



Fernando Macías Romero

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchinango, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas como el ESDEPED y elaborador de programas de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 34 tesis de licenciatura, 8 de maestría y 5 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los de *Matemáticas y sus aplicaciones*.



Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.

BUAP

FCFM

CSMA

BUAP
ediciones

ISBN: 978-607-525-696-2



Matemáticas y sus aplicaciones 15



Matemáticas y sus aplicaciones 15



Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores



David Herrera Carrasco

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en Matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Ha sido miembro organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications. Es miembro de Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado varios artículos, en revistas internacionales. Es autor de varios libros (como coautor, con otros profesores de la FCFM); es editor de algunos libros. Además, ha concluido la dirección de tesis: 4 de doctorado, 7 de maestría y más de 26 de Licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis de licenciatura y del posgrado.

Matemáticas y sus aplicaciones *15*



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Primera edición: 2020

ISBN: 978-607-525-696-2

DR © Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764
www.dgp.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552
www.fcfm.buap.mx

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA • *Rector*: José Alfonso Esparza Ortiz • *Secretario General*: José Jaime Vázquez López • *Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura*: José Carlos Bernal Suárez • *Director General de Publicaciones*: Hugo Vargas Comsille • *Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*: Martha Alicia Palomino Ovando

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 15

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Editores

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco

Comité científico internacional

Ermínia de Lourdes Campello Fanti (UNESP, BRA), Hugo Adán Cruz Suárez (BUAP), Luis Miguel de la Cruz Salas (UNAM), Antonio Díaz Ramos (UMA, ESP), Sina Greenwood (UA,NZ), Gerardo Hernández Valdez (BUAP), Miguel Antonio Jiménez Pozo (BUAP), Judy Kennedy (LU, USA), Christian Lehn (TUC, DE), Antonio de Jesús Libreros López (BUAP), Edgar Martínez Moro (UVA, ESP), Fernando Macías Romero (BUAP), Daria Michalik (UKSW, PL), Nayeli Berenice Quiñones Baldazo (BUAP), Abigail Rodríguez Nava (UAM), José Gregorio Rodríguez Nieto (UNC, CO), Saúl Alonso Zavala Ortiz (I.T. Ensenada).

Contenido

Presentación	1
Análisis Matemático	
Capítulo 1. On Sobolev-type perturbations of classical orthogonal polynomials	5
<i>Luis Enrique Garza Gaona</i>	
Capítulo 2. Reconocimiento de patrones en imágenes digitales usando máscaras de Hilbert	29
<i>Diego Francisco Alcaraz Ubach, Selene Solorza Calderón</i>	
Educación matemática	
Capítulo 3. Comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas	51
<i>América Guadalupe Analco Panohaya, Lidia Aurora Hernández Rebolllar</i>	
Capítulo 4. Recurso educativo abierto para la construcción de diferentes significados asociados al volumen de cuerpos geométricos	75
<i>Alma Rosa Argüelles Ortiz y Sergio Andrés Rubio-Pizzorno</i>	
Probabilidad	

Capítulo 5. Determinación del spread asociado a deuda corporativa con el modelo de difusión con saltos de Merton	103
<i>José Antonio Climent Hernández, Luz Marina Hernández Bautista, Ambrosio Ortiz Ramírez</i>	
Capítulo 6. Procesos max-stable en el espacio-tiempo	129
<i>Alejandro Iván Aguirre Salado, José del Carmen Jiménez Hernández, Marisol López Cerino</i>	
Topología	
Capítulo 7. La clase de las gráficas finitas es SF_n-cerrada	147
<i>David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Germán Montero Rodríguez</i>	
Índice de autores	169

Presentación

Tenemos la fortuna de hacer un recorrido hacia un proceso creativo sin precedentes. Ha llegado el momento de compartir esta sabiduría, de invitar a todo el mundo a embarcarse en el navío que nos conduce hacia la Fuente de todo lo creado. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Sixth International Conference on Mathematics and its Applications* (6CIMA, 2019), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 6CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este producto no es ni siquiera setemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 6CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a Antonio de Jesús Libreros López por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

*David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Editores*

Análisis Matemático

Capítulo 1

On Sobolev-type perturbations of classical orthogonal polynomials

Luis Enrique Garza Gaona

Facultad de Ciencias, Universidad de Colima

Abstract

A brief survey on algebraic and analytic properties of a certain kind of Sobolev-type orthogonal polynomials is presented, including their relative asymptotic behavior, zeros interlacing and localization properties, and some applications related to their role as polynomial solutions of certain second order differential equations.

1 Introduction

Classical orthogonal polynomials

Consider a positive Borel measure μ with support on some infinite subset $E \subseteq \mathbb{R}$, and define the inner product

$$\langle p, q \rangle_\mu = \int_E p(x)q(x)d\mu(x), \quad p, q \in \mathbb{P}, \quad (1)$$

where \mathbb{P} is the linear space of polynomials with real coefficients. Then, applying the Gram-Schmidt orthogonalization process to the basis $\{1, x, x^2, \dots\}$, we can obtain a sequence of polynomials $\{P_n\}_{n \geq 0}$ orthogonal with respect to (1). These polynomials are unique (up to constants) and their general properties are very well known (see [11], [46]). For convenience, two normalizations are frequently used: the monic polynomials, with leading coefficient 1 for every $n \geq 0$, and the orthonormal polynomials, with norm equal to 1 for every $n \geq 0$. In what follows, P_n will denote a monic orthogonal polynomial of degree n .

The most studied cases correspond undoubtedly to the so-called classical measures, i.e. the cases when

$$\begin{aligned} d\mu(x) &= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, & \alpha, \beta > -1 & \quad E = [-1, 1] & \quad (\text{Jacobi polynomials}), \\ d\mu(x) &= x^\alpha e^{-x} dx, & \alpha > -1 & \quad E = \mathbb{R}_+ & \quad (\text{Laguerre polynomials}), \\ d\mu(x) &= e^{-x^2} dx, & & \quad E = \mathbb{R} & \quad (\text{Hermite polynomials}). \end{aligned}$$

We will focus here on the Laguerre polynomials. Given a family of orthogonal polynomials, the reproducing kernel is defined as

$$K_n(x, y) := \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\|P_k\|^2} = \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{(x-y)\|P_n\|^2} \quad (2)$$

and plays a key role in the theory of orthogonal polynomials. The expression on the right is called the Christoffel-Darboux formula, and it is valid for $x \neq y$. We will denote its partial derivatives by

$$K_n^{(j,k)}(x, y) := \frac{\partial^{j+k} K_n(x, y)}{\partial^j x \partial^k y}. \quad (3)$$

Straightforward calculations and the use of Leibniz rule yield the following lemma regarding the derivatives of the reproducing kernel, which will be useful in the upcoming sections.

Lemma 1.1. *For $i, j \in \mathbb{N}$ and $x \neq y$ we have*

$$K_n^{(i,j)}(x, y) = \frac{1}{\|P_n\|^2} \left(\sum_{k=0}^j \sum_{t=0}^i (-1)^{t-i} \frac{j!i!}{k!t!} \frac{((j+i)-(k+t))!}{(i-t)!(j-k)!} \frac{\mathbf{E}_{n,t,k}(x, y)}{(x-y)^{(j+i)-(k+t)+1}} \right), \quad (4)$$

where

$$\mathbf{E}_{n,t,k}(x, y) = \begin{bmatrix} [P_{n+1}]^{(t)}(x) & [P_n]^{(t)}(x) \\ [P_{n+1}]^{(k)}(y) & [P_n]^{(k)}(y) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Since we will be dealing with Laguerre polynomials, it is convenient to list some of their well known (see [4], [11] and [46]) properties.

Proposition 1.2. *Let $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$ be the sequence of Laguerre monic orthogonal polynomials, and denote by $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ (notice the brackets in the parameter α) the sequence of Laguerre polynomials with leading coefficient $\frac{(-1)^n}{n!}$. Then*

1. For $n \in \mathbb{N}$,

$$xL_n^\alpha(x) = L_{n+1}^\alpha(x) + (2n + \alpha + 1)L_n^\alpha(x) + n(n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x). \quad (6)$$

2. For $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^n(\alpha + 1)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k}{(\alpha + 1)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad (7)$$

where

$$(a)_m := \begin{cases} 1 & \text{if } m = 0 \\ \prod_{k=0}^{|m-1|} (a + k \operatorname{sgn}(m)) & \text{if } m \in \mathbb{Z} - \{0\} \end{cases},$$

and

$$\operatorname{sgn}(m) := \begin{cases} 1 & \text{if } m \in \{1, 2, \dots\} \\ -1 & \text{if } m \in \{-1, -2, \dots\} \end{cases}.$$

3. For $n \in \mathbb{N}$,

$$(L_n^\alpha)^{(i)}(0) = (-1)^{n+i} \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{(n - i)! \Gamma(\alpha + i + 1)}. \quad (8)$$

4. For $n \in \mathbb{N}$,

$$\|L_n^\alpha\|_\alpha^2 = n! \Gamma(n + \alpha + 1), \quad (9)$$

where $\|L_n^\alpha\|_\alpha^2 = \int_0^\infty (L_n^\alpha)^2(x) x^\alpha e^{-x} dx$.

5. For $n \in \mathbb{N}$, $L_n^\alpha(x)$ satisfies the differential equation

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' = -ny. \quad (10)$$

6. For $n \in \mathbb{N}$,

$$x(L_n^\alpha(x))' = nL_n^\alpha(x) + n(n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x). \quad (11)$$

7. For $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n^\alpha(x) = \frac{n!}{(-1)^n} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{(n - k)! \Gamma(\alpha + k + 1)} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (12)$$

8. For $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) + nL_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (13)$$

9. For $n \in \mathbb{N}$,

$$(L_n^\alpha(x))'_{n-1}(x). \quad (14)$$

10. Outer strong asymptotics (Perron's asymptotics formula on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$). Let $\alpha \in \mathbb{R}$. Then

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} e^{x/2} (-x)^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} e^{2(-nx)^{1/2}} \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} C_k(x) n^{-k/2} + \mathcal{O}(n^{-p/2}) \right\}. \quad (15)$$

Here $C_k(x)$ is independent of n . This relation holds for x in the complex plane with a cut along the positive real semiaxis. The bound for the remainder holds uniformly in every closed domain with no points in common with $x \geq 0$ (see [46], Theorem 8.22.3).

11. Mehler-Heine type formula. Fixed j , with $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and J_α the Bessel function of the first kind, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x/(n+j))}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}), \quad (16)$$

uniformly over compact subsets of \mathbb{C} (see [46], Theorem 8.1.3).

Sobolev-type inner products

Notice that the inner product (1) is *standard*, in the sense that the multiplication by x operator is symmetric with respect to (1), i.e. $\langle xp, q \rangle_\mu = \langle p, xq \rangle_\mu$

for all $p, q \in \mathbb{P}$. This condition leads to some important properties for the corresponding orthogonal polynomials, such as the three term recurrence relation, with many applications in spectral theory, and the location of their zeros, always contained in the interior of E .

If the symmetry condition is not met, the inner product is called *non-standard*. Non-standard orthogonal polynomials do not have some of the properties that standard orthogonal polynomials have, being the most remarkable the fact that three term recurrence relations are, in general, not longer valid. Furthermore, the zeros of such polynomials can be located outside of the support of the measure. As an example, consider the inner product

$$\langle p, q \rangle_\mu = \int_{\mathbb{T}} p(z) \overline{q(z)} d\mu(z), \quad (17)$$

where $d\mu(z)$ is a positive measure supported in the unit circle \mathbb{T} , and p, q are Laurent polynomials. The corresponding orthogonal polynomials are called orthogonal polynomials on the unit circle, and have drawn much attention in recent years (see [44]). It is clear that (17) does not satisfy the symmetry condition and is therefore non-standard.

Sobolev inner products constitute another example. These are, essentially, inner products containing derivatives. The first studied example goes back to 1962 (see [3]), where the inner product

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{-1}^1 p(x)q(x)d\mu_0(x) + \int_{-1}^1 p'(x)q'(x)d\mu_1(x),$$

where

$$d\mu_0(x) = dx, \quad d\mu_1(x) = \begin{cases} 10dx & \text{if } -1 \leq x < 0, \\ dx & \text{if } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

was considered. The author found that $Q_2(x)$, the polynomial of degree 2 orthogonal with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, has a zero at $x = -1.08 \notin [-1, 1]$. He also studied the inner product

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx + \lambda \int_{-1}^1 p'(x)q'(x)dx, \quad \lambda > 0,$$

in connection with the problem of determining the best polynomial approximation in least squares, in the metric induced by the Sobolev inner product.

More generally, we can consider a Sobolev inner product of the form

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^m \int \mathbf{p}(x) \mathbf{A} \mathbf{q}^t(x), \quad (18)$$

where \mathbf{A} is a $(m+1) \times (m+1)$ matrix whose entries are positive Borel measures, and

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(x) &= [p(x), p'(x) \dots, p^{(m)}(x)], \\ \mathbf{q}(x) &= [q(x), q'(x) \dots, q^{(m)}(x)]. \end{aligned}$$

This is the general case of a *continuous* Sobolev inner product. If \mathbf{A} is a diagonal matrix, then we have

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^m a_k \int_{E_k} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k(x), \quad (19)$$

where $m \in \mathbb{N}$, $a_k > 0$ for $1 \leq k \leq m$, and all measures μ_k are positive and supported in $E_k \subseteq \mathbb{R}$. This is called the *diagonal continuous* case, and the order of the derivatives in each integral is the same. Notice that, for general \mathbf{A} , we obtain mixed derivatives in the inner product.

If $d\mu_0 = d\mu$ is a positive Borel measure, and

$$d\mu_k = \delta_{c_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

i.e. the Dirac delta at $x = c_k$ defined by

$$\int p(x) d\mu_k(x) = \delta_{c_k}[p(x)] := p(c_k),$$

then (19) becomes

$$\langle p, q \rangle_S = a_0 \int_E p(x) q(x) d\mu(x) + \mathbf{p}(c) \mathbf{A} \mathbf{q}^t(c)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(c) &= [p(c_0), p'(c_1) \dots, p^{(m)}(c_m)], \\ \mathbf{q}(c) &= [q(c_0), q'(c_1) \dots, q^{(m)}(c_m)], \end{aligned}$$

and \mathbf{A} is now a $(m+1) \times (m+1)$ diagonal positive definite matrix (notice that we have included a Dirac delta at $x = c_0$ with no derivatives). We can also

consider different orders of derivatives at the *same* point, and a generalization of the above inner product is

$$\langle p, q \rangle_S = \langle p, q \rangle_\mu + \mathbf{P}^t(\mathbf{c})\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{c}), \quad (20)$$

where

$$\mathbf{P}(\mathbf{c}) = [p(c_1), \dots, p^{(\ell_1)}(c_1), \dots, p(c_m), \dots, p^{(\ell_m)}(c_m)]^t$$

is a vector of dimension $N \times 1$, with

$$N = m + \sum_{i=1}^m \ell_i,$$

\mathbf{Q} is defined in a similar way, and \mathbf{A} is a diagonal and definite positive $N \times N$ matrix. Notice that if

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_{1,0}, \dots, a_{1,\ell_1}, \dots, a_{m,0}, \dots, a_{m,\ell_m}),$$

with $a_{k,i} \in \mathbb{R}_+$, then (20) becomes

$$\langle p, q \rangle_S = \langle p, q \rangle_\mu + \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\ell_k} a_{k,i} p^{(i)}(c_k) q^{(i)}(c_k). \quad (21)$$

This is called the *general diagonal* case of the *discrete* Sobolev inner product. It is usually said that masses $a_{k,i}$ at the points c_k are added to the standard inner product. If \mathbf{A} is a symmetric positive definite matrix (not necessarily diagonal), then (20) is called the *general non-diagonal* case of the discrete Sobolev inner product.

Particular examples of all four cases (continuous and discrete, diagonal and non-diagonal) have been studied in the last years by several authors (see, among many others, [7], [8], [9], [10], [20], [26] [29], [30], [31], [35], [39], and the nice surveys [37], [38], and references therein). They focus mainly in analytic properties (relative and strong asymptotics), algebraic properties (connection formulas, location and distribution of zeros), and some applications. Asymptotics of orthogonal polynomials have been studied in connection with the analysis of linear prediction in the theory of stochastic processes ([22]), numerical integration and rational approximation ([19], [45]), estimation of entropy ([5], [6]), among other applications. Zeros of orthogonal polynomials, on the other side, have applications in the development of quadrature formulas ([11], [21], [42]), among many other applications.

In this contribution, we will present some results related to the discrete case of Sobolev orthogonal polynomials, when the μ is the Laguerre measure. The corresponding families of orthogonal polynomials are usually called Laguerre Sobolev-type orthogonal polynomials.

2 Discrete Laguerre Sobolev-type classical polynomials: Outer relative asymptotics

Consider the discrete Sobolev-type inner product (20), with \mathbf{A} not necessarily diagonal, and denote by $\{P_n\}_{n \geq 0}$ and $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ the sequences of monic polynomials orthogonal with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, respectively. Here, μ is any positive Borel measure supported in some $E \subseteq \mathbb{R}$. Then, we can put

$$Q_n(x) = P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n,k} P_k(x),$$

where

$$\lambda_{n,k} = -\frac{\mathbf{P}_n^t(\mathbf{c}) \mathbf{A} \mathbf{Q}_n(\mathbf{c})}{\|P_k\|^2},$$

and therefore we obtain

$$Q_n(x) = P_n(x) - \mathbf{K}_{n-1}^t(x, \mathbf{c}) \mathbf{A} \mathbf{Q}_n(\mathbf{c}), \quad (22)$$

where $\mathbf{K}_{n-1}(x, \mathbf{c})$ is the $N \times 1$ vector

$$\mathbf{K}_{n-1}(x, \mathbf{c}) = [K_{n-1}^{(0,0)}(x, c_1), \dots, K_{n-1}^{(0,\ell_1)}(x, c_1), \dots, K_{n-1}^{(0,0)}(x, c_m), \dots, K_{n-1}^{(0,\ell_m)}(x, c_m)]^t.$$

Applying derivatives and evaluating at the points c_k , the unknown values in the vector $\mathbf{Q}_n^t(\mathbf{c})$ can be obtained by solving the linear system

$$\mathbf{Q}_n(\mathbf{c}) = \mathbf{P}_n(\mathbf{c}) - \mathbf{K}_{n-1}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \mathbf{A} \mathbf{Q}_n(\mathbf{c}),$$

with

$$\mathbf{K}_{n-1}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) =$$

$$\begin{bmatrix} K_{n-1}^{(0,0)}(c_1, c_1) & \cdots & K_{n-1}^{(0,\ell_1)}(c_1, c_1) & \cdots & K_{n-1}^{(0,0)}(c_1, c_m) & \cdots & K_{n-1}^{(0,\ell_m)}(c_1, c_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n-1}^{(\ell_1,0)}(c_1, c_1) & \cdots & K_{n-1}^{(\ell_1,\ell_1)}(c_1, c_1) & \cdots & K_{n-1}^{(\ell_1,0)}(c_1, c_m) & \cdots & K_{n-1}^{(\ell_1,\ell_m)}(c_1, c_m) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n-1}^{(0,0)}(c_m, c_1) & \cdots & K_{n-1}^{(0,\ell_1)}(c_m, c_1) & \cdots & K_{n-1}^{(0,0)}(c_m, c_m) & \cdots & K_{n-1}^{(0,\ell_m)}(c_m, c_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n-1}^{(\ell_m,0)}(c_m, c_1) & \cdots & K_{n-1}^{(\ell_m,\ell_1)}(c_m, c_1) & \cdots & K_{n-1}^{(\ell_m,0)}(c_m, c_m) & \cdots & K_{n-1}^{(\ell_m,\ell_m)}(c_m, c_m) \end{bmatrix},$$

so that

$$\mathbf{Q}_n(\mathbf{c}) = (\mathbf{I}_N + \mathbf{K}_{n-1}(\mathbf{c}, \mathbf{c})\mathbf{A})^{-1}\mathbf{P}_n(\mathbf{c}),$$

where \mathbf{I}_N is the $N \times N$ identity matrix. Since both $\mathbf{K}_{n-1}(\mathbf{c}, \mathbf{c})$ and \mathbf{A} are symmetric and positive definite matrices, the matrix $\mathbf{I}_N + \mathbf{K}_{n-1}(\mathbf{c}, \mathbf{c})\mathbf{A}$ is also positive definite and therefore invertible. As a consequence, we obtain the following result.

Proposition 2.1. *(Connection formula). If $\{P_n\}_{n \geq 0}$ and $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ denote the sequences of monic polynomials orthogonal with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ and (20), respectively, with \mathbf{A} not necessarily diagonal, then we have*

$$Q_n(x) = P_n(x) - \mathbf{K}_{n-1}^t(x, \mathbf{c})\mathbf{A}(\mathbf{I}_N + \mathbf{K}_{n-1}(\mathbf{c}, \mathbf{c})\mathbf{A})^{-1}\mathbf{P}_n(\mathbf{c}). \quad (23)$$

On the other hand, the outer relative asymptotic between P_n and Q_n is denoted by

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(x)}{P_n(x)}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus E$$

The asymptotic is studied in the complement of the support E in order to guarantee a zero-free region for the denominator P_n . On the other hand, the points c_k are usually chosen to be on the boundary of E , or outside E . Notice that, for an arbitrary measure μ , computing the relative asymptotic using (23) is complicated, since closed expressions (and their asymptotic behavior) are needed for the reproducing kernels, the polynomials P_n , and their derivatives, evaluated at certain arbitrary points. Since such expressions exist for the case when μ is a classical measure (see, as an example, Proposition 1.2 for the Laguerre polynomials), these families are usually considered for analysis.

The cases when the points are in the boundary of E (in the Laguerre case $E = \mathbb{R}_+$) i.e. $c_k = 0$, and when the points are outside E , i.e. $c_k < 0$, lead to different asymptotic results, and we will consider them separately. In what follows, we use the Laguerre measure, and denote $P_n = L_n^\alpha$ and $Q_n = \tilde{L}_n^\alpha$.

Mass points at the boundary

The simplest particular case of (20) was analyzed in [17], where the inner product

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{R}_+} p(x)q(x)x^{-\alpha}e^{-x}dx + Mp'(0)q'(0), \quad M > 0,$$

was considered. In this situation, the connection formula (23) becomes

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - \frac{nL_n^{\alpha+1}(0)}{1 + MK_{n-1}^{(1,1)}(0,0)}K_{n-1}^{(0,1)}(x,0).$$

In order to compute the relative asymptotic, the idea is to express the kernels $K_{n-1}^{(0,1)}(x,0)$ and $K_{n-1}^{(1,1)}(0,0)$ in terms of Laguerre polynomials (with different parameter), and then use the asymptotic properties in Proposition 1.2. In short, one proves that the denominator in the right hand side of the connection formula goes to infinity faster than the numerator, and thus

Proposition 2.2. *If Q_n and P_n are as above, we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1, \quad (24)$$

uniformly in compact subsets of $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

More generally, in [16] the authors considered the inner product

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{R}_+} p(x)q(x)x^{-\alpha}e^{-x}dx + Mp^{(j)}(0)q^{(j)}(0), \quad M > 0, \quad (25)$$

where j is a positive integer. In such a case, it is easy to see that the corresponding connection formula is

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - \frac{[L_n^{\alpha}]^{(j)}(0)}{1 + MK_{n-1}^{(j,j)}(0,0)}K_{n-1}^{(0,j)}(x,0),$$

and expressing again the reproducing kernels in terms of Laguerre polynomials, it can be proved that (24) holds. Later on, a (diagonal) Sobolev inner

product with a finite arbitrary number of derivatives was studied in [12], where the authors studied the inner product

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{R}_+} p(x)q(x)x^{-\alpha}e^{-x}dx + \sum_{k=1}^m M_k p^{(k)}(0)q^{(k)}(0), \quad M_k > 0, \quad (26)$$

Unlike the previous cases, since more than one mass point are added, the connection formula has to be expressed in matrix form. This makes the computation of the relative asymptotic more difficult, since the inverse of the matrix $\mathbf{K}_{n-1}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ is needed. In [12], the authors obtain a recurrence relation for the corresponding Laguerre-type polynomials, an expression in terms of hypergeometric functions, and some properties of their zeros. There is a workaround to the problem of inverting the matrix in the connection formula, that allows the computation of the relative asymptotic in this case. We will discuss it in the following subsection.

Regarding the non-diagonal case, a 2×2 particular case for the Laguerre polynomials was analyzed in [15], where the inner product

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{R}_+} p(x)q(x)x^{-\alpha}e^{-x}dx + \mathbf{P}^t(\mathbf{0}) \begin{pmatrix} M_0 & \lambda \\ \lambda & M_1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{0}),$$

where $\mathbf{P}^t(\mathbf{0}) = [p(0), p'(0)]$, $M_0, M_1 \geq 0$, and $\lambda \in \mathbb{R}$ such that the matrix is definite positive. Using similar techniques, the authors prove that the relative asymptotic (24) also holds. Non-diagonal cases of Laguerre-type polynomials have also been studied in [43] and [32] for the continuous case, and in a more general context in [1].

Mass points outside E

The analysis of Laguerre Sobolev-type polynomials when the mass points are located outside the positive real line had not drawn much attention for researchers until the last years. The first reference goes back to [33], in which the authors analyzed the more general framework of semiclassical linear functionals. More recently, analytic and algebraic properties of Laguerre Sobolev-type polynomials when the mass points are located outside the support have been studied in [14], [18], [24], [25], and [41].

In [36], the authors consider the inner product

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{R}_+} p(x)q(x)x^{-\alpha}e^{-x}dx + M_0p(c_0)q(c_0) + M_1p'(c_1)q'(c_1), \quad M_0, M_1 > 0, \quad (27)$$

with $c_0, c_1 < 0$. This is, a 2×2 diagonal case. The relative asymptotic can be obtained in a similar way that in the previous subsection, although the behavior of the polynomials and the reproducing kernels is different when they are evaluated at a negative value. However, the authors use a different approach, based in a connection formula that relates the Laguerre Sobolev-type polynomials with other families of orthogonal polynomials associated with the Christoffer transformation of the Laguerre measure. We will provide more detail on this approach in the following section.

The relative asymptotic for the polynomials orthogonal with respect to the above inner product is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = \prod_{k=0}^1 \left(\frac{\sqrt{-x} - \sqrt{|c_k|}}{\sqrt{-x} + \sqrt{|c_k|}} \right).$$

Notice that, in both cases (i.e., when the mass points are located on the boundary or outside of the support), the value of the mass has no effect on the asymptotic result. What is important in terms of the asymptotic is the location of the mass. When the mass points are located at $x = 0$, the Sobolev polynomials tend to the Laguerre polynomials as $n \rightarrow \infty$. The situation changes when the mass points are located in the negative real axis. As can be seen in the previous equation, and by Hurwitz's theorem, each mass point *attracts* a zero of the Sobolev polynomials. Some other results related to the behavior of the zeros will be discussed in the next section.

A generalization of the above inner product for the addition of a finite number of masses (in the diagonal case), but with no derivatives, was analyzed in [24]. The authors considered the inner product

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{R}_+} p(x)q(x)x^{-\alpha}e^{-x}dx + \sum_{k=1}^m a_k p(c_k)q(c_k), \quad a_k > 0, \quad 1 \leq k \leq m,$$

with $c_k < 0$, $1 \leq k \leq m$ and $m \in \mathbb{N}$. For this inner product, (22) becomes

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - \sum_{k=1}^m a_k K_{n-1}(x, c_k) \tilde{L}_n^{(\alpha)}(c_k), \quad (28)$$

and thus

$$\frac{\tilde{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{a_k K_{n-1}(x, c_k) \tilde{L}_n^\alpha(c_k)}{L_n^\alpha(x)}. \quad (29)$$

Thus, the relative asymptotic is just the limit of the right hand side when $n \rightarrow \infty$. In order to prove the existence of such a limit, the expression is evaluated at the points c_k , to construct the linear system

$$L_n^\alpha(c_j) = (1 + a_j K_{n-1}(c_j, c_j)) \tilde{L}_n^\alpha(c_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m a_k K_{n-1}(c_j, c_k) \tilde{L}_n^\alpha(c_k),$$

for $1 \leq j \leq m$. After some trivial computations, the linear system can be rewritten as

$$\Phi_n(x, j, t) S_n^\alpha(x, j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \Psi_n(x, j, k) S_n^\alpha(x, k) = -1, \quad (30)$$

where

$$S_n^\alpha(x, k) := -\frac{a_k K_{n-1}(x, c_k) \tilde{L}_n^\alpha(c_k)}{L_n^\alpha(x)}, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (31)$$

and

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, j) &= \frac{L_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(c_j)} \frac{[1 + a_j K_{n-1}(c_j, c_j)]}{K_{n-1}(x, c_j)}, \\ \Psi_n(x, j, k) &= \frac{L_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(c_j)} \frac{a_k K_{n-1}(c_j, c_k)}{K_{n-1}(x, c_k)}. \end{aligned}$$

Notice that the limits of the expressions (31) are needed to find the limit in (28). On the other hand, the limits of $\Phi_n(x, j)$, $\Psi_n(x, j, k)$ can be obtained from the (known) behavior of the Laguerre polynomials and their reproducing kernels. Therefore, taking the limit when $n \rightarrow \infty$ in (30), we obtain a limit linear system that can be solved to obtain the required limits. Using this approach, in [24] the authors obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = \prod_{k=0}^m \left(\frac{\sqrt{-x} - \sqrt{|c_k|}}{\sqrt{-x} + \sqrt{|c_k|}} \right).$$

Although the last considered case does not constitute a Sobolev inner product (because it does not contains derivatives), the approach taken can be extended to the most general Sobolev inner product. Indeed, in [13] the authors show that the relative asymptotic result is still valid even if derivatives of arbitrary order are added at the mass points. This is, the only relevant data (in terms of the relative asymptotic) is *how many distinct* points c_k are considered. Each point c_k adds a rational factor to the product. The value of the masses a_k and the order of the derivatives do not affect the relative asymptotic.

3 Zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials

As stated before, one very useful property of the standard orthogonal polynomials is that their zeros are real, simple, and located in the interior of the support of the measure. If the measure is also classical, they also satisfy that between any two zeros of P_n there exist one zero of P_{n-1} . This is called the interlacing property.

Consider the inner product (25). In [16], the authors show that the zeros of the corresponding orthogonal polynomials are still real, simple, and satisfy an interlacing property with the zeros of L_n^α , but they are not necessarily located in the positive real line. The proof of the following proposition is based on Meijer ideas [40].

Proposition 3.1. *(see [16]) The zeros of \tilde{L}_n^α , orthogonal with respect to (25), are real, simple, and at most one of them is located outside $(0, \infty)$. Furthermore, if we denote by $\xi_{n,k}$ the zeros of \tilde{L}_n^α , and by $x_{n,k}$ the zeros of L_n^α , then*

$$\xi_{n,1} < x_{n,1} < \dots < \xi_{n,n} < x_{n,n}.$$

When the more general inner product (26) is considered, the following results about the zeros are obtained.

Proposition 3.2. *(see [2].) Let $\{\tilde{L}_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ be the sequence of monic orthogonal polynomials with respect to the inner product (26). Then, for all $n \geq m$, $\tilde{L}_n^\alpha(x)$ has $n - m$ changes of sign in the support of the measure.*

And, as a consequence (see [12]), we have

Proposition 3.3. *If $M_k > 0$, for $k = 0, \dots, m$, there exist $(n - m)$ zeros of \tilde{L}_n^α in the support of the measure.*

The case with mass points on the negative real axis has also been studied. In [36], the zeros of the polynomials orthogonal with respect to a particular case of (27) when $M_0 = 0$ are analyzed. The authors use an alternative method that uses orthogonal families with respect to Christoffel transformations of the Laguerre measure. This transformation is defined by multiplying the measure by the polynomial $(x - c_1)$, so that $d\mu_c(x) = (x - c_1)d\mu(x)$. It turns out that the Sobolev polynomials orthogonal with respect to (27) when $M_0 = 0$ can be expressed as a combination of polynomials orthogonal to the two-iterated Christoffel transformation of μ , i.e. $d\mu_c(x) = (x - c_1)^2 d\mu(x)$.

Furthermore, the authors study the asymptotic behavior of the zeros when the mass $M_1 \rightarrow \infty$. This is, the zeros of the limit polynomials $G_n(x) = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \tilde{L}_n^\alpha$. We summarize the results in the following Proposition.

Proposition 3.4. *(see [36]). Let $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$ the Sobolev polynomials associated with (27) when $M_0 = 0$ are analyzed, and let $G_n(x) = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \tilde{L}_n^\alpha$. Denote by $\xi_{n,k}$ and $g_{n,k}$ the zeros of \tilde{L}_n^α and $G_n(x)$, respectively. If $x_{n,k}$ are the zeros of L_n^α , then*

- *When $n \rightarrow \infty$, c_1 "attracts" a zero of \tilde{L}_n^α .*
- *The zeros of \tilde{L}_n^α are real, simple, and at least $n - 1$ zeros are located in $(0, \infty)$.*
- *The zeros of \tilde{L}_n^α and L_n^α interlace, and if \tilde{L}_n^α has zeros outside $(0, \infty)$, at most one is located outside $[c_1, \infty)$.*
- *G_n has real and simple zeros, and $g_{n,1} < c_1$. Furthermore, the zeros interlace with those of L_n^α .*
- *The zeros of G_n , \tilde{L}_n^α and L_n^α interlace, i.e.*

$$g_{n,k} < \xi_{n,k} < x_{n,k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

- The zeros of \tilde{L}_n^α are monotone decreasing functions of M_1 , so the zeros of \tilde{L}_n^α approach the zeros of G_n .

4 Electrostatic interpretation of the zeros

There is a nice and well known electrostatic interpretation of the zeros of the classical orthogonal polynomials. It is a consequence of the second order differential equation that they satisfy. In particular, for the Jacobi case, if we consider fixed positive charges of masses $(\alpha + 1)/2$ and $(\beta + 1)/2$, located at $x = 1$ and $x = -1$, respectively, under a logarithm potential, and n unit charges $X = (x_1, \dots, x_n)$ moving freely on $(-1, 1)$, then the total energy $E(X)$ of the system is

$$E(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \ln |x_k - x_j| + \sum_{k=1}^n \varphi(x_k),$$

where the first term on the right is the mutual interaction of the n charges, and the second term is the field generated by the fixed charges, with

$$\varphi(x) = -\frac{\alpha + 1}{2} \ln |x - 1| - \frac{\beta + 1}{2} \ln |x + 1|.$$

Stieltjes proved that, when the points in X are the zeros of the polynomial $p_n^{\alpha, \beta}(x)$, the system attains a strict global minimum of $E(X)$. In other words, the set of zeros of the Jacobi polynomials constitutes a critical point. In this case, a global minimum of $E(X)$, known as stable equilibrium (for more information, see [34] and [47]). The same can be obtained for the zeros of the Laguerre polynomials, although in this case only one positive charge is fixed at the origin, and a constraint is introduced so that the n unit charges don't *escape* to infinity.

A similar interpretation can be obtained for the Sobolev polynomials. To illustrate this, we will consider the polynomials orthogonal with respect to (26), studied in [12]. The key is to obtain a differential equation satisfied by these polynomials, and then follow Stieltjes's approach. The differential equation can be obtained from the connection formula, and some of the properties of Laguerre polynomials, including the next lemma.

Lemma 4.1. (see [12]) For each $k, n \in \mathbb{N}$ and $k \leq n$, we have

$$L_{n-k}^\alpha(x) = D_{n-k}(x)L_{n-1}^\alpha(x) + S_{n-k}(x)L_n^\alpha(x), \quad (32)$$

where

$$D_{n-k}(x) = \frac{(x - M_{n-k+1})D_{n-k+1}(x)}{N_{n-k+1}} - \frac{D_{n-k+2}(x)}{N_{n-k+1}},$$

and

$$S_{n-k}(x) = \frac{(x - M_{n-k+1})S_{n-k+1}(x)}{N_{n-k+1}} - \frac{S_{n-k+2}(x)}{N_{n-k+1}},$$

with $D_{n-1}(x) = 1$, $D_n(x) = 0$, $S_{n-1}(x) = 0$, $S_n(x) = 1$, $M_{n-t} = (2(n-t) + 1 + \alpha)$ and $N_{n-t} = (n-t)(n-t + \alpha)$.

Proposition 4.2. (see [12]) Let $\{L_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ be the Laguerre polynomials and $\{\tilde{L}_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$ the orthogonal polynomials associated with the inner product (26). Then,

$$Q(x; n)(\tilde{L}_n^\alpha(x))'' + W(x; n)(\tilde{L}_n^\alpha(x))' + R(x; n)\tilde{L}_n^\alpha(x) = 0, \quad (33)$$

where

$$Q(x; n) = x[f_{j-1}(x)g_{j+1}(x) - h_j(x)q_j(x)],$$

$$W(x; n) = [(\alpha + j + 2 - x)[f_{j-1}(x)g_{j+1}(x) - h_j(x)q_j(x)] + x f_{j-1}(x) \sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]}(n-k)D_{n-k}(x) - x h_j(x) \sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]}(n-k)S_{n-k}(x)],$$

$$R(x; n) =$$

$$\left[-q_j(x) \sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]}(n-k)D_{n-k}(x) + g_{j+1}(x) \sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]}(n-k)S_{n-k}(x) \right], \quad (34)$$

with

$$h_j(x) = \left[\sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]}D_{n-k}(x) \right] \quad \text{and} \quad f_{j-1}(x) = \left[\sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]}S_{n-k}(x) \right],$$

$$g_{j+1}(x) = \sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]} \left[(n-k)D_{n-k}(x) + (n-k)(n-k + \alpha + j + 1)D_{n-k-1}(x) \right],$$

and

$$q_j(x) = \sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]} \left[(n-k)S_{n-k}(x) + (n-k)(n-k+\alpha+j+1)S_{n-k-1}(x) \right], \quad (35)$$

and $A_n^{[k]}$ are constants.

As an application of (33), we present an electrostatic model that responds to the zeros distribution of the Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials. For $n \in \mathbb{N}$, let $\{\xi_{n,k}\}_{1 \leq k \leq n}$ be the zeros of $\tilde{L}_n^\alpha(x)$. Thus, for every $k \in \{1, \dots, n\}$, from (33) we get

$$Q(\xi_{n,k}, n) (\tilde{L}_n^\alpha(\xi_{n,k}))'' + W(\xi_{n,k}, n) (\tilde{L}_n^\alpha(\xi_{n,k}))' = 0,$$

or, equivalently,

$$\frac{(\tilde{L}_n^\alpha(\xi_{n,k}))''}{(\tilde{L}_n^\alpha(\xi_{n,k}))'} = -\frac{W(\xi_{n,k}, n)}{Q(\xi_{n,k}, n)}. \quad (36)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \frac{W(\xi_{n,k}, n)}{Q(\xi_{n,k}, n)} &= \frac{(\alpha + j + 2)}{\xi_{n,k}} - 1 + \frac{f_{j-1}(\xi_{n,k}) \sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]} (n-k) D_{n-k}(\xi_{n,k})}{f_{j-1}(\xi_{n,k}) g_{j+1}(\xi_{n,k}) - f_j(\xi_{n,k}) g_j(\xi_{n,k})} \\ &\quad - \frac{f_j(\xi_{n,k}) \sum_{k=0}^{j+1} A_n^{[k]} (n-k) S_{n-k}(\xi_{n,k})}{f_{j-1}(\xi_{n,k}) g_{j+1}(\xi_{n,k}) - f_j(\xi_{n,k}) g_j(\xi_{n,k})}. \end{aligned} \quad (37)$$

Since $F(\xi_{n,k}) := f_{j-1}(\xi_{n,k}) g_{j+1}(\xi_{n,k}) - f_j(\xi_{n,k}) g_j(\xi_{n,k})$ is a polynomial of degree at most $2j - 2$, then there exists $t_1 \in \{1, 2, \dots, 2j - 2\}$, such that $x_1^{(F)}, \dots, x_{t_1}^{(F)}$ are all the zeros of $F(x)$ different from 0.

In the general case, if $F(x)$ has complex and real zeros, we consider $I_1 \subset \{0, 1, \dots, t_1\}$ such that, for each $i \in I_1$, $x_i^{(F)}$ is a complex number (but not real) and, for each $i \in J_1$, $x_i^{(F)}$ is a real number, where

$$J_1 = \{0, 1, \dots, t_1\} - I_1.$$

Since for each $i \in I_1$, the complex conjugate of $x_i^{(F)}$ is also a zero of $F(x)$, then the number of elements in I_1 is even, say $2\hat{n}$, where \hat{n} is an integer smaller than or equal to $j - 1$. If $i_1, \dots, i_{2\hat{n}}$ denotes an order of I_1 such that, for every $k \in \{1, 3, \dots, 2\hat{n} - 1\}$, $x_{i_{k+1}}^{(F)}$ is complex conjugate of $x_{i_k}^{(F)}$ then we

define $\ddot{I}_1 = \{i_k \in I_1 : (1 \leq k \leq 2\hat{n}) \wedge (k \text{ odd})\}$. For each $i \in \ddot{I}_1$ and $\ell \in J_1$, there exist real constants $A, A_i, B_i, C_i, \dot{A}_\ell$, such that

$$\frac{(\tilde{L}_n^\alpha(\xi_{n,k}))''}{(\tilde{L}_n^\alpha(\xi_{n,k}))'} = \frac{A}{\xi_{n,k}} + \sum_{i \in \ddot{I}_1} \frac{A_i x + B_i}{(\xi_{n,k})^2 + C_i^2} + \sum_{\ell \in J_1} \frac{\dot{A}_\ell}{\xi_{n,k} - x_\ell^{(F)}} = 0,$$

and, since (see [21]),

$$\frac{(\tilde{L}_n^\alpha(\xi_{n,k}))''}{(\tilde{L}_n^\alpha(\xi_{n,k}))'} = -2 \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{x_{n,j} - \xi_{n,k}}, \quad (38)$$

we obtain,

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{x_{n,j} - \xi_{n,k}} + \frac{1}{2} \frac{A}{\xi_{n,k}} + \frac{1}{2} \sum_{i \in \ddot{I}_1} \frac{A_i x + B_i}{(\xi_{n,k})^2 + C_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in J_1} \frac{\dot{A}_\ell}{\xi_{n,k} - x_\ell^{(F)}} = 0. \quad (39)$$

Therefore, we can make the following electrostatic interpretation of the zeros of $\tilde{L}_n(x)$. If we have $n \geq 1$ electric particles located on the complex plane under the interaction of a logarithmic external field and we have

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = \frac{1}{2} A \ln |x| + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in J_1} \dot{A}_\ell \ln |x - x_\ell^{(F)}| + \\ \frac{1}{2} \sum_{i \in \ddot{I}_1} \left[A_i \ln \sqrt{x^2 + C_i^2} + \frac{B_i}{C_i} \tan^{-1} \left(\frac{x}{C_i} \right) \right], \end{aligned}$$

then (39) indicates that the totally energy gradient

$$\varepsilon(X) = - \sum_{1 \leq j < i \leq n} \ln |x_j - x_i| + \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i),$$

with $X = (x_1, \dots, x_n)$, vanishes at the points $(\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,n})$. In other words, the set of the zeros of Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomial $\tilde{L}_n^\alpha(x)$ constitutes a critical point. However, it is an open problem to determine if this critical point is a maximum, a minimum, or neither.

For a more general study of the electrostatic interpretation of standard orthogonal polynomials, we refer the reader to [23], [27], [28] and [34].

Acknowledgments

This contribution was developed with support from Conacyt's Grant 287523.

Bibliography

- [1] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola, and A. Ronveaux, *Sobolev-Type orthogonal polynomials: The nondiagonal case*, J. Approx. Theory, **83** (1995), 266–287.
- [2] M. Alfaro, G. López and M. L. Rezola, *Some properties of zeros of Sobolev-Type orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math., **69** (1996), 171–179.
- [3] P. Althammer, *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*, J. Reine Angew. Math., **211** (1962), 192–204.
- [4] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. **71**, Cambridge University Press, Cambridge, UK.,1999.
- [5] Aptekarev, A. I., *Asymptotic behaviour of L_p norms and entropy for general orthogonal polynomials*, Russian Acad. Sci. Math. Sbornik, **185** (1994), 3–30.
- [6] A. I. Aptekarev, J. S. Dehesa and R. J. Yañez, *Spatial entropy of central potentials and strong asymptotics of orthogonal polynomials*, J. Math. Phys., **35** (1994), 4423–4428.
- [7] H. Bavinck and H. G. Meijer, *On Orthogonal Polynomials with respect to an inner product involving derivatives: zeros and recurrence relations*, Indag. Math. N. S, **1** (1990), 7–14.
- [8] A. Branquinho, A. Foulquié and F. Marcellán, *Asymptotic behavior of Sobolev-type orthogonal polynomials on a rectifiable Jordan curve or Arc*, Constr. Approx., **18** (2002), 161–182.

- [9] A. Cachafeiro and F. Marcellán, *Asymptotic behavior of Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit circle*, J. Approx. Theory, **8** (1994), 127–146.
- [10] K. Castillo, L. E. Garza and F. Marcellán, *Asymptotic behavior of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle*, Integral Transforms Spec. Funct., **24** (2013), 23–38.
- [11] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [12] H. Dueñas, L. Garza, J. C. García, and G. A. Ramírez, *The diagonal general case for Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials*, Rev. Col. de Mat., **47**, (2013), 39–66.
- [13] H. Dueñas, L. E. Garza and E. J. Huertas, *Asymptotic Properties of Laguerre-Sobolev-type Orthogonal Polynomials. A general approach*, submitted (2014).
- [14] H. Dueñas, E. J. Huertas, and F. Marcellán, *Analytic properties of Laguerre-type orthogonal polynomials*, Integral Transf. Spec. Funct., **22** (2011), 107–122.
- [15] H. Dueñas and F. Marcellán, *Asymptotic behaviour of Laguerre-Sobolev Type Orthogonal Polynomials. A nondiagonal case*, J. Comput. Appl. Math., **235**, Issue 4, (2011), 998–1007.
- [16] H. Dueñas and F. Marcellán, *The Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory, **162** (2010), 421–440.
- [17] H. Dueñas and F. Marcellán, *The Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials. Holonomic equation and electrostatic interpretation*, Rocky Mountain J. Math., **41**, Number 1 (2011), 1–366.
- [18] B. Xh. Fejzullahu and R. Xh. Zejnullahu, *Orthogonal polynomials with respect to the Laguerre measure perturbed by the canonical transformations*, Integral Transf. Spec. Funct., **17** (2010), 569–580.
- [19] G. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Akademiai Kiado/Pergamon Press, Budapest, 1971.

- [20] A. Foulquié, F. Marcellán and K. Pan, *Asymptotic behavior of Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit circle*, J. Approx. Theory, **100** (1999), 345–363.
- [21] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, in Numerical Mathematics and Scientific Computation Series, Oxford University Press. New York, 2004.
- [22] U. Grenander and G. Szegő, *Toeplitz Forms and Their Applications*, Chelsea, New York, 1984.
- [23] F. Grünbaum, *Variations on a Theme of Heine and Stieltjes: An Electrostatic Interpretation of the Zeros of Certain Polynomials*, J. Comput. App. Math., **99** (1998), 189–194.
- [24] E. J. Huertas, F. Marcellán and H. Pijeira. *An Electrostatic Model for Zeros of Laguerre Polynomials*, Proceedings of AMS, **142** (2014), 1733–1747.
- [25] E. J. Huertas, F. Marcellán and F. R. Rafaeli, *Zeros of Orthogonal Polynomials Generated by Canonical Perturbations of Measures*, Appl. Math. Comput., **218** (2012), 7109–7127.
- [26] A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett and J. M. Sanz-Serna, *On Polynomials Orthogonal with Respect to Certain Sobolev Inner Products.*, J. Approx. Theory, **65** (1991), 151–175.
- [27] M. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one Variable*, Encyclopedia of Mathematics and Applications, Cambridge University Press, Vol. 98, Cambridge, UK. 2005.
- [28] M. H. Ismail, *An Electrostatic Model for Zeros of General Orthogonal Polynomials*, Pacific J. Math, **193** (1999), 355–369.
- [29] X. Li and F. Marcellán, *On polynomials orthogonal with respect to Sobolev inner products*, Pacific J. Math., **175** (1996), 127–146.
- [30] G. López, F. Marcellán and W. Van Assche, *Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Constr. Approx., **11** (1995), 107–137.

- [31] F. Marcellán and L. Moral, *Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit circle*, Appl. Math. Comput., **128** (2002), 107–137.
- [32] F. Marcellán and J. J. Moreno-Balcázar, *Strong and Plancherel Rotach Asymptotics of non-diagonal Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory, **110** (2001) 54–73.
- [33] F. Marcellán and P. Maroni, *Sur l'adjonction d'une masse de Dirac á une forme régulière et semi-classique*, Ann. Mat. Pura Appl., **162** (4) (1992), 1–22.
- [34] F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein and P. Martínez-González, *Electrostatic models for zeros of polynomials: old, new, and some open problems*, J. Comput. Appl. Math., **207** (2007), 258–272.
- [35] F. Marcellán and W. Van Assche, *Relative Asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product*, J. Approx. Theory, **72** (1993), 193–209.
- [36] F. Marcellán, R. Xh. Zejnullaju, B. Xh. Fejzullahu and E. J. Huertas, *On Orthogonal Polynomials With Respect To Certain Discrete Sobolev Inner Product*, Pacific J. Math., **257** (1), (2012), 167–188.
- [37] A. Martínez Finkelshtein, *Analytic Aspects of Sobolev Orthogonal Polynomials revisited*, J. Comput. Appl. Math., **127** (2001), 255–266.
- [38] A. Martínez Finkelshtein, *Asymptotic properties of Sobolev Orthogonal Polynomials*, J. Comput. Appl. Math., **99** (1998), 491–510.
- [39] A. Martínez Finkelshtein and J. J. Moreno Balcázar, *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for a Jacobi weight*, Methods Appl. Anal., **4** (1997), 430–437.
- [40] H. G. Meijer, *Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space*, J. Math. Anal. Appl., **172** (1993), 520–532.
- [41] A. Molano, *On Laguerre–Sobolev type orthogonal polynomials: zeros and electrostatic interpretation*, ANZIAM, Vol. **55**, 1 (2013) 39–54.
- [42] F. Peherstorfer, *Linear combination of orthogonal polynomials generating positive quadrature formulas*, Math. Comput., **55** (1990), 231–241.

- [43] T. E. Pérez and M. A. Piñar, *On Sobolev Orthogonality for the Generalized Laguerre Polynomials*. J. Approx. Theory, **86** (1996) 278–285.
- [44] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **54**, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2005.
- [45] H. B. Stahl and V. Totik, *General Orthogonal Polynomials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [46] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4th ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series, vol **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI., 1975.
- [47] G. Valent and W. Van Assche, *The impact of Stieltjes' work on continued fractions and orthogonal polynomials: additional material*, Proceedings of the International Conference on Orthogonality, Moment Problems and Continued Fractions (Delft, 1994), J. Comput. Appl. Math., **65** (1995), no. 1-3, 419–447.

Facultad de Ciencias, Universidad de Colima
Bernal Díaz del Castillo 340, Col. Villas San Sebastián
Colima, Col. C.P. 28045

luis_garza1@ucol.mx
garzaleg@gmail.com

Capítulo 2

Reconocimiento de patrones en imágenes digitales usando máscaras de Hilbert

Diego Francisco Alcaraz Ubach*, Selene Solorza
Calderón**

*FCFM, BUAP

**Facultad de Ciencias, UABC

Resumen

El reconocimiento de patrones en imágenes digitales es un campo de investigación relevante para distintas áreas de las ciencias. Existen sistemas de reconocimiento de patrones que ayudan a automatizar la clasificación de objetos mediante imágenes capturadas, donde en algunos casos el tamaño o escala de los objetos a estudiar no varía, como puede ocurrir con su posición u orientación. En este trabajo se desarrolla un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante por posición y rotación, fundamentado en la teoría de la transformada de Fourier y de la transformada de Hilbert. Para esto, se generan dos máscaras binarias de anillos concéntricos que surgen del estudio de la transformada de Hilbert radial, las cuales son la base para que el sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales sea invariante por rotación. La invarianza de la posición resulta de la aplicación de la transformada de Fourier.

1 Introducción

El reconocimiento de patrones es un área de interés en los sectores social y económico, en distintos campos de la ciencia y en el desarrollo de tecnologías, por citar sólo algunos ejemplos. Desarrollar nuevas aplicaciones, algoritmos y técnicas más eficientes, y mejores tecnologías, es una tarea multidisciplinaria donde participan ingenieros, físicos y matemáticos, entre otros.

Las aplicaciones del reconocimiento de patrones se pueden clasificar en los grupos siguientes: comunicación entre las computadoras y el hombre, biomedicina, física, aspectos de seguridad, estudio y estimación de recursos naturales, estereología, industria y robótica e inteligencia artificial [15]. La mayoría de las aplicaciones del reconocimiento de patrones, correspondientes a los grupos mencionados, están basadas en herramientas que surgen del estudio de distintas ramas de las matemáticas. En particular, el reconocimiento de patrones en imágenes digitales se sustenta, en gran medida, en conceptos y resultados del análisis funcional. Además, las teorías de la estadística paramétrica juegan un papel esencial para dar validez a las aplicaciones desarrolladas en esta área.

En este capítulo se presenta un sistema digital de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante por posición y rotación, basado en el estudio de las transformadas de Fourier y de Hilbert, el cual fue desarrollado en [1] por los autores del trabajo presente. La transformada de Fourier ha sido ampliamente estudiada y aplicada en el campo del reconocimiento de patrones en imágenes digitales, a diferencia de la transformada de Hilbert, cuyas principales aplicaciones son en el área de procesamiento de señales unidimensionales.

Una ventaja de la transformada de Fourier, es que las aplicaciones de ésta para funciones de una variable se extienden de manera natural para funciones multivariantes. Desafortunadamente, la transformada de Hilbert no tiene esa ventaja; al calcular la transformada de Hilbert de señales bidimensionales (por ejemplo imágenes) no se obtienen los mismos resultados que para señales unidimensionales. Por ello, se han propuesto modificaciones a la transformada de Hilbert con el objetivo de extender las aplicaciones de una a dos dimensiones. Entre dichas propuestas, se encuentra la *transformada de Hilbert radial* [13, 5], a partir de la cual se elaboraron dos máscaras binarias de anillos concéntricos para lograr la invariancia por rotación, a las cuales se les denominó *máscaras de Hilbert*.

2 Fundamentos

Una imagen digital se puede definir como una señal bidimensional discreta y finita $I[n_1, n_2]$, con $n_1 = 0, 1, \dots, M-1$ y $n_2 = 0, 1, \dots, N-1$, donde la amplitud de I en cualquier coordenada (n_1, n_2) representa la intensidad de la imagen en

ese punto. A un punto (n_1, n_2) se le denomina píxel de la imagen. En el sistema digital de reconocimiento de patrones en imágenes digitales desarrollado en este trabajo, se consideró únicamente imágenes en *escala de grises*. Este término se usa para referirse a la intensidad de imágenes monocromáticas. En dicha representación, la intensidad de cada punto en la imagen es un tono de gris que va desde el color negro hasta el blanco [8].

En el contexto del procesamiento de señales en general, existen diversas razones para considerar la transformada de Fourier de señales. Por ejemplo, representar la información de una señal en el dominio de frecuencias es útil para aplicar algunos algoritmos y de determinar ciertas propiedades de la señal. Sin embargo, calcular la transformada de Fourier de una señal discreta $f[n]$ con $n = 0, 1, \dots, N-1$ de la forma habitual, requiere de $O(N^2)$ operaciones [3]. Debido a las limitaciones computacionales que implica tal número de operaciones, comúnmente se utiliza un algoritmo desarrollado por Cooley y Tukey denominado *transformada rápida de Fourier* [4]. Con este algoritmo, se obtiene el mismo resultado que utilizar la transformada de Fourier realizando únicamente $O(N \log(N))$ operaciones aritméticas.

Para una imagen digital $I[n_1, n_2]$ representada en escala de grises, se cumple lo siguiente

$$|\mathcal{F}_F[I[n_1, n_2]]| = |\mathcal{F}_F[I[n_1 - a, n_2 - b]]|, \quad (1)$$

para $a, b \in \mathbb{N}$ [3], donde \mathcal{F}_F denota la transformada rápida de Fourier. Es decir, el módulo de la transformada de Fourier, conocido también como espectro de amplitud de Fourier, es invariante por traslación.

Con base en esta propiedad de la transformada de Fourier, es posible elaborar un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante por posición, es decir, un sistema que sea capaz de identificar un objeto en una imagen trasladado en cualquier dirección. Por ejemplo, en la Figura 1 se muestra el espectro de amplitud de Fourier de dos imágenes con el mismo objeto pero en diferentes posiciones.

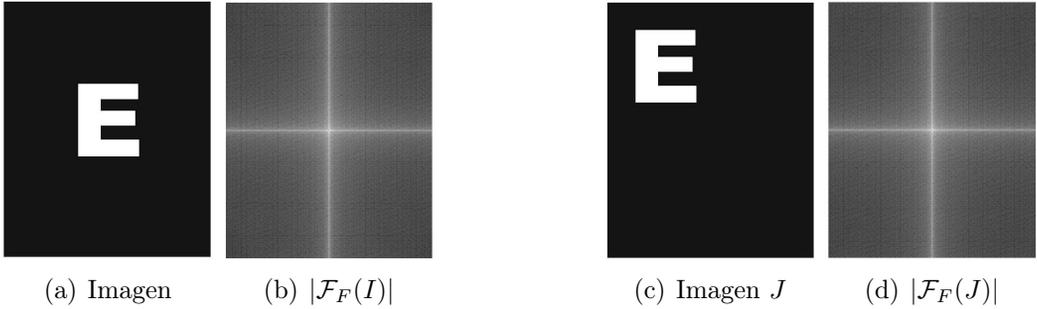


Figura 1: Ejemplificación de la invariancia por posición del módulo de la transformada de Fourier de una imagen. Ambos espectros de amplitud se muestran bajo una transformación logarítmica por cuestiones de visualización.

Es común que el módulo de la transformada de Fourier de una imagen tenga valores de intensidad entre 0 y 10^6 . Debido a esto, al visualizar dicho espectro se pierden detalles correspondientes a los valores de intensidad menores, por lo que generalmente se visualiza bajo una transformación logarítmica [8].

El filtrado de imágenes digitales es una técnica muy utilizada en el procesamiento de imágenes digitales. Existen filtros para resaltar o suavizar bordes en imágenes, remover distintos tipos de ruido, entre otros. En el área de reconocimiento de patrones, se pueden utilizar filtros en imágenes digitales con el fin de obtener ciertas características que permitan hacer una clasificación o identificación entre imágenes. A los filtros utilizados en imágenes digitales, también se les conoce como máscaras.

Una forma de aplicar un filtro a una imagen $I[n_1, n_2]$ es mediante la convolución. Este procedimiento se conoce como filtrado espacial cuando las operaciones se llevan a cabo en cada píxel $[n_1, n_2]$ de la imagen I y como filtrado en frecuencia cuando se trabaja en el dominio de la transformada de Fourier de I [8].

El filtrado en frecuencia está fundamentado por el teorema de convolución. La convolución entre dos imágenes en el dominio de frecuencias es una multiplicación punto a punto de matrices o *producto Hadamard*. De esto, el filtrado en frecuencia de una imagen $I[n_1, n_2]$ se define como $W[k_1, k_2] \odot |I_F[k_1, k_2]|$, donde $I_F[k_1, k_2]$ es la transformada rápida de Fourier de I , $W[k_1, k_2]$ es el

filtro a utilizar y el símbolo \odot denota la multiplicación punto a punto.

La imagen filtrada, se obtiene tomando la transformada inversa rápida de Fourier, es decir,

$$\hat{I}[n_1, n_2] = \mathcal{F}_F^{-1} \left\{ \hat{\mathcal{F}}_F[I[n_1, n_2]] \right\}, \quad (2)$$

donde $\hat{\mathcal{F}}_F[I[n_1, n_2]]$ es la imagen resultante de aplicar el filtro W en el dominio de frecuencias.

En el área de reconocimiento de patrones en imágenes digitales, no siempre es necesario obtener la imagen $\hat{I}[n_1, n_2]$ de la ecuación (2), basta con trabajar con el módulo de la transformada de Fourier de $\hat{\mathcal{F}}_F[I[n_1, n_2]]$ (también conocido como espectro de amplitud de Fourier) para obtener la clasificación o identificación.

3 Transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert de una función $f(x)$ de variable real se define como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[f(x)] &= f(x) * \frac{1}{\pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s} ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Como el integrando de (3) tiene una singularidad en $s = x$, se toma el valor principal de Cauchy, denotado por P , mediante el cual se permite asignar valores a integrales impropias. Para esta ecuación integral, el valor principal de Cauchy se representa por

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s} ds = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{f(s)}{x-s} ds + \int_{x+\epsilon}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s} ds \right]. \quad (4)$$

La ecuación 3 surge de considerar una función $f(z) = u(x, 0) + iv(x, 0)$ analítica en la mitad superior del plano complejo que además tiende a cero en el infinito. Con esto, se llega a lo siguiente:

$$u(x_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x_0 - x} dx, \quad (5)$$

y

$$v(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x_0 - x} dx. \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6), indican que conociendo únicamente la parte real de una función analítica f sobre la recta real, es posible encontrar su armónica conjugada y viceversa. Véase [9].

En la mayoría de las aplicaciones, la transformada de Hilbert se aplica en el espacio de frecuencias. De la ecuación (3) y por el teorema de convolución,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} &= \mathcal{F}\left[f(x) * \frac{1}{\pi x}\right] \\ &= \mathcal{F}[f(x)] \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi x}\right]. \end{aligned} \quad (7)$$

La transformada de Fourier de la función sgn (la función signo) es $\mathcal{F}[sgn(x)] = -\frac{i}{\pi\nu}$, y por la propiedad de simetría de la transformada de Fourier se tiene que $\mathcal{F}\left[-\frac{i}{\pi x}\right] = sgn(-\nu)$. Además, como el operador \mathcal{F} es lineal, se llega a

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi x}\right] = -i sgn(\nu) \quad (8)$$

De esto, la transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de una función $f(x)$ se expresa como

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} = -i sgn(\nu) F(\nu), \quad (9)$$

donde $F(\nu)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$.

Al expresar $F(\nu)$ en términos de su amplitud y fase, la ecuación (9) se escribe como

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} = -i sgn(\nu) |F(\nu)| e^{i\theta}. \quad (10)$$

Si $\nu < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} &= i |F(\nu)| e^{i\theta} \\ &= e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} |F(\nu)|. \end{aligned} \quad (11)$$

Y si $\nu > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} &= -i |F(\nu)| e^{i\theta} \\ &= e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} |F(\nu)|. \end{aligned} \quad (12)$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de $\mathcal{H}[f(x)]$ se interpreta como la transformada de Fourier de la función $f(x)$ con su espectro fase de Fourier rotado $\pm\frac{\pi}{2}$.

La transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de una función de dos variables, $f(x_1, x_2)$, es:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x_1, x_2)]\} = -\text{sgn}(\nu_1)\text{sgn}(\nu_2)F(\nu_1, \nu_2). \quad (13)$$

En el área de procesamiento de señales, para el caso de señales con una sola variable independiente, la transformada de Hilbert tiene diversas aplicaciones, las cuales se basan principalmente en la construcción de una señal compleja denominada *señal analítica*.

A partir de una señal real $u(x)$, es posible construir una señal compleja $f(x)$, con el fin de extraer ciertas características de $u(x)$, como la amplitud local y la fase local. En 1946, Gabor propuso utilizar la transformada de Hilbert de $u(x)$ para construir dicha señal compleja [7], llamándola señal analítica:

$$f(x) = u(x) + i\mathcal{H}[u(x)]. \quad (14)$$

Al representar una señal analítica $f(x)$ en forma polar,

$$f(x) = A(x)e^{i\theta(x)}, \quad (15)$$

se obtiene la amplitud local $A(x)$ y la fase local $\theta(x)$ de la señal $u(x)$, donde

$$A(x) = \sqrt{u(x)^2 + \mathcal{H}[u(x)]^2}, \quad \theta(x) = \arctan \frac{\mathcal{H}[u(x)]}{u(x)}. \quad (16)$$

La transformada de Fourier de una señal analítica $f(x) = u(x) + i\mathcal{H}[u(x)]$, está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)] &= \mathcal{F}\{u(x) + i\mathcal{H}[u(x)]\} \\ &= U(\nu) + i[-i\text{sgn}(\nu)U(\nu)] \\ &= U(\nu)[1 + \text{sgn}(\nu)], \end{aligned} \quad (17)$$

donde $U(\nu)$ es la transformada de Fourier de la señal u . De la ecuación (17), se obtiene que

$$F(\nu) = \begin{cases} 2U(\nu), & \text{si } \nu > 0, \\ U(0), & \text{si } \nu = 0, \\ 0, & \text{si } \nu < 0. \end{cases} \quad (18)$$

La definición de la transformada de Hilbert de una función, se puede generalizar directamente al caso de varias variables, sin embargo, con esta generalización no es posible construir una señal compleja de dos variables que tenga las mismas características que la señal analítica. Pese a esto, en los trabajos de Felsberg y Sommer [6], Larkin y colaboradores [10] y Lorenzo [11], por mencionar algunos, se presentan diferentes propuestas de construcción de una señal bidimensional compleja para obtener características como la amplitud y la fase local de una señal, o bien, para demodular señales bidimensionales.

Aunque las principales aplicaciones de la transformada de Hilbert en dimensión uno se basan en la construcción de la señal analítica a partir de una señal real, también se puede utilizar para la detección de bordes de señales. Es natural intentar sacar provecho de estas propiedades o atributos que cumple la transformada de Hilbert en dimensión uno para funciones de dos variables, pero en general, no se obtienen resultados análogos.

Se han propuesto diferentes transformadas para extender a dimensión dos las principales aplicaciones de la transformada de Hilbert. En algunos casos, se utiliza la transformada de Hilbert unidimensional para detectar bordes de alguna función $f(x_1, x_2)$ en dos direcciones, es decir, calcular $\mathcal{H}[f(x_1)]$ y $\mathcal{H}[f(x_2)]$; sin embargo, sólo funciona para detectar bordes en esas direcciones.

Davis y colaboradores [5], definen una transformada de Hilbert que permite el realce o la detección de bordes para funciones o señales bidimensionales sin las limitaciones antes mencionadas, la cual denominan *transformada de Hilbert radial*. La idea de esta propuesta, es utilizar la función $e^{iP\theta}$ en lugar de $\text{sgn}(\nu_1)\text{sgn}(\nu_2)$ en la ecuación (13), lo que da lugar a la definición de la transformada radial de Hilbert:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}_R[f(x_1, x_2)]\} = e^{iP\theta}F(\nu_1, \nu_2), \quad (19)$$

donde $\theta = \arccos\left(\frac{\nu_1}{r}\right)$ con $r = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ para $(\nu_1, \nu_2) \neq (0, 0)$ y $\theta = 0$ en el origen, $F(\nu_1, \nu_2)$ es la transformada de Fourier de la función f y P es cualquier número entero.

Pei y Ding [13], proponen una generalización de la transformada de Hilbert radial dada por Davis y colaboradores [5], la cual denominan *transformada de Hilbert radial generalizada* y la definen por

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{H}_{RG}[f(x_1, x_2)] \} = \Phi(\theta) F(\nu_1, \nu_2), \quad (20)$$

donde $\Phi(\theta)$ es cualquier función. En el caso particular en que $\Phi(\theta) = e^{iP\theta}$ con $\theta = \arccos\left(\frac{\nu_1}{r}\right)$ y $r = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$, se obtiene la ecuación (19).

Para una función discreta $f[n_1, n_2]$ donde $n_1 = 0, 1, \dots, M - 1$ y $n_2 = 0, 1, \dots, N - 1$, la ecuación (20) se modifica a

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{H}_{RGd}[f[n_1, n_2]] \} = \Phi[\theta] F[k_1, k_2], \quad (21)$$

donde $F[k_1, k_2]$ representa la transformada discreta de Fourier de $f[n_1, n_2]$, con $k_1 = 0, 1, \dots, M - 1$ y $k_2 = 0, 1, \dots, N - 1$.

4 Sistema de reconocimiento de patrones invariante por posición y rotación

Como ya se mencionó, al trabajar con el espectro de amplitud de Fourier de las imágenes digitales, se obtiene directamente un sistema de reconocimiento de patrones que es invariante por posición. El invariante por rotación no es directo, para lograrlo se construyeron máscaras binarias de anillos concéntricos, con las cuales se calculan firmas unidimensionales que son invariantes por traslación y rotación.

Partiendo de la versión discreta de la transformada de Hilbert radial generalizada (20), se propone que

$$\Phi[\theta] = e^{ir\theta}, \quad (22)$$

con $\theta = \cos\left(\frac{k_1}{r}\right)$ y $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ para $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$, y $\theta = 0$ en $(k_1, k_2) = (0, 0)$, donde k_1 y k_2 representan las variables discretas en el plano de frecuencias. Como la función $\Phi[\theta]$ toma valores complejos en el espacio de frecuencias, se puede expresar como una función $H[k_1, k_2] = \text{Re}[H] + i\text{Im}[H]$. Las funciones $\text{Re}[H]$ e $\text{Im}[H]$, correspondientes a la parte real e imaginaria de $H[k_1, k_2]$, se muestran en la figura 2 vistas sobre el plano (k_1, k_2) , las cuales se pueden representar como imágenes digitales en escala de grises.

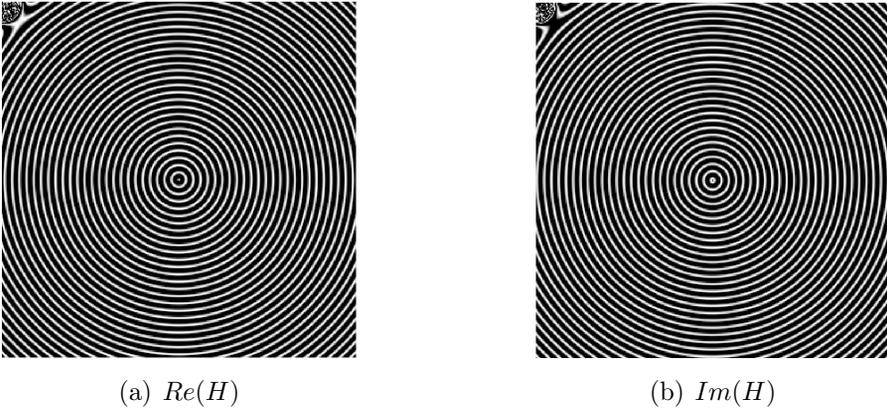


Figura 2: Parte real y parte imaginaria de $H[k_1, k_2]$.

Al filtrar en frecuencia las imágenes $Re(H)$ e $Im(H)$ con un disco binario D , se generan las máscaras H_R y H_I (Figura 3), es decir,

$$\begin{aligned} H_R &= Re(H) \odot D, \\ H_I &= Im(H) \odot D. \end{aligned} \tag{23}$$

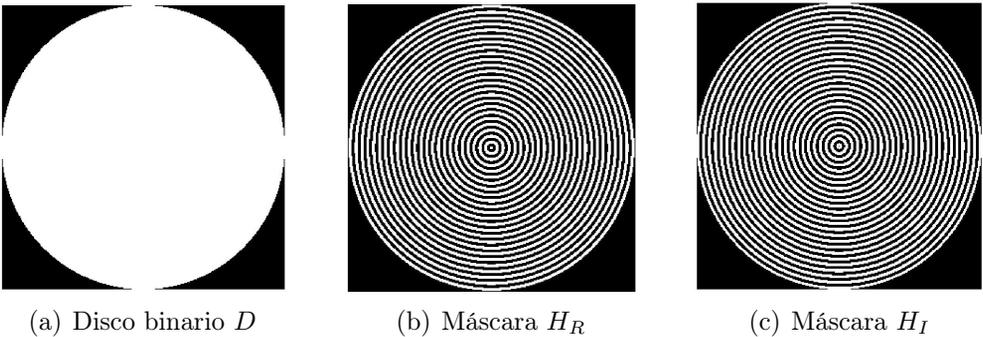


Figura 3: Máscaras de Hilbert

Para obtener las firmas invariantes por traslación y rotación, se filtra el módulo de la transformada rápida de Fourier de la imagen con las máscaras H_R y H_I . En la Figura 4, se muestra un ejemplo de dicho proceso.

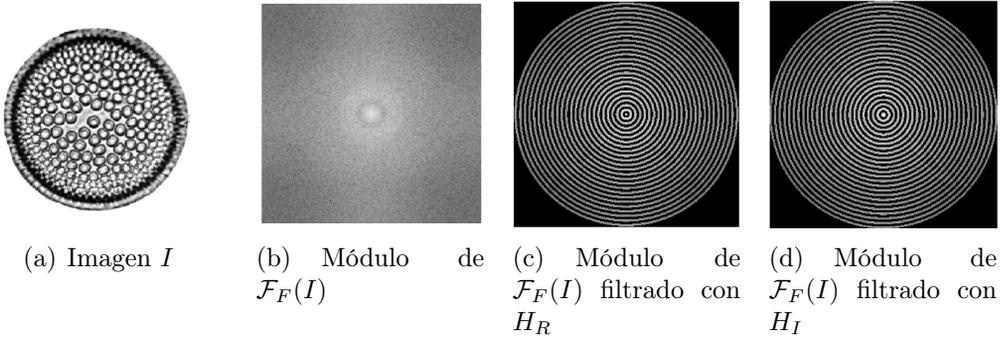


Figura 4: Filtros H_R y H_I actuando sobre el espectro de amplitud de Fourier de la imagen. Por cuestiones de visualización, las imágenes de los espectros de amplitud se muestran bajo una transformación logarítmica.

En la Figura 4 se observa que el resultado de filtrar $|\mathcal{F}_F[I]|$ con H_R y H_I , genera en ambos casos una imagen con anillos de color negro (que representa al valor de intensidad 0) y anillos de distintos tonos de grises (valores de intensidad diferentes de cero).

Para cada imagen se obtienen dos arreglos de números f_R y f_I , denominados *firmas de la imagen*. La primera se determina a partir del espectro de amplitud de Fourier de la imagen filtrada por H_R , y la otra utilizando el filtro H_I .

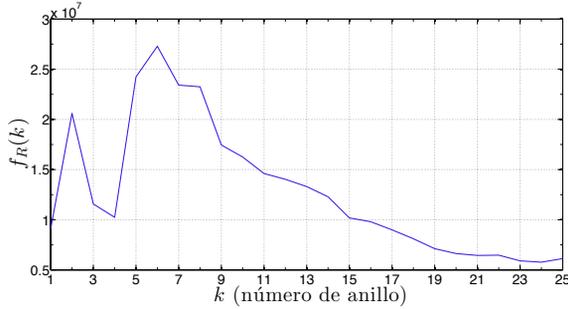
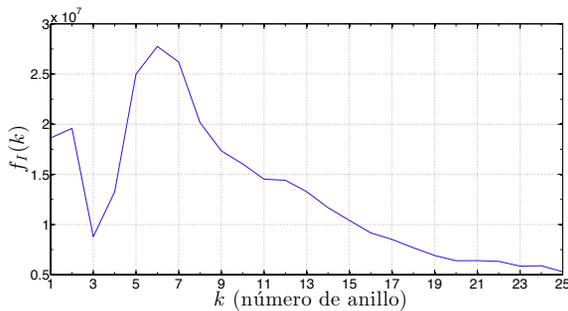
Para una imagen dada I , la firma f_R es

$$f_R = [s_1, s_2, \dots, s_N], \tag{24}$$

donde s_k es la suma de las intensidades de los píxeles del k -ésimo anillo (sin considerar los anillos en negro y numerados en orden ascendente del centro hacia afuera) en la imagen $|\mathcal{F}_F[I]| \odot H_R$, y N es el número de dichos anillos en la imagen (Figura 4). Análogamente, se determinó la firma

$$f_I = [\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_M], \tag{25}$$

correspondiente a la imagen $|\mathcal{F}_F[I]| \odot H_I$. En la Figura 5, se muestran las firmas de la imagen (a) de la Figura 4.

(a) Firma f_R (b) Firma f_I Figura 5: Firmas correspondientes a la imagen I de la figura 4 a).

5 Plano de clasificación y nivel de confianza del sistema de reconocimiento de patrones

El sistema de reconocimiento de patrones se tiene que entrenar con una base de datos de imágenes de referencia. En la Figura 6, se muestra una base de datos formada por imágenes digitales en escala de grises de fósiles de diatomeas. Las diatomeas son una de las fuentes básicas para la formación de materia orgánica en el océano y participan activamente en la sedimentación. La presencia de diatomeas en paleoambientes marinos ha sido utilizada para el estudio de cambios climáticos y de procesos geomorfológicos [2].

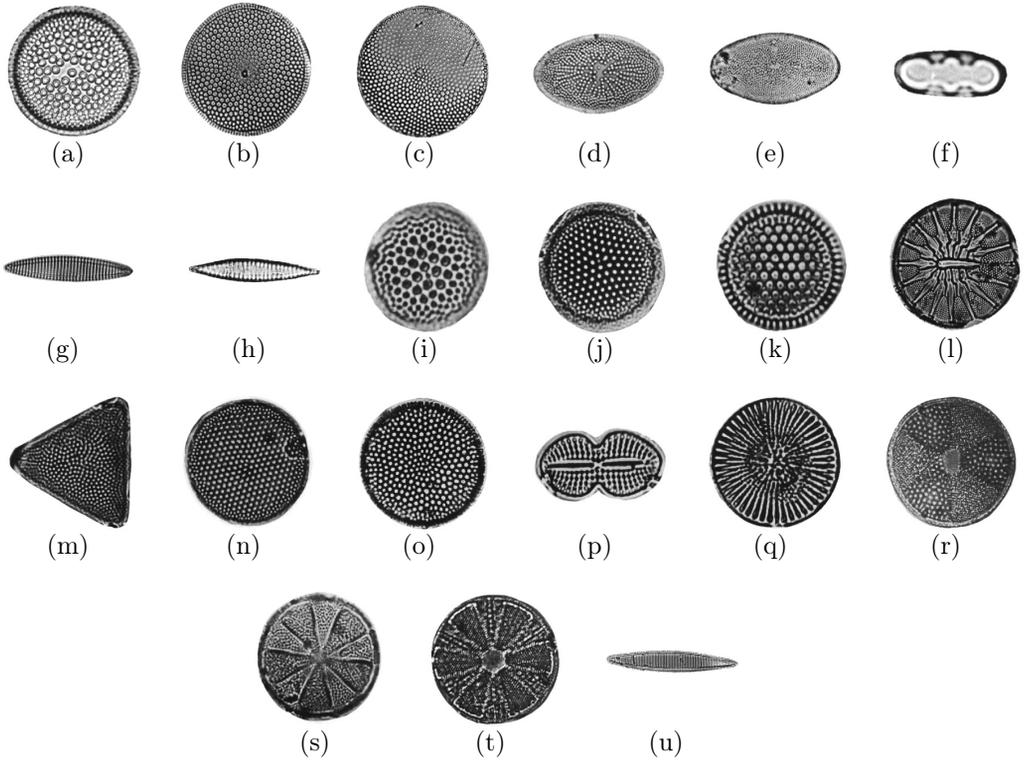


Figura 6: Base de datos de imágenes de referencia: fósiles de diatomeas. (a) A: *Actinocyclus ingens* - Rattray. (b) B: *Azpeitia* sp. (c) C: *Azpeitia nodulifera* - (Schmidth) Fryxell et Sims. (d) D: *Actinocyclus ellipticus* - Grunow in van Heurck. (e) E: *Actinocyclus ellipticus* var *moronensis* - (Deby ex Rattray) Kolbe. (f) F: *Denticulopsis praedimorpha* - Barron ex Akiba. (g) G: *Nitzschia praereinholdii* - Schrader. (h) H: *Bogorovia praepaleacea* - (Schrader) Jouse. (i) I: *Thalassiosira oestruppii* var 1. (j) J: *Thalassiosira oestruppii* var 2. (k) K: *Thalassiosira domifactoria* - (Hendey) Jouse. (l) L: *Asteromphalus imbricatus* - Wallich. (m) M: *Pseudotriceratium cinnamomeum* - (Greville) Grunow. (n) N: *Thalassiosira kozlovii* - Makarova. (o) O: *Coscinodiscus radiatus* - Ehrenberg. (p) P: *Diploneis bombus* - Cleve-Euler in Backman et Cleve-Euler. (q) Q: *Stephanodiscus* sp. (r) R: *Actinopterychus undulatus* - (Bailey) Ralf. (s) S: *Actinopterychus bipunctatus* - Lohman. (t) T: *Actinopterychus splendens* - (Shadbolt) Ralf ex Pritchard. (u) U: *Nitzschia reinholdii* - Kanaya emend Barron & Baldauf.

Para entrenar al sistema, cada imagen de la Figura 6 se rotó un ángulo $\Delta\theta k$, con $k = 0, 1, \dots, 359$ y $\Delta\theta = 1^\circ$; por lo que, para cada imagen de referencia se tienen 360 imágenes. Por ejemplo, de la diatomea A se obtuvo el conjunto de imágenes $\{A_0, A_1, A_2, \dots, A_{359}\}$, donde la imagen A_k corresponde a la diatomea A rotada k grados, con $k = 0, 1, \dots, 359$. De esta forma, la base de datos de imágenes de entrenamiento tiene 7560 elementos.

Posteriormente, se calculan las firmas de cada imagen de entrenamiento mediante el procedimiento descrito en la sección 3.2. Por ejemplo, para la diatomea A , se obtuvieron los dos conjuntos de firmas

$$\{f_R^{A_k} | k = 0, 1, \dots, 359\} \quad (26)$$

y

$$\{f_I^{A_k} | k = 0, 1, \dots, 359\}. \quad (27)$$

Para cada firma $f_R^{A_k}$ del conjunto (26) se calculó el escalar real $P_R^{A_k}$, denominado *potencia de la firma* $f_R^{A_k}$, a partir de la ecuación

$$P_R^{A_k} = \frac{\sum_{n=1}^N [f_R^{A_k}(n)]^2}{N}, \quad (28)$$

donde N es el tamaño de la firma, lo que dio lugar al conjunto

$$P_R^A = \{P_R^{A_k} | k = 0, 1, \dots, 359\}. \quad (29)$$

Análogamente, a partir del conjunto (27) se determinó el conjunto

$$P_I^A = \{P_I^{A_k} | k = 0, 1, \dots, 359\}. \quad (30)$$

Entonces, a cada imagen A_k le corresponden dos números reales: $P_R^{A_k}$ y $P_I^{A_k}$, $k = 0, 1, \dots, 359$.

La media muestral de los conjuntos P_R^A y P_I^A , está dada por

$$\bar{X}_{P_R^A} = \frac{\sum_{k=0}^{359} P_R^{A_k}}{360}, \quad \bar{X}_{P_I^A} = \frac{\sum_{k=0}^{359} P_I^{A_k}}{360}, \quad (31)$$

y la desviación estándar de cada media por

$$\sigma_{P_R^A} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{359} (P_R^{A_k} - \bar{X}_{P_R^A})^2}{n-1}}, \quad \sigma_{P_I^A} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{359} (P_I^{A_k} - \bar{X}_{P_I^A})^2}{n-1}}. \quad (32)$$

El teorema del límite central afirma que, si de una población con una distribución cualquiera con media μ y desviación estándar σ se extraen muestras aleatorias de n observaciones, entonces, cuando n es suficientemente grande, la distribución muestral de las medias muestrales \bar{X} se distribuye de manera aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar $EE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, conocida como error estándar [12].

Para el ejemplo de la diatomea A , de una muestra de 360 imágenes se calcularon los estimadores $P_R^{A_k}$, $k = 0, 1, \dots, 359$. Por el teorema del límite central, al ser considerablemente grande la muestra, las potencias $P_R^{A_k}$ tienen una distribución normal. Además $\bar{X}_{P_R^A}$ tiende a $\mu_{P_R^A}$ y $EE_{P_R^A} = \sigma_{P_R^A}/\sqrt{360}$, donde $\mu_{P_R^A}$ es la media poblacional. Análogamente, lo anterior se cumple para las potencias $P_I^{A_k}$.

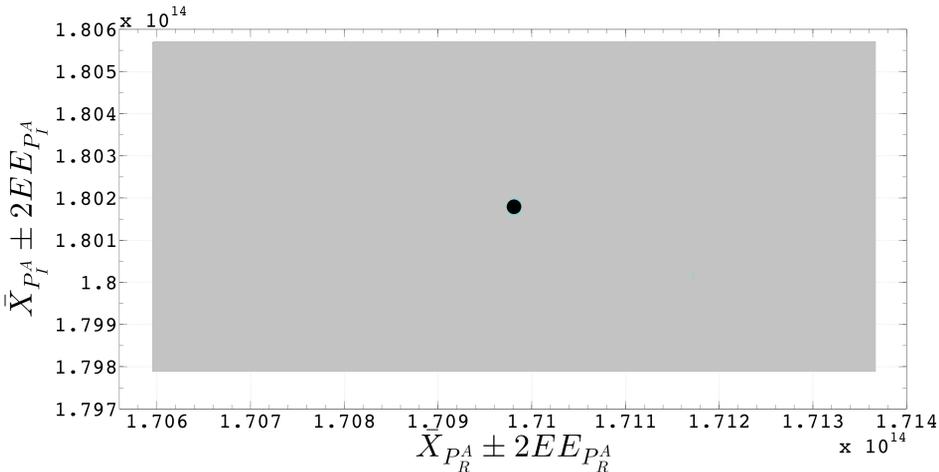


Figura 7: Rectángulo de confianza del 95.4% en color gris y el punto negro indica la coordenada $(\bar{X}_{P_R^A}, \bar{X}_{P_I^A})$.

Como las potencias de las firmas obtenidas a partir de la imagen A tienen una distribución normal, se pueden generar intervalos de confianza. Siguiendo la metodología de las gráficas de los diagramas de cajas, se construyeron los intervalos de confianza del 95.4% para cada uno de los dos conjuntos de las potencias de las firmas y, a partir de ahí, se construyó el rectángulo de confianza del 95.4% graficando los valores $\bar{X}_{P_R^A} \pm 2EE_{P_R^A}$ en el eje horizontal y $\bar{X}_{P_I^A} \pm 2EE_{P_I^A}$ en el eje vertical, que se muestra en color gris en la Figura 7. En la misma gráfica, la coordenada de las medias muestrales $(\bar{X}_{P_R^A}, \bar{X}_{P_I^A})$ se indica en negro.

Siguiendo un procedimiento análogo para cada imagen digital en la base de datos de imágenes de referencia, se construyen los rectángulos de confianza para generar el plano de clasificación. En la Figura 8 se muestra el plano de clasificación para las imágenes en escala de grises de fósiles de diatomeas de la Figura 6.

Para que se observe con claridad que el sistema de reconocimiento de patrones clasifica eficientemente cada una de las imágenes problema, se presentan dos ampliificaciones en las Figura 9 y Figura 10, donde se observa que ninguno de los rectángulos se traslapa. Logrando de esa manera el objetivo de tener un único plano de clasificación y así reducir el tiempo de cómputo al momento de indentificar a los objetos en las imágenes digitales.

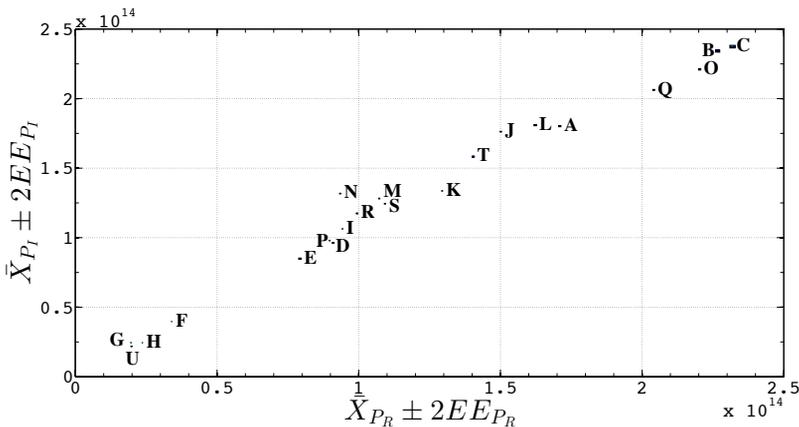


Figura 8: Plano de clasificación de las imágenes de la Figura 6.

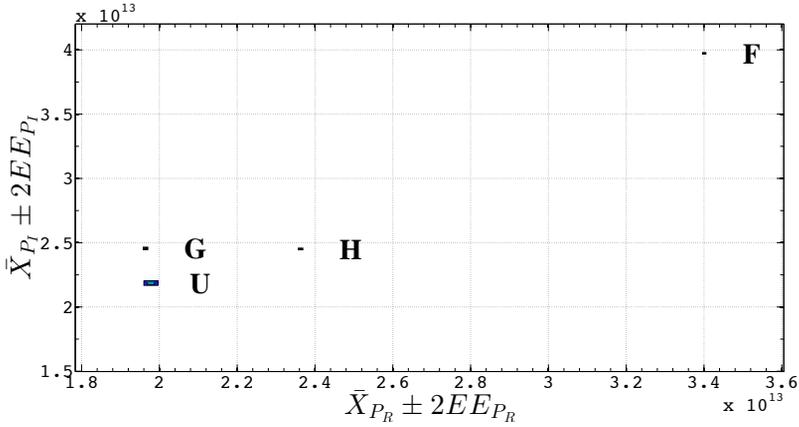


Figura 9: Amplificación de la Figura 8 correspondientes a los rectángulos de confianza de diatomeas G , U , H y F .

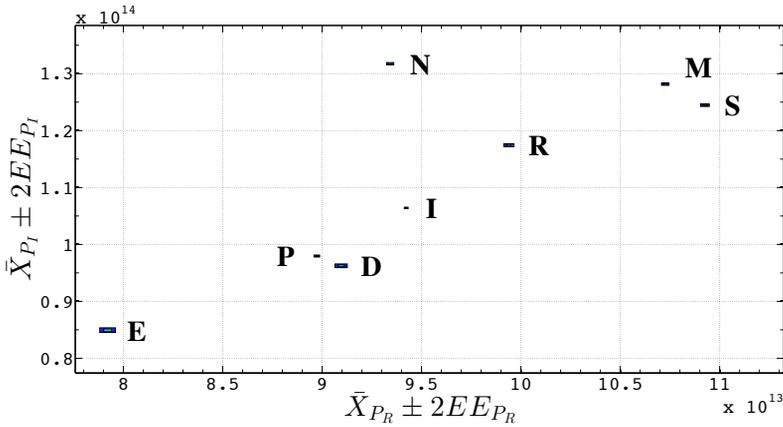


Figura 10: Amplificación de la Figura 8 correspondientes a los rectángulos de confianza de diatomeas E , P , D , I , N , R , M y S .

En el reconocimiento de patrones en imágenes digitales, el tiempo de cómputo es un factor determinante, debido a la gran cantidad de imáge-

nes que se manejan. Solorza y Álvarez-Borrego [14], proponen las máscaras binarias de anillos concéntricos denominadas *máscaras Fourier* (M_R) y *máscaras Bessel* (B_P), las cuales son generadas en un tiempo mayor al utilizado para generar las máscaras de Hilbert H_R y H_I . En la tabla 1, se muestra la comparación del tiempo promedio en que se genera H_R , M_R y B_P , obtenido a partir de una muestra de 50 elementos para cada caso. La máquina utilizada para este análisis es una: iMac con procesador 2.4 GHz Intel Core 2 Duo, memoria 2 GB 667 MHz DDR2 SDRAM.

Tabla 1: Tiempo de cómputo promedio.

Máscara	Tiempo (segundos)
H_R	0.0206242682705
M_R	0.5236733341570
B_P	0.1167171006915

6 Conclusiones

A partir de la teoría y del estudio de las aplicaciones de la transformada de Hilbert se logró proponer un par de máscaras binarias de anillos concéntricos (*máscaras de Hilbert*), mediante las cuales se obtienen firmas unidimensionales invariantes por translación y rotación para una imagen dada. Además, a partir de la potencia de las firmas obtenidas se pudo construir un único plano de clasificación, a diferencia de los múltiples planos de clasificación empleados en los sistemas de reconocimiento de patrones por correlación.

Por otra parte, el tiempo promedio en que se generan las máscaras de Hilbert es considerablemente menor al tiempo en que se generan las máscaras binarias de anillos Bessel y Fourier, reduciéndose así considerablemente el tiempo de cómputo empleado por el sistema para clasificar imágenes digitales. De esto, la implementación de las máscaras de Hilbert se puede catalogar como parte del desarrollo de una nueva técnica más eficiente para obtener la invarianza por rotación en un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales.

El sistema de reconocimiento de patrones implementado permite reconocer y clasificar los distintos tipos de fósiles de diatomeas de la base de datos con

la que se trabajó. De la misma forma, es posible obtener resultados análogos para el reconocimiento de distintos objetos capturados en imágenes digitales a escala de grises, sin importar la posición y la orientación de estos.

Agradecimientos

Al CONACYT por su apoyo al proyecto *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales mediante máscaras binarias de anillos concéntricos y firmas unidimensionales invariantes por posición, rotación y escalamiento* (No. 169174). A los árbitros que revisaron este trabajo.

Bibliografía

- [1] Alcaraz D., *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales usando máscaras de Hilbert binarias de anillos concéntricos*. Tesis de licenciatura, UABC, 2015.
- [2] Álvarez J., Solorza, S., *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales de fósiles de diatomeas*. Notas de clase.
- [3] Bracewell, R., *Fourier Analysis and Imaging*. Springer, 2003.
- [4] Cooley, J.W., Tukey, J.W., *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*. *Mathematics of Computation* **19** (1965), 297–301.
- [5] Davis, J.A., McNamara, D.E., Cottrell, D.M., *Image processing with the radial Hilbert transform: theory and experiments*. *Optics Letters* **25** (2000), 99–101 .
- [6] Felsberg, M., Sommer, G., *The Monogenic Signal*. *IEEE Transactions on Signal Processing* **49** (2001), 3136–3144.
- [7] Gabor, D., *Theory of communication*. *Journal of the Institute of Electrical Engineers* **93** (1946), 429–457.
- [8] González, R.C., Woods, R.E., Eddins, S.L., *Digital Image Processing using MATLAB*. 2da. ed. Tata McGraw-Hill, 2010.

- [9] King, F.W., *Hilbert Transforms. Volumen 1*. Cambridge University Press, 2009.
- [10] Larkin, K.G., Bone, D.J., Oldfield, M.A., *Natural demodulation of two-dimensional fringe patterns. I. General background of the spiral phase quadrature transform*. J. Opt. Soc. Am. A. **18** (2001), 1862–1870.
- [11] Lorenzo, J.V., *An Approach to the 2D Hilbert Transform for Image Processing Applications*. Image Analysis and Recognition, 4th International Conference, ICIAR. Springer, pp. 157–165, 2007.
- [12] Mendenhall, W., Beaver, R.J., *Introducción a la probabilidad y estadística*, Thomson, 2008.
- [13] Pei, S.C., Ding, J.J., *The generalized Radial Hilbert Transform and its applications to 2-D edge detection (any direction or specified directions)*. Acoustics, Speech, and Signal Processing **3** (2003), 357–360.
- [14] Solorza, S., Álvarez, J., *Position and rotation-invariant pattern recognition system by binary masks*. Journal of Modern Optics **62** (2015).
- [15] Shih, F.Y., *Image Processing and Pattern Recognition. Fundamentals and Techniques*. Wiley, 2010.

Facultad de Ciencias, UBAC

Carretera Transpeninsular Ensenada - Tijuana No. 3917, Colonia Playitas,
Ensenada, B.C. C.P

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

diegoalcaraz2@gmail.com

selene.solorza@uabc.edu.mx

Educación matemática

Capítulo 3

Comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas

América Guadalupe Analco Panohaya
Lidia Aurora Hernández Rebollar
FCFM, BUAP

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar algunos aspectos de la comprensión del concepto de límite de una función en una variable de un grupo de estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. La evaluación se fundamentó en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) ya que permite identificar las estructuras y los mecanismos mentales relacionados con este concepto. Los aspectos que se evaluaron están relacionados con la idea de aproximación infinita y con la métrica. En las conclusiones se reportan las estructuras mentales que lograron construir los participantes después de haber estudiado el tema del límite funcional en un curso regular de Cálculo Diferencial. También se comparan los resultados con los que se reportaron en la literatura que sirvió como antecedente.

1 Introducción

El cálculo diferencial es una materia que está presente en los programas de diferentes carreras, como por ejemplo, ingenierías, computación, actuaría y física, y por supuesto, en la de matemáticas. Un rasgo característico de esta materia es el alto nivel de abstracción, lo cual provoca serias dificultades entre los estudiantes. “En la actualidad existe una tendencia a la enseñanza del cálculo basada en un enfoque algorítmico y algebraico” [6], la cual podría estar provocando una comprensión limitada de los conceptos. Sin embargo, en las

carreras de ciencias exactas como matemáticas, física y actuaría, donde también los índices de reprobación son altos, se privilegia el razonamiento formal mediante el formato “definición, teorema, demostración”. En particular, en este trabajo se decidió investigar sobre ciertos aspectos de la comprensión del concepto de límite funcional que lograron un grupo de estudiantes de ciencias exactas, después de que haber estudiado este tema en un curso de Cálculo Diferencial. Para evaluar la comprensión se eligió una teoría constructivista denominada APOE, nombrada así por las siglas de las estructuras mentales Acción, Proceso, Objeto y Esquema en las cuales descansan sus postulados.

En este trabajo se reporta cómo los participantes construyeron el límite funcional (en una variable) en aspectos relacionados con las concepciones dinámica y métrica. En la primera concepción, el límite se entiende como el número al que se aproximan los valores de la función cuando esta se evalúa en elementos del dominio suficientemente cercanos a un cierto valor dado. Mientras que en la segunda, el límite de la función se concibe como el número que satisface la definición de Weierstrass, conocida también como épsilon-delta. De acuerdo a la teoría APOE, el estudiante debe construir la concepción dinámica y utilizarla para construir la concepción métrica [3]. Sin embargo, la experiencia de las autoras de este trabajo nos dice que, en los cursos formales, la enseñanza del límite funcional parte de la definición épsilon-delta y no se trabaja explícitamente con la idea de aproximación o concepción dinámica.

2 MARCO TEÓRICO

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) tiene como objetivo entender cómo se aprenden los conceptos matemáticos. Su origen está en el trabajo de Jean Piaget y fue creada por Dubinsky en la década de los 80; es una teoría constructivista.

La teoría nació cuando Dubinsky reflexionó sobre la aplicación de la abstracción reflexiva de Piaget en las matemáticas de la educación superior, pero, ¿qué es la abstracción reflexiva? La respuesta de Piaget consta de dos partes, la primera parte implica reflexión en el sentido de conciencia y pensamiento contemplativo sobre lo que Piaget llamó contenido y operaciones sobre ese contenido, y en el sentido de reflexionar sobre el contenido y de realizar operaciones de un nivel cognitivo inferior a uno superior (es decir, de procesos a objetos). La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del

contenido y las operaciones. En esta etapa superior resulta que las operaciones se pueden convertir en contenido al cual le pueden aplicar nuevas operaciones, véase [1]. Esto condujo a Dubinsky a considerar que la abstracción reflexiva es una herramienta sólida para describir el desarrollo mental de los conceptos matemáticos avanzados.

Dubinsky interpreta que el desarrollo cognitivo empieza con acciones, que son interiorizadas en procesos y luego se encapsulan en objetos a los que se pueden aplicar nuevas acciones, todo ello forma un esquema; pareciera que la propuesta progresiva en la teoría es de la forma $A \rightarrow P \rightarrow O \rightarrow E$. Sin embargo, aunque se presente en esta forma lineal, el desarrollo no siempre procede así, más bien, un individuo puede avanzar de una etapa a otra pero luego retroceder para continuar con el desarrollo de sus estructuras.

Dubinsky considera cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales (Interiorización, coordinación, encapsulación-desencapsulación, inversión y generalización) que conducen a la construcción de las estructuras mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas). La figura (1) ilustra la relación entre las estructuras y los mecanismos. A continuación presentamos una descripción de los mecanismos mentales:

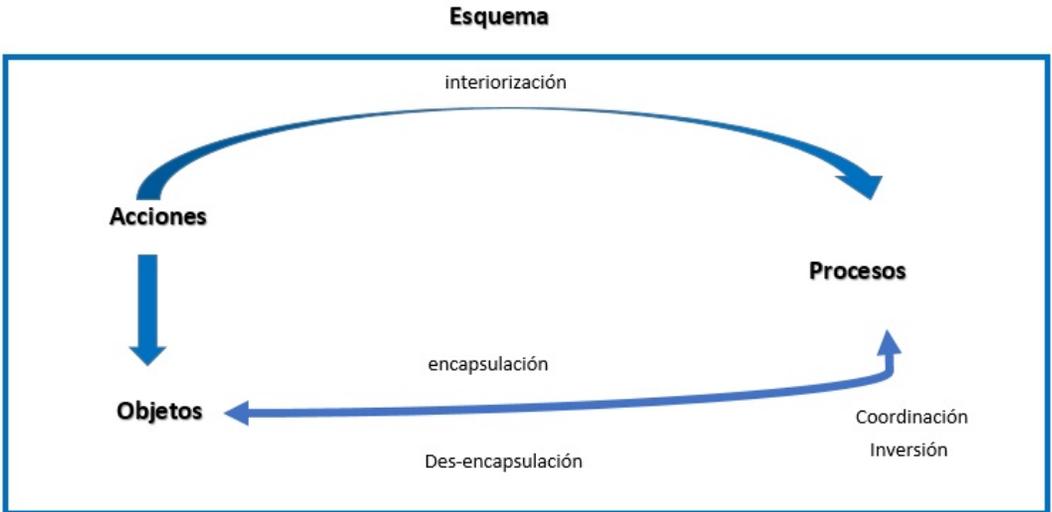


Figura 1: Teoría APOE [1]

Interiorización: Se puede considerar como la transferencia de una acti-

tividad específica del mundo externo al mundo interno del individuo. En otras palabras, ocurre cuando el individuo pasa de tener ayudas externas a tener un control interno de la actividad.

Coordinación: La coordinación consistente en tomar dos o más procesos para construir un nuevo proceso. Este nuevo proceso puede ser encapsulado como un objeto.

Encapsulación: Este mecanismo entra en acción cuando el individuo ve al proceso como una totalidad, percibe las transformaciones que pueden actuar sobre esa totalidad y realmente puede construir tales transformaciones (explícitamente o en su imaginación), entonces decimos que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo.

Desencapsulación: Una vez que el individuo ha encapsulado un proceso en un objeto, este puede ser desencapsulado para regresar al proceso que lo generó, en otras palabras, reinvertir el mecanismo.

Inversión: Cuando el proceso existe internamente, el individuo es capaz de pensarlo de forma inversa (en el sentido de deshacerlo), creando así un nuevo proceso inverso al proceso inicial.

Generalización: Se relaciona con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, se caracteriza por determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero los objetos pueden ser asimilados por un esquema en otro contexto.

A continuación presentamos una descripción específica de las estructuras mentales:

Acción: Una acción es cualquier transformación física o mental para obtener otros objetos. Puede ser una respuesta de un solo paso, como un reflejo físico, o el acto de recordar algún hecho de memoria. También puede ser respuesta a varios pasos, pero se caracteriza porque van seguidos unos de otros.

Un ejemplo de la concepción acción es resolver una ecuación imitando los pasos de una ecuación que se resolvió previamente.

Proceso: Es la estructura mental en la cual se realiza la misma operación que la acción sólo que totalmente en la mente del individuo, permitiendo que sea capaz de imaginar la realización de la transformación sin tener que realizar cada paso de manera explícita. Puede realizar la transformación sin la necesidad de llevar a cabo cada paso. Un proceso puede ser revertido o puede ser coordinado con otros procesos.

Retomando el ejemplo anterior de acción, una concepción de proceso sería

resolver la ecuación sin imitar el método para solucionar una ecuación similar.

Objeto: Cuando el individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo y puede identificar las transformaciones, además de construirlas (acciones o procesos) diremos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto y que el individuo posee una concepción objeto del concepto.

Un ejemplo de la concepción objeto es cuando el individuo puede tomar dos o más funciones y componerlas obteniendo así una nueva función.

Esquema: Un esquema se entiende como una colección coherente de las estructuras de acción, proceso, objeto y otros esquemas y las conexiones que se establecen entre ellas. Además, se caracterizan por su dinamismo, es decir, su reconstrucción continua debido a la actividad matemática del individuo en situaciones específicas.

Un ejemplo de la concepción esquema de espacio vectorial puede incluir n -tuplas y matrices como objetos y funciones como procesos. Todas estas estructuras pueden ser relacionadas por el hecho de que comparten algunas propiedades, como satisfacer un conjunto de Axiomas que definen un espacio vectorial.

La teoría APOE describe la construcción de los conceptos matemáticos del nivel superior mediante un modelo teórico denominado descomposición genética, la cual se basa en la experiencia del investigador sobre la enseñanza del concepto y de la teoría, en los libros de texto y en estudios previos.

Descomposición genética. Es un modelo hipotético que describe las estructuras y los mecanismos mentales que los estudiantes necesitan construir para aprender un concepto matemático específico [1].

A continuación presentamos la descomposición genética que utilizamos para nuestra investigación:

El límite como concepción dinámica.

La concepción dinámica de límite de una función supone construir un proceso en el dominio en el cual x se aproxima a a , construir otro proceso en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a L y utilizar la función para coordinarlos [4].

El límite como concepción métrica.

Hemos considerado como concepción métrica, en términos de desigualdades, aquella que se deriva de la construcción de un proceso en el dominio en el cual $x - a$ en valor absoluto se aproxima a 0, construir otro proceso en el rango en el cual $f(x) - L$ en valor absoluto se aproxima a 0 y coordinarlos [4].

Tabla 1: Descomposición genética del límite [1]

Descomposición genética del concepto de límite	
R1	La Acción de evaluar la función f en un único punto x , considerado cercano, o igual al valor de a
R2	La Acción de evaluar la función f en unos puntos, cada punto sucesivo cercano a a
R3	Construcción de un esquema de un proceso coordinado: <ol style="list-style-type: none"> Interiorización de la acción del paso R2 para construir un proceso dominio en el cual x se aproxima a a. Construcción de un proceso rango en el cual y se aproxima a L Coordinación de a) y b) vía f.
R4	Encapsulación del proceso del paso (R3c) así que el límite se convierte en un objeto al cual las acciones se pueden aplicar.
R5	Reconstrucción del proceso del paso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto es introduciendo estimadores numéricos de las aproximaciones cercanas: $0 < x - a < \delta$ y $0 < f(x) - L < \epsilon$
R6	Aplicación de un esquema de cuantificación de 2 niveles para conectar el proceso descrito en R5, para la definición formal.
R7	Aplicación de una concepción completa $\epsilon - \delta$ para situaciones específicas

La investigación que se apoya en la teoría APOE tiene tres componentes: el análisis teórico, el diseño e implementación de enseñanza y observación, además de la verificación de datos. La figura (2) ilustra como se relacionan las tres componentes del ciclo de investigación.

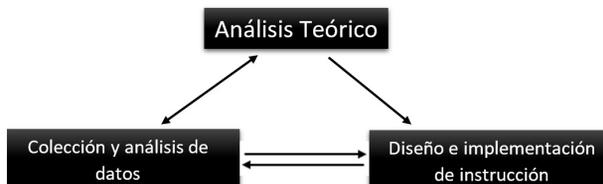


Figura 2: Ciclo de investigación adaptado de [1]

Una explicación detallada de cómo funciona el ciclo de investigación la pueden consultar en [1].

3 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo siguió el ciclo de investigación de la teoría APOE de la siguiente manera: se aplicó un cuestionario el cual se basó en la descomposición genética presentada por Cottrill, véase [1], para recabar datos que ofrecieran evidencias de las construcciones mentales y los mecanismos cognitivos que construyeron los participantes después de haber estudiado el tema.

Los participantes en esta investigación fueron 56 estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas que cursaban la materia de Cálculo Diferencial durante el semestre de primavera 2019, de las carreras de Actuaría, Física Aplicada, Física, Matemáticas y Matemáticas Aplicadas. Además, tenían una semana de haber visto el tema del concepto de límite de una función en un punto.

A estos estudiantes se les aplicaron 6 actividades extraídas de la tesis de Pons, véase [4]; las cuatro primeras actividades tienen la característica de hacer referencia a la concepción dinámica mientras que las otras dos actividades hacen referencia a la concepción métrica del concepto de límite de una función en un punto. Otra característica de las actividades es que utilizan varias funciones representadas en los registros numérico, algebraico y gráfico.

A continuación se presentan las actividades y las estructuras y mecanismos mentales que se pretenden evaluar con ellas:

Actividad 1									
A partir de la siguiente tabla, responde:									
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.0008001	15.008001	15.0801	15.81
a) ¿A qué número se aproxima x ?									
b) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?									
c) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x .									
d) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifique su respuesta									

Tabla 2: Actividad 1

Esta actividad está presentada en el registro numérico, su propósito es hacer evidente las estructuras y los mecanismos mentales correspondientes a los tres primeros pasos de la Descomposición Genética. Es decir, lo que se espera es que:

- a) A partir de observar los valores de la tabla, los estudiantes construyan un Proceso dominio en el cual x se aproxima a 3 (R3a).
- b) A partir de las aproximaciones laterales, los estudiantes construyan un Proceso rango en el cual $f(x)$ se aproxima a 15 (R3b).
- c) Que coordinen el Proceso dominio cuanto x tiende a 3, con el Proceso rango cuando $f(x)$ tiende a 15 (R3c).
- d) Que los estudiantes, a partir de la coordinación de los dos Procesos, mencionen que puede ser 15 el límite de la función cuando x se acerca a 3. Sin embargo, no es posible afirmarlo porque solo se muestra una sucesión de números. Lo que se espera es que ellos perciban el comportamiento de aproximación tanto en el dominio como en el rango (R4).

Actividad 2									
Si $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$									
x	1.9	1.99	1.999	1.9999	...	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$...				
a) Completa la tabla									
b) ¿A qué número se aproxima x ?									
c) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?									
d) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x .									
e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifique su respuesta									

Tabla 3: Actividad 2

Esta actividad está presentada en el registro algebraico-numérico, su propósito es observar las estructuras y mecanismos mentales correspondientes a los tres primeros pasos de la Descomposición Genética cuando los estudiantes responden los incisos correspondientes. Es decir, lo que se espera es que:

- a) Calculen el valor de la función en modo algebraico, es decir, que realicen la acción de evaluar la función f en puntos cercanos a $x = 2$ (R2).
- b) Construyan un Proceso dominio, en el cual x se aproxima a 2 (R3a).
- c) Construyan un Proceso rango, es decir, que observen a qué número se aproximan los valores de $f(x)$ tanto por la derecha como por la izquierda y concluyan que se aproxima a 0.25 (R3b).
- d) Relacionen ambas variables coordinando los dos Procesos rango y dominio (R3c).
- e) A partir de la Coordinación entre los dos Procesos, rango y dominio, mencionen que puede ser 0.25 el límite de la función cuando x se acerca a 2 pero no es posible afirmarlo porque solo se muestra una sucesión de números, sin embargo, se espera que ellos observen el comportamiento de aproximación (R4).

Actividad 3									
A partir de la siguiente tabla, responde:									
x	3.99	3.993	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03
a) ¿A qué número se aproxima x ?									
b) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?									
c) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x .									
d) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta									

Tabla 4: Actividad 3

Esta actividad está presentada en el registro numérico y su objetivo es evaluar si los estudiantes:

- a) Construyen un Proceso dominio, en el cual x se aproxima a 4 (R3a).
- b) Construyen un Proceso rango para valores de $f(x)$ tanto por la derecha como por la izquierda y observan que $f(x)$ se aproxima a dos valores diferentes, es decir, por la izquierda se aproxima a 15.5 y por la derecha a 14 (R3b).
- c) A partir de la tabla, son capaces de relacionar ambas variables coordinando los Procesos rango y dominio (R3c).
- d) A partir de la coordinación de los dos procesos dados en c), concluyen que el límite de la función no existe en $x=4$ (R4).

Actividad 4	
De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:	
a)	Elige un valor para x , y calcula el valor de $f(x)$, en ese punto.
b)	Cuando x tome los valores 3.9, 3.99, 3.999, ... ¿A qué número se aproxima $f(x)$?
c)	Cuando x tome los valores 4.1, 4.01, 4.001, ... ¿A qué número se aproxima $f(x)$?
d)	Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x .
e)	Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta

Tabla 5: Actividad 4

Como en las actividades anteriores, esta tiene el propósito de observar las estructuras y los mecanismos mentales correspondientes a los tres primeros pasos de la Descomposición Genética, con la diferencia de que, en esta actividad, se solicita construirlas en el registro gráfico. El objetivo de esta actividad es evaluar si los estudiantes:

- a) Logran determinar el valor de la función en el punto que elijan (R1).
- b) Coordinan el Proceso dominio cuando x tiende a 4 por la izquierda, con el Proceso rango cuando $f(x)$ tiende a 15 (R3b).
- c) Coordinan el Proceso dominio cuando x tiende a 4 por la derecha, con el Proceso rango cuando $f(x)$ tiende a 10 (R3b).
- d) Coordinan de manera conjunta los procesos construidos en los incisos b y c (R3c).
- e) Logren ver que el límite no existe, teniendo en cuenta que cuando x tiende a 4 los valores de la función $f(x)$ se aproximan a diferentes números por la izquierda y por la derecha (R4).

Esta actividad está presentada en el registro numérico, su propósito es observar las estructuras y los mecanismos mentales correspondientes a la con-

Actividad 5									
De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:									
x	0.499	0.4999	0.49999	0.499999	...	0.500001	0.50001	0.5001	0.501
$f(x)$	1.497003	1.499700	1.499970	1.499997	...	1.500003	1.500030	1.500300	1.50300
$ 0.5 - x $	0.00100	0.00010	0.00001	0.000001	...	0.000001	0.00001	0.00010	0.00100
$ 1.5 - f(x) $	0.00299	0.0003	0.00003	0.000003	...	0.000003	0.00003	0.00030	0.00300
a) ¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 0.5 para que la diferencia $ 1.5 - f(x) $, sea menor que 0.001?									
b) Con la información del apartado anterior, ¿podría indicar cuál es el límite de $f(x)$ en el punto $x = 0.5$? Justifique su respuesta									

Tabla 6: Actividad 5

cepción métrica del límite, es decir, los pasos 5 y 6 de la Descomposición Genética. El objetivo de esta actividad es evaluar si los estudiantes:

- a) Realizan la acción de determinar la distancia a la que debe de estar x de 0.5 para que $|1.5 - f(x)| < 0.001$ este es el paso (R5) de la descomposición genética.
- b) En esta pregunta se pretende que los estudiantes observen que las diferencias en valor absoluto entre x y 0.5 se aproximan a 0 y que las diferencias en valor absoluto de $f(x)$ y 1.5 también se aproximan a 0, entonces el límite de la función f es 1.5 (R6).

Actividad 6			
De la función $f(x)$ que se muestra en la siguiente figura, contesta las preguntas:			
x	$f(x)$	$ 2.5 - x $	$ 3.5 - f(x) $
2.45	3.35000000	0.05	0.15
2.49	3.47000000	0.01	0.03
2.499	3.49700000	0.001	0.003
2.4999	3.49970000	0.0001	0.0003
2.49999	3.49997000	0.00001	0.00003
2.499999	3.49999700	0.000001	0.000003
...
2.500001	2.00000200	0.000001	1.499998
2.50001	2.00002000	0.00001	1.49998
2.5001	2.00020000	0.0001	1.4998
2.501	2.00200000	0.001	1.498
2.51	2.02000000	0.01	1.48
2.55	2.10000000	0.05	1.4
a) ¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 2.5 para que la diferencia $ 3.5 - f(x) $, sea menor que 0.001?			
b) Con la información del apartado anterior, ¿podría indicar cuál es el límite de $f(x)$ en el punto $x = 2.5$? Justifique su respuesta			

Tabla 7: Actividad 6

Esta actividad está presentada en el registro numérico, su propósito es analizar las estructuras y los mecanismos mentales de la concepción métrica, es decir, los pasos 5 y 6 de la Descomposición Genética. El objetivo de esta actividad es observar si los estudiantes:

- a) Realizan la acción de determinar la distancia a la que debe de estar x de 2.5 para que $|3.5 - f(x)| < 0.001$ este es el paso (R5) de la descomposición genética.
- b) Manifiestan la no existencia del límite, ya sea mediante la argumentación de aproximaciones laterales o mediante la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y rango de la función, es decir, que los estudiantes observen que cuando las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 2.5 se aproximan a 0, las diferencias en valor absoluto de $f(x)$ y 3.5 no se aproximan a cero, y por lo tanto, se puede decir que la función no tiene límite en $x = 2.5$ (R6).

4 RESULTADOS

En este apartado presentaremos los resultados obtenidos, en donde destacaremos el porcentaje de los estudiantes que mostraron las estructuras y los mecanismos mentales que se evaluaron en cada actividad y un ejemplo de estas a través de las respuestas de alguno de los estudiantes participantes.

Representación numérica		
Estructuras mentales	Porcentaje de Estudiantes	Observaciones
Construcción de un Proceso dominio (R3a)	100 %	Todos los estudiantes escribieron “3”. Podemos concluir que construyeron un proceso dominio, ya que notaron que los valores de x se aproximaban a 3 tanto por la izquierda como por la derecha.
Construcción de un Proceso rango (R3b).	100 %	Todos los estudiantes respondieron “15”. Podemos concluir que construyeron un proceso rango.
Coordinación de ambos procesos (R3c)	66.06 %	Algunos estudiantes respondieron esta pregunta usando conceptos previos o creando una regla de correspondencia, sin embargo, el 66.06 % respondieron coordinando ambos procesos.
Concepción Proceso en el cual se propone a 15 como el límite, a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c).	71.24 %	La mayoría de los estudiantes justificaron la existencia del límite a través de la coordinación de los procesos en el dominio y en el rango.

Tabla 8: Estructuras mentales actividad 1

Para ilustrar lo anterior, se analizan las respuestas del estudiante E8 a la Actividad 1.

A partir de sus respuestas (ver figura 3) podemos observar que construyó los procesos dominio y rango, respectivamente. Aunque deja en blanco la tercera pregunta este estudiante da evidencia de que haber coordinado ambos procesos en la cuarta pregunta en la que, además, propone al número 15 como el límite de la función y lo hace a través de las aproximaciones laterales.

¿A qué número se aproximan los valores de x ? a 3
 ¿A qué número se aproximan los valores de $f(x)$? a 15
 Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x .

Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifica tu respuesta.
 Es 15. Cuando nos aproximamos a 3 por la izquierda (x), $f(x)$ se aproxima a 15; cuando x se aproxima a 3 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 15.
 Si $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

Figura 3: Respuesta de E8

Representación algebraico-numérica		
Estructuras mentales	Porcentaje de Estudiantes	Observaciones
Acción de evaluar la función f en pocos puntos cada vez más cercanos a 2. (R2)	100 %	Todos los estudiantes completaron correctamente la tabla, es decir, los estudiantes poseen la concepción Acción.
Construcción de un Proceso dominio (R3a)	100 %	Todos contestaron que x se aproxima a 2, en otras palabras, todos los estudiantes construyeron el proceso dominio.
Construcción de un Proceso rango a un número determinado (R3b)	98.21 %	La mayoría de los estudiantes logró construir el proceso rango y observan que $f(x)$ se aproxima a 0.25
Coordinación de ambos procesos (R3c)	64.28 %	Más de la mitad de los estudiantes lograron coordinar ambos procesos y el estudiante E48 ha logrado hacer el paso (R5) de la descomposición genética, que corresponde a la reconstrucción del proceso del paso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades.
Concepción Proceso en el cual se propone a 0.25 como el límite, a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c).	39.28 %	Aunque más de la mitad de los estudiantes propusieron a 0.25 como el límite, solamente el 39.28 % lo hizo a partir de las aproximaciones laterales.

Tabla 9: Estructuras mentales actividad 2

Como ejemplo, analicemos las respuestas del estudiante E27 a la Actividad 2. En la figura 4 podemos notar que construyó los procesos dominio y rango, respectivamente. También coordinó ambos procesos, ya que menciona que conforme x se aproxima a 2, $f(x)$ tiende a 0.25. Sin embargo, su respuesta al inciso e) deja ver que duda sobre la existencia del límite porque la función no está definida en dos, por un lado menciona que no es posible saber si el límite existe y por otro lado escribe que el límite es igual a 0.25. Este alumno evidencia la concepción del límite como algo que no puede ser alcanzado, percibe el proceso infinito potencial y la indefinición de la función en dos le dificulta la concepción del infinito actual.

- a) Completa la tabla.
- b) ¿A qué número se aproximan los valores de x ? 2
- c) ¿A qué número se aproximan los valores de $f(x)$? 0.25
- d) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x . Conforme la variable x se aproxima a 2, $f(x)$ tiende a 0.25
- e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifica tu respuesta.
 La función no está definida en $x=2$, por lo que no es posible saber si existe el límite, cuando $x=2$,
 pero $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0.25$

Figura 4: Respuesta de E27

Representación numérica		
Estructuras mentales	Porcentaje de Estudiantes	Observaciones
Construcción de un proceso dominio a un número determinado (R3a)	100 %	Todos los estudiantes respondieron que x se aproxima es a 4, es decir, los estudiantes construyeron un proceso dominio.
Construcción de un proceso rango a un número determinado (R3b)	100 %	Todos los estudiantes respondieron que $f(x)$ tiende a 15.5 por la izquierda y a 14 por la derecha, es decir, lograron construir un Proceso rango.
Coordinación de ambos procesos (R3c)	82.14 %	La mayoría de los estudiantes mostró haber coordinado ambos procesos de aproximación, aunque hubo algunos estudiantes que relacionaron las variables por alguna propiedad.
Concepción Proceso al mencionar que el límite no existe a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c).	83.92 %	La mayoría de los estudiantes mencionó que el límite no existía ya que las aproximaciones laterales no coinciden.

Tabla 10: Estructuras mentales actividad 3

A continuación veremos las respuestas del estudiante E1 a la Actividad 3 como un ejemplo de lo que logró la mayoría. A partir de sus respuestas podemos observar que construyó los procesos dominio y rango, respectivamente. El estudiante coordinó ambos procesos, lo cual le permitió darse cuenta de que $f(x)$ se aproxima a dos números diferentes cuando x se aproxima a 4 y responder que el límite no existe.

¿A qué número se aproximan los valores de x ? 4
 ¿A qué número se aproximan los valores de $f(x)$? A 15.5 por la izquierda y 14 por derecha
 Describe el comportamiento de $f(x)$, con relación a la variable x .
 $f(x)$ tiende a 15.5 por la izquierda y por la derecha $f(x)$ tiende a 14
 cuando x tiende a 4.
 Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifica tu respuesta.
 No existe límite por acercarse a valores diferentes

Figura 5: Respuesta de E1

Registro gráfico		
Estructuras mentales	Porcentaje de Estudiantes	Observaciones
Acción de evaluar la función f en un único punto (R1a)	100%	Todos los alumnos lograron determinar el valor de la función en un punto, es decir, asociaron correctamente un valor en el dominio con su respectivo valor en el rango.
Construcción de un Proceso rango a un número determinado (R3b)	100%	Todos los estudiantes respondieron que $f(x)$ se aproxima a 10.
Construcción de un Proceso rango a un número determinado (R3b)	100%	Todos los estudiantes respondieron que $f(x)$ se aproxima a 15.
Coordinación de ambos procesos (R3c)	35.71%	Aproximadamente la tercera parte de los estudiantes respondieron coordinando ambos procesos, los demás respondieron con alguna propiedad o encontrando alguna regla de correspondencia etc.
Concepción Proceso al mencionar que el límite no existe a través de la coordinación de los procesos del paso (R3c).	87.5%	La mayoría de los estudiantes mencionó que el límite de la función no existe y lo justificaron a través de los límites laterales o de las aproximaciones laterales.

Tabla 11: Estructuras mentales actividad 4

A continuación veremos las respuestas del estudiante E14 a la Actividad 4. En sus respuestas se observa que este estudiante hizo la acción de evaluar la función en los puntos dados (es importante mencionar que es una acción en el registro gráfico). Construyó los procesos dominio y rango, sin embargo, al momento de describir el comportamiento de ambas variables no mencionó las aproximaciones sino que utilizó la gráfica e intervalos para determinar la regla de correspondencia de la función. Finalmente, sí da evidencia de tener la concepción Proceso al mencionar que el límite no existe porque los límites laterales no coinciden.

a) Elige un valor para x , y calcula el valor de $f(x)$, en ese punto. Sea $x=0$, $f(x)=15$.

b) Cuando x tome los valores 3.9, 3.99, 3.999, ... ¿A qué número se aproximan los valores de $f(x)$? Todos los valores $0 < x < 4$, su $f(x) = 15$ y solo en $x=4$, $f(x) = 10$.

c) Cuando x tome los valores 4.1, 4.01, 4.001, ... ¿A qué número se aproximan los valores de $f(x)$? Los valores cuando $x \rightarrow 4^+$, se aproximan a 10.

d) Describe el comportamiento de $f(x)$, con relación a la variable x .
 Cuando $x \leq 0$, $f(x) = 15 - \frac{5}{2}x$, cuando $0 < x < 4$, $f(x) = 15$ y cuando $x \geq 4$ es otra función.

e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifica tu respuesta.
 el límite no existe ya que el límite y $\lim_{x \rightarrow 4^+}$ y $\lim_{x \rightarrow 4^-}$ si existen pero no coinciden.

Figura 6: Respuesta de E14

Registro numérico		
Estructuras mentales	Porcentaje de Estudiantes	Observaciones
Reconstrucción del Proceso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades. (R5)	44.64 %	Casi la mitad de los estudiantes logran reconstruir el proceso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades.
Concepción Proceso en el cual se propone a 1.5 como el límite a partir de la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y codominio de la función (R5).	No hay evidencia	Los estudiantes propusieron a 1.5 como el límite de la función y la mayoría justificó su respuesta en términos de los límites laterales, es decir, lograron el paso (R3c) de la descomposición genética pero no dieron evidencia de haber construido la concepción métrica.

Tabla 12: Estructuras mentales actividad 5

A continuación veremos las respuestas del estudiante E48 a la Actividad 5. En esta respuesta podemos observar que este estudiante logró reconstruir el proceso (R3c) aunque no de manera explícita, sin embargo, no muestra haber construido la concepción métrica ya que su respuesta la dio en términos de las aproximaciones laterales.

- a) ¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 0.5 para que la diferencia $|1.5 - f(x)|$, sea menor que 0.001 ? *Debe tener una diferencia menor a 0.001*
- b) Con la información del apartado anterior, indica el límite de $f(x)$ en el punto $x = 0.5$.
Justifica tu respuesta. *sea $\lim_{x \rightarrow 0.5} f(x) = 1.5$ y a que es el valor que se obtiene cuando se aproxima por valores laterales.*

Figura 7: Respuesta de E48

Registro numérico		
Estructuras mentales	Porcentaje de Estudiantes	Observaciones
Reconstrucción del Proceso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades. (R5)	12.5%	Del 100% de los estudiantes, solamente el 12.5% logró reconstruir el proceso (R3c) en términos de intervalos y desigualdades, ya que la mayoría expresó su respuesta en términos de la variable x o solo mencionaron una aproximación lateral.
Concepción Proceso, en donde se prueba que el límite no existe a partir de la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y codominio de la función (R5).	No hay evidencia	Los alumnos no dieron evidencia de haber construido la concepción métrica; ellos no mencionaron las distancias entre los términos de las sucesiones (en el dominio y el rango) y los números de interés, ellos respondieron en términos de las aproximaciones laterales .

Tabla 13: Estructuras mentales actividad 6

A continuación veremos las respuestas del estudiante E50 a la Actividad 6. En sus respuestas podemos observar que realizó la reconstrucción del proceso (R3c) y notó que solamente se cumplía si se tomaban los valores de x por la izquierda del valor de interés, el cual es 2.5 . De manera análoga a la actividad anterior no hay evidencia de que haya construido la concepción métrica puesto que respondió en términos de las aproximaciones laterales pero sin usar las distancias.

- a) ¿Qué tan cerca deben estar los valores de x a 2.5 para que la diferencia $|3.5 - f(x)|$ sea menor que 0.001? *Deben estar a 0.0001 de distancia por la izquierda*
- b) Con la información del apartado anterior, indica el límite de $f(x)$ en el punto $x = 2.5$. Justifica tu respuesta. *No existe el límite ya que los límites laterales no coinciden. El límite por la izquierda es 3.5 y por la derecha es 2.*

Figura 8: Respuesta de E50

5 CONCLUSIONES

A partir del análisis de las respuestas a las actividades y la descomposición genética propuesta por Cottrill, logramos identificar que los estudiantes participantes construyeron la concepción Acción del límite de una función y los Procesos dominio y rango. Los que participaron en la investigación [4], también construyeron la concepción Acción y la de Proceso en el dominio, pero tuvieron dificultades para construir el Proceso rango, en especial cuando los valores de $f(x)$ se aproximaban a dos números diferentes.

También reportamos que más de la mitad de los estudiantes encuestados lograron coordinar los Procesos dominio y rango, lo cual difiere de los resultados obtenidos en [3] y [4], ya que ellos reportaron que a sus estudiantes se les dificultó esta coordinación de Procesos.

En las actividades que tratan sobre la concepción métrica casi todos los participantes respondieron en términos de la variable x y no en términos de la distancia de x al punto de interés. Estos resultados coinciden con [4] y [3], ya que ambos mencionan las dificultades que tienen los estudiantes para realizar la coordinación métrica en términos de desigualdades; son pocos los estudiantes que coordinan los procesos de aproximación utilizando desigualdades y el valor absoluto.

La mayoría de los estudiantes construyeron un Proceso mental en el cual proponen a un número como el límite o determinan que el límite no existe, el cual surge de la coordinación de los procesos del paso (R3c) de la descomposición genética, pero no en términos del paso (R5). Esto no permitió decidir si estos estudiantes logran o no coordinar las aproximaciones en términos de distancia. Por lo tanto, sugerimos rediseñar la pregunta del inciso b de las actividades 5 y 6.

En esta investigación observamos también cómo influyeron las diferentes representaciones semióticas de la función en la comprensión del concepto en estudio y nos percatamos de que en este grupo, el registro gráfico favoreció la determinación de la no existencia del límite cuando las aproximaciones en el rango no coincidían; mientras que el registro numérico les favoreció para percibir el comportamiento de las variables. Esto puede deducirse de la forma en que respondieron la pregunta ¿cómo es el comportamiento de la función con respecto a la variable x ? Cuando la función se presentó en el registro numérico ellos respondieron en términos de las aproximaciones, pero cuando se presentó en el registro gráfico los estudiantes señalaban que la función era continua o creciente y no mencionaban sobre su comportamiento al rededor del punto de interés. En los estudiantes de la investigación [4], ocurrió lo contrario, ellos respondieron mejor a esta pregunta en el registro gráfico que en el numérico. Aunque las poblaciones que se han mencionado aquí se encontraban en niveles educativos diferentes al momento de los estudios, en todos se reportó la dificultad de trabajar con las distancias y las desigualdades. Los estudiantes de esta investigación se desempeñaron mejor en la coordinación de los procesos dominio y rango, lo cual se podría atribuir a una construcción más elaborada del concepto de función que la que poseían los estudiantes del trabajo [4], quienes se encontraban en el nivel medio superior.

Este trabajo aporta un acercamiento a las construcciones mentales que logró un grupo de estudiantes después de estudiar el límite de una función real en un curso de Cálculo Diferencial. También muestra algunos aspectos de este concepto que se deben de considerar para su aprendizaje, como el trabajo en los diferentes registros semióticos.

Bibliografía

- [1] Arnon, I., Cottrill, L., Dubinsky, E., Oktaç, A. Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K., *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, Springer, 2014.
- [2] Cornu, B. Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991, 153–166.
- [3] Cottrill, L., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D., Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coor-

- minated Process Schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 1996, 167–192.
- [4] Pons, J., *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto* (tesis doctoral), Universidad De Alicante, 2014.
- [5] Swinyard, C., Larsen S., Coming to Understand the Formal Definition of Limit: Insights Gained From Engaging Students in Reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2012, 43(4), 465-493.
- [6] Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M., *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite*, Revista PREMISA, 2006, 8(29), 9-19.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

ame.lups@gmail.com
lhernan@fcfm.buap.mx

Capítulo 4

Recurso educativo abierto para la construcción de diferentes significados asociados al volumen de cuerpos geométricos

Alma Rosa Argüelles Ortiz y Sergio Andrés
Rubio-Pizzorno

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica,
Instituto GeoGebra Internacional

Resumen

Este trabajo presenta la elaboración de un recurso educativo abierto como herramienta de agregación de valor y apoyo pedagógico para la enseñanza de la noción de volumen, entendida desde diferentes significados fundamentados en la literatura especializada. Tales significados son capacidad, volumen ocupado, volumen externo, volumen desplazado y volumen numérico.

Para el desarrollo de este trabajo se siguen las directrices de la Investigación Basada en el Diseño, específicamente en la propuesta metodológica llamada Proceso de negociación. Finalmente se presentan reflexiones sobre el pilotaje de este recurso.

1 El volumen como concepto con múltiples significados

El volumen es una magnitud propia del ser humano, en tanto que está presente en los cuerpos con los que interactúa en el espacio tridimensional. Es por ello que la comprensión del volumen constituye una manera de relacionarse con el mundo, finalidad con la que se han ideado métodos e instrumentos que han explicitado sus cualidades y facilitado la interrelación con el entorno en aras de la resolución de problemas y la creación de productos culturalmente valiosos.

Desde las primeras etapas del desarrollo humano, la ejecución de tareas simples ha requerido de la incorporación de estrategias de estimación y de conservación del volumen de los cuerpos, mismas que aumentan en grado de complejidad y se reflexiona respecto de ellas en la educación formal. A pesar de la gran presencia de la noción de volumen en las actividades humanas, es común que su aprendizaje y su enseñanza impliquen dificultades para alumnos y docentes [4, 5, 10].

En México, la enseñanza del volumen se incluye en los planes y programas de estudio [31] como un contenido del campo de formación académica Pensamiento Matemático. En este se pretende que a lo largo de la educación básica, los alumnos desarrollen formas de razonamiento que les permitan resolver problemas en diversos contextos, y, enfatizando en el caso del volumen, puedan explorar las características y las propiedades de los cuerpos geométricos, así como el conocimiento de algunos principios de ubicación espacial y de medición.

Si bien el volumen es un contenido que permea el currículo de manera transversal a lo largo de todos los niveles educativos, se han reportado ciertas dificultades en su tratamiento escolar, tanto en estudiantes como en profesores, así como por la naturaleza misma del concepto. Los principales retos emanan del desarrollo infantil, dado que en las primeras etapas el volumen como estructura mental presupone la consolidación de estructuras de razonamiento superiores [25]. De igual manera, parte de estas dificultades se relacionan con la estrecha relación que tiene el volumen con el concepto de capacidad [16, 23], y la confusión entre el volumen con los conceptos de capacidad, masa y peso, o su medición.

En el caso de los docentes, sus prácticas no suelen incluir estrategias para atender el reconocimiento del volumen en situaciones variadas, ya que generalmente están limitadas a su medición a través de representaciones planas, lo cual ocasiona que el alumnado conciba el volumen directamente ligado a una representación estática y plana de figuras tridimensionales [4, 6]. De igual forma, se tiende a expresar y resolver problemas que implican la concepción del volumen utilizando únicamente el lenguaje algebraico, lo que resta importancia a las cualidades geométricas de los fenómenos, de acuerdo con estudios de Martínez y Rivaya [20].

En cuanto a las dificultades asociadas a la naturaleza misma del concepto volumen, se reconoce que está ligado a elementos físicos y matemáticos [30]. El volumen es una propiedad física de todos los cuerpos, los cuales poseen

características que pueden ser percibidas a través de los sentidos, como la textura o la forma. Así también, se puede acceder a la noción de volumen a través de la interacción entre los cuerpos, por ejemplo al sumergir un cuerpo en un líquido y corroborar que este último se desplaza. A la par, es posible medir la magnitud del volumen utilizando procedimientos matemáticos, como es el caso de la adición o la multiplicación de unidades cúbicas, así como el uso de fórmulas, lo cual permite representar al volumen como una cantidad numérica

Pese a que el volumen de todos los cuerpos es susceptible de ser medido, esto implica comprender que el espacio que ocupa cada cuerpo está delimitado por superficies y por tanto depende de las características de estas [4]. Por ejemplo, un globo inflado ocupa distinto espacio que el mismo globo desinflado, sin por ello alterar la composición de la superficie plástica que lo compone. Así también, con un conjunto de bloques de madera se pueden formar distintas agrupaciones para que estos ocupen menor o mayor superficie, sin necesidad de modificar la cantidad de bloques usados. De esta manera, es posible distinguir que existen sólidos con la misma superficie pero con volumen diferente, al tiempo que hay cuerpos con el mismo volumen y superficies distintas.

Por otro lado, los conceptos de volumen y de capacidad suelen emplearse como sinónimos, no obstante, la capacidad es una propiedad particular de los objetos recipientes que indica el contenido que pueden alojar en su interior y el cual es medible a través de distintas unidades de medida, por ejemplo en litros para el caso específico de los líquidos. En relación a lo anterior, la capacidad tiene cualidades que dependen de aspectos no matemáticos, como el tipo de sustancia de los objetos que llenan un recipiente, la posición o el grosor físico del mismo, etc. De esta forma, puede considerarse a la capacidad como un tipo de volumen que se alberga dentro de un cuerpo.

Las evidencias muestran que, dada la compleja naturaleza del concepto de volumen, este posee diferentes significados asociados al espacio que ocupa un cuerpo, al líquido desplazado por la inmersión de un cuerpo, a la capacidad interna de un cuerpo, entre otros.

Esta riqueza y diversidad de significados del volumen plantean un desafío para su tratamiento escolar, el cual ha sido reportado como dificultades para estudiantes y profesores. De ahí la importancia de desarrollar propuestas didácticas que involucren una amplia variedad de significados del volumen, que represente un aporte a la labor docente y que ayude a robustecer la

comprensión de este concepto por parte de los estudiantes.

2 Planteamiento

Al hablar de volumen, es necesario precisar que se considera al término científico como un medio de organización para los fenómenos en los que puede estar inmerso, de acuerdo con Puig [26]. Aunado a esto, Freudenthal [16] afirma que los niños trabajan con objetos mentales sin necesidad de haber construido los conceptos. De esta manera, y dado que este trabajo hace referencia a la interiorización de ese concepto desde la perspectiva de los individuos, se ha optado por referirse al volumen como un objeto mental o de manera indistinta, como una concepción, que es resultado de la apropiación de un concepto.

Como respuesta al fenómeno del tratamiento escolar del volumen, se propone la revaloración de este concepto geométrico, a través del diseño de un recurso educativo que integre tareas relativas a diversos significados del volumen, de tal forma que los estudiantes puedan participar de ellas y ampliar su experiencia y entendimiento de este concepto en situaciones matemáticas.

Dados los diferentes significados asociados al volumen y al objetivo de diseñar un recurso educativo que los aborde, es necesario poner atención en la diversidad de ambientes y materiales representados en tales significados. De ahí que la idea de los Ecosistemas Educativos Híbridos [27] sea idónea para abordar de forma integral al volumen y sus significados, para reconocer los diferentes espacios que componen los ecosistemas educativos, tales como los espacios físicos o digitales.

Para llevar a cabo de manera concreta la propuesta de Rubio-Pizzorno [27] respecto a los Ecosistemas Educativos Híbridos, se utilizan las Herramienta de Autor de GeoGebra [28] (Actividades, Libros y Grupos GeoGebra), las cuales corresponden a ambientes digitales para crear y gestionar recursos educativos que soportan diferentes formatos (imagen, video, texto, páginas web, applet GeoGebra y preguntas de respuesta abierta y opción múltiple). Esto permite articular diferentes soportes materiales (ya sean físicos o digitales) en el diseño del recurso educativo.

Cabe destacar que todos los recursos educativos creados con las herramientas de GeoGebra son de tipo abierto, es decir, se caracterizan por ser recursos educativos abiertos (REA). Este tipo de recursos son pieza funda-

mental del desarrollo de las perspectivas de educación abierta, donde los REA específicamente corresponde a un material didáctico publicado con una licencia que facilita su reutilización, distribución y adaptación, por parte de estudiantes, profesores e investigadores, “sin tener que solicitar autorización previa al titular de los derechos de autor” [3, p. 5].

De esta manera, en el presente capítulo se reporta el diseño de un REA, cuya elaboración se realizó con las Herramientas de Autor de GeoGebra. Por tanto, este REA es accesible y se pone a disposición de toda la comunidad educativa, con miras a enriquecer las opciones didácticas, al tiempo que es libre de ser modificado por los usuarios que lo requieran para sus propios fines.

3 Fundamentación teórica

En esta sección se dan a conocer los referentes que sirvieron para caracterizar la concepción de volumen, desde diferentes puntos de vista, tales como el de la psicología genética, la física, las matemáticas y la educación. Con base en estos referentes se rescatan posteriormente los cinco significados que orientaron la elaboración del REA, los mismos que se utilizaron como principios de diseño.

3.1 Significado de volumen en la Psicología genética

Desde el punto de vista del desarrollo psicogenético, destacamos dos obras en las cuales se reporta el estudio de la consecución del conocimiento espacial en los individuos: *La representación del espacio en el niño* [23] y *La geometría espontánea en el niño* [25]. En la primera se estudian las relaciones topológicas, proyectivas y euclidianas que establecen las personas a lo largo de su desarrollo, para generar una concepción del espacio. La segunda obra se dedica al estudio de la geometría euclidiana, desde el enfoque de la primera obra y centrándose en cómo surge en los niños, la conservación y la medición de longitud, superficie y volumen. En el presente trabajo, consideramos estas obras y en especial los experimentos que se plantean en ellas, con la finalidad de identificar significados del volumen y rescatar actividades útiles para la construcción del recurso educativo.

Piaget e Inhelder destacan a la conservación como la capacidad de los individuos de comprender que una determinada sustancia u objeto no cam-

bia en cantidad, aunque su posición o forma varíen. De acuerdo con esto, se plantean estadios de desarrollo que corresponden al nivel de conservación que poseen los niños con respecto a diversas magnitudes. En el caso del desarrollo espacial, se identifica que existe relación entre la conservación de masa, peso y volumen, debido a que la concepción de estas tres magnitudes, implica la movilización de los mismos razonamientos pero con diferente grado de dificultad. De esta manera, se concluye que los niños desarrollan la conservación de masa alrededor de los 7 u 8 años, la conservación del peso, entre los 9 y los 10 años, y la conservación del volumen, entre los 11 a los 12 años [24].

La conservación de volumen en las estructuras cognitivas del individuo implica la previa conservación de masa y peso, al tiempo que involucra la inclusión de conceptos físicos y de razonamiento matemático, al afirmar que:

La conservación de volumen supone la hipótesis de una estructura atómica o granular en la que los cambios de forma o la fragmentación de un bloque de materia no alteran en absoluto esa estructura y deja, así, invariante la concentración o la densidad propia de la materia considerada. La conservación de volumen implica, no solamente la de materia, sino también el esquema de la concentración constante de una materia dada [...] la conservación de volumen necesita la homogeneidad de las partes de un mismo todo [24, p.187].

En aras de propiciar la conservación de volumen en los niños, Piaget, Inhelder y Szeminska [25] proponen apoyar los procesos de desarrollo cognitivo, a través de situaciones donde los niños sean testigos de las invariantes de volumen, mediante los cambios de forma del objeto. Por ejemplo, los autores sugieren un ejercicio donde se tome cierta cantidad de arcilla -formando un cuerpo de arcilla-, para luego transformar su forma de un cuerpo uniforme a una forma más alargada, de tal manera que los alumnos puedan ver y analizar que aunque un cuerpo puede cambiar de forma, se conserva su cantidad de masa. Estos ejercicios también han sido empleados como pruebas diagnósticas del estadio de desarrollo en que se encuentran los estudiantes [25].

3.2 Significado de volumen en la Física y las Matemáticas

Estudios de Bovet, Dohamahidy-Dami y Sinclair [2] han demostrado que para la conservación de volumen, los individuos enfrentan dificultades relacionadas

con las propiedades físicas de los objetos y sus variaciones, por lo cual los procedimientos de Piaget et al., representan un obstáculo para los niños, quienes al centrar su atención en los fenómenos físicos, confunden sus razonamientos con respecto a la cantidad de materia. Por ejemplo, en un experimento planteado por Piaget e Inhelder [23], se muestran a los niños dos frascos iguales y se vierte en ellos la misma cantidad de agua, colocando una liga en cada frasco a la altura del nivel del agua, posteriormente muestran dos pelotas de arcilla de igual tamaño y se introduce una de ellas a uno de los frascos, lo que desplaza al líquido. Finalmente se pregunta al niño si los niveles de agua subirían en la misma medida al introducir los dos objetos de arcilla, pregunta que se repite después de moldear la segunda pelota de arcilla en forma alargada o aplanada. Por su parte, Bovet, Dohamahidy-Dami y Sinclair [2], realizaron el mismo experimento, pero con jabón en polvo en vez de agua, concluyendo que, al no mezclar elementos de distintos estados de agregación de la materia, los niños comprenden mejor el fenómeno y por ello sus respuestas eran más cercanas a la conservación del volumen.

Para la presente investigación se rescata la distinción que hace Bovet et al. de las cualidades físicas y matemáticas del volumen a partir de las concepciones de los niños. No obstante, con base en las ideas precedentes, se reconoce que el manejo de distintos estados de la materia, así como la experimentación y el análisis de fenómenos físicos, generan oportunidades de aprendizaje. Por tanto, en la enseñanza se puede favorecer la identificación de distintas situaciones en las que está inmerso el concepto de volumen para abordar sus diversos significados.

3.3 Significado de volumen en la Educación

En el campo de la Educación también se han reportado una diversidad de significados del volumen. Sáiz [29] enfatiza la importancia de relacionar el volumen con los conceptos de capacidad, peso y el área de un cuerpo, a partir del análisis de las concepciones que tienen los docentes del volumen. Con base en esto, también reconoce cinco significados asociados a esta magnitud, que son: volumen interno, volumen ocupado, número, volumen encerrado y volumen desplazado. Esto para priorizar su integración en la resolución de problemas, previniendo la posibilidad de caer en el reduccionismo de únicamente aplicar fórmulas para calcular el volumen de cuerpos.

Con base en los referentes recién expuestos se han identificado diversos

significados de volumen asociados a diferentes características de este concepto y los cuerpos. En primer lugar, se puede distinguir la capacidad como un tipo de volumen que poseen los cuerpos que son recipientes, el cual es referido en los planes y programas [31] como una forma de abordar el volumen en los primeros grados escolares y es citado por Sáiz, quien hace distinción de este mismo con respecto al que ella denomina volumen encerrado. Aunado a ello, hemos propuesto en la elaboración de este recurso, el reconocer un volumen externo, para definir aquella superficie que encierra o delimita al contenido de un recipiente.

De igual forma está el volumen ocupado, citado por Castelnuovo [4] y Sáiz [29], quienes lo definen como la extensión que abarca un cuerpo en el espacio, este significado del volumen también es empleado por Piaget et al. [23, 25] al realizar las pruebas anteriormente citadas, de las cuales también se rescata el volumen desplazado, como aquel que implica la relación entre un sólido que al ser sumergido eleva el nivel de un líquido.

Y finalmente el volumen numérico, definido por Sáiz [29] como número y que en esta investigación rescatamos dada su importancia en la medición y representación a través de expresiones matemáticas, así como su presencia en los contenidos de educación básica.

3.4 Principios de diseño

A la luz de los referentes expuestos se rescatan los siguientes significados de volumen, los cuales se presentan como principios de diseño para la elaboración del recurso educativo:

1. El volumen como capacidad o volumen interno de los cuerpos.
2. El volumen ocupado o lugar que abarca un cuerpo en el espacio.
3. El volumen externo o materia que conforma la cubierta de los cuerpos [30].
4. El volumen desplazado o la cantidad de líquido desplazada al sumergir un objeto en él [24].
5. El volumen como cantidad numérica, es decir, el volumen como una magnitud que se puede estimar y medir a través de unidades cúbicas [24, 30].

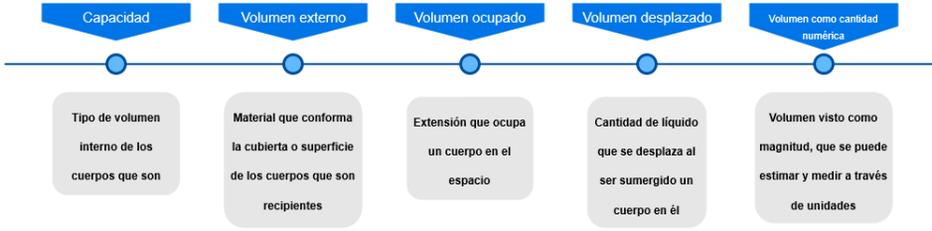


Figura 1: Significados de volumen.

Estos cinco significados, que se muestran en la Figura 1, sirvieron como base para estructurar el REA en distintas secciones y, al mismo tiempo, guiaron la selección de actividades. El orden en el que se abordan los significados en el REA se determinó de acuerdo a la complejidad que representa para el desarrollo cognoscitivo según Piaget, Inhelder y Szeminska [23]. Ellos identificaron a la concepción de volumen como un proceso que va de lo concreto a lo formal, cuyo tratamiento es conveniente manipular y experimentar con objetos tangibles en los primeros estadios del desarrollo, para posteriormente lograr su medición y representación numérica.

4 Metodología

El recurso educativo que se reporta en este capítulo, se elaboró siguiendo las directrices metodológicas de la *Investigación Basada en el Diseño* (IBD), la cual busca “crear nuevas posibilidades de enseñanza y aprendizaje, y estudiar su impacto en maestros, niños y otros usuarios finales” [33, p. 148]. Todo esto a través de la elaboración, implementación y análisis de un recurso educativo.

De estas fases, en el presente escrito se reporta específicamente la fase de diseño del REA, para la cual se siguió la propuesta metodológica llamada *Proceso de negociación* [27], en el cual se busca establecer consensos entre diferentes aspectos de interés para la elaboración del recurso educativo. Estos son, (1) los resultados de investigación disciplinares, (2) los saberes docentes expresados como la experiencia de los profesores que se desarrolla durante el ejercicio de su profesión, y (3) la atención a los ecosistemas educativos híbridos.

4.1 Investigación Basada en el Diseño

En el campo de la investigación basada en el diseño, varios autores reconocen fases dinámicas en los procesos implicados, siendo las más representativas: la definición del problema, diseño, desarrollo, implementación y evaluación. En su investigación, Reeves [citado en 9] concreta el proceso de investigación en ciclos continuos de análisis de la situación y definición del problema, desarrollo de soluciones acordes a una fundamentación teórica, implementación del diseño, validación, producción de documentación y principios del diseño. Cabe destacar que la iteración de estas fases busca mejorar continuamente el desarrollo teórico y la intervención.

Al mismo tiempo, Easterday, Lewis y Gerber [12] proponen un modelo en seis fases: focalizar, comprender, definir, concebir, construir y probar. Por su parte, Garello, Rinaudo y Donolo [18], señalan la existencia de tres fases centrales: la preparación del diseño, la implementación y el análisis retrospectivo, para cada una de las cuales incluyen procedimientos metodológicos particulares. Es de considerar al diseño del recurso como fase medular, ya que a partir de ella se articulan las demás, lo cual permiten un rediseño constante del producto de investigación. Por tanto, el diseño del recurso es reconocido de manera transversal por las propuestas de IBD que plasman el proceso en fases.

De acuerdo con lo anterior, en este capítulo se presenta la fase de diseño de un recurso educativo para abordar diferentes significados del volumen, enmarcada en la corriente metodológica de la IBD, y, específicamente, en la propuesta metodológica del *Proceso de negociación* [27], la cual presenta como uno de sus principales y originales contribuciones a la IBS, la constitución de un grupo de trabajo colaborativo con la participación de personas que desempeñan diferentes roles, como "profesorado, investigadores y representantes de la cultura digital" [27, p. 141]. Esto con la intención de construir relaciones heterárquicas entre las personas involucradas en el trabajo colaborativo, es decir, que las acciones se orienten a propiciar relaciones horizontales y multidireccionales entre todos los participantes.

4.2 Proceso de negociación

Paulo Freire [15], planteó la horizontalidad en las relaciones humanas mediante la educación, al ser esta la principal fuente de toma de conciencia para

que los grupos sometidos salieran de la opresión. Freire concibe la educación como un espacio de diálogo horizontal que permita contrarrestar las acciones antidialógicas de las élites. A la par, Emmanuel Lévinas [19] hace mención desde la ética, de la alteridad, como una capacidad de reflexión que permite ser consciente del *otro* como parte de cada individuo, que nos lleva a comprender y valorar al mundo para tomar decisiones. Sirva esta reflexión para generar una idea de la responsabilidad que conllevó el actuar de los docentes e investigadores al ser partícipes de una grupo, en donde sin importar la naturaleza de las aportaciones o el emisor de las observaciones, estas eran sopesadas atendiendo al valor que tuvieron en sí mismas y no a implantaciones propias de las figuras de poder.

La toma de decisiones realizadas en la elaboración del REA de esta investigación, tuvo la peculiaridad de desarrollarse en un entorno colaborativo de docentes de distintos niveles educativos y áreas del conocimiento (matemáticas, física y química). En este tenor es importante caracterizar la participación directa de miembros de la comunidad GeoGebra, software que conforma un entorno de propuestas a través de las herramientas que oferta para la elaboración de applets, los grupos, hojas dinámicas, ambiente de matemáticas dinámicas, libros GeoGebra, recursos disponibles de forma gratuita para usuarios diversos, principalmente docentes y estudiantes; a la par de tener acceso al foro en donde participan personas interesadas en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias a nivel internacional. En el entorno de GeoGebra se desarrollaron las principales discusiones que llevaron a integrar prácticas digitales a la tarea docente, en aras de la resolución de problemas ligados al diseño de nuestro REA.

El proceso de negociación adoptado para la elaboración del REA incorpora el “diálogo entre los saberes docentes, la confrontación y resignificación del conocimiento matemático; y la flexibilidad interpretativa de la tecnología digital” [27]. Así, se constituye el proceso de negociación utilizado, partiendo de tres polos:

- **Experiencia docente:** en este polo se reconoce el conocimiento de los docentes a propósito de dar clase día a día, y desarrollar este quehacer docente durante años. Esto es una fuente muy importante para la elaboración del recurso educativo, ya que es la que está más conectada con la realidad educativa, tanto de los estudiantes, como del profesor y la relación entre ellos.

- **Resultados de investigación en educación matemática:** con este polo se reconoce la importancia de la educación matemática como disciplina científica, la cual tiene resultados validados por la comunidad internacional de investigadores. Específicamente en el presente trabajo, este polo está representado por los resultados presentados en la sección 3. Fundamentación teórica.
- **Atención al ambiente del diseño:** este polo está directamente relacionado con el reconocimiento de los ecosistemas educativos híbridos, donde se puede aprovechar el potencial de los materiales físicos (o concretos) y digitales, así como su articulación. Cabe destacar que el recurso educativo fue elaborado con las herramientas que dispone GeoGebra, puesto que permiten la articulación de materiales físicos y digitales.

4.3 Etapas de la elaboración del recurso

El presente trabajo de investigación se articuló con base en la estructura del *Seminario de Integración Digital a la Práctica del Docente de Matemáticas*, diseñado e implementado por por Rubio-Pizzorno [27], el cual consta de cinco etapas: de introducción, de apresto, de confrontación, de diseño y de retroalimentación colaborativa. Estas etapas son retomadas para la elaboración del REA sobre volumen, introduciendo algunas adaptaciones, para atender al carácter abierto del recurso educativo a diseñar y a las áreas de los docentes involucrados en el diseño del recurso (matemáticas, física y química). En consecuencia, las etapas son las siguientes:

1. Introducción
2. Apropiación Técnica
3. Aspectos didácticos disciplinares
4. Elaboración del Recurso Educativo Abierto
5. Retroalimentación colaborativa

4.3.1 Introducción

Durante esta etapa, se tomaron acuerdos pertinentes que convinieran a todos los docentes involucrados para participar en el diplomado. Se compartió el

objetivo a alcanzar, las tareas esperadas y se brindó un marco histórico que propició la reflexión respecto de las tecnologías digitales y su impacto en la educación actual.

4.3.2 Apropriación técnica

Con la finalidad de compartir el grado de dominio básico de las tecnologías a utilizar a lo largo del trabajo de investigación, se rescató la importancia de explorar los instrumentos tecnológicos, atendiendo a los intereses y necesidades personales y compartiendo en colectivo las experiencias, estrategias y materiales desde una etapa temprana, de manera flexible y respetando los distintos ritmos de aprendizaje de los participantes. Cabe mencionar, que al inicio de esta etapa se constituyó el equipo de trabajo que elaboró el REA sobre el volumen, lo que propició el intercambio de intereses de investigación y el primer esbozo del tema de estudio.

De igual forma, en esta etapa se introdujo la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), la cual fue utilizada para realizar la planeación del REA, que guiara su elaboración. La THA surge en como parte del modelo cíclico de enseñanza de las matemáticas implementado por Simon [32], cuya finalidad fue abordar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva constructivista centrada en el alumno, delineando una trayectoria de aprendizaje a través de establecer el objetivo, las tareas y el proceso hipotético de aprendizaje. Este último elemento representa el aporte original de la THA, la cual corresponde a una descripción hipotética de las reacciones de los alumnos ante las tareas planeadas por el docente. La THA como instrumento medular, resalta la importancia que tiene el estudiante en el diseño de este REA, siendo el eje rector de las actividades.

En la planeación del REA siguiendo la estructura de la THA, se plasmaron actividades que permitieran delinear el significado de los objetos volumen medibles, caracterizar cada uno de los significados y constatar en una evaluación la integración de los mismos en un concepto ampliado y robusto de volumen. Dichas actividades son acordes a los aprendizajes esperados por los planes y programas de primaria y secundaria, y también complementan el tratamiento conceptual de la noción de volumen al incorporar situaciones que permiten la reflexión de los contextos en los que se sitúa o problematiza el volumen de cuerpos geométricos.

Asignatura: Ciencias, Matemáticas		
Contenido curricular: Volumen		
Objetivo del REA: Que los alumnos reconozcan los significados de: volumen interno, volumen ocupado, volumen desplazado y volumen como cantidad numérica; e integren dichos significados para construir el concepto de volumen, a partir de la relación con otros conceptos, mediante estrategias que implementen el uso de materiales concretos, tales como: recipientes, pipeta graduada, taza medidora, líquidos, semillas, construcciones tridimensionales, rompecabezas etc. y recursos digitales libres.		
Tareas	Proceso Hipotético	
	Actividades	Reacción de los alumnos
<p>4. Distinguir las cualidades de los objetos con volumen, como: altura, capacidad, forma.</p> <p>Tiempo: 50 min-</p> <p>Materiales: semillas, canicas, líquidos, botellas, cuerpos geométricos huecos y taza medidora.</p>	<p>4A. Integrar cuatro equipos, que reciban recipientes de distinta forma, de: 125 ml, 250 ml, 500 ml y 1 l, respectivamente. Comentar si todos tienen la misma capacidad y registrar en una tabla sus estimaciones.</p> <p>4B. Con una taza medidora comprueben la capacidad de los recipientes, usando distintos materiales, como: agua, aceite, vinagre, arroz, lentejas, frijoles, alpiste, aserrín, harina, azúcar, sal y canicas.</p> <p>4C. Comprobar el volumen de las botellas utilizando agua.</p> <p>4D. Medir la capacidad de cuerpos geométricos huecos utilizando unidades de medida arbitrarias.</p> <p>4E. Establecer relaciones entre las capacidades de todos</p>	<p>4A. Los estudiantes manifestarán que los recipientes más altos tienen mayor capacidad que los más bajos. Registrará sus hipótesis, argumentando sus respuestas.</p> <p>4B. Elegirán las más precisas (líquidos, semillas pequeñas, harina, sal, azúcar) porque dejan menor espacio entre ellas.</p> <p>4C. Contrastará el resultado de su medición con sus hipótesis iniciales.</p> <p>4D. Organizados en equipos, elijan una unidad de medida para cuantificar la capacidad de los cuerpos geométricos y registren sus mediciones.</p> <p>4E. Establecerán equivalencias entre las medidas de</p>

Figura 2: Ejemplo de THA utilizada en la elaboración del recurso.

4.3.3 Aspectos didáctico-disciplinares

Durante esta etapa se desarrolló la revisión de literatura especializada sobre el concepto de volumen, así como la socialización con todo el grupo de los aportes tomados de las investigaciones estudiada, para recibir retroalimentación de los colegas, con base en su experiencia docente. Esta dinámica contribuyó a delimitar el tema de investigación y el objetivo del REA, así como a perfilar los significados asociados al volumen que finalmente se abordarían en el REA.

Cabe destacar que todas las fuentes de conocimiento involucradas en este proceso fueron se consideraron con igual importancia, ya fueren aquellas que provenían de la investigación, como las derivadas de la experiencia docente, de tal forma, que el marco de referencia contextual considerado para la elaboración del recurso fueran variados y cercanos a la realidad.

Las tareas que se diseñaron, fueron plasmadas en una THA, cuyo ejemplo se presenta en la Figura 2, considerando como bloques articuladores de contenido a los cinco significados del volumen, a partir de los cuales se organizaron subtemas que se contemplaron la gradualidad con que se abordó cada significado.



Figura 3: Comentarios a la tercera versión de la THA para la elaboración del recurso.

4.3.4 Elaboración del recurso

En esta etapa del trabajo imperó el intercambio constante de opiniones y prácticas, ya que se expusieron los resultados de investigación y de experiencia docente, con la finalidad de dar atención al ambiente de diseño.

En cuanto a la THA, esta se construyó a través de ciclos sucesivos del proceso de negociación, donde se recibió retroalimentación por parte de todos los miembros del grupo. Esta se dio de forma presencial y también utilizando comentarios en el grupo GeoGebra, como los incluidos en la Figura 3. Esta dinámica facilitó la consulta y el registro de sugerencias para enriquecer la elaboración de la THA y posteriormente del Libro GeoGebra.

El producto de esta fase fue el Libro GeoGebra titulado *El volumen y sus distintos significados* [1], en donde se dedicó un capítulo para el tratamiento de cada significado, además de un capítulo introductorio. Este último tiene la finalidad de definir los objetos volumen medibles como aquellos que son susceptibles de ser medidos respecto al volumen [30], siempre que ocupen un lugar en el espacio. En la Figura 4 se muestra la estructura y los contenidos del Libro GeoGebra.

En la elaboración del REA se favoreció el uso de materiales de distinta naturaleza, atendiendo a los ecosistemas educativos híbridos, pero también a las particularidades del concepto de volumen. Por ejemplo, Gal y Linchevski [17] declaran que la información visual es la más socorrida en educación

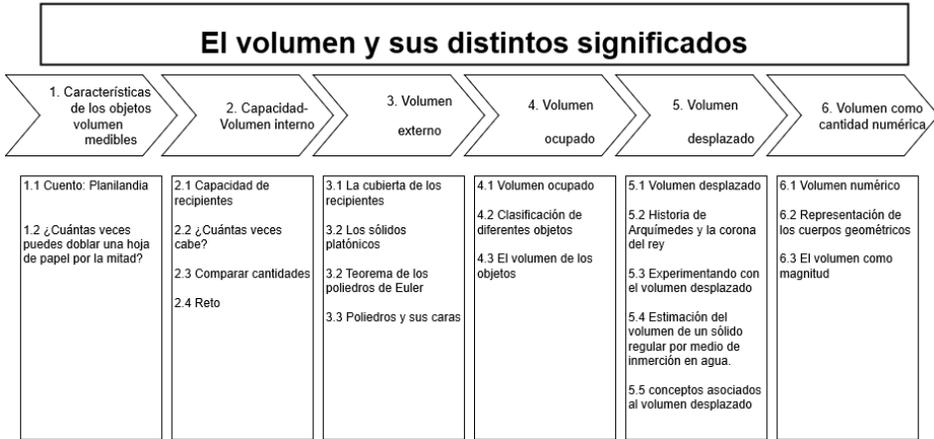


Figura 4: Estructura del libro GeoGebra *El volumen y sus distintos significados*.

cuando de volumen se trata, lo cual limita la interpretación de fenómenos completos, ya que esta solo da atención a las propiedades figurales, limitando la apreciación del volumen únicamente en los objetos y no en los procesos. En sintonía con lo anterior, GeoGebra se caracteriza por ser un ambiente de matemáticas dinámica que permite representar los objetos y también algunos procesos que en papel o, inclusive con material tangible, serían difíciles de experimentar [21].

Por ejemplo, para Del Olmo [10] las dificultades de los niños al medir el volumen se pueden originar por la falta de manipulación previa, lo cual implica una falta de dominio de la visualización espacial y ciertos problemas para manipular mentalmente figuras rígidas. En respuesta a esta dificultad de aprendizaje, el capítulo del Libro GeoGebra titulado *Capacidad-Volumen interno* propone en un inicio el llenado de recipientes con diversos materiales (semillas, líquidos, harina, etc.) para que los alumnos tengan la oportunidad de proponer distintas maneras de comprobar y medir el volumen como capacidad. Al tiempo que se sugiere que ellos mismos realicen propuestas de unidades de medida, para posteriormente reflexionar que las unidades de medida de los sistemas establecidos son una convención humana. En la Figura 5 se muestra la tabla de registro para esta actividad.

B) Registra en esta tabla tus estimaciones y comprueba para registrar tus mediciones

Unidad de medida:		
Recipiente	Estimación ¿Cuántas veces creo que cabe la unidad de medida?	Medición ¿Cuántas veces cabe la unidad de medida?
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

1. ¿Qué instrumento de medición y unidad de medida preferiste usar y por qué?

Ingresar aquí tu respuesta...

Figura 5: Actividad sobre significado *Capacidad-Volumen interno* en el Libro GeoGebra.

En una actividad del capítulo *Volumen ocupado*, se aprovecha la reflexión en el caso de los recipientes, los cuales poseen las cualidades estudiadas en los capítulos anteriores: capacidad, volumen externo y volumen ocupado. Para hacer evidente esta duplicidad, se reconoce que los recipientes están conformados por un material independiente de su contenido, el cual posee volumen por sí solo. Por ejemplo:

La capacidad de una taza es el volumen del cuerpo que la llena; si la taza se llena con agua, esta agua es un *cuerpo de agua*, cuyo volumen corresponde a la capacidad de la taza. Pero, dicho volumen no tiene que ser igual al volumen de la taza. Dos tazas de cerámica, una gruesa y otra delgada pueden tener la misma capacidad y diferentes volúmenes. Lo que es igual, en este caso, es el volumen de agua que les cabe, no de las tazas [29].

En la Figura 6, se presenta la actividad que integra los tres significados de volumen mencionados anteriormente, con un ejemplo similar al planteado por Sáiz, que permite simular la modificación de las dimensiones de una taza.

Posteriormente, se continúa profundizando en los significados de volumen hasta el capítulo *Volumen como cantidad numérica*, donde se sugiere una actividad para comprender la medición con unidades cúbicas a partir de la

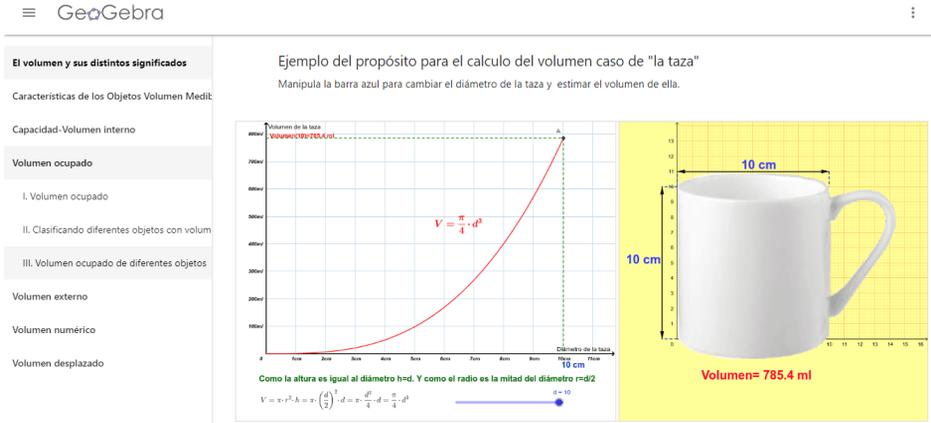


Figura 6: Actividad del capítulo *Volumen ocupado*.

visualización de un prisma, cuya base y altura pueden ser transformadas para observar el espacio que ocupa. Esta actividad también permite cambiar el volumen de sus unidades de medida, lo cual facilita la comparación inmediata a través del uso de deslizadores, como se muestra en la Figura 7.

La incorporación de materiales concretos y digitales, favorece el tratamiento del concepto de volumen a propósito de la gradualidad adecuada a los alumnos de educación básica, al partir de las cualidades básicas de los objetos volumen medibles para avanzar a abstracciones como la medición convencional. De esta manera, el REA construido y estructurado en un Libro GeoGebra, se caracteriza por desenvolverse en un ecosistema híbrido, tomando diversos materiales para el logro de los objetivos de enseñanza.

Sumado a lo anterior, también se pretende aportar a la construcción de conocimiento abierto mediante el uso del ambiente digital Libro GeoGebra, para la elaboración de este REA. Esta herramienta permitió estructurar el recurso en diferentes capítulos, donde cada uno de ellos aborda aspectos específicos sobre el volumen, como el desarrollo de la noción, su estimación y su medición a través de la construcción y transformación tridimensional de cuerpos geométricos, usando juegos, rompecabezas y aplicaciones digitales.

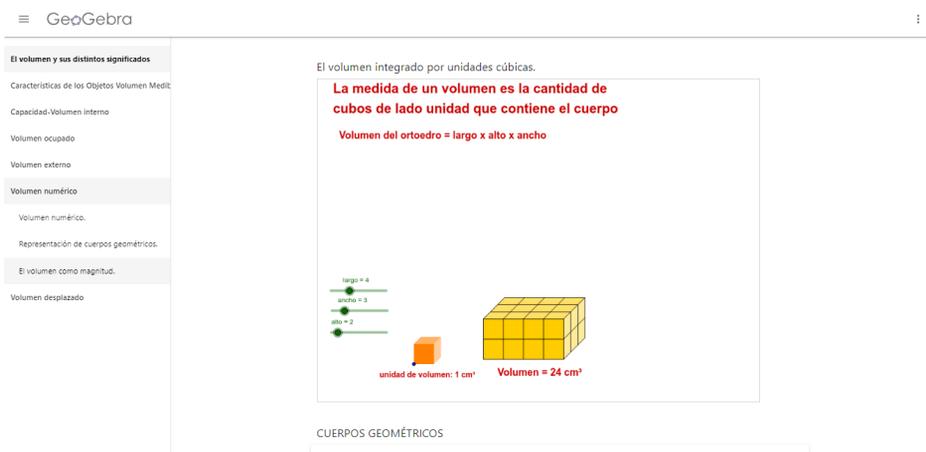


Figura 7: Actividad del capítulo *Volumen numérico* del libro GeoGebra.

4.3.5 Retroalimentación colaborativa

Esta etapa se realizó con la finalidad de generar un espacio de retroalimentación entre colegas, a través de una dinámica de juego de rol, para el cual los docentes participantes adoptaron el rol de estudiantes, con quienes se implementó el REA, para posteriormente realizar un análisis reflexivo que resaltó los aciertos, pero sobre todo las posibles mejoras al REA. Esta etapa de retroalimentación colaborativa se expone con mayor detalle en la siguiente sección.

5 Pilotaje del recurso

Una vez elaborado el REA, se probó con un grupo de docentes de educación básica, media superior y superior, en una sesión de 90 minutos, en la cual se utilizó el juego de roles como dinámica de participación, dadas sus características afines al proceso de negociación y a la IBD. De acuerdo con Ortiz de Urbina, Medina y De La Calle [22], los miembros participantes de un juego de rol, aplican competencias como la capacidad de análisis y síntesis, la capacidad de organización y planificación, la capacidad para la resolución de problemas y la capacidad para tomar decisiones. De igual forma, implica la aplicación de competencias personales, como la capacidad para trabajar en equipo, habilidad en las relaciones personales, capacidad crítica y autocrítica

y trabajar en entornos de presión.

En el juego de roles, cada docente tomó el papel de alumno, mientras los miembros del equipo de trabajo presentaron una clase desde el papel de docentes y, aunque las condiciones no son idénticas al trabajo con alumnos de los niveles antes señalados, se consideró pertinente la intervención de docentes en un primer momento de aplicación, para tomar en cuenta consideraciones pedagógicas y metodológicas que un profesor frente a grupo sabe distinguir y enriquecer desde su experiencia. En especial, simulaciones como el juego de rol, permiten apropiarse de una identidad convenida y pensar desde un enfoque diferente las situaciones, por lo que constituye un sistema ideal para facilitar los aprendizajes orientados a la comprensión y la movilización de saberes.

Durante la prueba piloto de implementación del REA y con ayuda de las observaciones de los docentes e investigadores participantes, se identificaron rasgos a nivel de concepto, metodológicos, de currículo y propios del REA que conviene revisar para su mejora. De entre ellos se identificó:

- Los participantes tuvieron dificultades al principio, tanto para identificar los objetos volumen medibles, como para distinguir que el concepto de volumen puede tener más de un significado.
- Se reconoció la importancia de cada significado, sin embargo existió confusión entre el volumen ocupado y el volumen externo de los objetos que no son recipientes.
- Destacó la observación de que el total de actividades propuestas en el REA no podría ser abordado en un solo nivel educativo, sin embargo comprende actividades afines a los contenidos a tratar en educación básica.
- Se identificó como problemática la ausencia de diversos significados de volumen en el currículo y en la enseñanza en educación básica, misma que se ve reflejada en las dificultades que enfrentan los alumnos que cursan niveles de educación media superior y superior.
- Una sugerencia importante fue la necesidad de incorporar una actividad final de evaluación en la que se integren todos los significados de volumen que se abordan en el REA.

En general, se reconoció la incorporación de materiales concretos y digitales a propósito de las necesidades de los alumnos, considerando sus características correspondientes a los estadios: preoperatorio, operaciones concretas y operaciones formales [23]. También resalta la claridad en la organización de los temas en gradualidad y profundidad, que atienden a las necesidades de los posibles usuarios con un lenguaje claro en las instrucciones y de fácil acceso.

El REA integra y complementa los temas sugeridos por el currículo oficial [31] y puede ser usado por docentes que requieran materiales para abordar contenidos en el aula y también por estudiantes que quieran ahondar en los contenidos. Para ello existen secciones de retroalimentación instantánea como los cuestionarios y applets, además de la posibilidad que brinda el software de GeoGebra para realizar consultas libres, modificaciones y descargas.

6 Conclusiones y perspectivas

A partir de la revisión teórica, la confrontación con la práctica docente durante el proceso de negociación en la elaboración del REA y su primer acercamiento de aplicación, se reconoce que:

- La enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen suponen dificultades teóricas y prácticas que en conjunto forman parte de un fenómeno educativo, cuyo tratamiento representa un problemática pedagógica.
- El REA cumple el objetivo de integrar diferentes significados de volumen, tales como, capacidad, volumen ocupado, volumen externo, volumen desplazado y volumen numérico, para el tratamiento didáctico del concepto de volumen.
- El ecosistema educativo híbrido brindó las condiciones pertinentes para atender a la naturaleza de cada significado de volumen y dar respuesta a las necesidades de desarrollo de los alumnos de educación básica.
- La propuesta metodológica del proceso de negociación permitió incorporar distintos enfoques de docentes e investigadores en educación matemática para la elaboración del REA y el adecuado tratamiento del concepto de volumen en la realidad escolar.

Al mismo tiempo, se incorporaron algunas sugerencias de mejora que surgen en respuesta a las observaciones realizadas por los docentes en la prueba piloto, tales como: el tratamiento más detallado de la introducción a objetos volumen medibles, a través de actividades de reflexión y la manipulación de materiales concretos; la distinción entre objetos con volumen ocupado y volumen externo, en cuyo caso se realizó la precisión por escrito al inicio de cada capítulo correspondiente a los significados de volumen; y por último, la adición de una actividad de cierre en la que se integran los cinco significados y que sirve como evaluación de los aprendizajes esperados del REA.

Siguiendo las fases de la IBD, queda como prospectiva realizar un rediseño del REA considerando los resultados del pilotaje, así como preparar las condiciones para realizar una implementación con estudiantes. Así también, debido a la amplitud y profundidad del REA, se ha reconocido que es necesario seleccionar y delimitar ciertas partes del REA que permita implementarlo en condiciones reales de aula, tomando en consideración que los contenidos se dirigen a alumnos de educación básica. Esta selección contribuirá a llevar a cabo una toma de datos más controlada, que permita realizar un buen análisis de la implementación, y con sus resultados, volver a ajustar el REA.

Para la siguiente fase de implementación del REA, se propone:

- Diseñar y aplicar un instrumento de evaluación diagnóstica que permita conocer y seleccionar la población en la que se aplicará el REA.
- Delimitar y clasificar a la población para recabar datos.
- Seleccionar las THA que correspondan a los contenidos a tratar y realizar las adecuaciones a las características del grupo de muestra.
- Realizar las sesiones en las que se llevará a cabo la aplicación.
- Recopilar datos a través de técnicas como la entrevista clínica.
- Analizar, comprender y reportar los resultados de la implementación del REA y su rediseño.

Para finalizar, es importante reconocer al estudio del volumen como un área fecunda en el terreno educativo, cuya atención es necesaria para mejorar las técnicas y métodos de enseñanza, pero también para conocer cómo los

individuos adquieren esa noción a nivel cognitivo y si los significados reconocidos hasta ahora por los investigadores educativos son los suficientes para abordar al volumen como contenido, en la educación básica.

Bibliografía

- [1] Argüelles, A., Martínez, E. y Silva, H. (2019). *El volumen y sus distintos significados [libro GeoGebra]*. <https://www.geogebra.org/m/atnkgypw>
- [2] Bovet M., Dohamahidy-Dami C., Sinclair H. (1982). Conservations and decalage. *Human Development*, 25, pp. 201-204.
- [3] Butcher, N., Kanwar, A., y Uvalic-Trumbic, S. (2015). *Guía Básica de Recursos Educativos Abiertos (REA)*. Francia: UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000232986>
- [4] Castelnuovo, E. (2004). *Didáctica de la Matemática Moderna*. (2da Ed. 1990, 6ta reimpresión 2004). México: Trillas.
- [5] Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1994). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. España: Síntesis.
- [6] Chamorro, C. (2003). Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas. En Chamorro (ed.) *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. España: Pearson-Prentice Hall. pp. 69-94.
- [7] Chamorro, C. (2003). Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen, en Chamorro (ed.) *Didáctica de las matemáticas para Primaria*. España: Pearson Educación, pp. 221-272
- [8] Cuitláhuac I., Pérez López. Examen de la noción de volumen mediante los procedimientos Piager-Inhelder y Bovet y cols. *Salud Mental* 13(1), marzo de 1990. pp. 32
- [9] De Benito, B. y Salinas, J.M. (2016). La investigación basada en diseño en Tecnología Educativa. *Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa RiiTE*.pp. 44-59.

- [10] Del Olmo, M., Moreno, M. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen, ¿algo más que el trabajo con fórmulas?*. España: Síntesis.
- [11] Dickson, L., Brown, M. e Gibson, O. (1984). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.
- [12] Easterday, M., Lewis, D. y Gerber, E. (2014). Design-Based Research Process: Problemns, Phases and Applications. *ICLS Proceedings Voumen I*. pp. 317-324
- [13] Ferrarini, S. y Rancich, A. (1989). Conservación de masa, peso y volumen en escolares de una población marginal. Argentina Revista Latinoamericana de Psicología, 21(2), pp. 165-175 Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Bogotá, Colombia.
- [14] Flavell, J. (1979). *La Psicología de Jean Piaget*. Traducido del inglés. Buenos Aires: Paidós.
- [15] Freire, P. (1997). *Pedagogía de la autonomía, saberes necesarios para la práctica educativa*. México: Siglo Veintiuno, S.A. de C.V.
- [16] Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda: Reidel Pub. Co.
- [17] Gal, H y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. En *Educational studies in mathematics*, 74, pp. 163-183.
- [18] Garello, M. Rinaudo, M, y Donolo, D (2011). Valoración de los Estudios de diseño como metodología innovadora en una investigación acerca de la construcción del conocimiento en la universidad. *Revista de Educación a Distancia- Docencia Universitaria en la Sociedad del Conocimiento (RED-DUSC)*. <http://www.um.es/ead/reddusc/5>
- [19] Lévinas, E., (1976): *Presentación de la edición castellana de Totalidad e infinito*.
- [20] Martínez, A., y Rivaya, F. (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría elemental*.

- [21] Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., y Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 99–111. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9116-6>
- [22] Ortiz de Urbina, M., Medina, S., y De La Calle, C. (2010). Herramientas para el aprendizaje colaborativo: una aplicación práctica del juego de rol. Teoría de la Educación. *Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 11(3), pp. 277-301. España: Universidad de Salamanca Salamanca.
- [23] Piaget, J. e Inhelder, B. (1969). *La psicología del niño*. Paris: Presses universitaires de France, pp. 23-28.
- [24] Piaget, J. e Inhelder, B. (1971). *El desarrollo de las cantidades físicas en el niño*. Traducido del inglés, Barcelona: Nova Terra.
- [25] Piaget, J., Inhelder B. y Szeminska A. (1948). La géométrie Spontanée chez l'enfant. Paris, P. U. F. Trad inglesa: The Child's Conception of Geometry, Londres: Routledge and Kegan.
- [26] Puig, L. (1994). Semiótica y matemáticas. *Eutopías*, 2a época, 51, pp. 1-19 Valencia: Episteme.
- [27] Rubio-Pizzorno, Sergio. (2018). *Integración digital a la práctica del docente de geometría*. Tesis de Maestría no publicada. Ciudad de México, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav). <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15488.94728/1>
- [28] Rubio-Pizzorno, Sergio. (2020). Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 9(1), 10–25. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15488.94728/1>
- [29] Sáiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza*. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav).

- [30] Sáiz M. (2003). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto de volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 8(18), pp. 447-478.
- [31] Secretaría de Educación Pública de México (2011). Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro Educación Básica Libro de texto gratuito. Sexto grado, Educación Básica primaria.
- [32] Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, pp. 114-145.
- [33] Swan, M. (2014). Design Research in Mathematics Education. En: Stephen Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer: Dordrecht. pp. 148-152.

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (Inaoe)
Puebla, México

Instituto GeoGebra Internacional y Comunidad GeoGebra Latinoamericana
Latinoamérica

almargortiz@gmail.com

sergio.rubio@cinvestav.mx

Probabilidad

Capítulo 5

Determinación del spread asociado a deuda corporativa con el modelo de difusión con saltos de Merton

José Antonio Climent Hernández¹, Luz Marina Hernández Bautista², Ambrosio Ortiz Ramírez²

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
U.A.M.–Azcapotzalco¹, Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional²

Resumen

El objetivo de este trabajo determinar el spread por agregar a un bono que respalda la deuda emitida por una empresa. Para ello se modifica el modelo de Merton de probabilidad de incumplimiento, el cual considera una empresa financiada mediante recursos propios, representados por una acción y recursos ajenos o deuda caracterizada por un bono cupón cero. Tanto la acción como el bono se negocian en un mercado bajo ausencia de arbitraje, no hay costos de transacción, ni impuestos, ni restricciones de ventas en corto. La modificación consiste en suponer que el valor contable de la empresa se puede descomponer como el valor de las emisiones de deuda más el valor del capital, que corresponde a una opción de compra con el supuesto que el subyacente tiene un comportamiento discontinuo (Merton, 1976), entonces se obtiene una ecuación que representa el rendimiento de un bono con riesgo, de tal forma que se puede calcular el riesgo de emisión de bonos de la empresa caracterizado por una prima de riesgo. Posteriormente se aplica el modelo propuesto a firmas representativas de la banca múltiple: BBVA, Banorte y Santander con datos diarios de sus respectivas acciones del período de tiempo del 01/01/2018 al 31/12/2018. Los parámetros del modelo de difusión con saltos de Merton se estiman mediante máxima verosimilitud. Se concluye que cuanto mayor sea la prima mayor será la probabilidad de incumplimiento de la empresa.

1 Introducción

Actualmente, se relaciona el riesgo crediticio a la situación que enfrentan los bancos cuando otorgan créditos a empresas, es decir, la probabilidad de que dichos recursos regresen parcial o totalmente. Sin embargo, los agentes se enfrentan a este mismo riesgo cuando toman decisiones tales como: invertir en bonos o acciones, depositar dinero a bancos, vender sus productos a crédito; ya que todas ellas contienen acuerdos contractuales que involucran compromiso de pago, y por lo tanto, la probabilidad de incumplimiento de la contraparte. El riesgo crediticio es, entonces, una combinación de la probabilidad de incumplimiento de la contraparte y las pérdidas ocasionadas por el mismo. Bajo la premisa de que existe riesgo de incumplimiento en todo contrato entre personas o entidades, la teoría del riesgo crediticio puede aplicarse a la evaluación del riesgo de incumplimiento de la empresa, en otra palabras, la probabilidad de quiebra de un corporativo.

El riesgo de crédito representa un tema de suma importancia para las empresas e instituciones financieras y también para aquellas otras instituciones que consumen productos financieros. Según [16] algunas de las razones que justifican la creciente importancia del riesgo de crédito son:

1. Incremento estructural en el número de fallos, debido al incremento en la competencia entre prestamistas.
2. El fenómeno de la desintermediación financiera, que hace que aparezcan un mayor número de potenciales prestatarios y una disminución de la calidad crediticia media de los mismos.
3. Mayor competencia entre prestamistas, que también ocasiona unos márgenes más estrechos.
4. La mayor volatilidad en los valores de las garantías o colaterales de las operaciones, asociada al aumento general de volatilidad en los mercados financieros en los últimos años.
5. El crecimiento espectacular en los derivados negociados en los mercados sobre el mostrador, que llevan implícito un incremento en el riesgo de contraparte al no existir una cámara de compensación.

Los modelos de riesgo de incumplimiento determinan la probabilidad de que una empresa no pueda cumplir con el pago de sus obligaciones adquiridas (probabilidad de default) y por consiguiente deban rematar sus activos o tal vez cesar sus operaciones. Una de las metodologías pioneras para el cálculo de la probabilidad de default, es el modelo de Merton [13], el cual forma parte de los modelos estructurales de valuación de riesgo de crédito, el cual relaciona la probabilidad de quiebra con la teoría de valuación de opciones financieras y la estructura de capital de las empresas, ya que analiza las acciones como una opción de compra sobre el valor de los activos de la empresa y establece que el incumplimiento tendrá lugar cuando los activos de la empresa sean inferiores a los pasivos [2]. Esta relación permite hacer una aproximación al valor histórico de los activos a partir del precio de cotización de las acciones y permite estimar el punto en el que la empresa caería en incumplimiento.

Por otra parte, a diferencia de los modelos de determinación de precios de activos conducidos por procesos estocásticos en tiempo continuo con trayectorias son continuas, los denominados procesos de difusión con saltos se han utilizado en finanzas para modelar el comportamiento discontinuo de la dinámica de los precios de activos. Como se explica en [12] la validez del modelo de Black y Scholes depende de si el comportamiento del precio del subyacente se puede describir mediante un proceso de difusión en tiempo continuo cuya trayectoria es continua con probabilidad 1. Por lo tanto, si la dinámica del precio del subyacente no se puede representar con un proceso estocástico con trayectoria continua, la solución de Black y Scholes no es válida, es decir, si el proceso que representa el precio presenta saltos abruptos, es decir, no son continuos, entonces los modelos en tiempo continuo no tienen la capacidad de explicar por qué ocurren tales saltos y, por lo tanto, no son adecuados. En [1] se señala que los riesgos de salto no pueden ignorarse en la determinación de precios de activos. Por lo tanto, se denominó como un proceso estocástico de “salto”, o también “modelo de difusión con salto” definido en tiempo continuo. En [18] se presenta evidencia de colas pesadas y la valuación de opciones europeas en el caso de GCARSO, se proponen estrategias de cobertura análisis de sensibilidad respecto a los parámetros de la intensidad del proceso de Poisson y su valor medio. En [8] se compara el modelo de Merton y el de Black-Scholes considerando la leptocurtosis y un ajuste a la sonrisa de volatilidad con datos de mercado. Se concluye que no obstante que el modelo de Merton es incompleto supera al modelo de Black y Scholes en cuanto a que modela la eficientemente a leptocurtosis y reproduce razonablemente la

sonrisa de volatilidad en el corto y largo plazo.

Este trabajo está organizado como sigue, en la siguiente sección se desarrolla el modelo de difusión con saltos de Merton, se deducen las fórmulas semi-analíticas de los precios de opciones de compra y de venta con ejemplos. En la sección 3 se describe el modelo de Merton (1974) con expresiones para la probabilidad de incumplimiento y un procedimiento para determinar el valor de mercado de la empresa y su volatilidad, los cuales son insumos para calcular tal probabilidad. En el transcurso de la sección 4 se describen los criterios para la elección de las empresas a las que se les aplicará el procedimiento que se plantea en la siguiente subsección, para ello se determina una ecuación que representa el rendimiento de un bono con riesgo y a partir de ella se puede medir el riesgo de emisión de bonos de la empresa y el método para la estimación de parámetros por máxima verosimilitud según [15]. En sección 5 se discuten los resultados de la aplicación de la metodología propuesta. Por último, en la sección 6 se presentan las conclusiones del presente trabajo indicando algunas extensiones por explorar en la agenda futura de investigación.

2 Modelo de difusión con saltos de Merton

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\{N_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$ y $\{W_t : t \geq 0\}$ un proceso de Wiener o movimiento browniano relacionado con la misma filtración $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$. Suponga que S_t es modelado por un proceso de difusión con saltos conducido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (\mu - q)dt + \sigma dW_t + (J_t - 1)dN_t \quad (1)$$

donde:

$$dN_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \lambda dt. \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt. \end{cases}$$

con constantes μ, q y σ la tendencia, tasa continua de dividendos y la volatilidad, respectivamente, y J_t la variable de salto tal que $\ln J_t \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$. Suponga que J_t, W_t y N_t son mutuamente independientes. Asimismo, sea $J_i, i = 1, 2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que también son independientes de N_t y W_t . Si S_{t-}

denota el valor de S_t antes de un evento de salto; al expandir $d(\ln S_t)$ en serie de Taylor y aplicando el lema de Itô [6]:

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= \frac{dS_t}{S_t^-} - \frac{1}{2} \left(\frac{dS_t}{S_t^-} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{dS_t}{S_t^-} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{dS_t}{S_t^-} \right)^4 + \dots \\ &= (\mu - q)dt + \sigma dW_t + (J_t - 1)dN_t - \frac{1}{2} (\sigma^2 dt + (J_t - 1)^2 dN_t) \\ &\quad + \frac{1}{3} (J_t - 1)^3 dN_t - \frac{1}{4} (J_t - 1)^4 dN_t + \dots \\ &= \left(\mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \\ &\quad + \left[(J_t - 1) - \frac{1}{2} (J_t - 1)^2 + \frac{1}{3} (J_t - 1)^3 - \frac{1}{4} (J_t - 1)^4 + \dots \right] dN_t \\ &= \left(\mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t + \ln J_t dN_t \end{aligned}$$

siempre que $-1 < J_t - 1 \leq 1$ ó $0 < J_t \leq 2$. Al integrar se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_t^T d(\ln S_u) &= \int_t^T \left(\mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) du + \int_t^T \sigma dW_u + \int_t^T \ln J_u dN_u \\ \ln \left(\frac{S_T}{S_t} \right) &= \left(\mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma W_{T-t} + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} \ln J_i. \end{aligned}$$

Al aplicar la función exponencial a ambos lados resulta en:

$$S_T = S_t e^{(\mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \quad (2)$$

donde $J_i \in (0, 2]$ es el tamaño de salto aleatorio que ocurre al tiempo t_i y $N_{T-t} = N_T - N_t$ es el número total de saltos en el intervalo de tiempo $(t, T]$.

Puesto que $W_{T-t} \sim \mathcal{N}(0, T - t)$, $\ln J_i \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$, $i = 1, 2, \dots$ y por independencia entre los procesos:

$$\begin{aligned} \ln S_T | \{S_t, N_{T-t} = n\} &\sim \mathcal{N} \left[\ln S_t + \left(\mu - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) \right. \\ &\quad \left. + n\mu_J, \sigma^2(T - t) + n\sigma_J^2 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Además, a partir de S_t y del supuesto de la mutua independencia del proceso de Wiener y del proceso de Poisson compuesto:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_T|S_t) &= \mathbb{E} \left[S_t e^{(\mu-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma W_{T-t}} \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i | S_t \right] \\ &= S_t e^{(\mu-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E}(e^{\sigma W_{T-t}}) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \right) \\ &= S_t e^{(\mu-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} (e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}) \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \right) \\ &= S_t e^{(\mu-q)(T-t)} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \right) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathbb{E}(S_T|S_t) = S_t e^{(\mu-q)(T-t)} \exp \left\{ \lambda \left(e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) (T-t) \right\}. \quad (4)$$

En cuanto a la varianza de S_T condicional a S_t , se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_T|S_t) &= \text{Var} \left[S_t e^{(\mu-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma W_{T-t}} \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i | S_t \right] \\ &= S_t^2 e^{2(\mu-q-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \text{Var}(e^{\sigma W_{T-t}}) \text{Var} \left(\prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i \right). \end{aligned}$$

Dado que $\text{Var}(e^{\sigma W_{T-t}}) = (e^{\sigma^2(T-t)} - 1) e^{\sigma^2(T-t)}$ entonces:

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_T|S_t) &= S_t^2 e^{2(\mu-q)(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1) \\ &\quad \times \left[\exp \left\{ \lambda(T-t) (e^{2(\mu_J - \sigma_J^2)} - 1) \right\} - \exp \left\{ 2\lambda(T-t) (e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Bajo este mismo marco, bajo una medida martingala equivalente \mathbb{Q}_M [5, 17] el proceso en (1) se puede escribir como:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - d - \lambda(\bar{J} - 1)) dt + \sigma d\tilde{W}_t + (J_t - 1)dN_t$$

donde $\bar{J} = E^{\mathbb{P}}(J_t) = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2}$, $\widetilde{W} = W_t - \left(\frac{\mu - r + \lambda(\bar{J} - 1)}{\sigma}\right)t$ es un movimiento browniano bajo la medida \mathbb{Q}_M y $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. \mathbb{Q}_M es la medida de la martingala equivalente obtenida al cambiar la tendencia del browniano, pero dejando la parte de saltos sin cambios¹, esto significa, que las propiedades de riesgo neutral del componente de saltos de S_t son las mismas que las de sus propiedades estadísticas. En particular, la distribución de los tiempos de saltos y los tamaños de los saltos no cambian. De esta manera se reescribe (2) como sigue:

$$S_T = S_t e^{(r - q - \lambda(\bar{J} - 1) - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma \widetilde{W}_{T - t}} \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i$$

donde $J_i \sim \mathcal{LN}(\mu_J, \sigma_J^2)$, $i = 1, 2, \dots, N_{T-t}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y $\widetilde{W}_{T-t} \sim \mathcal{N}(0, T - t)$. Por independencia de $J_i = 1, 2, \dots, N_{T-t}$, W_{T-t} y N_{T-t} :

$$\ln S_T | \{S_t, N_{T-t} = n\} \sim \mathcal{N} \left[\ln S_t + \left(r - q - \lambda \left(e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + n\mu_J, \sigma^2(T - t) + n\sigma_J^2 \right]$$

Al hacer:

$$\ln S_T | \{S_t, N_{T-t} = n\} \sim \mathcal{N} \left[\ln S_t + \left(\mu - \tilde{q} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \right) (T - t), \tilde{\sigma}^2(T - t) \right]$$

donde \tilde{q} es la tasa con composición continua de los dividendos y σ la volatilidad del precio del activo S_t conducido por un movimiento geométrico browniano. Así se genera un sistema de ecuaciones por resolver:

$$\begin{aligned} \left(\mu - \tilde{q} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \right) (T - t) &= \left(r - q - \lambda \left(e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + n\mu_J \\ \tilde{\sigma}^2(T - t) &= \sigma^2(T - t) + n\sigma_J^2. \end{aligned}$$

¹Merton justificó la elección de este modelo bajo la suposición de que el riesgo de un salto es diversificable, entonces no hay prima de riesgo concerniente a éste.

Al resolver se tiene:

$$\tilde{q} = q + \lambda \left(e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) - \frac{n}{T-t} \left(\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2 \right) \quad (6)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 + \frac{n\sigma_J^2}{T-t}. \quad (7)$$

A partir de la definición del precio de una opción de compra de tipo europeo con precio de ejercicio $K > 0$ y plazo al vencimiento $T \geq t$:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{M}}(S_t, t; K, T) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M} [\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_M(N_{T-t} = n) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M} [\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n] \\ &= e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} \right. \\ &\quad \left. \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M} [\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n] \right\} \end{aligned}$$

donde el término $\frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!}$ es la probabilidad de n saltos en el período de tiempo $(t, T]$. Dado que la distribución condicional de S_T dado S_t y $N_{T-t} = n$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$\ln S_T | \{S_t, N_{T-t} = n\} \sim \mathcal{N} \left[\ln S_t + \left(\mu - \tilde{q} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \right) (T-t), \tilde{\sigma}^2(T-t) \right].$$

Entonces, de acuerdo con el modelo de Black y Scholes [3, 14], el precio de la opción de compra con un enfoque probabilista [19, 10] definido como el valor presente de la esperanza bajo la medida neutral al riesgo \mathbb{Q}_M dado por:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M} [\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n]$$

es simplemente el precio de la opción de compra con dividendo \tilde{q} y volatilidad $\tilde{\sigma}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_M} [\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n] = C_{BS}(S_t, t; K, T),$$

donde:

$$C_{BS}(S_t, t; K, T) = S_t e^{-\tilde{q}(T-t)} \Phi(\tilde{d}_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(\tilde{d}_-)$$

Entonces, la expresión para valuar la opción de compra europea del modelo de Merton es:

$$C_{\mathcal{M}}(S_t, t; K, T) = e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} C_{BS}(S_t, t, K, T) \quad (8)$$

Para el precio de una opción de venta de tipo europeo con precio de ejercicio $K > 0$ y plazo al vencimiento $T \geq t$ se tiene que:

$$E^{\mathbb{Q}^M} [\max(K - S_T, 0) | \mathcal{F}_t, N_{T-t} = n] = P_{BS}(S_t, t; K, T).$$

Bajo los mismos supuestos anteriores, la expresión para valuar la opción de venta de tipo europeo con el modelo de Merton es:

$$P_{\mathcal{M}}(S_t, t; K, T) = e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} P_{BS}(S_t, t, K, T) \quad (9)$$

donde:

$$P_{BS}(S_t, t; K, T) = Ke^{-r(T-t)} \Phi(-\tilde{d}_-) - S_t e^{-\tilde{q}(T-t)} \Phi(-\tilde{d}_+)$$

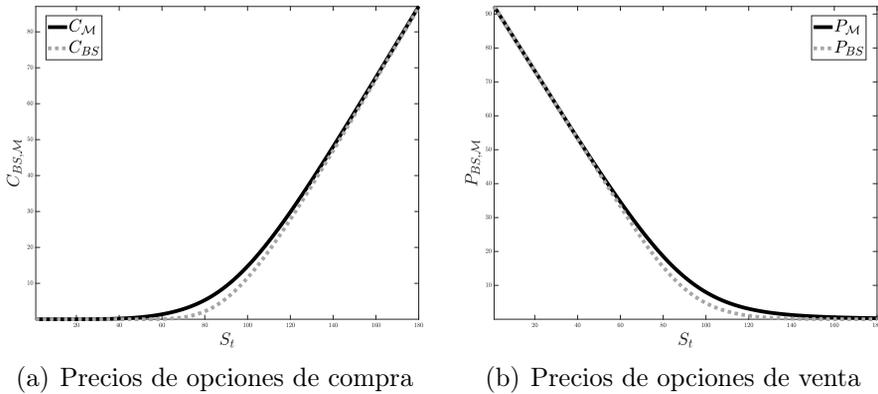
con:

$$\tilde{d}_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \tilde{q} \pm \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_2\right)(T-t)}{\tilde{\sigma}\sqrt{T-t}}.$$

donde la función $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 1 - \Phi(-d).$$

De acuerdo con (8) o (9), el precio de la opción, se calcula como el valor ponderado, con respecto al proceso de Poisson que modela los saltos y el precio de la opción de compra o de venta con el modelo de Black y Scholes modificado. Para n suficientemente grande tales expresiones permitirán obtener aproximaciones razonables a precios de opciones de compra o de venta de tipo europeo del modelo de difusión con saltos. Por ejemplo, con el supuesto que la volatilidad en el modelo de difusión de Merton y la del modelo de Black y Scholes son iguales. Al tener la parte discreta del salto con el proceso de



Fuente: elaboración propia.

Figura 1: Precios de opciones compra y de venta en función del precio del activo al tiempo cero calculados mediante el modelo de Black-Scholes y del modelo de difusión con salto de Merton 1976. Los parámetros son: $r = 0.07$, $\sigma_{BS} = 0.2$, $\mu_J = 0.1$, $\sigma_J = 0.1$ y $\lambda = 0.5$; S_t toma los valores desde $1, \dots, 180$ y el precio de ejercicio $K = 100$.

Poisson entonces aumenta el valor de la opción de compra cuando el precio actual del subyacente está cerca del precio de ejercicio. La evidencia empírica muestra que opciones de compra muy fuera del dinero tienden a cero, opciones en el dinero tienden a su valor intrínseco independientemente del modelo que se tenga en este caso. Para opciones de venta sucede algo similar. Lo anterior se muestra en la figura 1:

3 Modelo de Merton para probabilidad de incumplimiento

Una de las metodologías para modelar el riesgo crediticio de las entidades financieras está generalmente relacionada con los modelos de precio de mercado. A través de estos modelos se intenta conocer la percepción que tiene el mercado de la probabilidad de incumplimiento que enfrenta una entidad dado el precio de mercado de sus pasivos (bonos corporativos, acciones o derivados

de crédito). Se han desarrollado diferentes modelos para estimar el riesgo de crédito, algunos orientados a estimar el riesgo en su versión de mercado. Los modelos de incumplimiento se clasifican en modelos tradicionales, estructurales y de forma reducida [11]. El modelo de Merton pertenece a la categoría de modelos estructurales, tales modelos son los que más reconocimiento tienen en los mercados financieros, son utilizados por grandes firmas y existen varios trabajos al respecto en la literatura. Su característica principal es el supuesto que los inversionistas tienen toda la información del mercado, conocen por completo del valor de los activos y de las deudas de todas las firmas; se supone un mercado con competencia perfecta. Los modelos estructurales incluyen el modelo de Merton, el modelo de Geske [7], el modelo CreditMetrics de J.P. Morgan y el modelo Credit Portfolio Manager de KMV Moody's.

En los modelos estructurales de riesgo se identifican condiciones bajo las cuales se espera que los agentes puedan incumplir y posteriormente se estima la probabilidad de que estas condiciones ocurran. Merton propone un modelo en el que relaciona el riesgo de incumplimiento con la estructura de capital de las empresas. De acuerdo con este modelo, una empresa con responsabilidad limitada estará en incumplimiento cuando el valor de sus activos sea inferior al valor de sus pasivos. De la identidad contable, y bajo el supuesto de que accionistas reciben el valor residual de la empresa, si los pasivos superan el valor de los activos, el valor del patrimonio será nulo y se espera que la empresa ejerza la opción de declararse en incumplimiento [13]. Esta opción que tiene la empresa se puede evaluar a través de la teoría de opciones financieras. La aplicación de la teoría de opciones financieras en la estimación del riesgo de incumplimiento es de gran utilidad porque establece una relación entre variables no observadas y variables observadas como se describirá más adelante.

A continuación se describen los supuestos del modelo de Merton:

- (1) El mercado es perfecto, no existen costos de transacción ni impuestos², es decir, muchos inversores pueden vender al descubierto y comprar más de lo que ellos poseen en tiempo continuo.

²Con el supuesto de competencia perfecta es posible aplicar el modelo de Black y Scholes, entonces se tendría un inversionista o acreedor de una empresa que busca maximizar su utilidad sin rebasar su restricción presupuestal, por lo cual debe de elegir entre sus opciones de inversión. Es así como la teoría financiera debe de ser consistente con el supuesto de racionalidad económica [19].

- (2) La estructura de plazos es plana, la tasa de interés es fija para prestatarios y prestamistas para cualquier plazo.
- (3) El valor de la empresa es invariante a su estructura de capital.
- (4) Una empresa se puede financiar con capital propio y deuda (D) que vence al tiempo T , tanto el capital propio como la deuda se negocian en el mercado.

El incumplimiento se presenta cuando el valor de los activos es inferior al monto total de la deuda financiera. El valor de los activos se considera como una opción de compra europea que tiene como precio de ejercicio el monto de la deuda. Se utiliza la fórmula de valuación de Black y Scholes para calcular la probabilidad de incumplimiento. En el modelo de Merton se supone que una empresa emite bonos cupón cero que vencen en una fecha T [19]. Se definen las variables del modelo como sigue:

t : fecha de referencia, es decir, hoy.

T : fecha de vencimiento.

S_t : valor de mercado de las acciones de la empresa, hoy.

S_T : valor de mercado de las acciones de la empresa en T .

$B_c(t, T)$: valor de mercado de los bonos de la empresa, hoy.

V_t : valor de mercado de los títulos, de capital y deuda, de la empresa, hoy.

V_T : valor de mercado de los títulos, de capital y deuda, de la empresa en T .

D : principal e interés que la empresa debe pagar en T .

σ_S : volatilidad de las acciones de la empresa.

σ_V : volatilidad del valor de la empresa en el mercado.

En primer lugar se definirá a V_t , el cual esta compuesto por el valor de mercado de las acciones (S_t) y el valor de mercado de los bonos (B_c) de la empresa, es decir:

$$V_t = S_t + B_c(t, T) \quad (10)$$

Además, se supone que:

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t \quad (11)$$

y

$$dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_t \quad (12)$$

Dado que el proceso $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada³, existe una correlación perfecta entre las ecuaciones (11) y (12); estas ecuaciones tratan sobre los cambios en el valor de la empresa y en el valor de mercado de las acciones. Una limitación de (11) es que los parámetros μ_V y σ_V son no observables.

Si el valor de la empresa en el tiempo T es menor que la deuda, $V_T < D$, entonces la empresa incumple, por lo menos parcialmente, con el pago de su deuda, y en este caso $S_T = 0$. Si por el contrario $V_T \geq D$, la empresa paga su deuda en T y $S_T = V_T - D$. Esto se resume en:

$$S_T = \max(V_T - D, 0) \quad (13)$$

La ecuación anterior muestra que el valor de mercado de las acciones puede verse como una opción europea de compra sobre el valor de mercado de la empresa con precio de ejercicio igual al pago de su deuda. La fórmula de Black y Scholes proporciona el valor inicial de las acciones de la empresa en t (en un mundo neutral al riesgo) el cual está dado por:

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (14)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T-t}$$

³Es decir, el espacio $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}^W)$, con $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$.

El valor de la deuda hoy es: $B_c(t, T) = V_t - S_t$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 S_t &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(v - D, 0) f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv & (15) \\
 &= e^{-r(T-t)} \int_D^{\infty} (v - D, 0) f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv \\
 &= e^{-r(T-t)} \int_D^{\infty} v f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv - D e^{-r(T-t)} \int_{\{v>D\}} f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[V_T \mathbf{1}_{\{V_T > D\}} | V_t] - D e^{-r(T-t)} \mathbb{P}\{V_T > D | V_t\}
 \end{aligned}$$

Donde $f_{V_T|V_t}(v|V_t)$ es la función de densidad de V_T , condicional al valor inicial v_t . De acuerdo con (15), la probabilidad neutral al riesgo de que la empresa cumpla con el pago de su deuda es:

$$\mathbb{P}\{V_T > D | V_t\} = \Phi(d_2)$$

donde Φ es la función de distribución acumulada de una normal estándar. Por lo tanto la probabilidad al riesgo, de que la empresa incumpla con el pago de su deuda es:

$$\mathbb{P}\{V_T < D | V_t\} = 1 - \Phi(d_2) = \Phi(-d_2) = \int_{-\infty}^{-d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Para poder calcular esta probabilidad, se requiere conocer a σ_V y a V_t . Sin embargo, ninguna de estas dos cantidades es directamente observable. No obstante, si la empresa emite acciones que son colocadas públicamente, entonces S_t puede estimarse como el número de acciones por su precio en el mercado⁴. Se tiene, además, que $S_t = S_t(V_t, t)$, por lo cual, por el lema de Itô:

$$\mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_t = \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} + \mu_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \sigma_V^2 V_t^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial V_t^2} \right) dt + \sigma_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} dW_t \quad (16)$$

Como las componentes estocásticas deben ser iguales se sigue que:

$$\sigma_S S_t = \sigma_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t}$$

⁴Esto quiere decir, que la ecuación (14) proporciona una condición que deben cumplir σ_V y V_t .

ó, también:

$$\sigma_S S_t = \sigma_V V_t \Phi(d_1) \quad (17)$$

Si se cuenta con un estimador de σ_S , la desviación estándar de los rendimientos, entonces (17) es otra ecuación que deben satisfacer σ_V y V_t , por lo que las ecuaciones (14) y (17) forman un sistema de ecuaciones simultáneas para las variables σ_V y V_t . Además las partes deterministas de (16) implican:

$$\mu_S S_t = D e^{-r(T-t)} \left(-r \Phi(d_2) + \frac{\sigma_V \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right) + \mu_V \sigma_V \Phi(d_1) + \frac{\sigma_V V_t \Phi'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} \quad (18)$$

El sistema de ecuaciones de (14) y (17) dan como resultado los valores de σ_V y V_t , los cuales se sustituyen en (18) para obtener el valor de μ_V .

Al sustituir la ecuación (14) en (10), se obtiene que el precio del título de deuda es:

$$\begin{aligned} B_c(t, T) &= V_t - S_t \\ &= V_t - \left(V_t \Phi(d_1) - D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \right) \\ &= V_t (1 - \Phi(d_1)) + D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &= V_t \Phi(-d_1) + D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &= D e^{-r(T-t)} (\Phi(d_2) + m \Phi(-d_1)) \end{aligned}$$

de donde:

$$m = \frac{V_t}{D} e^{r(T-t)}$$

Con lo cual, el precio del bono corporativo es el valor presente del principal y los intereses, D , multiplicado por la probabilidad de cumplimiento dada por $\Phi(d_2)$, más el valor futuro del inverso del nivel de apalancamiento o cobertura de la deuda, m . $\Phi(-d_1)$ representa el negativo del cambio en el valor de mercado de las acciones ante un cambio en el valor de mercado de los títulos, de capital y de deuda de la empresa.

4 Metodología

Criterios para la elección de la empresa

El primer paso es obtener la información de las empresas para aplicar el modelo. En la sección anterior se desarrolló el modelo de Merton y se requieren

el valor de los activos, valor de la deuda, entre otros, por lo que se requiere conocer estos datos a partir de empresas cuyos estados financieros puedan ser consultados. En particular se eligieron tres de los grupos más representativos de la banca múltiple.

En la actualidad, las instituciones financieras juegan un papel crucial para el desarrollo económico de una nación, ya que reúne a aquellos que demandan fondos prestables con quienes están dispuestos a ofrecerlos a un cierto precio, y que al hacerlo contribuyen a elevar la eficiencia de una economía. Los demandantes del ahorro cuentan con mejores opciones de inversión que les permiten alcanzar una rentabilidad mayor de la que podrían obtener por sí mismos los oferentes, quienes en general, carecen de las alternativas de inversión de que disponen aquellos. El sistema financiero permite que el dinero circule en la economía, que pase por muchas personas y que se realicen transacciones con él, lo cual incentiva un sinnúmero de actividades, como por ejemplo, la inversión en proyectos. Según la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) se definieron a los grupos financieros BBVA, Citibanamex, Santander, Banorte, HSBC, Inbursa y Scotiabank como las firmas con mayor importancia sistémica en el país. Este organismo, después de una evaluación que realiza anualmente, determinó la importancia de estas siete instituciones de crédito cuya quiebra potencial afectaría la estabilidad del sistema financiero o la economía del país [9].

De acuerdo con datos de la CNBV de 2017, de la composición de la cartera, los grupos BBVA, Citibanamex y Santander eran las tres entidades con mayor participación en el mercado mexicano. BBVA lideró con una cartera total de un billón 52,367 millones de pesos y una participación en el mercado de 23.19%. Sus activos totales ascendían a un billón 879,348 millones de pesos. Le seguía Banorte e Interacciones con una cartera total de 701,679 millones de pesos y una participación de mercado de 15.46% con activos totales por un billón 249,817 millones de pesos. Para el caso de Citibanamex⁵ su cartera total era de 635,324 millones de pesos y una participación en el mercado de 14.0%. Sus activos totales ascendieron a un billón 133,017 millones de pesos. Santander contaba con una cartera total de 603,881 millones de pesos y una participación en el mercado de 13.31%. Sus activos totales ascendían a un

⁵De acuerdo con datos de la CNBV para 2017, Citibanamex tenía el lugar 3 en rentabilidad, sin embargo, en el análisis no se incluyó, debido a que no se encontraron datos completos para el año 2018.

billón 173,864 millones de pesos.

En el caso de este trabajo se eligieron a BBVA, Banorte y Santander. La información de las acciones de cada grupo financiero fue consultada en la dirección electrónica <https://mx.investing.com>, se tienen datos diarios de las acciones en el período 01/01/2016 a 31/12/2018, los estados financieros fueron consultados en las respectivas páginas de cada grupo financiero.

Planteamiento

En esta parte se hace una adecuación del modelo de Merton de incumplimiento para representar el riesgo crédito de una institución financiera, se hace el supuesto que ahora el valor de la empresa es modelado por un proceso de difusión con saltos, además mediante manipulaciones algebraicas se llega a una expresión que permite determinar un “spread”, el cual representa lo que se debe agregar al bono que respalda la deuda de la empresa.

De la sección anterior, se tiene que el valor de una empresa V se descompone como el valor de las emisiones de deuda más el valor del capital como sigue:

$$V = H(V, \tau) + h(V, \tau) \tag{19}$$

el valor del capital, $h(V, \tau)$, se calcula como indica la ecuación (8) con $\tau = T - t$, que corresponde a una opción de compra en el modelo de difusión con saltos de Merton. De la ecuación anterior, se despeja el valor de la deuda:

$$\begin{aligned} H(V, \tau) &= V - h(V, \tau) \\ &= V - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} C_{BS}(V, \tau; \tilde{\sigma}^2) \\ &= V - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} (VN(d_+) - Be^{-r\tau} N(d_-)) \right] \\ &= V - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} VN(d_+) + Be^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} N(d_-) \\ &= Be^{-r\tau} \left[\frac{V}{B} e^{r\tau} - \frac{e^{r\tau}}{B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} VN(d_+) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} N(d_-) \right] \\ &= Be^{-R(\tau)\tau} \tag{20} \end{aligned}$$

de donde:

$$R(\tau) = r - \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{V}{B} e^{r\tau} - \frac{e^{r\tau}}{B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} V N(d_+) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} N(d_-) \right) \quad (21)$$

Esta ecuación representa el rendimiento de un bono con riesgo y a partir de ella se puede medir el riesgo de emisión de bonos de la empresa, aunque en este caso el bono está sujeto a las condiciones del mercado en donde se va a emitir, por ejemplo, si es un bono cupón cero, entonces se tiene solamente un riesgo de incumplimiento con la deuda a un plazo máximo de un año. En otro escenario, se tendría que hacer otros supuestos para generar una estructura de plazos si la deuda es a plazos mayores de un año.

Ahora que se cuenta con una expresión analítica para el precio de la opción, el siguiente paso consiste en la estimación de parámetros del proceso de difusión con saltos, lo que implica estimar cinco variables: la tendencia del movimiento browniano y varianza, así como la tendencia, la varianza de los saltos y su intensidad asociada al proceso de Poisson.

De acuerdo con [15] un método de estimación basado en el principio de máxima verosimilitud es viable si la densidad de los rendimientos está disponible. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones, la densidad es una suma infinita, por lo que se debe truncar en algún punto, lo que induce errores que dependen de la precisión del método numérico empleado.

En la práctica se cuenta con observaciones del precio del activo a intervalos regulares de tamaño h , por lo que los rendimientos son de la forma:

$$R_i = \ln \left[\frac{S(i\tau)}{S\{(i-1)\tau\}} \right], i \in \{1, \dots, n\}$$

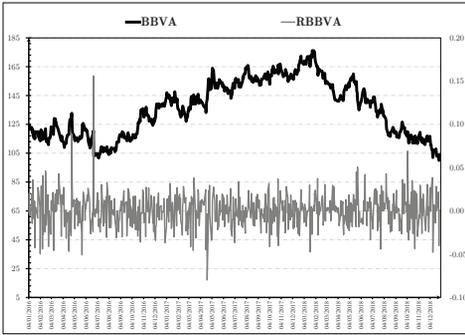
con el supuesto que son observaciones independientes e idénticamente distribuidas con la misma distribución.

Para el caso del modelo de Merton, condicionando a $N_t = n \geq 0$, los rendimientos se distribuyen como:

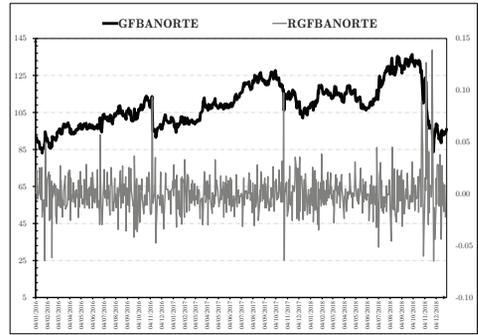
$$R_i \sim \mathcal{N}(\alpha + n\mu_J, \sigma^2\tau + n\sigma_J^2).$$

y su densidad está dada por:

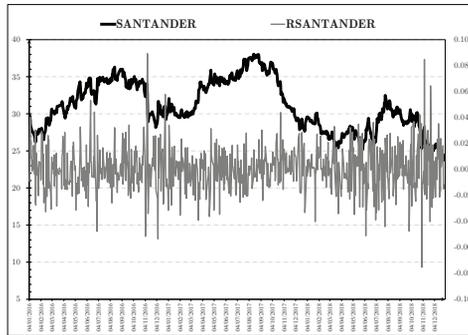
$$f_{R_i}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^k}{n!} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(r-\alpha-n\mu_J)^2}{\sigma^2\tau+n\sigma_J^2}}}{\sqrt{2\pi(\sigma^2\tau+n\sigma_J^2)}}, r \in \mathbb{R}$$



(a) Precios y rendimientos de BBVA.



(b) Precios y rendimientos de GFBA-NORTE.



(c) Precios y rendimientos de SANTANDER

Figura 2: Precios y rendimientos de BBVA (5.2(a)), de GFBANORTE (5.2(b)) y SANTANDER (5.2(c)).

Donde μ y σ son la media y varianza de W_t , respectivamente, λ son los saltos, μ_J y σ_J^2 son la media y varianza de difusión con saltos, respectivamente. En este apartado se calculan los rendimientos de BBVA, GFBANORTE Y SANTANDER del periodo 04/01/2016–31/12/2018, se calculan los parámetros del modelo de difusión y la prima de riesgo de cada grupo financiero (véase figura 2).

Los parámetros para el caso de BBVA, Banorte y Santander, se muestran en el siguiente cuadro:

Tabla 1: Estimación de parámetros de W_t y de difusión con saltos por máxima verosimilitud a partir de los rendimientos de BBVA, Banorte y Santander, período 04/01/2016–31/12/2018.

Parámetro	BBVA	Banorte	Santander
μ	-0.017281	0.058056	-0.027375
σ	0.273043	0.222519	0.225331
λ	3.079683	16.468401	26.958296
μ_J	-0.025037	-0.010658	-0.002469
σ_J	0.066467	0.047158	0.027574

Fuente: elaboración propia.

A partir de la figura 2 y del cuadro anterior se observa que la estimación de parámetros es consistente con la variabilidad que muestran los rendimientos, por ejemplo, en el caso de BBVA la variación es moderada en cuanto a saltos en su precio, mientras que para Santander la variación es muy irregular con varios cambios de su tendencia durante el periodo de tiempo que se consideró.

Para el cálculo de la prima de riesgo en el período del 01/01/2018 al 31/12/2018, se consultaron los valores del activo y pasivo obtenidos de los estados financieros de: BBVA⁶, GFBANORTE⁷ y SANTANDER⁸; tasa libre de riesgo de la página de Banxico. Se rehace el cálculo de la volatilidad sin saltos (σ), la media (μ_J) y la volatilidad de los saltos (σ_J), λ la intensidad del proceso de Poisson para cada empresa en dicho periodo. Los resultados se muestran en el siguiente cuadro:

⁶El estado financiero del 2018 fue consultado en <https://investors.bancomer.com/wp-content/uploads/2019/03/2018-BBVA-Bancomer-S.-A.ef18.pdf>

⁷Consultado en https://investors.banorte.com/~media/Files/B/Banorte-IR/financial-information/financial-statements/es/grupo-financiero-banorte/2018/q4/Dictamen_grupo_2018.pdf

⁸Consultado en https://www.santander.com.mx/ir/pdf/09_info_financiera_edos_financieros_consolidados/2018/04_cuarto_trim/Estados_Financieros_Consolidados_4T18.pdf

Tabla 2: Valores para las variables utilizadas en el cálculo de la prima de riesgo para BBVA, BANORTE, SANTANDER, y el resultado $R(\tau)$.

Variables	BBVA	GFBANORTE	SANTANDER
Activo	2,068,259,000,000	1,620,470,000,000	1,381,570,000,000
Pasivo	1,874,036,000,000	1,446,006,000,000	1,255,877,000,000
r_f	0.076185	0.076185	0.076185
Plazo	1	1	1
σ	0.282266	0.275306	0.260809
λ	0.0000012	4.456608	18.483847
μ_J	1.804094	-0.099123	0.001435
σ_J	0.409797	0.030816	0.035481
Iter	200	200	200
$R(\tau)$	0.127573	0.178623	0.432231

Fuente: elaboración propia.

El valor de la prima de riesgo $R(\tau)$ proporciona el valor al cual se deberían comercializar los bonos sobre la tasa de interés libre de riesgo de los grupos financieros, siendo para BBVA una prima de 12.7034 %, para GFBANORTE de 17.8623 % y para SANTANDER de 43.2231 %.

5 Conclusiones

En este capítulo se ha desarrollado el modelo de Merton para valorar opciones financieras, en el cual el salto se modela con un proceso de Poisson y el tamaño del salto se distribuye como una lognormal. Se estiman los parámetros del modelo de Merton mediante el método de máxima verosimilitud: $\mu, \sigma, \mu_J, \sigma_J$, siendo la media y la varianza para la difusión sin saltos, y la media y varianza para la difusión con saltos, respectivamente. λ es la intensidad del proceso de Poisson. Asimismo, se presenta un desarrollo algebraico para determinar una prima de riesgo, la cual se obtiene al descomponer el valor de las emisiones de deuda más el valor del capital. Se ejecuta una aplicación sobre los

grupos financieros que dominan el mercado mexicano: BBVA, GFBANORTE y SANTANDER con una ventana de tiempo del 02/01/2018–31/12/2018. Se consultaron los activos y pasivos para cada grupo financiero.

La evidencia empírica señala que la prima de riesgo más alto corresponde a Santander y la más baja para BBVA, seguida por la de GFBANORTE, debido a que estos grupos financieros dominan el mercado en México, por lo que una empresa con una mejor posición y calificación crediticia, dará como resultado una prima más baja, puesto que la calificación la proporciona el mercado y el precio del mercado de los bonos que emita tal grupo financiero refleja el riesgo de incumplimiento sobre tales emisiones.

Se destaca también la diferencia entre la prima de riesgo y la probabilidad de incumplimiento de una empresa, la prima de riesgo será el spread que debe tener la deuda para cubrir la probabilidad de incumplimiento.

Con los resultados obtenidos se puede inferir un escenario en que los bancos llegarán a quebrar y lo que sucedería con la economía mexicana. Ante tal escenario, los agentes retirarían su dinero de los bancos, pero la retirada masiva de capitales puede generar una situación de pánico bancario, creando una crisis financiera sistémica en el país. Si todos los depositantes retiraran su dinero del banco a la vez, se podría generar un desastre como el que ocurrió en Argentina en 2001: el sistema bancario colapsaría y no se podría devolver el dinero a ningún particular, por lo que esta no sería una buena idea. En el caso en el que los agentes no retiraran su dinero, podrían recuperar parte del mismo, pues el Instituto para la Protección al Ahorro Bancario (IPAB) se encarga de proteger el dinero depositado en cualquiera de los bancos que operan en México. Esto es posible gracias a la cobertura que de forma gratuita y automática se obtiene al abrir cualquier tipo de cuenta de ahorro. El Seguro de Depósito cubre alrededor del 99% de todas las cuentas de ahorro en la banca mexicana, esto es, a todos los ahorradores que tengan una cuenta en el sistema bancario mexicano, por una cantidad de hasta 400 mil UDIs (que al 24 de agosto del 2019) equivalen a \$ 2, 515, 561.20⁹.

Por otra parte, una de las limitaciones más importantes del modelo de Merton es que se supone que la empresa mantiene pasivos con la misma fecha de vencimiento y constantes en el corto plazo. Este supuesto es una limitante, ya que en la práctica las empresas se endeudan en cualquier momento del

⁹Información consultada en <https://www.gob.mx/ipab/articulos/el-ipab-garantiza-los-depositos-bancarios-de-los-pequenos-y-medianos-ahorradores-212629?idiom=es>

tiempo y mantienen diversos tipos de pasivos como bonos con pago de cupones, deudas bancarias, deudas con proveedores, entre otras; cada una con fecha de vencimiento diferente. En la presente investigación se incluyeron saltos en los precios de los activos con un proceso de Poisson, pero para obtener resultados aún más realistas, se podría extender a un escenario en el que se pueda incluir deuda con vencimiento en diferentes tiempos, ya sea que pague cupones a tasa fija o con tasa flotante. Al incorporar estas variaciones al modelo se puede mitigar, en parte, el efecto de sobre-estimación de la calidad crediticia de las empresas que se observa con frecuencia cuando se trabaja con pasivos homogéneos y constantes en el tiempo.

También, en la práctica se ha observado que el incumplimiento puede ocurrir en cualquier punto intermedio. Entonces, evaluar la probabilidad en un punto predefinido (con el supuesto de que los títulos de capital de la empresa se pueden negociar en una opción de compra europea) se puede extender a estimar el default en un punto intermedio (si los títulos de capital de la empresa se pueden negociar en una opción de compra americana) y compararlo con un valor del pasivo que cambie a través del tiempo. La idea es modelar que el default ocurra antes de la fecha de vencimiento del bono. Esta extensión se expone en el trabajo de Black y Cox [4].

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación: “*Probabilidad de quiebra de un corporativo con opciones financieras y procesos de Poisson*” con clave SIP-20195193, de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. De la misma manera, los autores agradecemos a los árbitros sus valiosas observaciones y recomendaciones.

Bibliografía

- [1] Ahn, C. M. y Thompson, H. E. (1988). *Jump diffusion processes and the term structure of interest rates*, Journal of Finance, **43**(1), 155–174.
- [2] Avellaneda, M., y Zhu, J. (2001). *Distance to Default*, RISK, **14**(12), 125–129.

-
- [3] Black, F. y M. Scholes, (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, **81**(3), 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [4] Black, F. y Cox, J. (1976). *Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions*. The Journal of Finance, **31**(2), 351-367. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1976.tb01891.x>
- [5] Cheang, G. y Chiarella, C. (2012). *A Modern View on Merton's Jump-Diffusion Model*, in Stochastic Processes, Finance and Control, Advances in Statistics, Probability and Actuarial Science, Worldscientific, 217-234. https://doi.org/10.1142/9789814383318_0009
- [6] Cont, R., y Tankov, P., (2004). *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC, UK.
- [7] Geske, R. (1977). *The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **12**, 541-552.
- [8] Gugole, N. (2016). *Merton jump-diffusion model versus the Black and Scholes approach for the log-returns and volatility smile fitting*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, **109**(3), 719-736. doi: 10.12732/ijpam.v109i3.19
- [9] Hernández, A. (2017). Define la CNBV a los 7 grupos financieros más importantes en México. El universal online. Descargado el 15 de abril del 2019, de <https://www.eluniversal.com.mx/articulo/cartera/finanzas/2017/04/10/define-la-cnbv-los-7-grupos-financieros-mas-importantes-en>
- [10] Hull, J. C. (2014). *Options, Futures, and Other Derivatives*, 9th edition, Pearson.
- [11] Jackson, P., Nickell, P., y Perraudin, W. (1999), *Credit Risk Modelling*, Financial Stability Review, Bank of England.
- [12] Merton, R. C. *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics, **3**(1-2) (1976), 125–144. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(76\)90022-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2)

- [13] Merton, R. C. *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*, The Journal of Finance, **29**(2) (1974), 449–470. doi:10.2307/2978814
- [14] Merton, R. C. *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics, **4**(1) (1973), 141–183.
- [15] Rémillard, B. (2013). *Statistical Methods for Financial Engineering*. First edition. USA: CRC Press Taylor Francis Group.
- [16] Saunders, A., y Allen, L. (2002). *Credit risk measurement*. USA: John Wiley y Sons Inc.
- [17] Shreve, S.E., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, USA (2004).
- [18] Venegas-Martínez, F. (2001). *Opciones cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO*. Estudios Económicos, **16** (2), 203–226. <https://doi.org/10.24201/ee.v16i2.204>
- [19] Venegas-Martínez, F., *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición, Cengage, México (2008).

División de Ciencias Básicas e Ingeniería, U. A. M.–Azcapotzalco
Av. San Pablo No. 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Alcaldía Azcapotzalco
Ciudad de México, C.P. 02200

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
Plan de Agua Prieta no. 66, Col. Plutarco Elías Calles, Alcaldía Miguel
Hidalgo
Ciudad de México, C.P. 11340

jach@azc.uam.mx

luzmar_e-123@hotmail.com

amortiz@ipn.mx

Capítulo 6

Procesos max-stable en el espacio-tiempo

Alejandro Iván Aguirre Salado, José del Carmen
Jiménez Hernández, Marisol López Cerino
IFM, UTM

Resumen

Recientemente los procesos max-stable se han convertido en una herramienta útil para la modelación estadística de eventos extremos espaciales, bajo ciertas condiciones, estos procesos son asintóticamente adecuados para modelar máximos de réplicas independientes de campos aleatorios. En este trabajo se presenta una extensión del modelo de Schlather (2002) al espacio-tiempo, se demuestra que el modelo propuesto es max-stable, se obtiene la función de distribución acumulada y la función de densidad de probabilidad, se propone usar máxima verosimilitud a pares para el proceso de estimación.

1 Introducción

En los últimos años la modelación estadística de eventos extremos ha tenido un gran número de aplicaciones en muchas áreas, por ejemplo, en hidrología, medio ambiente, por mencionar algunas, en las cuales la teoría de valores extremos se ha desarrollado ampliamente, Resnick (2007) y de de Haan y Ferreira (2006) presentan el sustento matemático mientras que Beirlant et. al (2006) y Coles et. al (2001) presentan su fundamento estadístico. Dentro de esta teoría, la modelación estadística con extremos espaciales presenta, recientemente, un gran interés, esto ha dado lugar a dos formas diferentes de modelación. La primera se basa en procesos max-stable, los cuales son una generalización infinito dimensional de la teoría de valores extremos multivariada (Huser y Davison, 2014). La segunda usa modelos jerárquicos bayesianos con

una estructura espacial latente, en ésta se puede describir la variación espacial de los parámetros en la distribución marginal.

Consideramos que, en vez de tomar solamente la distribución espacial en ciertos instantes de tiempo (procesos puramente espaciales) o considerar solamente su evolución temporal sobre ciertas localizaciones (procesos puramente temporales), si se considera la modelación del proceso de manera conjunta en el espacio–tiempo, se pueden obtener algunos beneficios. En años recientes, esta modelación ha llamado la atención de algunos investigadores y han propuesto algunas generalizaciones al espacio–tiempo de modelos que solo se han estudiado desde el enfoque espacial. Los primeros en considerar esto fueron Davis et. al (2013a), quienes extienden el modelo de Smith (Smith, 1990) al espacio–tiempo, presentan de manera explícita la función de distribución conjunta para dos ubicaciones y también muestran que la función de covarianza en el espacio–tiempo del proceso gaussiano se puede interpretar en términos de la función de dependencia del proceso max-stable espacio-temporal, esta extensión aun no presenta una aplicación a datos reales, el proceso de inferencia para esta extensión la muestran Davis et. al (2013b). Una segunda generalización, se presenta en Huser y Davison (2014), ellos extienden el modelo de Schlather (Schlather, 2002) al espacio–tiempo y lo aplican a datos de lluvias en Suiza. Nuestro interés se centra en el modelo de Schlather y nuestra propuesta se basa en extender este modelo al espacio–tiempo, nuestro principal resultado es que se obtiene de manera explícita la función de distribución acumulada bivariada del proceso espacio–temporal que se propone, a partir de aquí también se propone realizar inferencia usando la función de verosimilitud compuesta, específicamente, verosimilitud a pares.

2 Procesos max-stable y modelos espaciales

Los procesos max-stable surgen como una extensión natural de la teoría de valores extremos multivariada en dimensiones infinitas, éstos proporcionan una generalización natural de la estructura de dependencia extremal en espacios continuos. De esta forma, se puede derivar la función de distribución bivariada.

Definición 2.1. Sea T un conjunto de índices y sea $\{Y_i(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in T}$, $i = 1, \dots, n$, n réplicas independientes de un proceso estocástico continuo. Suponga que

existen sucesiones de funciones continuas $a_n(\mathbf{x}) > 0$ y $b_n(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ tal que

$$Z(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\max_{i=1}^n Y_i(\mathbf{x}) - b_n(\mathbf{x})}{a_n(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in T. \tag{1}$$

Si este límite existe, el proceso límite $Z(\mathbf{x})$ es un proceso max-stable (de Haan, 1984).

Note que (1) no garantiza que el límite exista, sin embargo, siempre sucede y se puede observar que este tipo de procesos pueden ser apropiados para modelar máximos de extremos espaciales. Sin pérdida de generalidad si $a_n(\mathbf{x}) = n$ y $b_n(\mathbf{x}) = 0$, las distribuciones marginales tienen distribución Fréchet, es decir, $F(\mathbf{z}) = \exp(-1/\mathbf{z})$, $\mathbf{z} > 0$. Actualmente existen dos caracterizaciones diferentes para este tipo de procesos. La primera de ellas, a menudo referido como el modelo de perfil de tormentas fue introducido por Smith (1990) y la segunda propuesta por Schlather (2002) quien introduce una nueva caracterización de éstos permitiendo una forma aleatoria.

El modelo de Smith

Sea $\{(\xi_i, y_i), i \geq 1\}$ que denotan los puntos de un proceso de Poisson sobre $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ con medida de intensidad $\xi^{-2} d\xi \nu(dy)$, donde $\nu(dy)$ es una medida positiva sobre \mathbb{R}^d . Entonces una caracterización de un proceso max-stable con distribuciones marginales Fréchet es,

$$Z(\mathbf{x}) = \max_i \{\xi_i f(y_i, \mathbf{x})\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

donde $\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d\}$ es una función no negativa tal que, $\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nu(dy)$ es 1, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Para ver que la ecuación (2) define un proceso estacionario max-stable con marginales Fréchet, se tiene que verificar que las marginales son de hecho Fréchet y que $Z(\mathbf{x})$ satisface la propiedad de un proceso max-stable. El proceso definido en (2) es más general y Smith considera un caso particular donde $\nu(dy)$ es la medida de Lebesgue y $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_0(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, donde $f_0(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ es la función de densidad normal multivariada con media cero y matriz de covarianza Σ . Con estos supuestos, se puede demostrar que la función de distribución acumulada para dos ubicaciones esta dada por,

$$\Pr[Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2] = \exp \left[-\frac{1}{z_1} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_2}{z_1} \right) - \frac{1}{z_2} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_1}{z_2} \right) \right]$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar, y para las ubicaciones 1 y 2, $a^2 = \Delta \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \Delta \mathbf{x}$, donde $\Delta \mathbf{x}$ es la distancia entre las dos ubicaciones.

El modelo de Schlather

Sea $Y(\cdot)$ un proceso estacionario sobre \mathbb{R}^d tal que $\mathbb{E}[\max\{0, Y(\mathbf{x})\}] = 1$ y sean $\{\xi_i, i \geq 1\}$ puntos de un proceso de Poisson sobre \mathbb{R}^+ con medida de intensidad $\xi^{-2} d\xi$. Entonces Schlather muestra que el proceso estacionario max-stable con marginales Fréchet unitarias se puede definir como,

$$Z(\mathbf{x}) = \max_i \xi_i \max\{0, Y_i(\mathbf{x})\}, \quad (3)$$

donde $Y_i(\cdot)$ son realizaciones de $Y(\cdot)$, independientes e idénticamente distribuidas.

La ecuación (3) es más general y necesita supuestos adicionales para obtener modelos prácticos. Schlather propuso tomar a $Y_i(\cdot)$ como un proceso estacionario gaussiano estándar con $\mathbb{E}[\max\{0, Y_i(\mathbf{x})\}] = 1$ y función de correlación $\rho(h)$, usualmente $\rho(h)$ se elige de una forma cerrada de una familia paramétrica válida, Whittle–Matérn, Cauchy Powered Exponencial o Bessel (Cressie, 2015).

3 Extensión del modelo al espacio–tiempo

En esta sección se presentan los resultados sobre la extensión del modelo de Schlather al espacio–tiempo. Se usará la notación $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ para indicar una localización genérica en algún espacio $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ y $t \in \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ o \mathbb{N} , por lo que se considera un proceso estocástico espacio–temporal dado por $\{Y(\mathbf{s}, t), \mathbf{s} \in \mathcal{S}, t \in \mathbb{R}\}$ el cual se observa en d coordenadas espacio–tiempo, $(\mathbf{s}_1, t_1), \dots, (\mathbf{s}_d, t_d)$, para más detalles de este tipo de procesos ver Cressie y Wikle (2015). El primer resultado es el siguiente.

Theorem 3.1. *Sea $\{Y(\mathbf{s}, t), \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}\}$ un proceso aleatorio espacio–temporal estacionario con $E\{Y(\mathbf{s}, t)\} = \mu < \infty$ y sea $\rho(\mathbf{h}, u) = \rho_{hu}$ alguna función de correlación para $Y(\mathbf{s}, t)$, además sea Π un proceso de Poisson sobre $(0, \infty)$ con intensidad $\mu^{-1} \xi^{-2} d\xi$, entonces el proceso*

$$Z(\mathbf{s}, t) = \max_{i \in \Pi} \xi_i Y_i(\mathbf{s}, t) = \max_i \xi_i \max\{0, Y_i(\mathbf{s}, t)\},$$

es un proceso max-stable con distribución marginal Fréchet unitaria, donde $\{Y_i(\mathbf{s}, t)\}$ son copias i.i.d de $\{Y(\mathbf{s}, t)\}$ para todo $i \in (0, \infty)$.

Demostración. Por demostrar que $Z(\mathbf{s}, t)$:

a) es max-stable y que

b) tiene distribución marginal Fréchet unitaria, es decir,

$$P \{Z(\mathbf{s}, t) \leq z\} = \exp\left(-\frac{1}{z}\right).$$

a) El proceso $Z(\mathbf{s}, t)$ es max-stable debido a la infinita divisibilidad del proceso de Poisson (de Haan, 1984), en otras palabras $Z(\mathbf{s}, t)$ es max-stable debido a la superposición de n procesos de Poisson idénticos e independientes. b) Para encontrar su distribución, considere el conjunto

$$E = \{(\xi, y(\mathbf{s}, t)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \xi \max\{0, y(\mathbf{s}, t)\} > z\},$$

entonces para \mathbf{s} fija y $z > 0$,

$$\begin{aligned} P \{Z(\mathbf{s}, t) \leq z\} &= P(\text{no existan puntos en } E) \\ &= \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\frac{z}{\max\{0, y(\mathbf{s}, t)\}}}^{\infty} \xi^{-2} \mu^{-1} d\xi \nu(dy(\mathbf{s}, t))\right\} \\ &= \exp\left\{-\mu^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} z^{-1} \max\{0, y(\mathbf{s}, t)\} \nu(dy(\mathbf{s}, t))\right\}, \end{aligned}$$

pero como $E \{Y(\mathbf{s}, t)\} = E [\max\{0, Y_i(\mathbf{s}, t)\}] = \mu$,

$$P \{Z(\mathbf{s}, t) \leq z\} = \exp(-z^{-1}) = \exp\left(-\frac{1}{z}\right),$$

la cual es la FDA de una distribución Fréchet unitaria. □

El segundo resultado muestra cual es la forma explícita de la función de distribución acumulada para el proceso max-stable dado en el teorema anterior, y es el siguiente.

Theorem 3.2. *La función de distribución acumulada bivariada de $Z(\mathbf{s}, t)$ definido en el Teorema 3.1 anterior esta dada por,*

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2) &= P \{Z(\mathbf{s}_1, t_1) \leq z_1, Z(\mathbf{s}_2, t_2) \leq z_2\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2z_1 z_2 (1 + \rho_{hu})}{(z_1 + z_2)^2}}\right)\right\}, \quad z_1, z_2 > 0, \end{aligned}$$

cuando $Y_i(\mathbf{s}, t) = \sqrt{2\pi} \max\{0, \varepsilon_i(\mathbf{s}, t)\}$ y $\varepsilon_i(\mathbf{s}, t)$ son copias independientes de un proceso aleatorio gaussiano espacio-temporal con función de correlación $\rho(\mathbf{h}, u) = \rho_{hu}$.

Demostración. La función de distribución acumulada de $Z(\mathbf{s}, t)$ se calcula usando la representación espectral de de Haan (1984) para procesos max-stable, dada por,

$$P\{Z(\mathbf{s}_1, t_1) \leq z_1, Z(\mathbf{s}_2, t_2) \leq z_2\} = \exp\{-V(z_1, z_2)\}, \quad z_1, z_2 > 0,$$

donde $V(z_1, z_2) = E\left\{\max_{i=1,2} \frac{Y_i(\mathbf{s}, t)}{z_i}\right\}$ y $Y_i(\mathbf{s}, t) = \sqrt{2\pi} \max_{i=1,2}\{0, \varepsilon_i(\mathbf{s}, t)\}$. Así,

$$\begin{aligned} V(z_1, z_2) &= \sqrt{2\pi} \int \max\left\{0, \frac{\varepsilon_1(\mathbf{s}_1, t_1)}{z_1}, \frac{\varepsilon_2(\mathbf{s}_2, t_2)}{z_2}\right\} dP \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \max\left\{0, \frac{v}{z_1}, \frac{u}{z_2}\right\} \frac{\exp\left\{-\frac{v^2 - 2uv\rho_{hu} + u^2}{2(1-\rho_{hu}^2)}\right\}}{2\pi(1-\rho_{hu}^2)^{1/2}} dvdu. \end{aligned}$$

Para simplificar, defina $f(u, v) = \frac{v^2 - 2uv\rho_{hu} + u^2}{2(1-\rho_{hu}^2)}$ y note que

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi(1-\rho_{hu}^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{hu}^2)}} = \frac{1}{k},$$

donde

$$k = \sqrt{2\pi(1-\rho_{hu}^2)}, \quad (4)$$

resultando,

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \max\left\{0, \frac{v}{z_1}, \frac{u}{z_2}\right\} \exp\{-f(u, v)\} dvdu.$$

Aquí se tienen tres casos al tomar el máximo, cuando es i) 0, ii) $\frac{v}{z_1}$ y iii) $\frac{u}{z_2}$.

i) De esta forma, cuando el máximo es 0, $V(z_1, z_2)$ resulta,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{v}{z_1} \exp\{-f(u, v)\} dvdu + \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{u}{z_2} \exp\{-f(u, v)\} dvdu \\ &= \frac{1}{kz_1} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} v \exp\{-f(u, v)\} dvdu + \frac{1}{kz_2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u \exp\{-f(u, v)\} dvdu. \end{aligned}$$

Defina

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty v \exp \{-f(u, v)\} dvdu$$

e

$$I_{11} = \int_0^\infty \int_0^\infty u \exp \{-f(u, v)\} dvdu.$$

Observe que el resultado de I_1 debe ser el mismo que el de I_{11} , por lo que se puede escribir lo siguiente,

$$\begin{aligned} I_1 + I_{11} &= \int_0^\infty \int_0^\infty (v + u) \exp \{-f(u, v)\} dvdu \\ 2I_1 &= \int_0^\infty \int_0^\infty (v + u) \exp \{-f(u, v)\} dvdu \\ \therefore I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (v + u) \exp \{-f(u, v)\} dvdu. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (v + u) \exp \{-f(u, v)\} dvdu \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) I_1. \end{aligned} \tag{5}$$

ii) Si el máximo es $\frac{v}{z_1}$, se debe cumplir que $\frac{v}{z_1} > \frac{u}{z_2} \Rightarrow v > u \frac{z_1}{z_2}$, por lo que $V(z_1, z_2)$ es,

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{k} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{v}{z_1} \exp \{-f(u, v)\} dvdu \\ &= \frac{1}{kz_1} \int_0^\infty \int_0^\infty v \exp \{-f(u, v)\} dvdu \\ &= \frac{1}{kz_1} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{v > u \frac{z_1}{z_2}\}} \exp \{-f(u, v)\} dvdu. \end{aligned}$$

Si se define

$$I_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{v > u \frac{z_1}{z_2}\}} \exp \{-f(u, v)\} dvdu,$$

entonces,

$$B = \frac{1}{kz_1} I_2. \tag{6}$$

iii) Análogamente a ii), si el máximo es $\frac{u}{z_2} \Rightarrow u > v \frac{z_2}{z_1}$, y $V(z_1, z_2)$ resulta,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{kz_2} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{u > v \frac{z_2}{z_1}\}} \exp\{-f(u, v)\} dv du \\ &= \frac{1}{kz_2} I_3. \end{aligned} \tag{7}$$

De esta forma con (5), (6) y (7),

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) I_1 + \frac{1}{kz_1} I_2 + \frac{1}{kz_2} I_3. \tag{8}$$

Ahora se procede a resolver cada una de las integrales anteriores. Para I_1 usemos la transformación

$$u = x + y$$

$$v = x - y.$$

El jacobiano es 2, $u + v = 2x$ y sustituyendo en $f(u, v)$,

$$f(x, y) = \frac{2[x^2(1 - \rho_{hu}) + y^2(1 + \rho_{hu})]}{2(1 - \rho_{hu}^2)} = k_1 x^2 + k_2 y^2$$

siendo

$$k_1 = \frac{1 - \rho_{hu}}{1 - \rho_{hu}^2} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{1 + \rho_{hu}}{1 - \rho_{hu}^2},$$

de esta forma,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{|y|}^\infty 2x \exp(-k_1 x^2 - k_2 y^2) 2 dx dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{|y|}^\infty 2x \exp(-k_1 x^2) dx \right) \exp(-k_2 y^2) dy, \end{aligned}$$

pero

$$\int_{|y|}^\infty 2x \exp(-k_1 x^2) dx = \frac{1}{k_1} \exp(-k_1 y^2),$$

así,

$$I_1 = \frac{1}{k_1} \int_0^\infty \exp(-k_1 y^2) \exp(-k_2 y^2) dy = \frac{1}{k_1} \int_0^\infty \exp\{-(k_1 + k_2) y^2\} dy.$$

Recuerde que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-r^2) dr = \sqrt{\pi}$,

$$\therefore I_1 = (1 + \rho_{hu}) \frac{\sqrt{1 - \rho_{hu}^2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} = \frac{(1 + \rho_{hu}) \sqrt{2\pi(1 - \rho_{hu}^2)}}{2} = \frac{(1 + \rho_{hu})k}{2}, \quad (9)$$

donde k esta dado en (4). Para resolver I_2 e I_3 defina

$$g(z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} 1_{\{u > vz\}} \exp\{-f(u, v)\} dvdu,$$

con esto se observa que

$$I_2 = g(z_1 z_2^{-1}) \quad \text{e} \quad I_3 = g(z_2 z_1^{-1}),$$

esto sugiere que sólo basta calcular $g(z)$. Observe que

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^{\infty} \int_{uz}^{\infty} v \exp\{-f(u, v)\} dvdu \\ &= \int_0^{\infty} \int_{uz}^{\infty} (v - u\rho_{hu}) \exp\{-f(u, v)\} dvdu - \\ &\quad \rho_{hu} \int_0^{\infty} \int_0^{uz} u \exp\{-f(u, v)\} dvdu + \\ &\quad \rho_{hu} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u \exp\{-f(u, v)\} dvdu. \end{aligned}$$

También defina,

$$h(z) = \int_0^{\infty} \int_{uz}^{\infty} (v - u\rho_{hu}) \exp\{-f(u, v)\} dvdu,$$

y observe que

$$\int_0^{\infty} \int_0^{uz} u \exp\{-f(u, v)\} dvdu = g(z^{-1})$$

y

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \exp\{-f(u, v)\} dvdu = I_1,$$

así,

$$g(z) = h(z) - \rho_{hu}g(z^{-1}) + \rho_{hu}I_1.$$

Sustituyendo $g(z^{-1})$ en $g(z)$ y simplificando se obtiene,

$$g(z) = \frac{h(z) - \rho_{hu}h(z^{-1}) + \rho_{hu}(1 - \rho_{hu})I_1}{1 - \rho_{hu}^2}. \quad (10)$$

Ahora se resuelve $h(z)$ por sustitución simple, para ello sea $t = f(u, v)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dv} &= \frac{2v - 2u\rho_{hu}}{2(1 - \rho_{hu}^2)} = \frac{v - \rho_{hu}u}{(1 - \rho_{hu}^2)}, \\ \therefore (1 - \rho_{hu}^2)dt &= (v - u\rho_{hu})dv, \end{aligned}$$

note que si $v = uz$ entonces $t = au^2$, con

$$a = \frac{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1}{2(1 - \rho_{hu}^2)},$$

así,

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^\infty \int_{uz}^\infty (v - u\rho_{hu}) \exp\{-f(u, v)\} dv du \\ &= \int_0^\infty \int_{au^2}^\infty (1 - \rho_{hu}^2) \exp(-t) dt du \\ &= (1 - \rho_{hu}^2) \int_0^\infty \exp(-au^2) du \\ &= (1 - \rho_{hu}^2) \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}, \text{ sustituyendo } a \\ &= \frac{(1 - \rho_{hu}^2)\sqrt{2\pi(1 - \rho_{hu}^2)}}{2\sqrt{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1}} \\ &= \frac{(1 - \rho_{hu}^2)k}{2\sqrt{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Si se sustituye z^{-1} en (11) el radical del denominador se puede escribir como

$$\sqrt{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1} = \frac{1}{z} \sqrt{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1}.$$

Sustituyendo (11) y (9) en (10), se obtiene

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{k}{2\sqrt{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1}} - \frac{z\rho_{hu}k}{2\sqrt{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1}} + \frac{\rho_{hu}k}{2} \\ &= \frac{k}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1}} - \frac{z\rho_{hu}}{\sqrt{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1}} + \rho_{hu} \right). \end{aligned}$$

Si $z = z_1/z_2$,

$$\sqrt{z^2 - 2z\rho_{hu} + 1} = \frac{1}{z_2} \sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} g\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \frac{z_2}{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}} - \\ &\quad \frac{z_1z_2\rho_{hu}}{z_2\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}} + \rho_{hu} \\ &= \left[\frac{(z_2 - z_1\rho_{hu})}{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}} + \rho_{hu} \right]. \end{aligned}$$

Similarmente, si $z = z_2/z_1$ se tiene,

$$g\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{k}{2} \left[\frac{(z_1 - z_2\rho_{hu})}{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}} + \rho_{hu} \right].$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{1}{kz_1} I_2 + \frac{1}{kz_2} I_3 &= \frac{1}{kz_1} g\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \frac{1}{kz_2} g\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \\ &= \frac{1}{kz_1} \frac{k}{2} \left[\frac{(z_2 - z_1\rho_{hu})}{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}} + \rho_{hu} \right] + \\ &\quad \frac{1}{kz_2} \frac{k}{2} \left[\frac{(z_1 - z_2\rho_{hu})}{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}} + \rho_{hu} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left[\sqrt{1 - \frac{2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}{(z_1 + z_2)^2}} + \rho_{hu} \right]. \end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo en (8),

$$\begin{aligned}
 V(z_1, z_2) &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) I_1 + \frac{1}{kz_1} I_2 + \frac{1}{kz_2} I_3 \\
 &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{(1 - \rho_{hu})k}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \\
 &\quad \left[\sqrt{1 - \frac{2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}{(z_1 + z_2)^2}} + \rho_{hu} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left[1 - \rho_{hu} \sqrt{1 - \frac{2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}{(z_1 + z_2)^2}} + \rho_{hu} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}{(z_1 + z_2)^2}} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore F(z_1, z_2) &= P \{ Z(\mathbf{s}_1, t_1) \leq z_1, Z(\mathbf{s}_2, t_2) \leq z_2 \} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2z_1z_2(1 + \rho_{hu})}{(z_1 + z_2)^2}} \right] \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2z_1z_2(1 + \rho(\mathbf{h}, u))}{(z_1 + z_2)^2}} \right] \right\} \\
 &\quad , \quad z_1, z_2 > 0.
 \end{aligned}$$

□

Note que $F(z_1, z_2)$ es una FDA bien definida ya que si $z_1, z_2 \rightarrow \infty$, entonces $F(z_1, z_2) \rightarrow 1$ y si $z_1, z_2 \rightarrow 0$, entonces $F(z_1, z_2) \rightarrow 0$, así $0 \leq F(z_1, z_2) \leq 1$. Además, si $z_1 \rightarrow \infty$ y $z_2 = z$, $F(z) = \exp(-1/z)$, $z > 0$ que es la distribución Fréchet unitaria, esto coincide con la segunda parte del Teorema 3.1.

Ahora bien, si se define

$$a(z_1, z_2) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right)$$

y

$$b(z_1, z_2) = 1 + \sqrt{1 - \frac{2z_1z_2(1 + \rho(\mathbf{h}, u))}{(z_1 + z_2)^2}},$$

entonces

$$F(z_1, z_2) = \exp \{a(z_1, z_2)b(z_1, z_2)\}, \quad z_1, z_2 > 0,$$

así la función de densidad bivariada toma la forma,

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \exp \{a(z_1, z_2)b(z_1, z_2)\} \times \\ &\quad \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \{a(z_1, z_2)b(z_1, z_2)\} + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial z_1} \{a(z_1, z_2)b(z_1, z_2)\} + \frac{\partial}{\partial z_2} \{a(z_1, z_2)b(z_1, z_2)\}. \end{aligned}$$

Inferencia para el modelo propuesto

Suponga que el proceso espacio-temporal de interés $Z(\mathbf{s}, t) \in \mathcal{S} \times \mathbb{N}$ ha sido muestreado en S estaciones en T tiempos, resultando $N = ST$ datos en el espacio-tiempo. El estudio de los extremos de $Z(\mathbf{s}, t)$ se realiza suponiendo que el proceso max-stable es un modelo razonable para máximos por bloques, sin embargo, la inferencia clásica no es posible ya que la función de verosimilitud completa es intratable para esos modelos, en contraste se puede usar la verosimilitud a pares para realizar dicha inferencia, para ello, suponga que el proceso $Z(\mathbf{s}, t)$ se puede dividir en n bloques de máximos $M_i(\mathbf{s}), i = 1, \dots, n$. Sea $m_{\mathbf{s};i}$ el i -ésimo bloque registrado en la \mathbf{s} -ésima estación. Suponiendo que el proceso max-stable con función de densidad bivariada $f(z_1, z_2; \boldsymbol{\psi})$, donde $\boldsymbol{\psi}$ es el vector de parámetros a estimar, proporciona un ajuste razonable para el proceso espacio-temporal de máximos, se puede hacer inferencia basado en la log-verosimilitud a pares, dada por,

$$\ell_p(\boldsymbol{\psi}) = \sum_{i=1}^n \sum_{s_1=1}^{S-1} \sum_{s_2=s_1+1}^S \log f(m_{s_1;i}, m_{s_2;i}; \boldsymbol{\psi}). \tag{12}$$

Esta metodología ha sido usada satisfactoriamente en el enfoque espacial por Padoan et al. (2010) en el estudio de precipitaciones extremas en USA, Davison y Gholamrezaee (2011) usan esta aproximación para ajustar un proceso max-stable espacial para máximos de temperatura anual en Suiza.

De aquí,

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}_p = \arg \max_{\boldsymbol{\psi} \in \Psi} \ell_p(\boldsymbol{\psi}).$$

Los estimadores de máxima verosimilitud compuesta, heredan propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud clásica (los que se obtienen usando la verosimilitud completa). Bajo condiciones de regularidad (ver Davison 2003, p. 118), éstos son consistentes y asintóticamente normales (ver Cox y Reid 2004, Varin et al. 2011), así,

$$\widehat{\psi}_p \sim N_q\{\psi_0, V_p(\widehat{\psi}_p)\},$$

cuando $n \rightarrow \infty$, donde $V_p(\widehat{\psi}_p)$ es la varianza estimada.

4 Conclusiones

El principal objetivo de este trabajo se centró en la generalización del modelo de Schlather al espacio-tiempo, aquí se propone introducir un proceso espacio-temporal y se demuestra que el proceso construido es max-stable, posteriormente se encuentra la función de distribución acumulada bivariada para el modelo propuesto, con ésta se propone usar la metodología de verosimilitud a pares para realizar inferencia para el modelo.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con el auspicio del PRODEP, carta de liberación no. 511-6/17-7661.

Bibliografía

- [1] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J. y Teugels, *Statistics of extremes: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2006.
- [2] Coles, S., Bawa, J., Trenner, L. y Dorazio, P. *An introduction to statistical modeling of extreme values*, tomo 208. Springer Series in Statistics, 2001.
- [3] Cox, D. R. y Reid, N. *A note on pseudolikelihood constructed from marginal densities*. Biometrika, 91, (2004), 729–737.
- [4] Cressie, N. *Statistics for spatial data*. John Wiley & Sons, 2015.

-
- [5] Cressie, N. y Wikle, C. K. *Statistics for spatio-temporal data*. John Wiley & Sons, 2015.
- [6] Davis, R. A., Kluppelberg, C. y Steinkohl, C. *Max-stable processes for modeling extremes observed in space and time*. Journal of the Korean Statistical Society, 42, **3** (2013a), 399–414.
- [7] Davis, R. A., Kluppelberg, C. y Steinkohl, C. *Statistical inference for max-stable processes in space and time*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 75, **5** (2013b), 791–819.
- [8] Davison, A. C. *Statistical Models*, New York: Cambridge University Press, 2003.
- [9] Davison, A. C. y Gholamrezaee, M. M. *Geostatistics of extremes*. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 468, **2138** (2011), 581–608.
- [10] de Haan, L. *A Spectral Representation for Max-stable Processes*. The Annals of Probability, 12, **4** (1984), 1194–1204.
- [11] de Haan, L. y Ferreira, A. *Extreme value theory: An introduction*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [12] Huser, R. y Davison, A. C. *Space-time modelling of extreme events*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 76, **2**(2014) 439–461.
- [13] Padoan, S. A., Ribatet, M. y Sisson, S. A. Likelihood-Based Inference for Max-Stable Processes. *Journal of the American Statistical Association*, 105, **489** (2012), 263–277.
- [14] Resnick, S. I. *Heavy-tail phenomena: probabilistic and statistical modeling*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [15] Schlather, M. Models for Stationary Max-Stable Random Fields. *Extremes*, 5, **1** (2002) 33–44.
- [16] Smith, R. L. Max-stable processes and spatial extremes. Unpublished manuscript, (1990).

- [17] Varin, C., Reid, N. y Firth, D. *An overview of composite likelihood methods*. *Statist. Sinica* 21, (2011), 5–42.

Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Carr. a Acatlima Km. 2.5, Colonia Acatlima,
Huajuapán de León, Oaxaca. C.P. 69000.

`jcjim@mixteco.utm.mx`

`marisol@mixteco.utm.mx`

`aleaguirre@mixteco.utm.mx`

Topología

Capítulo 7

La clase de las gráficas finitas es SF_n -cerrada

David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero,
Germán Montero Rodríguez
FCFM, BUAP

Resumen

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos el hiperespacio $F_n(X)$ de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X con a lo más n puntos. Note que $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$. Dado $n \geq 2$, el n -ésimo *producto simétrico suspensión* de X es el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$ y es denotado por $SF_n(X)$. En este capítulo probamos lo siguiente: si X es una gráfica finita y Y es un continuo tal que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces Y es una gráfica finita.

1 Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. El conjunto de los números enteros positivos lo denotamos por \mathbb{N} .

En 1979, S. B. Nadler Jr. introduce el concepto de hiperespacio suspensión de un continuo, véase [15, Pág. 125]. En 2004, Sergio Macías lo generaliza al n -ésimo hiperespacio suspensión de un continuo y es definido como el espacio cociente $C_n(X)/F_n(X)$ el cual se obtiene de $C_n(X)$ al identificar a $F_n(X)$ en un punto y se denota como $HS_n(X)$, véase [12, Pág. 127]. El (n, m) -ésimo *hiperespacio suspensión* de un continuo X es el espacio cociente $C_n(X)/F_m(X)$ que se obtiene de $C_n(X)$ al identificar a $F_m(X)$ a un punto, donde $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, y lo denotamos por $HS_m^n(X)$.

Ahora, dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, por el n -ésimo *producto simétrico suspensión* de X , denotado por $SF_n(X)$, pensamos en el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, el cual es obtenido de $F_n(X)$ al identificar a $F_1(X)$

a un punto con la topología cociente; en [2] podemos encontrar ejemplos y propiedades de este hiperespacio.

Dado un continuo X , denotamos por $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X . Una clase de continuos λ es \mathcal{H} -cerrada si prueba lo siguiente: si $X \in \lambda$ y Y un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces $Y \in \lambda$.

En este trabajo demostramos esta propiedad para cuando λ es la clase de las gráficas finitas y $\mathcal{H}(X)$ es el n -ésimo producto simétrico suspensión de X .

Los siguientes resultados son bien conocidos respecto a la propiedad $\mathcal{H}(X)$ -cerrada, para el caso particular de las gráficas finitas.

- (1) La clase de las gráficas finitas es F_n -cerrada, para algún $n \in \mathbb{N}$, (véase [3, Corolario 3.5]).
- (2) La clase de las gráficas finitas es C_n -cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$, (véase las pruebas de los siguientes resultados: [8, Teorema 4.1] y [9, Teorema 3.8]).
- (3) La clase de las gráficas finitas es HS_m^n -cerrada, para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, (véase [1, Teorema 3.3]).

Para más conceptos y resultados relacionados a la teoría de este capítulo se puede consultar: [6], [13], [11].

El resultado principal en este trabajo muestra que: si X es una gráfica finita, $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, y Y es un continuo tal que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces Y es una gráfica finita, (véase el Teorema 5.7)

2 Preliminares

Dado un subconjunto A de un continuo X , el *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de A en X , son denotados por $\text{int}_X(A)$, $\text{cl}_X(A)$ y $\text{bd}_X(A)$, respectivamente. Si d es la métrica de X , $t \in X$ y $\varepsilon > 0$, sea $B_X(t, \varepsilon) = \{x \in X : d(t, x) < \varepsilon\}$. Como es usual, los símbolos \emptyset , \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 , representan el conjunto vacío, los números reales y el plano euclidiano, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Un *arco* es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Una *n -celda* es un espacio topológico homeomorfo a la bola

unitaria $B_n(\mathbf{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_n \leq 1\}$. Una *curva cerrada simple* es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$. Para $n \geq 3$, un *n-odo simple* Y es la unión de n arcos J_1, \dots, J_n en Y con la propiedad $J_l \cap J_k = \{v\}$ si $l \neq k$ y v es un punto extremo de los arcos J_l . El punto v es llamado el *vértice* de Y . Un 3-odo simple es llamado *triodo simple*.

Una *gráfica finita* es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan únicamente en uno o en ambos de sus puntos extremos.

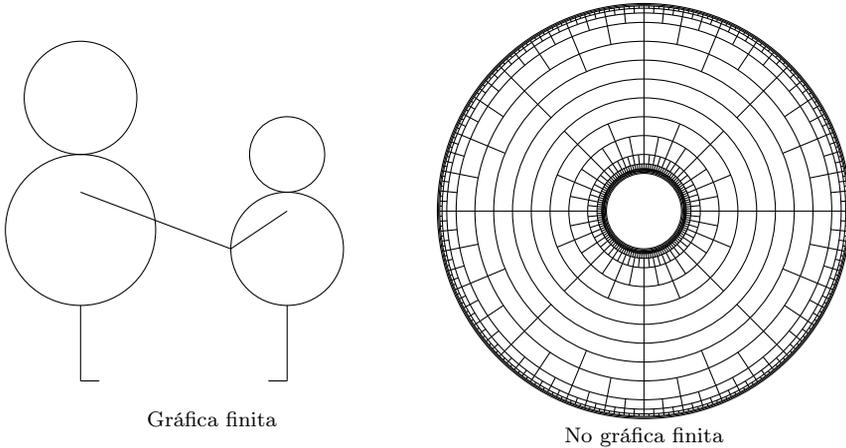


Figura 1: Gráfica finita y continuo que no es gráfica finita

Sea X un continuo y $x \in X$. Sea β un número cardinal. Decimos que x *tiene orden menor o igual que* β , en X , denotado por $\text{ord}(x, X) \leq \beta$, cuando x tiene una base de vecindades \mathfrak{B} en X tal que la cardinalidad de la frontera de U en X es menor o igual que β , para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que x *tiene orden igual que* β , en X ($\text{ord}(x, X) = \beta$) si prueba que $\text{ord}(x, X) \leq \beta$ y $\text{ord}(x, X) \not\leq \alpha$ para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$. Sea $E(X) = \{x \in X : \text{ord}(x, X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X : \text{ord}(x, X) = 2\}$, y $R(X) = \{x \in X : \text{ord}(x, X) \geq 3\}$. Los elementos de $E(X)$ (respectivamente, $O(X)$ y $R(X)$) se llaman *puntos extremos* (respectivamente, *puntos ordinarios* y *puntos de ramificación*) de X .

Dada una gráfica finita X , un *arco libre* en X es un arco J con puntos extremos x y z tal que $J - \{x, z\}$ es un subconjunto abierto de X . Un *arco*

libre maximal en X es un arco libre en X el cual es maximal con respecto a la inclusión. Un *ciclo* en X es una curva cerrada simple J en X tal que $J - \{a\}$ es un subconjunto abierto en X para algún $a \in J$. Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_R(X) &= \{J \subset X : J \text{ es un ciclo en } X\}, \\ \mathcal{A}_S(X) &= \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X\} \cup \mathcal{A}_R(X), \\ \mathcal{A}_E(X) &= \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal tal que } |J \cap R(X)| = 1\}.\end{aligned}$$

Dada una gráfica finita X , los elementos de $\mathcal{A}_S(X)$ se conocen como *aristas* de X .

Lema 2.1. Sean X una gráfica finita con $R(X) \neq \emptyset$ y $J, K \in \mathcal{A}_S(X)$. Entonces

- (a) si $p \in \text{int}_X(J)$, entonces $p \notin R(X)$,
- (b) si $p \in \text{bd}_X(K)$, entonces $p \in R(X)$ y
- (c) si $J \neq K$, entonces $\text{int}_X(J) \cap K = \emptyset$.

Demostración. (a) Sea $p \in \text{int}_X(J)$ y sea U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Entonces, existe un arco L en J tal que $p \in \text{int}_J(L) \subset L \subset U \cap \text{int}_X(J)$. Como $U \cap \text{int}_X(J)$ es un subconjunto abierto de X , tenemos que $\text{int}_J(L)$ es un subconjunto abierto de X . Así, $\text{bd}_X(\text{int}_J(L)) = L - \text{int}_J(L)$. Como $L - \text{int}_J(L)$ tiene a lo más dos elementos, tenemos que $\text{bd}_X(\text{int}_J(L))$ tiene a lo más dos elementos. Esto implica que $p \in E(X) \cup O(X)$. Así, $p \notin R(X)$.

(b) Sea $p \in \text{bd}_X(K)$ y sea \mathcal{B} una base de vecindades de p en X . Como $R(X) \neq \emptyset$ existe $q \in X - K$ y dado que X es localmente conexo existe L un arco en X con puntos extremos p y q .

Caso 1. Supongamos que K es un ciclo. Como $K - \{p\}$ es un subconjunto abierto de X tenemos que $K \cap L = \{p\}$. Sea $r = d(p, q)$ y $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset B_X(p, r)$. Note que $\text{bd}_X(U)$ tiene al menos tres elementos. Esto implica que $p \notin E(X) \cup O(X)$. Así, $p \in R(X)$.

Caso 2. Supongamos que K es un arco. Note que p es un punto extremo de K . Sea a el otro punto extremo de K . Como $K - \{a, p\}$ es un subconjunto abierto de X , tenemos que $K \cap L \subset \{a, p\}$. Podemos suponer que $K \cap L = \{p\}$. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(p, \epsilon) \subset K \cup L$. Sea C_p la componente de $B_X(p, \epsilon)$ tal que $p \in C_p$ y sea $L_p = \text{cl}_X(C_p)$. Así, L_p es un arco. Más aún,

$K \cup L_p$ es un arco libre. Esto contradice la maximalidad de K . Por tanto, para cualquier $\epsilon > 0$, tenemos que $B_X(p, \epsilon) \not\subset K \cup L$. Esto implica que existe un arco M en X tal que $(K \cup L) \cap M = \{p\}$. Sea z el otro punto extremo de M y sea $r = \min\{d(a, p), d(p, q), d(p, z)\}$. Así, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset B_X(p, r)$. Note que $\text{bd}_X(V)$ tiene al menos tres elementos. Así, $p \in R(X)$.

(c) Supongamos que $p \in \text{int}_X(J) \cap K$. Como $p \in \text{int}_X(J)$, por (a), tenemos que $p \notin R(X)$. Como $p \in K$, entonces $p \in \text{int}_X(K)$ o $p \in \text{bd}_X(K)$. Si $p \in \text{bd}_X(K)$, por (b), tenemos que $p \in R(X)$, lo cual es una contradicción. Así, $p \in \text{int}_X(K)$. Por tanto, $\text{int}_X(J) \cap K = \text{int}_X(J) \cap \text{int}_X(K)$. Esto implica que, $\text{int}_X(J) \cap \text{int}_X(K)$ es un subconjunto abierto y cerrado del conjunto conexo $\text{int}_X(J)$. Así, $\text{int}_X(J) = \text{int}_X(J) \cap \text{int}_X(K)$ y $\text{int}_X(J) \subset \text{int}_X(K)$. Por tanto, $J \subset K$. Esto contradice que $J \neq K$. \square

Teorema 2.2. *Un espacio X es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto en X son abiertas en X .*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U abierto en X y C componente de U . Sea $p \in C \subset U$. Como X es localmente conexo, tenemos que existe V abierto y conexo en X tal que $p \in V \subset U$. Luego, por la maximalidad de C , $p \in V \subset C$. Por lo tanto, C es abierto en X .

Ahora, supongamos que las componentes de cada subconjunto abierto de X son abiertas. Dados $p \in X$ y U abierto en X que contiene a p . Sea C la componente de U que contiene a p . Luego, C es abierto y conexo en X tal que $p \in C \subset U$. Por lo tanto, X es localmente conexo. \square

El siguiente resultado menciona que la conexidad local se preserva bajo funciones continuas, en espacios métricos, compactos y conexos.

Lema 2.3. *Sean X, Y continuos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sea U un abierto de Y y C una componente de U . Consideramos $x \in f^{-1}(C)$ y C_x la componente de $f^{-1}(U)$ tal que $x \in C_x$. Como X es localmente conexo y $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X , por el Teorema 2.2, C_x es abierto de X . Como f es continua, entonces $f(C_x)$ es conexo. Además, $f(x) \in f(C_x) \subset U$. Como C es componente de U y $f(x) \in C$, entonces $f(C_x) \subset C$. Así, $C_x \subset f^{-1}(C)$. Es decir, $f^{-1}(C)$ es un subconjunto abierto de X . Luego, $X - f^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de X y dado que f es cerrada, entonces $f(X - f^{-1}(C)) = Y - C$ es un subconjunto cerrado de Y . Así, C es abierto de Y . Por el Teorema 2.2, Y es localmente conexo. \square

3 Hiperespacios

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos los siguientes hiperespacios de X .

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado de } X\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, \\ C(X) &= C_1(X). \\ F_1(X) &= \{\{x\} : x \in X\}. \end{aligned}$$

Definición 3.1. Sea X un continuo con métrica d . Para cualesquiera $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la *nube* de radio ε alrededor de A , denotada por $N(\varepsilon, A)$, como el conjunto

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon, \text{ para algún } a \in A\}.$$

Escribiremos $N_X(\varepsilon, A)$ cuando el espacio topológico X necesite ser mencionado.

Definición 3.2. Sea X un continuo con métrica d . Para $A, B \in 2^X$, definimos la función $H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$ como

$$H(A, B) = \inf \{r > 0 : A \subset N(r, B) \text{ y } B \subset N(r, A)\}.$$

Teorema 3.3. [16, Teorema 0.2] Si X es un continuo, entonces la función H es una métrica para 2^X , conocida como la métrica de Hausdorff.

Todos los hiperespacios definidos anteriormente son considerados con la métrica de Hausdorff. Los hiperespacios $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son llamados el *n-ésimo producto simétrico* de X y el *n-ésimo hiperespacio* de X , respectivamente.

Definición 3.4. Sean X un continuo con métrica d , $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$ definimos

$$B^H(\varepsilon, A) = \{B \in 2^X : H(B, A) < \varepsilon\}.$$

Definición 3.5. Sean X un continuo, $r \in \mathbb{N}$ y A_1, \dots, A_r subconjuntos no vacíos de X . El *vietórico* de A_1, \dots, A_r , denotado por $\langle A_1, \dots, A_r \rangle$, es el conjunto $\langle A_1, \dots, A_r \rangle_{2^X} \cap F_n(X)$ donde $\langle A_1, \dots, A_r \rangle_{2^X}$ es el conjunto

$$\{B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^r A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, r\}\}.$$

Teorema 3.6. [16, Teorema 0.11] Si X es un continuo con una topología τ , entonces la colección

$$\{\langle S_1, \dots, S_r \rangle_{2^X} : S_i \in \tau \text{ para cada } i \in \{1, \dots, r\}, r \in \mathbb{N}\},$$

es una base para una topología para 2^X .

La topología generada por la base mencionada en el Teorema 3.6 es conocida como la *topología de Vietoris*.

Teorema 3.7. [16, Teorema 0.13] Si X es un continuo, entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff sobre 2^X coincide con la topología de Vietoris.

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideramos el subespacio de $F_n(X)$

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ la cual es una } n\text{-celda}\}.$$

Lema 3.8. Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces existe una n -celda \mathcal{M} en $F_n(X)$ tal que $B \in \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$. Así, existe un subconjunto abierto \mathcal{U} de $F_n(X)$ tal que $B \in \mathcal{U} \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Sea $B_1 \in \mathcal{U} - \{B\}$. Esto implica que $B_1 \in \mathcal{U} \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Como \mathcal{M} es una n -celda en $F_n(X)$, entonces $B_1 \in \mathcal{E}_n(X)$. Por tanto, $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. \square

Teorema 3.9. [2, Theorem 5.2] Un continuo es localmente conexo si y solo si $SF_n(X)$ es localmente conexo para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$.

Teorema 3.10. [3, Lemma 3.1] Si X es un continuo localmente conexo y $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces no existen puntos de A que sean el vértice de un triodo simple de X .

Teorema 3.11. [3, Lemma 3.2] Si X es un continuo localmente conexo el cual no es una gráfica finita, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, X contiene una gráfica finita con al menos k aristas.

Teorema 3.12. [3, Lemma 3.3] Si α es un arco en $F_n(X)$ y α une los elementos A y B , entonces $\bigcup \alpha$ tiene un número finito de componentes tal que cada una de ellas es localmente conexa e intersecta a los conjuntos A y B .

Dados X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, q_X denota la proyección natural $q_X: F_n(X) \rightarrow SF_n(X)$ y F_X^1 denota el elemento $q_X(F_1(X))$. Note lo siguiente:

$q_X|_{F_n(X)-F_1(X)}: F_n(X) - F_1(X) \longrightarrow SF_n(X) - \{F_X^1\}$ es un homeomorfismo.

A continuación presentamos algunos ejemplos de modelos geométricos del n -ésimo producto simétrico suspensión de un continuo dado, en los cuales se puede apreciar algunas características interesantes.

Ejemplo 1. Sea $X = [0, 1]$. En [10, Pág. 51] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(X)$ es el triángulo en el plano con vértices en $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$, (una 2-celda), donde $F_1(X)$ es homeomorfo a el segmento que une el punto $(0, 0)$ con el punto $(1, 1)$. Si identificamos $F_1(X)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a este triángulo. Así, el hiperespacio $SF_2(X)$, también es una 2-celda. La Figura 2 ilustra lo dicho.

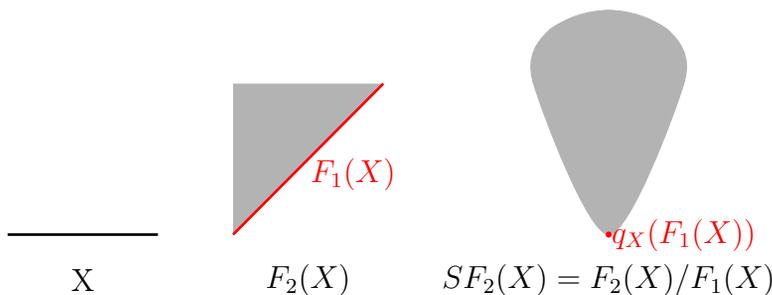


Figura 2: El segundo producto simétrico suspensión del arco.

Ejemplo 2. Sea T el triodo simple. En [10, Pág. 55] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(T)$ es el espacio que se muestra en la Figura 3, el cual es una 2-celda D_0 que contiene tres 2-celdas, D_1, D_2 y D_3 , pegadas de tal manera que $D_0 \cap D_i$ es un arco para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y la intersección $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ es un punto p . Además $F_1(T)$ está contenido en la frontera de D_1, D_2, D_3 y $F_1(T) \cap D_0 = \{p\}$. Así, al identificar $F_1(T)$ a

un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a $F_2(T)$. Por tanto, $SF_2(T)$ es homeomorfo a $F_2(T)$. En la Figura 3 podemos observar un bosquejo de cómo se llega al espacio $SF_2(T)$.

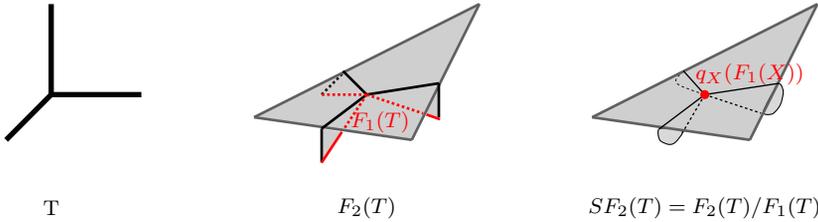


Figura 3: Segundo producto simétrico suspensión del triodo simple.

En los Ejemplos 1 y 2, se dan continuos tales que sus respectivos segundo producto simétrico y segundo producto simétrico suspensión son homeomorfos. Podemos pensar que esto siempre sucede. Sin embargo, en el Ejemplo 3 se prueba que no siempre pasa eso. Este ejemplo es una de las razones por lo cual es importante el estudio del n -ésimo producto simétrico suspensión de un continuo.

Ejemplo 3. Sea S^1 la circunferencia unitaria en el plano centrada en el origen. En [10, Pág. 23] se demuestra que un modelo para $F_2(S^1)$ es el espacio conocido como la Banda de Moebius, donde $F_1(S^1)$ es homeomorfo a la frontera como variedad de la Banda de Moebius. Así, al identificar $F_1(S^1)$ a un punto, obtenemos el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 . Así, $SF_2(S^1)$ es homeomorfo a \mathbb{RP}^2 . El espacio S^1 es un continuo no unicoherente tal que $F_2(S^1)$ no es unicoherente. By [17, Pág. 197], tenemos que $SF_2(S^1)$ es unicoherente. Por tanto, $F_2(S^1)$ no es homeomorfo a $SF_2(S^1)$.

4 Resultados previos

En esta sección presentamos algunos resultados que son necesarios para obtener el resultado principal.

Lema 4.1. Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.

Demostración. Sean \mathcal{U} un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $A \in \mathcal{U}$. Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, donde $m \leq n$. Si $m = n$, entonces $A \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$.

Supongamos que $m < n$. Como \mathcal{U} es un subconjunto abierto de $F_n(X)$, existe un $r > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$. Sean $a_{m+1}, \dots, a_n \in B_X(r, a_1)$ todos diferentes de a_1, \dots, a_m y sea $B = \{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$. Note que $H(A, B) < r$. Así, $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$. Esto implica que $B \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$. Por tanto, $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. \square

Dado un continuo X sea $\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ tal que } G \text{ es una gráfica finita}\}$. X es *casi enrejado* si prueba que $\mathcal{G}(X)$ es un subconjunto denso en X , véase [4].

Lema 4.2. *Si X es una gráfica finita, entonces $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X .*

Demostración. Note que $\mathcal{G}(X) = X$ y por [14, Teorema 9.10] $R(X)$ es un conjunto finito. Veamos que $X \subset \text{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$.

Sea $p \in R(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos a $p_n \in B_X(p, \frac{1}{n}) - R(X)$. Como la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a p , entonces $p \in \text{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Así, $R(X) \subset \text{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Esto implica que

$$X = \mathcal{G}(X) = (\mathcal{G}(X) - R(X)) \cup R(X) \subset \text{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X)).$$

Por tanto, $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X . \square

Dada una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, consideramos

$$\mathcal{N}_n(X) = \{A \in F_n(X) - F_{n-1}(X) : A \cap R(X) = \emptyset\}.$$

Lema 4.3. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.*

Demostración. Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto y no vacío de $F_n(X)$. Por Lema 4.1, $\mathcal{U} \cap (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U} \cap (F_n(X) - F_{n-1}(X))$ y supongamos que $A = \{p_1, \dots, p_n\}$. Como \mathcal{U} es abierto de $F_n(X)$, existe un $r_1 > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r_1) \subset \mathcal{U}$.

Sea $\delta = \min\{d(p_i, p_j) : i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ donde } i \neq j\}$. Sea $r = \min\{r_1, \frac{\delta}{2}\}$. Note que $B_X(p_i, r) \cap B_X(p_j, r) = \emptyset$, donde $p_i, p_j \in A$ y $i \neq j$. Como X es

una gráfica finita, por Lemma 4.2, $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X . Así, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X)) \neq \emptyset$. Así, existe $b_i \in B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X))$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Esto implica que $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X) \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. \square

Lema 4.4. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Supongamos que $A = \{p_1, \dots, p_n\}$. Sean J_1, \dots, J_n arcos ajenos por pares de X tal que $(J_1 \cup \dots \cup J_n) \cap R(X) = \emptyset$ y $p_i \in \text{int}_X(J_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Note que la asociación que manda (t_1, \dots, t_n) al conjunto $\{t_1, \dots, t_n\}$ es un homeomorfismo. Así, $J_1 \times \dots \times J_n$ es homeomorfo a $\langle J_1, \dots, J_n \rangle$. Por tanto, $\langle J_1, \dots, J_n \rangle$ es una n -celda y es vecindad de A en $F_n(X)$. Por tanto, $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Luego, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$. \square

Lema 4.5. *Sean X una gráfica finita, $E \in \mathcal{A}_S(X)$ y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Si $A, B \in \langle \text{int}_X(E) \rangle$ tal que $|A| = |B| = m$, entonces existe un arco \mathcal{A} en $\langle \text{int}_X(E) \rangle$ con puntos extremos A, B y si $C \in \mathcal{A}$, entonces $|C| = m$.*

Demostración. Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Consideramos un homeomorfismo $\beta: (0, 1) \rightarrow \text{int}_X(E)$. Para cada $l \in \{1, \dots, m\}$, sean $r_{a_l}, r_{b_l} \in (0, 1)$ tal que $\beta(r_{a_l}) = a_l$ y $\beta(r_{b_l}) = b_l$. Sea T_l el intervalo con puntos extremos r_{a_l}, r_{b_l} y definimos

$$\alpha_l: [0, 1] \rightarrow T_l \text{ tal que } \alpha_l(t) = r_{a_l} + t(r_{b_l} - r_{a_l}).$$

En caso de que $r_{a_l} = r_{b_l}$, entonces α_l es una función constante. En cualquier caso, α_l es una función continua. Note lo siguiente: si $i, j \in \{1, \dots, m\}$ y $t \in (0, 1)$, entonces $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$. Supongamos que $\alpha_i(t) = \alpha_j(t)$ y que si $j \geq i$, entonces $r_{a_j} \geq r_{a_i}$ y $r_{b_j} \geq r_{b_i}$. Así, $r_{a_i} + t(r_{b_i} - r_{a_i}) = r_{a_i} + t(r_{b_l} - r_{a_l})$. Luego, $r_{a_i} - r_{a_j} = t(r_{b_j} - r_{b_i} + r_{a_i} - r_{a_j})$. Como $r_{a_i} \neq r_{a_j}$, tenemos que

$$t = \frac{r_{a_i} - r_{a_j}}{(r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})}. \tag{1}$$

Como $t \in (0, 1)$ y $r_{a_i} - r_{a_j} < 0$, tenemos que (1) implica que $r_{a_i} - r_{a_j} > (r_{b_j} - r_{b_i}) + (r_{a_i} - r_{a_j})$. Así, $0 > r_{b_j} - r_{b_i}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$. Así, $\gamma_l = \beta \circ \alpha_l: [0, 1] \rightarrow \text{int}_X(E)$ es una función continua.

Afirmación. La función $\alpha: [0, 1] \rightarrow \langle \text{int}_X(E) \rangle$ definida para cada $t \in [0, 1]$ como $\alpha(t) = \{\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)\}$ es continua.

Prueba de la Afirmación. Notemos que $\alpha(0) = \{\beta(\alpha_1(0)), \dots, \beta(\alpha_m(0))\} = \{a_1, \dots, a_m\} = A$. Así, $\alpha(0) = A$. De manera similar $\alpha(1) = B$ y $|\alpha(t)| = m$, para cada $t \in [0, 1]$. Sean $t_0 \in [0, 1]$ y $\varepsilon_0 > 0$. Como $\beta \circ \alpha_l$ es continua en t_0 , para cada $l \in \{1, \dots, m\}$, existe $\delta_l > 0$, tal que si $t \in [0, 1]$ y $|t_0 - t| < \delta_l$, entonces $d(\beta(\alpha_l(t_0)), \beta(\alpha_l(t))) < \varepsilon_0$. Sea $\delta_0 = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Si $t \in [0, 1]$ y $|t_0 - t| < \delta_0$, entonces $d(\beta(\alpha_l(t_0)), \beta(\alpha_l(t))) < \varepsilon_0$, para cada $l \in \{1, \dots, m\}$. Así, $\alpha(t_0) \subset N(\varepsilon_0, \alpha(t))$ y $\alpha(t) \subset N(\varepsilon_0, \alpha(t_0))$. Luego, $H(\alpha(t_0), \alpha(t)) < \varepsilon_0$. Por tanto, α es continua. Así, la Afirmación es verdadera.

Como $[0, 1]$ es localmente conexo, por Lema 2.3, tenemos que $\alpha([0, 1])$ es localmente conexo. En particular, $\alpha([0, 1])$ es arco conexo. Así, existe un arco \mathcal{A} en $\alpha([0, 1]) \subset \langle \text{int}_X(E) \rangle$ con puntos extremos A y B . \square

De ahora en adelante, cuando nos referimos a X como una gráfica finita significa que X tiene E_1, \dots, E_m aristas, con $m \in \mathbb{N}$.

Sea X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ como el subconjunto de $F_n(X)$ tal que cada miembro de $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ tiene exactamente i_j elementos en el interior de la arista E_j , donde $i_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir,

$$\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) = \{A \in F_n(X) : |A \cap \text{int}_X(E_j)| = i_j, \text{ para cada } j \in \{1, \dots, m\}\}.$$

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_X^j &= \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \text{ si } i_j = n \text{ para algún } j \in \{1, \dots, m\} \text{ y} \\ \mathcal{K}_X(i_1, i_2) &= \mathcal{K}_X(i_1, i_2, \dots, i_m) \text{ si } i_1 \neq 0, i_2 \neq 0 \text{ y } i_j = 0 \text{ para cada} \\ & \quad j \in \{3, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{K}_X^j \subset \langle \text{int}_X(E_j) \rangle$ y $\text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j) = \langle E_j \rangle$.

Sea

$$\Omega(X) = \{\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) : i_1 + \dots + i_m = n\}.$$

Haciendo uso del Lemma 4.5, podemos probar las siguientes propiedades de los conjuntos definidos anteriormente.

Lema 4.6. *Si X es una gráfica finita y $m \in \mathbb{N}$, donde m es el número de aristas de X , entonces las siguientes resultados se cumplen.*

- (a) $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ es arco conexo.
- (b) $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \cap \mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m) = \emptyset$ if and only if there is $j \in \{1, \dots, m\}$ such that $i_j \neq l_j$.
- (c) $|\Omega(X)| = 1$ si y solo si $m = 1$.
- (d) Si $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \in \Omega(X)$, entonces $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$.

Demostración. (a). Sea $A, B \in \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$. Si $A, B \subset \text{int}_X(E_j)$, para algún $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$, por el Lema 4.5, existe un arco con puntos extremos A, B , es decir, $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ es arco conexo.

Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, sea $A_j = A \cap \text{int}_X(E_j)$ y $B_j = B \cap \text{int}_X(E_j)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k$ son conjuntos no vacíos, con $k \leq m$. Así, $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ y $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$. Note que para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, los conjuntos A_j y B_j cumplen las condiciones del Lema 4.5. Así, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, existe un arco \mathcal{A}_j , con puntos extremos A_j, B_j , tal que $|C| = i_j$, para cada $C \in \mathcal{A}_j$. Así, existe un homeomorfismo $\alpha_j: [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_j$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$. Así, de manera similar como en la prueba del Lema 4.5, la función $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ definida como:

$$\alpha(t) = \bigcup_{j=1}^k \alpha_j(t) \tag{2}$$

es continua. También, $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$. Por tanto, por Lema 2.3, $\alpha([0, 1])$ es un continuo localmente conexo, en particular, es arco conexo. Así, existe un arco \mathcal{A} en $\alpha([0, 1]) \subset \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ con puntos extremos A, B . Por tanto, $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ es arco conexo.

(b). Supongamos que $A \in \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \cap \mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m)$. Por un lado, $|A \cap \text{int}_X(E_j)| = i_j$ y por otro lado tenemos que $|A \cap \text{int}_X(E_j)| = l_j$, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Así, $i_j = l_j$, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) = \mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m)$.

(c). Supongamos que $|\Omega(X)| = 1$ y $m \geq 2$. Esto implica que existen $E_1, E_2 \in \mathcal{A}_S(X)$, con $E_1 \neq E_2$. Si $i_1 = n$ y $l_2 = n$, entonces $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m), \mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m) \in \Omega(X)$. Por (b), $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \cap \mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m) = \emptyset$. Así, $|\Omega(X)| \geq 2$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $m = 1$.

(d). Sea $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \in \Omega(X)$ y $A \in \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$. Esto implica que $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Por Lema 4.4, $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Sean I_1, \dots, I_n arcos ajenos por pares de X tales que $I_i \cap R(X) = \emptyset$ y $a_i \in \text{int}_X(I_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, $A \in \langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_n) \rangle$. Note que $\langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_n) \rangle \subset \mathcal{N}_n(X)$. Por Lema 4.4, $\langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_n) \rangle$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. Es claro que si $B \in \langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_n) \rangle - \{A\}$, entonces $|B| = n$. Dado $j \in \{1, \dots, m\}$, como $|A \cap \text{int}_X(E_j)| = i_j$, entonces $\text{int}_X(E_j)$ contiene i_j de los arcos I_1, \dots, I_n . Como los arcos I_1, \dots, I_n son ajenos por pares, tenemos que $|B \cap \text{int}_X(E_j)| = i_j$. Esto implica que $B \in \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$. Así, $\langle \text{int}_X(I_1), \dots, \text{int}_X(I_n) \rangle \subset \mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. \square

El siguiente teorema es una caracterización de las gráficas finitas, el cual es de gran importancia para el propósito de este trabajo.

Teorema 4.7. *Un continuo localmente conexo X es una gráfica finita si y solo si para algún (para cada) $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$ con un número finito de componentes.*

Demostración. Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Por Lema 4.4, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$ y por Lema 4.3, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Por tanto, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.

Consideramos a los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ definidos anteriormente.

Notemos que si $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \in \Omega(X)$, entonces $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Por Lema 4.4, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Mostraremos que $\bigcup \Omega(X)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{E}_n(X)$.

Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{E}_n(X)$. Supongamos que $i_1 + \dots + i_m = n$. Por Lema 3.8, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Esto implica que \mathcal{U} es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Como X es una gráfica finita, por Lema 4.3, tenemos que $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X)$. Esto implica que $|A| = n$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Así, $|A \cap \text{int}_X(E_j)| = l_j$, donde $l_j \in \{0, 1, \dots, n\}$, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Como $|A| = n$, tenemos que $l_1 + \dots + l_m = n$. Así, $A \in \mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m)$ y $\mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m) \in \Omega(X)$. Luego, $\mathcal{U} \cap \bigcup \Omega(X) \neq \emptyset$. Por tanto, $\bigcup \Omega(X)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{E}_n(X)$. Como $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $F_n(X)$ es localmente conexo, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es localmente arco conexo, véase [14, Teorema 8.25]. Así, cada

componente de $\mathcal{E}_n(X)$ intersecciona a un conjunto de la forma $\mathcal{K}(i_1, \dots, i_m)$. Como existe una cantidad finita de conjuntos $\mathcal{K}(i_1, \dots, i_m)$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ tiene una cantidad finita de componentes.

Ahora, supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$, con r componentes, donde $r \in \mathbb{N}$ y que X no es una gráfica finita. Como $F_n(X)$ es un continuo localmente conexo, las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son arco conexas [14, Theorem 8.26]. Por Lema 3.11 existe una gráfica finita G contenida en X tal que G contiene al menos $k = 2r + 1$ aristas. Supongamos que J_1, \dots, J_k son las aristas de G .

Consideramos puntos $p_i \in \text{int}_G(J_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Elegimos subconjuntos abiertos y conexos de X ajenos por pares V_1, \dots, V_k tales que $p_i \in V_i$ y $V_i \cap G \subset \text{int}_G(J_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Como $\{p_i\} \in \langle V_i \rangle$ y $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$, podemos elegir elementos $A_i \in \langle V_i \rangle \cap \mathcal{E}_n(X)$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Así, tenemos $2r + 1$ conjuntos, digamos A_1, \dots, A_{2r+1} . Por el principio de las casillas, existe una componente \mathcal{C} de $\mathcal{E}_n(X)$ que contiene tres de los conjuntos A_i : podemos suponer que A_1, A_2 y A_3 pertenecen a \mathcal{C} . Como \mathcal{C} es arco conexa, existe un arco α_1 en \mathcal{C} tal que α_1 une a A_3 y A_1 , y un arco α_2 en \mathcal{C} tal que α_2 une a A_3 y A_2 . Tomamos un punto $x \in A_3$. Por Teorema 3.12, existe C_1 y C_2 componentes de $\bigcup \alpha_1$ y $\bigcup \alpha_2$, respectivamente, tal que $x \in C_1 \cap C_2$. Así, $C = C_1 \cup C_2$ es un continuo localmente conexo de $\bigcup \alpha_1 \cup \bigcup \alpha_2$ que intersecciona a A_1, A_2 y A_3 .

Note que cada punto $p \in C$, pertenece a un elemento de $\mathcal{E}_n(X)$. Por Teorema 3.10, p no es el vértice de un triodo simple de X , es decir, C es un continuo localmente conexo sin triodos simples. Por [14, 8.40], C es un arco o una curva cerrada simple. En cualquier caso, podemos concluir que existe un arco en X , el cual intersecciona a los tres conjuntos A_1, A_2 y A_3 . Sea β un arco en C con puntos extremos a_1 y a_2 tal que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ y $a_3 \in A_3 \cap \beta - \{a_1, a_2\}$. Por [14, Teorema 8.26] los conjuntos V_1, \dots, V_k son arco conexos. Como $a_3 \in V_3$, existe un arco α en V_3 con puntos extremos a_3 y p_3 . Como los puntos de β no son vértice de un triodo simple de X y $a_3 \in \alpha \cap \beta$, entonces $\alpha \cap \beta$ es un arco. Como $a_1 \in V_1$ y $a_2 \in V_2$, entonces a_1 y a_2 no están en V_3 . Esto implica que $a_1, a_2 \notin \alpha$ y que $\alpha \subset \beta$. Así, β intersecciona el arista J_3 . Como J_3 tiene un vértice v de un triodo simple de X , entonces $v \notin \beta$. Luego, $J_3 \not\subset \beta$. Nuevamente, como β no contiene vértice de un triodo simple de X , tenemos que $a_1 \in J_3$ o $a_2 \in J_3$. Si $a_1 \in J_3$, entonces $a_1 \in V_1 \cap J_3$ y como $V_1 \cap G \subset \text{int}_G(J_1)$, entonces $a_1 \in J_3 \cap \text{int}_G(J_1)$, lo cual es una contradicción, ya que J_1 y J_3 son aristas de la gráfica finita G , véase Lema 2.1. Por tanto,

X es una gráfica finita. □

5 Resultados principales

En esta sección se demuestra que la clase de las gráficas finitas es SF_n -cerrada, véase el Teorema 5.7.

Teorema 5.1. [7, Teorema 3.1] *Para un continuo localmente conexo X las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a) X es casi enrejado.
- (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.
- (c) Cada subconjunto abierto y no vacío de X contiene un arco libre de X .

Teorema 5.2. [7, Teorema 3.5] *Sea X un continuo localmente conexo tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso en $F_n(X)$, donde $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $A \in F_{n-1}(X)$, entonces no existe vecindades de A en $F_n(X)$ encajables en \mathbb{R}^n .*

Teorema 5.3. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$.*

Demostración. Por Lema 4.4, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.

Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Por Teorema 3.10, no existen puntos de A que sean el vértice de un triodo simple de X , es decir, $A \cap R(X) = \emptyset$. Como X es una gráfica finita, por Theorem 4.7, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Supongamos que $A \in F_{n-1}(X)$. Por Theorem 5.2, no existen vecindades de A en $F_n(X)$ encajables en \mathbb{R}^n , lo cual es una contradicción ya que $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Esto implica que $A \in F_n(X) - F_{n-1}(X)$. Por tanto, $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$. □

El siguiente resultado nos dice quiénes son los conjuntos que son las componentes del subespacio $\mathcal{E}_n(X)$, para una gráfica finita X .

Teorema 5.4. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son los conjuntos de la forma:*

$$\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m), \text{ donde } i_1 + \dots + i_m = n.$$

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Note que $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\bigcup \Omega(X) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Esto implica que $|A| = n$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Para cada $k \in \{1, \dots, m\}$, sea $l_k = |A \cap \text{int}_X(E_k)|$. Así, $A \in \mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m)$. Como $|A| = n$, tenemos que $l_1 + \dots + l_m = n$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(l_1, \dots, l_m) \in \Omega(X)$. Así, $A \in \bigcup \Omega(X)$. Luego, $\mathcal{N}_n(X) \subset \bigcup \Omega(X)$. Así, $\mathcal{N}_n(X) = \bigcup \Omega(X)$. Por el Lema 5.3, tenemos que $\mathcal{E}_n(X) = \bigcup \Omega(X)$. Por el Lema 4.6, los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \dots, i_m)$ son abiertos, conexos y ajenos por pares de $\mathcal{E}_n(X)$, y por tanto, éstas son las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$. \square

Teorema 5.5. *Si X es un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces no existen vecindades de F_X^1 en $SF_n(X)$ encajables en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto de $SF_n(X)$ tal que $F_X^1 \in \mathcal{U}$. Por un lado, $\mathcal{U} - \{F_X^1\}$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$, y como la función cociente q_X es continua, entonces $q_X^{-1}(\mathcal{U} - \{F_X^1\})$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Sea $\mathcal{V} = q_X^{-1}(\mathcal{U} - \{F_X^1\})$. Por otro lado, como \mathcal{U} es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{SF_n(X)}(F_X^1, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Sea $\{a\} \in F_1(X)$. Como q_X es continua, existe un delta $\delta > 0$ tal que

$$q_X(B_{F_n(X)}(\{a\}, \delta)) \subset B_{SF_n(X)}(F_X^1, \epsilon). \tag{3}$$

Como X es conexo, la cardinalidad de $B_X(a, \delta)$ no es finito. Sea $b \in B_X(a, \delta) - \{a\}$. Luego, $\{a, b\} \in B_{F_n(X)}(\{a\}, \delta)$. Por (3), $q_X(\{a, b\}) \in B_{SF_n(X)}(F_X^1, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Por tanto, $q_X(\{a, b\}) \in \mathcal{U}$. Más aún, $q_X(\{a, b\}) \in \mathcal{U} - \{F_X^1\}$. Así, $\{a, b\} \in \mathcal{V}$.

Como X es un continuo localmente conexo casi enrejado, por Teorema 5.1, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Como $\{a, b\} \in F_{n-1}(X)$ y \mathcal{V} es una vecindad de $\{a, b\}$ en $F_n(X)$, por Teorema 5.2, tenemos que \mathcal{V} no es encajable en \mathbb{R}^n . Así, $q_X(\mathcal{V}) = \mathcal{U} - \{F_X^1\}$, no es encajable en \mathbb{R}^n . Como $\mathcal{U} - \{F_X^1\} \subset \mathcal{U}$, tenemos que \mathcal{U} no es encajable en \mathbb{R}^n . \square

Teorema 5.6. [5, Proposición 1] Sean X un continuo y $k \in \mathbb{N}$.

- (a) Si $V \subset X$ es una k -celda y U es un subconjunto abierto de X tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces existe una k -celda τ tal que $\tau \subset U \cap V$.
- (b) Si $V \subset X$ es tal que $V \approx I^\infty$ y U es un subconjunto abierto de X tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $U \cap V$ contiene un espacio homeomorfo a I^∞ .

El siguiente resultado es el principal objetivo de este trabajo, en el cual hacemos uso de los Teoremas 4.7, 5.5 y 5.6.

Teorema 5.7. Sean X, Y continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces X es gráfica finita si y solo si Y es gráfica finita

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita y que Y es un continuo tal que $h: SF_n(X) \rightarrow SF_n(Y)$ es un homeomorfismo, para algún $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$. Es claro que X es localmente conexo. Así, por Teorema 3.9, Y es localmente conexo.

Como X es una gráfica finita, por Teorema 4.7, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$ con r componentes, donde $r \in \mathbb{N}$. Note que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X) - F_1(X)$, ya que

$$\begin{aligned} \text{cl}_{F_n(X)-F_1(X)}(\mathcal{E}_n(X)) &= \text{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{E}_n(X)) \cap (F_n(X) - F_1(X)) \\ &= F_n(X) \cap (F_n(X) - F_1(X)) \\ &= F_n(X) - F_1(X). \end{aligned}$$

Así, $q_X(\mathcal{E}_n(X))$ es un subconjunto denso de $SF_n(X) - \{F_X\}$.

Sean $A_x \in F_n(X)$ y $A_y \in F_n(Y)$ tales que $h(q_X(A_x)) = F_Y$ y $h^{-1}(q_Y(A_y)) = F_X$. Así, $h: SF_n(X) - \{F_X, q_X(A_x)\} \rightarrow SF_n(Y) - \{F_Y, q_Y(A_y)\}$ es un homeomorfismo.

Afirmación I. $q_Y(\mathcal{E}_n(Y) - \{A_y\}) = h(q_X(\mathcal{E}_n(X) - \{A_x\}))$.

Prueba de la afirmación I. Sean $B \in \mathcal{E}_n(Y) - \{A_y\}$ y \mathcal{M} una vecindad de B en $F_n(Y)$ tal que \mathcal{M} es una n -celda. Luego, Existe \mathcal{U} un subconjunto abierto de $F_n(Y)$ tal que $B \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Note que $\mathcal{U} - F_1(Y)$ es un subconjunto abierto de $F_n(Y)$ tal que $B \in \mathcal{U} - F_1(Y) \subset \mathcal{M}$. Luego, por Teorema 5.6, existe una n -celda \mathcal{W} en $F_n(Y)$ tal que $B \in \text{int}_{F_n(Y)}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{U} - F_1(Y)$. Esto implica que \mathcal{W} es una n -celda en $F_n(Y) - F_1(Y)$ y es una vecindad de B . Así, tenemos que $q_Y(\mathcal{W})$ es una n -celda en $SF_n(Y) - \{F_Y, q_Y(A_y)\}$ y es una vecinda de $q_Y(B)$. Como h es un homeomorfismo, existe $A \in F_n(X) - (F_1(X) \cup \{A_x\})$ tal que $h(q_X(A)) = q_Y(B)$. Así, $h^{-1}(q_Y(\mathcal{W}))$ es una vecindad de $q_X(A)$ en $SF_n(X) - \{F_X^1, q_X(A_x)\}$ tal que $h^{-1}(q_Y(\mathcal{W}))$ es una n -celda. Esto implica que $A \in \mathcal{E}_n(X) - \{A_x\}$. Así, $q_Y(B) \in h(q_X(\mathcal{E}_n(X) - \{A_x\}))$. De manera simiar se prueba la otra contención. Por tanto, la Afirmación I es verdadera.

Como $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $F_n(X)$ es localmente conexo, por Lema 2.2, las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son abiertas en $F_n(X)$.

Así, $\mathcal{E}_n(X) - \{A_X\}$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Por Afirmación I, $\mathcal{E}_n(Y) - \{A_Y\}$ es un subconjunto denso de $F_n(Y)$. Por tanto, $\mathcal{E}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $F_n(Y)$.

Afirmación II. Si $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces $h(q_X(A)) \neq F_Y$.

Prueba de la Afirmación II. Supongamos que existe $A \in \mathcal{E}_n(X)$ tal que $h(q_X(A)) = F_Y$. Sea \mathcal{M} una vecindad de A en $F_n(X)$ tal que \mathcal{M} es una n -celda. Luego, $A \in \mathcal{M} \cap (F_n(X) - F_1(X)) \subset \mathcal{M}$, es decir, $\mathcal{M} \cap (F_n(X) - F_1(X))$ es una vecindad de A en $F_n(X) - F_1(X)$. Sea $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cap (F_n(X) - F_1(X))$. Como \mathcal{M} es encajable en \mathbb{R}^n , tenemos que \mathcal{M}^* es encajable en \mathbb{R}^n . Así, $h(q_X(\mathcal{M}^*))$ es una vecindad de F_Y en $SF_n(Y)$ tal que $h(q_X(\mathcal{M}^*))$ es encajable en \mathbb{R}^n , lo cual contradice al Teorema 5.5. Por tanto, $h(q_X(A)) \neq F_Y$, para cada $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Así, la Afirmación II es verdadera.

Como una consecuencia de Afirmación II, tenemos que $A_x \notin \mathcal{E}_n(X)$. Con argumentos similares, podemos afirmar que $A_y \notin \mathcal{E}_n(Y)$. Así, por Afirmación I, tenemos que $\mathcal{E}_n(Y)$ tiene un número finito de componentes. Por Teorema 4.7, Y es una gráfica finita.

Esto demuestra que la clase de las gráficas finitas es SF_n -cerrada. \square

6 Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros el tiempo dedicado a la minuciosa revisión de este trabajo. Las sugerencias dieron como resultado la calidad de este material.

Bibliografía

- [1] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace $HS_m^n(X)$ for a finite graph X is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.
- [2] F. Barragán, *On the n -fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. 157 (2010) 597–604.
- [3] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434–1450.

-
- [4] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.
- [5] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math. 33 (3) (2007), 795–805.
- [6] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , Topology Proc. 44 (2014), 75–95.
- [7] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, Journal of Mathematics Research 4(4) (2012), 1–9.
- [8] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glasnik Mat. 37 (57) (2002), 347–363.
- [9] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$* , Topology Proc. 27 (2003), 179–188.
- [10] A. Illanes, *Models of hyperspaces*, Topology Proc. 41 (2013), 39–64.
- [11] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [12] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl. 138 (2004), 125–138.
- [13] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique n -fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 2019–233.
- [14] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, volume 158 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.
- [15] S. B. Nadler Jr, *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math. 5 (1979) 125–132.

- [16] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [17] G.T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

dherrera@fcfm.buap.mx

fmacias@fcfm.buap.mx

218570078@alumnos.fcfm.buap.mx

Índice de autores

- Aguirre Salado, Alejandro Iván, 128
Alcaraz Ubach, Diego Francisco, 29
Analco Panohaya, América Guadalupe, 51
Argüelles Ortiz, Alma Rosa, 74
- Climent Hernández, José Antonio, 103
- Garza Gaona, Luis Enrique, 5
- Hernández Bautista, Luz Marina, 103
Hernández Rebollar, Lidia Aurora, 51
Herrera Carrasco, David, 147
- Jiménez Hernández, José del Carmen, 128
- López Cerino, Marisol, 128
- Macías Romero, Fernando, 147
Montero Rodríguez, Germán, 147
- Ortiz Ramírez, Ambrosio, 103
- Rubio-Pizzorno, Sergio Andrés, 74
- Solorza Calderón, Selene, 29

Matemáticas y sus aplicaciones 15

Editado por Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco está a

disposición en pdf en la página

de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)

www.fcfm.buap.mx

a partir del 26 de octubre de 2020

peso del archivo: 6 MB

El cuidado de la edición es de Antonio de Jesús Libreros López.