?* (Capítulo 28), Matemáticas y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 313–325, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-338-2. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 283 ejemplares. 334 páginas. Publicado el 30 de septiembre de 2011.

4. Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Encajes* (Capítulo 19), Matemáticas y sus Aplicaciones 2, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 271–285, Primera Edición,

ISBN: 978-607-487-600-0. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 240 ejemplares. 312 páginas. Publicado el 1 de octubre de 2013.

5. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *Continuos Casi Enrejados y localmente conexos con  $n$ -ésimo Producto Simétrico Único* (Capítulo 20), Matemáticas y sus Aplicaciones 2, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 287–299, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-600-0. Editores Miguel Ángel García Ariza, Fernando Macías Romero, José Jacobo Oliveros Oliveros. Tiraje de 240 ejemplares. 312 páginas. Publicado el 1 de octubre de 2013.

6. Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero, *El  $n$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo* (Capítulo 10), Matemáticas y sus Aplicaciones 3, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 175–195, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-659-8. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 300 ejemplares. 238 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2013.

7. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *El  $n$ -ésimo hiperespacio suspensión de gráficas finitas* (Capítulo 11), Matemáticas y sus Aplicaciones 3, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 197–214, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-659-8. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 300 ejemplares. 238 páginas, Publicado el 1 de noviembre de 2013.

8. Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Gráficas finitas con hiperespacio único  $C_n(X)$*  (Capítulo 7), Matemáticas y sus Aplicaciones 4, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 159–181, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-791-5. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 248 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2014.

9. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez, *Dendritas  $C$ -determinadas* (Capítulo 8), Matemáticas y sus Aplicaciones 4, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 183–207, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-791-5. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 248 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2014.

10. Fernando Macías Romero, Arturo Sánchez González, *Espacios de dimensión cero y su relación con los espacios totalmente desconexos* (Capítulo 10), Matemáticas y sus Aplicaciones 4, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 227–245, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-791-5.

Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 248 páginas. Publicado el 1 de noviembre de 2014.

11. José Gerardo Ahuatzi Reyes, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Dimensión finita en el  $n$ -ésimo hiperespacio de continuos localmente conexos*. (Capítulo 6), Matemáticas y sus aplicaciones 5, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 137-164, Primera Edición 2015, ISBN: 978-607-487-934-6. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 224 páginas. Publicado el 19 de octubre de 2015.

12. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez, *Indescomponibilidad*. (Capítulo 8), Matemáticas y sus Aplicaciones 5, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 187-213, Primera Edición, ISBN: 978-607-487-934-6. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 224 páginas. Publicado el 19 de octubre de 2015.

13. José Gerardo Ahuatzi Reyes, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Continuos localmente conexos sin hiperespacio único  $C_n(X)$*  (Capítulo 9), Matemáticas y sus aplicaciones 6, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 215-240, Primera Edición 2015, ISBN: 978-607-487-975-9. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 272 páginas. Publicado el 7 de diciembre de 2015.

14. Mauricio Esteban Chacón Tirado, Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Acerca de continuos con  $n$ -ésimo producto simétrico único* (Capítulo 10), Matemáticas y sus aplicaciones 6, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 241-262, Primera Edición 2015, ISBN: 978-607-487-975-9. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 272 páginas. Publicado el 7 de diciembre de 2015.

15. José Gerardo Ahuatzi Reyes, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Funciones de Whitney admisibles* (Capítulo 8), Matemáticas y sus aplicaciones 7, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 199-229, Primera Edición 2016, ISBN: 978-607-525-135-6. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 270 páginas. Publicado el 7 de diciembre de 2016.

16. Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Tercer producto simétrico único* (Capítulo 9), Matemáticas y sus aplicaciones 7, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 231-248, Primera Edición 2016, ISBN: 978-607-525-135-6. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 270 páginas. Publicado el 7 de diciembre de 2016.

17. Lázaro Flores De Jesús, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Caracterización de los hiperespacios de un continuo localmente conexo* (Capítulo 10), Matemáticas y sus aplicaciones 7, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 249–268, Primera Edición 2016, ISBN: 978-607-525-135-6. Editor Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 270 páginas. Publicado el 7 de diciembre de 2016.

18. Alexander Bykov, Fernando Macías Romero, Marcelino Tesis, *Espacios fibrantes isovariantes* (Capítulo 9), Matemáticas y sus aplicaciones 8, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 169–192, Primera Edición 2017, ISBN: 978-607-525-376-3. Editores María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 240 páginas. Publicado el 7 de noviembre de 2017.

19. Lázaro Flores De Jesús, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Las gráficas finitas son continuos Whitney determinados* (Capítulo 10), Matemáticas y sus aplicaciones 8, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 193–208, Primera Edición 2017, ISBN: 978-607-525-376-3. Editores María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 240 páginas. Publicado el 7 de noviembre de 2017.

20. José Gerardo Ahuatzí Reyes, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Tipos de homotopía en los niveles de Whitney de gráficas finitas* (Capítulo 11)», Matemáticas y sus aplicaciones 8, Textos Científicos, Fomento Editorial de la BUAP, págs. 209–208, Primera Edición 2017, ISBN: 978-607-525-376-3. Editores María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero. Tiraje de 500 ejemplares. 240 páginas. Publicado el 7 de noviembre de 2017.

21. Jorge Bustamante González, Patricia Domínguez Soto y Fernando Macías Romero, *M. A. Jiménez Pozo en ocasión de su 80 aniversario* (Capítulo 1), Matemáticas y sus aplicaciones 9, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 5–26. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-520-0. Tiraje de 500 ejemplares. 164 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.

22. David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López, Fernando Macías Romero, *Continuos sin segundo y sin tercer producto simétrico rígido* (Capítulo 6) Matemáticas y sus aplicaciones 9, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 113–139. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-520-0. Tiraje de 500 ejemplares. 164 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.

23. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero

Rodriguez, *Continuos con hiperespacio rígido  $C_n(X)$*  (Capítulo 7) Matemáticas y sus aplicaciones 9, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 141–161. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-520-0. Tiraje de 500 ejemplares. 164 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.

24. Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero *Génesis del  $(n, m)$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo* (Capítulo 3) Matemáticas y sus aplicaciones 10, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 51–71. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-521-7. Tiraje de 500 ejemplares. 176 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.

25. David Herrera Carrasco, Adolfo Maceda Méndez, Fernando Macías Romero *Complejos cúbicos difusos* (Capítulo 4) Matemáticas y sus aplicaciones 10, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 73–101. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-521-7. Tiraje de 500 ejemplares. 176 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2018.

26. Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Fernando Mauricio Rivera Vega *Progresiones aritméticas como base para algunos espacios topológicos* (Capítulo 7) Matemáticas y sus aplicaciones 11, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 135–148. Primera Edición 2019, ISBN: 978-607-525-615-3. Indautor: 03-2019-082010541400-01 Versión electrónica en <https://www.fcm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2019.

27. Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Modelo del hiperespacio suspensión del continuo de Knaster* (Capítulo 9) Matemáticas y sus aplicaciones 11, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 177–198. Primera Edición 2019, ISBN: 978-607-525-615-3. Versión electrónica en <https://www.fcm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2019.

28. David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López, Fernando Macías Romero *El arco y la curva cerrada simple, únicos continuos localmente conexos sin triodos simples* (Capítulo 6) Matemáticas y sus aplicaciones 12, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 125–149. Primera Edición 2019, ISBN: 978-

607-525-616-0. Indautor: 03-2019-082011001000-01. Tiraje de 500 ejemplares. 208 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2019.

29. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez *Los continuos enrejados tienen  $(n, m)$ -ésimo hiperespacio suspensión único* (Capítulo 7) Matemáticas y sus aplicaciones 12, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 151–166. Primera Edición 2019, ISBN: 978-607-525-616-0. Indautor: 03-2019-082011001000-01. Tiraje de 500 ejemplares. 208 páginas. Publicado el 26 de octubre de 2019.

30. Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *Unicidad del hiperespacio  $C(p, X)$  para la familia de árboles* (Capítulo 3) Matemáticas y sus aplicaciones 13, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 39–54. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-694-8. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.

31. David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López, Fernando Macías Romero, *Límites inversos y continuos indescomponibles* (Capítulo 6) Matemáticas y sus aplicaciones 14, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 135–160. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-695-5. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.

32. Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *Continuidad de la función  $\omega_f$  en el intervalo  $[0, 1]$*  (Capítulo 7) Matemáticas y sus aplicaciones 14, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 161–181. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-695-5. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.

33. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez *La clase de las gráficas finitas es  $SF_n$ -cerrada* (Capítulo 7) Matemáticas y sus aplicaciones 15, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 135–160. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-696-2. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.

34. Felipe de Jesús Aguilar Romero, Patricia Dominguez Soto, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *El hiperespacio  $K(X)$*  (Capítulo 6) Matemáticas y sus aplicaciones 16, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 147–171. Primera Edición 2021, ISBN 978-607-525-764-8. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 9 de noviembre de 2021.

35. Mauricio Esteban Chacón Tirado, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Antonio de Jesús Libreros López, Fernando Macías Romero. *Status de la unicidad de hiperespacios de continuos* (Capítulo 7) Matemáticas y sus aplicaciones 16, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 173–197. Primera Edición 2021, ISBN 978-607-525-764-8. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 9 de noviembre de 2021.

36. David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez, *Las gráficas finitas tienen  $n$ -ésimo producto simétrico único* (Capítulo 3), Matemáticas y sus aplicaciones 17, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 65 - 89. Primera Edición 2021, ISBN 978-607-525-765-5. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 9 de noviembre de 2021.

37. Gerardo Hernández Valdez, Alexander Bykov, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *On the  $n$ -fold hyperspace suspension of continua and the uniqueness of hyperspaces* (Capítulo 4) Matemáticas y sus aplicaciones 17, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la BUAP, págs. 91–108. Primera Edición 2021, ISBN 978-607-525-765-5. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 9 de noviembre de 2021.

## 10 Artículos de investigación

1. Fernando Macías-Romero, *Asymmetric span of continua*, Memorias del Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, 2000, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones, 29 (2001), 61–70. <http://www.gbv.de/>

dms/tib-ub-hannover/377478008.pdf.

2. Jorge Bustamante, Raúl Escobedo y Fernando Macías-Romero, *A fixed point theorem for Whitney blocks*, Topology and its Applications V 125 N 2 (2002) 315–321. ISSN: 01668641 Editorial Elsevier Publiher: Science BV, PO BOX 211, 1000 AE Amsterdam, Netherlands. <https://core.ac.uk/download/pdf/82411384.pdf>.

[https://miscelaneamatematica.org/download/tbl\\_articulos.pdf2.9f783857c73742cc.465f4d61636961735f612e706466.pdf](https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.9f783857c73742cc.465f4d61636961735f612e706466.pdf). 3. David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *Hacia la clasificación de los continuos homogéneos aplanables*, Miscelánea Matemática, Volumen 43 (2006) 75–86. ISSN-1665-5478.

4. David Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero, *Dendrites with unique n-fold hyperspace*, Topology Proceedings, volumen 32 (2008), 321-337. ISSN 0146-4124. Editorial: Auburn University, Alabama, USA Nipissing University, Ontario Canada. <http://topology.nipissingu.ca/tp/reprints/v32/tp32026.pdf>.

5. David Herrera-Carrasco, Alejandro Illanes, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías-Romero, *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$* , Topology and its Applications V 156 (2009) 549-557. ISSN: 0166-8641. Publiher: Elsevier Science BV, PO BOX 211, 1000 AE Amsterdam, Netherlands. Impact Factor: 0.445. <https://core.ac.uk/download/pdf/82285376.pdf>.

6. David Herrera-Carrasco, María de Jesús López and Fernando Macías-Romero, *Dendrites with unique symmetric products*, Topology Proceedings, volumen 34 (2009), 175-190. ISSN: 0146–4124. Editorial: Auburn University, Alabama, USA Nipissing University, Ontario Canada. <http://topology.nipissingu.ca/tp/reprints/v34/>.

7. Gerardo Acosta, David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero. *Local dendrites with unique hyperspace  $C(X)$* , Topology and its Applications V 157 (2010) 2069-2085. ISSN: 0166–8641. Amsterdam, Netherlans. [https://www.semanticscholar.org/paper/Local-dendrites-with-unique-hyperspace-C\(X\)-Acosta-Herrera-Carrasco/794b96a8f1adce9bc3015e71a4a07c9bb4bde147](https://www.semanticscholar.org/paper/Local-dendrites-with-unique-hyperspace-C(X)-Acosta-Herrera-Carrasco/794b96a8f1adce9bc3015e71a4a07c9bb4bde147).

8. David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero, *Local dendrites with unique n-fold hyperspace*, Topology and its Applications, 158 (2011) 244–251. ISSN: 0166-8641. Publiher: Elsevier Science BV, PO BOX 211, AE Amsterdam, Netherlans. DOI: [https://scholar.google.com.mx/scholar?q=10.1016/j.topol.2010.11.004&hl=es&as\\_sdt=0&as\\_vis=1&oi=scholart](https://scholar.google.com.mx/scholar?q=10.1016/j.topol.2010.11.004&hl=es&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart).

9. David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero, Francisco Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*. Publisher: Canadian Center of Science and Education. Subject: Science – Mathematics. Journal of Mathematics Research ISSN: 19169795, E-ISSN: 19169809; Vol. 4, No. 4; (2012) 1–9. Doi: 10.5539/jmr.v4n4p1, URL: <http://www.ccsenet.org/journal/index.php/jmr/article/viewFile/18671/12383>

10. David Herrera-Carrasco, Alejandro Illanes, Fernando Macías-Romero, Francisco Vázquez Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace  $HS_n(X)$* , Topology Proceedings volumen 44 (2014) del 75–95 ISSN: 0146-4124. <http://topology.nipissingu.ca/tp/reprints/v44/tp44007.pdf>

11. Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera-Carrasco, María de Jesús López, Fernando Macías-Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, Topology and its Applications ISSN: 0166-8641, 191 (2015) 16–27. Date 8/15/2018 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864115001704>.

12. David Herrera-Carrasco, María de Jesús López, Fernando Macías-Romero, *Framed continua have unique  $n$ -fold hyperspace suspension*, Topology and Its Applications. ISSN: 0166-8641, 196 (2015) 652–667. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864115002047>. 12 noviembre de 2015. PUI: 610551051.

13. David Herrera-Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, Topology and its Applications (ISSN: 0166-8641), 209 (2016) 1–13. País de publicación: Países Bajos. Tipo de revista: Revista indexada. Fecha de publicación: 26 DE MAYO DE 2016. Número: 1. Padrón de Revistas del CONACyT. índice: 0.297. <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2016.05.013>.

14. J. G. Ahuatzí-Reyes, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Dendrites which are determined by its positive Whitney levels*, Topology and Its Applications ISSN: 0166-8641, volumen 250 (2018) 1–26. Publicado: 11-10-2018. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.10.002>.

15. David Herrera-Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique  $n$ -fold hyperspace suspension*. Houston Journal of Mathematics. Volume 44, Number 4, 2018, Pages 1335–1365 Editorial: University of Houston. ISSN 0362-1588. Publicado: 11-11-2018.

16. Vianey Córdova-Salazar, David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-

Romero, Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product, *Topol. Appl.* 268 (2019) 106917, 11 pp. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.106917>. Publicado: 16-10-2019.

17. Germán Montero-Rodríguez, David Herrera-Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías-Romero, *Finite graphs have unique  $n$ -fold symmetric product suspension*. Por aparecer en *Houston Journal*.

18. Fernando Macías-Romero, Antonio de Jesús Libreros-López, David Herrera-Carrasco, *On the uniqueness of  $n$ -fold pseudo-hyperspace suspension for locally connected continua*. Por aparecer en *Topology and Its Applications*.

19. Gerardo Hernández-Valdez, David Herrera-Carrasco, María de Jesús López Toriz, Fernando Macías-Romero, *The hyperspaces  $HS_m^n(X)$  of a continuum  $X$* . Manuscrito.

## 11 Artículo arbitrados

1. Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Gráficas Finitas, Acta Simposio Matemática y Educación Matemática, Volumen 2 No. 2, ISSN: 2346-3724, págs. 10–13. (2015).

2. Fernando Macías-Romero, Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, Investigaciones sobre dendritas e hiperespacios de continuos, Acta Simposio Matemática y Educación Matemática, Volumen 2, No. 2, ISSN: 2346-3724, págs. 14–16, (2015).

## 12 Publicación de 59 artículos en extenso

1. Fernando Macías Romero, *De la Impotencia a la Seguridad. Los irracionales*, Memorias del Primer Congreso Regional de Enseñanza y Divulgación de la Ciencia y Técnica realizado en la BUAP del 21–25 de noviembre de 2005, págs. 1–6.

2. Fernando Macías Romero y Azucena Tochimani Tiro, Propiedades Topológicas en  $\mathbb{R}^n$ , Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores I, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, junio de 2006.

3. Fernando Macías Romero y Dolores Columba Pérez Flores, *Propiedades Topológicas de los Hiperespacios  $C_n(X)$* , Memorias en Extenso del Programa

Jóvenes Investigadores II, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, junio de 2007.

4. Fernando Macías Romero y Yaziel Pacheco Juárez, *Clasificación de continuos por medio de Propiedades Topológicas*, Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores III, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, junio de 2008.

5. Silvia Varinia Flores Guarneros y Fernando Macías Romero, *Propiedades Topológicas del Conjunto de Cantor*, Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus Manos VIII, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, julio de 2008.

6. Fernando Macías Romero y Rafael Alejandro Nava Manzo, *La Topología en el Espacio Euclidiano*, Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores IV, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, págs. 1–8, mayo de 2009.

7. Fernando Macías Romero y Miriam Xicohtencatl Xicohtencatl, *Teoría de Construcción de Continuos*, Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores IV, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, págs. 1–5, 31 de mayo de 2009.

8. Fernando Macías Romero y Rafael Alejandro Nava Manzo, *El Teorema Fundamental del Álgebra*, Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus Manos IX, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, págs. 1–7, julio de 2009.

9. Viridiana Galicia Hernández y Fernando Macías Romero, *Experimentos en Topología*, Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus Manos IX, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, págs. 1–8, julio de 2009.

10. Fernando Macías Romero y Anahy Maldonado García, *Clases de Subcontinuos de un Producto Topológico*, Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño 2009, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, págs. 1-8, diciembre de 2009.

11. Fernando Macías Romero y Jorge Luis Pérez Cordero, *Sucesiones de Funciones*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño 2009, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, págs. 1-7, diciembre de 2009.

12. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *A Condition to Decide when the Members of a Class of Continua are C-determined*, Memo-

rias 2009 GSNM de las Grandes Semana Nacionales de la Matemática, FCFM, BUAP, 11 de diciembre de 2009, págs. 207-216. Este trabajo se encuentra en la página que sigue. <http://www.fcfm.buap.mx/eventos/sm/7gsnm/archivos/memorias2009GSNM.pdf>.

13. María del Rocío Macías Prado y Fernando Macías Romero, *El teorema de Bolzano-Weierstrass*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores V, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, mayo de 2010.

14. Fernando Macías Romero y Faustino Agustín Romano Velázquez, *Teorema de unión para singularidades homogénea*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores V, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la BUAP, 22 de mayo de 2010.

15. María del Rocío Macías Prado y Fernando Macías Romero, *La propiedad de conexidad en los espacios euclidianos*, Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus manos X, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, 9 de julio de 2010.

16. Vianey Córdova Salazar y Fernando Macías Romero, *La métrica de Hausdorff y sus propiedades*. Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus manos X, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, 9 de julio de 2010.

17. Fernando Macías Romero y Rafael Alejandro Nava Manzo, *Espacios topológicos uncoherentes*. Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus manos X, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, del 31 de mayo al 9 de julio de 2010.

18. María del Rocío Macías Prado y Fernando Macías Romero, *Bestiario de Continuos*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño 2010, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, 3 de diciembre de 2010.

19. Fernando Macías Romero y Faustino Agustín Romano Velázquez, *Singularidades de Hipersuperficies complejas*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño 2010, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, 3 de diciembre de 2010.

20. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Francisco Vázquez Juárez, *Dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado*, 5<sup>a</sup> Gran Semana Nacional de la Matemática 5GSNM, Memorias, 2010, Primera Edición 2010, ISBN: 978-607-487-133-3. Editore: Juan Angoa Amador, Fernando Macías Romero, Jacobo Oliveros Oliveros. <https://www.fcfm.buap.mx/cima/>

public/docs/publicaciones/Memorias5GSNM2010.pdf. págs. 279-290.

21. María del Rocío Macías Prado y Fernando Macías Romero, *Continuos universales para cierta clase de continuos*, Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores VI, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, primavera de 2011.

22. María Cristina Cid Zepeda y Fernando Macías Romero, *La propiedad del punto fijo y sus aplicaciones*, Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores VI, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, primavera de 2011.

23. Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, *Conjuntos Abiertos*, Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores VI, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, primavera de 2011.

24. María del Rocío Macías Prado y Fernando Macías Romero, *El hiperespacio de los subcontinuos de un continuo*, Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus manos XI, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, verano de 2011.

25. Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, *La Topología de Vietoris*, Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus manos XI, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, verano de 2011.

26. Fernando Macías Romero y Rafael Alejandro Nava Manzo, *Espacios topológicos compactos*, Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus manos XI, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, verano de 2011.

27. José Manuel Cuautitla Moreno y Fernando Macías Romero, *La división inexacta I*, Memorias en Extenso del Programa Verano de Talentos IX, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, verano de 2011.

28. Karen Clemente Robles y Fernando Macías Romero, *La división inexacta II*, Memorias en Extenso del Programa Verano de Talentos IX, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, verano de 2011.

29. María del Rocío Macías Prado y Fernando Macías Romero, *El  $n$ -ésimo Hiperespacio de los Subcontinuos de un Continuo*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño 2011, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

30. Fernando Macías Romero y Blanca Xóchilt Muñoz Vargas, *No hay quinto Malo, Escuela y Secuela de Euclides*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño 2011, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

31. Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, *El cubo de Hilbert*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño 2011, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

32. María del Rocío Macías Prado y Fernando Macías Romero, *El  $n$ -ésimo producto simétrico de un continuo*. Memorias en extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera 2012, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

33. Fernando Macías Romero y Blanca Xóchilt Muñoz Vargas, *Complejidad, cortaduras y el conjunto de Cantor*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera 2012, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

34. Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, *Teoremas de Extensión*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera 2012, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

35. María del Rocío Macías Prado y Fernando Macías Romero, *Espacios métricos completos*. Programa La Ciencia en tus Manos XII, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, 2012.

36. Daniela Cortés Rodríguez y Fernando Macías Romero, *El teorema de Heine-Borel*. Programa La Ciencia en tus Manos XII, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, 2012.

37. Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, *Topología elemental del plano*. Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus Manos XII, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, 2012.

38. Fernando Macías Romero, y Abel Vega Pardo, *Álgebra de Números Naturales*. Memorias en Extenso del Programa Verano de Talentos X, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, verano de 2012.

39. Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco. Memorias en extenso del XIII Evento Internacional MATECOMPU 2012, Nov. 2012, Título del artículo: *Teoría de los continuos en México* ISBN 978-959-18-0775-5

Tercer autor: Estudiante de doctorado: Luis Alberto Guerrero Méndez con número de matrícula: 212570813

40. David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero. Memorias en extenso del XIII Evento Internacional MATECOMPU 2012, Nov. 2012, Título del artículo: *Continuos indescomponibles*. ISBN 978-959-18-0775-5 David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero. Tercer autor: Estudiante de doctorado: Luis Alberto Guerrero Méndez con número de matrícula: 212570813. ISBN 978-959-18-0775-5

41. José Luis León Medina y Fernando Macías Romero, *Propiedades topológicas de la botella de Klein*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño IV (2012), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

42. María del Rocío Macías Prado y Fernando Macías Romero, *Aplicaciones del Teorema del Punto Fijo*. Programa Jóvenes Investigadores Otoño IV (2012), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP, 2012.

43. Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, *Teoría elemental de dimensión*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño IV (2012), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

44. José Luis León Medina y Fernando Macías Romero, *La topología cociente y sus aplicaciones a la teoría de los continuos*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera VIII (2013), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

45. Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, *Teoría elemental de dimensión 2*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera VIII (2013), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

46. Daniela Cortés Rodríguez y Fernando Macías Romero, *Compacidad y conexidad en  $\mathbb{R}^n$* . Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus Manos XIII (2013), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

47. Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, *El hiperespacio  $2^X$  y espacios de dimensión infinita*. Memorias en Extenso del Programa La Ciencia en tus Manos XIII (2013), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

48. Fernando Macías Romero, y Luis Felipe Martínez Hernández, *Para-*

*dojas*. Memorias en Extenso del Programa Verano de Talentos XI (2013), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

49. Fernando Macías Romero y Arturo Sánchez González, *Teoría de Retractos*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño V (2013), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

50. Daniela Cortés Rodríguez y Fernando Macías Romero. *Introducción a la Teoría de Retractos en  $\mathbb{R}^n$* . Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño V (2013), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

51. Daniela Cortés Rodríguez y Fernando Macías Romero. *El margen de los compactos*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera IX (2014), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

52. Karen Clemente Rodríguez y Fernando Macías Romero. *La quinta operación*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera IX (2014), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

53. Fernando Macías Romero e Irma Elibeth Rugerio López. *Puntos de acumulación*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Otoño VI (2014), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

54. Karen Clemente Rodríguez y Fernando Macías Romero. *Conexidad en espacios euclidianos*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera X (2015), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

55. Fernando Macías Romero y Erick Salgado Matias *Espacios Métricos Compactos y Conexos*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera X (2015), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

56. Miguel Ángel López de la Cruz y Fernando Macías Romero, *La conexidad en espacios métricos*. Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores Primavera X (2015), organizado por la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP.

57. Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz, German Montero Rodriguez, *Las gráficas finitas tienen  $n$ -ésimo*

*producto simétrico suspensión único*, Proceedings of Seventh International Conference on Mathematics and its Applications, 2021. <https://www.fcfm.buap.mx/cima/public/docs/publicaciones/Memorias7cima.pdf>

58. Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, Gerardo Hernández Valdez, *Generalizando el hiperespacio  $C(p, X)$* . Proceedings of Seventh International Conference on Mathematics and its Applications, 2021.

59. Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, Felipe de Jesús Aguilar Romero. Proceedings of Seventh International Conference on Mathematics and its Applications *Continuidad de la función  $f_w$  en el intervalo  $[0, 1]$* , 2021.

## 13 Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración de algunas personas. Los autores agradecen a los árbitros el tiempo dedicado a la minuciosa revisión de este trabajo. Las sugerencias dieron como resultado la calidad de este material.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP.  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx  
ochiris@gmail.com



---

# Álgebra

---



## Capítulo 2

# La conjetura de Quillen a través del anillo de Burnside

Itzel Rosas Martínez, David Villa Hernández, César  
Cejudo Castilla  
FCFM, BUAP

### Resumen

En este trabajo mostramos una aplicación del anillo de Burnside de un grupo finito  $G$  en el estudio de invariantes asociados a  $G$ -conjuntos con estructura, tales como los  $G$ -copos. Además, con ayuda de esta teoría, se demuestra una versión algebraica débil de la conjetura de Quillen.

## 1 Introducción

A finales del siglo XIX, William Burnside sentó las bases de lo que actualmente se conoce como anillo de Burnside, pero fue hasta 1967 cuando Louis Solomon (véase [10]) le dio estructura de anillo.

El anillo de Burnside  $B(G)$  para un grupo finito  $G$  es uno de los anillos de representación fundamentales de  $G$ . Es, en muchos sentidos, el objeto universal a considerar cuando se estudia la categoría de  $G$ -conjuntos finitos y puede verse como el análogo del anillo de los enteros  $\mathbb{Z}$  para esta categoría.

El anillo de Burnside, además, es el objeto fundamental para estudiar los invariantes asociados a  $G$ -conjuntos con estructura, tales como los  $G$ -copos o, más generalmente, los  $G$ -conjuntos simpliciales.

Por otra parte, alrededor de 1978, Daniel G. Quillen en su artículo *Homotopy properties of the poset of nontrivial  $p$ -subgroups of a group*, conjeturó que si  $S_p(G)$  denota al copo de  $p$ -subgrupos no triviales de un grupo finito  $G$  y  $|S_p(G)|$  a su realización geométrica asociada, entonces existe un  $p$ -subgrupo de  $G$  normal no trivial si y sólo si  $|S_p(G)|$  es contraíble topológicamente.

Es claro ([1], p. 225) que la existencia de un  $p$ -subgrupo de  $G$  normal no trivial implica que  $S_p(G)$  es contraíble. El recíproco es una conjetura.

Cabe mencionar que para una mayor comprensión de este trabajo se recomienda tener conocimientos básicos de la teoría de grupos y anillos.

## 2 El anillo de Burnside

En este trabajo consideraremos anillos conmutativos con unidad.

**Definición 2.1** (cf. [4], Definición 2.1). 1. Sea  $G$  un grupo,  $H \leq G$  un subgrupo y  $X$  un  $G$ -conjunto finito. Definimos y denotamos al conjunto de *puntos fijos de  $X$  bajo la acción de  $H$*  como

$$X^H = \{x \in X \mid hx = x \forall h \in H\}.$$

2. Definimos la *marca de  $H$  en  $X$*  como la cardinalidad de  $X^H$  y la denotamos por  $\varphi_H(X)$ .

**Teorema 2.2** (cf. [4], Teorema 2.2). Sean  $G$  un grupo,  $H, K \leq G$  subgrupos y  $X, Y$   $G$ -conjuntos finitos. Entonces se cumplen:

1.  $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$ ,
2.  $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X) \varphi_H(Y)$ ,
3. Si  $H$  y  $K$  son conjugados, entonces para todo  $G$ -conjunto finito  $X$  se satisface que  $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$ .

**Teorema 2.3** (cf. [4], Lema 2.6). Sean  $H, K \leq G$  subgrupos. Entonces

$$\varphi_H(G/K) = \frac{|N_G(K)|}{|K|} \alpha(H, K) = \frac{|N_G(H)|}{|K|} \beta(H, K)$$

donde

$$\alpha(H, K) = |\{E \leq G \mid E \text{ y } K \text{ son conjugados y } H \subseteq E\}|$$

y

$$\beta(H, K) = |\{E \leq G \mid E \text{ y } H \text{ son conjugados y } E \subseteq K\}|.$$

**Definición 2.4** (cf. [4], p. 43). Dado  $G$  un grupo finito, sea  $\mathbb{A}$  la clase de todos los  $G$ -conjuntos finitos, es decir,

$$\mathbb{A} = \{X \mid X \text{ es un } G\text{-conjunto finito}\}.$$

**Observación 2.5.** En  $\mathbb{A}$  hay una relación de equivalencia  $\sim$ , a saber, dados  $X, Y \in \mathbb{A}$  se tiene que  $X \sim Y$  si y sólo si  $X \cong_G Y$ , es decir,  $X$  y  $Y$  son isomorfos como  $G$ -conjuntos.

**Definición 2.6.** Denotaremos por  $[X]$  a la clase de equivalencia de  $X \in \mathbb{A}$  y la llamaremos la *clase de  $G$ -isomorfismo* de  $X$ . Así, definimos

$$B^+(G) = \{[X] \mid X \in \mathbb{A}\}.$$

**Teorema 2.7** (cf. [4], Teorema 3.3). *Sea  $G$  un grupo finito. Entonces  $(B^+(G), +, \cdot)$  es un semianillo (véase [7], p. 1) conmutativo con unidad, con las operaciones de suma y producto definidas de la siguiente forma:*

- (Suma)  $[X] + [Y] = [X \sqcup Y]$ ,
- (Producto)  $[X] [Y] = [X \times Y]$ .

**Teorema 2.8** (Ley de cancelación, cf. [4], Teorema 3.5). *Sean  $[X], [Y], [Z] \in B^+(G)$  tales que  $[X] + [Y] = [Z] + [Y]$ . Entonces  $[X] = [Z]$ .*

**Definición 2.9.** El *anillo de Burnside*  $B(G)$  es el anillo de Grothendieck de  $B^+(G)$ , es decir, su construcción es análoga a la de  $\mathbb{Z}$  a partir de  $\mathbb{N}$ .

**Teorema 2.10** (cf. [2], p. 746). *Dado un grupo finito  $G$ , se tiene que  $B(G)$  es libre como grupo abeliano, generado por los elementos de la forma  $G/H$ , donde  $H$  recorre los elementos de  $[S_G]$ , el cual denota un conjunto de clases de conjugación de los subgrupos de  $G$ .*

*Demostración.* Sean  $G$  un grupo finito y  $X$  un  $G$ -conjunto finito. Como  $X$  es finito, existe un conjunto de índices  $I$  tal que  $X \cong_G \bigsqcup_{i \in I} G/H_i$ , donde  $H_i \leq G$  para cada  $i \in I$  (véase [4], Teorema 1.20). Así,

$$[X] = \left[ \bigsqcup_{i \in I} G/H_i \right] = \sum_{i \in I} [G/H_i] \in B^+(G).$$

Ahora, note que para cualesquiera  $H_i, H_j \leq G$ ,  $i \neq j$ ,  $G/H_i \cong_G G/H_j$  si y sólo si  $H_i$  y  $H_j$  son conjugados (véase [4], Lema 1.24), por lo que podemos tener repeticiones de algunos  $[G/H_i]$ . Denotaremos con  $a_{H_i} \in \mathbb{N}$  el número de veces que se repite el elemento  $[G/H_i]$ . Con esto, si  $[X] \in B^+(G)$ , tenemos que

$$[X] = \sum_{H \in [S_G]} a_H [G/H]$$

con  $a_H \in \mathbb{N}$ . De ahí que si  $[X] \in B(G)$ , entonces

$$[X] = \sum_{H \in [S_G]} a_H [G/H],$$

con  $a_H \in \mathbb{Z}$ . Veamos que  $\{[G/H] \mid H \in [S_G]\}$  es base.

Supongamos que  $\sum_{H \in [S_G]} a_H [G/H] = 0$  y que no todos los  $a_H \in \mathbb{Z}$  son cero.

Entonces tenemos la siguiente igualdad:

$$\sum_{a_K > 0} a_K [G/K] = \sum_{a_L < 0} (-a_L) [G/L].$$

Sean  $[Y] = \sum_{a_K > 0} a_K [G/K]$  y  $[Z] = \sum_{a_L < 0} (-a_L) [G/L]$ . Observemos que si

$[Y] = [\emptyset]$ , alguno de los coeficientes, digamos  $a_{K_0}$ , sería distinto de cero, lo que significaría que la órbita  $G/K_0$  de  $[\emptyset]$  es no vacía, lo cual no es posible. Así, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $[Y] \neq [\emptyset] \neq [Z]$ .

Si  $K_0 \in [S_G]$  es tal que  $a_{K_0} > 0$ , entonces existe  $\mathcal{O}_G(y_0) \subseteq Y$  que cumple  $\mathcal{O}_G(y_0) \cong_G G/K_0$ . Por otro lado,  $[Y] = [Z]$ , por lo que  $\mathcal{O}_G(y_0) \cong_G \mathcal{O}_G(z_0)$  para algún  $z_0 \in Z$ , que a su vez  $\mathcal{O}_G(z_0) \cong_G G/L_0$ , para algún  $L_0 \in [S_G]$  tal que  $a_{L_0} < 0$ .

De ahí que  $G/K_0 \cong_G G/L_0$ . Así,  $K_0$  y  $L_0$  son conjugados, lo cual es una contradicción, pues  $K_0 \neq L_0$  en  $[S_G]$ . Así,  $a_H = 0$  para todo  $H \in [S_G]$ . Por lo tanto,

$$B(G) = \bigoplus_{H \in [S_G]} \mathbb{Z} [G/H]. \quad \square$$

**Observación 2.11** (cf. [4], Observación 3.11). Dados  $G$  un grupo finito,  $R$  un anillo conmutativo y  $f : B^+(G) \rightarrow R$  un morfismo de semianillos (véase [7], p. 105), tenemos que  $f$  se extiende de manera única a  $B(G)$ , esto es, existe

$F : B(G) \longrightarrow R$  morfismo de anillos (es decir, abren sumas y productos y mandan la unidad en la unidad) tal que  $F|_{B^+(G)} = f$ . Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} B^+(G) & \xhookrightarrow{\iota} & B(G) \\ f \downarrow & \swarrow \exists! F \text{ de anillos} & \\ R & & \end{array}$$

Además,  $F$  está dada por  $F([X] - [Y]) = f([X]) - f([Y])$ .

A partir de aquí, abusando de la notación usaremos

$$X \in B^+(G) = \bigoplus_{H \in [S_G]} \mathbb{N}(G/H) \quad \text{y} \quad [X] \in B(G) = \bigoplus_{H \in [S_G]} \mathbb{Z}[G/H].$$

**Lema 2.12.** *Sea  $\varphi : B^+(G) \longrightarrow \mathbb{Z}^{[S_G]}$  dado por  $\varphi(X) = (\varphi_H(X))_{H \in [S_G]}$ . Entonces  $\varphi$  es un morfismo de semianillos, el cual se extiende de manera única a un morfismo inyectivo de anillos  $\tilde{\varphi} : B(G) \longrightarrow \mathbb{Z}^{[S_G]}$  (véase [2], p. 747) teniendo que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} B^+(G) & \xhookrightarrow{\iota} & B(G) \\ \varphi \downarrow & \swarrow \exists! \tilde{\varphi} \text{ de anillos} & \\ \mathbb{Z}^{[S_G]} & & \end{array}$$

*Demostración.* Notemos que  $\mathbb{Z}^{[S_G]}$  es un anillo conmutativo con unidad, con la suma y el producto usuales.

Sea  $X \in B^+(G)$ . Por propiedades de la marca,  $(\varphi_H(X))_{H \in [S_G]}$  no depende del representante de  $H$ .

Sea  $Y \in B^+(G)$  tal que  $X = Y$ . Entonces existe  $f : X \longrightarrow Y$  isomorfismo de  $G$ -conjuntos. Sea  $H \in [S_G]$  y  $x \in X^H$ . Entonces  $h \cdot x = x$  para todo  $h \in H$ . Luego,  $hf(x) = f(hx) = f(x)$ , es decir,  $hf(x) = f(x)$  para toda  $h \in H$ . Esto pasa si y sólo si  $f(x) \in Y^H$ . Luego,  $f(X^H) \subseteq Y^H$ .

Ahora, como  $f$  es isomorfismo de  $G$ -conjuntos,  $f^{-1}$  también lo es. Sea  $H \in [S_G]$  y  $y \in Y^H$ . Entonces  $h \cdot y = y$  para todo  $h \in H$ . Luego,  $hf^{-1}(y) = f^{-1}(hy) = f^{-1}(y)$ , y esto pasa si y sólo si  $f^{-1}(y) \in X^H$ . De ahí que  $f^{-1}(Y^H) \subseteq X^H$ . Así,  $f(X^H) = Y^H$ .

Entonces  $f|_{X^H} : X^H \longrightarrow Y^H$  es biyección, así que  $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$ . Esto se cumple para cada  $H \in [S_G]$ , de modo que  $\varphi(X) = (\varphi_H(X))_{H \in [S_G]} = (\varphi_H(Y))_{H \in [S_G]} = \varphi(Y)$ . Por lo tanto,  $\varphi$  está bien definida.

Recordemos que  $1_{B+(G)} = G/G$  y  $1_{\mathbb{Z}^{[S_G]}} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{|[S_G]| \text{ veces}}$ .

Ahora, para cada  $H \leq G$  subgrupo, tenemos que  $H \preceq G$ , con lo que  $\varphi_H(G/G) \neq 0$ , de modo que  $\varphi_H(G/G) = 1$ . Por tanto,

$$\varphi(G/G) = (\varphi_H(G/G))_{H \in [S_G]} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{|[S_G]| \text{ veces}}.$$

Por propiedades de la marca, se puede ver que  $\varphi$  preserva sumas y productos. Por lo tanto,  $\varphi$  es morfismo de semianillos.

Por la Observación 2.11, podemos extender  $\varphi$  de manera única a un morfismo de anillos  $\tilde{\varphi} : B(G) \rightarrow \mathbb{Z}^{[S_G]}$  tal que  $\tilde{\varphi}|_{B+(G)} = \varphi$  y tal que  $\tilde{\varphi}([X]) = \varphi(X)$ .

Veamos que  $\tilde{\varphi}$  es inyectivo.

Sea  $a \in B(G) \setminus \{\emptyset\}$ . Entonces  $a = \sum_{H \in [S_G]} a_H(G/H)$  con  $a_H \in \mathbb{Z}$ .

Note que en  $[S_G]$  hay una relación de orden parcial: dados  $H, K \in [S_G]$ ,  $H \preceq K$  si y sólo si  $H$  es subconjugado (véase [4], Definición 1.25) de  $K$ . Como  $G$  es finito, toda cadena estrictamente creciente  $K_1 \prec K_2 \prec \dots$  de elementos en  $[S_G]$  se estaciona, por lo que elegimos  $K' \in [S_G]$  máximo respecto a este orden parcial tal que  $a_{K'} \neq 0$ .

Entonces  $a = \sum_{H \in [S_G]} b_H(G/H) - \sum_{H \in [S_G]} c_H(G/H)$ , donde  $b_H = a_H$  si  $a_H > 0$  y  $c_H = -a_H$  si  $a_H < 0$ .

Ahora, como  $\tilde{\varphi}$  extiende a  $\varphi$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(a) &= \tilde{\varphi} \left( \sum_{H \in [S_G]} a_H(G/H) \right) \\ &= \tilde{\varphi} \left( \sum_{H \in [S_G]} b_H(G/H) - \sum_{H \in [S_G]} c_H(G/H) \right) \\ &= \sum_{H \in [S_G]} b_H \tilde{\varphi}(G/H) - \sum_{H \in [S_G]} c_H \tilde{\varphi}(G/H) \\ &= \sum_{H \in [S_G]} b_H \varphi(G/H) - \sum_{H \in [S_G]} c_H \varphi(G/H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{H \in [S_G]} b_H(\varphi_K(G/H))_{K \in [S_G]} - \sum_{H \in [S_G]} c_H(\varphi_K(G/H))_{K \in [S_G]} \\
 &= \sum_{H \in [S_G]} a_H(\varphi_K(G/H))_{K \in [S_G]}
 \end{aligned}$$

Para que  $\tilde{\varphi}$  sea inyectiva basta ver que una de las entradas de  $\tilde{\varphi}(a)$  no es cero. Para esto, sabemos que  $\varphi_{K'}(G/H) \neq 0$  si y sólo si  $K' \preceq H$ . Como elegimos  $K'$  máximo con respecto a este orden parcial tal que  $a_{K'} \neq 0$ , entonces la  $K'$ -ésima entrada de  $\tilde{\varphi}(a)$  es  $\sum_{H \in [S_G]} a_H \varphi_{K'}(G/H) = a_{K'} |N_G(K')/K'| \neq 0$ .

Así,  $\tilde{\varphi}(a) \neq 0$ . Por lo tanto,  $\tilde{\varphi}$  es morfismo inyectivo de anillos.

Ahora, como  $\tilde{\varphi}|_{B^+(G)} = \varphi$  y  $\tilde{\varphi}$  es inyectivo, entonces  $\varphi$  también lo es. Así,  $\varphi$  es morfismo inyectivo de semianillos. □

**Corolario 2.13** (Teorema de Burnside, cf. [2], Teorema 2.3.2). *Sean  $G$  un grupo finito y  $[X], [Y] \in B(G)$ . Entonces  $[X] = [Y]$  si y sólo si  $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$  para todo  $H \in [S_G]$ .*

*Demostración.* Se sigue de la buena definición y la inyectividad de  $\varphi$  del Lema 2.12. □

### 3 Homología de copos finitos

**Definición 3.1.** Un *orden parcial* sobre un conjunto no vacío  $\mathcal{L}$  es una relación binaria  $\leq$  en  $\mathcal{L}$  que satisface para toda  $a, b, c \in \mathcal{L}$  las siguientes condiciones:

1. (Reflexividad)  $a \leq a$ ,
2. (Antisimetría) Si  $a \leq b$  y  $b \leq a$ , entonces  $a = b$ ,
3. (Transitividad) Si  $a \leq b$  y  $b \leq c$ , entonces  $a \leq c$ .

El par  $(\mathcal{L}, \leq)$  es llamado *conjunto parcialmente ordenado* o *copo*.

**Definición 3.2.** Sea  $(\mathcal{L}, \leq)$  un copo y  $P$  un subconjunto de  $\mathcal{L}$ .

1. Un elemento  $y_0 \in P$  es *elemento mayor* de  $P$  si  $y \leq y_0$  para todo  $y \in P$ .

2. Diremos que  $y_0 \in P$  es *elemento menor* de  $P$  si  $y_0 \leq y$  para todo  $y \in P$ .

**Definición 3.3.** Sean  $(A, \leq)$ ,  $(B, \leq')$  copos. Sea  $f : A \rightarrow B$  una función. Diremos que  $f$  es *morfismo de orden* si para cualesquiera  $a_1, a_2 \in A$  tales que  $a_1 \leq a_2$  se cumple que  $f(a_1) \leq' f(a_2)$ .

Diremos que  $f$  es un *isomorfismo de orden* si  $f$  es morfismo de orden biyectivo y  $f^{-1}$  es morfismo de orden.

**Definición 3.4.** Sea  $(Y, \leq)$  un copo finito. Definimos el *conjunto de cadenas* de elementos de  $Y$  de longitud  $n + 1$  de la siguiente forma:

$$Sd_n(Y) = \{\{y_0, \dots, y_n\} \mid y_i \in Y, y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n\}$$

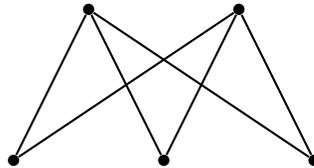
De igual forma, definimos la *característica de Euler–Poincaré* de  $Y$ , denotada por  $\chi(Y)$ , como

$$\chi(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |Sd_n(Y)|.$$

Como el copo  $Y$  es finito, a partir de cierto  $N \in \mathbb{N}$  tendremos que para cualquier  $n \geq N$ ,  $Sd_n(Y)$  es vacío por lo que la suma de la definición anterior es finita.

**Ejemplo 3.5.** 1. Si  $Y = \{\bullet\}$ , entonces  $\chi(Y) = 1$ .

2. Si  $Y$  es el siguiente copo:



entonces  $\chi(Y) = 5 - 6 = -1$ .

Si  $(X, \leq_X)$ ,  $(Y, \leq_Y)$  son dos copos y  $f, g : (X, \leq_X) \rightarrow (Y, \leq_Y)$  son morfismos de orden, denotaremos por  $f \leq g$  si  $f(x) \leq_Y g(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Definición 3.6.** Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son morfismos de orden, decimos que  $f$  y  $g$  son *comparables* si  $f \leq g$  o  $g \leq f$ .

**Definición 3.7** (cf. [9], p. 815). Sea  $R$  un anillo. Un *complejo de cadena*  $(C_*, \partial_*)$  es una sucesión de la forma

$$C_* = \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde cada  $C_n$  es un  $R$ -módulo izquierdo; los  $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$  son morfismos de  $R$ -módulos, llamados *diferenciales* y son tales que  $Im \partial_{n+1} \subseteq Ker \partial_n$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

En lo sucesivo consideraremos  $X$  un copo finito y  $R = \mathbb{Z}$ . Entonces

$$C_n(X) = \bigoplus_{\{x_0, \dots, x_n\} \in Sd_n(X)} \mathbb{Z} (x_0, \dots, x_n)$$

es el  $\mathbb{Z}$ -módulo libre con base los elementos de  $Sd_n(X)$ .

El morfismo  $d_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$  está dado por

$$d_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n)$$

donde  $(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n)$  denota la cadena  $(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Extendiendo linealmente,  $d_n$  es morfismo de grupos abelianos para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Lema 3.8.** *Sea  $(X, \leq)$  un copo finito. Entonces  $d_n \circ d_{n+1} = 0$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Sean  $(X, \leq)$  un copo y  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $n \leq 0$  tenemos que  $d_n \circ d_{n+1} = 0$  pues al menos  $d_n = 0$ .

Supongamos que  $n \geq 1$ . Sea  $(x_0, \dots, x_{n+1}) \in C_{n+1}(X)$  un elemento generador. Entonces

$$\begin{aligned} (d_n \circ d_{n+1})(x_0, \dots, x_{n+1}) &= d_n \left( \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{j-1} (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \\
&+ \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j-1} (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

Veamos que para cada término de la primera suma doble hay un correspondiente término en la segunda suma doble con signo contrario.

Sea  $(-1)^{i+j} (x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1})$  un término de la primera suma doble y sea  $(-1)^{k+l-1} (x_0, \dots, \widehat{x}_k, \dots, \widehat{x}_l, \dots, x_{n+1})$  un término de la segunda suma doble.

Sean  $j = k$  e  $i = l$ . Notemos que los signos de cada término son  $(-1)^{l+k}$  y  $(-1)^{l+k-1}$  respectivamente, por lo que tienen signos distintos. En consecuencia, los términos se eliminan.

Por lo tanto,  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ . □

**Observación 3.9.** Sea  $(X, \leq)$  un copo finito y sea

$$\dots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \dots$$

una sucesión. Del Lema 3.8 podemos notar que  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $d_n \circ d_{n+1} = 0$  si y sólo si  $Im\ d_{n+1} \subseteq Ker\ d_n$ .

De esta observación se desprende la siguiente definición:

**Definición 3.10** (cf. [9], p. 818). Sea  $(X, \leq)$  un copo finito. Definimos y denotamos para toda  $n \in \mathbb{Z}$  la  $n$ -ésima homología de  $X$  como

$$H_n(X) = \frac{Ker\ d_n}{Im\ d_{n+1}}.$$

**Ejemplo 3.11.** Sea  $X = \{\bullet\}$ . Consideremos el siguiente complejo para  $X$ :

$$\dots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{d_0} C_{-1}(X) = 0 \longrightarrow \dots$$

Notemos que, como  $X = \{\bullet\}$ , para cualquier  $n \geq 1$  se tiene que  $Sd_n(X) = \emptyset$  y así  $C_n(X) = 0$ .

Luego,  $Sd_0(X) = X$ , por lo que  $C_0(X) = \mathbb{Z}(\bullet) \cong \mathbb{Z}$ .

Con estas observaciones, el complejo que consideramos para  $X$  queda de la siguiente forma:

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0 \longrightarrow \dots$$

donde  $d_1$  y  $d_0$  son los morfismos cero. Entonces

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}.$$

**Definición 3.12** (cf. [9], p. 817). Sea  $R$  un anillo. Una *aplicación de cadenas* de  $R$ -módulos izquierdos del complejo de cadenas  $(C_*, \partial_*)$  en el complejo de cadenas  $(C'_*, \partial'_*)$  es una sucesión de morfismos de  $R$ -módulos izquierdos  $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$  tal que para toda  $n \in \mathbb{Z}$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

En lo sucesivo, consideraremos  $X$  y  $Y$  dos copos finitos,  $f : X \longrightarrow Y$  un morfismo de orden  $n$  y  $R = \mathbb{Z}$ . Entonces  $f_n = C_n(f) : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$  está definida como sigue:

$$C_n(f)(x_0, \dots, x_n) = \begin{cases} (f(x_0), \dots, f(x_n)) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i) \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{si } f(x_{i-1}) = f(x_i) \ \text{p. a. } i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Al extender linealmente a  $C_n(f)$ , éste es un morfismo de grupos abelianos para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Lema 3.13.** Sean  $X, Y, Z$  copos finitos. Entonces:

1. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1}(X) \\ C_n(f) \downarrow & & \downarrow C_{n-1}(f) \\ C_n(Y) & \xrightarrow{d'_n} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

es decir,  $d'_n \circ C_n(f) = C_{n-1}(f) \circ d_n$ , donde  $d_n$  y  $d'_n$  son los diferenciales correspondientes a los complejos de cadena relativos a los copos  $X$  y  $Y$  respectivamente.

2. Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $l : Y \rightarrow Z$  morfismos de orden. Para toda  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C_n(l \circ f) = C_n(l) \circ C_n(f)$ .
3. Sea  $1_X : X \rightarrow X$  el morfismo de orden identidad. Para toda  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C_n(1_X) = 1_{C_n(X)}$ .
4. Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de orden. Entonces existe

$$H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

tal que para toda  $n \in \mathbb{Z}$  se tiene que  $H_n(f)(a + \text{Im } d_{n+1}) = C_n(f)(a) + \text{Im } d'_{n+1}$ .

*Demostración.* 1. Sea  $(x_0, \dots, x_n) \in C_n(X)$  un elemento generador. Entonces

$$\begin{aligned} (C_{n-1}(f) \circ d_n)(x_0, \dots, x_n) &= C_{n-1}(f) \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i C_{n-1}(f)(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) \\ &= \begin{cases} \sum_{i=0}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, \widehat{f(x_i)}, \dots, f(x_n)) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i) \forall i \\ 0 & \text{si } f(x_{i-1}) = f(x_i) \text{ p. a. } i \end{cases} \end{aligned}$$

Por otra parte,  $(d'_n \circ C_n(f))(x_0, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} d'_n(f(x_0), \dots, f(x_n)) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i) \forall i \\ 0 & \text{si } f(x_{i-1}) = f(x_i) \text{ p. a. } i \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{i=0}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, \widehat{f(x_i)}, \dots, f(x_n)) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i) \forall i \\ 0 & \text{si } f(x_{i-1}) = f(x_i) \text{ p. a. } i \end{cases} \\ &= (C_{n-1}(f) \circ d_n)(x_0, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \text{ Sea } (x_0, \dots, x_n) \in C_n(X). \text{ Entonces } (C_n(l) \circ C_n(f))(x_0, \dots, x_n) \\
&= \begin{cases} C_n(l)(f(x_0), \dots, f(x_n)) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i) \forall i \\ C_n(l)(0) = 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (l(f(x_0)), \dots, l(f(x_n))) & \text{si } l(f(x_{i-1})) < l(f(x_i)) \forall i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
&= \begin{cases} ((l \circ f)(x_0), \dots, (l \circ f)(x_n)) & \text{si } (l \circ f)(x_{i-1}) < (l \circ f)(x_i) \forall i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
&= C_n(l \circ f)(x_0, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $C_n(l \circ f) = C_n(l) \circ C_n(f)$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}
3. \text{ Sea } (x_0, \dots, x_n) \in C_n(X). \text{ Entonces } C_n(1_X)(x_0, \dots, x_n) \\
&= \begin{cases} (1_X(x_0), \dots, 1_X(x_n)) & \text{si } 1_X(x_{i-1}) < 1_X(x_i) \forall i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
&= (x_0, \dots, x_n) \\
&= 1_{C_n(X)}(x_0, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $C_n(1_X) = 1_{C_n(X)}$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

4. Veamos que  $H_n(f)$  está bien definido para cada  $n$ .

Sean  $a + \text{Im } d_{n+1}, a' + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(X)$  tales que  $a + \text{Im } d_{n+1} = a' + \text{Im } d_{n+1}$ . Entonces  $a - a' \in \text{Im } d_{n+1}$ , es decir, existe  $b \in C_{n+1}(X)$  tal que  $a - a' = d_{n+1}(b)$ . Luego,  $C_n(f)(a - a') = C_n(f)(d_{n+1}(b)) = d'_{n+1}(C_{n+1}(f)(b)) \in \text{Im } d'_{n+1}$ . Por otro lado,  $C_n(f)(a - a') = C_n(f)(a) - C_n(f)(a')$ .

Así,  $C_n(f)(a) + \text{Im } d'_{n+1} = C_n(f)(a') + \text{Im } d'_{n+1}$ . Es decir,  $H_n(f)(a + \text{Im } d_{n+1}) = H_n(f)(a' + \text{Im } d_{n+1})$ .

□

**Observación 3.14.** Sean  $X, Y, Z$  copos finitos.

1. Sean  $f : X \longrightarrow Y$  y  $l : Y \longrightarrow Z$  morfismos de orden. Entonces  $H_n(l \circ f) = H_n(l) \circ H_n(f)$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

En efecto. Sea  $a + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(X)$ . Entonces

$$\begin{aligned} H_n(l \circ f)(a + \text{Im } d_{n+1}) &= C_n(l \circ f)(a) + \text{Im } d''_{n+1} \\ &= (C_n(l) \circ C_n(f))(a) + \text{Im } d''_{n+1} \\ &= H_n(l)(C_n(f)(a) + \text{Im } d'_{n+1}) \\ &= H_n(l)(H_n(f)(a + \text{Im } d_{n+1})) \\ &= (H_n(l) \circ H_n(f))(a + \text{Im } d_{n+1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $H_n(l \circ f) = H_n(l) \circ H_n(f)$ .

2. Sea  $1_X : X \longrightarrow X$  el morfismo identidad. Entonces  $H_n(1_X) = 1_{H_n(X)}$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

Veamos que es cierto. Sea  $a + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(X)$ . Entonces  $H_n(1_X)(a + \text{Im } d_{n+1}) = C_n(1_X)(a) + \text{Im } d_{n+1} = 1_{C_n(X)}(a) + \text{Im } d_{n+1} = a + \text{Im } d_{n+1} = 1_{H_n(X)}(a + \text{Im } d_{n+1})$ .

Por lo tanto,  $H_n(1_X) = 1_{H_n(X)}$ .

**Definición 3.15** (cf. [9], p. 820). Una aplicación de cadenas  $f : (C_*, \partial_*) \longrightarrow (C'_*, \partial'_*)$  se dice *nulhomotópica* si, para cada  $n$ , existe un morfismo de  $R$ -módulos izquierdos  $s_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$  con  $f_n = \partial_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n$ .

Además, si  $f, g : (C_*, \partial_*) \longrightarrow (C'_*, \partial'_*)$  son aplicaciones de cadenas, decimos que  $f$  es *homotópica a g* si  $f - g$  es nulhomotópica.

En este caso, sean  $X, Y$  dos copos finitos y  $f, l : X \longrightarrow Y$  morfismos de orden. Decimos que  $f$  es *homotópico a l* si para cada  $n \in \mathbb{Z}$  existe  $\delta_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$  morfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos tal que  $C_n(f) - C_n(l)$  es nulhomotópico, es decir,  $C_n(f) - C_n(l) = d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n$ . Lo denotamos por  $f \sim l$ .

**Proposición 3.16.** Sean  $f, l : X \longrightarrow Y$  morfismos de orden tales que  $f \sim l$ . Entonces  $H_n(f) = H_n(l) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ .

*Demostración.* Sea  $a + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(X)$ . Notemos que  $H_n(f)(a + \text{Im } d_{n+1}) = C_n(f)(a) + \text{Im } d'_{n+1}$  y  $H_n(l)(a + \text{Im } d_{n+1}) = C_n(l)(a) + \text{Im } d'_{n+1}$ .

Para probar que  $H_n(f)(a + \text{Im } d_{n+1}) = H_n(l)(a + \text{Im } d_{n+1})$ , tenemos que ver que  $C_n(f)(a) - C_n(l)(a) \in \text{Im } d'_{n+1}$ . Como  $f \sim l$ ,  $C_n(f)(a) - C_n(l)(a) = (d'_{n+1} \circ \delta_n)(a) + (\delta_{n-1} \circ d_n)(a) = d'_{n+1}(\delta_n(a)) + 0 = d'_{n+1}(\delta_n(a)) \in \text{Im } d'_{n+1}$ .

Por lo tanto,  $H_n(f)(a + \text{Im } d_{n+1}) = H_n(l)(a + \text{Im } d_{n+1})$  para toda  $a + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(X)$ . Así,  $H_n(f) = H_n(l)$ .  $\square$

**Definición 3.17.** Sean  $X, Y$  copos finitos. Decimos que  $X$  y  $Y$  son *homotópicos* si existen  $f : X \rightarrow Y$  y  $l : Y \rightarrow X$  morfismos de orden tales que  $l \circ f \sim 1_X$  y  $f \circ l \sim 1_Y$ . Lo denotamos por  $X \sim Y$ .

Decimos que  $X$  es *contraíble* si  $X$  es homotópico a  $\{\bullet\}$  y lo denotamos por  $X \sim \bullet$ .

**Lema 3.18.** Sean  $X, Y$  copos finitos tales que son homotópicos. Entonces para toda  $n \in \mathbb{Z}$  se cumple que  $H_n(X) \cong H_n(Y)$ .

*Demostración.* Como  $X$  y  $Y$  son homotópicos, entonces existen  $f : X \rightarrow Y$  y  $l : Y \rightarrow X$  tales que  $l \circ f \sim 1_X$  y  $f \circ l \sim 1_Y$ .

Por la Proposición 3.16 tenemos que  $H_n(l \circ f) = H_n(1_X)$ ; por la Observación 3.14,  $H_n(l \circ f) = H_n(l) \circ H_n(f)$  y  $H_n(1_X) = 1_{H_n(X)}$ . Así,  $H_n(l) \circ H_n(f) = 1_{H_n(X)}$ . Similarmente,  $H_n(f) \circ H_n(l) = 1_{H_n(Y)}$ .

Así, existen  $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  y  $H_n(l) : H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$  tales que  $H_n(l) \circ H_n(f) = 1_{H_n(X)}$  y  $H_n(f) \circ H_n(l) = 1_{H_n(Y)}$ .

Por lo tanto,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  se tiene que  $H_n(X) \cong H_n(Y)$ .  $\square$

**Corolario 3.19.** Si  $X$  es un copo finito contraíble, entonces

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}.$$

*Demostración.* Se sigue del teorema anterior y del ejemplo 3.11.  $\square$

**Teorema 3.20** (cf. [2], Lema 4.1.2). Sean  $f, l : X \rightarrow Y$  morfismos de orden que son comparables. Entonces  $f$  y  $l$  son homotópicos.

*Demostración.* Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & C_{n+1}(l) \downarrow & & C_n(l) \downarrow & & C_{n-1}(l) \downarrow & & \\ & & C_{n+1}(f) & \xleftarrow{\delta_n} & C_n(f) & \xleftarrow{\delta_{n-1}} & C_{n-1}(f) & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C_n(Y) & \xrightarrow{d'_n} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Como  $f$  y  $l$  son comparables supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $f \leq l$ .

Veamos que  $f \sim l$ , es decir, que existen  $\delta_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$  tales que  $d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n = C_n(l) - C_n(f)$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

Consideremos entonces  $\delta_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$  definida para  $n \in \mathbb{Z}$  de la siguiente forma: si para toda  $i = 0, \dots, n$  se cumple que  $f(x_0) < \dots < f(x_i) < l(x_i) < \dots < l(x_n)$ , entonces

$$\delta_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n));$$

en otro caso tenemos que

$$\delta_n(x_0, \dots, x_n) = 0.$$

Note que, al estar definida en los básicos de  $C_n(X)$ , extendiendo linealmente tenemos que  $\delta_n$  es morfismo de grupos abelianos.

Verifiquemos que  $f$  y  $l$  son homotópicos, es decir, que  $d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n = C_n(l) - C_n(f)$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $(x_0, \dots, x_n)$  un elemento generador de  $C_n(X)$ . Tenemos que

$$(C_n(l) - C_n(f))(x_0, \dots, x_n) = (l(x_0), \dots, l(x_n)) - (f(x_0), \dots, f(x_n)).$$

Ahora desarrollemos  $(d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n)(x_0, \dots, x_n)$ :

$$\begin{aligned} & (d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n)(x_0, \dots, x_n) \\ &= (d'_{n+1} \circ \delta_n)(x_0, \dots, x_n) + (\delta_{n-1} \circ d_n)(x_0, \dots, x_n) \\ &= d'_{n+1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)) \right) \\ & \quad + \delta_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) \right) \\ &= d'_{n+1} \left( (f(x_0), l(x_0), \dots, l(x_n)) + \sum_{i=1}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)) \right) \\ & \quad + \delta_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= d'_{n+1}(f(x_0), l(x_0), \dots, l(x_n)) + \sum_{i=1}^n (-1)^i d'_{n+1}(f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_{n-1}(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) \\
 &= d'_{n+1}(f(x_0), l(x_0), \dots, l(x_n)) + \sum_{i=1}^n (-1)^i d'_{n+1}(f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \delta_{n-1}(x_0, \dots, \widehat{x_{i-1}}, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

Desarrollemos cada sumando y reindexemos adecuadamente:

$$= (\widehat{f(x_0)}, l(x_0), \dots, l(x_n)) \tag{1}$$

$$+ \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (f(x_0), l(x_0), \dots, \widehat{l(x_j)}, \dots, l(x_n)) \tag{2}$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j (f(x_0), \dots, \widehat{f(x_j)}, \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)) \tag{3}$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^j (f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, \widehat{l(x_{j-1})}, \dots, l(x_n)) \tag{4}$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{j=i}^n (-1)^j (f(x_0), \dots, \widehat{x_{i-1}}, \dots, f(x_j), l(x_j), \dots, l(x_n)) \tag{5}$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j (f(x_0), \dots, f(x_j), l(x_j), \dots, \widehat{x_i}, \dots, l(x_n)) \tag{6}$$

Notemos que el término (1) es igual a  $(l(x_0), \dots, l(x_n)) = C_n(l)(x_0, \dots, x_n)$ . Además, si tomamos  $i = n, j = n + 1$  en el término (4), tenemos que es igual a

$$(-1)^{n+n+1} (f(x_0), \dots, f(x_n), \widehat{l(x_n)}) = -(f(x_0), \dots, f(x_n)) = -C_n(f)(x_0, \dots, x_n)$$

Ahora veamos cómo se eliminan los demás términos:

- Si tomamos  $j = 0$  en el término (2) y en el término (3) tomamos  $i = 1, j = 1$ , podemos notar que se trata de términos iguales pero con signo contrario, pues el primero tiene signo  $(-1)^{0+1} = -1$  y el segundo  $(-1)^{1+1} = 1$ . Por lo tanto, se eliminan.
- Si tomamos  $j \geq 1$  en el término (2), tenemos

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \left( f(x_0), l(x_0), \dots, \widehat{l(x_j)}, \dots, l(x_n) \right).$$

Por otro lado, si tomamos  $j = 0$  en el término (6) tenemos

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \left( f(x_0), l(x_0), \dots, \widehat{x_i}, \dots, l(x_n) \right).$$

Así, si tomamos  $j = i$  podemos notar que se trata de los mismos términos con signo contrario, pues para el primero tendremos  $(-1)^{i+1}$  y para el segundo  $(-1)^i$ . Por lo tanto, se eliminan los términos.

- Si del término (3) ahora tomamos  $i = j \geq 2$  tendremos

$$\sum_{i=2}^n \left( f(x_0), \dots, \widehat{f(x_i)}, l(x_i), \dots, l(x_n) \right)$$

y si tomamos  $j = i + 1 \leq n$  del término (4) tendremos

$$\sum_{i=2}^n (-1) \left( f(x_0), \dots, f(x_{i-1}), \widehat{l(x_{i-1})}, \dots, l(x_n) \right)$$

Se puede ver que se trata de los mismos términos y claramente tienen signos diferentes. Por lo tanto, se anulan.

- Si tomamos los sumandos restantes del término (3), es decir,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ 0 \leq j < i}}^n (-1)^{i+j} \left( f(x_0), \dots, \widehat{f(x_j)}, \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n) \right)$$

y el término (5), podemos notar que tienen los mismos sumandos si  $\widehat{f(x_j)}$  y  $\widehat{x_{i-1}}$  están en la misma posición, es decir, si  $j = i - 1$ . Al sustituir estos valores en cada término tendremos que los signos son  $(-1)^{i+i-1} = -1$  y  $(-1)^{i-1+i-1} = 1$ , por lo que estos términos se anulan.

- Finalmente, si tomamos los sumandos restantes del término (4) y los términos restantes del término (6), éstos tienen los mismos sumandos si  $\widehat{l(x_{j-1})}$  y  $\widehat{x_i}$  están en la misma posición, es decir, si  $j = i + 1$ . En cada término tendremos que los signos son  $-1$  y  $1$  respectivamente, por lo que se anulan los términos.

Por lo anterior, los únicos términos que no se anulan son los correspondientes a  $(C_n(f) - C_n(l))(x_0, \dots, x_n)$ . Así,  $f$  y  $l$  son homotópicos.  $\square$

## 4 $G$ -copos y la conjetura de Quillen

**Definición 4.1** ( $G$ -copo, cf. [11]). Sea  $G$  un grupo finito. Sea  $X$  un copo finito que además es un  $G$ -conjunto.  $X$  es un  $G$ -copo (finito) si para todo  $g \in G$  y para todo  $x, y \in X$  se cumple que  $x \leq y$  implica que  $gx \leq gy$ .

**Definición 4.2.** Sean  $X, Y$  dos  $G$ -copos. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que  $f$  es un *morfismo de  $G$ -copos* si  $f$  es morfismo de orden y morfismo de  $G$ -conjuntos.

De igual forma, diremos que  $f$  es un *isomorfismo de  $G$ -copos* si  $f$  es isomorfismo de orden e isomorfismo de  $G$ -conjuntos.

**Observación 4.3.** Sea  $X$  un  $G$ -copo finito. Entonces para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Sd_n(X)$  es un  $G$ -conjunto con la siguiente acción:

Para todo  $g \in G$  y todo  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X)$ ,  $g(x_0, \dots, x_n) = (gx_0, \dots, gx_n)$ .

En efecto, sea  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X)$ . Primero notemos que  $e(x_0, \dots, x_n) = (ex_0, \dots, ex_n) = (x_0, \dots, x_n)$ .

Por otro lado, sean  $g_1, g_2 \in G$ . Entonces tenemos que  $(g_1g_2)(x_0, \dots, x_n) = ((g_1g_2)x_0, \dots, (g_1g_2)x_n) = (g_1(g_2x_0), \dots, g_1(g_2x_n)) = g_1(g_2x_0, \dots, g_2x_n) = g_1(g_2(x_0, \dots, x_n))$ .

Así, podemos ver a  $Sd_n(X)$  como un elemento de  $B(G)$ .

La siguiente definición del invariante de Lefschetz se debe a J. Thévenaz (cf. [11], p. 124):

**Definición 4.4.** Sea  $X$  un  $G$ -copo finito. El *invariante de Lefschetz* de  $X$  es el elemento de  $B(G)$  definido de la siguiente forma:

$$\Lambda_X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Sd_n(X).$$

Como  $X$  es un  $G$ -copo finito, esta suma es finita.

Dicho invariante es importante dentro de la teoría de representaciones y es esencial en este trabajo.

**Ejemplo 4.5.** 1. Sea  $X = \{\bullet\}$ . Entonces  $\Lambda_X = (-1)^0 Sd_0(X) = \{\bullet\} = [G/G] = 1_{B(G)}$ .

2. El invariante de Lefschetz del copo vacío es  $\Lambda_{\emptyset} = [\emptyset] = 0_{B(G)}$ .

**Proposición 4.6** (cf. [3], 11.2.11). *Sean  $X, Y$  dos  $G$ -copos finitos. Entonces  $\Lambda_{X \sqcup Y} = \Lambda_X + \Lambda_Y$  en  $B(G)$ .*

*Demostración.* Primero veamos que para toda  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $Sd_n(X \sqcup Y) = Sd_n(X) \sqcup Sd_n(Y)$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $X$  y  $Y$  son ajenos.

( $\subseteq$ ) Sea  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X \sqcup Y)$ . Entonces  $x_0, \dots, x_n \in X \sqcup Y$  y  $x_0 < \dots < x_n$ .

Luego,  $(x_0, \dots, x_n \in X$  y  $x_0 < \dots < x_n)$  o  $(x_0, \dots, x_n \in Y$  y  $x_0 < \dots < x_n)$ . De ahí que  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X) \cup Sd_n(Y)$ . Afirmamos que esta unión es ajena, pues si  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X) \cap Sd_n(Y)$ , entonces  $(x_0, \dots, x_n \in X$  y  $x_0 < \dots < x_n)$  y  $(x_0, \dots, x_n \in Y$  y  $x_0 < \dots < x_n)$ , por lo que  $x_0, \dots, x_n \in X \cap Y$ , lo cual es una contradicción pues estamos suponiendo que  $X$  y  $Y$  son ajenos. Así,  $Sd_n(X \sqcup Y) \subseteq Sd_n(X) \sqcup Sd_n(Y)$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X) \sqcup Sd_n(Y)$ . Entonces tenemos que  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X)$  o  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(Y)$ . Luego,  $(x_0, \dots, x_n \in X$  y  $x_0 < \dots < x_n)$  o  $(x_0, \dots, x_n \in Y$  y  $x_0 < \dots < x_n)$ . Entonces  $x_0, \dots, x_n \in X \sqcup Y$  y  $x_0 < \dots < x_n$ . Así,  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X \sqcup Y)$ .

Por lo tanto,  $Sd_n(X \sqcup Y) = Sd_n(X) \sqcup Sd_n(Y)$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ . Así,

$$\begin{aligned} \Lambda_{X \sqcup Y} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Sd_n(X \sqcup Y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (Sd_n(X) \sqcup Sd_n(Y)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Sd_n(X) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Sd_n(Y) \\ &= \Lambda_X + \Lambda_Y \end{aligned} \quad \square$$

**Teorema 4.7** (cf. [3], 11.2.9, 11.2.11). *Sea  $G$  un grupo y sean  $X$  y  $Y$   $G$ -cocos finitos. Denotamos por  $X \times Y$  el producto cartesiano de  $X$  y  $Y$ , dotado con la acción diagonal y con el siguiente orden: para cualesquiera  $x, x' \in X$  y cualesquiera  $y, y' \in Y$ ,  $(x, y) \leq (x', y')$  si y sólo si  $x \leq x'$  y  $y \leq y'$ .*

*Entonces  $\Lambda_{X \times Y} = \Lambda_X \Lambda_Y$  en  $B(G)$ .*

**Teorema 4.8** (cf. [3], 11.2.8). *Sean  $X$  y  $Y$   $G$ -cocos finitos y  $H \leq G$ . Entonces:*

1.  $(\Lambda_X)^H = \Lambda_{X^H}$  en  $B(N_G(H)/H)$ ,
2.  $\varphi_H(\Lambda_X) = \chi(X^H)$ ,
3.  $\Lambda_X = \Lambda_Y$  en  $B(G)$  si y sólo si  $\chi(X^H) = \chi(Y^H)$  para cualquier subgrupo  $H$  de  $G$ .

*Demostración.* 1. Primero veamos que para toda  $n \in \mathbb{Z}$  se cumple que  $Sd_n(X)^H = Sd_n(X^H)$ . Sea  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X)^H$  y sea  $h \in H$ . Entonces  $h(x_0, \dots, x_n) = (hx_0, \dots, hx_n) = (x_0, \dots, x_n)$ , es decir,  $hx_i = x_i$  para toda  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Luego,  $x_i \in X^H$  para toda  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Así,  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X^H)$ , por lo que  $Sd_n(X)^H \subseteq Sd_n(X^H)$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ahora, sea  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X^H)$ . Tenemos que  $h(x_0, \dots, x_n) = (hx_0, \dots, hx_n) = (x_0, \dots, x_n)$  para cada  $x_i \in X^H$  y para cada  $h \in H$ , por lo que  $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X)^H$ .

Así,  $Sd_n(X^H) \subseteq Sd_n(X)^H$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ . Luego,

$$\begin{aligned} (\Lambda_X)^H &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Sd_n(X) \right)^H \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Sd_n(X)^H \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Sd_n(X^H) \\ &= \Lambda_{X^H}. \end{aligned}$$

2. Notemos que

$$\begin{aligned} \varphi_H(\Lambda_X) &= |(\Lambda_X)^H| && \text{(por Definición 2.1)} \\ &= |\Lambda_{X^H}| && \text{(por 1. de este Teorema)} \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Sd_n(X^H) \right| && \text{(por la Definición 4.4)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |Sd_n(X^H)| && \text{(el morfismo marca es de anillos)} \\ &= \chi(X^H) && \text{(por la Definición 3.4)} \end{aligned}$$

3. Se sigue de 2. de este Teorema y del Corolario 2.13. □

**Ejemplo 4.9.** Consideremos al copo  $Y$  descrito en 2. del Ejemplo 3.5 y a  $G$  un grupo finito actuando trivialmente en él, es decir,  $gy = y$  para cualesquiera  $g \in G$  y  $y \in Y$ . Con esta acción,  $Y$  es un  $G$ -copo.

Luego, notemos que para cualquier  $H \leq G$ ,  $Y^H = Y$ , así que  $\chi(Y^H) = \chi(Y) = -1$ .

Por el teorema anterior,  $\Lambda_Y = -1_{B(G)}$ .

**Definición 4.10.** Sea  $X$  un copo finito. Decimos que  $X$  es *acíclico* si  $X$  tiene la homología de un punto, es decir, si

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}.$$

**Definición 4.11.** Sean  $G$  un grupo finito y  $X$  un  $G$ -copo finito. Decimos que  $X$  es  $G$ -acíclico si para todo  $H \leq G$  subgrupo se tiene que  $X^H$  es acíclico, es decir, si

$$H_n(X^H) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}.$$

Recordemos que el rango de un  $\mathbb{Z}$ -módulo libre de torsión  $G$ , al cual denotaremos por  $rank(G)$ , es el número de elementos en un subconjunto independiente máximo; y de igual forma definimos el rango de un  $\mathbb{Z}$ -módulo arbitrario  $G$  como el rango de su parte libre de torsión.

El siguiente es un resultado sobre  $\mathbb{Z}$ -módulos que nos ayudará posteriormente:

**Teorema 4.12** (cf. [6], Teorema A.31). *Sea  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados. Entonces  $rank(B) = rank(A) + rank(C)$ .*

**Observación 4.13.** Sea  $X$  un  $G$ -copo finito. Recordemos que la definición de la característica de Euler es  $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |Sd_n(X)|$ . Consideremos la siguiente sucesión:

$$0 \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{d_0} 0$$

Recordemos que  $C_n(X)$  tiene como base a  $Sd_n(X)$ . Entonces el rango de  $C_n(X)$  es  $rank(C_n(X)) = |Sd_n(X)|$ , por lo que

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n rank(C_n(X)).$$

Consideremos ahora las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow Ker\ d_n \xrightarrow{\iota} C_n(X) \xrightarrow{d_n} Im\ d_n \longrightarrow 0 \tag{7}$$

$$0 \longrightarrow Im\ d_{n+1} \xrightarrow{\iota} Ker\ d_n \xrightarrow{\nu} H_n(X) \longrightarrow 0 \tag{8}$$

Usando el Teorema 4.12, de la sucesión (7) tenemos que

$$rank(C_n(X)) = rank(Ker\ d_n) + rank(Im\ d_n)$$

y de la sucesión (8) tenemos que

$$\text{rank}(Ker d_n) = \text{rank}(Im d_{n+1}) + \text{rank}(H_n(X)).$$

Entonces

$$\text{rank}(C_n(X)) = \text{rank}(Im d_n) + \text{rank}(Im d_{n+1}) + \text{rank}(H_n(X)).$$

Luego,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rank}(C_n(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\text{rank}(Im d_n) + \text{rank}(Im d_{n+1}) + \text{rank}(H_n(X))).$$

Al tratarse de una suma alternada, los respectivos sumandos  $\text{rank}(Im d_{n+1})$  y  $\text{rank}(Im d_n)$  se cancelan para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rank}(C_n(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rank}(H_n(X))$$

es decir,

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rank}(H_n(X)).$$

**Proposición 4.14** (cf. [2], Proposición 4.2.5). *1. Sean  $X$  y  $Y$   $G$ -copos finitos y sean  $f : X \rightarrow Y$ ,  $l : Y \rightarrow X$  morfismos de  $G$ -copos. Si  $l \circ f$  es comparable con  $1_X$  y  $f \circ l$  es comparable con  $1_Y$ , entonces  $\Lambda_X = \Lambda_Y$  en  $B(G)$ .*

*2. Si un  $G$ -copo finito  $X$  tiene un elemento mayor o menor, entonces  $X$  es contraíble. Más aún,  $X$  es  $G$ -acíclico.*

*Demostración.* 1. Por 3. del Teorema 4.8, basta con demostrar que para todo  $H \leq G$  se cumple que  $\chi(X^H) = \chi(Y^H)$ .

Notemos que, si  $f : X \rightarrow Y$  y  $l : Y \rightarrow X$  son morfismos de  $G$ -copos, entonces  $f_H = f|_{X^H} : X^H \rightarrow Y^H$  y  $l_H = l|_{Y^H} : Y^H \rightarrow X^H$ .

De ahí que  $l_H \circ f_H$  es comparable con  $1_{X^H}$  y  $f_H \circ l_H$  es comparable con  $1_{Y^H}$ . Luego, por el Teorema 3.20 tenemos que  $l_H \circ f_H \sim 1_{X^H}$  y  $f_H \circ l_H \sim 1_{Y^H}$ .

Entonces, por la Proposición 3.16,  $H_n(l_H \circ f_H) = H_n(1_{X^H}) = 1_{H_n(X^H)}$  y  $H_n(f_H \circ l_H) = H_n(1_{Y^H}) = 1_{H_n(Y^H)}$ , es decir,  $H_n(l_H) \circ H_n(f_H) = 1_{H_n(X^H)}$  y  $H_n(f_H) \circ H_n(l_H) = 1_{H_n(Y^H)}$ . De ahí que  $H_n(X^H) \cong H_n(Y^H)$ , por lo que  $\text{rank}(H_n(X^H)) = \text{rank}(H_n(Y^H))$ .

Por lo tanto,  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rank}(H_n(X^H)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{rank}(H_n(Y^H))$ , es decir,  $\chi(X^H) = \chi(Y^H)$ .

- Sea  $X$  un  $G$ -copo finito y supongamos que existe un elemento menor en  $X$ , a saber,  $x_0$ . Sea  $g \in G$ . Como  $x_0$  es elemento menor, entonces  $x_0 \leq gx_0$  y  $x_0 \leq g^{-1}x_0$ , es decir,  $x_0 \leq gx_0$  y  $gx_0 \leq x_0$ . Entonces para toda  $g \in G$  se tiene que  $gx_0 = x_0$ , por lo que  $x_0 \in X^G$ . De hecho, para cualquier  $H \leq G$  se tiene que  $x_0 \in X^H$ . De ahí que  $X^H$  tiene un elemento menor para todo  $H \leq G$ .

Sean  $f : X^H \rightarrow \bullet$  y  $l : \bullet \rightarrow X^H$  morfismos de  $G$ -copos tales que para todo  $z \in X^H$  se cumple que  $f(z) = \bullet$  y  $l(\bullet) = x_0$ .

Notemos que  $(f \circ l)(\bullet) = f(l(\bullet)) = f(x_0) = \bullet = 1_\bullet(\bullet)$ , por lo que  $f \circ l$  es comparable con  $1_\bullet$ .

Por otro lado, para todo  $z \in X^H$  ocurre que  $(l \circ f)(z) = l(f(z)) = l(\bullet) = x_0 \leq z = 1_{X^H}(z)$ , es decir,  $l \circ f \leq 1_{X^H}$ , por lo que son comparables.

Así, por 1. de esta Proposición, tenemos que  $\Lambda_{X^H} = \Lambda_\bullet = 1_{B(G)}$  (por 1. del Ejemplo 4.5).

Por otra parte,  $l \circ f \sim 1_{X^H}$  y  $f \circ l \sim 1_\bullet$ , por lo que  $X^H$  es contraíble. De ahí que  $X$  es  $G$ -acíclico.

El caso en el que  $X$  tiene elemento mayor es análogo. □

Sea  $G$  un grupo y  $p \in \mathbb{Z}$  un número primo tal que  $p$  divide al orden de  $G$ . Denotamos por  $S_p(G)$  al conjunto de  $p$ -subgrupos de  $G$  no triviales, es decir,

$$S_p(G) = \{P \leq G \mid P \neq 1 \text{ y } P \text{ es } p\text{-subgrupo}\}.$$

**Observación 4.15.**  $S_p(G)$  es un  $G$ -copo con la acción conjugación y el orden dado por la inclusión, es decir, si  $H, K \in S_p(G)$ , entonces  $H \leq K$  si y sólo si  $gHg^{-1} \leq gKg^{-1}$ .

Para dar contexto a la conjetura de Quillen daremos las siguientes nociones provenientes de la topología algebraica.

**Definición 4.16** (cf. [5], p. 359). Un *complejo simplicial abstracto* (finito) es una colección  $K$  de subconjuntos no vacíos, llamados *simplejos* (abstractos), de un conjunto finito  $V$ , llamado *conjunto de vértices*, con la propiedad de que todo subconjunto de un simplejo es un simplejo.

Un  $n$ -*simplejo* es un conjunto  $\sigma$  en  $K$  con  $n + 1$  elementos.

**Definición 4.17** (cf. [5], p. 360). El conjunto

$$\{t_0P_0 + t_1P_1 + \cdots + t_nP_n \mid t_i \geq 0, t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 0\}$$

es llamado *simplejo geométrico* generado por los puntos  $P_0, \dots, P_n \in V$ .

**Definición 4.18** (cf. [5], p. 360). La *realización geométrica* de un complejo simplicial abstracto  $K$ , denotada por  $|K|$ , se construye tomando los vértices  $V$  como base para un espacio vectorial, y definiendo a  $|K|$  como la unión de los simplejos geométricos generados por los simplejos abstractos en  $K$ .

Daniel G. Quillen, inspirado en los trabajos de K. Brown sobre características de Euler para grupos discretos y en los cuales se da una variante de un teorema de Sylow usando la característica de Euler de la realización geométrica del copo  $S_p(G)$ , estudió las propiedades homotópicas de dicha realización geométrica en su artículo [8].

Dentro de este artículo estableció la siguiente conjetura:

**Conjetura 4.19** (Quillen, cf [8]). *Sea  $G$  un grupo finito y  $p \in \mathbb{Z}$  primo tal que  $p$  divide al orden de  $G$ . Consideremos  $S_p(G)$ . Entonces son equivalentes:*

1. *La realización geométrica de  $S_p(G)$  es contraíble topológicamente.*
2. *Existe  $P$  un  $p$ -subgrupo normal no trivial de  $G$ .*

Esta conjetura ha sido muy estudiada durante las últimas décadas y toma relevancia al considerarse una vía de comunicación entre la teoría de grupos finitos, la topología algebraica y la combinatoria. Ha sido probada para algunos tipos de grupos, por ejemplo para grupos solubles (véase [8], Teorema 12.1, Corolario 12.2), pero en general la conjetura sigue abierta. Además, las

herramientas que se han desarrollado al estudiarse la conjetura se muestran útiles en las interacciones entre dichas áreas.

Se demostrará una afirmación más débil que esta conjetura y meramente algebraica a continuación.

**Teorema 4.20** (cf. [2], Proposición 4.3.2). *Sea  $G$  un grupo. Entonces  $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$  si y sólo si existe un  $p$ -subgrupo  $P$  de  $G$  normal no trivial.*

*Demostración.*  $\implies$ ) Supongamos que  $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$ . Entonces para todo  $H \leq G$  se cumple que  $\varphi_H(\Lambda_{S_p(G)}) = 1$ . En particular,  $\varphi_G(\Lambda_{S_p(G)}) = \varphi_G(1_{B(G)}) = 1$ , es decir,  $\chi(S_p(G)^G) = 1$ .

Afirmamos que  $S_p(G)^G \neq \emptyset$ , pues en caso contrario,  $\chi(S_p(G)^G) = 0$ . Entonces existe  $P \in S_p(G)^G$ , es decir, para toda  $g \in G$ ,  $gPg^{-1} = P$ ; es decir,  $P$  es un  $p$ -subgrupo de  $G$  normal no trivial.

$\impliedby$ ) Supongamos que  $P$  es un  $p$ -subgrupo normal no trivial de  $G$ . Consideremos  $[P, \infty) = \{E \leq G \mid P \leq E\} \subseteq S_p(G)$ . Notemos que  $[P, \infty)$  es un  $G$ -copo, pues si  $Q \in [P, \infty)$ , entonces  $P \leq Q$ . Luego,  $P = gPg^{-1} \leq gQg^{-1} \in [P, \infty)$ .

Sean  $\iota : [P, \infty) \rightarrow S_p(G)$  el morfismo inclusión y  $f : S_p(G) \rightarrow [P, \infty)$  morfismos de  $G$ -copos dados por  $\iota(Q) = Q$  y como  $P \trianglelefteq G$ , entonces  $f$  está dado por  $f(Q) = PQ$ .

Ahora,  $(f \circ \iota)(Q) = f(Q) = PQ = Q = 1_{[P, \infty)}(Q)$ , pues  $P \leq Q$ , por lo que  $f \circ \iota = 1_{[P, \infty)}$ . De ahí que  $f \circ \iota$  es comparable con  $1_{[P, \infty)}$ .

Además,  $(\iota \circ f)(Q) = \iota(PQ) = PQ \geq Q = 1_{S_p(G)}(Q)$ , por lo que  $\iota \circ f \geq 1_{S_p(G)}$ , es decir, son comparables.

Luego, por 1. de la Proposición 4.14,  $\Lambda_{S_p(G)} = \Lambda_{[P, \infty)}$ . Pero como  $[P, \infty)$  tiene un elemento menor, a saber,  $P$ , por 2. de la Proposición 4.14 tenemos que  $\Lambda_{[P, \infty)} = 1_{B(G)}$ , es decir,  $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$ .  $\square$

**Definición 4.21.** Sea  $X$  un  $G$ -copo finito. Decimos que  $X$  es  $G$ -contraíble si para todo  $H \leq G$  subgrupo se cumple que  $X^H$  es contraíble.

Notemos que, si  $X$  es un  $G$ -copo finito  $G$ -contraíble, por definición si  $H$  es subgrupo de  $G$  se tiene que  $X^H$  es contraíble. En particular si  $H = \{e\}$  es el subgrupo trivial tendremos que  $X^H = X$  es contraíble. Es, en este sentido, que afirmamos que el siguiente resultado es más débil que la conjetura 4.19.

**Teorema 4.22.** *Sea  $G$  un grupo finito y  $p \in \mathbb{Z}$  primo tal que  $p$  divide al orden de  $G$ . Consideremos  $S_p(G)$ . Entonces son equivalentes:*

1.  $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$ ;
2. Existe un  $p$ -subgrupo  $P$  de  $G$  normal no trivial;
3.  $S_p(G)$  es  $G$ -contraíble.

*Demostración.* Sea  $G$  un grupo finito.

(1.  $\implies$  2.) Se da por el Teorema 4.20.

(2.  $\implies$  3.) Como  $P \trianglelefteq G$ , en particular se tiene que  $P \in S_p(G)^H$  para cualquier  $H \leq G$ . Tomemos  $f : S_p(G)^H \longrightarrow [P, \infty)$  e  $\iota : [P, \infty) \longrightarrow S_p(G)^H$  (el morfismo inclusión) morfismos de  $G$ -copos tales que  $f(Q) = PQ$  e  $\iota(Q) = Q$ .

Como  $[P, \infty)$  tiene un elemento menor, entonces por 2. de la Proposición 4.14,  $[P, \infty) \sim \bullet$ . Notemos que  $(f \circ \iota)(Q) = f(Q) = PQ = Q = 1_{[P, \infty)}(Q)$  para todo  $Q \in [P, \infty)$ . En particular,  $f \circ \iota$  y  $1_{[P, \infty)}$  son comparables.

También observemos que  $(\iota \circ f)(Q) = \iota(PQ) = PQ \geq Q = 1_{S_p(G)^H}(Q)$  para todo  $Q \in S_p(G)^H$ . De ahí que  $\iota \circ f$  y  $1_{S_p(G)^H}$  son comparables.

Luego, por el Teorema 3.20,  $f \circ \iota \sim 1_{[P, \infty)}$  y  $\iota \circ f \sim 1_{S_p(G)^H}$ , por lo que  $S_p(G)^H \sim [P, \infty)$ . Como  $[P, \infty) \sim \bullet$ , tenemos que  $S_p(G)^H \sim \bullet$ , es decir,  $S_p(G)$  es  $G$ -contraíble.

(3.  $\implies$  1.) Como  $S_p(G)$  es  $G$ -contraíble, entonces  $S_p(G)^H \sim \bullet$  para todo  $H \leq G$ . Luego,  $\chi(S_p(G)^H) = 1 = \chi(\{\bullet\}) = \chi(\{\bullet\}^H) = \chi(1_{B(G)}^H)$  para todo  $H \leq G$ . De ahí que  $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$ .  $\square$

## Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros por la cuidadosa lectura, valiosos comentarios y aportaciones a este trabajo. Agradecemos especialmente al Dr. Gerardo Raggi por la supervisión de este trabajo.

## Bibliografía

- [1] D. J. Benson, *Representations and Cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 2, Cambridge University Press, 1991.
- [2] S. Bouc, *Burnside rings*, Handbook of Algebra (M. Hazewinkel, ed.), Vol. 2, North-Holland, 2000, 739–804.

- [3] S. Bouc, *Biset functors for finite groups*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2010.
- [4] C. Cejudo, J. M. Ramírez, D. Villa, *El anillo de Burnside*, Matemáticas y sus aplicaciones (F. Macías-Romero, ed.), Vol. 7, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (2016), 31–52.
- [5] W. Fulton, *Algebraic Topology. A First Course*, Springer-Verlag, 1995.
- [6] P. J. Giblin, *Graphs, Surface and Homology*, 2 ed., Chapman and Hall, 1977.
- [7] J. S. Golan, *Semirings and Affine Equations over them: Theory and Applications*, Springer-Science + Business Media Dordrecht, 2003.
- [8] D. Quillen, *Homotopy properties of the poset of nontrivial  $p$ -subgroups of a group*, Adv. in Math. **28**(2) (1978), 101–128.
- [9] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, 2 ed., Prentice Hall, 2002.
- [10] L. Solomon, *The Burnside algebra of a finite group*, J. Combin. Theory **2**(4) (1967), 603–615.
- [11] J. Thévenaz, *Permutation representations arising from simplicial complexes*, J. Combin. Theory, Ser. A **46**(1) (1987), 121–155.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

itzrosmar@gmail.com  
dvilla@fcmf.buap.mx  
cesarcc@fcmf.buap.mx



---

# **Educación matemática**

---



## Capítulo 3

# Estudio de la comprensión de ángulos y triángulos de estudiantes de preparatoria según el Modelo de Van Hiele

Lidia Aurora Hernández Rebollar<sup>1</sup>, Israel Molina Lara<sup>2</sup>,  
José Eduardo Reynoso Lara<sup>2</sup>

FCFM, BUAP<sup>1</sup>

Escuela Preparatoria Urbana Enrique Cabrera Barroso,  
BUAP<sup>2</sup>

### Resumen

Se presenta el resultado de una prueba de diagnóstico que se aplicó a un grupo de estudiantes de una preparatoria de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla para conocer su nivel de comprensión en el tema de ángulos y triángulos. Además de los resultados de la prueba escrita se presentan las entrevistas de dos estudiantes seleccionados del grupo que respondió el diagnóstico. El diseño y análisis de las respuestas de la prueba y de las entrevistas se basan en el Modelo de Van Hiele y pretende ser un punto de partida para una propuesta de actividades fundamentadas en este modelo. Después del análisis de sus respuestas se concluyó que la mayoría puede utilizar definiciones, pero solo con estructuras sencillas, de tal forma que tuvieron dificultades para discriminar ángulos y triángulos de figuras con lados curvos. También, que un ejemplo puede servirles como prueba y que son pocos los que tienden a usar propiedades matemáticas para justificar sus afirmaciones.

# 1 Introducción

Los conceptos básicos de la geometría, ángulo y triángulo son de los más estudiados en los programas de la educación obligatoria en México. Esto quizás se debe a su gran aplicación en la solución de problemas de la vida diaria y sus conexiones con diversos conceptos matemáticos. El concepto de triángulo es el ejemplo más ilustrativo porque su estudio inicia en la educación preescolar y continúa hasta la educación media superior, mientras que el del ángulo inicia en la educación primaria y se prolonga también hasta la educación media superior.

De la literatura se desprende que los estudiantes presentan dificultades para comprender la naturaleza multifacética de estos dos conceptos y que es esta característica la que conlleva a contar con una amplia gama de definiciones de los mismos ([2], [3], [7], [13] [14] y [15]). Barroso en [1] reporta que las dificultades se deben al uso de modelos prototipo y Tsamir [18] menciona que se deben a la falta de contraejemplos y no ejemplos de estos conceptos.

Barroso [1], en su investigación sobre el proceso de definir matemáticamente al triángulo, explica cómo las definiciones formales de triángulo expuestas en los diferentes textos, las utilizaciones de los materiales para construir triángulos y la manera como los programas de simulación geométrica trazan triángulos sobre la pantalla pueden influir, tanto en las definiciones personales como en los esquemas conceptuales de los alumnos.

El matrimonio formado por Pierre y Dina Van Hiele propuso un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en 1957, el cual ha sido ampliamente aceptado por la comunidad de investigadores en educación matemática. En su modelo describen el razonamiento geométrico a través de cinco niveles y proponen cinco fases para guiar el proceso de enseñanza.

En las preparatorias de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla se imparte el tema de ángulos y triángulos en el segundo semestre. Dos de los autores de este trabajo son docentes de una de esas preparatorias e imparten este tema regularmente, por lo que decidieron evaluar la comprensión de los estudiantes antes de impartir el tema. Con los resultados de este diagnóstico, se pretende diseñar una propuesta didáctica que favorezca la comprensión de ángulos y triángulos.

Así, el objetivo de este trabajo es analizar la comprensión de los conceptos de ángulo y triángulo con base al Modelo de Van Hiele, mediante un instru-

mento que evalúa los niveles de razonamiento y los procesos de pensamiento propuestos por Gutiérrez y Jaime [8] de un grupo de estudiantes de nivel medio superior de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). El análisis de las respuestas es de tipo cualitativo y se complementa con una entrevista hecha a cuatro de los participantes con la intención de profundizar en su razonamiento, pero solo se presentan las respuestas de dos de ellos para ilustrar esta actividad. Como resultado de este análisis (de respuestas escritas y entrevistas) se concluye que la mayoría de los estudiantes se encuentran en los niveles uno y dos del modelo y que, por tanto, es necesario diseñar actividades didácticas que los ayuden a transitar hacia los niveles tres y cuatro.

## 2 Marco Teórico

### Clasificación de dificultades en los conceptos de ángulo y triángulo

Los conceptos de ángulo y triángulo son de los temas geométricos que se estudian por un periodo largo de tiempo, del nivel básico hasta el nivel medio superior, sin que esto implique una comprensión completa de ellos. Lo anterior se ha reportado en varios estudios. Rotaèche y Montiel [15] mencionan, a partir de las investigaciones de Casas y Luengo [2], Mitchelmore y White [13], Clements y Burns [3] y otros, que la dificultad impuesta por el propio concepto se debe a la diversidad de definiciones que hay en los libros. Las más frecuentes son: Cantidad de giro alrededor de un punto entre dos líneas; Un par de rayos con un punto en común; Una región formada por la intersección de dos semiplanos.

Rotaèche y Montiel [15] precisan también que existen dificultades frecuentes que surgen del uso de diversas definiciones del concepto de ángulo:

1. La coordinación de las distintas facetas del concepto, por ejemplo, como giro (Mitchelmore y White, [12]), o como inclinación (Douek, [6]).
2. Las que se derivan por asumir que la longitud de las rectas que definen al ángulo afecta su medida.
3. Identificar al ángulo dentro de otras figuras.
4. Reconocer como ángulos los de medida  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $360^\circ$ .

Rotaeche y Montiel [16] y [17] plantean con evidencia empírica que es posible usar el concepto sin definirlo formalmente. En [15], las mismas autoras dan evidencia de la construcción de significados, representaciones y usos, previo al concepto formal. Su resultado más importante con respecto a la noción de ángulo, por medio de su diseño didáctico, es la construcción de ciertos significados angulares en los estudiantes. Sin embargo, observan que el paso a una abstracción del concepto les resulta una tarea compleja, por lo cual sugieren más tiempo del asignado al tema u otro enfoque de enseñanza. Para el caso del concepto de triángulo, Barroso [1] encontró que las definiciones revisadas en los textos se podrían agrupar en las categorías siguientes:

1. Descripción de triángulo.
2. El triángulo como polígono.
3. Atributos de los triángulos.
4. ¿Pueden estar los vértices situados en línea recta?

La gran mayoría no descarta explícitamente que los vértices puedan estar situados en línea recta, por lo que, dicha mayoría, entiende que se puede considerar al triángulo «degenerado», con sus vértices en línea recta. El uso de diferentes definiciones del concepto de triángulo genera confusión en los alumnos, no permite una generalización del triángulo y eso causa concepciones erróneas, como suponer que un triángulo podría estar formado por lados curvos.

## El Modelo de Van Hiele

El modelo propuesto por Pierre M. y Dina Van Hiele (en adelante, Modelo de Van Hiele) es descriptivo e instructivo; en su fase descriptiva se identifican las diferentes formas de razonamiento geométrico de los sujetos y se puede valorar su progreso, mientras que en su fase instruccional indica las pautas a seguir por el profesorado para que el avance del alumno esté presente. Se centra en la determinación de la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes mediante cinco niveles consecutivos, que tienen que ir superando la sucesión inmediata para poder pasar al siguiente. Se trata de un proceso lento que puede llevar incluso años, en el que se va pasando de un nivel al siguiente, sin que exista la posibilidad de saltarse ninguno de ellos. Cada nivel supone la comprensión y razonamiento geométrico por parte del estudiante de un modo distinto, por lo que su manera de definir, interpretar y demostrar los conceptos varía. A continuación se describen cada uno de los niveles:

NIVEL 1. Reconocimiento o visualización: El estudiante no diferencia partes de las figuras geométricas, sino que conoce las formas como un todo.

NIVEL 2. Análisis: El estudiante reconoce las formas, pero no establece relaciones entre propiedades de distintas familias de figuras.

NIVEL 3. Deducción informal: El individuo determina las figuras por sus propiedades, construye interrelaciones, pero aún su razonamiento está basado en la manipulación.

NIVEL 4. Deducción formal: El alumnado puede realizar deducciones y demostraciones lógicas y formales, entiende la naturaleza axiomática.

NIVEL 5. Rigor: Capta la geometría en forma abstracta, capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas de deducción y realizar una comparativa. Es un nivel alcanzado por estudiantes universitarios con aptitudes geométricas. Por lo que, en muchas de las investigaciones y estudios en estudiantes no universitarios, este nivel no se incluye.

El tránsito de un nivel a otro, necesita asegurarse con instrucciones adecuadas, las cuales no dependen de la edad o madurez intelectual de los estudiantes, sino de la enseñanza. Así, este modelo propone que la instrucción debe incluir 5 fases.

FASE 1: ENCUESTA / INFORMACIÓN. En esta fase inicial el profesor determina mediante el diálogo con los estudiantes dos aspectos importantes: a) cuál es el conocimiento previo sobre el concepto que se va tratar y b) se expone qué dirección tomará el estudio con posterioridad y toda observación que sea pertinente. En esta fase se introduce el vocabulario específico del nivel de que se trate.

FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA. Determinado en la fase anterior el conocimiento previo del alumno sobre el concepto a estudiar, los estudiantes exploran dicho concepto a través de los materiales que les presenta el profesor de forma secuencial, de tal manera que las actividades progresivas permitan revelar las estructuras características de cada nivel. Las cuestiones a plantear por el profesor no deberían tener ambigüedades.

FASE 3: EXPLICITACIÓN. Partiendo de sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus opiniones acerca de las estructuras observadas. En esta fase se explicita el sistema de relaciones exploradas. El papel del profesor debe ser mínimo si bien debe cuidar que el lenguaje del alumno sea el apropiado a su nivel.

FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE. En esta fase el alumno se enfrenta a tareas más complejas, trabajos con muchas etapas y que pueden concluirse

por distintos procedimientos. El objetivo de esta fase es la consolidación de los conocimientos adquiridos y su aplicación a situaciones inéditas, aunque de estructura comparable a las estudiadas previamente.

**FASE 5: INTEGRACIÓN.** El estudiante revisa, suma y unifica los objetivos y sus relaciones que configuran el nuevo sistema de conocimiento construido. En esta fase no se presenta nada nuevo, simplemente se plantea como síntesis de lo ya hecho y, en todo caso, revisión de los orígenes que dieron lugar a esa síntesis. Una vez superada esta quinta fase los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de conocimientos y están dispuestos para repetir las fases de aprendizaje en el nivel inmediato superior.

Gutiérrez y Jaime [8] llegan a la conclusión de que un nivel de razonamiento de Van Hiele no se puede considerar como proceso singular alcanzado por el estudiante, sino como un conjunto de procesos. Un estudiante alcanza un nivel solo cuando muestra dominio de los procesos que integran dicho nivel. Algunos autores consideran estos procesos exclusivos de un solo nivel, Villiers y otros [5] los consideran compartidos por varios niveles [10].

Gutiérrez y Jaime proponen cuatro procesos de razonamiento matemático para caracterizar cada nivel del Modelo de Van Hiele:

**RECONOCIMIENTO:** De tipos y familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras.

**DEFINICIÓN:** De un concepto geométrico. Este proceso puede ser visto de dos maneras. Como la formulación de definiciones de conceptos que están aprendiendo los estudiantes y como el uso que dan los estudiantes a una definición leída en un libro de texto, escuchada de un maestro u otro estudiante.

**CLASIFICACIÓN:** De figuras o conceptos geométricos en familias o clases.

**DEMOSTRACIÓN:** De propiedades o afirmaciones, esto es, explicar de alguna manera convincente porqué alguna propiedad o afirmación es verdadera.

Cada uno de estos procesos es parte de uno o más niveles de razonamiento del modelo. El cuadro 1, resume las principales características de cada proceso utilizado para distinguir entre estudiantes de los diferentes niveles del Modelo de Van Hiele.

Niveles de Van Hiele/ Procesos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
<b>Identificación</b>	Atributos físicos	Propiedades matemáticas		
<b>Uso de definiciones</b>		Sólo definiciones con estructura sencilla	Cualquier definición	Acepta varias definiciones equivalentes
<b>Formulación de definiciones</b>	Lista de propiedades físicas	Lista de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Pueden probar la equivalencia de definiciones
<b>Clasificación</b>	Exclusivamente basada en atributos físicos	Exclusivamente basada en atributos matemáticos	Se mueve entre inclusiva y exclusiva	
<b>Prueba</b>		Verificación con ejemplos	Pruebas lógicas informales	Pruebas matemáticas formales

Cuadro 1: Procesos y niveles de Van Hiele

### 3 Método

Este es un estudio de tipo cualitativo e interpretativo en el que se analizan las respuestas de un grupo de estudiantes a un cuestionario diseñado para evaluar su nivel de comprensión de los conceptos ángulo y triángulo y algunas de sus propiedades. En el análisis también se consideraron las respuestas a entrevistas que se realizaron a estudiantes seleccionados porque se consideró necesario profundizar en su razonamiento. El nivel de comprensión se describirá de acuerdo al Modelo de Van Hiele y a los procesos de pensamiento de Gutiérrez y Jaime [8]. Aquí se presenta el análisis a las respuestas escritas y el análisis de dos de las entrevistas con la intención de mostrar cómo fue posible obtener más información sobre los niveles y procesos de los estudiantes.

## Participantes

Los participantes fueron 78 alumnos de dos grupos del segundo semestre (uno matutino y otro vespertino) de una Preparatoria de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. El grupo matutino constaba de 40 estudiantes y el vespertino de 38; su edad variaba entre los 15 y 16 años. El 85% proviene de escuelas públicas y el resto de escuelas particulares. Se encontraban cursando la materia de Geometría y Trigonometría. El cuestionario se les aplicó de manera individual, en una sesión de 50 minutos y se les informó que era de carácter diagnóstico.

## Cuestionario

En esta sección se presenta el cuestionario que se aplicó a los participantes y, después, un análisis del contenido del mismo para mostrar cómo se corresponden, cada una de las preguntas, con los niveles y procesos que se pretenden evaluar.

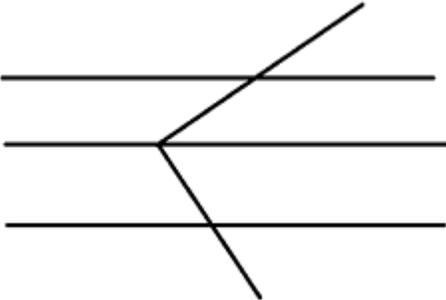
1. A) En la siguiente figura identifica todos los ángulos que observes y márcalos con algún color.



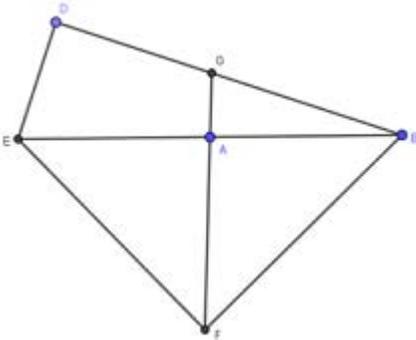
B) En la siguiente figura identifica todos los triángulos que observes y márcalos con algún color.



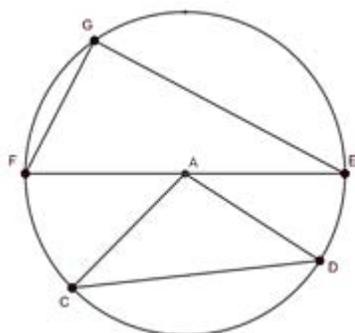
2. Marca con el mismo color los ángulos iguales en la siguiente figura.



3. En la siguiente figura, determina ¿cuál es el triángulo de mayor área?, justifica tu respuesta



4. En la figura que sigue A es el centro de la circunferencia. Prueba que el triángulo ACD es isósceles.



Los reactivos miden los niveles y procesos de Van Hiele de acuerdo con el cuadro 2.

Niveles de Van Hiele/ Procesos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
<b>Identificación</b>	1a, 1b, 2 y 3		
<b>Uso de definiciones</b>		1a, 1b, 3 y 4	
<b>Formulación de definiciones</b>			3 y 4
<b>Clasificación</b>	2 y 3	3	4
<b>Prueba</b>		3 y 4	3 y 4

Cuadro 2: Clasificación de los reactivos de acuerdo con los procesos y los niveles de Van Hiele

## Análisis de contenido

Pregunta 1A. Como se puede observar en el cuadro 2, esta pregunta evalúa el nivel 1 en el proceso de Identificación y el nivel 2 en el proceso de Uso de definiciones. Los alumnos pueden responder identificando los ángulos por la forma que ellos guardan en su mente o haciendo uso de la definición.

Pregunta 1B. Esta pregunta se propuso para evaluar los mismos niveles y procesos de la pregunta 1A pero para el concepto de triángulo.

Pregunta 2. Este reactivo se planteó para que el alumno analice la figura, identifique componentes, sus relaciones y descubra propiedades o reglas. Debido a que no se solicita justificación de su respuesta, esta pregunta evalúa el nivel 1 en los procesos de Identificación y Clasificación del concepto de

ángulo con la aplicación de la propiedad de los ángulos entre rectas paralelas cortadas por otra recta.

Pregunta 3. Como se observa en el cuadro 2, este reactivo se diseñó para evaluar todos los niveles y procesos del modelo, ya que solicita identificar y justificar su selección. Para responder, el estudiante tendrá que relacionar propiedades o reglas descubiertas previamente y justificar la selección del triángulo con mayor área.

Pregunta 4. Esta pregunta busca evaluar los niveles 3 y 4 en los procesos de Uso de definiciones, Formulación de definiciones, Clasificación y Prueba. Para responder, el estudiante debe relacionar la definición de triángulo isósceles con la longitud de los radios de una circunferencia y utilizar estos elementos para formular una prueba.

## 4 Resultados

En esta sección se reportan los porcentajes del total de 78 estudiantes que se clasificaron en los niveles y procesos del Modelo de Van Hiele que fueron considerados en el cuestionario. Además, se presentan algunas respuestas de estudiantes para ilustrar los niveles y procesos que se identificaron en este grupo de participantes. Durante el análisis se decidió hacer una subdivisión de los niveles, colocando los signos + o - después del número de nivel para indicar qué tanto se adecuaban a dicho nivel. En cada pregunta analizada se explica la razón de ubicar a los estudiantes en un nivel 1+, 1-, 2+, 2-, 3+ o 3-, respectivamente.

Pregunta 1A. La mayoría de los estudiantes (76.9%) reconoció a los ángulos como la apertura entre dos líneas rectas o segmentos de recta unidas en un punto. Sin embargo, también marcaron erróneamente algunos espacios entre líneas curvas, (véase Figura 1). A este grupo de estudiantes se le ubicó en un nivel 1+. El resto del grupo (23.1%) marcó como ángulos a la apertura entre dos líneas cualesquiera unidas por un extremo, incluyendo, en gran cantidad, a líneas curvas, (véase Figura 2). A este grupo de estudiantes se le clasificó en un nivel 1-.

Pregunta 1B. Un poco menos de la mitad (46.1%) reconoció a un triángulo como la figura geométrica cerrada de tres lados rectilíneos (véase Figura 3), por lo que se les clasificó en un nivel 1+. El resto (53.9%) reconoció a un triángulo como la figura geométrica cerrada de tres lados, incluyendo lados

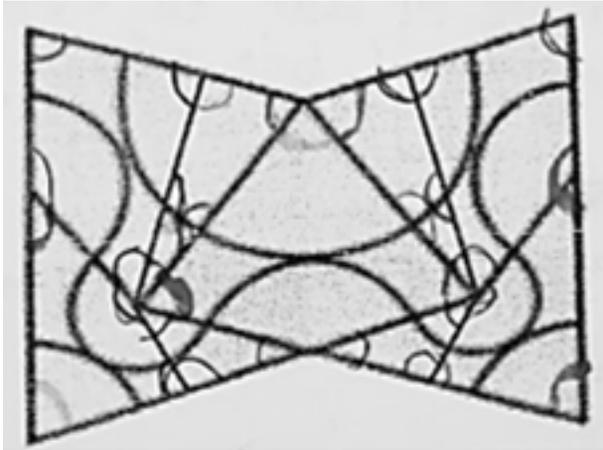


Figura 1: Ejemplo de respuesta a la pregunta 1A en el nivel 1+

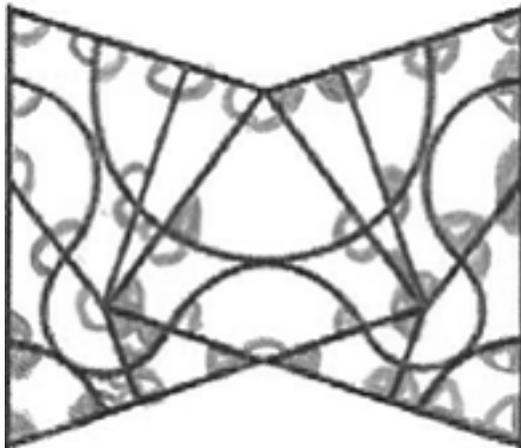


Figura 2: Ejemplo de respuesta a la pregunta 1A en el nivel 1-

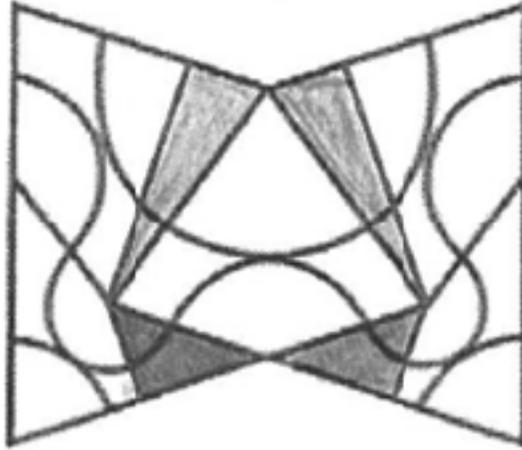


Figura 3: Ejemplo de respuesta a la pregunta 1B en el nivel 1+

formados por líneas curvas (véase Figura 4), por lo que a este grupo se le ubicó en un nivel 1-.

Pregunta 2. El 47.05 % de los alumnos seleccionó pocos ángulos que son iguales y la mayoría de los ángulos seleccionados no lo eran (véase Figura 6). A este grupo se le ubicó en el Nivel 1-. El 47.2 % se ubicó en el 1+ porque la mayoría de los ángulos que seleccionó como iguales sí lo eran, de tal manera que cometieron pocos errores (véase Figura 5), en donde se puede apreciar uno de los errores más frecuentes: considerar que la recta paralela de en medio divide al ángulo formado por las dos rectas oblicuas en dos ángulos iguales. Un 5.75 % de los estudiantes no respondió este ítem.

Pregunta 3. Un 9.2 % pudo alcanzar el nivel 3- porque esbozó una demostración informal. Estos estudiantes identificaron al triángulo mayor e hicieron referencia a la fórmula del área, resaltando a la base y a la altura para justificar su respuesta (véase Figura 7). Otro 7.7 % del grupo identificó al triángulo mayor y mencionó a la fórmula del área sin intentar una demostración, por lo que se ubicó en un nivel 2- (véase Figura 8). Un tercer grupo, correspondiente al 68.5 %, identificaron al triángulo mayor, pero lo hicieron solo por observación, no escribieron una justificación o dieron justificaciones no válidas (véase Figura 9), por lo que se les ubicó en un nivel 1+. El 8.6 % no identificó al triángulo de mayor área y el 6 % restante no contestó la pregunta. En las respuestas a esta pregunta 3 fue posible observar que, a mayor nivel de razonamiento los estudiantes usaban un lenguaje más formal y con un mayor

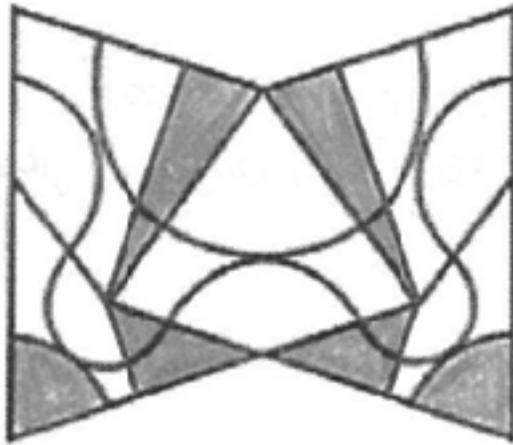


Figura 4: Ejemplo de respuesta a la pregunta 1B en el nivel 1-



Figura 5: Ejemplo de respuesta a la pregunta 2 en el nivel 1+

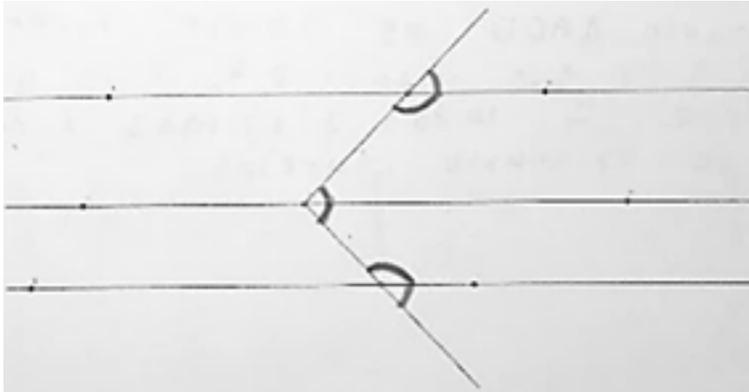


Figura 6: Ejemplo de respuesta a la pregunta 2 en el nivel 1-

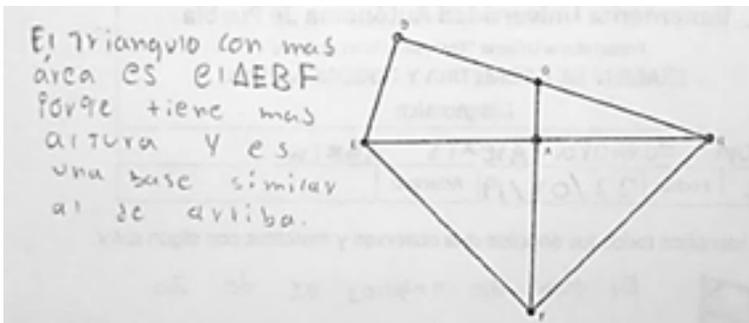


Figura 7: Ejemplo de respuesta a la pregunta 3 en el nivel 3-

número de términos matemáticos (véase Figura 7), y que a menor nivel (véase Figuras 8 y 9) el lenguaje era más sencillo.

Pregunta 4. Un 6.35% alcanzó el nivel 3+ porque redactaron una demostración no formal con justificaciones válidas (véase Figura 10). Mientras que otro 9.5% de los estudiantes se ubicó en el nivel 2+ debido a que no proporcionaron una prueba, pero si justificaron su respuesta por la estimación de la longitud de los lados del triángulo o por una medición directa de los mismos (véase Figura 11). Un poco más de la mitad de los estudiantes (55%) solo hizo uso de la definición de triángulo isósceles para identificar el triángulo, por lo que se ubicaron en el nivel 2- (véase Figura 12), otro 15.35% escribió justificaciones no válidas (véase Figura 13) y un último grupo (15.35%) no contestó la pregunta. Al igual que en las respuestas de la pregunta 3, podemos

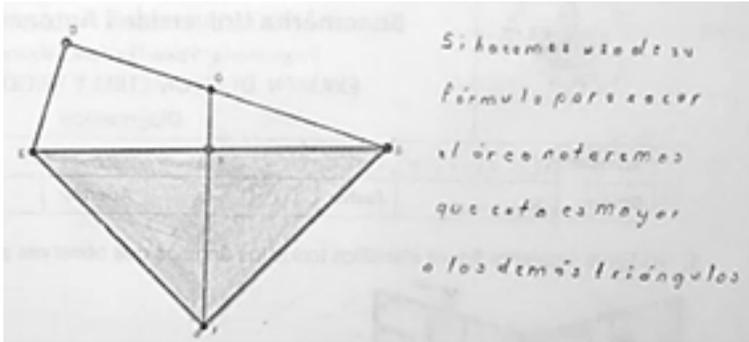


Figura 8: Ejemplo de respuesta a la pregunta 3 en el nivel 2-

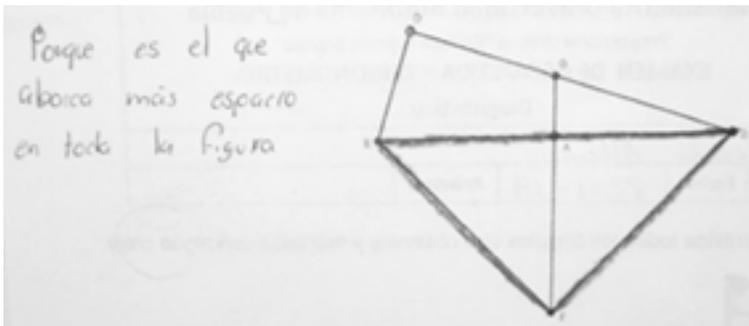
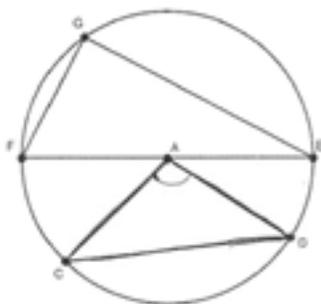


Figura 9: Ejemplo de respuesta a la pregunta 3 en el nivel 1+



*Handwritten scribble*

Porque 2 de sus lados son radios, y el tercer lado es una cuerda

radio = línea recta que une el centro de un círculo con cualquier punto de la circunferencia/  
Cuerda → línea recta que une cualquier punto de la circunferencia con otro sin

Figura 10: Ejemplo de respuesta a la pregunta 4 en el nivel 3+

apreciar en las figuras 10, 11, 12, y 13, que la redacción de las argumentaciones va utilizando un lenguaje más formal (a mayor nivel el lenguaje es más formal).

## Entrevistas

En este apartado se presentan las transcripciones de dos entrevistas seleccionadas, la primera de ellas del estudiante 12V y la segunda del estudiante 25V. Al entrevistador se le denotó con la letra E.

ENTREVISTA de 12V

Pregunta 1B

Lee la siguiente pregunta

E: *¿Qué idea de triángulo tenías antes de contestar la pregunta?*

12V: *... que era una figura de tres lados, y tres ángulos y todos terminaban en punta...*

E: *¿Cuántos triángulos hallaste con esta idea?*

12V: *... cinco...*

E: *¿Todos son triángulos?*

12V: *... mmmmm, ...ahorita viéndolos uno no es, ...*

E: *Entonces ¿por qué lo marcaste?*

12V: *... cuando yo lo vi, tiene dos líneas rectas y yo las vi una como recta...*

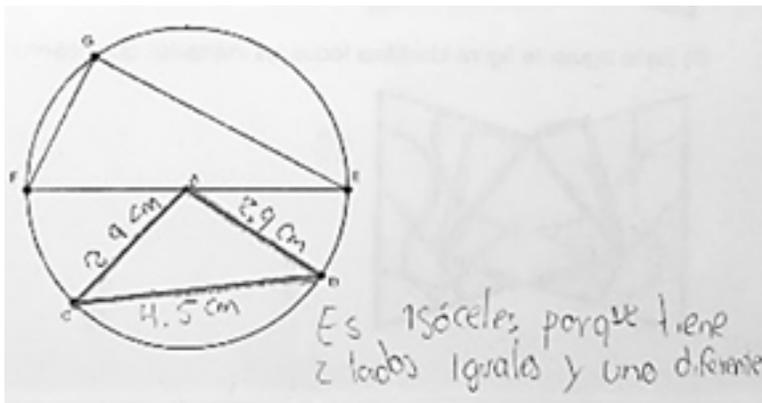


Figura 11: Ejemplo de respuesta a la pregunta 4 en el nivel 2+

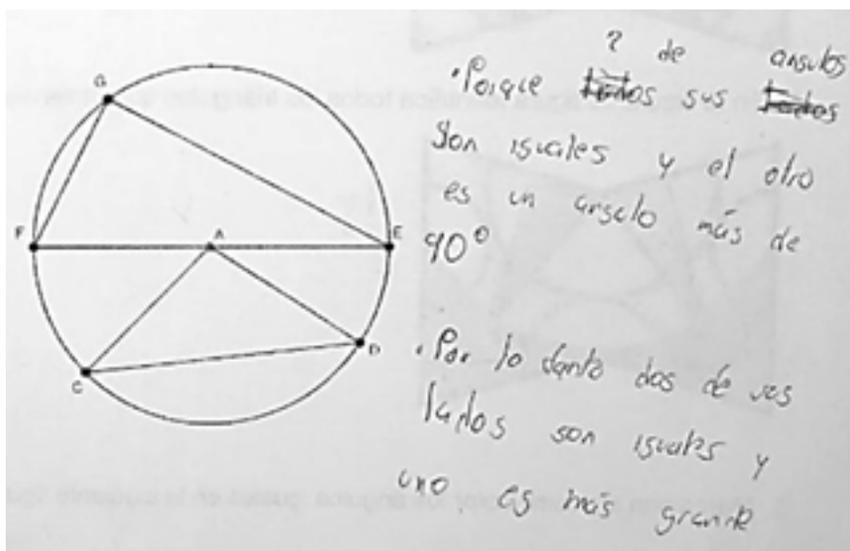


Figura 12: Ejemplo de respuesta a la pregunta 4 en el nivel 2-

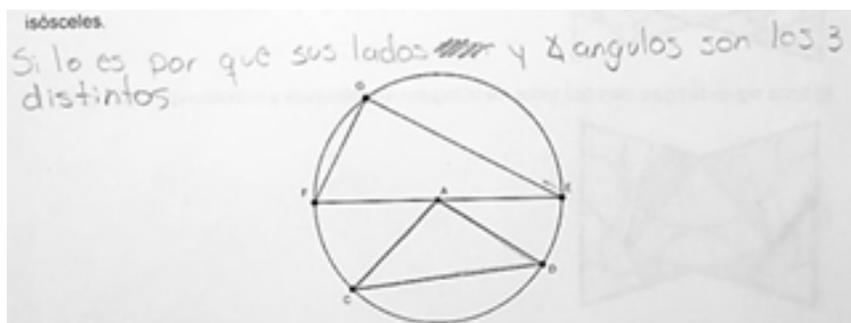


Figura 13: Ejemplo de respuesta a la pregunta 4 de una justificación no válida

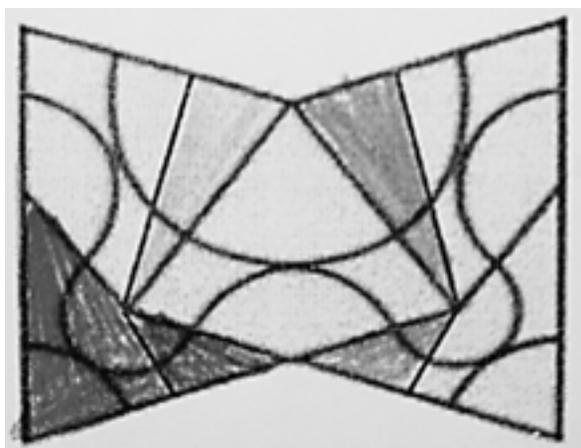


Figura 14: Imagen de la respuesta de la pregunta 1B del estudiante 12V

En la respuesta a la pregunta 1B, el estudiante 12V muestra la selección de todos los triángulos contenidos en la imagen proporcionada, más uno que no lo es; el polígono de la esquina inferior izquierda que él seleccionó tiene cuatro lados (véase Figura 14). En la entrevista este estudiante definió adecuadamente lo que entiende por triángulo y se dio cuenta de su error al haber seleccionado una figura que no era triángulo. Inicialmente, a este estudiante se le ubicó en nivel 1- y con las respuestas de la entrevista se le reubicó en el nivel 1+.

Pregunta 3

E: *¿Me puedes leer lo que respondiste?*

12V: *El triángulo de mayor área es BEF ya que al usar la fórmula para*

sacar el área del triángulo es el que mayor área tiene.

E: *¿Qué triángulo marcaste como el de mayor área?*

12V: BEF E: *¿En qué te basaste para decir que ese triángulo era de mayor área?*

12V: *... en la fórmula de área, porque te dice cuál es el de mayor área, ... y pues ya nada más.*

12V: *Y porque apliqué la fórmula a los dos triángulos.*

E: *¿Cómo?*

12V: *Es que medí la base y luego medí la altura que tienen, porque te dan la altura de los dos triángulos, entonces el área del triángulo es base por altura entre dos y luego la del otro triángulo BEF. El área de DEB es la que tiene una altura menor, entonces no podía tener un área tan grande y el otro tiene más altura entonces su área era mayor.*

En cuanto a la pregunta 3 (véase Figura 15), el alumno argumenta en su respuesta “El triángulo de mayor área es BEF, ya que al usar la fórmula para sacar el área de triángulo es el que mayor área tiene”, y en la figura de la pregunta pinta el contorno del triángulo mencionado (BEF). De acuerdo a lo escrito por este estudiante, se pensó que había hallado el triángulo usando solo su percepción y se le había ubicado en el nivel 2-. Sin embargo, en la entrevista mencionó que usó la fórmula para obtener el área, pero midiendo su altura y su base para establecer que es el de mayor área, además, lo comparó con el triángulo DEB (del cual también midió su altura y mencionó que la base la comparte con el triángulo BEF). Por esta razón, se le reubicó en el nivel 2+.

Pregunta 4

E: *Lee la cuarta pregunta. Para ti ¿Qué era un triángulo isósceles, antes de contestar la pregunta?*

12V: *El que tenía dos lados iguales y uno desigual.*

E: *¿Me puedes leer lo que respondiste?*

12V: *Si es escaleno, porque me equivoqué ya que tiene dos lados iguales y el tercero es más grande que los otros.*

E: *¿Te equivocaste y en lugar de poner isósceles pusiste escaleno?*

12V: *Si.*

E: *¿Cómo sabías que esos lados eran iguales?*

12V: *Porque el planteamiento dice que A es como el centro de la circunferencia y entonces yo tomé como si los otros dos lados los hicieras como una recta, como no formarían el triángulo y entonces si lo tomas como una recta*

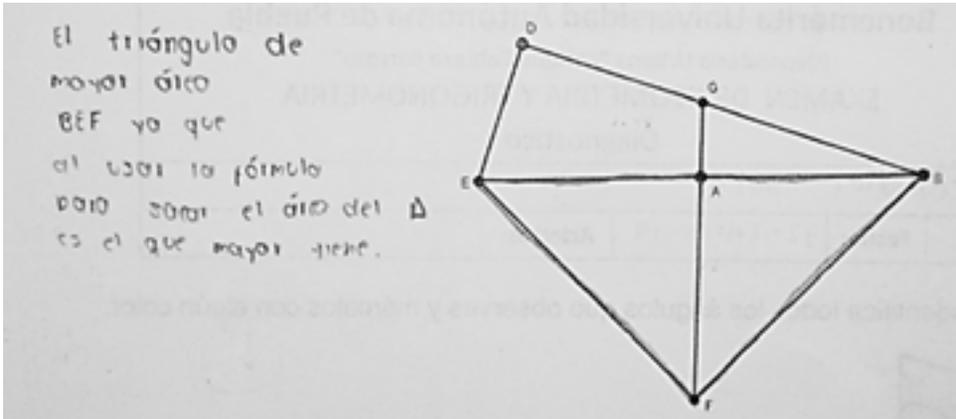


Figura 15: Imagen de la respuesta de la pregunta 3 del estudiante 12V

normal medirían lo mismo que  $FE$  y si te dice que  $A$  es el centro entonces los otros dos deben medir lo mismo.

E: ¿Por qué?

12V: Porque  $A$  se supone que ya es el centro de la circunferencia,  $A$  es la mitad de la recta, entonces por eso yo deduje que los otros dos lados deben tener la misma medida.

E: ¿Los mediste?

12V: Ah sí, Eso fue lo primero que pensé, lo primero que hice y luego para comprobarlo los medí con la regla.

En la respuesta escrita de este estudiante (véase Figura 16) podemos observar que no da ninguna justificación para su afirmación y que se equivoca al llamar escaleno al triángulo isósceles. Sin embargo, en sus respuestas de la entrevista aclaró que se equivocó en el nombre del triángulo y detalló cómo dedujo que los lados  $AC$  y  $AD$  eran iguales. Él giró estos lados hasta hacerlos coincidir con el diámetro de la circunferencia y dado que  $A$  es el centro, concluyó que debían ser iguales. Con esta nueva información, el nivel del estudiante 12V cambió de 2+ a 3+.

En el análisis de las respuestas escritas del alumno 25V se observó que en los dos incisos de la pregunta 1, sus respuestas fueron claras. Por lo que no hubo dudas sobre su ubicación, en cambio, en las preguntas 2,3 y 4 consideramos necesario entrevistarle para analizar su razonamiento con mayor profundidad.

#### ENTREVISTA DE 25V

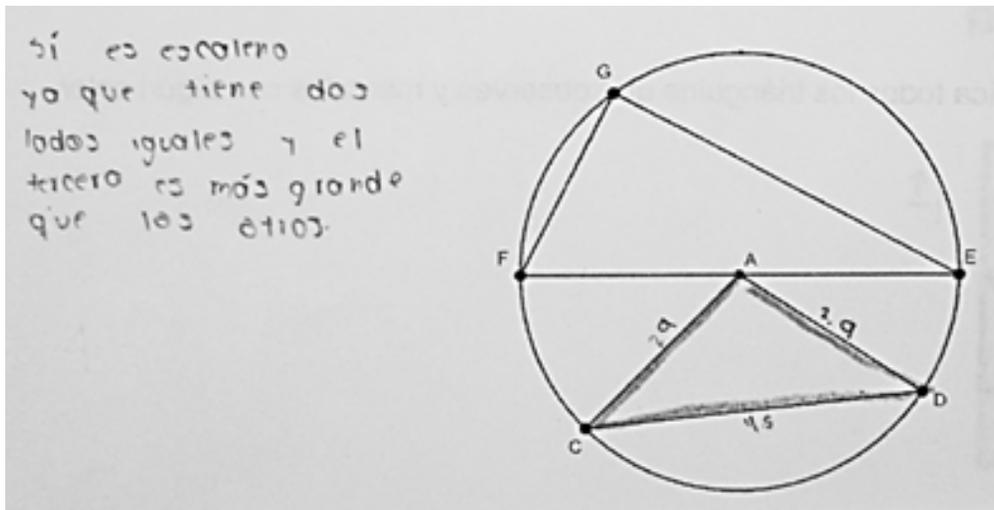


Figura 16: Imagen de la respuesta de la pregunta 4 del estudiante 12V

### Pregunta 2

E: Lee la segunda pregunta. ¿Qué era para ti ángulos iguales?, antes de contestar la pregunta

25V: Pues que tuvieran la misma apertura.

E: Los ángulos que para ti eran iguales los marcaste del mismo color, ¿Cómo decidiste que esos ángulos eran iguales?

25V: Porque se veían del mismo tamaño.

E: ¿Hubo otro concepto, aparte del que ya mencionaste, para marcar otro tipo de ángulos iguales?

25V: No.

E: Solo usaste la vista.

25V: Exacto.

El alumno 25V seleccionó la mayoría de los ángulos iguales de manera correcta (véase Figura 17), se dedujo que seleccionó ángulos opuestos por el vértice y alternos internos. Sin embargo, la respuesta no es clara porque hay colores que se repiten en ángulos que no son iguales; la ubicación inicial fue nivel 2+. Al preguntarle cuál había sido su criterio para seleccionar los ángulos iguales él respondió “Pues que tuvieran la misma apertura”, “Porque se veían del mismo tamaño” y confirmó que no había usado ninguna propiedad. Lo anterior nos llevó a decidir que su nivel correcto era el uno.

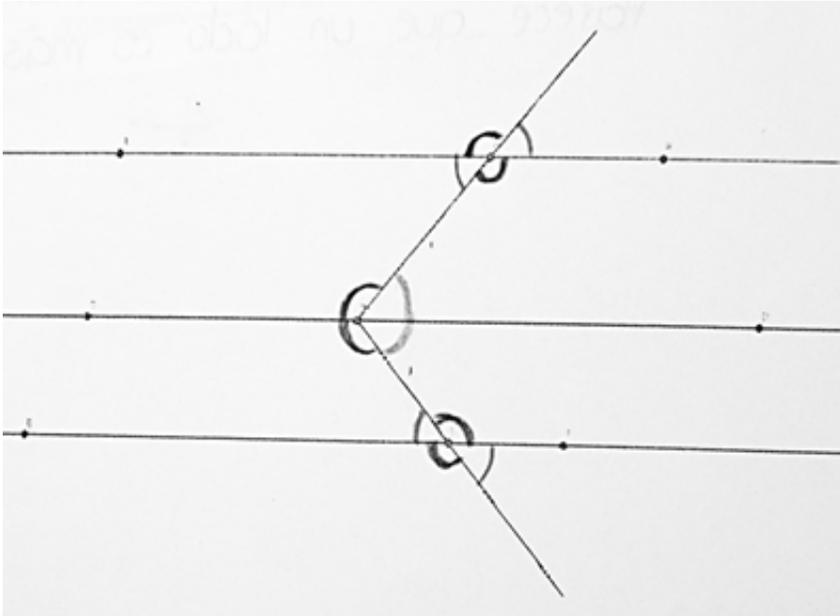


Figura 17: Imagen de la respuesta de la pregunta 2 del estudiante 25V

### Pregunta 3

E: Lee la tercera pregunta. ¿Me puedes leer lo que respondiste?

25V: Porque es el más grande y por lo tanto tiene mayor área.

E: ¿Qué triángulo marcaste como el de mayor área?

25V: EBF.

E: ¿En qué te basaste para decir que ese triángulo era de mayor área?

25V: Porque se veía más grande.

E: ¿Algún concepto teórico?

25V: No, solo el área, en el momento no.

El alumno 25V, en su respuesta escrita a la pregunta 3 (véase Figura 18), repinta en color rojo el contorno del triángulo mayor y escribió “Porque es el más grande, y por lo tanto tiene mayor área”, por lo que se le ubicó en el nivel 1. En la entrevista manifestó que solo usó su percepción para seleccionar el triángulo de mayor área, por lo que su ubicación se conservó en el nivel 1.

### Pregunta 4

E: Lee la cuarta pregunta. ¿Qué triángulo marcaste como isósceles?

25V: ACD.

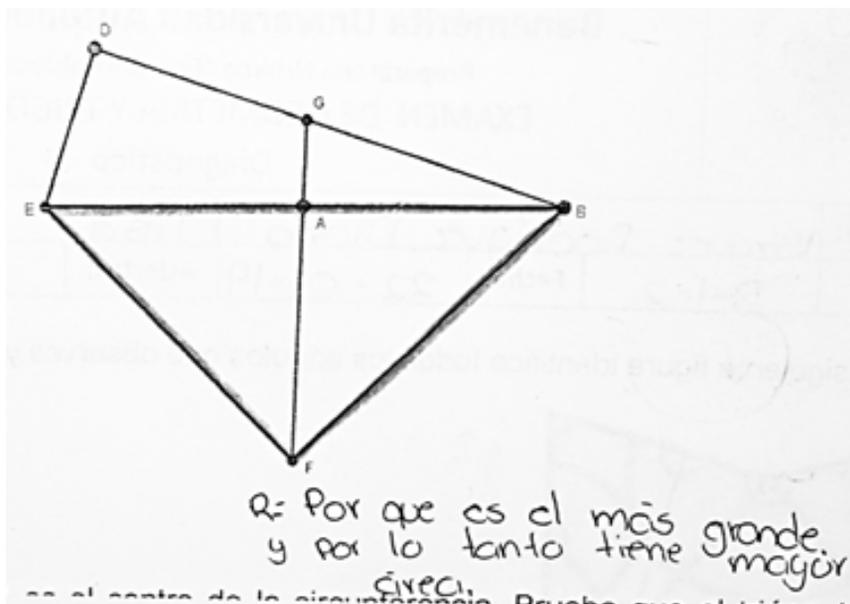


Figura 18: Imagen de la respuesta de la pregunta 3 del estudiante 25V

E: ¿Me puedes leer lo que respondiste?

25V: Sus lados miden lo mismo y la base tiene medidas distintas

E: ¿Qué concepto teórico fue el que utilizaste para saber que ese era el triángulo isósceles?

25V: Los lados iguales y la base de distinto tamaño.

E: ¿Cómo sabías que esos lados eran iguales?

25V: Porque según yo, se ven iguales.

El alumno 25V, en su respuesta escrita a la pregunta 4 (véase Figura 19), argumenta “Sus dos lados miden lo mismo (AC, AD) y la base tiene medidas distintas (CD)”, por lo que se le ubicó en el nivel 1+. En la entrevista, al preguntarle en qué se basaba para determinar que el triángulo ACD era isósceles, hace referencia a la definición “Sus lados miden lo mismo y la base tiene medidas distintas”, y al querer saber cuál era su base matemática para determinar que es triángulo isósceles, el refirió “Porque según yo, se ven iguales”. Al igual que en la pregunta anterior, se confirmó que solo usó la percepción para determinar que el triángulo ACD es isósceles, por lo que su ubicación se conservó en el nivel 1+.

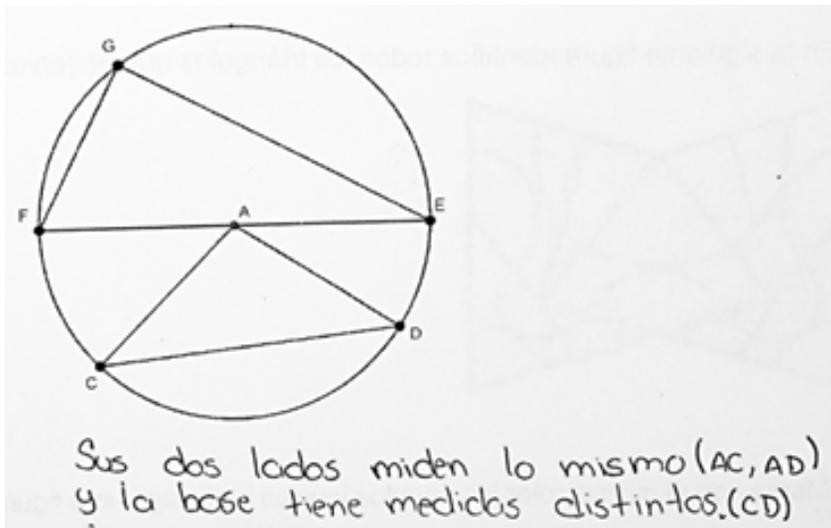


Figura 19: Imagen de la respuesta de la pregunta 4 del estudiante 25V

## 5 Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado el nivel de razonamiento de un grupo de estudiantes a través de un cuestionario con cuatro tareas relacionadas a los temas de ángulos y triángulos. Hemos mostrado algunas de las respuestas más representativas de cada nivel para que el interlocutor pueda identificar las características de los niveles de razonamiento evidenciados con mayor frecuencia por este grupo de estudiantes.

De los resultados se concluye que la mayoría de los alumnos respondió al cuestionario utilizando un razonamiento propio de los niveles 1 y 2 de Van Hiele. Lo anterior significa que, los que mostraron un nivel 1, usan únicamente la percepción o lo sensorial para diferenciar tipos de figuras. Estos alumnos no tienen una definición completa de los conceptos ángulo y triángulo, porque no hacen diferencia entre lados conformados por segmentos de rectas y los formados por segmentos de líneas curvas. Los que mostraron un nivel 2 usan definiciones básicas o aplican algunos conceptos como altura o base, o bien comprueban sus afirmaciones midiendo los lados de un triángulo. Se identificaron algunos casos aislados de alumnos (5 de 78) con razonamientos propios del nivel 3, los cuales realizan pruebas o bosquejos de pruebas

utilizando definiciones sencillas y propiedades básicas de los triángulos.

Se observó que el lenguaje utilizado por cada estudiante está relacionado con su nivel de razonamiento. A mayor nivel, el lenguaje usado es más formal y mejor estructurado, también es más rico en el uso de definiciones y conceptos geométricos. Esta es una coincidencia con lo descrito por Van Hiele.

Como una consecuencia de este trabajo se deduce la necesidad de diseñar actividades para el tema de ángulos y triángulos que favorezcan el tránsito del nivel 2 al nivel 3. También, nos planteamos diseñar tareas con las que podamos evaluar los niveles de razonamiento de otros conceptos geométricos para diseñar secuencias didácticas que favorezcan niveles de razonamiento más altos y que estén de acuerdo con el programa de estudio de las preparatorias de la BUAP.

## Agradecimientos

Agradecemos el apoyo del CONACyT a través del estímulo del Sistema Nacional de Investigadores para uno de los autores de este trabajo. También, la revisión cuidadosa del árbitro que llevó a una mejora importante de este capítulo. Dedicamos este trabajo a la memoria de nuestro compañero José Eduardo Reynoso Lara, quien falleció el 2 de febrero de 2021, debido a la pandemia que afecta al mundo actualmente. Lalo, siempre estarás presente en nuestros recuerdos.

## Bibliografía

- [1] R. Barroso, *El proceso de definir en matemáticas. Un caso: El triángulo*, Enseñanza de las Ciencias : revista de investigación y experiencias didácticas. **18,(2)** (2000), 285-295.
- [2] L.M. Casas y R. Luenengo, *Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo*, Enseñanza de las Ciencias : revista de investigación y experiencias didácticas. **23,(2)** (2005), 201-206.
- [3] D. Clements y B. Burns, *Students' Development of Strategies for Turn and Angle Measure*, Educational Studies in Mathematics. **41** (2000), 31-45.

- [4] M. Corberan, *Didáctica de la Geometría: Modelo de Van Hiele*. Universidad de Valencia, 1989.
- [5] De Villiers, *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the van Hiele theory: Some critical comments* (M.D). Fac. of Educ.; Univ. of Stellenbosch, 1987.
- [6] N. Douek, *Argumentation and Conceptualization in Context: a Case Study on Sunshadows in Primary School*, Educational Studies in Mathematics **39**, (1-3) (1999), 89-110.
- [7] B. Fyhn, *A Climbing Class' Reinvention of Angles*, Educational Studies in Mathematics. **67**,(1) (2007), 19-35.
- [8] A. Gutiérrez y A. Jaime, *On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning*, Focus on Learning Problems in Mathematics. **20**,(2-3) (1998), 27-46.
- [9] A. Gutiérrez, *Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria*, Tecné, Episteme y Didaxis: TED. **32**, segundo semestre (2012), 55-70.
- [10] A. Hoffer, *Geometry is more than proof*, The Mathematics Teacher. **74**(1) (1981), 11-18.
- [11] A. Jaime, *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, 1993.
- [12] M. Mitchelmore y P. White, *Development of Angle Concepts: A Framework for Research*, Mathematics Education Research Journal. **10**,(3) (1998), 4-27.
- [13] M. Mitchelmore y P. White, *Development of Angle Concepts by Progressive Abstractions and Generalization*, Educational Studies in Mathematics. **42** (2000), 209-238.
- [14] V. Munier y H. Merle, *Interdisciplinary Mathematics-Physics Approaches to Teaching the Concept of Angle in Elementary School*, International Journal of Science Education. **31**,(14) (2009), 1857-1895.

- [15] R. A. Rotaeche y G. Montiel, *Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria*, Educación Matemática. **21** (2017), 171-199.
- [16] R. A. Rotaeche y G. Montiel, *From the History of the Angle to its Epistemological Nature*, Contributions to a Scholar Design. Proceedings of the History and Pedagogy of Mathematics. (2008)
- [17] R. A. Rotaeche y G. Montiel, *Desarrollo histórico como mediador de conocimientos para la enseñanza del concepto de ángulo*, (2011), 191-218.
- [18] P. Tsamir, D. Tirosh y E. Levenson, *Intuitive nonexamples: the case of triangles*, Educational Studies in Mathematics. **69** (2008), 81-95.
- [19] P. Van Hiele, *Developing Geometric Thinking through Activities That, Teaching children mathematics*. (1999), 310–316.
- [20] M. Venega, *Niveles De Razonamiento Geométrico De Van Hiele Al Resolver Problemas Geométricos: Un Estudio Con Alumnos De 13 A 16 Años En Cantabria* (Tesis Maestría). Universidad de Cantabria, 2015.

Escuela Preparatoria Urbana Enrique Cabrera Barroso, BUAP  
Río Sabinas 6109, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

lhernan@cfm.buap.mx  
israel.molinal@correo.buap.mx  
eduardo.reynosol@correo.buap.mx

---

# **Análisis matemático**

---



## Capítulo 4

# Linear combination of trigonometric polynomial operators

Jorge Bustamante González  
FCFM, BUAP

### Abstract

We present estimates for the rate of convergence of two different types of linear combination of trigonometric polynomial operators.

## 1 Introduction

Let  $C_{2\pi}$  denote the Banach space of all  $2\pi$ -periodic, continuous functions  $f$ , defined on the real line  $\mathbb{R}$ , provided with the sup norm

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

For  $1 \leq p < \infty$ , the Banach space  $\mathbb{L}^p$  consists of all  $2\pi$ -periodic,  $p$ -th power Lebesgue integrable (class of) functions  $f$  on  $\mathbb{R}$  with the norm

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

In order to simplify we write  $X^p = \mathbb{L}^p$  for  $1 \leq p < \infty$  and  $X^{\infty} = C_{2\pi}$ . By  $W_p^r$  we mean the family of all functions  $f \in X^p$  such that  $f, \dots, D^{r-1}(f)$  are absolutely continuous and  $D^r(f) \in X^p$ . Here  $D(f) = D^1(f) = f'$  and  $D^{r+1}(f) = D(D^r(f))$ .

For  $r \in \mathbb{N}$ ,  $f \in X^p$ , and  $t > 0$  the usual modulus of continuity (smoothness) of order  $r$  of  $f$  is defined by

$$\omega_r(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^r f\|_p, \quad (1)$$

where

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f(x + kh).$$

A linear operator  $L : X^p \rightarrow X^p$  is positive if  $Lf \geq Lg$ , whenever  $f \geq g$ . As Korovkin showed in [10], for any sequence of positive linear operators  $L_n : X^p \rightarrow X^p$ , there are functions  $f \in X^p$  such that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{2+\varepsilon} \|L_n(f) - f\|_p = \infty,$$

for each  $\varepsilon > 0$ . Hence, if we want to obtain a rate of convergence to zero greater than  $1/n^2$ , another kind of operators should be considered. In some cases, special linear combinations have been used to construct new sequences which provide a rate of approximation faster than the original one.

The work is organized as follows. In Section 2 we recall three of the methods that have been used for studying linear combination of sequence of operators. In Section 3 we include several auxiliary results. Section 4 is devoted to present the main results. Finally, in Section 6 some applications of the main results are given.

## 2 Construction of linear combinations

We say that a sequence of linear operators  $L_n : X^p \rightarrow X^p$  is an *approximation process*, if  $\|L_n(f) - f\|_p \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , for every  $f \in X^p$ .

There are at least three different approaches to construct special linear combinations of an approximation process.

1) A first approach follows some ideas presented by de la Vallée Poussin [25, p. 47]. The method is complicated, because we need to choose the coefficients of the linear combinations in such a way that some of the first terms in the Taylor expansion of a differentiable function vanish. It can be done if we know the asymptotic expansions related with the so called Voronovskaya type theorems. We will refer to this method as the *VP-type combinations*.

Let  $q_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) be positive integers satisfying  $1 < q_1 < q_2 < \dots < q_m$ .

Since

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1/q_1 & \cdots & 1/q_m \\ 1 & 1/q_1^2 & \cdots & 1/q_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1/q_1^m & \cdots & 1/q_m^m \end{vmatrix} \neq 0,$$

there exist reals  $a_{i,m}$ ,  $0 \leq i \leq m$  such that

$$\sum_{i=0}^m a_{i,m} = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^m a_{i,m} \frac{1}{q_i^j} = 0, \quad \text{for } 1 \leq j \leq m.$$

Now, for a sequence of operators  $\{L_n\}$  set

$$M_{n,m}(f) = a_{0,m}L_{n-1}(f) + \sum_{i=1}^m a_{i,m}L_{n,i}(f), \tag{2}$$

where  $L_{n,i} = L(q_i n - 1)$ .

We do not know any reason for studying the operators defined for general sequence of integers  $1 < q_1 < q_2 < \cdots < q_m$ . For the moment we only consider the integers  $q_i = i + 1$ . These corresponding operators were considered by Rathore in [18] for the case of Jackson kernels.

For example, for  $m = 1$  and  $q_1 = 2$ , one has

$$-1 + 2 = 1 \quad \text{and} \quad -1 + 2\frac{1}{2} = 0.$$

Hence  $a_{0,1} = -1$  and  $a_{1,1} = 2$ .

If  $m = 2$ ,  $q_1 = 2$  and  $q_2 = 3$ , then

$$\frac{1}{2} - 4 + \frac{9}{2} = 1, \quad \frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{2} - 4\frac{1}{4} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{9} = 0.$$

Hence  $a_{0,2} = 1/2$ ,  $a_{1,2} = -4$  and  $a_{2,2} = 9/2$ .

Therefore

$$M_{n,1}(f) = -L_{n-1}(f) + 2L_{2n-1}(f)$$

and

$$M_{n,2}(f) = \frac{1}{2}L_{n-1}(f) - 4L_{2n-1}(f) + \frac{9}{2}L_{3n-1}(f).$$

Ditzian and Freud used this approach to study some linear combination of de la Vallée Poussin operators [7] with  $m = 2$ . An extension for any  $m \in \mathbb{N}$  was considered by Yu in [32].

The numbers  $a_{i,j}$  can be replaced by a sequence of different integers  $d_1, \dots, d_{m+1}$  for which the determinant is different from zero,  $a_{i,j} = d_i^{-j}$ . In this case, the operators can be written in the form

$$L_n(f, x) = \sum_{j=0}^k \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{d_j}{d_j - d_i} L_{nd_j}(f, x). \quad (3)$$

For application of these combinations in approximation theory see the [26] and [11].

2) For a sequence  $\{L_n\}$ , the second approach consider iterates of operators and the construction is written in the form

$$(I - L_n)^r(f) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} L_n^k(f, x), \quad (4)$$

where  $L_n^0 = I$  and  $L_n^{k+1} = L_n(L_n^k)$ . We refer to this method as *iterative combinations*, but they are also called Boolean sums. It seen that Natanson [15] was the first in using this idea. These kind of operators also appeared in [5, p. 97].

Other authors have presented the operators (4) in a different form. For instance, if

$$L_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \varrho_{k,n} \cos k(v-x) \right\} dv, \quad f \in X^1,$$

Sha [21] defined

$$P_n^{[r]} f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n}^{[r]} \cos k(v-x) \right\} dv,$$

where  $\lambda_{k,n}^{[r]} = 1 - (1 - \varrho_{k,n})^r$ . A straightforward computation (or see [21, p. 56-57]) shows that

$$P_n^{[r]} f(x) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \binom{r}{j} L_n^j f(x).$$

Therefore

$$f - P_n^{[r]} f(x) = (I - L_n)^r f(x).$$

As an application Sha considered the Jackson operators. Later, Weng and Sha [31] considered the same operators in  $\mathbb{L}^p$  spaces and studied their saturation properties.

3) The third approach uses the specific form of the symmetric difference to define linear operators  $L_n$  in such a way that

$$f(x) - L_n(f, x) = \frac{(-1)^r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \Delta_t^r f(x) dt, \tag{5}$$

for a given kernel  $K_n(t)$ . Mamedov [14] and Petrov [17] gave some result for the operators (5). The construction was also used by Lorentz [13, p. 57]. We call this method *combinations with symmetric differences*.

Here, we discuss approximation properties of the operators (4) and (5).

### 3 Auxiliary results

The family of all trigonometric polynomials of degree non greater than  $n$  is denoted by  $\mathbb{T}_n$ .

For  $n \in \mathbb{N}_0$  and  $f \in X^p$ , the best approximation of order  $n$  is defined by

$$E_n(f)_p = \inf_{T \in \mathbb{T}_n} \|f - T\|_p.$$

The convolution of two functions  $f$  and  $g$  in  $\mathbb{L}^1$  is defined by

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)g(t)dt. \tag{6}$$

The following results are well known.

**Proposition 3.1.** [5, Proposition 0.4.1] *If  $f \in X^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) and  $g \in \mathbb{L}^1$ , then  $(f * g) \in X^p$  and*

$$\|(f * g)\|_p \leq \|g\|_1 \|f\|_p.$$

**Proposition 3.2.** [5, Proposition 1.1.14] *Assume ( $1 \leq p \leq \infty$ ). If  $r \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ ,  $g \in C_{\infty}^r$ , then  $f * g \in W_p^r$  and*

$$(f * g)^{(r)} = (f * g^{(r)}).$$

**Theorem 3.3.** [5, Page 76,] Assume  $r \in \mathbb{N}$  and  $1 \leq p \leq \infty$ .

(i) If  $f \in X^p$  and  $\lambda t > 0$ , then

$$\omega_r(f, \lambda t)_p \leq (1 + \lambda)^r \omega_r(f, t)_p. \quad (7)$$

(ii) If  $r \in \mathbb{N}$  and  $f \in W_p^r$ , then

$$\omega_r(f, t) \leq t^r \|f^{(r)}\|_p. \quad (8)$$

For continuous functions Proposition 3.4 was proved by Stechkin in [23]. For the  $L^p$  spaces the proof is similar to one in the continuous case.

**Proposition 3.4.** Assume  $1 \leq p \leq \infty$ . If  $r, n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in X^p$ ,  $T_n \in \mathbb{T}_n$ , and  $t > 0$ , then

$$\frac{1}{n^r} \|T_n^{(r)}\|_p \leq \frac{1}{2^r} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p + \|f - T_n\|_p. \quad (9)$$

**Proposition 3.5.** If  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $h > 0$ , and

$$S_{r,h}(f, x) = - \sum_{k=1}^r (-1)^k \binom{r}{k} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(x + kh \sum_{k=1}^r u_k\right) du_1 \cdots du_k. \quad (10)$$

then  $S_{r,h}(f) \in W_p^r$ ,

$$\|f - S_{r,h}(f)\|_p \leq \omega_r(f, rh)_p, \quad \text{and} \quad \|S_{r,h}^{(r)}(f)\|_p \leq \frac{2^r - 1}{h^r} \omega_r(f, h)_p.$$

Equation (12) appeared in [24, Theorem 5] for continuous functions in a slight different form.

**Theorem 3.6.** Assume  $1 \leq p \leq \infty$ . Fix  $r \in \mathbb{N}$ , a constant  $\Lambda$ , and let  $\{L_n\}$ ,  $L_n : X^p \rightarrow X^p$ , be a sequence of bounded linear operators such that

$$\|T_n - L_n(T_n)\|_p \leq \frac{\Lambda}{n^r} \|T_n^{(r)}\|_p. \quad (11)$$

for each  $n \in \mathbb{N}$  and  $T_n \in \mathbb{T}_n$ .

(i) For each  $f \in X^p$  and  $n \in \mathbb{N}$  one has

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq (1 + \|L_n\| + \Lambda) E_{n,p}(f) + \frac{\Lambda}{2^r} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p, \quad (12)$$

where  $E_{n,p}(f)$  is the best approximation of  $f$  by trigonometric polynomials.

(ii) If for each  $n \in \mathbb{N}$ , and  $T_n \in \mathbb{T}_n$ ,  $L_n(T_n) = T_n$ , then

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq (1 + \|L_n\|)E_{n,p}(f), \tag{13}$$

for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ .

*Proof.* (i) Fix  $f \in X^p$  and, for each  $n \in \mathbb{N}$ , let  $T_n \in \mathbb{T}_n$  be a polynomial of the best approximation for  $f$ . We have

$$\begin{aligned} \|f - L_n(f)\|_p &\leq \|f - T_n\|_p + \|T_n - L_n(T_n)\|_p + \|L_n(T_n - f)\|_p \\ &\leq (1 + \|L_n\|)E_{n,p}(f) + \frac{\Lambda}{n^r} \|T_n^{(r)}\|_p \\ &\leq (1 + \|L_n\| + \Lambda)E_{n,p}(f) + \frac{\Lambda}{2^r} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p, \end{aligned} \tag{14}$$

where we have used equation (9).

(i) We can take  $\Lambda = 0$  in (i). □

**Theorem 3.7.** Let  $K$  be a positive even  $2\pi$ -periodic kernel and for  $f \in C_{2\pi}$  set

$$U(f, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(t - x)dt, \quad \Delta = \int_{-\pi}^{\pi} K(t)dt \neq 0.$$

For each  $\delta > 0$  and  $f \in C_{2\pi}$  one has

$$\|f - K(f)\|_{\infty} \leq \left(1 + \frac{2}{\Delta} \int_0^{\pi} \left[\frac{t}{\delta}\right] K(t)dt\right) \omega_1(f, \delta)_{\infty},$$

and

$$\|f - K(f)\|_{\infty} \leq \left(1 + \frac{2}{\Delta} \int_0^{\pi} \left(\left[\frac{t}{\delta}\right]^2 + 2\left[\frac{t}{\delta}\right]\right) K(t)dt\right) \omega_2(f, \delta)_{\infty}.$$

An important case appears when  $K(t) = K_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \varrho_{k,n} \cos(kx) \geq 0$  is a positive kernel. In this case one has

$$\|f - K_n(f)\|_{\infty} \leq \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{n}{\pi}t\right] K_n(t)dt\right) \omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{\infty},$$

This inequality has been used by several authors (for instance, see [29] and [30]).

The ideas of the proof of Theorem 3.7 have been used for several authors. In many cases particular operators were considered. For instance, for the first modulus similar inequalities appeared in [29], [20], [1], [8], [27], [28], [12] and, for the second modulus in [2] and [9]. It can be proved that the constant presented in the result is the best possible, but we will not prove this assertion here. As usual  $[x]$  denotes the integer part of  $x$ . When one looks for the best constant a careful analysis of the integrals in Theorem 3.7 should be done. The proofs of Theorem 3.7 is similar to the one given for Theorem 3.8.

With respect to the next result, the estimate (16) has been known for a long time (see [4, Proposition 3.1] and [5, page 69]). Equation (17) is needed for applications of Theorem 3.6.

**Theorem 3.8.** *Let  $K$  be an even periodic non-negative function such that  $\|K\|_1 = 1$  and  $1 \leq p \leq \infty$ . If  $L(f) = (f * K)$  and  $a > 0$ , for any  $f \in X^p$  and  $g \in W_p^2$  one has*

$$\|L(f)\|_p \leq \|f\|_p, \tag{15}$$

$$\|f - L(f)\|_p \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{a\sqrt{2}}\right)^2 \omega_2(f, a\sqrt{1 - \alpha_K}), \tag{16}$$

and

$$\|g - L(g)\|_p \leq \frac{\pi^2}{4} (1 - \alpha_K) \|g''\|_p, \tag{17}$$

where  $\alpha_K = (1/\pi) \int_0^\pi \cos(t)K(t)dt$ .

*Proof.* The assertion (15) follows from Proposition 3.1.

Since  $K$  is even, then

$$L(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x + t)K(t)dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x - t)K(t)dt$$

and

$$L(f, x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x + t) - 2f(x) + f(x - t))K(t)dt.$$

For each  $\lambda > 0$  one has (the generalized Minkowskii inequality as well as equation (7) are needed)

$$\|L(f) - f\|_p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \|f(\circ + t) + f(\circ - t) - 2f(\circ)\|_p K(t)dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \omega_2(f, t)_p K(t) dt \leq \omega\left(f, \frac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 + \lambda t)^2 K(t) dt \\ &= \omega_2\left(f, \frac{1}{\lambda}\right)_p \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 + 2\lambda t + \lambda^2 t^2) K(t) dt. \end{aligned}$$

Notice that

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^2 K(t) dt &\leq \pi \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} K(t) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos t) K(t) dt \\ &= \frac{\pi^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos t K(t) dt\right), \end{aligned} \tag{18}$$

and

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t K(t) dt \leq \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^2 K(t) dt\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi K(t) dt\right)^{1/2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \alpha_K}.$$

Therefore, by taking  $\lambda = (a\sqrt{1 - \alpha_K})^{-1}$ ,

$$\|L(f) - f\|_p \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\pi}{a\sqrt{2}} + \frac{\pi^2}{2a^2}\right) \omega_2(f, a\sqrt{1 - \alpha_K}).$$

On the other hand, if  $g \in W_p^2$ , then (see equation (8))

$$\begin{aligned} \|L(g) - g\|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \|g(\circ + t) + g(\circ - t) - 2g(\circ)\|_p K(t) dt \\ &\leq \frac{\|g''\|_p}{2\pi} \int_0^\pi t^2 K(t) dt \leq \frac{\pi^2}{4} (1 - \alpha_K) \|g''\|_p. \quad \square \end{aligned}$$

## 4 Estimate for iterative combinations

We first present inequalities related with bounded linear operators. Later, positive operators are considered. We also study sequence of operators that commutes with the differentiation operator. Taking into account Proposition 3.2 the operators defined by convolution satisfy the needed commutative properties.

The ideas behind the proof of equation (20) have been used for several authors (for instance, see [4, equation (2.11)]).

**Theorem 4.1.** *Assume  $1 \leq p \leq \infty$ . Fix  $r \in \mathbb{N}$ , a constant  $\Lambda$ , and let  $\{L_n\}$ ,  $L_n : X^p \rightarrow X^p$ , be a sequence of bounded linear operators such that for each  $n \in \mathbb{N}$ , and  $T_n \in \mathbb{T}_n$*

$$\|T_n - L_n(T_n)\|_p \leq \frac{\Lambda}{n^r} \|T_n^{(r)}\|_p. \quad (19)$$

(i) *If  $L_n(X^p) \subset \mathbb{T}_n$ , for each  $n \in \mathbb{N}$ , and  $L'_n(g) = L_n(g')$ , for  $g \in \mathbb{T}_n$ , then*

$$\|(I - L_n)^m(f)\|_p \leq ((1 + \|L_n\|)^m + \Lambda^m) E_{n,p}(f) + \frac{\Lambda^m}{2^{rm}} \omega_{rm}\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p, \quad (20)$$

for every  $m \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ .

(ii) *If for each  $n \in \mathbb{N}$ , and  $T_n \in \mathbb{T}_n$ ,  $L_n(T_n) = T_n$ , then*

$$\|(I - L_n)^m(f)\|_p \leq ((1 + \|L_n\|)^m) E_{n,p}(f),$$

for every  $n, m \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ .

*Proof.* (i) Set  $M_n(f) = (I - (I - L_n)^m)(f)$ . First notice that

$$\|M_n\| \leq \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \|L_n^k\| \leq \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \|L_n\|^k \leq (\|L_n\| + 1)^m - 1$$

and  $(I - L_n)^{m-1}(g) \subset W_p^r$ , whenever  $g \in W_p^r$ .

If  $m > 1$  and  $T \in \mathbb{T}_n$ , then

$$\begin{aligned} \|(I - L_n)^m(T)\|_p &= \|(I - L_n)((I - L_n)^{m-1}(T))\|_p \leq \frac{\Lambda}{n^r} \|((I - L_n)^{m-1}(T))^{(r)}\|_p \\ &= \frac{\Lambda}{n^r} \|(I - L_n)^{m-1}(T^{(r)})\|_p \leq \frac{\Lambda^m}{n^{rm}} \|T^{(mr)}\|_p. \end{aligned}$$

Note that

$$-(I - L_n)^m(f) = f - (I - L_n)^m(f) - f = f - M_n(f).$$

In particular, if  $T_n \in \mathbb{T}_n$ ,

$$\|T_n - M_n(T_n)\|_p = \|(I - L_n)^m(f)\|_p \leq \frac{\Lambda^m}{n^{rm}} \|T_n^{(mr)}\|_p.$$

Thus one has an inequality similar to (11).

Now we apply Theorem 3.6 to the operator  $M_n(f)$  to obtain, for  $f \in X^p$

$$\begin{aligned} \|(I - L_n)^m(f)\|_p &= \|f - M_n(f)\|_p \\ &\leq (1 + \|M_n\| + \Lambda^m)E_{n,p}(f) + \frac{\Lambda^m}{2^{rm}}\omega_{rm}\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p \\ &\leq ((1 + \|L_n\|)^m + \Lambda^m)E_{n,p}(f) + \frac{\Lambda^m}{2^{rm}}\omega_{rm}\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p. \end{aligned}$$

(ii) We can take  $\Lambda = 0$  in (i). □

**Theorem 4.2.** Fix  $1 \leq p \leq \infty$ . Fix  $r \in \mathbb{N}$  ( $r > 1$ ) and a constants  $K_3$ . If  $\{L_n\}$ ,  $L_n : X^p \rightarrow X^p$ , is a sequence of linear operators such that for each  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g \in W_p^{2r}$ ,

$$\|g - L_n(g)\|_p \leq \frac{K_3}{n^r} \|g^{(2r)}\|_p, \tag{21}$$

then

$$\|(I - L_n)^r(f)\|_p \leq \left( (1 + \|L_n\|)^r + K_3(2^{2r} - 1) \right) \omega_{2r}\left(f, \frac{2r}{\sqrt{n}}\right)_p,$$

for every  $n \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ .

*Proof.* Let  $g = W_{2r,1/n}(f)$  be defined by (10) with  $h = 1/\sqrt{n}$ . From Proposition 3.5 we know that  $g \in W_p^{2r}$  and

$$\begin{aligned} \|(L_n - I)^r(f)\|_p &\leq \|(L_n - I)^r(f - g)\|_p + \|(L_n - I)^r(g)\|_p \\ &\leq (1 + \|L_n\|)^r \|f - g\|_p + \frac{K_3}{n^r} \|g^{(2r)}\|_p \\ &\leq (1 + \|L_n\|)^r \omega_{2r}(f, 2rh)_p + \frac{K_3}{n^r} \frac{2^{2r} - 1}{h^{2r}} \omega_{2r}(f, h)_p \\ &\leq \left( (1 + \|L_n\|)^r + K_3(2^{2r} - 1) \right) \omega_{2r}\left(f, \frac{2r}{\sqrt{n}}\right)_p. \end{aligned} \tag{□}$$

**Corollary 4.3.** Assume  $1 \leq p \leq \infty$ . Let  $\{Q_n\}$  ( $Q_n \in \mathbb{T}_n$ ) be a sequence of even positive polynomials such that

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) dt = 1.$$

Set

$$L_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q_n(x-t)dt, \quad f \in X^1,$$

and

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t)Q_n(t)dt.$$

(i) If there exists a constant  $\Lambda$  such that  $0 < 1 - \lambda_n \leq \Lambda/n^2$  for each  $n \in \mathbb{N}$ , then

$$\|(I - L_n)^m(f)\|_p \leq (2^m + (\Lambda\pi^2/4)^m)E_{n,p}(f) + \frac{(\Lambda\pi^2)^m}{2^{2m}}\omega_{2m}\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p,$$

for each  $f \in X^p$  and  $m \in \mathbb{N}$ .

(ii) If there exists a constant  $\Lambda$  such that  $1 - \lambda_n \leq \Lambda/n$ , then

$$\|(I - L_n)^m(f)\|_p \leq \left(2^m + (\Lambda\pi)^m(2^{2m} - 1)\right)\omega_{2m}\left(f, \frac{2m}{\sqrt{n}}\right)_p.$$

for every  $m \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ .

*Proof.* (i) From (15) and (17) we know that  $\|L_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$  and

$$\|g - L_n(g)\|_p \leq \frac{\pi^2}{4}(1 - \lambda_n)\|g''\|_p \leq \frac{\Lambda\pi^2}{4n^2}\|g''\|_p, \quad g \in W_p^2.$$

Thus (19) holds with the constant  $\Lambda\pi^2/4$ . On the other hand, from Proposition 3.2 we know that  $L'_n(g) = L_n(g')$ , for each  $g \in W_p^1$ . Hence, it follows from Theorem 4.1 with  $r = 2$  that

$$\|(I - L_n)^m(f)\|_p \leq (2^m + (\Lambda\pi^2/4)^m)E_{n,p}(f) + \frac{(\Lambda\pi^2/4)^m}{2^{2m}}\omega_{2m}\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p.$$

(ii) We apply Theorem 4.2. In this case  $K_3 = \Lambda\pi^2/4$ . □

Let  $\{Q_n\}$  be a sequence of positive trigonometric polynomials which can be written in the form

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \varrho_{k,n} \cos(kx),$$

We consider the operators

$$\mathcal{L}_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q_n(t-x)dt. \quad (22)$$

**Remark 4.4.** If  $\mathcal{L}_n$  is given by (22), equation (16) can be written as

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_p \leq \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4} \omega_2(f, \pi\sqrt{1 - \varrho_{1,n}}), \quad (a = \pi),$$

and

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_p \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 \omega_2(f, \sqrt{1 - \varrho_{1,n}}), \quad (a = 1).$$

These kind of estimates were given in [5, Theorem 1.5.8].

**Theorem 4.5.** Assume  $1 \leq p \leq \infty$ . Let  $\mathcal{L}_n$  is given by (22).

(i) If  $r \in \mathbb{N}$  and  $g \in W_p^{2r}$ , then

$$\|(1 - \mathcal{L}_n)^r(g)\|_p \leq \left(\frac{\pi^2(1 - \varrho_{1,n})}{4}\right)^r \|D^{2r}(g)\|_p. \quad (23)$$

(ii) If  $r \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ , then

$$\|(I - \mathcal{L}_n)^r(f)\|_p \leq (2^r + 2^{2r} - 1) \omega_{2r}(f, r\pi\sqrt{1 - \varrho_{1,n}}).$$

*Proof.* (i) We proceed by induction. The case  $r = 1$  is just (17). If we assume that the inequality holds for some  $r \in \mathbb{N}$  and  $g \in W_p^{2r+2}$ , then

$$\begin{aligned} \|(1 - \mathcal{L}_n)^{r+1}(g)\|_p &\leq \|(1 - \mathcal{L}_n)^r((I - \mathcal{L}_n)(g))\|_p \\ &\leq \left(\frac{\pi^2(1 - \varrho_{1,n})}{4}\right)^r \|D^{2r}(1 - \mathcal{L}_n(g))\|_p = \left(\frac{\pi^2(1 - \varrho_{1,n})}{2}\right)^r \|(1 - \mathcal{L}_n)(D^{2r}(g))\|_p \\ &\leq \left(\frac{\pi^2(1 - \varrho_{1,n})}{4}\right)^{r+1} \|D^{2(r+1)}(g)\|_p. \end{aligned}$$

Note that, as a convolution operator,  $\mathcal{L}_n$  commutes with  $D$  (see Proposition 3.2).

(ii) For  $f \in X^p$ , let  $g = W_{2r,h}(f)$  be defined by (4.2) with  $h = \pi\sqrt{1 - \varrho_{1,n}}/2$ . From Proposition 3.5 we know that  $g \in W_p^{2m}$  and

$$\begin{aligned} \|(I - \mathcal{L}_n)^r(f)\|_p &\leq 2^r \|f - g\|_p + \|(I - \mathcal{L}_n)^r(g)\|_p \\ &\leq 2^r \|f - g\|_p + \left(\frac{\pi^2(1 - \varrho_{1,n})}{4}\right)^r \|D^{2r}(g)\|_p \\ &\leq 2^r \omega_{2r}(f, 2rh)_p + \left(\frac{\pi^2(1 - \varrho_{1,n})}{4}\right)^r \frac{2^{2r} - 1}{h^{2r}} \omega_{2r}(f, h)_p \\ &\leq (2^r + 2^{2r} - 1) \omega_{2r}(f, 2rh)_p. \quad \square \end{aligned}$$

**Remark 4.6.** If we want a result in terms of the moduli of odd order, then we consider the error in the form

$$\mathcal{L}_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x))Q_n(t)dt,$$

and, as above, we can prove that if  $g \in W_p^r$  ( $r$  no necessarily even), then

$$\|(I - \mathcal{L}_n)^r(g)\|_p \leq \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^r (1 - \varrho_{1,n})^{r/2} \|D^r(g)\|_p.$$

If  $f \in X^p$ , then

$$\|(I - \mathcal{L}_n)^r(f)\|_p \leq (1 + r^r)\omega_r\left(f, \pi\sqrt{2(1 - \varrho_{1,n})}\right).$$

## 5 Linear combinations with symmetric differences

First we consider a particular variant for even index. It is not the usual one, but it has the advantage that allows us to obtain good constants.

Denote

$$\Omega_h^{2r} f(x) = \sum_{k=0, k \neq r}^{2r} (-1)^k \binom{2r}{k} f(x + (r - k)h)$$

Notice that the symmetric difference of order  $2r$  can be written as

$$\Delta_h^{2r} f(x) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \binom{2r}{k} f(x + (r - k)h) = (-1)^r \binom{2r}{r} f(x) + \Omega_h^{2r} f(x).$$

This expression motivates the definition, for any  $K \in \mathbb{L}^1$  and  $f \in X^1$ ,

$$L_{2r}(f, x) = L_{K,2r}(f, x) = (-1)^{r+1} \frac{(r!)^2}{(2r)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t)\Omega_t^{2r} f(x)dt. \tag{24}$$

**Proposition 5.1.** Fix  $1 \leq p \leq \infty$  and  $K \in \mathbb{L}^1$  such that  $\int_{-\pi}^{\pi} K(t)dt = 2\pi$ . If  $r \in \mathbb{N}$ , and  $L_{2r}$  is defined by (24), then

$$\|L_{2r}(f)\|_p \leq \|K\|_1 \frac{(r!)^2}{(2r)!} \left(2^{2r} - \binom{2r}{r}\right) \|f\|_p,$$

$$\|g - L_{2r}(g)\|_p \leq \|g^{(2r)}\|_p \frac{(r!)^2}{(2r)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)| t^{2r} dt$$

and

$$\|f - L_{2r}(f)\|_p \leq \frac{(r!)^2}{(2r)!} \left( \sum_{k=0}^{2r} \binom{2r}{k} \frac{1}{\delta^k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)t^k| dt \right) \omega_{2r}(f, \delta)_p,$$

for any  $f \in X^p$ ,  $g \in W_p^{2r}$ , and  $\delta > 0$ .

*Proof.* First

$$\begin{aligned} \|L_{2r}(f)\|_p &\leq \frac{(r!)^2}{(2r)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)| \|\Omega_t^{2r} f\|_p dt \\ &\leq \|f\|_p \frac{(r!)^2}{(2r)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)| dt \sum_{k=0, k \neq r}^{2r} \binom{2r}{k} \\ &\leq \|f\|_p \frac{(r!)^2}{(2r)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)| dt \left( 2^{2r} - \binom{2r}{r} \right). \end{aligned}$$

Note that

$$\begin{aligned} f(x) - L_{2r}(f, x) &= (-1)^r \frac{(r!)^2}{(2r)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t) \left( (-1)^r \binom{2r}{2} f(x) + \Omega_h^{2r} f(x) \right) dt \\ &= (-1)^r \frac{(r!)^2}{(2r)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t) \Delta_t^{2r} f(x) dt. \end{aligned}$$

Therefore, for  $g \in W_p^{2r}$  (see equation (8)),

$$\|g - L_{2r}(g)\|_p \leq \|g^{(2r)}\|_p \frac{(r!)^2}{(2r)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)| t^{2r} dt$$

and (see equation (7))

$$\begin{aligned} \|f - L_{2r}(f)\|_p &\leq \frac{(r!)^2}{(2r)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)| \omega_{2r}(f, t)_p dt \\ &\leq \frac{(r!)^2}{(2r)!} \omega_{2r}(f, \delta)_p \sum_{k=0}^{2r} \frac{1}{\delta^k} \binom{2r}{k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)t^k| dt. \quad \square \end{aligned}$$

For the use of Proposition 5.1 with a sequence  $\{K_n\}$  of polynomials we need estimates of the moments  $\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)t^k|$ ,  $0 \leq k \leq 2r$ , (even in the case of positive polynomials). In general it is not an easy task and depends on the particular sequence. The analysis of the moments has been done in details only for some particular operators.

Another operators are obtained by defining

$$M_{K,r}(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t) \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \binom{r}{k} f(x + kt) dt. \tag{25}$$

An assertion analogous to Proposition 5.1 follows easily. This construction has the advantage that it can be done for any  $r \in \mathbb{N}$ , while the operators (24) are only defined for even  $r$ . But the constant associated to  $M_{k,r}$  are bigger. For instance  $\|M_{K,r}\| \leq (2^r - 1)\|K\|_1$ . Notice that

$$f(x) - M_{K,r}(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t) \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f(x + kt) dt$$

**Proposition 5.2.** *Fix  $1 \leq p \leq \infty$  and  $K \in \mathbb{L}^1$  such that  $\int_{-\pi}^{\pi} K(t)dt = 2\pi$ . If  $r \in \mathbb{N}$ , and  $M_{K,r}$  is defined by (25), then*

$$\|g - M_{K,r}(g)\|_p \leq \|g^{(r)}\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)t^r| dt, \quad g \in W_p^r,$$

and, for any  $f \in X^p$  and  $\delta > 0$ .

$$\|f - M_{K,r}(f)\|_p \leq \left( \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{1}{\delta^k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)t^k| dt \right) \omega_r(f, \delta)_p.$$

## 6 Applications

The Fejér operators are defined by

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) A_k(f, x) \tag{26}$$

The results presented above can be used to prove part of Theorem 6.1.

**Theorem 6.1.** (Bustamante and Flores, [3]) *If  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in X^p$  and  $n, r \in \mathbb{N}$ , with  $r$  even, then*

$$\begin{aligned} \|(I - \sigma_n)^r(f)\|_p &\leq (2^r + 1)E_{n,p}(f) + \frac{1}{2^r}\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p \\ &\leq \left(1 + 4r(6 + \ln r)(2^r + 1)\right)\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n + 1}\right)_p. \end{aligned}$$

For  $n \geq 1$  the Jackson kernel is defined by

$$J_{2n-2}(t) = \frac{1}{\gamma_{2n-2}} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4, \tag{27}$$

where  $\gamma_{2n-2}$  is chosen from the condition

$$\frac{1}{\gamma_{2n-2}} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2r} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2(n-1)} \mu_{k,2n-2} \cos(kt), \tag{28}$$

for some real constant  $\mu_{k,n}$ . The exact values of these constants are known (see [16] or [19]). Here we only need to recall that

$$\mu_{1,2n-2} = 1 - \frac{3}{2n^2 + 1}$$

**Theorem 6.2.** *If  $1 \leq p \leq \infty$  and  $\mathbb{J}_{2n-2}$  is the Jackson operator, for each  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 5$  and  $f \in X^p$ , one has*

$$\|(I - \mathbb{J}_{2n-2})^r(f)\|_p \leq \left(2^r + 2^{2r} - 1\right)\omega_{2r}\left(f, \frac{r\pi}{n}\right)_p.$$

*Proof.* Recall that

$$1 - \varrho_{1,2n-2} = \frac{3}{2n^2 + 1}.$$

Hence, it follows from Theorem 4.5 that

$$\begin{aligned} \|(I - \mathbb{J}_{2n-2})^r(f)\|_p &\leq \left(2^r + 2^{2r} - 1\right)\omega_{2r}\left(f, r\pi\sqrt{1 - \varrho_{1,2n-2}}\right)_p \\ &\leq \left(2^r + 2^{2r} - 1\right)\omega_{2r}\left(f, \frac{r\pi\sqrt{3}}{\sqrt{2(2n^2 + 1)}}\right)_p \leq \left(2^r + 2^{2r} - 1\right)\omega_{2r}\left(f, \frac{r\pi}{n}\right)_p. \quad \square \end{aligned}$$

For  $n > 2$ , the Fejér-Korovkin kernel is defined by

$$K_n(x) = \frac{1}{n+2} \sin^2 \frac{\pi}{n+2} \frac{\cos^2((n+2)x/2)}{(\cos(\pi/(n+2)) - \cos x)^2},$$

for  $x \neq \pm\pi/(n+2) + 2j\pi, j \in \mathbb{Z}$ .

For  $f \in X^1$  and  $n \in \mathbb{N}$ , the Fejér-Korovkin operator is defined by

$$\mathbb{F}_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt.$$

A representations of the Fejér-Korovkin operators in the form (22) can be found in [16, page 129] and [22, p. 1098 ]. In particular

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \varrho_{k,n} \cos(kx),$$

with

$$\varrho_{1,n} = \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

Estimates for error in approximation by the iterative linear combinations of Féjer-Korovkin were given by Butzer and Nessel in [5, p. 97]. But they only considered smooth functions and did not provided any information concerning the constants.

**Theorem 6.3.** *Assume  $1 \leq p \leq \infty, r \in \mathbb{N}$ , and  $\mathbb{F}_n$  is the Fejér-Korovkin operator. If  $n \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ , then*

$$\|(I - \mathbb{F}_n)^r(f)\|_p \leq \left(2^r + 2^{2r} - 1\right) \omega_{2r} \left(f, \frac{r\pi^2}{\sqrt{2}(n+2)}\right)_p.$$

*Proof.* Since  $1 - \cos x \leq x^2/2$ , we know that

$$\sqrt{1 - \varrho_{1,n}} = \sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{n+2}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}(n+2)}.$$

Thus the results follows from Theorem 4.5. □

As another application we consider the singular integral of de la Vallée-Poussin of degree  $n$  defined by

$$V_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)v_n(t)dt \quad \text{where} \quad v_n(t) = \frac{1}{2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left(2 \cos \frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

**Theorem 6.4.** *If  $1 \leq p \leq \infty$  and  $r \in \mathbb{N}$ , for each  $n \in \mathbb{N}$  and  $f \in X^p$ , one has*

$$\|(I - V_n)^r(f)\|_p \leq \left(2^{2r} + 2^r - 1\right)\omega_{2r}\left(f, \frac{2^r}{\sqrt{n}}\right)_p.$$

*Proof.* We obtain the proof from Theorem 4.2. We should compute the norm of the operator  $V_n$  and verify equation (21) with  $K_3 = 1$ .

Since  $V_n$  is a positive operator  $\|V_n\| = 1$ .

It is known that (see [6, p. 79])

$$V_n(f, x) - f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} D^2 V_k(f, x), \quad a.e.$$

If  $g \in W_p^2$ , since  $D$  and  $V_n$  commute, then

$$\|V_n(g) - g\|_p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \|D^2 V_k(g)\|_p = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \|V_k(D^2 g)\|_p \leq \gamma_n \|D^2 g\|_p,$$

where  $\gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1/k^2) \leq 1/n$ .

Hence

$$\|(V_n(g) - g)^2\|_p \leq \frac{1}{n} \|(V_n - I)(D^2(g))\|_p \leq \frac{1}{n^2} \|D^4(g)\|_p.$$

It follows by induction that

$$\|(V_n(g) - g)^r\|_p \leq \frac{1}{n^r} \|D^{2r}(g)\|_p. \quad \square$$

## Bibliography

- [1] A. V. Baskakov, *Some best constants of approximation of continuous functions by singular integrals* (Russian), Application of functional analysis in approximation theory, Kalinin. Gos. Univ., Kalinin, (1983) 3–12.
- [2] A.V. Baskakov and V.M. Prostokishin, *On the order of approximation of functions using Riesz sums*, Bull. Moscow Region Sta. Univ., Ser. Phys. Math., 3(2012), 12-14.

- [3] J. Bustamante and L. Flores-de-Jesús, *Strong converse inequalities and quantitative Voronovskaya-type theorems for trigonometric Fejér sums*, Constr. Math. Anal., 3 (2) (2020), 53-63.
- [4] P. L. Butzer and J. Junggeburth, *On Jackson-type inequalities in approximation theory*, in General Inequalities I (E. F. Beckenbach, Ed), Proc. Conf. Oberwolfach 1976, Birkhäuser-Basel 1978, 85-114.
- [5] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, New York-Basel, 1971.
- [6] M. M. Derriennic, *De la Vallée Poussin and Bernstein-type operators*, In Approximation Theory, IDoMAT, M. W. Mükker et al eds., Akademie Verlag, Berlin (1995), 71-84.
- [7] Z. Ditzian and G. Freud, *Linear approximating processes with limited oscillation*, J. Approx. Theory, 12 (1974), 23-31.
- [8] G.Z. Huang, *On the degree of approximation of Fejér operators* (in Chinese) Acta Sci. Natur. Univ. Xiamen. 23 (3) (1984), 309-317.
- [9] R. Q. Jia, *The exact constant of approximation of continuous functions by de la Vallée-Poussin integrals* (in Chinese), J. Zhejiang Univ. (NSE), 2 (1980), 12-25.
- [10] P. P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory*, Delhi (1960).
- [11] B. Kunwar, V. K. Singh, A. Srivastava, *Some direct estimates for linear combination of linear positive convolution operators*, Applied and Computational Mathematics, 5(5) (2016), 207-212.
- [12] F. Lin and G.M. Wang, *The limit approximation constant of the Jackson operator* (in Chinese), J. Zhangzhou Teach. Coll. Nat. Sci. 12 (4) (1999), 19-21.
- [13] G. G. Lorentz, *Approximation of Functions*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

- [14] R. G. Mamedov, *Direct and converse theorems in the theory of approximation of functions by  $m$ -singular integrals* (Russian), Soviet Math. Dokl., 3 (1962), 711-714.
- [15] I.P. Natanson, *On the approximation of multiply differentiable periodic functions by means of singular integrals* (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 82 (1952). 337-339.
- [16] I. M. Petrov, *Order of approximation of functions of the class  $Z$  for some polynomial operators* (in Russian), Uspehi Mat. Nauk, 13 (84) (1958), 127-131.
- [17] I. M. Petrov, *On best approximation of functions of class  $Z_{2k}$  by certain linear polynomial operators* (in Russian), Mat. Sb. (N.S.), 67 (109) (1965), 528-534.
- [18] R. K. S. Rathore, *On a sequence of linear trigonometric polynomial operators*, SIAM J. Math. Anal. 5 (1974), 908-917.
- [19] F. Schurer and F. W. Steutel, *On linear positive operators of the Jackson type*, Mathematica, 9 (32) (1967), 155-184.
- [20] F. Schurer and F. W. Steutel, *On the degree of approximation by the operators of de la Vallée Poussin*, Monat. Math. 87 (1979), 53-64.
- [21] Z. Sha, *Approximation of periodic continuous functions by operators* (Chinese), Acta Math. Sinica, 22 (1) (1979), 54-68.
- [22] E. L. Stark, *The kernel of Fejér-Korovkin: a basic tool in the constructive theory of functions*, Functions, series, operators, Vol. I, II (Budapest, 1980), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 35, North-Holland, Amsterdam, 1983, 1095-1123.
- [23] S. B. Stechkin, *Order of best approximation of continuous functions* (in Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR, 15 (3) (1951), 219-242.
- [24] S. B. Stechkin, *The approximation of periodic functions by Fejér sums* (in Russian), Trudy Mat. Inst. Steklov, 62 (1961), 48-60.
- [25] C. de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'Approximation des fonctions d'une variable réelle* (French), Paris, Gauthier-Villars, 1919.

- [26] L. Vogt, *Approximation by linear combinations of positive convolution integrals*, J. Approx. Theory, 57 (1989), 178-201.
- [27] C. L. Wan, *The limiting constant problem for best approximation by the Fejér operator* (Chinese) J. Xinjiang Univ. Natur. Sci., 8 (2) (1991), 27-31.
- [28] G.M. Wang, *The optimal approximation constant of the Jackson operator* (in Chinese), Math. Res. Expositio, 12 (2) (1992), 295-300.
- [29] X. Wang, *The exact constant of the singular integral of Jackson on the approximation of continuous functions* (in Chinese), Acta Math. Sinica, 14 (2) (1964), 231-237.
- [30] X. Wang, *Approximation by positive linear sums of Fourier series* (in Chinese), Progress of mathematics, 8 (3) (1965), 323-325.
- [31] Z. Weng and Z. Sha, *Approximation by operators in the spaces  $C^*$  and  $L^*$*  (Chinese), Math. Numer. Sinica, 4 (1982), 339-345.
- [32] X. Yu, *On the approximation of combination of linear operators*, J. Math. Res. Exposition, 2 (1986), 21-25.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

## Capítulo 5

# Algunos resultados relacionados con la dinámica de $\lambda ze^z$ , $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Patricia Domínguez Soto, Wendy Rodríguez Díaz  
FCFM, BUAP

### Resumen

Se presentan algunos puntos fijos y valores singulares de la familia  $\lambda ze^z$  para  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se definen el plano de parámetros y el plano dinámico de la familia  $\lambda ze^z$ . Si  $|\lambda| < 1$  el conjunto de Fatou tiene una componente atractora completamente invariante; se da un ejemplo de los conjuntos de Julia y Fatou para el parámetro  $\lambda = .5$ . Si  $|\lambda| > 1$  se enuncian algunas conjeturas y se da un ejemplo de los conjuntos de Fatou y Julia para  $\lambda = 1.5$ . También, se demuestran dos resultados relacionados con el plano de parámetros.

## 1 Preliminares

En esta primera sección enunciaremos algunos conceptos importantes de funciones complejas y propiedades que serán de gran utilidad para la comprensión de las siguientes secciones. Se da por hecho que el lector conoce la teoría de la variable compleja. El material de esta sección se encuentra en [5], [13], [15], [16], [17] y [19].

Una función  $f$  de variable compleja es *diferenciable* en  $A$  si existe su derivada en cada punto de  $A \subset \mathbb{C}$ . Si  $f$  es diferenciable y se cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemann, se dice que  $f$  es *holomorfa*.

Sea  $f$  una función de variable compleja definida en un conjunto abierto en  $A \subset \mathbb{C}$ . La función  $f$  es *analítica* si para cualquier  $z_0 \in A$  existe  $r > 0$  con

$D(z_0, r) \subset A$  y una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

convergente en  $D(z_0, r)$ , tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ con } z \in D(z_0, r),$$

donde  $D(z_0, r)$  es el disco abierto con centro en  $z_0$  y radio  $r$ .

**Teorema 1.1.** *Cualquier función  $f$  holomorfa en  $A$  es analítica, y para un punto arbitrario  $a \in A$ ,  $f(z)$  se expande en una serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

para  $z \in D(a; d(a; \partial A))$ , cuyo radio de convergencia no es menor a  $d(a; \partial A)$ .

A continuación enunciamos la definición principal de convergencia en la teoría de familias normales.

**Definición 1.2.** Una sucesión de funciones  $f_n$  converge (esféricamente) uniformemente en subconjuntos compactos de un dominio  $A$  a una función  $f$  si, para cualquier compacto  $K \subseteq A$  y  $\epsilon > 0$ , existe un número  $n_0 = n_0(K, \epsilon)$  tal que  $n \geq n_0$  implica

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon,$$

(o bien,  $\chi(f_n(z), f(z)) < \epsilon$ ), para todo  $z \in K$ , donde  $\chi$  es la métrica esférica.

Para definir el concepto de familia normal es necesario enunciar los conceptos de acotación local y de equicontinuidad, así como algunos resultados que se pueden revisar en [18].

**Definición 1.3.** Una familia de funciones  $\mathcal{F}$  es localmente acotada en un dominio  $A$  si, para cada  $z_0 \in A$  existe un número positivo  $M = M(z_0)$  y una vecindad  $D(z_0; r) \subseteq A$ , tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in D(z_0; r)$  y toda  $f \in \mathcal{F}$ .

Esto es,  $\mathcal{F}$  es *uniformemente acotada* en una vecindad de cada punto de  $A$ . Dado que cualquier subconjunto compacto  $K \subseteq A$  puede cubrirse por un número finito de vecindades, se sigue que una familia  $\mathcal{F}$  localmente acotada es uniformemente acotada sobre subconjuntos compactos de  $A$ .

**Teorema 1.4.** *Si  $\mathcal{F}$  es una familia de funciones analíticas localmente acotadas en un dominio  $A$ , entonces la familia de derivadas  $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$  forman una familia localmente acotada en  $A$ .*

Observemos que el inverso de este teorema es falso, tomemos como ejemplo la familia de constantes  $\mathcal{F} = \{n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ .

**Definición 1.5.** Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones definidas en un dominio  $A$  es equicontinua (o equicontinua esféricamente) en un punto  $z' \in A$  si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon, z') > 0$  tal que

$$|f(z) - f(z')| < \epsilon$$

(o bien  $\chi(f(z), f(z')) < \epsilon$ ) cuando  $|z - z'| < \delta$ , para cada  $f \in \mathcal{F}$ . Más aún,  $\mathcal{F}$  es equicontinua (o equicontinua esféricamente) en un subconjunto  $E \subseteq A$  si es equicontinua (o equicontinua esféricamente) en cada punto de  $E$ .

El siguiente teorema relaciona acotación local y equicontinuidad.

**Teorema 1.6.** *Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones analíticas localmente acotada en un dominio  $A$  es equicontinua sobre subconjuntos compactos de  $A$ .*

El término *normal* apareció en el año 1911 con los trabajos del matemático Paul Montel, sin embargo el trabajo de Montel sobre familias normales inició en 1907.

**Definición 1.7.** Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones analíticas en un dominio  $A \subseteq \mathbb{C}$  es *normal en  $A$*  si cada sucesión de funciones  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  contiene o bien, una subsucesión que converge a una función límite  $f \neq \infty$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $A$ , o una subsucesión que converge uniformemente a  $\infty$  sobre cada subconjunto compacto.

**Definición 1.8.** La familia  $\mathcal{F}$  se dice ser *normal en un punto  $z_0 \in A$*  si es normal en alguna vecindad de  $z_0$ .

Montel observó que si una familia de funciones analíticas es localmente acotada esto implicaba la equicontinuidad.

**Teorema 1.9.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones analíticas en un dominio  $A$  tal que cada sucesión de funciones en  $\mathcal{F}$  tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos a una función analítica. Entonces  $\mathcal{F}$  es localmente acotada, y por tanto equicontinua sobre subconjuntos compactos de  $A$ .*

## 2 Funciones enteras trascendentes, iteración y puntos fijos

La investigación de la iteración de funciones enteras trascendentes tiene su inicio con los trabajos de Pierre Fatou en 1926 [11] y I. N. Baker en 1968 [1]. En esta sección presentamos la definición de funciones enteras trascendentes, así como algunas de sus propiedades. También, definimos la iteración de funciones trascendentes enteras, sus puntos fijos y su clasificación. Para esta sección el lector puede consultar la siguiente bibliografía [4], [8] y [9].

A las funciones definidas y holomorfas en todo  $\mathbb{C}$  se les llama *funciones enteras*. Las *funciones enteras trascendentes* son funciones analíticas en el plano complejo, que no son polinomios, y la función no está definida en  $\infty$ .

Al conjunto de funciones enteras trascendentes lo denotaremos como:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es entera trascendente}\}.$$

Ejemplos de funciones trascendentes enteras son las siguientes familias:

(ii)  $h(z) = e^z$ .

(ii)  $f(z) = \lambda ze^z$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

### Iteración y clasificación de puntos fijos

En esta subsección enunciaremos los conceptos básicos que nos permitirán estudiar algunas propiedades de la familia  $f_\lambda = \lambda ze^z$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Dada una función  $f : A \rightarrow A$ , a la composición de ésta consigo misma la llamamos *iteración de  $f$* , y denotamos  $f^0(z) = z$ ,  $f^1(z) = f(z)$ ,  $f^2(z) = f(f(z))$  y así sucesivamente. Donde la  $n$ -ésima iterada de  $f$  se define como:

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \circ f, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Definición 2.1.** La *órbita hacia adelante de un punto  $z_0$  bajo  $f$*  se define por  $z_n = f^n(z_0)$  y se denota por  $O^+(z_0, f)$ . La *órbita hacia atrás de un punto  $z_0$  bajo  $f$*  se define por  $O^-(z_0, f) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(z_0)$ . La *gran órbita* de  $z_0$  es la unión de la órbita hacia adelante con la órbita hacia atrás y se denota por  $O(z_0, f)$ .

Si  $O^-(z_0, f)$  es un conjunto finito de puntos, a  $z_0$  se le llama *valor excepcional de Fatou*. Si  $O^-(z_0, f) = \emptyset$ , a  $z_0$  se le llama *valor omitido*.

**Definición 2.2.** Dada  $f \in \mathcal{E}$ , decimos que  $z_0$  es un *punto fijo* de  $f$  si  $f(z_0) = z_0$ . Si para algún  $n \neq 0$  se cumple que  $f^n(z_0) = z_0$ , decimos que  $z_0$  es un *punto fijo periódico*. Cuando  $n$  es el menor natural que satisface esta igualdad, decimos que  $z_0$  es un punto fijo de periodo  $n$ .

Observemos que un punto fijo es un punto periódico de periodo 1. La clasificación de los puntos fijos se define a continuación:

**Definición 2.3.** Sea  $f \in \mathcal{E}$  y  $z_0$  un punto fijo de  $f$ .

1. Si  $|f'(z_0)| = 0$ , se dice que  $z_0$  es un *punto fijo superatractor*.
2. Si  $|f'(z_0)| < 1$ , se dice que  $z_0$  es un *punto fijo atractor*.
3. Si  $|f'(z_0)| > 1$ , se dice que  $z_0$  es un *punto fijo repulsor*.
4. Si  $|f'(z_0)| = 1$  y  $f'(z_0)$  es una raíz de la unidad,  $z_0$  es un *punto fijo indiferente racional*.
5. Si  $|f'(z_0)| = 1$  pero  $f'(z_0)$  no es una raíz de la unidad,  $z_0$  es un *punto fijo indiferente irracional*.

La Definición 2.3 se generaliza a puntos periódicos considerando que si  $z_0$  es de periodo  $n$ , entonces  $z_0$  es punto fijo para  $f^n$ . Al valor de  $(f^n)'(z_0)$  se le

conoce como el *multiplicador* de  $z_0$ . Si  $z_0$  es el infinito, el multiplicador de  $z_0$  está dado por  $(g^n)'(0)$ , donde:

$$g(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Si  $z_0$  es un punto periódico de periodo  $n$ , diremos que la órbita hacia adelante de  $z_0$  es un *ciclo atractor o repulsor*, según  $z_0$  sea atractor o repulsor.

### 3 Conjuntos de Julia y Fatou

En esta sección presentamos la definición de los conjuntos de Fatou y Julia para funciones en la clase  $\mathcal{E}$  así como algunas de sus propiedades.

**Definición 3.1.** Sea  $f \in \mathcal{E}$ , el conjunto de Fatou de  $f$  o conjunto estable, denotado por  $F(f)$ , está formado por todos los puntos  $z \in \mathbb{C}$  tales que la sucesión de iteradas de  $f$  está bien definida y forma una familia normal en una vecindad de  $z$ , es decir,

$$F(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^n\} \text{ es normal en una vecindad de } z\}.$$

El conjunto de Julia de  $f$  o conjunto inestable, denotado por  $J(f)$ , es el complemento del conjunto de Fatou, es decir,

$$J(f) = (F(f))^c = \mathbb{C} \setminus F(f).$$

A continuación enunciaremos algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou para funciones en la clase  $\mathcal{E}$ , véase [2], [3], [7] y [12] para su demostración.

**Teorema 3.2.** Si  $f \in \mathcal{E}$ , entonces se tienen las siguientes propiedades.

- (a)  $F(f)$  es abierto y  $J(f)$  es cerrado.
- (b)  $J(f)$  es perfecto.
- (c)  $F(f)$  y  $J(f)$  son completamente invariantes, es decir,  $z \in F(f)$  si, y sólo si  $f(z) \in F(f)$  y  $z \in J(f)$  si, y sólo si  $f(z) \in J(f)$ .
- (d)  $F(f^n) = F(f)$  y  $J(f^n) = J(f)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Aproximadamente entre 1918 y 1920 P. Fatou y G. Julia demostraron las propiedades (a)-(d) para funciones racionales, véase [10] y [14]. Para las funciones enteras trascendentes, las propiedades (a)-(d) fueron demostradas por P. Fatou en 1926, véase [11].

Si  $z_0$  es un punto fijo periódico atractor de periodo  $p$ , decimos que

$$A(z_0) = \{z : f^{pn}(z) \rightarrow z_0\}$$

es la *cuenca de atracción* de  $z_0$ .

**Teorema 3.3.** *Si  $z_0$  es un punto periódico atractor, entonces  $\partial A(z_0) = J(f)$ .*

Debido que  $F(f)$  y  $J(f)$  son completamente invariantes, se cumple que si  $U_0$  es una componente conexa de  $F(f)$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f^n(U_0) \subset U_n$  para alguna componente conexa  $U_n$  de  $F(f)$ .

**Definición 3.4.** Sea  $f \in \mathcal{E}$  y  $U$  una componente de  $F(f)$ . El comportamiento de la órbita de  $U$  bajo  $f$  tiene tres posibilidades:

- (i) Si  $f^n(U) \subset U$  para algún  $n \geq 1$ ,  $U$  es llamada una componente periódica de  $F(f)$ . El mínimo  $n$  es el período de la componente  $U$ . En particular, si  $n = 1$ , se dice que la componente  $U$  es invariante.
- (ii) Si  $f^m$  es periódica para algún entero  $m \geq 1$ , llamamos a  $U$  una componente pre-periódica.
- (iii) Si  $U$  no es periódica ni pre-periódica, llamamos a  $U$  una componente errante.

La clasificación de una componente periódica  $U$  en el conjunto de Fatou para funciones enteras trascendentes es la siguiente: Dominio Atractor, Dominio Parabólico, Disco de Siegel y Dominio de Baker, véase [12] para sus definiciones.

Decimos que  $\omega$  es un *valor crítico* de  $f \in \mathcal{E}$ , si  $\omega = f(z)$  con  $f'(z) = 0$  al punto  $z$  se le llama *punto crítico*.

Un punto  $\omega \in \mathbb{C}$  es llamado *valor asintótico* de  $f \in \mathcal{E}$ , si existe una curva  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  y  $f(\gamma(t)) \rightarrow \omega$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Definición 3.5.** El conjunto de valores singulares de una función  $f \in \mathcal{E}$  es la clausura del conjunto de valores asintóticos y valores críticos de  $f$ , y se denota por:

$$SV(f) = \overline{\{\text{valores asintóticos y valores críticos}\}}.$$

**Teorema 3.6.** [9] Un ciclo de dominios atractores o parabólicos contiene al menos un valor singular.

**Teorema 3.7.** [9] Si  $f \in \mathcal{E}$  con un número finito de valores singulares, entonces el conjunto de Fatou no contiene dominios errantes ni dominios de Baker.

## 4 $f_\lambda(z) = \lambda ze^z, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , sus puntos fijos y valores singulares

Los puntos fijos de una función dan información del comportamiento dinámico de cualquier familia analítica. En esta sección investigaremos primero los puntos fijos de  $f_\lambda$  y después sus valores singulares.

### I. Puntos Fijos de $f_\lambda$ y su clasificación

Los puntos fijos de  $f_\lambda(z) = \lambda ze^z, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , son las soluciones de la ecuación:

$$\lambda ze^z = z. \tag{1}$$

En particular si tomamos  $z = x$ , podemos observar en la Figura 1, que hay dos soluciones 0 y un  $x_1 > 0$  de la ecuación  $h(x) = \lambda xe^x - x = 0$  para  $\lambda$  con  $0 < \lambda < 1$ , es decir,  $h(x)$  cruza dos veces el eje real una vez en 0 y otra en el real positivo  $x_1$ , para  $\lambda$  real dado entre cero y uno.

De manera análoga se pueden graficar las funciones  $f_\lambda(x) = \lambda xe^x$ , para diferentes valores de  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y ver la intersección con la recta  $y = x$ , véase Figura 2, para encontrar los puntos fijos de  $f_\lambda(x)$ .

Ahora, si tomamos diferentes valores de  $1 < \lambda < e^2$ , podemos observar en la Figura 3 que hay dos puntos fijos. El punto fijo 0 se mantiene, pero el otro punto fijo  $x_2$  es un real negativo. Es importante mencionar que la familia

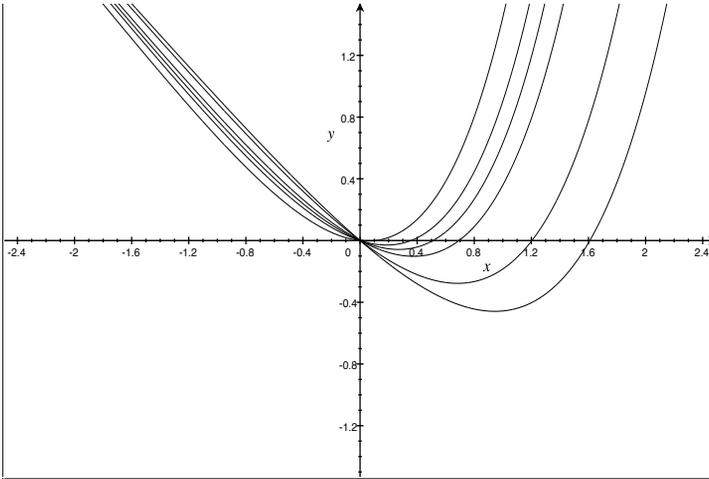


Figura 1: Gráficas de  $h(x)$  con  $\lambda = .2, .3, .5, .7, .8, .9$

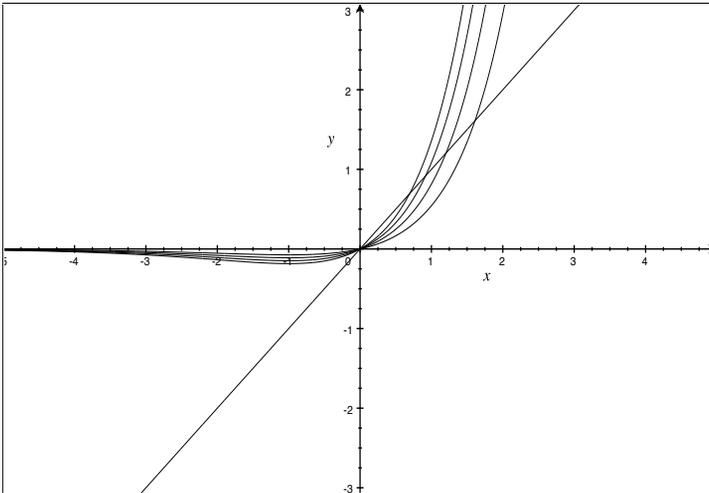


Figura 2: Intersección de  $f_\lambda(x)$  y  $y = x$ , con  $\lambda = .2, .3, .5, .7$

no puede tener un comportamiento similar alrededor de los puntos fijos  $x_1$  y  $x_2$ , porque la familia  $f_\lambda(x)$  no tiene la propiedad de simetría. Para saber la naturaleza de los puntos  $x_1$  y  $x_2$  se necesita hacer uso de la Definición 2.3. Es decir, necesitamos saber si los puntos fijos  $0, x_1$  y  $x_2$  son atractores, repulsores o indiferentes.

Para demostrar la existencia de los puntos fijos  $x_1$  y  $x_2$  podemos usar

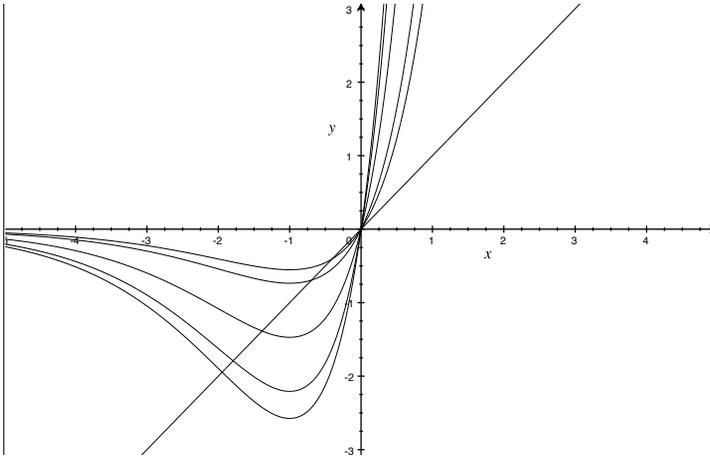


Figura 3: Intersección de  $f_\lambda(x)$  y  $y = x$ , con  $\lambda = 1.5, 1.7, 3, 4, 7$

el Teorema del Valor Intermedio, pero lo anterior lo podemos generalizar a variable compleja, es decir, podemos realizar las siguientes cuentas básicas para obtener los puntos fijos de  $f_\lambda$  con  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . De la Ecuación (1) tenemos que 0 es un punto fijo de  $f_\lambda$  y resolviendo la Ecuación (1) tenemos:

$$\lambda z e^z = z, \text{ esto es, } \lambda e^z = 1.$$

Así,  $z = -\log \lambda + 2k\pi i$  son los puntos fijo de  $f_\lambda$ .

Para clasificar los puntos fijos  $z = 0$  y  $z = -\log \lambda + 2k\pi i$  de  $f_\lambda$  necesitamos primero calcular la derivada de  $f_\lambda$ :

$$f'_\lambda(z) = \lambda(e^z + ze^z) = \lambda e^z(1 + z). \quad (2)$$

Recordar que  $|f'_\lambda(z)| = |\lambda e^z(1 + z)|$  determina la naturaleza de los puntos fijos. En lo que sigue investigaremos los siguientes casos:

(a) De la Ecuación (2) podemos deducir que el multiplicador en  $z = 0$  es:

$$|f'_\lambda(0)| = |\lambda|.$$

Así, por la clasificación de puntos fijos tenemos que  $z = 0$  puede ser un punto fijo atractor si  $|\lambda| < 1$ , repulsor si  $|\lambda| > 1$  o racional indiferente si

$|\lambda| = 1$ , pero este último caso no lo estudiaremos.

(b) Sustituyendo en la Ecuación (2) el punto fijo  $z = -\log \lambda + (2k\pi i)$  y tomando la rama principal de  $\log \lambda$  tenemos:

$$|f'_\lambda(-\log \lambda)| = |\lambda e^{-\log \lambda}(1 + (-\log \lambda))| = |1 - \log \lambda|.$$

Si queremos que el punto fijo  $z = -\log \lambda + (2k\pi i)$  sea un punto fijo atractor necesitamos que  $|-\log \lambda + 1| < 1$ , es decir,  $|-\log \lambda| < 2$ .

Tomemos la parte real de  $z$ , esto es,

$$\text{ParteReal } z = \text{ParteReal } (-\log \lambda + (2k\pi i)) = -\log |\lambda| < 0,$$

es decir,  $\log |\lambda| > 0$ , entonces  $|\lambda| > 1$ .

Por otro lado  $\text{ParteReal } z = -\log |\lambda| > -2$ , es decir,  $\log |\lambda| < 2$  de donde se deduce que  $|\lambda| < e^2$ . Debemos tomar el valor principal, denotado por  $PV$  de  $\log \lambda$ . En conclusión los puntos fijos atractores de  $f_\lambda$  vienen de  $PV(-\log \lambda)$  con  $\lambda$  satisfaciendo  $|\lambda| < e^2$  tal que  $|-\log \lambda + 1| < 1$ .

**Observación:** Para el caso real  $f_\lambda(x) = \lambda x e^x$  y el parámetro  $\lambda$  negativo se tiene que 0 es el único punto fijo, véase Figura 4. En verdad, si  $f_\lambda(x) = \lambda x e^x = x$ , entonces se tienen dos posibilidades:  $x = 0$  o  $\lambda e^x = 1$ , donde la segunda posibilidad implica que  $x = -\ln(\lambda)$ , pero en los reales,  $\ln(\lambda)$  solo tiene sentido si  $\lambda > 0$ . Por lo tanto  $x = 0$  es el único punto fijo.

Si tomamos el valor de  $\lambda$  tal que  $-1 < \lambda < 0$ , se observa en la Figura 5 que el punto fijo de  $f_\lambda(x)$  sigue siendo 0.

## II. Valores Singulares de $f_\lambda$

Recordemos que el *conjunto de valores singulares* de una función  $f$  es la clausura del conjunto de valores asintóticos y valores críticos, es decir,

$$SV(f) = \overline{\{\text{valores asintóticos y valores críticos}\}}.$$

Hay dos valores singulares finitos 0 y  $\frac{-\lambda}{e}$  de  $f_\lambda$ , el primero es un valor asintótico y el segundo es un valor crítico. Así, el conjunto  $SV(f_\lambda)$  es finito,

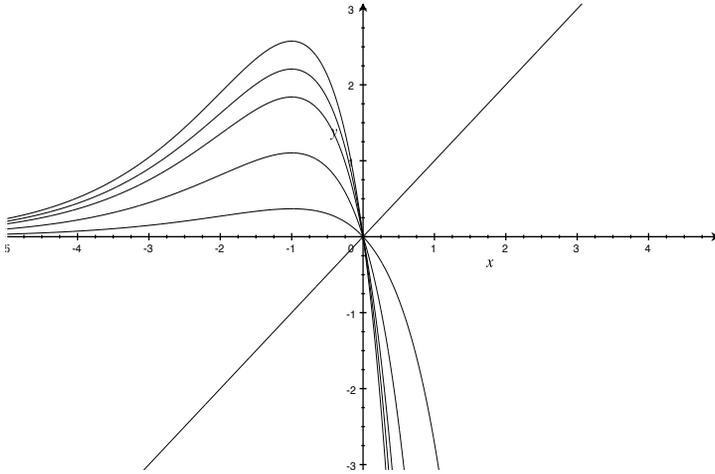


Figura 4: Gráficas de las funciones  $f_\lambda(x) = \lambda x e^x$  con  $\lambda = -1.5, -3, -5, -6, -7$

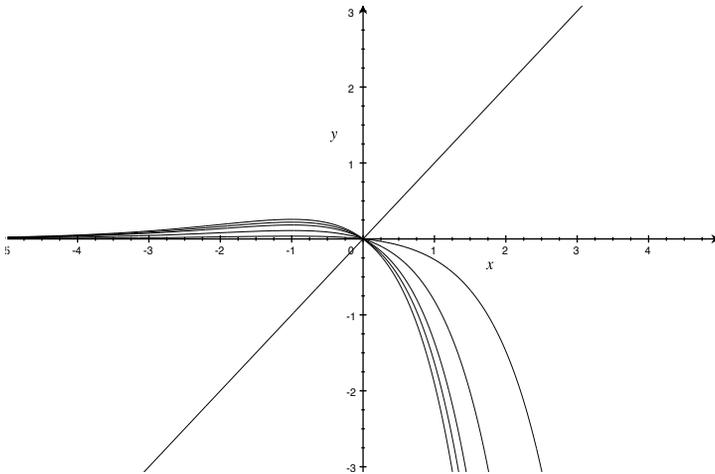


Figura 5: Gráficas de las funciones  $f_\lambda(x) = \lambda x e^x$  con  $\lambda = -1.5, -3, -5, -6, -7$

por lo tanto no hay componentes errantes ni dominios de Baker. Los puntos críticos de  $f_\lambda$  se obtienen solucionando la siguiente ecuación:

$$f'_\lambda(z) = \lambda(e^z + ze^z) = \lambda e^z(1 + z) = 0. \quad (3)$$

Observemos que  $\lambda \neq 0$  y  $e^z$  nunca es cero, así la única forma en que la Ecuación (3) sea cero es cuando  $1 + z = 0$ , por lo tanto  $z = -1$  es el punto crítico de  $f_\lambda$ , por lo tanto  $f_\lambda(-1) = \frac{-\lambda}{e}$  es el valor crítico de  $f_\lambda$  como ya se

había mencionado.

## 5 Conjuntos de Fatou y Julia de $f_\lambda = \lambda ze^z$ , $\lambda \in \mathbb{C}$

De la Sección 4 (II), tenemos que hay dos valores singulares finitos de  $f_\lambda$  que son: 0 y  $\frac{-\lambda}{e}$ . El punto crítico finito de  $f_\lambda$  es -1. Con esta información podemos definir el plano de parámetros de la familia  $f_\lambda$  como sigue:

$$PL = \{\lambda : f_\lambda^n(-1) \text{ está acotado, donde } -1 \text{ es punto crítico}\}.$$

La Figura 6 muestra el *plano de parámetros* para la familia  $f_\lambda = \lambda ze^z$ .

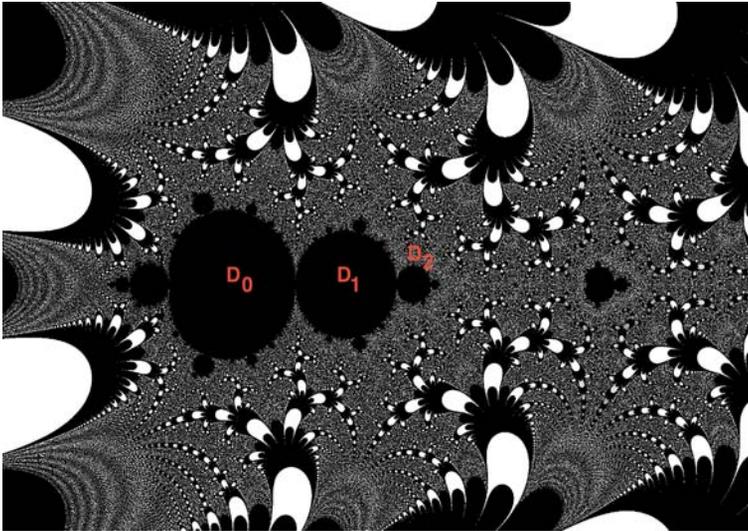


Figura 6: Plano de parámetros de  $f_\lambda = \lambda ze^z$

En el plano de parámetros se puede observar una componente  $D_0$  que contiene al cero y del lado derecho hay otras componentes que llamaremos  $D_1, D_2, \dots$  que intersectan el eje real. Este capítulo es una introducción al estudio de los conjuntos de Fatou y Julia para  $\lambda$  dado en las componentes  $D_0$  y  $D_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , del plano de parámetros  $PL$ . Así, necesitamos la definición del *plano dinámico* para una  $\lambda$  fija, que se enuncia a continuación:

$$PD = \{z \in \mathbb{C} : f_\lambda^n(z) \text{ está acotado, con } \lambda \text{ fija}\}.$$

Observemos que la órbita del 0 es  $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$  y que 0 es un punto fijo, por Sección 4 (I), puede ser:

- (i) Atractor si  $|\lambda| < 1$ ;
- (ii) Repulsor si  $|\lambda| > 1$ ;
- (iii) Indiferente si  $|\lambda| = 1$ .

En este capítulo estamos interesados en los casos (i) y (ii).

(i) Si  $|\lambda| < 1$  el punto fijo atractor  $z = 0$  está en una componente invariante  $U$ , que contiene por Teorema 3.6 un valor singular finito diferente a 0, es decir, debe contener a  $\frac{-\lambda}{e}$ , el cuál converge a cero en la componente  $U$ . Cómo  $f_\lambda$  sólo tiene un valor crítico finito  $\frac{-\lambda}{e}$ , entonces la componente  $U$ , que es la cuenca de atracción del 0, debe ser completamente invariante, dado que ya no hay más valores singulares. En la Figura 7, se muestra el plano dinámico cuando  $\lambda = .5$ , es decir, los conjuntos de Fatou y Julia para la función  $f_{.5} = .5ze^z$ . El color negro en la figura es la componente atractora  $U$ , que es completamente invariante, así para cualquier punto en  $U$  bajo iteración converge a cero. El color blanco en la Figura 7 es el complemento de  $U$ , que es el conjunto de Julia de  $f_{.5} = .5ze^z$ .

Así, tenemos que considerar sólo el siguiente caso.

(ii) Si  $|\lambda| > 1$ , el valor singular 0 no juega ningún papel en el comportamiento iterativo de  $f_\lambda$ . En la Figura 8 se muestra el plano dinámico cuando  $\lambda = 1.5$ , es decir, se muestran los conjuntos de Fatou y Julia para la función  $f_{1.5} = 1.5ze^z$ .

Este caso es cuando todos los puntos fijos de  $f_\lambda$  son diferentes de cero, por ejemplo el punto fijo  $z = -\log \lambda$  es un punto fijo atractor, si el parámetro cumple que  $1 < |\lambda| < e^2$ , véase las cuentas en I (b). Así, en la Figura 8 lo negro debe representar una componente atractora invariante  $W$  en el conjunto de Fatou.

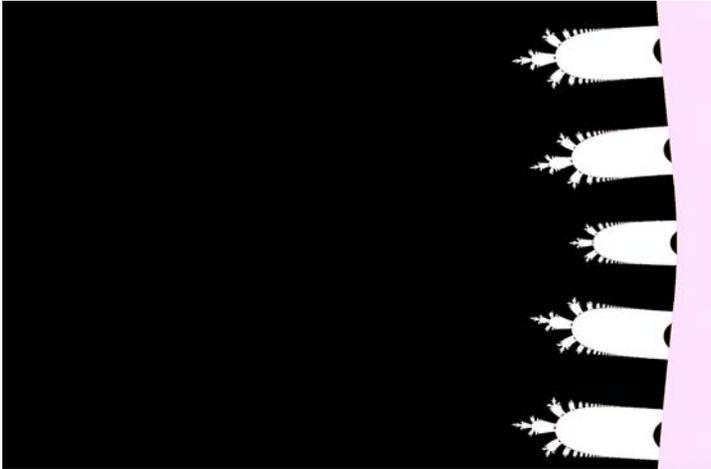


Figura 7: Los conjuntos de Fatou y Julia para  $\lambda = .5$

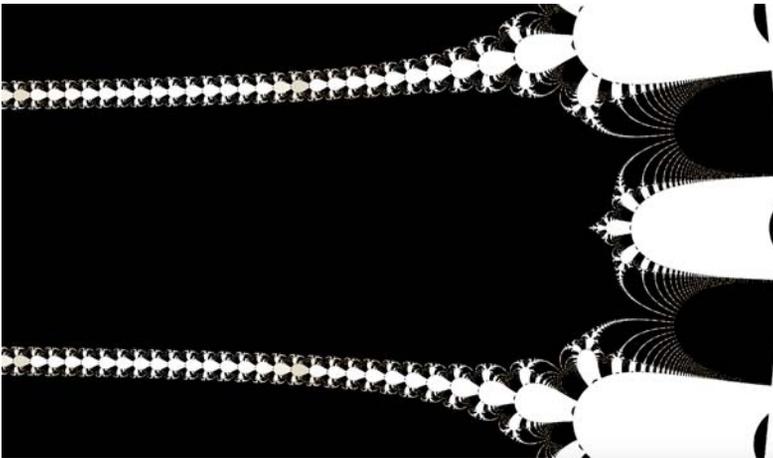


Figura 8: Los conjuntos de Fatou y Julia para  $\lambda = 1.5$

A continuación se enuncian las siguientes conjeturas:

**Conjeturas:** (a) En el caso (ii) cuando  $e^2 < \lambda < 8$  existe componente  $W$  atractora de periodo 2 en el conjunto de Fatou.

(b) Utilizando la derivada Schwarziana se pueden obtener una cascada de bifurcaciones de doble periodo, del lado derecho del plano de parámetros, para

$\lambda$  real, véase [6] para una introducción y definición de la derivada Schwarziana.

(c) Existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $J(f_\lambda) = \mathbb{C}$ .

En lo que sigue demostraremos el siguiente resultado que está relacionado con la Conjetura (b).

**Proposición 5.1.** *Sea  $f_\lambda = \lambda ze^z$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Hay muchas elecciones de  $\lambda$  tal que  $f_\lambda$  tiene un 2-ciclo atractor.*

*Demostración.* Par tal ciclo debemos incluir  $-1$ , que es punto crítico de  $f_\lambda$  y necesitamos que  $\lambda$  satisfaga:

$$f_\lambda^2(-1) = -1,$$

donde  $-1$  es puto fijo super atractor. Esto es,

$$\lambda^2/e = e^{\frac{\lambda}{e}}.$$

Ahora, hay muchos valores de  $\lambda$  que satisfacen la ecuación de arriba, denotemos esos valores por  $\lambda_n$ , cada  $\lambda_n$  define puntos de  $PL$ , donde  $-1$  es punto fijo super atractor.

Cuando  $|\lambda_n|$  crece, la parte real de  $\frac{\lambda}{e}$  crece, pero mas despacio que  $|\lambda_n|$ . Ahora, cuando variamos  $\lambda$  de  $\lambda_n$ , el 2-ciclo, que denotaremos por  $(z_1(\lambda), z_2(\lambda))$ , es una función analítica de  $\lambda$  siempre que

$$\frac{\partial f^2}{\partial z}(z_1(\lambda)) - 1 \neq 0.$$

Más aún, el multiplicador  $m(\lambda)$  definido por:

$$m(\lambda) = \frac{\partial f^2}{\partial z}(z(\lambda))$$

es analítico en  $\lambda$  cerca de  $\lambda_n$  con  $m(\lambda_n) = 0$ . Entonces existen vecindades  $D_{2,n}$  de  $\lambda_n$ , que representan parámetros donde la función tiene algún punto fijo atractor de periodo dos, tal que  $\lambda \in D_{2,n}$  esto implica que  $f_\lambda$  tiene un 2-ciclo atractor.  $\square$

**Proposición 5.2.** *Sea  $f_\lambda = \lambda ze^z$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Entonces  $D_{2,n} \neq D_{2,n+1}$ , es decir,  $\lambda_{n+1} \notin D_{2,n}$*

*Demostración.* Supongamos que  $\lambda_{n+1} \in D_{2,n}$ . Unamos  $\lambda_n$  a  $\lambda_{n+1}$  por un camino  $\gamma$  en  $D_{2,n}$ . Entonces  $z_2(\lambda)$  es una función analítica de  $\lambda$  a lo largo de el camino  $\gamma$ , véase Figura 9.

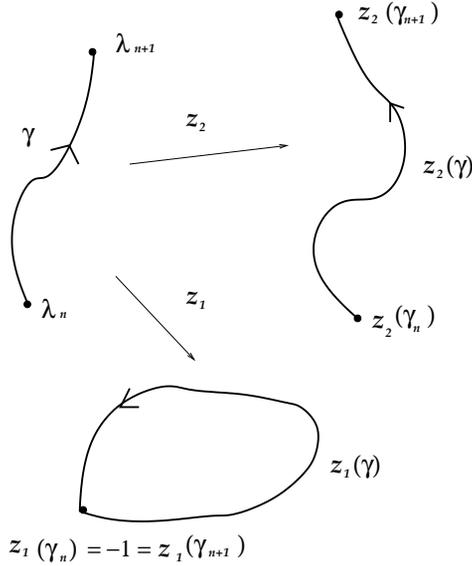


Figura 9: Las funciones  $z_1$ ,  $z_2$  y el camino  $\gamma$

Observe que  $z_2(\gamma)$  es un camino, donde :

$$z_2(\lambda_n) = -\lambda_n/e \text{ y } z_2(\lambda_{n+1}) = -\lambda_{n+1}/e.$$

De forma similar,  $z_1(\gamma)$  es un camino, donde:

$$z_1(\lambda_n) = -1 = z_1(\lambda_{n+1}).$$

Pero,

$$f_\lambda(z_1(\lambda)) = \lambda z_1(\lambda) e^{z_1(\lambda)} = z_2(\lambda),$$

por ser un 2-ciclo, así  $z_1(\lambda) \rightarrow \lambda e^{z_1(\lambda)}$  manda  $z_1(\gamma)$  a  $z_2(\gamma)$ , lo cual es una contradicción porque  $z_1(\gamma)$  es un camino cerrado y  $z_2(\gamma)$  no es un camino cerrado. □

Varias preguntas abiertas surgen del estudio anterior:

- (1) ¿Es  $D_{2,n}$  acotado?
- (2) ¿La función  $m(\lambda)$  manda  $D_{2,n}$  conformemente a  $D(0, 1) = D_0$ ?
- (3) ¿Es la frontera de  $D_{2,n}$  una curva analítica?

## Agradecimientos

Agradecemos a Marco Antonio Montes de Oca, investigador de la Facultad de Ciencias de la UNAM, por el apoyo computacional de las Figuras 6-8. Este capítulo está dedicado a los compañeros de la FCFM que han partido en 2020, Iván Hernández Orzuna y José Dionicio Zacarías Flores.

## Bibliografía

- [1] Baker, Irving N. *Repulsive Fixpoints of entire functions*. Math. Zeitschr., (1968), págs. 252-256.
- [2] Bargmann, Detlef. *Simple proofs of some fundamental properties of the Julia Set*. Mathematisches Seminar, Universitaet Kiel, G.,(1999), págs. 553-558.
- [3] Bergweiler, Walter. *An Introduction to Complex Dynamics*. Textos de Matemática. Universidad de Coimbra, Série B, No. 6, (1995).
- [4] Bergweiler, Walter. *Iteration of entire functions*. Lectures at the CIMPA school in Kathmandu in November 2014.
- [5] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, (1978).
- [6] Devaney, Robert L. and Keen, Linda. *Dynamics of meromorphic maps: maps with polynomial Schwarzian derivative*. Annales Scientifiques de L'É. N. S. 4<sup>e</sup> série, tome 22, n<sup>o</sup> 1, (1989), págs. 55-79.

- [7] Domínguez, Patricia y Contreras, V. J. E. *Dinámica Holomorfa: Los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas*. Monografía, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Editorial BUAP, (2014).
- [8] Eremenko, Alexandre E. *On the Iteration of Entire Functions*. Dynamical systems and ergodic theory, Banach Center publications, Vol. 23, (1989).
- [9] Eremenko, Alexandre E. and Lyubich M. Yu. *The dynamics of analytic transformations*. Leningrad Math. J., Vol. 1, No. 3, (1990).
- [10] Fatou, Pierre. *Sur les équations fonctionnelles*. Bulletin de la Société Mathématique de France. Vol. 47, (1919), págs. 161-271.
- [11] Fatou, Pierre. *Sur l'itération des fonctions transcendentes entières*. Bulletin de la Société Mathématique de France. Vol. 47, (1926), págs. 337-370.
- [12] Hua, Xin-Hou and Yang, Chung-Chung. *Dynamics of Transcendental Functions*. Asian Mathematics Series, Gordon and Breach Science Publishers, (1998).
- [13] Ivorra, Carlos C. *Funciones de Variable Compleja con Aplicaciones a la Teoría de Números*. Universidad de Valencia, (2008).
- [14] Julia, Gaston. *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*. J. Math. Pure Appl., (1918), págs. 61-64.  
Board, (2000).
- [15] Nieto, José I. and Chesneau, Eva V. *Funciones de Variable Compleja*, ed. 3, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, (1980).
- [16] Noguchi, Junjiro. *Introduction to Complex Analysis*, Vol. 168, American Mathematical Society, (1998).
- [17] Palka, Bruce P. *An Introduction to Complex Function Theory*, 2da ed. Springer-Verlag, (1990).
- [18] Schiff, Joel F. *Normal Families*, Springer, (1993).

[19] Spiegel, Murray R. *Variable Compleja*. McGraw-Hill, (2004).

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

[pdsoto@fcfm.buap.mx](mailto:pdsoto@fcfm.buap.mx)

[wendy.rodriguezdiaz@viep.com.mx](mailto:wendy.rodriguezdiaz@viep.com.mx)

---

# Topología

---



## Capítulo 6

### El hiperespacio $K(X)$

Felipe de Jesús Aguilar Romero, Patricia Domínguez  
Soto, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero  
FCFM, BUAP

#### Resumen

Sea  $C(X)$  el hiperespacio de todos los subcontinuos de un continuo métrico  $X$ , y  $p \in X$ . Se define  $C(p, X)$  como el hiperespacio de todos los subcontinuos de  $X$  que contienen al punto  $p$ . En el presente trabajo se estudia el hiperespacio  $K(X) = \{C(p, X) : p \in X\}$  y se demuestra que  $K(X)$  no siempre es un continuo. También, se estudia la relación entre el grado de homogeneidad de  $X$  y el tamaño de  $K(X)$  y se profundiza el estudio cuando  $X$  es una gráfica finita.

## 1 Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Dado un continuo  $X$ , el hiperespacio de  $X$  es una colección específica de subconjuntos de  $X$ . Los hiperespacios más conocidos son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

$2^X$  es el hiperespacio de los subconjuntos cerrados de  $X$  y  $C(X)$  es el hiperespacio de los subcontinuos de  $X$ . En este trabajo utilizaremos también los siguientes hiperespacios:

$$C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}, \text{ donde } A \in C(X);$$

$$C(p, X) = \{B \in C(X) : p \in B\}, \quad \text{donde } p \in X;$$

$$K(X) = \{C(p, X) : p \in X\}.$$

$K(X)$  fue introducido por Patricia Pellicer Covarrubias en el artículo [10]. En la sección 3 se exponen algunas condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir un continuo  $X$  para que  $K(X)$  sea compacto, véase el teorema 3.4. Además, se da un continuo  $X$  para el cual  $K(X)$  no es compacto, véase el ejemplo 3.5. En la sección 4 se da una condición necesaria para que  $K(X)$  sea conexo, véase corolario 4.2. También se da un ejemplo de un continuo  $X$ , para el cual  $K(X)$  no es conexo, véase el ejemplo 4.5. En la sección 5 se presenta una relación entre el grado de homogeneidad de un continuo  $X$ , con el tamaño de  $K(X)$ , véase el teorema 5.10. Finalmente, en la sección 6 se muestra que para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe una gráfica finita  $X_n$ , cuyo tamaño de  $K(X_n)$  es igual a  $n$ , véase el teorema 6.17.

## 2 Preliminares

Dado un continuo  $X$  denotaremos por  $d$  a la métrica de  $X$ . Dado  $a \in X$  y  $\varepsilon > 0$ , la bola con centro en  $a$  y de radio  $\varepsilon$ , se denota por  $B_d(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$ . Para cualquier  $A \subset X$  y  $\delta > 0$  definimos la **nube** de radio  $\delta$  al rededor de  $A$ , como  $N_d(A, \delta) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \delta)$ . La métrica  $d$  en  $X$  induce una métrica en  $2^X$ , que es la métrica de Hausdorff, que se define de la siguiente manera:  $H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \varepsilon)\}$ , con  $A, B \in 2^X$ .

Dado un continuo  $X$ , en [5, Corolario 14.10] se demostró que  $(2^X, H)$  y  $(C(X), H)$  son continuos, así podemos hablar de hiperespacios de  $2^X$ . Será de nuestro interés la colección de subconjuntos cerrados no vacíos en  $2^X$ , que denotaremos por  $2^{2^X}$ . Para  $(2^X, H)$ , tenemos el hiperespacio  $(2^{2^X}, H_2)$ , donde  $H_2$  es la métrica de Hausdorff en  $2^{2^X}$  inducida por  $H$ . Se sabe que si  $p \in X$ , entonces  $C(p, X)$  es un continuo, así  $K(X) \subset 2^{2^X}$ . Decimos que  $X \approx Y$  cuando  $X$  es homeomorfo a  $Y$ . En este trabajo  $\mathbb{R}^n$  se considera con la topología euclidiana y por ende todos sus subespacios.

**Definición 2.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  una sucesión de subconjuntos de  $X$ . Se define el **límite inferior** y **límite superior** de  $\{A_i\}$

de la siguiente manera:

$\lim inf A_i = \{x \in X : \text{Para cada abierto } U \text{ que contenga a } x, U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para toda } i \in \mathbb{N} \text{ excepto para un número finito}\};$

$\lim sup A_i = \{x \in X : \text{Para cada abierto } U \text{ que contenga a } x, U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para un número infinito de } i's\}.$

Dado  $A \subset X$  decimos que  $A = \lim A_i$ , si  $\lim inf A_i = A = \lim sup A_i$ .

**Definición 2.2.** Sea  $X$  un continuo y  $A$  un subconjunto de  $X$ . Se define el hiperespacio  $K(A, X) = \{C(p, X) : p \in A\}$  y se denota  $K(X, X)$  por  $K(X)$ .

**Definición 2.3.** Sea  $X$  un continuo y  $A \subset X$ , se define la función  $\tau_A : A \rightarrow K(A, X)$  por  $\tau_A(p) = C(p, X)$ . Si  $A = X$  denotamos  $\tau_X$  por  $\tau$ .

**Teorema 2.4.** Si  $X$  es un continuo y  $A \subset X$ , entonces la función  $\tau_A$  es biyectiva.

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo y  $A \subset X$ . Veamos que  $\tau_A$  es inyectiva, para ello tomemos  $p, q \in A$  tales que  $p \neq q$ . Observe que  $\{p\} \in C(p, X)$ , pero  $\{p\} \notin C(q, X)$  por lo que  $C(p, X) \neq C(q, X)$ , es decir,  $\tau_A(p) \neq \tau_A(q)$  por ende  $\tau_A$  es inyectiva. Claramente  $\tau_A$  es suprayectiva.  $\square$

**Teorema 2.5.** Si  $X$  es un continuo y  $A \subset X$ , entonces la función  $\tau_A^{-1} : K(A, X) \rightarrow A$  es continua.

*Demostración.* Sean  $A \subset X$  y  $p \in A$ . Tomemos  $\{C(p_n, X)\}_{n=1}^{\infty} \subset K(A, X)$  una sucesión que converge a  $C(p, X)$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n \geq n_0$  se cumple que

$$H_2(C(p_n, X), C(p, X)) < \varepsilon.$$

Así, para cada  $n \geq n_0$  se cumple:

$$C(p, X) \subset N_H(C(p_n, X), \varepsilon).$$

Esto asegura que existe  $E \in C(p_n, X)$  tal que  $\{p\} \in B_H(E, \varepsilon)$ , así  $E \subset N(\{p\}, \varepsilon)$ , como  $p_n \in E$  se cumple que  $d(p_n, p) < \varepsilon$ . Entonces,  $d(p_n, p) < \varepsilon$  para cada  $n \geq n_0$ , por ende la sucesión  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $p$ , es decir,  $\{\tau_A^{-1}(C(p_n, X))\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $\tau_A^{-1}(C(p, X))$ . Por lo tanto,  $\tau_A^{-1}$  es continua.  $\square$

### 3 Compacidad de $K(X)$

En esta sección, se exponen algunas condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir un continuo  $X$  para que  $K(X)$  sea compacto. Además, se da un continuo  $X$  para el cual  $K(X)$  no es compacto. Para ello definiremos la propiedad de Kelley.

**Definición 3.1.** Sea  $X$  un continuo y  $x \in X$ . Decimos que  $X$  tiene la **propiedad de Kelley** en  $x$ , si para toda sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  que converge a  $x$  y para cada  $A \in C(x, X)$ , existe una sucesión  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$  que converge a  $A$ , donde  $A_n \in C(x_n, X)$ .

El continuo  $X$  tiene la propiedad de Kelley, si  $X$  tienen la propiedad de Kelley en todos sus puntos.

El siguiente ejemplo aclara la definición anterior. Consideremos en el plano euclideo  $\mathbb{R}^2$ , los siguientes puntos  $a = (-1, 0)$ ,  $a_0 = (0, 0)$  y  $a_n = (0, \frac{1}{n})$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Dados dos puntos  $c, d$  en el plano, se entiende por  $cd$  al segmento de recta que une  $c$  con  $d$ . Se define  $A_s = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} aa_n$  como el

**abanico armónico**, véase Figura 1.

Es claro que  $A_s$  es arco-conexo y compacto, por lo tanto  $A_s$  es un continuo. Veamos que  $A_s$  tiene la propiedad de Kelley.

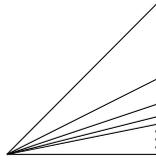


Figura 1: Abanico armónico.

Sean  $x \in A_s$ ,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión que converge a  $x$  y  $A \in C(x, A_s)$ . Se tienen dos casos: (1)  $x \notin aa_0$  y (2)  $x \in aa_0$ .

- (1) En este caso, existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in aa_{n_x}$ . Observe que debe existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in aa_{n_x}$  para toda  $n \geq n_0$ , por ende  $xx_n \subset aa_{n_x}$ .

Construimos la sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  de la siguiente manera: para  $i \leq n_x$  tomamos  $A_i = A_s$  y para  $i \geq n_x$  tomamos  $A_i = A \cup xx_i$ .

Es claro que  $A_i \in C(x_i, X)$  para toda  $i$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ , para toda  $n \geq n_1$ . Consideremos  $N = \text{máx}\{n_0, n_1\}$ , así para toda  $n \geq N$  se cumple que  $x_n \in aa_{n_x}$  y  $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dado  $y \in xx_n$  se tiene que  $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Si  $i \geq N$ , es inmediato que  $A \subset N(A_i, \frac{\varepsilon}{2})$ . Para  $y \in A_i$  se tienen dos casos, si  $y \in A$  es claro que  $y \in N(A, \frac{\varepsilon}{2})$ , si  $y \in xx_i$  se cumple que  $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$  y por ende  $y \in N(A, \frac{\varepsilon}{2})$ . Concluimos que  $H(A_i, A) < \varepsilon$  para toda  $i \geq N$ . Por lo tanto  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  converge a  $A$ .

- (2) Para este caso definamos los conjuntos,  $N' = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in aa_0\}$  y  $N'' = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin aa_0\}$ . Si  $N''$  es finito se sigue como el caso (1). Supongamos que  $N''$  es infinito. Para  $n \in N''$ , sea  $m_n \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in aa_{m_n}$ . Dependiendo de la naturaleza de  $A$ , se tienen dos subcasos: (a)  $A \subset aa_0$  y (b)  $A \not\subset aa_0$ .

(a) En este caso  $A$  es un arco, digamos que  $p, q$  son sus puntos extremos, es decir,  $A = pq$ . Sean  $y_p, y_q$  las rectas perpendiculares a  $aa_0$  que pasan por  $p$  y  $q$  respectivamente. Para  $i \in N'$  consideremos  $q_i = y_q \cap aa_{m_i}$  y  $p_i = y_p \cap aa_{m_i}$ . Construimos la sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  de la siguiente manera, para  $i \in N'$  tomamos  $A_i = A \cup xx_i$ , para  $i \in N''$  consideraremos  $A_i = p_i q_i \cup x_i p_i$ . De este modo  $A_i \in C(x_i, X)$ , para toda  $i$ . Por la construcción se tiene que  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  converge a  $A$ .

(b) Si  $ap = (A - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} aa_n) \cup \{a\}$ , observar que  $ap$  es un arco contenido en  $aa_0$ , donde  $a$  y  $p$  son sus puntos extremos. Ahora, sea  $y_p$  la recta perpendicular a  $aa_0$  que pasan por  $p$ . Para  $i \in N''$  consideremos  $p_i = y_p \cap aa_{m_i}$ . Construimos la sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  de la siguiente manera: para  $i \in N'$  tomamos  $A_i = A \cup xx_i$  y para  $i \in N''$  consideramos  $B_i = ax_i \cup x_i p_i$  y  $A_i = A \cup B_i$ . Es claro que  $A_i \in C(x_i, X)$ , para toda  $i$ . Por como se ha construido  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ , se cumple que esta converge a  $A$ .

Por lo tanto de (1) y (2) se tiene que  $A_s$  tiene la propiedad de Kelley.

Consideremos  $b = (1, 0)$ , el continuo  $A_{sa} = A_s \cup a_0 b$  se conoce como **abanico armónico con pata alargada**, véase Figura 2.

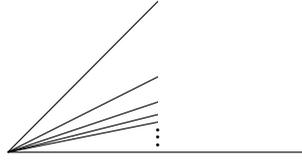


Figura 2: Abanico armónico con pata alargada.

Con este cambio, el continuo  $A_{sa}$  no tiene la propiedad de Kelley. Observe que la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset A_{sa}$  converge a  $a_0$ . Si  $A = a_0b$ ,  $A \in C(a_0, A_{sa})$ , notar que no existe una sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  que converga a  $A$  tal que  $A_i \in C(a_i, A_{sa})$  para toda  $i$ . Por lo tanto  $A_{sa}$  no tiene la propiedad de Kelley.

**Teorema 3.2.** *Si es  $X$  un continuo,  $x \in X$  y  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión que converge a  $x$ , entonces  $\limsup C(x_n, X) \subset C(x, X)$ .*

*Demostración.* Si  $A \in \limsup C(x_n, X)$ , entonces  $A \in 2^X$  y para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que

$$B_H\left(A, \frac{1}{k}\right) \cap C(x_{n_k}, X) \neq \emptyset.$$

Podemos tomar  $A_{n_k} \in C(x_{n_k}, X)$  tal que  $H(A, A_{n_k}) < \frac{1}{k}$ . Como la sucesión  $\{A_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  está contenida en  $C(X)$  y converge a  $A$ , entonces  $A \in C(X)$ . Para probar que  $x \in A$ , supongamos que  $x \notin A$  y consideremos  $r = \min\{d(x, a) : a \in A\}$ , por ser  $A$  un continuo se cumple que  $r > 0$ . Tomemos ahora  $\varepsilon = \frac{r}{2}$ , donde  $d(x, a) > \varepsilon$  para toda  $a \in A$ . Para  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  existe  $m \in \mathbb{N}$ , tal que  $d(x_{n_m}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $H(A_{n_m}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ . De esto  $A_{n_m} \subset N_d(A, \frac{\varepsilon}{2})$  y como  $x_{n_m} \in A_{n_m}$  debe existir  $a_0 \in A$  tal que  $d(x_{n_m}, a_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por la desigualdad del triángulo  $d(x, a_0) \leq d(x, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, a_0) < \varepsilon$ , que es una contradicción. Por lo tanto  $x \in A$  y  $A \in C(x, X)$ .  $\square$

**Teorema 3.3.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces, la función  $\tau : X \rightarrow K(X)$  es continua si y solo si  $X$  tiene la propiedad de Kelley.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  tiene la propiedad de Kelley. Sea  $x \in X$  y  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  una sucesión que converge a  $x$ . Como  $X$  tiene la propiedad de Kelley en  $x$ , dado  $D \in C(x, X)$  existe  $\{D_n\}_{n=1}^\infty \subset C(X)$  una sucesión que converge a  $D$ , tal que  $D_n \in C(x_n, X)$ . Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe

$n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq n_0$ , se tiene que  $H(D_n, D) < \varepsilon$ , entonces  $B_H(D, \varepsilon) \cap C(x_n, X) \neq \emptyset$ ,  $n \geq n_0$ . Dado  $D \in C(x, X)$  para cualquier abierto  $U$  en  $2^X$  que contenga a  $D$  se cumple que  $U \cap C(x_n, X) \neq \emptyset$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  excepto para un número finito, es decir,  $C(x, X) \subset \liminf C(x_n, X)$ . Por el teorema 3.2 se tiene que  $\limsup C(x_n) \subset C(x, X)$ , donde  $\lim C(x_n) = C(x, X)$ , es decir, la sucesión  $\{\tau(x_n)\}_{n=1}^\infty$  converge a  $\tau(x)$ . Por lo tanto  $\tau$  es continua.

Ahora, sean  $x \in X$ ,  $A \in C(x, X)$  y  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  una sucesión que converge a  $x$ . De la continuidad de  $\tau$  se tiene que  $\{C(x_n, X)\}_{n=1}^\infty$  converge a  $C(x, X)$ . Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $m_n \in \mathbb{N}$ , tal que para toda  $m \geq m_n$  se cumple que

$$H_2(C(x_m, X), C(x, X)) < \frac{1}{n}.$$

Podemos tomar la sucesión de  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ , de tal forma que sea estrictamente creciente. Construimos la sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  como se muestra a continuación. Para  $i \in \{1, \dots, m_1 - 1\}$  tomamos  $A_i = X$ . Dado  $j \in \mathbb{N}$  y  $i \in \{m_j, \dots, m_{j+1} - 1\}$ , como  $i \geq m_j$  se cumple  $C(x, X) \subset N_H(C(x_i, X), \frac{1}{j})$ , entonces para cada  $i \in \{m_j, \dots, m_{j+1} - 1\}$  podemos elegir  $A_i \in C(x_i, X)$  tal que  $H(A_i, A) < \frac{1}{j}$ . Esto se hace para cada  $j \in \mathbb{N}$  y se construye la sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset C(X)$  tal que  $A_i \in C(x_i, X)$ . Como  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  es estrictamente creciente, los elementos  $A_i$  están bien definidos para toda  $i \in \mathbb{N}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , para esta misma  $n$  existe  $m_n \in \mathbb{N}$  tal que, para toda  $m \geq m_n$  se cumple que  $H(A_m, A) < \frac{1}{n}$ . Por lo tanto  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  converge a  $A$ , así  $X$  tienen la propiedad de Kelley en  $x$ .  $\square$

El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir  $X$  para que  $K(X)$  sea compacto.

**Teorema 3.4.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $K(X)$  es compacto;
2. La función  $\tau : X \rightarrow K(X)$  es continua;
3.  $X$  tiene la propiedad de Kelley;

4.  $X \approx K(X)$ .

*Demostración.* Veamos que (1)  $\Leftrightarrow$  (2), es claro que (2)  $\Rightarrow$  (1). La función  $\tau^{-1}$  es continua por el teorema 2.5 y biyectiva por el teorema 2.4. Como  $K(X)$  es compacto  $\tau$  es continua, es decir (1)  $\Rightarrow$  (2).

(2)  $\Leftrightarrow$  (3) por el teorema 3.3. Si suponemos (3) se cumplen (1), (2) y por ser  $\tau$  biyectiva, concluimos que  $X \approx K(X)$ , es decir, (3)  $\Rightarrow$  (4). Si suponemos (4) se cumple (1), por lo tanto (4)  $\Rightarrow$  (3), así (3)  $\Leftrightarrow$  (4).  $\square$

**Ejemplo 3.5.** Existe un continuo  $X$  tal que  $K(X)$  no es compacto.

Consideraremos el abanico armónico con pata alargada  $A_{sa}$ , denotado por  $X$ . Sabemos que  $A_{sa}$  no tiene la propiedad de Kelley y  $K(X)$  no es compacto por el teorema 3.4. En conclusión si  $X$  es un continuo,  $K(X)$  no es necesariamente compacto y por lo tanto no es un continuo. Para poder dar más detalles de la compacidad de  $K(X)$ , es necesario agregar la hipótesis de que  $X$  sea localmente conexo, esto se trata en la siguiente sección.

## 4 Conexidad de $K(X)$

En esta sección se da una condición necesaria para que  $K(X)$  sea conexo y también se da un ejemplo de un continuo  $X$ , para el cual  $K(X)$  no es conexo.

**Teorema 4.1.** *Si  $X$  es un continuo y  $B$  un subespacio localmente conexo de  $X$ , entonces la función  $\tau_B : B \rightarrow K(B, X)$  es continua.*

*Demostración.* Sea  $p \in B$  y  $\varepsilon > 0$ . Por ser  $B$  localmente conexo, podemos tomar  $U$  abierto y conexo, tal que  $p \in U \subset B$  y  $\text{diam}(U) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Veamos que

$$\tau_B(U) \subset B_{H_2}(\tau_B(p), \varepsilon).$$

Sean  $q \in U$ ,  $K \in C(p, X)$  y consideremos  $D = K \cup \text{cl}(U)$ . Es claro que  $D \in C(q, X)$ , además  $D \subset N(K, \varepsilon)$  y  $K \subset N(D, \varepsilon)$ , luego  $H(D, K) < \varepsilon$ , entonces  $C(p, X) \subset N_H(C(q, X), \varepsilon)$ . Dada  $L \in C(q, X)$  y tomando  $E = L \cup \text{cl}(U)$ , se cumple que  $E \subset N(L, \varepsilon)$  y  $L \subset N(E, \varepsilon)$ , por ende  $H(E, L) < \varepsilon$ . Como  $E \in C(p, X)$ , entonces  $C(q, X) \subset N_H(C(p, X), \varepsilon)$ . Finalmente, se tiene que  $H_2(\tau_B(q), \tau_B(p)) = H_2(C(q, X), C(p, X)) < \varepsilon$ . Así,  $\tau_B$  es continua.  $\square$

**Corolario 4.2.** *Si  $X$  es un continuo y  $B$  un subespacio localmente conexo de  $X$ , entonces  $B \approx K(B, X)$ . En particular,  $K(B, X)$  es localmente conexo.*

*Demostración.*  $\tau_A$  es biyectiva por el teorema 2.4,  $\tau_A^{-1}$  es continua por el teorema 2.5 y finalmente  $\tau_B$  es continua por el teorema 4.1. Por lo tanto  $B \approx K(B, X)$ .  $\square$

**Corolario 4.3.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo, entonces  $K(X)$  es conexo y localmente conexo*

*Demostración.* En este caso  $X \approx K(X)$ .  $\square$

**Teorema 4.4.** *Sean  $X$  un continuo y  $B$  un subespacio de  $X$ . Entonces,  $B$  es arco conexo si y solo si  $K(B, X)$  es arco conexo.*

*Demostración.* Supongamos que  $K(B, X)$  es arco conexo, por el teorema 2.5 se cumple que  $\tau_B^{-1} : K(B, X) \rightarrow B$  es continua, así  $\tau_B^{-1}(K(B, X)) = B$  es arco conexo.

Por otro lado supongamos que  $B$  es arco conexo y sean  $p, q \in B$  tomemos  $C(p, X), C(q, X) \in K(B, X)$ . Existe una función  $f : [0, 1] \rightarrow B$  tal que  $f([0, 1]) = A$  es un arco y  $f(0) = p, f(1) = q$ . Por ser  $f$  un encaje y  $[0, 1]$  localmente conexo se cumple que  $A$  es un subespacio localmente conexo de  $X$ . Luego por el teorema 4.1 se cumple que  $\tau_A$  es continua y por lo tanto  $(\tau_A \circ f)([0, 1])$  es un arco en  $K(B, X)$ , donde  $(\tau_A \circ f)(0) = C(p, X)$  y  $(\tau_A \circ f)(1) = C(q, X)$ . De este modo  $K(B, X)$  es arco conexo.  $\square$

**Ejemplo 4.5.** Existe un continuo  $X$  tal que  $K(X)$  no es conexo.

Sea  $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2, 2]\}$  y  $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$ . Tomando  $X = A \cup B$ , entonces  $X$  es un continuo, el cual no es localmente conexo.

Dado que  $A, B$  son localmente conexos, por el corolario 4.2 se cumple que  $A \approx K(A, X)$  y  $B \approx K(B, X)$ , por ende  $K(A, X)$  es cerrado en  $K(X)$ .

Si suponemos que  $K(B, X)$  no es cerrado en  $K(X)$ . Existen  $x \in A$  y  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  está contenida en  $B$  es una sucesión que converge a  $x$ , tal que la sucesión  $\{C(x_n, X)\}_{n=1}^{\infty}$ , contenida en  $K(B, X)$ , converge a  $C(x, X)$ .

Sea  $M = \{0\} \times [-1, 1]$ , podemos tomar un arco  $K \in C(x, X)$  de tal manera que  $K \cap (X - M) \neq \emptyset$  y  $M \cap (X - K) \neq \emptyset$ . Por como se ha elegido a  $K$ , podemos asegurar que alguno de sus puntos extremos, digamos  $p$ , no pertenece a  $M$ . Sea  $r = \frac{d(p, M)}{2}$ , se cumple que  $1 > r > 0$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$  y  $D \in C(x_n, X)$ , no es difícil probar que  $d(p, q) > 1$ , para todo  $q \in D$ , por lo

tanto  $d(p, D) > r$ . Así,  $H(\{p\}, D) > r$ , como  $\{p\} \in C(x, X)$ , se cumple que  $C(x, X) \not\subseteq N_H(C(x_n, X), r)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , esto es una contradicción. Por lo tanto  $K(B, X)$  es cerrado en  $K(X)$ . Por ser  $K(A, X)$ ,  $K(B, X)$  disjuntos y no vacíos, con  $K(X) = K(A, X) \cup K(B, X)$ , se tiene que  $K(X)$  es desconexo. Sin embargo  $K(X)$  es localmente conexo por el corolario 4.2.

De forma similar a la sección anterior, si  $X$  es un continuo, la conexidad de  $X$  no necesariamente la hereda  $K(X)$ , por ende si  $X$  es un continuo esto no implica que  $K(X)$  sea un continuo. Los siguientes teoremas culminan el tema sobre la compacidad de  $K(X)$ , lo cuales son consecuencia del teorema 4.1.

**Corolario 4.6.** *Sean  $X$  un continuo y  $A \in C(X)$ . Si  $A$  es localmente conexo, entonces  $A$  tiene la propiedad de Kelley.*

*Demostración.* Por el teorema 4.1, se cumple que  $\tau_A$  es continua, luego por el teorema 3.3  $A$  tiene la propiedad de Kelley.  $\square$

El recíproco de este corolario es falso, para ver esto basta considerar el abanico armónico, ya que este tiene la propiedad de Kelley, pero no es localmente conexo.

**Corolario 4.7.** *Sean  $X$  un continuo y  $A \in C(X)$ . Si  $A$  es localmente conexo, entonces  $K(A, X)$  es compacto.*

## 5 Tamaño de $K(X)$

En esta sección se presentan los conceptos de homogeneidad de un continuo  $X$  y el tamaño de  $K(X)$ , y se brinda una relación entre estos dos conceptos. Para ello note que, dado un continuo  $X$  si dos elementos de  $K(X)$  son homeomorfos esto define una relación de equivalencia  $\approx$  en  $K(X)$ .

**Definición 5.1.** Sea  $X$  un continuo y  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $K(X)$  tiene **tamaño**  $n$ , si el espacio cociente  $K(X)/\approx$  tiene cardinalidad  $n$ .

**Lema 5.2.** *Sean  $X, Y$  continuos,  $p \in X$  y  $f: X \rightarrow Y$  un homeomorfismo, entonces  $C(p, X) \approx C(f(p), Y)$*

*Demostración.* Basta considerar la función  $C(f)_p: C(p, X) \rightarrow C(f(p), Y)$  tal que  $C(f)_p(A) = f(A)$ , ya que este es un homeomorfismo.  $\square$

**Definición 5.3.** Si  $Y$  es un conjunto y  $(G, \cdot)$  un grupo decimos que  $Y$  es un **G-conjunto** si existe una función (acción)  $\alpha_Y : G \times Y \rightarrow Y$  tal que:

1.  $\alpha_Y(Id, y) = y$  para cada  $y \in Y$ ,
2.  $\alpha_Y(f, \alpha_Y(g, x)) = \alpha_Y(f \cdot g, x)$  para toda  $f, g \in G$  y  $y \in Y$ .

Sea  $X$  un continuo y  $\mathcal{H}(X) = \{f : X \rightarrow X : f \text{ es homeomorfismo}\}$ . Se cumple que  $(\mathcal{H}(X), \circ)$  es un grupo, donde  $\circ$  es la composición. El continuo  $X$  es un  $\mathcal{H}(X)$ -conjunto, con la acción  $\alpha_X : \mathcal{H}(X) \times X \rightarrow X$ ,  $\alpha_X(f, x) = f(x)$ .

**Definición 5.4.** Sea  $Y$  un  $G$ -conjunto. Dado  $y \in Y$  la **órbita** de  $y$  bajo la acción  $\alpha_Y$  es:

$$\mathcal{O}(y) = \{\alpha(f, y) : f \in G\} \subset Y.$$

Dado  $x \in X$  la órbita de  $x$  bajo la acción  $\alpha_X$  es  $\mathcal{O}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{H}(X)\}$ .

Las órbitas brindan una partición de  $X$ , esto define la siguiente relación de equivalencia:

$$x \equiv y \iff x \in \mathcal{O}(y) \quad (A).$$

(A) es una relación de equivalencia en  $X$ , donde las clases de equivalencia son las órbitas.

**Definición 5.5.** Dado un entero positivo  $n$ , decimos que el espacio  $X$  es  $\frac{1}{n}$ -**homogéneo**, si  $X$  tiene exactamente  $n$  órbitas distintas. De otra manera,  $X$  es  $\frac{1}{n}$ -homogéneo si la cardinalidad del espacio cociente  $X/\equiv$  es igual a  $n$ . Simplemente llamamos homogéneo al espacio 1-homogéneo.

Podemos afirmar que si  $y \in \mathcal{O}(x)$ , entonces  $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$ . Damos a continuación algunos ejemplos de estos espacios.

**Definición 5.6.** La **curva cerrada simple** es cualquier conjunto homeomorfo al subconjunto  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ .

**Ejemplo 5.7.** La curva cerrada simple  $S^1$  es homogéneo y además  $K(S^1)$  tiene tamaño 1.

Haciendo uso del homeomorfismo de la rotación, se observa que todos los elementos de  $S^1$  pertenecen a una misma órbita. Por lo tanto, dados dos puntos  $p, q \in X$  existe un homeomorfismo  $f : S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $f(p) = q$  y por lo tanto  $C(f) : C(p, X) \rightarrow C(q, X)$  es un homeomorfismo, así  $K(S^1)$  tiene tamaño 1.

Note que la homogeneidad es una propiedad topológica.

**Ejemplo 5.8.** El intervalo  $[0, 1]$  es  $\frac{1}{2}$ -homogéneo y además  $K([0, 1])$  tiene tamaño 2.

Sea  $f \in \mathcal{H}([0, 1])$ , primero veamos que  $f(0), f(1) \in \{0, 1\}$ . Supongamos que  $f(0) \notin \{0, 1\}$ , así  $f(0) \in (0, 1)$ . Como  $f$  es sobreyectiva existen  $r, s \in (0, 1]$  con  $r \neq s$  tales que  $f(r) = 0$  y  $f(s) = 1$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $r < s$ . Definiendo la función  $h(x) = f(x) - f(0)$ , tenemos que  $h(r) < 0 < h(s)$ , por lo que existe  $c \in [r, s]$  tal que  $f(c) = f(0)$  y así  $c = 0$ , pero esto es una contradicción, por lo tanto,  $f(0) \in \{0, 1\}$ . De forma análoga se puede probar que  $f(1) \in \{0, 1\}$ . Así, tenemos que  $\mathcal{O}(0) = \{0, 1\} = \mathcal{O}(1)$ . Veamos ahora que  $\mathcal{O}(\frac{1}{2}) = \mathcal{O}(x)$ , para toda  $x \in (1, 0)$ . Sea  $y \in (0, 1)$ , podemos considerar que  $f_y : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  está definida por:

$$f_y(x) = \begin{cases} 2yx, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1 - y)x + 2y - 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Observe que  $f_y \in \mathcal{H}([0, 1])$  y además  $f_y(\frac{1}{2}) = y$ , es decir,  $y \in \mathcal{O}(\frac{1}{2})$ . Por lo tanto  $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(\frac{1}{2})$ . Así, solo hay dos órbitas en  $[0, 1]$  que son  $\mathcal{O}(0)$  y  $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$ , por lo tanto  $[0, 1]$  es  $\frac{1}{2}$ -homogéneo.

Por lo tanto, en  $K([0, 1]) / \approx$  solo hay dos clases de equivalencia, cuyos representantes son  $C(0, [0, 1])$  y  $C(\frac{1}{2})$ , así  $K([0, 1])$  tiene tamaño 2.

**Ejemplo 5.9.** El triodo simple es  $\frac{1}{3}$ -homogéneo, véase Figura 3

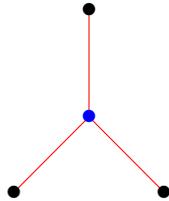


Figura 3: Triodo simple.

- Los puntos en color negro pertenecen a una misma órbita digamos  $\mathcal{O}(x_1)$ , porque bajo rotación envía un punto negro en otro punto negro.

- Los puntos sobre los segmentos en color rojo pertenecen a otra órbita digamos  $\mathcal{O}(x_2)$ .
- El punto en color azul es el único punto que conecta con 3 segmentos y por ende este determina otra órbita digamos  $\mathcal{O}(x_3)$ .

Como las órbitas  $\mathcal{O}(x_1)$ ,  $\mathcal{O}(x_2)$  y  $\mathcal{O}(x_3)$  son ajenas, entonces el triodo simple es  $\frac{1}{3}$ -homogéneo.

**Teorema 5.10.** Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Si  $X$  es un continuo  $\frac{1}{n}$ -homogéneo y  $K(X)$  tiene tamaño  $m$ , entonces  $m \leq n$ .

*Demostración.* Supongamos que  $m > n$  y que  $C(x_1, X), C(x_2, X), \dots, C(x_m, X)$  son los  $m$  representantes de la clases de equivalencia. Supongamos que  $\mathcal{O}(x_i) = \mathcal{O}(x_j)$  para  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  con  $i \neq j$ , entonces existe  $f_i \in \mathcal{H}(X)$  tal que  $f_i(x_i) = x_j$ . Luego,  $C(f_i)|_{C(x_i, X)} : C(x_i, X) \rightarrow C(f(x_i), X)$  es un homeomorfismo por el lema 5.2. Así,  $C(x_i, X)$  es homeomorfo a  $C(x_j, X)$ , pero esto es una contradicción. Por lo tanto  $m \leq n$ .  $\square$

## 6 Gráficas finitas con $K(X)$ de tamaño $n$

El teorema 5.10 muestra que el grado de homogeneidad de un continuo  $X$  es una cota superior para el tamaño de  $K(X)$ . En esta sección se presenta una familia de gráficas finitas  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ , las cuales cumplen que el tamaño de  $K(X_n)$  es igual a  $n$  y que este coincide con el grado de homogeneidad de  $X_n$ , véase el teorema 6.17. Antes definiremos el concepto de gráfica finita.

**Definición 6.1.** Un **arco** es cualquier conjunto homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

**Definición 6.2.** Un continuo  $X$  es una **gráfica finita** si se puede expresar como la unión de un número finito de arcos tales que, cada par de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos. Cada arco que conforma a una gráfica finita le llamamos arista.

Para toda gráfica finita  $X$  consideramos la métrica  $d$ , dada por la “longitud de arco”, es decir, dados  $x, y \in X$ , la distancia de  $x$  a  $y$  será la longitud de la trayectoria más corta que conecta  $x$  con  $y$  en  $X$ . Se supondrá que la longitud de cada arista es igual a 1.

**Definición 6.3.** El  **$n$ -odo simple**, denotado por  $T_n$ , es un continuo que se construye uniendo  $n$  arcos que se intersectan dos a dos en un único punto llamado **vértice**, dicho vértice tiene que ser un punto extremo de cada uno de los  $n$  arcos y los otros puntos extremos de los arcos se llaman extremos del  $n$ -odo.

**Definición 6.4.** Dado  $X$  una gráfica finita,  $p \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $p$  es de **orden  $n$**  en  $X$ , denotado por  $ord(p, X) = n$ , si  $p$  tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un  $n$ -odo simple que tiene a  $p$  como vértice.

Los puntos de orden 1 son puntos extremos, los de orden 2 son puntos ordinarios y los puntos de orden 3 o mayor son puntos de ramificación, estos se identifican con  $E(X)$ ,  $O(X)$  y  $R(X)$ , respectivamente. El conjunto de vertices de  $X$  se denota por  $V(X) = E(X) \cup O(X)$  y una arista será un arco cuyos puntos extremos son vértices.

**Teorema 6.5.** Sea  $X$  una grafica finita, entonces  $K(X)$  es un continuo.

*Demostración.* Se sabe por [7, Proposición 9.4] que una gráfica finita es localmente conexa, entonces por los teoremas 4.7 y 4.2 de la sección anterior se cumple que  $K(X)$  es un continuo.  $\square$

**Ejemplo 6.6.** Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  la gráfica finita  $X = S \cup L \cup J$ , donde

1.  $S = \{(x, y) : (x + 2)^2 + y^2 = 1\}$ ;
2.  $L = \{(x, 0) : x \in [-1, 1]\}$ ;
3.  $J = \{(1, y) : y \in [-1, 1]\}$ , véase Figura 4.

En  $X$  se tienen las siguientes órbitas:

- Los puntos sobre la circunferencia en color rojo, forman la órbita  $\mathcal{O}(x_1)$ .
- Los puntos sobre el segmento color negro, forman la órbita  $\mathcal{O}(x_2)$ .
- Los puntos sobre el segmento color verde, forman la órbita  $\mathcal{O}(x_3)$ .
- Los puntos en color rosa forman la órbita  $\mathcal{O}(x_4)$ . Los puntos en color amarillo y azul forman las órbitas  $\mathcal{O}(x_5)$  y  $\mathcal{O}(x_6)$  respectivamente.

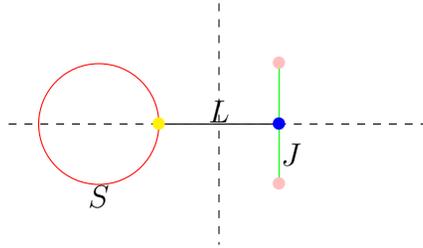


Figura 4: Gráfica de  $X$ .

La gráfica finita es  $\frac{1}{6}$ - homogénea. Sin embargo, en [4, Teorema 5.2] se prueba que  $K(X)$  tiene tamaño 5.

**Teorema 6.7.** [4, Teorema 3.3] *Sea  $X$  una gráfica finita y  $p \in X$ . Para cada  $A \in C(p, X)$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $\mathcal{A} \subset C(p, X)$  tal que  $\mathcal{A}$  contiene una  $n$ -celda, donde  $n = ord(p, X)$  y  $H_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$ .*

**Observación 6.8.** Si  $A = \{p\}$  en el teorema 6.7, cabe resaltar que el subconjunto  $\mathcal{A} \subset C(p, X)$ , que nos brinda el teorema 6.7, no solo contiene una  $n$  - celda, sino que esta es una  $n$  - celda. Además, por su construcción, podemos asegurar que  $\{p\}$  es un punto interior de  $\mathcal{A}$ .

**Teorema 6.9.** *Sean  $X, Y$  gráficas finitas y  $p \in X, q \in Y$  tales que  $C(p, X) \approx C(q, Y)$ , entonces  $ord(p, X) = ord(q, Y)$ .*

*Demostración.* Sean  $n = ord(p, X), ord(q, Y) = m$  y supongamos que  $n < m$ . Como  $C(p, X) \approx C(q, Y)$  existe  $h : C(p, X) \rightarrow C(q, Y)$  un homeomorfismo. Sea  $\varepsilon = \frac{\min\{d(p,r) : r \in V(X)\}}{2}$ , por el teorema 6.7 y la observación 6.8, existe  $\mathcal{A} \subset C(p, X)$  una  $n$  - celda, tal que  $H_2(\mathcal{A}, \{\{p\}\}) < \varepsilon$  y además  $\{p\}$  es un punto interior de  $\mathcal{A}$ . Entonces existe  $\varepsilon_0 < \varepsilon$  tal que  $B_H(\{p\}, \varepsilon_0) \subset \mathcal{A}$ . Ahora, por ser  $h^{-1}$  continua, existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $D \in B_H(h(\{p\}), \delta)$  ocurre que  $H(h^{-1}(D), \{p\}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ .

Por el teorema 6.7 existe  $\mathcal{A}' \subset C(q, Y)$ , que contiene una  $m$  - celda, tal que  $H_2(\mathcal{A}', \{h(\{p\})\}) < \delta$ . Esto implica que  $h^{-1}(\mathcal{A}') \subset B_H(\{p\}, \frac{\varepsilon_0}{2})$ , entonces  $h^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$ . Es claro que  $h^{-1}(\mathcal{A}')$  contiene una  $m$  - celda, lo cual es una contradicción, porque  $\mathcal{A}$  es una  $n$  - celda, así  $n \geq m$ . Análogamente se puede demostrar que  $m \geq n$ . Por lo tanto  $m = n$ . □

El teorema anterior asegura que en una gráfica finita  $X$ , dados  $p, q \in X$  tales que  $C(p, X) \approx C(q, X)$ , se cumple lo siguiente:

1. Si  $p \in E(X)$ , entonces  $q \in E(X)$ .
2. Si  $p \in O(X)$ , entonces  $q \in O(X)$ .
3. Si  $p \in R(X)$ , entonces  $q \in R(X)$ .

Sea  $X$  es una gráfica finita tal que  $K(X)$  tiene tamaño 1, veamos que esta es una caracterización de la curva cerrada simple.

**Teorema 6.10.** *Para una gráfica finita  $X$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $K(X)$  tiene tamaño 1;
2.  $X$  es una curva cerrada simple;
3.  $X$  es homogéneo.

*Demostración.* Veamos que  $1 \Rightarrow 2$ . Dados  $p, q \in X$  se cumple que  $C(p, X) \approx C(q, X)$  y por ende  $ord(p, X) = ord(q, X)$ . Esto implica que  $p \in O(X)$ , para toda  $p \in X$ . Luego por [7, Proposición 9.5] se cumple que  $X$  es una curva cerrada simple. Para probar que  $2 \Rightarrow 3$ , basta revisar el ejemplo 6.6. Finalmente,  $3 \Rightarrow 1$  por el teorema 5.10.  $\square$

**Definición 6.11.** Sea  $X$  una gráfica finita, que no es un arco. Si  $q \in E(X)$ , denotamos por  $v(q)$  al único punto en  $R(X)$  tal que la componente  $Q$  de  $X - \{v(q)\}$ , que contiene a  $q$ , satisface que  $Q \cup \{v(q)\}$  es un arco.

Un punto  $v(q)$  es el primer punto de ramificación que nos encontramos, si caminamos sobre la gráfica finita saliendo desde  $p$ , véase Figura 5.

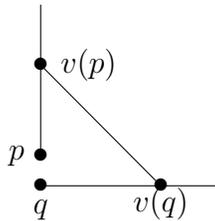


Figura 5: Puntos  $v(q)$  y  $v(p)$ .

**Teorema 6.12.** *Sea  $X$  una gráfica finita distinta de un arco. Si  $e_1, e_2 \in E(X)$  y  $C(e_1, X) \approx C(e_2, X)$ , entonces  $\text{ord}(v(e_1), X) = \text{ord}(v(e_2), X)$ .*

*Demostración.* Sea  $h : C(e_1, X) \rightarrow C(e_2, X)$  un homeomorfismo. Consideremos las aristas de  $X$ ,  $l_1 = e_1v(e_1)$  y  $l_2 = e_2v(e_2)$ , donde  $n = \text{ord}(v(e_1), X) \geq 3$  y  $m = \text{ord}(v(e_2), X) \geq 3$ . Sea  $A \in C(e_1, l_1) - \{l_1\}$ , podemos suponer que  $A = e_1r$ , para algún  $r \in l_1 - \{v(e_1)\}$ . Tomemos  $\varepsilon = d(r, v(e_1))$  y supongamos que  $h(A) \notin C(e_2, l_2)$ . Como la función inversa de  $h$  es continua,  $h^{-1}$  es continua en  $h(A)$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $D \in B_H(h(A), \delta)$  se cumple que  $H(h^{-1}(D), A) < \varepsilon$ . Por como se ha elegido  $\varepsilon$  se cumple que,  $h^{-1}(D) \in C(e_1, l_1)$  para cada  $D \in B_H(h(A), \delta)$ . Es claro que  $h(A) \in C(e_2, X)$  y como  $h(A) \notin C(e_2, l_2)$  se cumple que  $v(e_2) \in h(A)$ . Así, por el teorema 6.7 existe  $\mathcal{A} \subset C(v(e_2), X)$ , que contiene una  $m$ -celda, tal que  $H_2(\mathcal{A}, \{h(A)\}) < \delta$ . Esto implica que  $\mathcal{A} \subset B_H(h(A), \delta)$  y por ende  $h^{-1}(\mathcal{A}) \subset C(e_1, l_1)$ . Es claro que  $h^{-1}(\mathcal{A})$  contiene una  $m$ -celda. Pero por el teorema [9, Teorema 3.17],  $C(e_1, l_1)$  es un arco, que es una contradicción. Por lo tanto  $h(A) \in C(e_2, l_2)$ .

Sea  $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset C(e_1, l_1) - \{l_1\}$  una sucesión que converge a  $l_1$ , por la continuidad de  $h$ , se cumple que la sucesión  $\{h(A_n)\}_{n=1}^\infty \subset C(e_2, l_2)$  converge a  $h(l_1)$  y por ser  $C(e_2, l_2)$  cerrado, se tiene que  $h(l_1) \in C(e_2, l_2)$ .

Veamos que  $h(l_1) = l_2$ . Supongamos que  $h(l_1) \neq l_2$ , entonces  $h(l_1) = e_2r$ , para algún  $r \in l_2 - \{v(e_2)\}$ . Sea  $\varepsilon = d(r, v(e_2))$  y por la continuidad de  $h$  existe  $\delta > 0$ , tal que para cada  $D \in B_H(l_1, \delta)$  se cumple que  $H(h(D), h(l_1)) < \varepsilon$ . Por como eligió  $\varepsilon$  tenemos que  $h(D) \in C(e_2, l_2)$  para cada  $D \in B_H(l_1, \delta)$ . Como  $v(e_1) \in l_1$ , por el teorema 6.7 existe  $\mathcal{A} \subset C(v(e_1), X)$ , el cual contiene una  $n$ -celda y además  $H_2(\mathcal{A}, \{l_1\}) < \delta$ . De esto último, se tiene que  $\mathcal{A} \subset B_H(l_1, \delta)$  y por lo tanto  $h(\mathcal{A}) \subset C(e_2, l_2)$ , lo cual es una contradicción, porque por [9, Teorema 3.17]  $C(e_2, l_2)$  es un arco y  $h(\mathcal{A})$  contiene una  $n$ -celda. Por lo tanto  $h(l_1) = l_2$ .

Con argumentos análogos, se prueba que  $h^{-1}(C(e_2, l_2)) \subset C(e_1, l_1)$ , entonces  $h(C(e_1, l_1)) = C(e_2, l_2)$ . Definamos los siguientes conjuntos:  $Y_1 = (C(e_1, X) - C(e_1, l_1)) \cup \{l_1\}$ ,  $Y_2 = (C(e_2, X) - C(e_2, l_2)) \cup \{l_2\}$ ,  $Z_1 = cl(X - l_1)$  y  $Z_2 = cl(X - l_2)$ . Ahora definamos las funciones,  $f_1 : Y_1 \rightarrow C(v(e_1), Z_1)$  por  $f_1(A) = (A - l_1) \cup \{v(e_1)\}$  y  $f_2 : Y_2 \rightarrow C(v(e_2), Z_2)$  por  $f_2(B) =$

$(B - l_2) \cup \{v(e_2)\}$ . Observe que las funciones  $f_1$  y  $f_2$  son homeomorfismos, así  $Y_1 \approx C(v(e_1), Z_1)$  y  $Y_2 \approx C(v(e_2), Z_2)$ . La función  $h$  da un homeomorfismo entre  $Y_1$  y  $Y_2$ , entonces  $C(v(e_1), Z_1) \approx C(v(e_2), Z_2)$ , luego por el teorema 6.9 se cumple que  $ord(v(e_1), Z_1) = ord(v(e_2), Z_2)$ . Es claro que  $ord(v(e_1), X) = ord(v(e_1), Z_1) + 1$  y  $ord(v(e_2), X) = ord(v(e_2), Z_2) + 1$ , por lo tanto  $ord(v(e_1), X) = ord(v(e_2), X)$ . □

**Definición 6.13.** Sean  $X$  una gráfica finita,  $p \in O(X)$  y  $vw$  la arista de  $X$  que contiene a  $p$ , con  $v, w \in V(X)$ . Se define

$$\Sigma(p, X) = \begin{cases} ord(v, X) + ord(w, X), & \text{si } v \neq w, \\ ord(v, X), & \text{si } v = w. \end{cases}$$

**Teorema 6.14.** Sean  $X$  un continuo y  $L \in C(X)$ . Entonces,  $L$  esta contenido en el centro de un  $k - odo$  de  $X$  si y solo si  $C(L, X)$  contiene una  $k - celda$ .

La demostración se puede consultar en [12] corolario 3.15.

**Teorema 6.15.** Sea  $X$  una gráfica finita. Si  $A$  es una arista de  $X$  y  $p \in O(X) \cap A$ , entonces existe  $\mathcal{A} \subset C(p, X)$  tal que  $\mathcal{A}$  esta contenido en una  $\Sigma(p, X) - celda$ .

*Demostración.* Sea  $A = vw$ , con  $v, w \in V(x)$ . Se tienen los siguientes dos casos:

1.  $v = w$ . Sea  $k = ord(v, X) = \Sigma(p, X)$ . Se tiene que  $A$  es una curva cerrada simple, consideremos  $A_1 = pv$  y  $A_2 = pw$  de tal manera que  $A = A_1 \cup A_2$ . Tomemos  $p_1, p_2 \in X$ , con  $p_1 \neq p_2$ , tal que  $A_1 = pp_1 \cup p_1p_2 \cup p_2v$ . Podemos tomar  $q_1, q_2, \dots, q_{k-2} \in X$ , puntos distintos dos a dos, tales que  $vq_i \cap vq_j = \{v\}$ ,  $j \neq i$ . Sea  $V = \bigcup_{i=1}^{k-2} vq_i$ , observar que  $Y = V \cup vp_1 \cup p_2w$  es un continuo. Si  $M = pv$ , se cumple que  $Y - M$  tiene exactamente  $k$  componentes en  $Y$ , es decir,  $Y$  es un  $k - odo$  y  $p \in M$ , donde  $M$  es el centro. Luego, por el teorema 6.14,  $C(p, X)$  contiene una  $\Sigma(p, X) - celda$ .
2.  $v \neq w$ . Sean  $k_1 = ord(v, X)$  y  $k_2 = ord(w, X)$ . Podemos tomar  $r_1, \dots, r_{k_1} \in X$ , puntos distintos dos a dos, tal que  $vr_i \cap vr_j = \{v\}$ ,  $i \neq j$ . También es posible seleccionar  $s_1, \dots, s_{k_2} \in X$ , puntos distintos dos a dos, tales

que  $ws_i \cap ws_j = \{w\}$  cuando  $i \neq j$ . Sean  $V = \bigcup_{i=1}^{k_1} vr_i$  y  $W = \bigcup_{i=1}^{k_2} ws_i$ , no es difícil probar que  $Y = V \cup A \cup W$  es un continuo y que  $Y - A$  tiene  $k_1 + k_2 = \Sigma(p, X)$  componentes en  $Y$ , es decir,  $Y$  es un  $\Sigma(p, X)$ -*odo* y  $A$  es un centro. Como  $p \in A$  por el teorema 6.14 se cumple que  $C(p, X)$  contiene una  $\Sigma(p, X)$ -*celda*.

□

**Teorema 6.16.** [4, Teorema 3.10] *Sea  $X$  una gráfica finita. Si  $p, q \in O(X)$  y  $C(p, X) \approx C(q, X)$ , entonces  $\Sigma(p, X) = \Sigma(q, X)$ .*

Se definen los siguientes conjuntos en el plano euclideo  $\mathbb{R}^2$ , donde  $\|\cdot\|$  es la norma. Para  $n \in \mathbb{N}$  se definen los siguientes conjuntos:

1.  $I_n = [n - 1, n] \times \{0\}$ ;
2.  $J_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - n, y - \frac{1}{4})\| = \frac{1}{4}\}$ ;
3.  $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - 2, y - \frac{1}{8})\| = \frac{1}{8}\}$ ;
4. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , consideramos a  $l_i^{(n)}$  como el segmento de recta que une a los puntos  $(n, 0)$  y  $(n - \frac{1}{i}, -1)$ ;
5. Si  $n \geq 3$ ,  $S_n = I_n \cup C_n \cup \bigcup_{i=1}^{2n} l_i^{(n)}$ .

Las Figuras 6, 7 y 8 muestran las gráficas finitas que serán la base para las gráficas que deseamos construir.



Figura 6:  $P_1 = I_2 \cup J_2 \cup J$  y  $P_2 = I_2 \cup J_1 \cup J_2 \cup J$ .

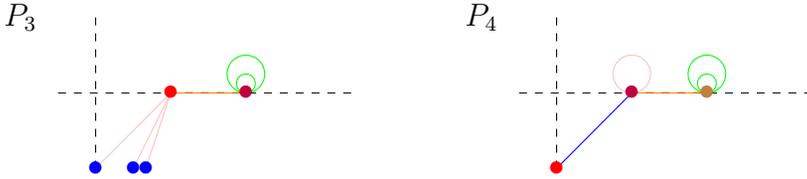


Figura 7:  $P_3 = P_1 \cup \bigcup_{i=1}^3 l_i^{(1)}$  y  $P_4 = P_2 \cup l_1^{(1)}$ .

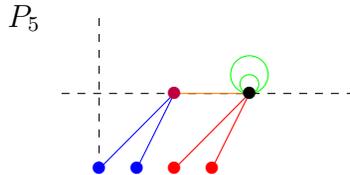


Figura 8:  $P_5 = P_1 \cup l_1^{(1)} \cup l_2^{(1)} \cup l_1^{(2)} \cup l_2^{(2)}$ .

En  $P_1$  los puntos en color azul y rojo definen dos órbitas en la que solo están esos puntos y por lo tanto  $C(p, X)$  es su único representante, esto es claro por el teorema 6.9.

Los puntos en color naranja pertenecen a una misma órbita, según el teorema 6.9 podría ser posible que un punto naranja y un punto verde pertenezcan a la misma órbita, pero esto no es posible por el teorema 6.16. Así, los puntos naranjas definen una misma órbita en la cual sus  $C(p, X)$  pertenecen a una misma clase.

Con argumentos análogos, los puntos en color verde pertenecen a una misma órbita y sus  $C(p, X)$  pertenecen a una misma clase. De esta manera  $P_1$  es  $\frac{1}{4}$ -homogéneo y  $K(P_1)$  tiene tamaño 4, esto ya que cada color define una órbita distinta y por los teoremas 6.9, 6.16 se prueba que cada color define una clase de equivalencia distinta en  $K(P_1)/\approx$ .

De manera similar al caso  $P_1$ , haciendo uso de los teoremas 6.9, 6.12 y 6.16, se prueba que  $P_i$  es  $\frac{1}{i+3}$ -homogéneo y que  $K(P_i)$  tiene tamaño  $i + 3$ ,

par  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Las gráficas finitas  $S_n$  juegan un papel importante en la construcción, por ello se presentan las gráficas de  $S_3$  y  $S_4$ , véase Figura 9.

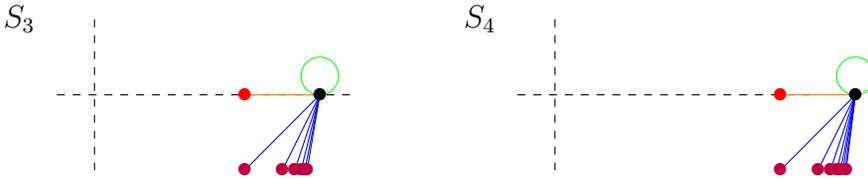


Figura 9:  $S_3$  y  $S_4$ .

Nuevamente utilizando los teoremas 6.9, 6.12, y 6.16, se prueba que  $S_3$  es  $\frac{1}{6}$ -homogéneo y que el tamaño de  $K(S_3)$  es 6, también que  $S_4$  es  $\frac{1}{6}$ -homogéneo y que el tamaño de  $K(S_4)$  es 6.

Definimos  $X_n$ , como sigue:

1. Sea  $X_1$  una curva cerrada simple,  $X_2$  un arco y  $X_3$  un triodo simple.
2.  $X_{i+3} = P_i$ , para  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Para cada  $n \geq 9$  se define de forma recursiva a  $X_n$ , de la siguiente manera.

3. Primero expresamos a  $n$  en la forma siguiente:  $n = 5(k + 1) + r$ , donde  $r \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ .
4. Luego se define para cada  $n \geq 9$  se define  $X_n = X_{5k+r} \cup S_{k+2}$ .

Tenemos así la familia de gráficas finitas  $X_i$ , observe que  $X_1, X_2, X_3$  son espacios  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ - homogéneo respectivamente, además  $K(X_1), K(X_2)$  y  $K(X_3)$  tienen tamaño 1, 2 y 3 de forma correspondiente.

Las Figuras 10, 11 y 12 muestran las gráficas de las primeras cinco iteraciones de la construcción.

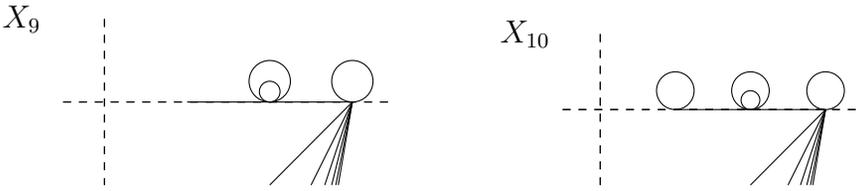


Figura 10:  $X_9$  y  $X_{10}$ .

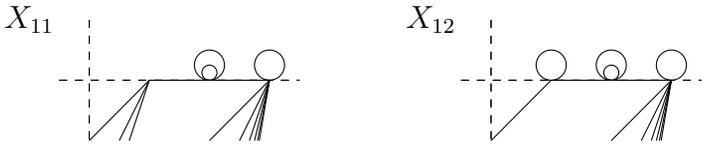


Figura 11:  $X_{11}$  y  $X_{12}$ .

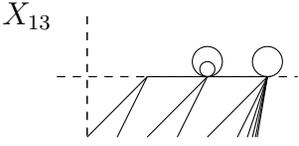


Figura 12:  $X_{13}$ .

Observar que  $S_3$  aumenta en 5 el tamaño de  $K(X_i)$ , cuando  $i \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ . Las siguientes cinco iteraciones se muestran en las Figuras 13, 14 y 15.

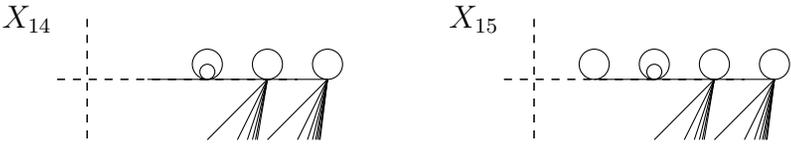


Figura 13:  $X_{14}$  y  $X_{15}$ .

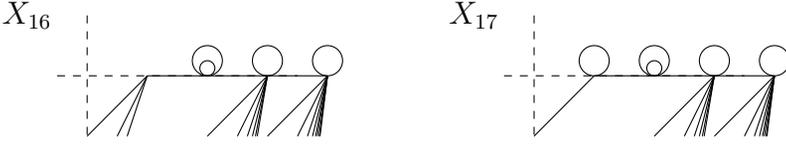


Figura 14:  $X_{16}$  y  $X_{17}$ .

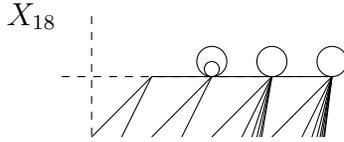


Figura 15:  $X_{18}$ .

Nuevamente, ahora gracias a  $S_4$ , el tamaño de  $K(X_i)$  aumentó en cinco, para  $i \in \{9, 10, 11, 12, 13\}$ . Como se puede observar en las gráficas, el tamaño de  $K(X_n)$  va aumentando en 5 unidades. Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , es posible encontrar una gráfica finita  $X_n$  cuyo tamaño de  $K(X_n)$  sea  $n$  y que además,  $X_n$  sea  $\frac{1}{n}$ -homogéneo. Esto nos permite enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 6.17.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe una gráfica finita  $X_n$  tal que es  $\frac{1}{n}$ -homogénea y  $K(X_n)$  tiene tamaño  $n$ .*

Recomendamos la lectura de las referencias [1] – [3] para conocimiento del lector y pueda ver la evolución de nuestras investigaciones las cuales tenemos plasmadas en este capítulo.

## 7 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros por el tiempo dedicado a la revisión, sus sugerencias y correcciones contribuyeron a mejorar el capítulo.

## Bibliografía

[1] Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Fernando Mauricio Rivera Vega «Progresiones aritméticas

- como base para algunos espacios topológicos (Capítulo 7)» Matemáticas y sus aplicaciones 11, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 135 – 148. Primera Edición 2019, ISBN: 978-607-525-615-3. Indautor: 03-2019-082010541400-01 Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2019.
- [2] Felipe de Jesús Aguilar Romero, *Dinámica en el intervalo y en su hiperspacio de compactos* (tesis de licenciatura FCFM). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México. (2019).
- [3] Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, «Continuidad de la función wf en el intervalo  $[0,1]$  (Capítulo 7)» Matemáticas y sus aplicaciones 14, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 161 - 181. Primera Edición 2020, ISBN: 978-607-525-695-5. Versión electrónica en <https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>; peso del archivo: 2 MB. Publicado el 26 de octubre de 2020.
- [4] Florencio Corona Vázquez, Russel Arón Quiñones Estrella, Javier Sánchez Martínez, Hugo Villanueva, *Hyperspaces  $C(p,X)$  of finite graphs*, Topology and its Applications, 248 (2018), 44-49.
- [5] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New york, Basel (1999).
- [6] Sergio Macías, *Topics on Continua*, Second Edition, Springer, 2018, ISBN:978- 3-319-90901-1.
- [7] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel (1992).
- [8] Víctor Neumann Lara, Patricia Pellicer Covarrubias, Isabel Puga, *On  $\frac{1}{2}$ -homogeneous continua*, Topology and its Applications, 153 (2006) 2518-2527.
- [9] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces  $C(p,X)$* , Topology and its Applications, 27 (1) (2003) 259-285.

- 
- [10] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces  $K(X)$* , Rocky Mountain Journal of Mathematics, 35 (2) (2005) 655-674.
- [11] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces  $C(p, X)$  for atriodic continua*, Houston Journal of Mathematics, 31 (2) (2005) 403-426.
- [12] Patricia Pellicer Covarrubias, *Cells in hyperspaces*, Topology and its Applications, 154 (2007) 1002-1007.
- [13] Patricia Pellicer Covarrubias,  *$\frac{1}{n}$ -homogeneity in symmetric products*, Topology and its Applications, 155 (2008) 1650-1660.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

felipe.aguilarr@alumno.buap.mx

pdsoto@fcm.buap.mx

dherrera@fcm.buap.mx

fmacias@fcm.buap.mx



## Capítulo 7

### Status de la unicidad de hiperespacios de continuos

Mauricio Esteban Chacón Tirado, David Herrera Carrasco, Antonio de Jesús Libreros López, María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero  
FCFM, BUAP

#### Resumen

En topología general, dado un espacio  $X$  hay varias maneras de construir un nuevo espacio  $K(X)$  a partir de  $X$ . Ejemplos de esta situación son: conos, productos, espacios de funciones de  $\mathbb{R}$ , grupos de homomorfismos, hiperespacios, etc. Una pregunta natural es si podemos recuperar el espacio  $X$  cuando conocemos el espacio  $K(X)$ ; para lograr este objetivo, el espacio  $K(X)$  debe ser único, esto es, este debe venir de un solo  $X$ , claro, salvo homeomorfismo. En este capítulo panorámico vamos a mencionar algo de lo que se ha hecho en esta dirección cuando la estructura  $K(X)$  es uno de los hiperespacios  $2^X, C_n(X), F_n(X), C_n(X)/F_m(X)$  o  $F_n(X)/F_m(X)$ . También tratamos clases de continuos sin hiperespacio único.

## 1 Introducción

El objetivo de este capítulo es el de concebir los últimos logros de esta rama de la topología que vincula la teoría de los hiperespacios y la teoría de los continuos. Para ser más concisos, restringimos nuestras consideraciones a la parte más importante de la teoría de los hiperespacios, a saber, la de los continuos (métricos). Debe subrayarse que hasta los últimos años del siglo XX, el estudio de los hiperespacios de continuos se concentró en la investigación de dos hiperespacios principales: el hiperespacio  $2^X$  de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de un continuo  $X$  y el hiperespacio  $C(X)$  de conexos

miembros de  $2^X$ , es decir, de subcontinuos de  $X$ . Muy recientemente, durante los últimos años, se inició un estudio más extenso de otros hiperespacios, y la atención de los investigadores se refiere principalmente a los hiperespacios  $C_n(X)$  y  $F_n(X)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

Este capítulo consta de ocho secciones. Los conceptos básicos utilizados en el escrito se recopilan en los preliminares. En la segunda sección se recuerdan algunos modelos para varios hiperespacios y se estudian las relaciones entre hiperespacios. La tercera sección está dedicada a los continuos determinados por el hiperespacio y algunos conceptos relacionados: tener un hiperespacio único.

Otro trabajo relacionado con este tema, pero en términos de la teoría de categorías, contiene una descripción en términos categóricos de algunos conceptos tratados aquí [6, Capítulo 4].

## 2 Preliminares

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío compacto y conexo.

Para un continuo  $X$ , consideraremos los siguientes hiperespacios de  $X$ :

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado de } X\}.$$

A este hiperespacio se le dota de la topología de Vietoris:

**Definición 2.1.** Para un continuo  $X$ , la topología de Vietoris para  $2^X$  es la topología más pequeña,  $\tau_V$  tal que  $2^X$  tiene las siguientes propiedades: (1)  $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in \tau_V$ , para todo abierto  $U$  de  $X$  y (2)  $2^X \setminus \{A \in 2^X : A \subset B\} \in \tau_V$ , para todo cerrado  $B$  en  $X$ .

Si  $U_1, \dots, U_m$  son abiertos de  $X$ , entonces

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}$$

es un **básico** para la topología de Vietoris (véase [41, Teorema 1.2]).

Como subespacio de  $2^X$  de un continuo  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos a

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ puntos}\}.$$

que denotan el producto simétrico  $n$  veces de  $X$ . Por lo tanto, el producto simétrico una vez de  $X$  es el hiperespacio  $F_1(X)$  de los subconjuntos singulares de  $X$ , y por las definiciones tenemos  $X$  es homeomorfo a  $F_1(X)$ . El concepto de producto simétrico lo introdujeron K. Borsuk y S. M. Ulam en [8]. Ver [41, (0.48), pág. 23] y [55, pág. 6 y 7] para obtener más información. Además, se define el hiperespacio  $F_\infty(X)$  de subconjuntos finitos de  $X$  por

$$F_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es finito}\} = \bigcup \{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$$

como subespacio de  $2^X$  de un continuo  $X$  (see [41, Definición 1.8, pág. 7], donde  $F_\infty(X)$  se denota por  $F(X)$ ). Notemos que para un continuo  $X$  todos los hiperespacios  $F_n(X)$  son continuos (ver [52, 2.4.2, pág. 156], y [11, Teorema 4.10, pág. 165]; comparar con [8, pág. 877]) y  $F_\infty(X)$  es un subconjunto denso (y conexo) de  $2^X$  (ver [52, 2.4.1, pág. 156]).

De manera similar, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se definen

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a los más } n \text{ componentes}\} \text{ y}$$

$$C_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene un número finito de componentes}\} = \bigcup \{C_n(X) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si  $n = 1$ , el hiperespacio  $C_1(X)$  de todos los elementos conexos de  $2^X$ , es decir, de todos los subcontinuos de  $X$ , generalmente se denota por  $C(X)$ . Es uno de los hiperespacios de  $X$  más importantes (y más estudiado en la literatura contemporánea), como puede verse en el contenido de [41] y [55]. Los hiperespacios  $C_n(X)$  para arbitrarios  $n \in \mathbb{N}$ , ahora, son objeto de una investigación más intensa. Se sabe en particular que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , los hiperespacios  $C_n(X)$  son continuos arco conexos (véase [46, Teorema 3.1, pág. 240]). Se remite al lector a [45] y [46] para obtener información básica sobre estos hiperespacios.

En 1979, S. B. Nadler Jr. introdujo el concepto de hiperespacio suspensión de un continuo  $X$  como el espacio cociente  $C(X)/F_1(X)$ , que se obtiene de  $C(X)$  al identificar a  $F_1(X)$  en un punto y se denota como  $HS(X)$  véase [56, pág. 125].

En 2004, Sergio Macías lo generalizó al  $n$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo  $X$  y es definido como el espacio cociente  $C_n(X)/F_n(X)$  que

se obtiene de  $C_n(X)$  al identificar a  $F_n(X)$  en un punto y se denota como  $HS_n(X)$ , donde  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , véase [47, pág. 127].

En 2008, Juan Carlos Macías [42] definió el  $n$ -ésimo pseudo hiperespacio suspensión de un continuo  $X$ ,  $PHS_n(X)$ , como el espacio cociente  $C_n(X)/F_1(X)$ . Para conocer propiedades básicas de este hiperespacio se remite la lector a la referencia [42].

En 2010, F. Barragán [7] definió para un continuo  $X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , el  $n$ -ésimo **producto simétrico suspensión** de  $X$ , denotado por  $SF_n(X)$ , como el espacio cociente  $F_n(X)/F_1(X)$ , el cual es obtenido de  $F_n(X)$  al identificar a  $F_1(X)$  a un punto con la topología cociente; también en [7] podemos encontrar ejemplos y propiedades de este hiperespacio. Para más sobre este hiperespacio véase [53].

En 2018, J. G. Anaya, D. Maya y F. Vázquez-Juárez [5] se definió el  $(n, m)$ -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo  $X$  es el espacio cociente  $C_n(X)/F_m(X)$  que se obtiene de  $C_n(X)$  al identificar a  $F_m(X)$  a un punto, donde  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$ , y lo denotamos por  $HS_m^n(X)$  (véase [5]). De acuerdo a esta notación  $HS_1^1(X) = HS(X)$  y  $HS_n^n(X) = HS_n(X)$ .

Considere los siguientes hiperespacios  $\mathcal{H}(X)$  de un continuo  $X$ , donde  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$

$$\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X), HS_m^n(X), SF_n(X)\}. \quad (1)$$

Las inclusiones obvias para estos hiperespacios son:

$$F_n(X) \subset F_{n+1}(X) \subset F_\infty(X) \text{ y } C_n(X) \subset C_{n+1}(X) \subset C_\infty(X), \quad (2)$$

$$F_n(X) \subset C_n(X) \text{ y } F_\infty(X) \subset C_\infty(X). \quad (3)$$

$$\mathcal{H}'(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X)\}. \quad (4)$$

Por lo tanto, las inclusiones (2) y (3) conducen al siguiente resultado que extiende [10, Proposición 1.2, pág. 6].

**Teorema 2.2.** *Para cada continuo  $X$ , el hiperespacio  $F_1(X)$  es homeomorfo (incluso isométrico) a  $X$ . Notemos que  $F_1(X) \subset \mathcal{H}'(X) \subset 2^X$ . Así,  $X$  está encajado en cualquier hiperespacio  $\mathcal{H}'(X)$  citado en (4).*

Un modelo geométrico para un hiperespacio  $\mathcal{H}(X)$  para un continuo dado  $X$  es, en términos generales, una imagen que muestra cómo se ve el hiperespacio. Para la mayoría de los continuos  $X$ , es bastante difícil imaginar la estructura (geométrica) de un continuo que es homeomorfo a los hiperespacios más simples como  $2^X$  y  $C(X)$ . Recordemos que el problema de que si el cubo de Hilbert es un modelo para  $2^{[0,1]}$  tiene una larga e interesante historia desde la pregunta de Wojdyslawski de 1938 en [61] hasta la respuesta afirmativa de 1972 de R. M. Schori y J. E. West en [57], [58] y [59] hasta la solución completa de 1978 de D. W. Curtis y R. M. Schori en [13] y [14] quienes demostraron el muy importante resultado que sigue (véase también [41, Teorema de Curtis-Schori 11.3, pág. 89] ).

**Teorema 2.3.** *Un continuo no degenerado  $X$  es localmente conexo si y solo si  $2^X$  es homeomorfo a  $[0, 1]^{\aleph_0}$ . Si, además  $X$  no contiene arcos libres, entonces  $C(X)$  es homeomorfo a  $[0, 1]^{\aleph_0}$ .*

Así, en particular, el cubo de Hilbert es un modelo para  $2^{[0,1]}$  y para  $C([0, 1]^2)$ . Por [41, Ejemplos 5.1 y 5.2, págs. 33 y 35, respectivamente], la 2-celda es un modelo para  $C([0, 1])$  y para  $C(S^1)$ .

De hecho, si  $X = [0, 1]$ , entonces los puntos de  $C([0, 1])$  son intervalos cerrados  $[a, b]$  con  $0 \leq a \leq b \leq 1$ . Definiendo una función  $h$  de  $C([0, 1])$  en  $\mathbb{R}^2$  por  $h([a, b]) = (a, b)$  vemos que la imagen  $h(C([0, 1]))$  es una 2-celda (triángulo) en el plano  $\mathbb{R}^2$  con vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ . Es fácil observar que  $h$  es inyectiva y  $h(C([0, 1])) = T$ . Dado que una sucesión de puntos  $[a_i, b_i] : i \in \mathbb{N}$  en  $C([0, 1])$  converge a  $[a, b]$  si y solo si la sucesión de puntos  $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2, i \in \mathbb{N}$  converge (en el plano  $\mathbb{R}^2$ ) a  $(a, b)$ , se deduce que  $h : C([0, 1]) \rightarrow T$  es un homeomorfismo.

A continuación presentamos algunos ejemplos de modelos geométricos del  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión de un continuo dado, en los cuales se puede apreciar algunas características interesantes.

**Ejemplo 2.1.** *Sea  $X = [0, 1]$ . En [39, pág. 51] se demuestra que un modelo para el hiperespacio  $F_2(X)$  es el triángulo en el plano con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ , (una 2-celda), donde  $F_1(X)$  es homeomorfo a el segmento que une el punto  $(0, 0)$  con el punto  $(1, 1)$ . Si identificamos  $F_1(X)$  a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a este triángulo. Así, el hiperespacio  $SF_2(X)$ , también es una 2-celda. La Figura 1 ilustra lo dicho.*

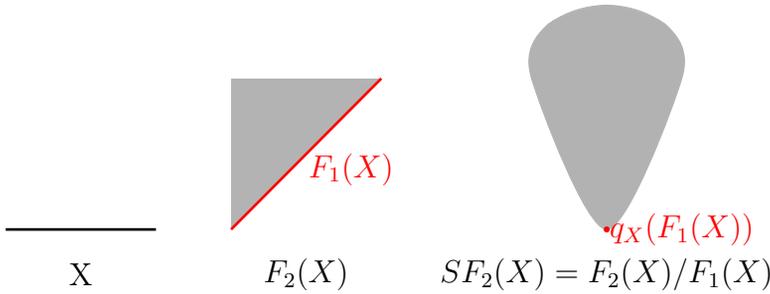


Figura 1: El segundo producto simétrico suspensión del arco.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $T$  el triodo simple. En [39, pág. 55] se demuestra que un modelo para el hiperespacio  $F_2(T)$  es el espacio que se muestra en la Figura 2, el cual es una 2-celda  $D_0$  que contiene tres 2-celdas,  $D_1, D_2$  y  $D_3$ , pegadas de tal manera que  $D_0 \cap D_i$  es un arco para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  y la intersección  $D_1 \cap D_2 \cap D_3$  es un punto  $p$ . Además  $F_1(T)$  está contenido en la frontera como variedad de  $D_1, D_2, D_3$  y  $F_1(T) \cap D_0 = \{p\}$ . Así, al identificar  $F_1(T)$  a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a  $F_2(T)$ . Por tanto,  $SF_2(T)$  es homeomorfo a  $F_2(T)$ . En la Figura 2 podemos observar un bosquejo de cómo se llega al espacio  $SF_2(T)$ .

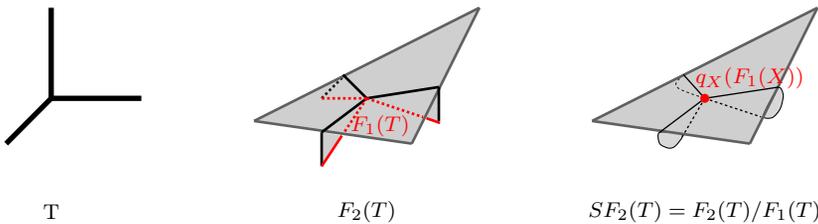


Figura 2: Segundo producto simétrico suspensión del triodo simple.

En los Ejemplos 2.1 y 2.2, se dan continuos tales que sus respectivos segundo producto simétrico y segundo producto simétrico suspensión son homeomorfos. Podemos pensar que esto siempre sucede. Sin embargo, en el Ejemplo 2.3 se probó que no siempre pasa eso. Este ejemplo es una de las razones por lo cual es importante el estudio del  $n$ -ésimo producto simétrico suspensión de un continuo.

Un continuo  $X$  es **unicoherente** si para cualquier par de subcontinuos  $H$  y  $K$  tales que  $X = H \cup K$ , se tiene que  $H \cap K$  es un continuo.

**Ejemplo 2.3.** Sea  $S^1$  la circunferencia unitaria en el plano centrada en el origen. En [39, pág. 23] se demuestra que un modelo para  $F_2(S^1)$  es el espacio conocido como la Banda de Moebius, donde  $F_1(S^1)$  es homeomorfo a la frontera como variedad de la Banda de Moebius. Así, al identificar  $F_1(S^1)$  a un punto, obtenemos el plano proyectivo real  $\mathbb{RP}^2$ . Así,  $SF_2(S^1)$  es homeomorfo a  $\mathbb{RP}^2$ . El espacio  $S^1$  es un continuo no unicoherente tal que  $F_2(S^1)$  no es unicoherente. Por [60, Pág. 197], tenemos que  $SF_2(S^1)$  es unicoherente. Por tanto,  $F_2(S^1)$  no es homeomorfo a  $SF_2(S^1)$ .

Sea  $f$  una función continua de un continuo  $X$  a un continuo  $Y$ . Para un hiperespacio fijo  $\mathcal{H}(X)$  citado en (1) se define la  **$\mathcal{H}$ -función inducida** por  $\mathcal{H}(f) : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(Y)$  por  $\mathcal{H}(f)(A) = f(A)$ , para cada  $A \in \mathcal{H}(X)$ .

Si  $\mathcal{H}(X) = 2^X$ , entonces  $\mathcal{H}(f)$  generalmente se denota por  $2^f$ . Se sabe que para cada función  $f : X \rightarrow Y$  la función inducida  $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$  es continua (ver [41, Lema 13.3, pág. 106] y comparar [55, 5.10.1 del Teorema 5.10, pág. 170]). Dado que  $\mathcal{H}(X) \subset 2^X$  simplemente por la definición, y dado que  $\mathcal{H}(f) = 2^f|_{\mathcal{H}(X)}$ , la continuidad de  $2^f$  implica la continuidad de cada  $\mathcal{H}(f)$ . Similarmente,

*si  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $\mathcal{H}(f)$  es un homeomorfismo.* (5)

(véase [55, (0.52) y (0.53), pág. 29 y 30]).

Los siguientes resultados son una consecuencia inmediata de la implicación (5).

**Teorema 2.4.** *Si  $f$  es una función continua de un continuo  $X$  a un continuo  $Y$  y  $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X)\}$ , entonces  $\mathcal{H}(f)(F_1(X)) \subset F_1(Y)$ .*

**Teorema 2.5.** *Si  $f$  es una función continua de un continuo  $X$  a un continuo  $Y$ ,  $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X)\}$  y  $A, B \in \mathcal{H}(X)$  con  $A \subset B$ , entonces  $\mathcal{H}(f)(A) \subset \mathcal{H}(f)(B)$ .*

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la implicación (5).

**Teorema 2.6.** *Si  $X$  y  $Y$  son continuos y  $X$  es homeomorfo a  $Y$ , entonces  $2^X$  es homeomorfo a  $2^Y$  y  $C(X)$  es homeomorfo a  $C(Y)$ .*

De hecho, si  $h: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces la función inducida  $2^h: 2^X \rightarrow 2^Y$  es un homeomorfismo, y por lo tanto  $2^h|C(X) = C(h): C(X) \rightarrow C(Y)$  también es un homeomorfismo (véase [55, (0.52) y (0.53), pág. 29 y 30]).

La proposición recíproca del Teorema 2.6 no es cierta, en general, véase [55, (0.58), pág. 32].

En el año de 1978, S. B. Nadler, Jr. en [55, (0.61)] define:

**Definición 2.7.** Los miembros de una clase de continuos  $\Lambda$  están  **$C$ -determinados** si  $X, Y \in \Lambda$  tales que  $C(X)$  es homeomorfo a  $C(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

Desde entonces se iniciaron las búsquedas de clases de continuos cuyos miembros son  $C$ -determinados. En lo que sigue de este trabajo presentamos una lista de clases de continuos, acompañadas con las definiciones de dichas clases, cuyos miembros están  $C$ -determinados, con sus correspondientes referencias en donde se pueden encontrar las demostraciones de tales propiedades.

Generalizando la definición de miembros que en cuya clase están  $C$ -determinados (no solo  $C(X)$ ), para otros tipos de “hiperespacios”, en 2003, J. J. Charatonik en [11, pág. 247] introdujo la noción de miembros que están  **$\mathcal{H}$ -determinados** para los hiperespacios  $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, F_n(X), C_n(X)\}$ . De manera natural extendemos este concepto para todos los hiperespacios.

**Definición 2.8.** Dados un continuo  $X$  y un hiperespacio  $\mathcal{H}(X)$ . Los miembros de una clase de continuos  $\Lambda$  están  **$\mathcal{H}$ -determinados** si  $X, Y \in \Lambda$  tales que  $\mathcal{H}(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{H}(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

**Definición 2.9.** Dado un continuo  $X$ , denotamos por  $\mathcal{H}(X)$  un hiperespacio de  $X$ . Una clase de continuos  $\lambda$  es  **$\mathcal{H}$ -cerrada** si  $X \in \lambda$  y  $Y$  un continuo tal que  $\mathcal{H}(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{H}(Y)$ , entonces  $Y \in \lambda$ .

En 1999, Gerardo Acosta en [1], definió el concepto de hiperespacio único:

**Definición 2.10.** [1, Definición 57] Un continuo  $X$  tiene **hiperespacio único**  $C(X)$  si cada vez que  $Y$  sea un continuo tal que  $C(X)$  es homeomorfo a  $C(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

En el ánimo de generalizar el concepto de hiperespacio único dado en la Definición 2.10, se dió el siguiente concepto.

**Definición 2.11.** Un continuo  $X$  tiene **hiperespacio único**  $\mathcal{H}(X)$ , si para cualquier continuo  $Y$  tal que  $\mathcal{H}(X)$  es homeomorfo a  $\mathcal{H}(Y)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $Y$ .

Uno de los problemas que ha tomado auge en la teoría de hiperespacios de continuos es conocer las clases de continuos que tienen hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ . En general, como lo muestra la nomenclatura, una forma de resolver este problema ha sido probar que los miembros de dicha clase de continuos están  $\mathcal{H}$ -determinados y luego  $\mathcal{H}$ -cerrada, o bien, primero se prueba que la clase es  $\mathcal{H}$ -cerrada y luego  $\mathcal{H}$ -determinada, para finalmente obtener que la clase de continuos tiene hiperespacio único  $\mathcal{H}(X)$ . A lo largo de este capítulo se presentan algunas clases de continuos que, satisfacen uno o ambos conceptos, tienen hiperespacio único; además también se presentan algunas clases de continuos que no tienen hiperespacio único.

### 3 El hiperespacio $2^X$

En 1999, S. Macías [44, Teorema en la pág. 416] probó que:

**Teorema 3.1.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único  $2^X$ .*

En 1999, S. Macías [44, Teorema en la pág. 417] probó que:

**Teorema 3.2.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles es 2-determinada.*

### 4 El hiperespacio de subcontinuos de $X$ , $C(X)$

Un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

Una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano.

Un continuo es una **gráfica finita** si se puede escribir como la unión finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan solamente en uno o en sus dos puntos extremos.

En 1968, R. Duda probó [15, Teorema 9.1] que:

**Teorema 4.1.** *La clase de las gráficas finitas diferentes del arco y de la curva cerrada simple es  $C$ -determinada.*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 67, pág. 32] (véase también [2, Teorema 1, pág. 38]) probó que:

**Teorema 4.2.** *Las gráficas finitas  $X$  que no son ni un arco y ni una curva cerrada simple, tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

Un continuo es **indescomponible** si no se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo es **hereditariamente indescomponible** si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

En 1978, Nadler probó [55, (0.60)] que:

**Teorema 4.3.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles es  $C$ -determinada.*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 63, pág. 31], véase también [2, Teorema 2, pág. 38], probó que:

**Teorema 4.4.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles  $X$  tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

Un continuo indescomponible se llama **arco-continuo indescomponible** si todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.

En 1997, S. Macías [43, Teorema 3] probó que:

**Teorema 4.5.** *La clase de los arco-continuos indescomponibles es  $C$ -determinada.*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 158, pág. 164] probó que:

**Teorema 4.6.** *Los arco-continuos indescomponibles  $X$  tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

Un espacio métrico, compacto y Hausdorff  $\overline{X}$  se llama **compactación métrica** de  $X$ , si  $X$  es un subconjunto denso de  $\overline{X}$ . En tal caso el conjunto  $R = \overline{X} \setminus X$  se llama el residuo de  $\overline{X}$ .

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 154, pág. 159] probó que:

**Teorema 4.7.** *La clase de las compactaciones métricas de la recta real cuyo residuo es conexo y no degenerado es  $C$ -determinada.*

Consideremos dos números reales  $a > 0$  y  $b < 0$ , supongamos que  $[a, \infty) \cup R$  y  $(-\infty, b] \cup R$  representan dos compactaciones métricas de los semirayos ajenos  $[a, \infty)$  y  $(-\infty, b]$ , respectivamente, ambas con residuo no degenerado  $R$ . Sea  $X = [a, \infty) \cup R \cup (-\infty, b]$ . En general, consideremos  $\mathcal{F}$  la clase de todos los continuos que se pueden escribir como la unión de dos compactaciones métricas de semirayos ajenos, ambas con el mismo residuo.

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 126, pág. 106] (véase también [2, Teorema 10, pág. 48]), probó que:

**Teorema 4.8.** *La clase  $\mathcal{F}$  es  $C$ -determinada.*

En 2002, G. Acosta [2, Corolario 5, pág. 44] y [2, Corolario 8, pág. 45], respectivamente, probaron que:

**Teorema 4.9.** *La clase de las compactaciones métricas del espacio  $[0, \infty)$ , con residuo no degenerado, es  $C$ -determinada.*

**Teorema 4.10.** *La clase de las compactaciones métricas de  $\mathbb{R}$ , diferentes del arco y cuyo residuo no es conexo, es  $C$ -determinada.*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 118, pág. 81] (véase también [2, Teorema 4, pág. 42]), probó que:

**Teorema 4.11.** *Las compactaciones métricas del espacio  $[0, \infty)$ , con residuo no degenerado  $X$ , tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 1999, G. Acosta [1, Teorema 134, pág. 116] (véase también [2, Teorema 6, pág. 44]), probó que:

**Teorema 4.12.** *La clase de las compactaciones métricas de  $\mathbb{R}$ , cuyo residuo no es conexo y tiene exactamente dos componentes no degeneradas  $X$  tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En 2002, G. Acosta probó en [2, Teorema 7, pág. 45] que:

**Teorema 4.13.** *Las compactaciones métricas de  $\mathbb{R}$ , diferentes del arco y cuyo residuo no es conexo  $X$ , tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

Denotemos por  $\mathfrak{D}$  a la clase de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado.

En 2007, D. Herrera-Carrasco probó que (véanse las pruebas del Teoremas 9 y 10 de [22]):

**Teorema 4.14.** *La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C$ -cerrada.*

En 2007, D. Herrera-Carrasco [22, Teorema 6] (véase también [21, Teorema 3.13]) probó que:

**Teorema 4.15.** *La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C$ -determinada.*

Dado un continuo  $X$  denotamos por

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad en } X \text{ que es una gráfica finita}\}$$

y

$$\mathcal{P}(X) = X \setminus \mathcal{G}(X).$$

Un continuo  $X$  es **casi enrejado** si el conjunto  $\mathcal{G}(X)$  es denso en  $X$ .

Un continuo casi enrejado  $X$  es **enrejado** si  $X$  tiene una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  tal que  $U \setminus \mathcal{P}(X)$  es conexo, para cada  $U \in \mathfrak{B}$ .

En 2013, R. Hernández G., A. Illanes y V. Martínez de la Vega [18, Teorema 30] probaron que:

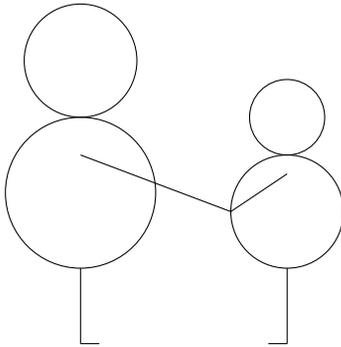
**Teorema 4.16.** *La clase de los continuos casi enrejados y localmente conexos que no son arcos es  $C$ -determinada.*

En [32, Teorema 2 y el Ejemplo 3] se demostró que la clase de los continuos encadenables no es  $C$ -determinada.

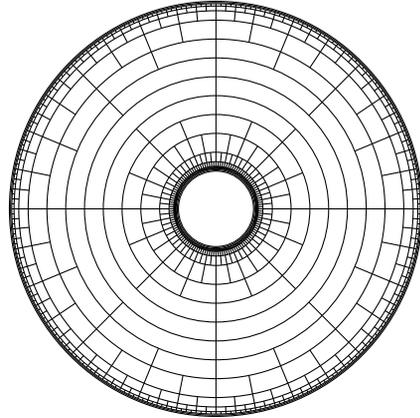
En [33] se demostró que la clase de los abanicos no es  $C$ -determinada.

En 2007, David Herrera [22, Teorema 10] (véase [21, Teorema 3.22, pág. 60]) probó que:

**Teorema 4.17.** *Si  $X \in \mathfrak{D}$  entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C(X)$ .*



Gráfica finita



No gráfica finita

Un continuo  $X$  es una **dendrita local** si cada punto de  $X$  tiene una vecindad que es una dendrita.

Denotamos por  $\mathfrak{LD}$  la clase de las dendritas locales  $X$  tales que cada punto de  $X$  tiene una vecindad que pertenece a  $\mathfrak{D}$ .

En 2010, G. Acosta, D. Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero [4, dentro de las demostaciones de los Teorema 3.21 y Teorema 5.1] probaron que:

**Teorema 4.18.** *La clase  $\mathfrak{LD}$  sin arcos ni curvas cerradas simples es  $C$ -determinada.*

En 2010, G. Acosta, D. Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero [4, dentro de las demostaciones de los Teorema 3.21 y Teorema 5.1] probaron que:

**Teorema 4.19.** *La clase  $\mathfrak{LD}$  sin arcos ni curvas cerradas simples es  $C$ -cerrada.*

En 2010, G. Acosta, D. Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero [4, Corolario 5.2] probaron que:

**Teorema 4.20.** *Si  $X \in \mathfrak{LD}$  y  $X$  no es un arco y no es una curva cerrada simple, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $C(X)$ .*

Un continuo casi enrejado  $X$  es **enrejado** si  $X$  tiene una base de vecindades  $\mathfrak{B}$  tal que  $U \setminus \mathcal{P}(X)$  es conexo, para cada  $U \in \mathfrak{B}$ .

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [18, Teorema 37] probaron que:

**Teorema 4.21.** *Los continuos enrejados  $X$  que no son un arco ni curva cerrada simple, tienen hiperespacio único  $C(X)$ .*

En [18, Corolario 23], se demostró que

**Teorema 4.22.** *Si  $X$  es un continuo localmente conexo y casi enrejado tal que  $X - \mathcal{P}(X)$  es desconexo, entonces  $X$  no tiene hiperespacio único  $C(X)$ .*

## 5 El $n$ -ésimo hiperespacio de $X$ , $C_n(X)$

En 2008, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero [?, Teorema 4.1] probaron que:

**Teorema 5.1.** *Para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C_n$ -determinada.*

En 2008, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero probaron que (véase [?, Teoremas 4.2 y 5.1]):

**Teorema 5.2.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C_n$ -cerrada.*

En 2009, D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. López y F. Macías-Romero probaron que (véase [23, Teorema 13] y [37, Teorema 3.1]):

**Teorema 5.3.** *La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C_2$ -cerrada.*

En 2002, A. Illanes [34, pág. 356] demostró que:

**Teorema 5.4.** *La clase de las gráficas finitas es  $C_2$ -cerrada.*

En 2009, D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. López y F. Macías-Romero [23, Teorema 12] probaron que:

**Teorema 5.5.** *La clase  $\mathfrak{D}$  es  $C_2$ -determinada.*

En 2003, A. Illanes [36, Teorema 3.8, pág. 186] demostró que:

**Teorema 5.6.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . La clase de las gráficas finitas es  $C_n$ -cerrada.*

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [18, Teoremas 29 y 35] probaron que:

**Teorema 5.7.** *Para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . La clase de los continuos casi enrejados y localmente conexos es  $C_n$ -determinada.*

En 2000, S. Macías [45, Teorema 6.1] probó que:

**Teorema 5.8.** *Sean  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > 1$ . Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2002, A. Illanes [34, Teorema 4.1] probó que:

**Teorema 5.9.** *Las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $C_2(X)$ .*

En 2003, A. Illanes [36, Teorema 3.8] probó que:

**Teorema 5.10.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . Las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2008, D. Herrera y F. Macías [?, Teorema 5.7] probaron que:

**Teorema 5.11.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . Los elementos de  $\mathfrak{D}$  tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2009, A. Illanes, D. Herrera, M. López y F. Macías [37, Teorema 3.1] y [23, Teorema 13] probaron que:

**Teorema 5.12.** *Los elementos de  $\mathfrak{D}$  tienen hiperespacio único  $C_2(X)$ .*

En 2011, D. Herrera y F. Macías [30, Teorema 5.4] probaron que:

**Teorema 5.13.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ . Los elementos de  $\mathfrak{LD}$  tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [18, Teorema 37] probaron que:

**Teorema 5.14.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Los continuos enrejados tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [18, Teorema 20] probaron que:

**Teorema 5.15.** *Si  $n \in \mathbb{N}$ . Los continuos localmente conexos que no son casi enrejados no tienen hiperespacio único  $C_n(X)$ .*

En 2013, R. Hernández, A. Illanes y V. Martínez de la Vega [18, Teorema 22] probaron que:

**Teorema 5.16.** *Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $X$  un continuo localmente conexo y casi enrejado. Si existe un subconjunto cerrado  $R$  de  $\mathcal{P}(X)$  y conjuntos abiertos, no vacíos, ajenos por pares  $U_1, \dots, U_{n+1}$  tales que*

(a)  $X \setminus R = U_1 \cup \dots \cup U_{n+1}$  y

(b) para cada  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $R \subset cl_X(U_i)$ , entonces  $X$  no tiene ni hiperespacio único  $C_m(X)$  para cada  $m \leq n$ .

## 6 El $n$ -ésimo producto simétrico de $X$ , $F_n(X)$

En 2006, E. Castañeda y A. Illanes [9, Corolario 5.8] probaron que:

**Teorema 6.1.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase de las gráficas finitas es  $F_n$ -determinada.*

La clase de las gráficas finitas es  $F_n$ -cerrada, para algún  $n \in \mathbb{N}$ , (véase [9, Corolario 3.5]).

En 2002, A. Illanes [35, Teoremas 1 y 8] probó que:

**Teorema 6.2.** *La clase de las dendritas es  $F_2$ -cerrada.*

En 2009, G. Acosta, R. Hernández y V. Martínez de la Vega [3, Teorema 5.2] probaron que:

**Teorema 6.3.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase  $\mathcal{D}$  es  $F_n$ -cerrada.*

En 2009, D. Herrera, M. López y F. Macías [25, Teorema 3.5] probaron que:

**Teorema 6.4.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase  $\mathcal{D}$  es  $F_n$ -determinada.*

En 2006, E. Castañeda y A. Illanes [9, Corolario 5.9] probaron que:

**Teorema 6.5.** *Si  $n \in \mathbb{N}$ . Las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2009, G. Acosta, R. Hernández, V. Martínez de la Vega, D. Herrera, M. López y F. Macías [3, Teorema 5.2] y [25, Teorema 3.7] probaron:

**Teorema 6.6.** *Si  $n \in \mathbb{N}$ . Los elementos de la clase  $\mathfrak{D}$  tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2009, A. Illanes y J. M. Martínez-Montejano [40, Teorema 3.1] probaron el siguiente resultado.

**Teorema 6.7.** *Si  $X$  es una compactación métrica del  $[0, \infty)$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_2(X)$ .*

En 2009, A. Illanes y J. M. Martínez-Montejano [40, Teorema 4.1] probaron el siguiente resultado.

**Teorema 6.8.** *Si  $X$  es una compactación métrica del  $[0, \infty)$  y  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$ , entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2009, A. Illanes y J. M. Martínez-Montejano [40, Teorema 5.6] probaron el siguiente resultado.

**Teorema 6.9.** *Si  $X$  es una compactación métrica del  $[0, \infty)$  y el residuo  $R_X$  de  $X$  es un ANR, entonces  $X$  tiene hiperespacio único  $F_3(X)$ .*

En 2012, D. Herrera, F. Macías y F. Vázquez [31, Corolario 4.4] probaron que:

**Teorema 6.10.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3\}$ . Los continuos localmente conexos y casi enrejados tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

Un **alambre** en un continuo  $X$  es un subconjunto  $\alpha$  de  $X$  tal que  $\alpha$  es homeomorfo a uno de los siguientes espacios  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$ ,  $[0, 1]$  o la circunferencia unitaria en el plano Euclidiano y  $\alpha$  es una componente de un subconjunto abierto de  $X$ .

Dado un continuo  $X$  sea

$$W(X) = \bigcup \{ \alpha \subset X : \alpha \text{ es un alambre en } X \}.$$

Un continuo  $X$  es **alambrado** si el conjunto  $W(X)$  es denso en  $X$ .

En 2013, R. Hernández y V. Martínez de la Vega [19, Corolario 6] probaron que:

**Teorema 6.11.** *Si  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$ . Los continuos alambrados tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2015, L. Guerrero- Méndez, D. Herrera, M. López y F. Macías [17, Teorema 3.10] probaron que:

**Teorema 6.12.** *Para cada  $n \in \{2, 3\}$ . La clase de los continuos enrejados es  $F_n$ -cerrada.*

En 2015, L. Guerrero-Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. López y F. Macías-Romero [17, Teorema 3.11] probaron que:

**Teorema 6.13.** *Si  $n \in \{2, 3\}$ . Los continuos enrejados tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2016, D. Herrera-Carrasco, M. López y F. Macías-Romero [27, Teorema 4.8] probaron que:

**Teorema 6.14.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ . Los continuos localmente conexos y casi enrejados  $X$  tienen hiperespacio único  $F_n(X)$ .*

En 2019, V. Córdova-Salazar, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero [12, Teorema 3.10] probaron que:

**Teorema 6.15.** *La clase de los continuos casi enrejados y localmente conexos  $X$  tiene hiperespacio único  $F_3(X)$ .*

## 7 El $HS_m^n(X)$ es el $(n, m)$ -ésimo hiperespacio suspensión de $X$

En 2004, R. Escobedo, M. López y S. Macías [16, Teorema 8.2] probaron que:

**Teorema 7.1.** *La clase de los continuos hereditariamente indescomponibles es  $HS$ -cerrada.*

En 2004, R. Escobedo, M. López y S. Macías [16, Teorema 8.5] probaron que:

**Teorema 7.2.** *Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único  $HS(X)$ .*

En 2018, D. Herrera, M. López y F. Macías en [28, Teorema 3.6] demostraron:

**Teorema 7.3.** *Para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . La clase de los continuos localmente conexos y casi enrejados es  $HS_n$ -determinada.*

En 2006, S. Macías [49, Teorema 7.1] demostró que:

**Teorema 7.4.** *Si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único  $HS_n(X)$ .*

En 2006, S. Macías y S. B. Nadler, Jr. [50, Teorema 3.2] demostraron que:

**Teorema 7.5.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase de las gráficas finitas es  $HS_n$ -cerrada.*

En 2014, D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero y F. Vázquez-Juárez [24, Teorema 3.2] probaron que:

**Teorema 7.6.** *Si  $n \in \mathbb{N}$ . Las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $HS_n(X)$ .*

En 2015, D. Herrera, M. López y F. Macías en [26, Teorema 3.4] demostraron:

**Teorema 7.7.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Los continuos enrejados tienen hiperespacio único  $HS_n(X)$ .*

En 2018, J. G. Anaya, D. Maya y F. Vázquez-Juárez en [5, Teorema 3.3] probaron:

**Teorema 7.8.** *Para cada  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n \leq m$ . La clase de las gráficas finitas es  $HS_m^n$ -cerrada.*

En 2018, Anaya, Maya y Vázquez-Juárez en [5, Teorema 3.6] probaron:

**Teorema 7.9.** *Para cada  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$ . La clase de las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $HS_m^n(X)$ .*

Con respecto al pseudo hiperespacio suspensión de un continuo  $X$  denotado por  $PHS_n(X)$ . En 2018, Ulises Morales-Fuentes [54, Teorema 5.7] probó:

**Teorema 7.10.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La clase de las gráficas finitas tienen hiperespacio único  $PHS_n(X)$ .*

## 8 Agradecimientos

Agradecemos el apoyo que nos han prestado Germán Montero Rodríguez y Gerardo Hernández Valdez. Los autores agradecen a los arbitros el tiempo dedicado a la minuciosa revisión de este trabajo. Las sugerencias dieron como resultado la calidad de este material.

## Bibliografía

- [1] G. Acosta, *Continuos con hiperespacio único*, Tesis de Doctorado en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México, D. F. (1999).
- [2] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace*, Lecture notes in pure and applied mathematics 230, 33–49, Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [3] G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glasnik Matemacki Ser. III 44 (2009) no. 1, 195–210.
- [4] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique hyperspace  $C(X)$* , Topology Appl. 157 (2010), 2069–2085.
- [5] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace  $HS_m^n(X)$  for a finite graph  $X$  is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.
- [6] J. Angoa, A. Contreras, M. de J. López, *Introducción a la unicidad de hiperespacios de continuos, una visión categórica*, Capítulo 4 en Topología y sus aplicaciones 6. Editores J. Angoa, R. Escobedo, M. Ibarra C., Dirección General de Publicaciones, BUAP, 2018.
- [7] F. Barragán, *On the  $n$ -fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. 157 (2010), 597–604.
- [8] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875–882.
- [9] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.

- [10] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, *Inducible mappings between hyperspaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46 (1998), 5 – 9.
- [11] J. J. Charatonik, *Recent research in hyperspaces theory*, Extracta Mathematicae 18 (2) (2003), 235–262.
- [12] V. Córdova-Salazar, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product*, Topology. Appl. 268 (2019), doi:<https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.106917>.
- [13] D. W. Curtis, R. M. Schori,  $2^X$  and  $C(X)$  are homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 927–931.
- [14] D. W. Curtis, R. M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101 (1978), 19–38.
- [15] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*, I, Fund. Math. 62 (1968), 265–286.
- [16] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, Topology Appl. 138 (2004), 109–124.
- [17] L. A. Guerrero-Méndez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, Topology Appl. 191 (2015), 16–27.
- [18] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.
- [19] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of hyperspaces*, Rocky Mt. J. Math. 45 (1) (2015), 213–236.
- [20] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products*, Topology Appl. 160, 13 (2013), 1577–1587.
- [21] D. Herrera-Carrasco, *Hiperespacios de dendritas*, Tesis de Doctorado en matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2005.

- [22] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math. 33 (3) (2007), 795–805.
- [23] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$* , Topology Appl. 156 (2009), 549–557.
- [24] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace  $HS_n(X)$* , Topology Proc. 44 (2014), 75–95.
- [25] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique symmetric products*, Topology Proc. 34 (2009), 175–190.
- [26] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique  $n$ -fold hyperspace suspension*, Topology Appl. 196 (2015), 652–667.
- [27] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, Topology Appl. 209 (2016), 1–13.
- [28] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique  $n$ -fold hyperspace suspension*, Houston J. Math., 44 (4) (2018), 1335–1365.
- [29] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topology Proc. 32 (2008), 321–337.
- [30] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique  $n$ -fold hyperspace*, Topology Appl. 158 (2011), 244–251.
- [31] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, Journal of Mathematics Research 4(4) (2012), 1–9.
- [32] A. Illanes, *Chainable continua are not  $C$ -determined*, Topology and its Applications 98 (1999) 211–216.
- [33] A. Illanes, *Fans are not  $C$ -determined*, Colloquium Mathematicum, 81(1999) 299–308

- [34] A. Illanes, *The hyperspace  $C_2(X)$  for a finite graph  $X$  is unique*, Glasnik Mat. 37 (57) (2002), 347–363.
- [35] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace  $F_2(X)$* , J. P. Geometry and Topology 2 (1) (2002), 75–96.
- [36] A. Illanes, *Finite graphs  $X$  have unique hyperspaces  $C_n(X)$* , Topology Proc., 27 (2003), 179–188.
- [37] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace  $C_2(X)$ , II*, Topology Proc. 34 (2009), 77–96.
- [38] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces*, Questions Answers Gen. Topology 30 (2012), 21–44.
- [39] A. Illanes, *Models of hyperspaces*, Topology Proc. 41 (2013), 39–64.
- [40] A. Illanes, J. M. Martínez-Montejano, *compactification of  $[0, \infty)$  with unique hyperspace  $F_n(X)$* , Glasnik Matemacki, 44(64) (2009), 457–478.
- [41] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [42] J. C. Macías, *On the  $n$ -fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, Glas. Mat. 43 (2008), 439–449.
- [43] S. Macías, *On  $C$ -determined continua*, Glasnik Matemacki, 32, No. 52 (1997), 259–262.
- [44] S. Macías, *Hereditarily indecomposable continua have unique hyperspace  $2^X$* , Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 5 (1999), no. 2, 415–418.
- [45] S. Macías, *On the hyperspaces  $C_n(X)$  of a continuum  $X$ , II*, Topology Proc., 25, (2000), 255–276.
- [46] S. Macías, *On the hyperspace  $C_n(X)$  of a continuum*, Topology Appl. 109 (2001), 237–256.
- [47] S. Macías, *On the  $n$ -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138 (2004), 125–138.

- 
- [48] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 275, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2005.
- [49] S. Macías, *On the  $n$ -fold hyperspace suspension of continua, II*, Glasnik Mat. 41(61) (2006), 335–343.
- [50] S. Macías, S. B. Nadler, Jr., *Absolute  $n$ -fold hyperspace suspensions*, Colloq. Math. 105 (2006), 221–231.
- [51] S. Macías, S. B. Nadler Jr.,  *$n$ -fold hyperspace, cones, and products*, Topology Proc. 26 (2001–2002), 255–270.
- [52] Michael, E., *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152–182.
- [53] G. Montero-Rodríguez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López Toriz, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique  $n$ -fold symmetric product suspension*. Por aparecer en Houston Journal.
- [54] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique  $n$ -fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 2019–233.
- [55] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [56] S. B. Nadler Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math. 5 (1979), 125–132.
- [57] R. M. Schori, J. E. West,  *$2^I$  is homeomorphic to the Hilbert cube*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 402–406.
- [58] R. M. Schori, J. E. West, *Hyperspaces of graphs are Hilbert cubes*, Pacific J. Math. 53 (1974), 239–251.
- [59] R. M. Schori, J. E. West, *The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube*, Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 217–235.
- [60] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.

- [61] Wojdysławski, M., *Sur la contractilité des hyperespaces des continus localement connexes*, Fund. Math. 30 (1938), 247–252.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP  
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570

maeschacon@fcfm.buap.mx

dherrera@fcfm.buap.mx

218570567@alumnos.fcfm.buap.mx

mjlopez@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx



# Índice de autores

- Aguilar Romero, Felipe de Jesús, 151  
Antonio de Jesús Libreros López, 176  
Apellido de Otro Autor, Otro Autor, 129
- Bustamante González, Jorge, 107
- Cejudo Castilla, César, 45
- Dominguez Soto, Patricia, 151
- Fernando Macías Romero, 151
- Hernández Rebollar, Lidia Aurora, 77  
Herrera Carrasco, David, 5, 151, 176
- Macías Prado, María del Rocío, 5  
Macías Romero, Fernando, 176  
María de Jesús López Toriz, 176  
Mauricio Esteban Chacón Tirado, 176  
Molina Lara, Israel, 77
- Patricia Domínguez Soto, Wendy Rodríguez  
Díaz, 129
- Reynoso Lara, José Eduardo, 77  
Rosas Martínez, Itzel, 45
- Villa Hernández, David, 45

Matemáticas y sus aplicaciones 16

Editado por Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco está a

disposición en pdf en la página

de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

<https://www.fcfm.buap.mx/publicaciones/libros>

a partir del 9 de noviembre de 2021

peso del archivo: 6 MB

El cuidado de la edición es de Antonio de Jesús Libreros López.