Fernando Macías Romero

Es profesor e investigador en el área de las matemáticas. Nació el 11 de noviembre de 1961 en Huauchinango, Puebla, México. Su pasión por las matemáticas lo llevó a estudiar la licenciatura, maestría y doctorado en esta noble área. Llegó a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en el año 1979.

Además de contar con el reconocimiento y respeto de la comunidad de su facultad, recurrentemente es solicitado como árbitro de publicaciones y evaluador de proyectos, así como de programas como el ESDEPED y elaborador de programas de estudio. Como formador de nuevo talento matemático ha dirigido 34 tesis de licenciatura, 8 de maestría y 5 de doctorado, todas ellas concluidas con éxito, así como varias tesis en proceso. Actualmente es Investigador Nacional reconocido por el SNI.

Durante varios años ha sido el organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications, que brindan un espacio de encuentro a un vasto número de expositores, asistentes y expertos internacionales de todas las áreas de la matemática y también es editor y autor de varios libros de matemáticas como los de *Matemáticas y sus aplicaciones.*

Los capítulos del presente libro son creados por los autores en el marco de su participación en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA). Los CIMA emanan de la fortuna de contar con el mejor comité organizador que ha puesto la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. He aquí los resultados que promueven la riqueza matemática, trabajos tenaces que lograron sobreponerse a los inexorables jueces y fueron autorizados después de un arbitraje riguroso.

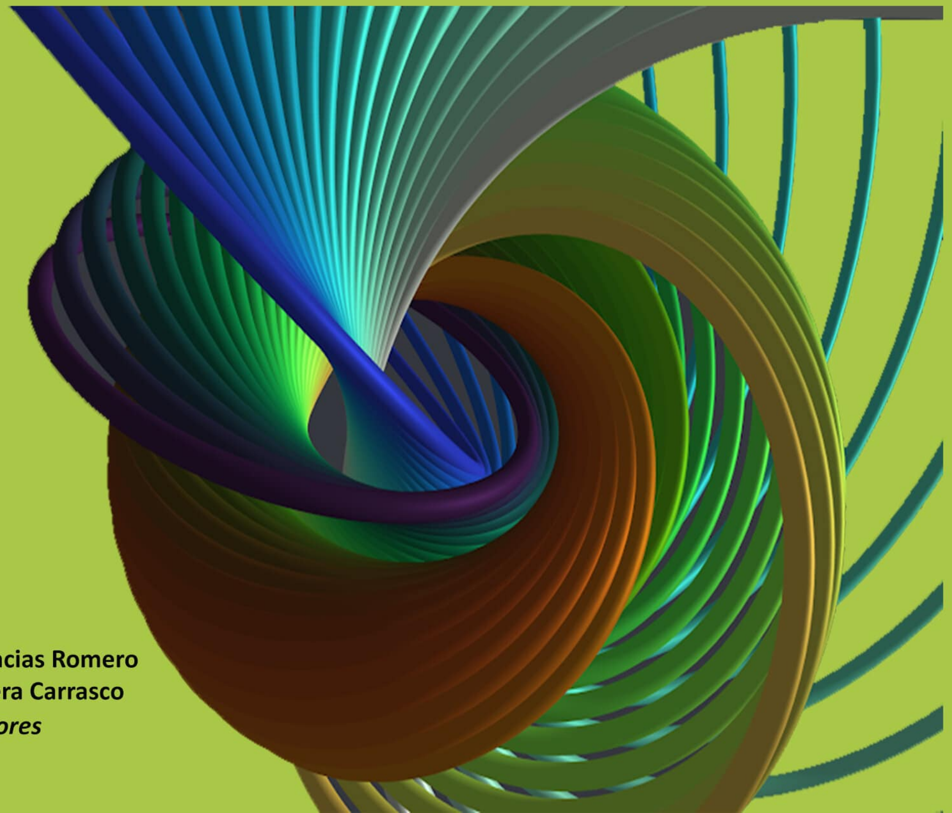
BUAP FCFM CIMA

BUAP ediciones

ISBN: 978-607-525-694-8

Matemáticas y sus aplicaciones 13

Matemáticas y sus aplicaciones 13



Fernando Macias Romero
David Herrera Carrasco
Editores

David Herrara Carrasco

Nació en Tapanatepec, Oaxaca, el 21 de abril de 1955. Llegó a la ciudad de Puebla a los seis años junto con su familia en una situación precaria.

Es un prestigioso profesor e investigador que estudió la licenciatura en Matemáticas en la segunda generación de la refundación de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla (UAP). En 1975 inició su labor docente como profesor de matemáticas en la Preparatoria Alfonso Calderón (UAP).

Desde 1981 a la fecha es profesor de tiempo completo en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Ha sido miembro organizador de las International Conference on Mathematics and its Applications. Es miembro de Sistema Nacional de Investigadores. Ha publicado varios artículos, en revistas internacionales. Es autor de varios libros (como coautor, con otros profesores de la FCFM); es editor de algunos libros. Además, ha concluido la dirección de tesis: 4 de doctorado, 7 de maestría y más de 26 de Licenciatura; todas en matemáticas a excepción de una en electrónica, y actualmente tiene en proceso varias asesorías de tesis de licenciatura y del posgrado.

Matemáticas y sus aplicaciones 13

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Fernando Macías Romero
David Herrera Carrasco
Editores

Primera edición: 2020

ISBN: 978-607-525-694-8

4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 01 (222) 2 29 55 00
www.buap.mx

Dirección General de Publicaciones
2 Norte 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfonos: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00 ext. 5768 y 5764
www.dgp.buap.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B
Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. México. CP. 72570
Teléfonos: 01 (222) 229 55 00 ext. 7552
www.fcfm.buap.mx

Hecho en México
Made in Mexico

Matemáticas y sus aplicaciones 13

Selección bajo arbitraje riguroso de algunos proyectos de investigación presentados en el International Conference on Mathematics and its Applications (CIMA), FCFM, BUAP.

Contenido

Presentación

Tenemos la fortuna de hacer un recorrido hacia un proceso creativo sin precedentes. Ha llegado el momento de compartir esta sabiduría, de invitar a todo el mundo a embarcarse en el navío que nos conduce hacia la Fuente de todo lo creado. Esta es la razón por la cual editamos el libro que tienen en sus manos. La felicidad que propone este libro por su divulgación, investigación e intercambio de ideas se debe a la generosidad de muchísimos matemáticos que participaron en el denominado *Sixth International Conference on Mathematics ant its Applications* (6CIMA, 2019), un esfuerzo profesional consolidado que ha permitido la participación de grandes personajes de diversas universidades, nacionales y extranjeras, tanto en el desarrollo del 6CIMA como en su memoria escrita, que es el presente libro. La base ha sido un comité organizador especializado, entusiasta y vigoroso emanado de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP. Este producto no es ni siquiera sietemesino, es normal, de por lo menos nueve meses de trabajo constante. Por el amor a la matemática es que ha nacido este ejemplar que nos brinda la sabiduría necesaria para mostrarles parte de nuestros quehaceres cotidianos.

Los capítulos de este libro están agrupados por secciones de acuerdo al área temática en el 6CIMA. Dichos capítulos fueron sometidos a arbitraje riguroso.

Agradecemos, con toda el alma, a todos los árbitros su amabilidad, gentileza, dedicación y trabajo científico. Un agradecimiento especial a Antonio de Jesús Libreros López por su apoyo en la edición de esta obra. Gracias por dejar huella.

David Herrera Carrasco
Fernando Macías Romero
Editores

Homenaje académico al Profesor Ángel Tamariz en ocasión de su 70 aniversario

Matemáticas y sus aplicaciones 13, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-694-8

Capítulo 1

Algo acerca de Ángel
En ocasión de su 70 aniversario de vida

José Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Manuel Ibarra Contreras y Armando Martínez García
FCFM, BUAP

Resumen

En ocasión de su 70 aniversario de vida de Angel Tamariz Mascarúa, se realiza este ejercicio de memoria y de agradecimiento.

1 Presentación

"No es fácil encontrar, a lo largo de la historia de las matemáticas y de la ciencia, un genio que reúna en su persona la capacidad de la investigación, la gestión y la organización, y que haya tenido, además, un enorme interés por la difusión y la enseñanza de las matemáticas". Con estas palabras inicia el profesor Roberto Rodríguez del Río, de la Universidad Complutense de

Madrid, su libro sobre el enorme matemático alemán Felix Klein, quien nació el 25 de abril de 1849. Pero estas palabras describen también con exactitud a nuestro querido amigo y admirado maestro Ángel Tamariz Mascarúa, quien nació exactamente 101 años después que Felix Klein, el 25 de abril de 1950. Este año cumple 70. Por eso este homenaje especial.

Cuando recordamos a alguien, la memoria juega el doble papel de generar huecos que son llenados por la imaginación, y el otro de atrapar el pasado con nociones imposibles de comprobar; el resultado final es una semblanza con mucho de imaginación y buenas intenciones. Hecha esta advertencia, desarrollaremos un conjunto de recuerdos acerca de la gran personalidad de Ángel, para dejar constancia de nuestro respeto y admiración.

2 Ángel

Los autores de este documento somos profesores de la Facultad de Ciencias de la BUAP y como compartíamos el gusto o el interés por la topología, concebimos el sueño de hacer sendos posgrados en esta rama de las matemáticas. Dos de los profesores de este grupo, Manuel Ibarra y Armando Martínez, habían estudiado y realizado sus tesis de licenciatura bajo la dirección del ya para entonces extraordinario maestro y connotado investigador, a pesar de su juventud, Ángel Tamariz Mascarúa. Hicieron la recomendación a los otros dos miembros del equipo, Juan Angoa y Agustín Contreras, para que fuera él con quien trabajáramos los 4. Como gran escultor, emulando al célebre Miguel Ángel o a su propio padre, Ernesto Tamariz, fue dándole forma a la piedra, logró que obtuviéramos nuestros títulos e influyó notablemente, mediante la organización de las “Jornadas Veraniegas de Topología” para que se formaran, no sólo el nuestro, sino otros grupos de topología en nuestra Facultad, como el de topología de continuos.

Cuando comenzamos con Ángel nuestros posgrados, parecía un proyecto esencialmente académico, en donde él ponía la sabiduría y nosotros la constancia para alcanzar el conocimiento necesario para lograr los correspondientes títulos académicos. Pero fue mucho más que eso: Primera sorpresa, este proceso se convirtió en una experiencia de vida, involucrarse en la investigación crea vínculos humanos que te enriquecen como ser humano. Segunda sorpresa, no sólo el estudio es la actividad fundamental para hacer investigación. Así, la organización de las Jornadas Veraniegas de Topología en la BUAP, formó parte fundamental de nuestro adiestramiento como investigadores. La paciencia y tolerancia que nos enseñó Ángel, fueron fundamentales para aprender a crear y recrear espacios académico-culturales en donde todos vivamos un enriquecedor intercambio de experiencias. Como miembros de una universidad, en esos tiempos, crítica democrática y popular, no teníamos el antecedente de los congresos científicos; con Ángel vivimos intensamente tal experiencia. Siempre el otro te puede enseñar algo.

Años después nos embarcamos en la organización del Congreso Iberoamericano de Topología de 2005 (CITA2005) y Ángel nos enseñó con el ejemplo la necesidad de adquirir una gran capacidad de trabajo; no sabíamos lo ingrato que es organizar un congreso, en donde todos gozan las ponencias y tú sólo atiendes que esté a tiempo el café y listos los salones. Pero nuevamente con profunda bondad nos mostró, a la manera de un maestro taoísta, que esa aparente ingratitud se recompensa con la inmensa alegría de compartir. Herman Weyl dijo de Klein, lo que nosotros apreciamos en Ángel durante dicho CITA2005: "su poder divino provenía de su personalidad, su dedicación, su voluntad de trabajar y su habilidad para conseguir que se hicieran las cosas".

Después que cada uno de nosotros estuvo graduado, las enseñanzas de Ángel siguieron desarrollándose, siempre compartiendo proyectos de trabajo, siempre apoyando otros; así publicamos un artículo conjunto y, siempre atento a ofrecer su solidaridad, presentó nuestro libro de cálculo integral y ha enaltecido con sus ponencias las sesiones de topología de las "grandes semanas de las Matemáticas" y ahora "Congresos Internacionales de Matemáticas y sus Aplicaciones" (CIMA) que organiza la Academia de Matemáticas de nuestra Facultad.

En nuestra escuela es ampliamente conocido a causa de estas aportaciones, pero es justo subrayar que, así como se comporta con nosotros con esa inmensa entrega, lo mismo hace con otros grupos académicos; sorprende su capacidad de convocatoria: si él cita, seguro llegan. Fundamental cimiento de la topología en México, ya que su presencia avala y asegura la realización del proyecto, es quizá el único topólogo en nuestro país que, a la manera del principalísimo personaje de "El Señor de los Anillos" de Tolkien, el mago Gandalf, logra con su poderosa taumaturgia, unir a los grupos de topólogos de México, ya muy numerosos y disímbolos.

Exhibió, por ejemplo, un derroche de generosidad cuando convocó a los topólogos, principalmente del país, a desarrollar un libro de proyección internacional acerca de temas cercanos a la seudocompacidad y nos invitó a escribir los preliminares de tal libro; el grupo de Puebla, de topología general, trató de cumplir lo más dignamente y, organizados alrededor de su persona, cumplimos. La conocida editorial científica Springer Verlag, publicó finalmente el citado libro y Ángel, como organizador del trabajo, citando, convocando y esforzándose para organizar los esfuerzos individuales, brilló como nunca.

Cuando en una plática informal, Ángel invitaba a otros académicos a realizar un trabajo análogo, es decir convocar a todos los interesados a realizar una monografía en un tema común a varios matemáticos mexicanos, la respuesta fue clara: entre nosotros no tenemos un ángel. Y así debemos resumir la presencia de un ente celestial que vigila y ofrece.

Recordamos que, en la secuela de Jornadas de topología, él organizó, prácticamente solo, unas en la UNAM, impresionantes por el nivel académico logrado. Después de esta hazaña uno no duda en pensar que procede del Olimpo.

Valgan esta serie de recuerdos acerca de su persona para subrayar no sólo su trabajo matemático sino su presencia como ser humano en múltiples proyectos matemáticos en donde nos ha demostrado que la matemática puede ser increíblemente rica y satisfactoria. La forma en que hoy día se hace y se entiende la topología, o la manera en que se organiza la investigación en los centros matemáticos del país, tiene ya su impronta indeleble. Así como su padre, él también es un gran escultor: "el escultor de la topología en México".

En verdad, magnificar su obra científica nos parece ocioso si no se subraya su presencia humana; cuando recalcamos su labor escultórica en la topología en México, la metáfora es plena y exacta acerca de él, ya que el escultor no crea el material con el que trabaja; lo moldea y respeta la naturaleza de su material para diseñar el producto final. Esa combinación de sabiduría y respeto al otro es la más enorme virtud de Ángel.

3 Curriculum

Enseguida presentamos un apretado resumen de su trabajo no para convencernos de su enorme trabajo sino para convencer a otros y seguir insistiendo en la persona detrás de la obra, porque ¿como medimos la bondad, cuanto pesa la amistad y la solidaridad, cuánto mide la pasión por la enseñanza?

Fecha y lugar de nacimiento:

25 de abril de 1950 en México D.F.

70 años de edad, con 43 años como profesor en la UNAM.

Distinciones: Profesor de Tiempo Completo, Titular C. Medalla al Mérito Académico. PRIDE D y SNI III.

Profesor Titular C de tiempo completo, definitivo, con 43 años de antiguedad laboral. Obtiene la definitividad en la UNAM el 15 de diciembre de 1982. Actualmente labora en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Formación:

1959-1962: Estudios Primarios, Colegio Cristobal Colón.

1963-1965: Estudios de secundaria, Colegio Cristobal Colón.

1966-1968: Estudios de Bachillerato, Preparatoria 9, UNAM.

1969-1974: Estudios de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. Tesis: "Geometría en Superficies de Riemann", dirigida por el Dr. Arturo Ramírez.

1974-1975: Estudios preparatorios al doctorado, Université Libre de Bruxelles, bajo la dirección de la Profesora Anne Marie Esser.

1975-1977: "Diplôme d'études approfondies", Université Paris VII. Tesis: "Sur les sous-espaces de L1 d'aprés H.P. Rosenthal", dirigida por el Profesor Beauzamy de L'ecole Polithecnique.

1983-1986 :Doctorado, Universidad Autónoma Metropolitana, bajo la dirección de los Dres. Adalberto García-Máynez (UNAM) y Richard Wilson (UAM-I). Tesis: "Bases Noetherianas en Espacios Topológicos".

1988-1989: Estancia Posdoctoral en Wesleyan University (Middletown, Connecticut) bajo la dirección del Profesor W.W. Comfort.

Actividad académica:

Cursos impartidos: 167.

Tesis de doctorado: 8 titulados; 4 en proceso.

Tesis de maestría: 10 titulados.

Tesinas de maestría: 9 titulados.

Tesis de licenciatura: 16 titulados, 1 en proceso.

Dirección de estancias posdoctorales: 1, 1 en proceso.

Artículos de investigación: 50 publicados; 2 enviados y 2 en proceso.

Libros de texto: 5 publicados; y 1 aceptado para su reedición.

Capítulos en libros científicos: 9 publicados.

Artículos de apoyo a la docencia de posgrado: 6.

Artículos de divulgación: 4.

Notas de clase: 2.

Presentación de trabajos en diversos actos: 82 de investigación; 42 de divulgación.

Jurado y evaluador: de tesis y exámenes doctorales, 41; de tesis y exámenes de maestría, 27; de tesis y exámenes de licenciatura, 28; de tesinas de maestría y de candidatura a doctorado, 9.

Textos arbitrados: 33 artículos, 2 libros.

Comité editorial: 9.

Reseñas: 12.

Aunque es largo y tedioso reseñar con lujo de detalles cada uno de los rubros de sus diferentes actividades, lo haremos en tres rubros: en sus artículos de apoyo al posgrado, sus libros y sus artículos de divulgación; tales rubros reflejan su gran preocupación en el apoyo a la enseñanza de la matemática y el conocimiento pasional de ella.

Artículos de difusión y divulgación:

Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto y Ángel Tamariz Mascarúa, Crónica del desarrollo de la Topología General en México en los últimos 10 años, Topología y sus Aplicaciones 6, Manuales y Textos, Ciencias Exactas, BUAP ediciones, 2018.

José A. Martínez Morales y Ángel Tamariz, La Topología: conjuntos y geometría. Una semblanza histórica, Tópicos selectos de matemáticas, Aportaciones en Matemáticas 1, Universidad Autónoma de Tlaxcala. 2016. ISBN: 978-607-8432-68-4.

Ángel Tamariz, La compacidad: una semblanza histórica, Encuentro de enseñanza e historia de las matemáticas, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. ISBN: 978-968-9391-1.

Ángel Tamariz, Los infinitos, Revista Ciencias, 68, noviembre 2002, 66-77. ISSN 0187-6376.

Libros publicados

Michael Hrusak, Ángel Tamariz y Mikhail Tkachenko, editores, Pseudocompact Topological Spaces. A survey on classic and new results with open problems. Texto avanzado de investigación para estudiantes de posgrado e investigadores. Springer, 2018. ISSN: 1389-2177.

Roberto Pichardo y ÁngelTamariz, Álgebras booleanas y espacios topológicos compactos cero-dimensionales, Aportaciones Matemáticas, 40, textos avanzados, Sociedad Matemática Mexicana. ISBN 978-607-02-9827-1.

Fidel Casarrubias y Ángel Tamariz, Elementos de Topología General. Versión corregida y aumentada. Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 37. ISBN: 978-607-02-6677-5.

Con motivo del las Octavas Jornadas de Topología, congreso que se dedicó a su persona y a su trabajo académico con motivo de su 60 aniversario, se publicó el libro Obras Escogidas, 2000-2010, Ángel Tamariz Mascarúa que recopila varios de sus trabajos de investigación, docencia y difusión.

Adalberto García-Máynez y Ángel Tamariz Mascarúa, Topología General, Editorial Porrúa S.A., 1988. ISBN: 968-452-320-3.

Ángel Tamariz, Texto de Topología General, editado por la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, 1981.

Capítulos de libro

J. Angoa, A. Contreras, M. Ibarra, Á. Tamariz, Basic and classic results on pseudocompact spaces. Para el libro Pseudocompact Topological Spaces.

A. Dorantes, O. Okunev, Á . Tamariz, Weakly pseudocompact spaces. Para el libro Pseudocompact Topological Spaces.

Juan Angoa y Ángel Tamariz, Funciones Cardinales en Σ-productos, Topología y sus Aplicaciones IV, Textos Científicos, BUAP. págs. 113-143. ISBN: 978- 607-525-029-8.

J. Angoa, Y.F. Ortiz Castillo y Á. Tamariz, Sobre propiedades de p-compacidad, (α, D)-compacidad, p- pseudocompacidad y (α, D)- pseudocompacidad, Topología y sus Aplicaciones III, Textos Científicos, BUAP, 2014.

D.C. Pérez Flores, M. Ibarra Contreras y Á. Tamariz, Espacios Realcompactos, Topología y sus Aplicaciones II, Textos Científicos, BUAP, 2013.

Agustín Contreras, Manuel Ibarra y Ángel Tamariz, Algunas Generalizaciones de la pseudocompacidad, Capítulo 3. Topología y sus Aplicaciones I, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBM: 978-607-487-388-7.

Adalberto García-Máynez, Rubén Mancio y Ángel Tamariz, La Topología General, Cosmos, Enciclopedia de la Ciencias y Tecnologías en México, vol. Matemáticas, 103-119, coedición: UAM, CONACyT e Instituto de Tecnología del Distrito Federal.

Juan Angoa, Agustín Contreras, Manuel Ibarra y Ángel Tamariz, Una Introducción a los espacios E-regulares y a la Cp-Teoría, una presentación categórica, Capítulo 5. Topología y Sistemas Dinámicos II, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. ISBM: 978-698-595-255-2.

Juan Angoa, Agustín Contreras, Manuel Ibarra, A. Ramírez y Ángel Tamariz, Introducción a la pseudocompacidad, Capítulo 2. Topología y Sistemas

Dinámicos I, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. ISBM: 978-968-9391-11-1.

Artículos expositorios de apoyo a los cursos del posgrado

Ángel Tamariz, Algunas aplicaciones de la Teoría de conjuntos a la Topología, Aportaciones Matemáticas, SMM, 26 (2000), 257-275.

Ángel Tamariz, Espacios Topológicos Linealmente Ordenados, Aportaciones Matemáticas, SMM, 25 (1999) 321-338.

Ángel Tamariz, Espacios Cp de Funciones Continuas, Aportaciones Matemáticas, 18 (1996) 265-285.

Ángel Tamariz, Anillos de Funciones Continuas, compactaciones de Stone-Cech, espacios realcompactos y cardinales medibles, Aportaciones Matemáticas, 13 (1993) 193-242.

Ángel Tamariz, Espacios de Ultrafiltros I, Aportaciones Matemáticas de la SMM, 8 (1990) 145-186.

Ángel Tamariz, Espacios de Ultrafiltros II, Aportaciones Matemáticas de la SMM, 8, (1990) 186-222.

4 Entrevista

Ahora, presentamos una entrevista realizada a Ángel, cuyas respuestas nos aportarán un perfil mas minucioso de la persona:

¿Qué es para ti la matemática?

Ángel: La matemática es lo que le ha dado sentido a mi vida en los últimos 50 años. Cuando terminé mis estudios de la preparatoria, yo no sabía que existiera una carrera de matemáticas. Entré a estudiar arquitectura, y ahí tuve dos experiencias simultáneas muy intensas: me di cuenta qué no quería dedicar mi vida a la arquitectura, y me surgió una curiosidad enorme por saber qué eran las matemáticas. Cuando supe que existía una carrera de matemáticas, dejé la Facultad de Arquitectura y empecé a frecuentar la Facultad de Ciencias. Después de las primeras clases que tomé en esta Facultad como oyente, pues no estaba inscrito oficialmente, me enamoré de lo que me hablaban los profesores. Supe que esa era mi casa. Entre mis primeros profesores tuve a Isabel Puga y a Alejandro Bravo. Nunca he sentido las matemáticas como algo externo a mí, ni como un trabajo o algo con que me gano la vida, sino más bien algo que disfruto y que me acompaña desde hace 50 años.

Lo anterior es lo que significa emocionalmente para mí la matemática. Si reflexiono sobre el papel de las matemáticas en nuestro país, pues llego naturalmente a conclusiones bien conocidas. El estudio de las matemáticas en todos los niveles de la enseñanza es fundamental para crear y desarrollar en los alumnos un modo de pensamiento lógico y racional; además, las matemáticas son una herramienta primordial para la preparación de ingenieros, técnicos y científicos, quienes a su vez juegan un papel importante en el desarrollo de nuestro país.

¿Cómo debe enseñarse la matemática a los diversos auditorios dependiendo de las diferentes edades?

Ángel: Yo creo que no sólo debe enseñarse la matemática formal, también deben de enseñarse juegos que podemos llamar "matemáticos" como el ajedrez y el go. Y no sólo eso, es muy importante motivar la literatura (tanto escribir como leer) y la música, no sólo escuchada, sino aprender a tocar un instrumento. El aprendizaje de la utilización correcta del lenguaje es la entrada a la construcción lógica correcta y compleja. Por otro lado, la música, otro lenguaje como la literatura o las matemáticas, ayuda a aumentar considerablemente la comprensión de arquitecturas o estructuras abstractas, que son parte de la materia prima en matemáticas. También debe incluirse el aprendizaje de un idioma extranjero (otro lenguaje) y la práctica de alguna disciplina deportiva. Los idiomas aumentan las conexiones nerviosas entre dendritas, y el ejercicio físico ayuda a aumentar la intuición geométrica.

¿Qué es y puede ser la ciencia en México?

Ángel: Si partimos de la premisa que dice que la ciencia es fundamental para el buen desarrollo de un país, entonces es indispensable desarrollar la ciencia para crear cultura y crear conocimiento capaz de resolver problemas concretos como problemas médicos, ingenieriles, de producción de alimentos, de comprensión de la naturaleza, que además nos permitan una relación más amable y satisfactoria con todo nuestro entorno.

Con respecto a la evolución de la ciencia en México, yo creo que, en relativamente poco tiempo, más o menos 90 años, se han logrado crear no sólo científicos de muy buen nivel, sino incluso grupos científicos de nivel mundial. Sin embargo, aún falta mucho para lograr crear en México un número suficiente de investigadores, docentes y divulgadores de la ciencia; número suficiente que garantice la satisfacción de las necesidades del país en cuanto a tener personas altamente capacitados para resolver los grandes problemas actuales y del futuro. Pero además, cuando digo número suficiente, también me refiero a un número suficiente de científicos e instituciones científicas y académicas que garanticen la continuidad de un proyecto sólido y congruente de ciencia en el país.

¿Qué ciencia debe desarrollarse en un país como México?

Ángel: No creo que deban definirse qué ramas de la ciencia deben promoverse y cuáles no. Lo que es seguro es que se deben promover las ciencias básicas o ciencias teóricas pues sin ciencia básica no se puede tener una ciencia aplicada o aplicable sólida de alto nivel. Y debe dejarse que se desarrollen todas las ciencias aplicadas y aplicables que de modo natural vayan floreciendo. La libertad en el desarrollo de las ciencias es, creo yo, un elemento muy importante para el buen desarrollo de éstas. Una vez teniendo más escuelas y centros de investigación fuertes en ciencia básica, se lograrán aumentar las escuelas de alto nivel que formarán a muchos tipos de científicos, ingenieros y técnicos para cubrir las necesidades que el país requiere.

Con respecto al papel del CONACyT y del SNI en el proceso de desarrollo de la ciencia en México creo que a través de estos instrumentos se han logrado frutos buenos como el estimular a muchos estudiosos de la ciencia a hacer investigación y a publicar sus resultados en revistas internacionales. De entre todos estos estudiosos han aparecido algunos investigadores profundos y se han creado grupos fuertes de investigación. Sin embargo también las políticas del CONACyT y del SNI han producido vicios como el abandono de las preocupaciones relacionadas a la enseñanza, y han promovido la investigación en proyectos sencillos que garanticen la publicación rápida y numerosa de artículos. Esto da como resultado el abandono de proyectos a largo plazo y las investigaciones profundas. Yo creo que la intención de estimular a los estudiosos a comprometerse en la investigación y publicación de nuevos resultados ya se logró, así que deben de variarse los instrumentos y los criterios del CONACyT y del SNI para que se estimule ahora de manera decidida tanto la enseñanza de las ciencias, como la investigación científica de problemas complejos, de proyectos de investigación de largo aliento.

¿Cuál es el nivel matemático en México respecto a otros países?

Ángel: Considero que el nivel matemático en México está a la par de otros países. Pero no hay suficiente producción de calidad. México necesita por lo menos triplicar el número de matemáticos, y de científicos para lograr, por una parte que la matemática y la ciencia producida llegue a impactar en la cultura general, en la producción y en la construcción de la misma sociedad, además de impactar firmemente dentro de la cultura matemática a nivel mundial. Es necesario pues continuar con la creación de escuelas de matemáticas y de centros de investigación en matemáticas, para que en un tiempo no muy lejano, México pueda considerarse un país en donde la ciencia y las matemáticas formen parte del orgullo, de la economía y de la cultura nacional. Nos falta un camino muy largo por recorrer pero las bases de ese desarrollo al que aspiramos están ya construidas y de manera sólida.

¿Cuál consideras que pudiera ser un proyecto nacional de desarrollo de la ciencia en México?

Ángel: En la actualidad, hay muchos jóvenes matemáticos y especialistas en otras ciencias que a pesar de tener doctorado y posdoctorado, y de tener varias publicaciones en revistas internacionales, no encuentran trabajo. Las actuales instituciones de enseñanza e investigación de la ciencia carecen de plazas para dar cabida a todos estos jóvenes. Es decir México posee una buena cantidad de jóvenes brillantes que poseen una formación de alto nivel en ciencias pero no se han abierto los espacios suficientes para recibirlos, a pesar del retraso de nuestro país en investigación científica. Así, un buen proyecto nacional de la ciencia en México es la creación de nuevos centros e institutos de investigación y de escuelas universitarias en donde se enseñe ciencias. Esto es urgente.

¿Cuál ha sido el papel de la actividad matemática en tu vida?

Ángel: Ella ha influido mucho en la manera en que me relaciono con mi esposa, mis hijos, mi familia y mis amigos. En primer lugar, como el estudio, la investigación y la enseñanza de las matemáticas exigen mucho de mi tiempo, tiendo a disminuir mis relaciones sociales que son a su vez muy importantes para la construcción sana de mi estructura emocional. De tal manera que siempre tengo que estar haciendo esfuerzos para dejar tiempo suficiente para interactuar con los demás. Por otro lado, siento que las matemáticas me producen un sentimiento de humildad pues constituyen un edificio de una gran belleza y grandeza al que estoy constantemente admirando. Además, las matemáticas me han enseñado a ser tolerante y comprensivo, pues ellas me han tolerado y han sido comprensivas conmigo. No podría corresponder de otra manera a lo que las matemáticas me han dado.

Cierre

Aquí finaliza, la entrevista a Ángel, nosotros cerramos este trabajo subrayando la importancia del agradecimiento y la bondad, valga este trabajo no como un culto a la persona sino más bien como un agradecimiento por tanta bondad, y como una invitación a crear una matemática y en última instancia una ciencia de gran perfil humano, esperamos que presentar esta semblanza sea una puerta hacia esos senderos.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

jangoa@fcfm.buap.mx
acontri@fcfm.buap.mx
mibarra@fcfm.buap.mx
maga@fcfm.buap.mx

Educación matemática

Matemáticas y sus aplicaciones 13, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-694-8

Capítulo 2

Construyendo la multiplicación en primaria a través de actividades lúdicas. Una experiencia con un grupo de segundo grado

Luis Carlos Báez Arenas [1], Abraham Cuesta Borges [1] y Lidia Aurora Hernández Rebollar [2]

Universidad Veracruzana [1]
FCFM, BUAP [2]

Resumen

Se reporta la implementación de una secuencia didáctica que se diseñó para la construcción del concepto de multiplicación en un grupo de estudiantes de segundo grado de primaria. Las actividades que la componen son lúdicas y consideran el conocimiento previo de la suma, el uso de material concreto y una situación de la vida cotidiana sugerida en el "Plan de estudios de matemáticas de México" [14]. Las observaciones recabadas durante la implementación ponen de manifiesto que este tipo de diseños pueden favorecer la comprensión del concepto multiplicación y que algunas de las dificultades a superar son las asociadas al aprendizaje de tipo memorístico.
Palabras clave: educación básica, juego, multiplicación, suma iterada.

1 Introducción

El problema del aprendizaje de la operación de multiplicación es una de las preocupaciones más habituales, tanto de los docentes como de los padres de niños de primaria. De acuerdo a lo que establece la Secretaría de Educación Pública (SEP) su aprendizaje es importante para lograr avanzar en la construcción de otros conceptos matemáticos en primaria y secundaria [14]; sin embargo, en el proceso de estudio y construcción se muestran dificultades en los niños que son causadas por la propia enseñanza en el aula. Como bien expone Rodríguez, véase [9], "existen personas que aún conciben la educación como una serie de acciones estrictamente teórico–académicas que deben realizarse dentro de un salón, utilizando solamente tablero, marcadores (o tiza), borrador y un gran libro gordo de conocimiento".

Las dificultades son causadas, en primer lugar, por el propósito manifiesto de querer *"enseñar"* la multiplicación sin estar seguros que el niño ha interiorizado conceptos anteriores, como la noción de cantidad, la ordenación de los números o la suma, véase [4]. Por otra parte, se establece la idea de que los niños deben *"aprender"* comenzando siempre por el tedioso proceso de memorizar las tablas de multiplicar, sin la ayuda de situaciones contextualizadas que le sean favorables y/o coadyuven al proceso de aprendizaje.

Es cierto que en los libros del maestro y del niño [12, 13] existen actividades relacionadas a problemas de la vida cotidiana. Pero casi siempre prevalece una metodología de enseñanza monótona con recursos y evaluaciones que, además de poco motivadores, ejercen presión en los niños y presuponen que todos aprenden de la misma manera y al mismo ritmo.

Especialmente en estas edades de escolaridad, una de las maneras de favorecer la comprensión de la multiplicación es el uso del juego y del aprendizaje colaborativo. En este sentido, se propone promover el aprendizaje en un contexto socialmente compartido, a partir del diseño e implementación de una secuencia didáctica. Es un diseño que parte de una exhaustiva revisión de las actividades descritas en los libros de texto [12, 13] y que se divide en tres períodos de aprendizaje como una propuesta para modificar la enseñanza y promover un entorno de innovación docente y de aprendizaje lúdico en los niños.

De este modo, el objetivo central de esta investigación fue analizar el efecto de la implementación de una secuencia didáctica, expresamente diseñada para la construcción de la multiplicación como suma iterada, y con el uso de actividades lúdicas y materiales concretos. Se asume que una serie de actividades que parta del conocimiento de la suma, se apoye en materiales concretos para manipular y en situaciones de la vida cotidiana, debe favorecer tanto el interés por el aprendizaje como la construcción del concepto. Se intenta que el conocimiento sea resultado de un proceso que muestre y motive a los alumnos la necesidad de contar con herramientas que le ayuden a desarrollar potencialidades y competencias que se relacionen con su propia realidad.

El experimento se realizó con 24 sujetos de 2º grado de primaria de una Escuela Pública que, integrada por un total de 461 alumnos, obtuvo resultados destacados en el examen del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes [8]. De los 70 evaluados en ese examen, 11 alumnos (15.7 %) lograron el nivel de sobresaliente; resultado que es elevado en comparación al promedio nacional que fue de 11.03 % y al estatal que alcanzó 7.9 %. Sin embargo, no se puede olvidar el hecho de que 15 alumnos de esta escuela (21.7 %) lograron un nivel indispensable y otros 27 (32.9 %) alcanzaron un nivel insuficiente en la misma prueba.

En el área de matemáticas, dicha evaluación abarcó dos muestras de alumnos: una de 6^{to} de primaria y la otra de 3^{ro} de secundaria. Lo interesante es que alumnos de 6^{to} de primaria se hallen en el nivel indispensable de logro académico. En este nivel pueden, por ejemplo, resolver problemas aritméticos que involucran sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números naturales. En el nivel insuficiente de logro se hallan los alumnos que son capaces de realizar únicamente tareas básicas, como escribir y comparar números naturales.

De este modo, cobra importancia la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en primaria, con especial énfasis en el procedimiento de la operación matemática de la suma y multiplicación. Tomando en cuenta las necesidades actuales en el proceso de enseñanza-aprendizaje es necesario cambiar diversas prácticas docentes en pro de un ambiente idóneo de innovación y razonamiento.

Siguiendo en estas ideas, tanto la secuencia didáctica como la investigación realizada tomaron en consideración el contexto escolar y la necesidad de desarraigar una práctica docente poco innovadora, para centrar la atención en un proceso de enseñanza-aprendizaje que incluya actividades lúdicas. Los resultados ponen de manifiesto que los alumnos participantes se mostraron motivados a aprender y, en consecuencia, lograron mejorar el nivel de comprensión sobre la operación de multiplicación. Unido a ello, y sin hacer mención especial durante la secuencia, adquirió sentido la propiedad conmutativa de la multiplicación.

2 MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En este apartado se abordan los pilares teóricos que fundamentan el desarrollo de la experiencia, así como las referencias previas que exponen las dificultades que los niños afrontan en el proceso de aprendizaje y en la construcción de la multiplicación.

Cuando un niño de primaria se enfrenta a una pregunta de matemáticas, ya sea en la clase o en una evaluación escolar, trata de responder de manera que tenga sentido para él. Procura ser coherente con lo que sabe e intenta lograr una respuesta correcta, aunque no siempre lo logre. Por ejemplo, desde segundo de primaria surge la pregunta ($a \times b = ?$) que plantea una gran presión emocional, tanto en los niños como en los padres de niños que apelan a toda una gama de prácticas nemotécnicas. Investigadores sobre aprendizaje de la multiplicación [18, 3, 6], han llamado la atención acerca de las dificultades que plantea una manera de enseñanza que no atiende a las necesidades de los niños y, en consecuencia, no coadyuva a que logren concebir esta expresión matemática y su operatividad.

Una de ellas está relacionada con la no consolidación de nociones matemáticas básicas necesarias en la comprensión del número, como son: la seriación, la clasificación, la correspondencia, etc. De modo que, en muchas ocasiones, la respuesta a una multiplicación se ve obstaculizada por la falta de conocimientos que son necesarios para ejecutar operaciones básicas, aunado a la necesidad de coordinar tres cantidades en una sola situación de aprendizaje, a diferencia de lo que sucede en la suma y resta. Otra circunstancia es que desde la misma planeación curricular del docente se asume por logro académico que el niño aprenda las tablas de multiplicar, aunque no se asegure la tenencia del significado de los tres términos involucrados en la operación. Por su esencia misma es un procedimiento mecánico y memorístico, aunque el Modelo Educativo [14] proponga la necesidad de fomentar el pensamiento matemático en los niños.

Precisamente, en primer grado de primaria se promueve el uso del algoritmo matemático de la suma y resta para dar solución a problemas sobre cantidades y se insiste en la idea de que el niño lo utilice de manera adecuada en diferentes situaciones de la vida cotidiana. La multiplicación, en segundo de primaria, debería iniciar a través de la suma y de la suma iterada, aunque no exista un reconocimiento formal de la multiplicación como objeto de estudio.

En “Aprendizajes Claves para la Educación Integral” [15], se promueve el razonamiento matemático con objetivos concretos, entre los que destaca “proporcionar conocimientos significativos, relevantes y útiles para la vida.” Lo que resulta contradictorio, con estos objetivos, es el hecho de que las actividades del propio libro y del profesor en el aula casi siempre van encaminadas a un aprendizaje de tipo memorístico; en otras palabras, aprender las tablas de multiplicar. Desde luego que es necesario, pero sería de gran utilidad insertar una propuesta alterna, que busque la construcción del conocimiento en función de las experiencias previas, las estructuras mentales y las creencias del niño.

El Constructivismo resulta ser, por su esencia misma, sinónimo de aprendizaje en educación; aunque su significado es variado, diferentes autores parten siempre de la idea de *construcción del conocimiento* [11].

- En "la construcción social de la realidad" [1], se expone la idea de que el sujeto es un ser social que busca organizar la información de acuerdo a las interacciones que realiza; es decir, que matiza la información de acuerdo a las prácticas sociales.

- El constructivismo de raíces psicológicas y la epistemología genética [7], enfatiza esencialmente en el crecimiento psicológico del ser como un ente evolutivo y desarrollado, mediante los estadios del conocimiento marcados por etapas del crecimiento.

- El constructivismo de razón sociocultural [17] sitúa al aprendizaje en la denominada "*zona de desarrollo próximo*", en tanto es una guía para el alumno mediante actividades ya dominadas, que le permiten aprender nuevas habilidades situadas en lo sociocultural.

- Las teorías neopiageteanas o neoestructuralistas [16], comprenden a nuevos constructivistas que tratan de explicar los desajustes surgidos en el constructivismo de raíces psicológicas y la epistemología genética; sin embargo, dejan las ideas centrales de Piaget para hacer una teoría explicita y verificable empíricamente.

En educación matemática, y de acuerdo a [5], se asume que:

- El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.

- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.

- Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo.

- La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes.

Esta forma de conceptualizar el aprendizaje, desde el constructivismo, rompe con las posturas tradicionales del conocimiento perpetuo, heredado y transferido a generaciones. De allí la importancia de considerar el aprendizaje en constante transformación y de acuerdo con la diversidad de los alumnos [10]. Esta idea nos conduce a reconocer que el conocimiento no se adquiere de forma instantánea, sino que conlleva todo un proceso que comienza en su forma básica y se complejiza conforme el alumno se desarrolla y se familiariza con él; en la misma medida que lo manipula y comprende como parte de una experiencia, para finalmente conservarlo como propio al entenderlo dentro de una realidad concreta [2].

En este sentido y en el impulso de los nuevos programas educativos, debemos considerar al juego como principal herramienta, visto como una representación simbólica de un esfuerzo del niño por comprender la vida adulta a través de la conducta observable de las personas [7], en tanto que considera, además, la diversidad de aprendizaje que presenten los alumnos [10]. El juego debe regular la interiorización de conocimientos con ayuda de la creación de comunidades de aprendizaje [11], definidas como un determinado grupo de personas que persiguen un aprendizaje en concreto y poseen diferencias en: estilos de aprendizaje, conocimientos, cultura, habilidades, etc.

El desarrollo de actividades lúdicas exige que el docente adopte una postura completamente constructivista que abrigue las necesidades de la comunidad de aprendizaje. Más allá de las ciencias, disciplinas, modas o prácticas, la enseñanza lúdica es el acto de localizar el aprendizaje en el contexto cercano al alumno, sin que parezca una actividad impuesta para lograr un objetivo. Lo importante a destacar es que el juego propicia un ambiente favorable para el aprendizaje y debe ser aprovechado como un recurso didáctico que se traduce en una forma de comunicar, de compartir y de conceptualizar, además de potenciar el desarrollo social, emocional y cognitivo.

Se trata de que los alumnos puedan representar, mediante el juego, la suma y la multiplicación en acciones cotidianas, como lo son ir a una tienda y comprar un “x” número de cosas con el mismo valor. Lo lúdico se toma entonces como una forma de ser, una manera de interactuar con diversas facetas de la vida del niño.

De este modo, se pretende documentar un aprendizaje lúdico tomando como medio el juego de roles o de representación, en donde pueden observarse las características de las comunidades de aprendizaje, al mismo tiempo que se promueve un conocimiento que se adapte a un entorno social diferente a las prácticas sistemáticas que, en ocasiones, fomenta el profesorado.

3 METODOLOGÍA

El trabajo tiene un enfoque metodológico cualitativo para describir y analizar cómo ocurre el acercamiento de los alumnos a la multiplicación en un ambiente de clase que, a partir del conocimiento previo de la suma, se caracteriza por la colaboración en el juego y el uso de situaciones de la vida cotidiana.

3.1 Sujetos de estudio

Con la finalidad de garantizar y/o coadyuvar al trabajo en colaboración se asumió la necesidad de que los alumnos ya se conocieran; es decir, que existiera convivencia previa entre ellos. De esa manera, de una población de 70 alumnos que estudiaban el 2^{do} grado de primaria se decidió trabajar con un grupo constituido por 24 alumnos.

3.2 La secuencia didáctica

La secuencia, que se orienta a través de la suma, destaca el papel del significado, de la interiorización y de la abstracción de las operaciones matemáticas. A lo largo de las actividades busca integrar, otorgar sentido y establecer relaciones. Parte de la idea de que se necesita una base conceptual: para hacer la multiplicación se requiere de una suma compleja en el sentido abstracto; es decir, entender la multiplicación como una suma corta que requiere de una visualización.

Todas las actividades que se proponen presentan ligeras modificaciones de otras que se hallan en los libros de texto de la SEP, a saber: “Mi álbum preescolar de primer grado”, “Mi álbum preescolar segundo grado”, “Mi álbum preescolar tercer grado”, “Desafíos Matemáticos de primer y segundo grado de primaria”. Al momento de su descripción se indicará la fuente y de qué manera fueron modificadas.

La secuencia didáctica se implementó en el mes de noviembre de 2017, está constituida por tres fases que se aplicaron en cuatro sesiones de una hora cada una. Para esta implementación se respetó la programación de las clases de matemáticas que ya tenía programadas el grupo seleccionado y que eran los días martes y jueves. A continuación se describe la secuencia didáctica de acuerdo a las fases que la constituyen.

Fase 1 *"El acercamiento"*: se exponen ejemplos de suma de un mismo número. Por ejemplo, la operación de obtener el número 6 como: $2+2+2 = 6$, que es reforzada con su representación mediante el uso de piezas de LEGOS (Ver Figura 1).

Figura 1: "Piezas de Legos"

Posteriormente se enfatiza que la frase: "tres veces dos es igual a seis" se puede simbolizar utilizando un nuevo símbolo y se reduce a escribir $3 \times 2 = 6$. En esta fase del experimento inicia el juego y los alumnos, motivados con el uso del Lego, inician operaciones de conteo de puntos con diferentes piezas del Lego (Ver Figura 1), para luego contar por filas y anotar los resultados. Así, por ejemplo, el número 8 es resultado de:

- $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
- $2 + 2 + 2 + 2$
- Cuatro veces el número 2
- 4×2

Juego: Cajas de dulces (Las regletas de "LEGOS")

Este juego está basado en la Actividad *"Hagamos Bolsas de Dulces"* del libro "Desafíos Matemáticos de primer grado" [13] y tiene la finalidad de atraer la atención de los alumnos por resolver las sumas y multiplicaciones planteadas. En el libro se utilizan las regletas de cuisenaire, que son estructuras de madera donde cada una significa un número (Ver Figura 2).

Figura 2: Regletas de cuisenaire

Para disminuir el grado de dificultad en los niños, en esta secuencia didáctica se sustituyó a las regletas por el Lego. Este posee la característica, a diferencia de la regleta, de que cada pieza representa a un número sin la necesidad de ser comparado con otro. El juego consiste en dibujar cajas de varias dimensiones en las que los alumnos podrán colocar piezas de Lego del tamaño adecuado. Después, ellos dibujarán dulces alineados en filas, de acuerdo a la distribución de la pieza de Lego que colocaron previamente. Por ejemplo, en una de las cajas se podrían colocar cinco dulces a lo largo más otras dos filas de cinco a lo ancho, para lograr la suma de tres veces cinco, que daría un total de 15 dulces. Debajo de la caja dibujada, ellos deberán plasmar la operación que los lleva a obtener el total de dulces dentro de la caja. En la actividad se establecieron las siguientes reglas:

- El alumno deberá de tomar en cuenta las indicaciones en todo momento.
- Se debe solicitar participar alzando la mano.
- Todos los alumnos deberán participar en todo momento.
- El maestro decidirá las dimensiones de la caja a representar.
- Los alumnos deberán de alzar la mano y responder con la cantidad de dulces que llena la caja.

- También podrán participar otros dos alumnos, un alumno que lo represente con suma y otro con multiplicación en el pizarrón.

- El profesor deberá considerar la habilidad de los alumnos para multiplicar y, en su caso, proponer los ejercicios de menor a mayor grado de dificultad. Esta actividad servirá al profesor como un examen diagnóstico, en el cual se evaluará el grado de acercamiento y representación de la suma y la multiplicación en los alumnos.

Fase 2 *"Términos equivalentes"*: en la actividad anterior se introdujo someramente la idea de equivalencia, pero en esta se trabajó con la propiedad conmutativa de la multiplicación. Se intenta trabajar, sin hacer mención especial a la propiedad, en la idea de que sin importar el orden de los factores se obtiene el mismo resultado. Un ejemplo es la actividad de obtener el número 6 con el uso del Lego (Ver Figura 1). Se trata ahora de obtener el número seis de otra manera: $3 + 3 = 6$ o "dos veces tres es igual a 6" y que se puede representar como: $2 \times 3 = 6$.

Del mismo modo, se puede obtener de nuevo el número 8; en este caso invirtiendo las piezas de legos que correspondan para mostrar que ambas operaciones llegan al mismo resultado. Los alumnos deben notar que se obtiene el resultado, a partir de:

- $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

- $4 + 4$

- Dos veces 4

- 2×4

Juego: Palitos de Paleta

El juego tiene la finalidad de mostrar operaciones matemáticas equivalentes porque llegan al mismo resultado. El material consiste en palitos de paleta planos con dos operaciones: en uno de sus lados se pone una suma iterada y en el otro lado la operación equivalente escrita como una multiplicación. Por ejemplo, la suma $2 + 2 + 2$ y la multiplicación 2×3. (Ver Figura 3)

Los palitos de paleta se introducen en un bote, el alumno deberá escoger uno al azar y resolver ambas operaciones en el pizarrón; en caso de alguna dificultad puede ser asistido por un compañero, pero al final deberá explicar

Figura 3: Piezas de Paletas: Anverso y reverso

cómo resolvió las dos operaciones: la suma y la multiplicación. El juego debe contar con diferentes niveles de dificultad y con actividades que se escriben en el pizarrón y se trabajan en equipos de colaboración.

Fase 3 *"Lo cotidiano"*: en ella se introduce a los alumnos a la tarea de realizar operaciones de multiplicación en situaciones que le son cercanas. A sabiendas de que todos los niños están familiarizados con la idea de ir a comprar en compañía de sus padres, se sitúan actividades como: *"Pedro va a la tienda a comprar 5 dulces, cada dulce cuesta 2 pesos ¿Cuánto pagará Pedro?"*

Juego: El mercado

En este juego, a similitud de lo que ocurre en un mercado, la maestra adoptará el rol de moderador y cajero. En dos o tres mesas del salón se organizarán los dulces o juguetes con sus respectivos precios (cada mesa tiene que contener las mismas cosas y las mismas cantidades). Los materiales a utilizar serán: mesas, dulces, juguetes, monedas, etc.

Cada alumno recibirá un monto de 30 monedas y cada vez que quiera comprar, deberá hacer la multiplicación frente al grupo; para poder comprar la cantidad y el producto deberá decirle a la maestra (cajero) la cantidad correcta del precio total de lo que va a comprar.

La condición es que se deben utilizar todas las monedas para efectuar una compra y las operaciones deben ser explicadas. Los alumnos pueden intercambiar productos entre ellos, siempre y cuando ambas partes estén de acuerdo y sea un intercambio equitativo. Por ejemplo, una paleta de \$2 se puede intercambiar por dos caramelos de \$1.

El objetivo de esta actividad es trabajar la multiplicación y activar las habilidades de los alumnos; el tratamiento a las dificultades se debe realizar con recursos que coadyuven al desarrollo intelectual y faciliten el interés de los alumnos.

4 RESULTADOS

Durante el desarrollo de las actividades, la maestra titular del grupo fue quien dirigió la implementación de la secuencia y el responsable del diseño y primer autor de este trabajo se presentó como un "practicante" y auxiliar de la maestra. Durante la aplicación, el practicante intervino para plantear algunas preguntas en momentos que consideró oportunos con la intención de recabar mayor información sobre la actuación de los niños.

Fase 1 "*El acercamiento*":

Desde el inicio se pudo constatar el nivel de satisfacción de los alumnos, quienes se vieron atraídos por la posibilidad de manipular el Lego en el aula. Es un juego que está de moda, lo tienen en casa pero no lo relacionaban con el aprendizaje escolar. Como actividad de control del aprendizaje la profesora escribió cuatro frases:

- "*La suma de tres veces dos, es igual a seis*"
- "*La suma de dos veces tres, es igual a seis*"
- "*La suma de cuatro veces dos, es igual a ocho*"
- "*La suma de dos veces cuatro, es igual a ocho*"

Todos cooperaron y demostraron su habilidad para realizar las operaciones aritméticas manipulando el Lego. De 24 alumnos, 4 se percataron que los dos pares de operaciones llegaban al mismo resultado. A la pregunta del investigador *¿por qué es el mismo resultado?* afirmaron: *"porque los legos se ponen igual, si están acostados o parados"*. El resto de los alumnos pudo realizar la actividad, sin complicaciones, gracias al apoyo del material.

Como segunda actividad la maestra escribió en el pizarrón:

- *"La suma de cinco veces dos, es igual a:"*
- *"La suma de tres veces cuatro, es igual a:"*
- *"La suma de dos veces cinco, es igual a:"*

- *"La suma de cuatro veces tres, es igual a:"*

La maestra explicó la necesidad de representar las operaciones con legos. Acto seguido culminaron los cuatro alumnos antes mencionados y minutos después el resto del grupo concluyó la actividad de simbolizar, con legos, las operaciones escritas.

La segunda actividad consistió en representar las operaciones dentro de objetos dibujados en hoja de papel, a saber en: triángulos, rectángulos, cuadrados y círculos. A manera de ejemplo se presenta el desempeño de dos alumnos:

- El alumno A_1 mostró dificultades en la prueba inicial y esta actividad se le dificulta (Ver Figura 4) cuando se trata de representar dentro de un triángulo o un círculo.

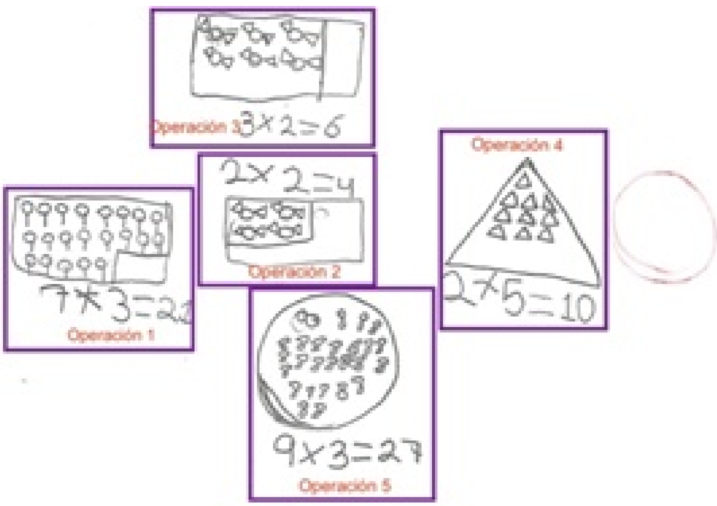


Figura 4: Respuestas del alumno A_1

Dicha actuación constata que, la forma de la figura influye decisivamente en el resultado de representar las operaciones de multiplicación. Este alumno no posee una estructura adecuada y opta por resolver la tarea mediante la operación de la suma y realiza las multiplicaciones correspondientes. Una situación similar ocurre con el 80 % de los estudiantes, quienes se hallan ante la dificultad de representar la operación de multiplicación, cuando la forma del objeto no es la más apropiada.

- El alumno A_2 se desempeña favorablemente en la prueba inicial y, con independencia de la forma propuesta, representa adecuadamente las operaciones (Ver Figura 5)

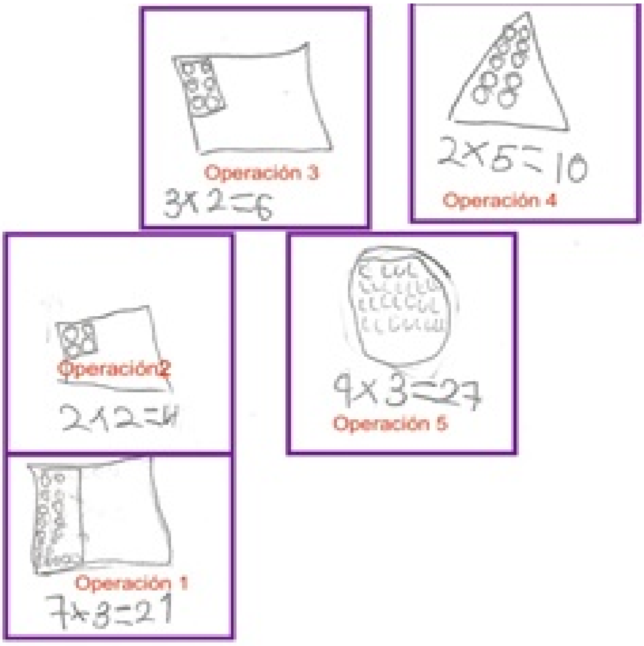


Figura 5: Respuestas del alumno A_2

Fase 2 *"Términos equivalentes"*

Juego: Palitos Paleta

Al iniciar la actividad los alumnos podían elegir pasar al pizarrón o esperar a que la maestra tomara la iniciativa de invitarlos; sin embargo, no fue necesario. Los primeros en responder eran los que tenían mayor seguridad en hacer sus operaciones. Un episodio interesante fue que, incluso aquellos con menor seguridad, todos se mostraban interesados en participar. A la pregunta *¿te es difícil realizar la operación?*, el estudiante A1 respondió: *"si, pero no me da miedo hacerlo"*. Y cuando se le preguntó a A_7 *¿por qué no te da miedo* *ahora?*, respondió *"es que ya vi que a mis amigos les da lo mismo las sumas y las multiplicaciones"*.

Fase 3 *"Lo cotidiano"*

Juego: El mercado

La mayoría de los alumnos fue capaz de realizar las operaciones; sin embargo, los de menor nivel de acierto en la prueba inicial, usualmente cometían errores en las cuentas del mercado. En esta actividad los alumnos lograron un mayor nivel de cooperación y resolución de problemas de multiplicación. A la pregunta ¿por qué te acercas primero a un compañero y no preguntas a la maestra?, el alumno A_{12}: *"es para que no tenga que volver a decirle a la maestra cuando me equivoque, mis amigos me ayudan"*; algo que pone en evidencia, de alguna manera, el trabajo en colaboración.

Concluida la actividad se le planteó la pregunta a la maestra *"¿considera que las actividades planteadas ayudan a los alumnos a desarrollar el sentido de la multiplicación?"* la maestra manifestó: *"sí, porque incitan la participación de los alumnos a través de experiencias cercanas a su vida y con materiales que yo no sabía cómo implementarlos"*… *"a lo largo de las actividades, incluso los que tenían problemas para entender la suma iterada y multiplicación, han llegado a un grado de mejorar su habilidad de comprensión matemática"*.

5 CONCLUSIONES

El principal logro de esta experiencia didáctica es que los alumnos construyeron la multiplicación como una suma iterada, a través de actividades que relacionaron los conceptos involucrados con un entorno social cercano a los alumnos. Por ejemplo, las actividades con legos y con palitos de paleta les permitieron entender la multiplicación como suma iterada y la propiedad conmutativa.

La secuencia didáctica propone, a diferencia de la clase tradicional que realiza el profesor, una manera más intuitiva de abordar la multiplicación mediante actividades lúdicas adecuadas al desarrollo cognitivo del alumno. En su aplicación se observó la generación de un clima de colaboración que hizo posible, de manera natural, disminuir, tanto el grado de dificultad en los alumnos como las diferencias existentes entre sus capacidades individuales.

El juego promovió el interés por realizar las operaciones; las actividades fueron cercanas al alumno e involucraron experiencias que comparte con adultos, como las compras en un mercado. Un elemento importante fue la simulación de experiencias, que hizo posible la progresión en la habilidad para resolver problemas de suma y multiplicación, ya sea en binas de alumnos o de manera individual.

En esta investigación observamos al paradigma constructivista como una fuente de aprendizaje en dos vías: para al profesorado, como una vía de actualización con nuevas formas de enseñanza, y para los alumnos al generar un aprendizaje más cercano a sus intereses personales.

Aunque consideramos que los resultados fueron satisfactorios sugerimos que, si se desea replicar esta investigación, sería conveniente diseñar una prueba que se pueda aplicar antes y después de la secuencia para evaluar el efecto de la misma en el desempeño de los alumnos al resolver problemas tradicionales de este tema.

Bibliografía

[1] Berger, P. T. & Luckman, T., *The social construction of reality*. Doubleday & Company Inc., Garden City, 2003.

[2] Bower, G., *Teorías del aprendizaje*, Editorial Trillas, 1973.

[3] Ferreiro, E., *Vigencia de Jean Piaget*. México: Siglo XXI Editores, 2003.

[4] Godino, J. D., Didáctica de la matemática para maestros. *Proyecto Edumat-Maestros. Manual del estudiante*, Granada, 2004.

[5] Kilpatrick, J., Gómez, P. & Rico, L., *Educación matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

[6] Nunes, T. & Bryant, P., *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*, Siglo XXI Editores, 1997.

[7] Piaget, J., Piaget's theory. En P. H. Mussen (Ed.), *Carmichael's manual of child psychology*, John Wiley and Sons. United States of America, 1983.

[8] *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes. Mejora tu Escuela*, Gobierno de México, 2015.

[9] Rodríguez, F. P., Competencias comunicativas, aprendizaje y enseñanza de las Ciencias Naturales: un enfoque lúdico. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 6 (2), 2007, 275-298.

[10] Santiváñez, V., *La didáctica, el constructivismo y su aplicación en el aula.* Cultura, 2015, 138-148.

[11] Serrano, J. & Pons, R., El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 2011, 1-27.

[12] Secretaría de Educación Pública. *Desafíos Matemáticos Segundo Grado: Guía para el Maestro*, Comisión Nacional de Textos Gratuitos, 2014.

[13] Secretaría de Educación Pública. *Desafíos Matemáticos Segundo Grado.* Comisión Nacional de Textos Gratuitos, 2014.

[14] Secretaria de Educación Pública. *Modelo Educativo para la educación obligatoria.* Ciudad de México, 2017.

[15] Secretaria de Educación Pública. *Aprendizajes Clave para la educación básica*, México, 2018.

[16] Villar, F., *Psicología evolutiva y psicología de la educación*, Barcelona, 2003.

[17] Vygotsky, L. S., & Kozulin, A., *Pensamiento y lenguaje.* Barcelona: Paidós, 1995.

[18] Wood, D., *Cómo piensan y aprenden los niños*, Editorial Siglo XXI, 2000.

Facultad de Economía, Universidad Veracruzana
Lomas del Estadio S/N Edificio A, Piso 3. Col. Zona Universitaria,
Xalapa, Veracruz, C.P. 91090
Facultad de Pedagogía, Universidad Veracruzana
Lomas del Estadio S/N Edificio A, Piso 3. Col. Zona Universitaria,
Xalapa, Veracruz, C.P. 91090
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

cuesta6@hotmail.com
luisivory@gmail.com
lhernan@fcfm.buap.mx

Topología

Matemáticas y sus aplicaciones 13, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-694-8

Capítulo 3

Unicidad del hiperespacio $C(p, X)$ para la familia de árboles

Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero
FCFM, BUAP

Resumen

Dado un continuo X y $p \in X$, consideramos el hiperespacio $C(p, X)$ el cual contiene a todos los subcontinuos X que a su vez contienen a p. Dada una familia de continuos $\mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$ y $p \in X$, se dice que el par (X, p) posee hiperespacio único $C(p, X)$ si cada que $Y \in \mathcal{C}$, $q \in Y$ y $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$, existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(p) = q$. En este capítulo, se prueba que la clase de árboles posee hiperespacio único $C(p, X)$.

1 Introducción

Un **continuo** es un espacio métrico conexo, compacto y no degenerado. Un hiperespacio de un continuo X es una colección de subconjuntos del continuo que cumplen ciertas características. Si $n \in \mathbb{N}$ y $p \in X$, consideremos los hiperespacios siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset, \quad A \text{ es cerrado en } X\}.$$
$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ posee a lo más } n \text{ componentes}\}.$$
$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ posee a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Estos hiperespacios son a su vez continuos, cada que X es un continuo, bajo la métrica de Hausdorff [11]. En [2] se introdujo el hiperespacio $C(P, X)$ donde P es un subcontinuo del continuo X. Sin embargo, no fue hasta el 2003 cuando se tomó $P = \{p\}$ que se estudiaron propiedades generales de dicho hiperespacio [3]. Más aún, en el mismo artículo se construyeron modelos para este hiperespacio con continuos elementales.

Años después, en [4] y [5] se profundizó el estudio de este hiperespacio para continuos atriódicos, es decir, continuos que no contienen triodos simples, se presentaron modelos de estos y sus propiedades topológicas.

De manera más reciente, en [1] comenzó el estudio de la unicidad del hiperespacio $C(p, X)$ para ciertas familias de continuos. En contraste con la defnción de unicidad [4] utilizada para los hiperespacios $C_n(X)$ o $F_n(X)$, utilizaremos la siguiente: dada una familia de continuos $\mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$ y $p \in X$, se dice que el par (X, p) posee hiperespacio único $C(p, X)$ si cada que $Y \in \mathcal{C}$, $q \in Y$ y $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$, existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(p) = q$.

2 Preliminares

Algunas familias muy conocidas de continuos son las siguientes:

Una **gráfica finita** es un continuo que puede ser descrito como la unión finita de arcos tales que se intersectan en a lo más una cantidad finita de puntos.

Un **árbol** es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

En las gráficas finitas, destacan tres tipos distintos de puntos, los puntos extremos, los puntos ordinarios y los puntos de ramificación, los cuales denotaremos por $E(X), O(X)$ y $R(X)$, respectivamente:

$$E(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}_X(x) = 1\},$$

$$O(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}_X(x) = 2\},$$

$$R(X) = \{x \in X\colon \operatorname{ord}_X(x) \geq 3\}.$$

Los árboles están compuestos sólo por arcos, los cuales llamaremos aristas y el conjunto de las aristas que componen un árbol X, estará denotado por $edge(X)$.

Un **subárbol** es un subcontinuo Y de un árbol X tal que si $e \in edge(Y)$, entonces $e \in edge(X)$.

Dado un entero positivo n, un $n-$**odo simple** es una gráfica finita la cual es la unión de n arcos, cuya intersección consta de un solo punto denotado por v y conocido como vértice. Denotaremos por T_n a los $n-$odos simples. Note que un n-odo es un subárbol sí mismo.

Un continuo X se dice que es **descomponible** si existen dos subcontinuos propios de X, A, B tales que $A \cup B = X$. Un continuo que no es descomponible, se conoce como **indescomponible**. Un continuo es **hereditariamente indescomponible**, si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Utilizaremos el concepto de dimensión como en [10]. Observe que en el caso de gráficas finitas (y por ende, de los árboles) la definición de dimensión se limitará a la cardinalidad de la frontera de una vecindad del punto en cuestión.

Ejemplo 2.1. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Veamos que si $p \in X$, $C(p, X)$ es un arco. Procederemos por contradicción, si existe un $p_0 \in X$ tal que $C(p_0, X)$ no es un arco, tomemos $\{p_0\} \in C(p_0, X)$, y así, existe un arco ordenado $\alpha_1 : [0, 1] \to C(p_0, X)$ tal que $\alpha_1(0) = \{p_0\}$ y $\alpha_1(1) = X$. Por otro lado, dado que $C(p_0, X)$ no es un arco, existe $K \in C(p_0, X) - \alpha_1([0, 1])$ y un arco ordenado $\alpha_2 : [0, 1] \to C(p_0, X)$ tal que $\alpha_2(0) = \{p_0\}$, $\alpha_2(1) = X$ y $\alpha_2(t) = K$, para algún $t \in [0, 1]$. De este modo, $\alpha_1([0, 1]) \neq \alpha_2([0, 1])$. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Tomemos $s \in [0, 1]$ tal que $\alpha_1(s) \notin \alpha_2([0, 1])$ y sea $r = \mu(\alpha_1(s))$. Considere también $t \in [0, 1]$ tal que $r = \mu(\alpha_2(t))$. Luego, de acuerdo a la definición de función de Whitney, $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(t)$ no son comparables. De esta manera, $\alpha_1(s) - \alpha_2(t) \neq \emptyset$ y $\alpha_2(t) - \alpha_1(s) \neq \emptyset$. Sin embargo, dado que $p_0 \in \alpha_1([0, 1]) \cap \alpha_2([0, 1])$, tenemos que $\alpha_1([0, 1]) \cup \alpha_2([0, 1]) \in C(X)$ y así, es descomponible. Luego, X no es hereditariamente indescomponible, lo cual es una contradicción.

De esta manera, tenemos que si X es un continuo hereditariamente indescomponible, $C(p, X)$ es un arco para cada $p \in X$. Por [6, Teorema 3.17], si Y es un arco con puntos extremos a y b, entonces $C(a, Y)$ y $C(b, Y)$ son arcos. Esto muestra que (X, p) no posee hiperespacio único $C(p, X)$ en la clase de los continuos.

Ejemplo 2.2. Sea Z el continuo de Knaster con dos puntos finales a, b [5, p. 205]. Entonces, $C(a, Z)$, $C(b, Z)$ son ambos arcos y $C(p, Z)$ es una 2-celda para cada $p \in Z - \{a, b\}$. Así, si X es un arco y $p \in X$, tenemos que (X, p) no posee hiperespacio único $C(p, X)$ en la clase de continuos.

Ejemplo 2.3. Sean X un arco con puntos extremos a, b y Y una curva cerrada simple. Entonces, $C(p, X)$ y $C(q, Y)$ son 2-celdas para cada $p \in X - \{a, b\}$ y

$q \in Y$. Esto nos muestra que (X, p) no posee hiperespacio único en la clase de las gráficas finitas.

3 Unicidad del hiperespacio

En esta sección, denotaremos a la familia de árboles por τ. La estrategia a seguir en la demostración de la unicidad del hiperespacio $C(p, X)$ para elementos de la familia τ, será particionar dicha familia en las siguientes subfamilias: $\mathcal{I}$ denotará la subfamilia de los arcos en τ; por $\mathcal{N}$ se entenderá a los n-odos simples en τ. Finalmente, $\hat{\tau} = \tau - (\mathcal{I} \cup \mathcal{N})$. Con esta partición, se probará la unicidad del hiperespacio en cada una de ellas. Comenzamos con un resultado importante (véase [3, Teorema 3.3]:

Teorema 3.1. *Sea X una gráfica finita y $p \in X$. Entonces para cada $A \in C(p, X)$ y $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto $\mathcal{A} \subset C(p, X)$ tal que $\mathcal{A}$ contiene una $n-$celda, donde $n = \operatorname{ord}(p, X)$ y $\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.*

Este resultado es auxiliar para probar el siguiente:

Lema 3.2. *Sean $X, Y \in \tau$ y $p \in X, q \in Y$.Si $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$, entonces $\operatorname{ord}(p, X) = \operatorname{ord}(q, Y)$.*

Demostración. Supongamos que $\operatorname{ord}(p, X) = n$, $\operatorname{ord}(q, Y) = m$ y $n < m$. Puesto que $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$, existe un homeomorfismo $h : C(p, X) \to C(q, Y)$. Dado que $\operatorname{ord}(p, X) = n$, esto implica que $\{p\}$ tiene una base de vecindades que consiste de $n-$celdas en $C(p, X)$. Por el homeomorfismo, $h(\{q\})$ también tiene una base de vecindades consistente de $n-$celdas en $C(q, Y)$. Sin embargo, por Teorema 3.1 esto es imposible, pues tomando ε suficientemente pequeño, podemos encontrar un subconjunto $\mathcal{A}$ de $C(q, Y)$ que contiene una $m-$celda. Esto implicaría que $m \leq n$. De manera análoga, obtenemos $n \leq m$, y se sigue el resultado. □

Podemos encontrar la prueba del siguiente teorema en [6, Teorema 3.15].

Teorema 3.3. *Sea X un continuo, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si p está en el corazón de un $n-$odo, entonces $C(p, X)$ contiene una $n-$celda.*

Haremos uso del Lema 3.2 y el Teorema 3.3 para probar la unicidad del hiperespacio $C(p, X)$ en la familia $\mathcal{I}$.

Teorema 3.4. *Si $X \in \mathcal{I}$ y $p \in X$, entonces (X, p) posee hiperespacio único en τ.*

Demostración. Si X es un arco con puntos finales a y b, y $p \in X$, tenemos que $C(p, X)$ es un arco si $p \in \{a, b\}$ y $C(p, X)$ es una 2-celda si $p \in X - \{a, b\}$. Si Y es un continuo y $q \in Y$ es tal que $C(q, Y)$ es un arco o una 2-celda, entonces q no puede estar en el corazón de un triodo en Y. De esta manera, puesto que $Y \in \tau$, tenemos que Y debe ser un arco. Por 3.2, $C(p, X)$ homeomorfo a $C(q, Y)$ implica que existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(p) = q$. □

Seguiremos la estrategia planteada al inicio de esta sección, probando la unicidad del hiperspacio sobre la familia $\mathcal{N}$, de los n-odos simples. Para ello, consideremos la siguiente definición.

Definición 3.5. Dado $x \in E(X)$, denotamos por $v(x)$ al único punto en $R(X)$ tal que la componente C de $X - \{v(x)\}$ que contiene a x satisface que $C \cup \{v(e_1)\}$ es un arco. A este único punto, se le conoce como *vecino* de x. Véase la Figura 1.

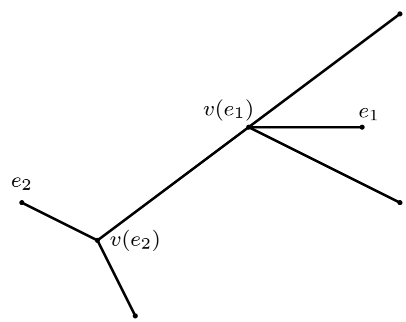


Figura 1: Ejemplos de puntos vecinos.

El siguiente resultado involucra la definición anterior.

Teorema 3.6. *Sea X una gráfica finita que no es un arco. Si $e_1, e_2 \in E(X)$ y $C(e_1, X)$ es homeomorfo a $C(e_2, X)$, entonces* $\operatorname{ord}(v(e_1), X) = \operatorname{ord}(v(e_2), X)$.

Demostración. Sea $h : C(e_1, X) \to C(e_2, X)$ un homeomorfismo. Denotaremos por l_1 y l_2 las aristas de X, $e_1v(e_1)$ y $e_2v(e_2)$, respectivamente. Luego, si $A \in C(e_1, l_1) - \{l_1\}$, por Teorema 3.1, tenemos que $h(A) \in C(e_2, l_2)$. Por continuidad de h, en particular tenemos que $h(l_1) \in C(e_2, l_2)$. Una vez más, utilizando Teorema 3.1, tenemos que $h(l_1) = l_2$ y $\mathrm{ord}(v(e_1), X) = \mathrm{ord}(v(e_2), X)$. □

La subfamilia de los n-odos simples en τ posee hiperespacio único $C(p, X)$:

Teorema 3.7. *Si $X \in \mathcal{N}$ y $p \in X$, entonces (X, p) posee hiperespacio único en τ.*

Demostración. Sea $p \in X$ y supongamos que $Y \in \tau$ y $q \in Y$ son tales que $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$. Dividimos la demostración en dos casos:

Caso 1. Si $p \in R(X)$. Por 3.2, tenemos que $q \in R(Y)$ y $\mathrm{ord}(p, X) = \mathrm{ord}(q, Y)$. Si $n = \mathrm{ord}(p, X)$, entonces $C(p, X)$ y $C(q, Y)$ son $n-$celdas. De esta manera, Y es un $n-$odo simple con vértice q.

Caso 2. Si $p \in E(X) \cup O(X)$, por Teorema 3.2, tenemos que $q \in E(Y) \cup O(Y)$. Considere l_p y l_q aristas en X y Y que contienen a p y q, respectivamente. Sean $x \in (V(X) - \{p\}) \cap l_p$ y $y \in (V(Y) - \{q\}) \cap l_q$. Por Teorema 3.6, tenemos que $\mathrm{ord}(x, X) = \mathrm{ord}(y, Y)$. Si Y contiene un $r \in R(Y) - \{y\}$, entonces $C(q, Y)$ contiene una $[\mathrm{ord}(r, Y) + \mathrm{ord}(y, Y)]-$celda, lo cual es una contradicción, pues $\dim(C(q, Y)) = \dim(C(p, X)) = \mathrm{ord}(x, X) = \mathrm{ord}(y, Y)$. Entonces, tal $r \in R(X)$ no existe, por lo que Y es un $\mathrm{ord}(x, X)-$odo simple.

□

Nuestra atención pasará a los árboles que no son ni arcos ni n-odos simples. Se probarán resultados que serán antecedentes al teorema principal del capítulo.

Sea X un árbol, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos el siguiente conjunto:

$U_n(X) = \{A \in C(p, X) \colon$ *A tiene una vecindad en C(p,X) homeomorfa a*$I^n\}$,

denotamos $\mathcal{U}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n(X)$, $\pi_0(\mathcal{U}(X))$ denota el conjunto de las componentes conexas de $\mathcal{U}(X)$.

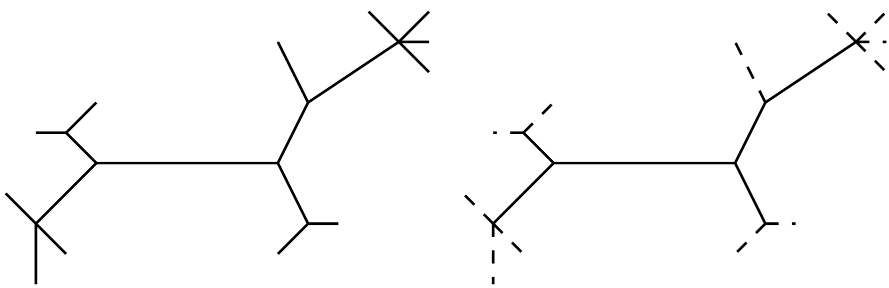
Dado un árbol que no es un arco ni un $n-$odo simple, consideramos el subcontinuo (que también es un subárbol):

$$T(X) = \bigcup\{e \in edge(X) \colon e \cap E(X) = \emptyset\}.$$

Para cada $x \in E(X)$ existe exactamento un punto $r_x \in R(X)$ tal que el arco que une x con r_x, $\overline{r_x x}$ es un arista de X. Considerando esta notación, el continuo $T(X)$ se puede ver como sigue:

$$T(X) = X - \bigcup_{x \in E(X)} \overline{r_x x}.$$

De esta manera, $T(X)$ es un subcontinuo del árbol X removiendo sus arcos extremos (véase Figura 2). Observemos que $T(X)$ es un subárbol de X



(a) X (b) $T(X)$

Figura 2

y $R(T(X)) \subset R(X) \subset T(X)$.

Sea $Sub_p(T(X))$ la colección de todos los árboles de $T(X)$ que contienen a p. Buscamos establecer una correspondencia inyectiva entre $Sub_p(T(X))$ y las componentes de $\mathcal{U}(X)$. Para esto, sea $Y \in Sub_p(T(X))$ y supongamos que

$$\{e \in edge(X) - edge(Y) \colon e \cap Y \neq \emptyset\} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

Para cada $1 \leq j \leq n$ y dado que la intersección $e_j \cap Y$ consiste exactamente de un sólo punto (de ramificación de X) como se muestra en la Figura 3, podemos tomar un homeomorfismo $h_j : [0, 1] \to e_j$ tal que $h_j(0) \in Y$.

Definimos U_y de la siguiente manera:

$$U_Y = \{Y \cup \bigcup_{j=1}^{n} h_j([0,t_j]) \colon (t_1, t_2, ..., t_n) \in (0,1)^n\}.$$

Por construcción, $U_Y \subset C(Y,X)$ y es homeomorfo a $(0,1)^n$. En términos de la topología de Vietoris, tenemos que $U_Y = \{Y \cup A \in C(X) \colon A \in \langle \mathrm{int}(e_1), ..., \mathrm{int}(e_n) \rangle\}$. Véase Figura 3.

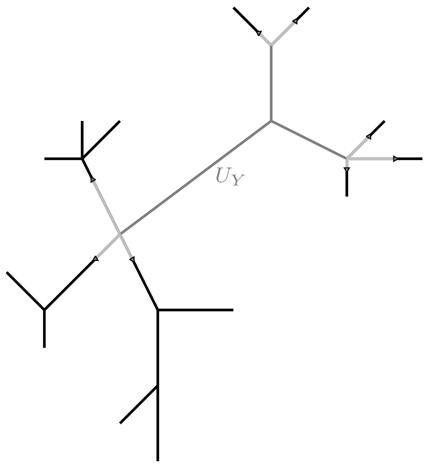


Figura 3: Observe que U_Y toma Y con una parte de las aristas incidentes en Y.

De esta manera, U_Y es abierto y conexo en $\mathcal{U}(X)$ (por el homeomorfismo).

Definamos $\phi_X : Sub_p(T(X)) \to \mathcal{U}(X)$, dada por $\phi_X(Y) = U_Y$. Sean $Y, Y' \in Sub_p(T(X))$ es tal que $U_Y \cap U_{Y'} \neq \emptyset$. Entonces existe $B \in U_Y \cap U_{Y'}$ tal que $B = Y \cup A = Y' \cup A'$. Notemos que si existe $e \in B$ tal que $e \in edge(Y) - edge(Y')$, entonces $e \subset A - A'$, lo cual es una contradicción, pues así, $B \notin U_{Y'}$. De esta manera, $Y = Y'$; así, tenemos que ϕ_X es una función inyectiva. Veamos que es suprayectiva. Para ello, sea $B \in \mathcal{U}(X)$ y consideremos $Y = \bigcup\{A \in Sub_p(T(X)) \colon A \subset B\}$. De este modo, tenemos que $Y \in C(p,X) \cap Sub_p(T(X))$ y $B \in U_Y$.

Lema 3.8. *Sea $X \in \hat{\tau}$. Sea $G = e_1 \cup e_2 \cup ... \cup e_k \subset T(X)$ y $f_1, ..., f_m$ aristas de $X - G$ incidentes en G. Entonces, $m \geq 2$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre k. Para $k = 1$, tenemos que $G = e_1 = \overline{p_1 p_2}$. Entonces, $\text{ord}(p_2, X) \geq 3$, pues todos los vértices de $T(X)$ son puntos de ramificación de X. Así, hay al menos dos aristas incidentes en G. Supongamos ahora que la proposición es válida para $k = n$ y sea $G = e_1 \cup ... \cup e_{k+1}$. Dado que $T(X)$ es un árbol, asumimos que e_{k+1} intersecta a alguno de $e_1, ..., e_k$. Sean $f_1, ..., f_m$ aristas incidentes en $G' = e_1 \cup ... \cup e_{k+1}$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $m \geq 2$. Sea q un punto extremo de e_{k+1} que no está en G', y tenemos que $\text{ord}(q, X) \geq 3$. Así, los aristas incidentes en G son en total $m - 1 + \text{ord}(q, X) - 1 \geq m + 1 \geq 2$. $\square$

Lema 3.9. *Sea $X \in \hat{\tau}$. Sean $G, G' \in Sup_p(T(X))$ y supongamos que existe un arista $e \in edge(G)$ tal que $e \cap G' = \emptyset$. Entonces, $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} = \emptyset$.*

Demostración. Sean $f_1, f_2, ..., f_m$ aristas de $X - G$ incidentes en G. De manera similar,$f'_1, ..., f'_{m'}$ aristas de $X - G'$ incidentes en G'. Notemos que un elemento $K' \in \overline{U}_{G'}$ es de la forma $K' = G' \cup \bigcup_{j=1}^{m'} \{A_i \colon A_i \in C(f'_j)\}$, mientras que un elemento $K \in \overline{U}_G$ es de la forma $K = G \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{A_i \colon A_i \in C(f_i)\}$. Así, K no puede estar en $\overline{U}_{G'}$. $\square$

Consideramos una manera más cómoda para escribir un subárbol $G \in Sub_p(T(X))$. Sean $e_1, e_2, ..., e_k$ las aristas de G y $f_1, f_2, ..., f_m$ las aristas de $X - G$ que inciden en G. Entonces, escribimos

$$G = [e_1, e_2, ..., e_k; f_1, f_2, ..., f_m].$$

Proposición 3.10. *Sea $X \in \hat{\tau}$. Considere $G, G' \in Sub_p(T(X))$ tales que $G' = G \cup e$ para algún $e \in edge(T(X))$. Entonces,*

(i) $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} \neq \emptyset$,

(ii) $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'}) = \dim(U_G) - 1$,

(iii) $\dim(U_{G'}) = \dim(U_G) + \text{ord}(p', X) - 2$, *donde p' es el vértice de e que no está en G.*

Viceversa, si $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} \neq \emptyset$ y $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} = \dim(U_G) - 1$, entonces existe un único $E \in edge(T(X))$ tal que $G' = G \cup e$.

Demostración. Consideremos $G = [e_1, ..., e_k; d_1, ..., d_n, e]$ y $G' = [e_1, ..., e_k, e; d_1, ..., d_n, f_1, ..., f_m]$, donde $e, f_1, ..., f_m$ son incidentes en p'. De este modo, observamos que

$$\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} = \{G' \cup A \in C(X) \colon A \in \langle \mathrm{int}(d_1), ..., \mathrm{int}(d_n) \rangle.$$

De esta manera, se tiene la condición (i). La condición (ii) se sigue de las libertades que tiene A, en este caso, hay n libertades (tantas como aristas incidentes en G, véase Figura 4). Así, $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'}) = n$. Más aún, por las libertades para G y G', se tiene que $\dim(U_G) = n + 1$ y $\dim(U_{G'}) = n + m = \dim(U_G) - 1 + \mathrm{ord}(p', X) - 1$.

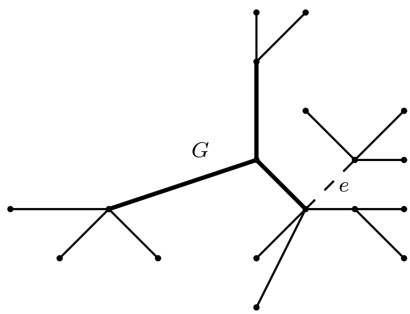


Figura 4: $G' = G \cup \{e\}$

Por el contrario, observemos que $\overline{U}_G \cap \overline{U}'_G \neq \emptyset$, de donde por Lema [REF], se tiene que todos los aristas de $G - G'$ inciden en G' y todos los aristaas de $G' - G$ inciden en G. Además, se tiene $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}'_G) = n$. De esta manera, tenemos que $n = n + l + m - 1$, donde l es la cantidad de aristas en $G' - G$ que inciden en G y m son las aristas incidentes en G que no están en G', esto es, $k + m = 1$, de donde $(l, m) = (0, 1)$ o $(l, m) = (1, 0)$. Si $l = 1$ y $m = 0$, tenemos que esto es imposible por Lema 3.8, pues deben de incidir en G al menos 2 aristas. Así, el caso posible es cuando $l = 0$ y $m = 1$, esto es, $G' = G \cup e$. □

Dado X árbol, $p \in X$, Y árbol y $q \in Q$ tal que $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$, construiremos un homeomorfismo entre X y Y, haciendo uso de los conjuntos $\overline{U}_G$ para $G \in Sub_p(T(X))$, reconstruyendo el continuo X en Y.

Definición 3.11. Sean $p, p' \in X$ vértices tales que $X \in \tau$. Denotamos por $\overline{pp'}$ al subárbol más pequeño que contenga a p, p'.

Proposición 3.12. *Sean $X, Y \in \tau$, $p \in X$, $q \in Y$. Si $h : C(p, X) \to C(q, Y)$ es un homeomorfismo, entonces para cada vértice $p' \in T(X)$ existe un único $q' \in T(Y)$ tal que $h(U_{\overline{pp'}}) = U_{\overline{qq'}}$. Más aún, si $\overline{pp'}$ consiste de aristas $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$ con $i = 1, ..., n$ con $p = p_0$ y $\overline{qq'}$ consiste de las aristas $f_i = \overline{q_{i-1}q_i}$, con $i = 1, ..., m$ y $q = q_0$, entonces $m = n$ y $h(U_{\overline{pp_i}})$ para i.*

Demostración. Considere un arista $e = \overline{pp'} \subset T(X)$ y sean $G = \{p\}$ y $G' = G \cup e$. Por Proposición [REF], tenemos que $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} \neq \emptyset$ y $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'}) = \dim(U_G) - 1$. Estas condiciones se preservan bajo homeomorfismos, por lo que $h(\overline{U}_G) \cap h(\overline{U}_{G'}) \neq \emptyset$, $\dim(h(\overline{U}_G) \cap h(\overline{U}_{G'})) = \dim(h(U_G)) - 1$ y sabemos que $h(U_G) = U_{\{q\}}$. Dado que ϕ_Y es una biyección, existe $F' \in Sub_p(T(Y))$ tal que $\phi_Y(F') = U_{F'} = h(U_{G'})$. Por la segunda parte de la proposición [REF], aplicado a $U_{\{q\}}$ y $U_{F'}$, existe un arista $f' \in edge(T(Y))$ tal que $F' = \{q\} \cup f'$. En otras palabras, existe un vértice único $q' \in T(X)$ y un arista $f' = \overline{qq'} \subset T(Y)$ tal que $h(U_{\overline{pp'}}) = U_{\overline{qq'}}$.

Supongamos ahora que la proposición es válida para n y considere el subárbol $\overline{pp'}$ con aristas $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$, $i = 1, ..., n + 1$. Sea $G = e_1 \cup ... \cup e_n$, $G' = G \cup e_{n+1}$. Entonces, $\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'} \neq \emptyset$ y $\dim(\overline{U}_G \cap \overline{U}_{G'}) = \dim(U_G) - 1$. Una vez más, estas condiciones se preservan bajo homeomorfismos, por lo que $h(\overline{U}_G) \cap h(\overline{U}_{G'}) \neq \emptyset$, $\dim(h(\overline{U}_G) \cap h(\overline{U}_{G'})) = \dim(h(U_G)) - 1$, y por hipótesis de inducción, tenemos que $h(U_{\overline{pp_i}}) = U_{\overline{qq_i}}$ para cada $i = 1, ..., n$; en particular, se tiene que $h(U_G) = U_{\overline{qq_n}}$. Sea $F' \in Sub_p(T(Y))$ tal que $U_{F'} = h(U'_G)$, y por la proposición [REF], existe $f' \in edge(T(Y))$ tal que $F' = \overline{qq_n} \cup f'$. En otras palabras, existe un único $q' = q_{n+1} \in T(X)$ y un arista $f' = \overline{q_j q_{n+1}} \subset T(Y)$ tal que $h(U_{\overline{pp'}}) = U_{\overline{qq'}}$. Veamos que $j = n$.

Sea $G_i = \{p_0\} \cup e_1 \cup ... \cup e_i$ y $G' = \{p_0\} \cup e_1 \cup ... \cup e_{n+1}$. Notemos que e_{n+1} no es incidente en G_i, por lo que $\overline{U}_{G_i} \cap \overline{U}_{G'} = \emptyset$, de donde se sigue que $\overline{U}_{\overline{qq_i}} \cap h(\overline{U}_{G'}) = h(\overline{U}_{G_i}) \cap h(\overline{U}_{G'}) = \emptyset$, así, el arista $f' = \overline{q_j q_{n+1}}$ no es incidente en ningún $q_0, ..., q_{n-1}$, por lo que es incidente en q_n. □

Dado $p \in R(X)$, podemos extender la función de la Proposición 3.12 a todo X, y así conseguir el homeomorfismo entre X y Y, cumpliéndose así la unicidad del hiperespacio para este caso.

Teorema 3.13. *Sean $X, Y \in \tau$, $p \in R(X)$ y $q \in Y$. Si $h : C(p, X) \to C(q, Y)$ es un homeomorfismo, entonces existe un homeomorfismo $\hat{h} : X \to Y$ con $\hat{h}(p) = q$.*

Demostración. Por la Proposición 3.12, existe una función $\langle : V(T(X)) \to V(T(Y))$ dada por $\overline{h}(p') = q'$ si $h(U_{\overline{pp'}}) = U_{\overline{qq'}}$. Por la proposición anterior, esta función es biyectiva. Veamos que esta función preserva aristas. Sea un arista $e = \overline{p'p''} \subset T(X)$ y supongamos que $\overline{pp''}$ es un subárbol que consiste de los aristas $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$ con $i = 1, ..., n$ con $p = p_0$, $p' = p_{n-1}$ y $p'' = p_n$. Por la proposición anterior, tenemos que $\overline{qq''}$ consiste de las aristas $f_i = \overline{q_{i-1}q_i}$ con $i = 1, ..., n$, con $q_i = \overline{h}(p_i)$, $q = q_0$, $q_{n-1} = q'$ y $q'' = q_n$. De este modo, existe un arista entre $q' = \overline{h}(p')$ y $q'' = \overline{h}(p'')$.

Veamos ahora que esta función se puede extender a $V(X)$. Sea $p' \in E(X)$; entonces existe un elemento $p_n \in T(X)$ tal que $e = \overline{p_n p'}$ es un arista. Sea $l(p_n) = |\{p' \in E(X)\colon \text{ existe un arista } e = \overline{p_n p'} \subset X\}|$. Veamos que $l(p_n) = l(\overline{h}(p_n))$. Considere $\overline{pp_n}$ que consiste de las aristas $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$, $i = 1, ..., n$ con $p = p_0$. Podemos contar $l(p_n)$ de la siguiente manera:

$$l(p_n) = \operatorname{ord}(p_n, X) - \operatorname{ord}(p_n, T(X))$$

$$= \dim(U_{G'}) - \dim(U_G) + 2 - \operatorname{ord}(p_n, T(X))$$

$$= \dim(h(U_G)) - \dim(h(U_{G'})) + 2 - \operatorname{ord}(q_n, T(Y))$$

$$= \dim(U_{\overline{qq_{n+1}}}) - \dim(U_{\overline{qq_n}}) + 2 - \operatorname{ord}(q_n, T(Y))$$

$$= \operatorname{ord}(q_n, Y) - \operatorname{ord}(q_n, T(Y)).$$

De esta manera, tenemos una biyección entre los conjuntos $\{p' \in E(X)\colon$ existe un arista $e = \overline{p_n p'} \subset X\}$ y $\{q' \in E(Y)\colon$ existe un arista $e = \overline{q_n q'} \subset X\}$. □

Analizaremos el caso cuando $p \in E(X) \cup O(X)$ como uno solo. Para ello, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 3.14. *Sean $X, T \in \tau$, $p \in R(X)$ y $q \in R(Y)$. Si existen aristas l_p en X y l_q en Y, que contienen a p y q, respectivamente, tales que $l_q \cap E(X) \neq \emptyset$, $l_q \cap E(Y) \neq \emptyset$ y $C(p, (X - l_q) \cup \{p\})$ es homeomorfo a $C(q, (Y - l_q) \cup \{q\})$, entonces $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$.*

Demostración. Sea $h : C(p,(X - l_q) \cup \{p\}) \to C(q,(Y - l_q) \cup \{q\})$ homeomorfismo y sean $f : [0,1] \to l_p$ y $g : [0,1] \to l_q$ parametrizaciones de l_p y l_q, respectivamente, tales que $f(0) = p$ y $g(0) = q$. Considere la función

$$H(A) = h(A \cap ((X - l_p) \cup \{p\}) \cup h(f^{-1}(A \cap l_p))$$

para cada $A \in C(p, X)$. Esta función es el homeomorfismo deseado. □

Teorema 3.15. *Sea $X \in \tau$ y $p \in O(X) \cup E(X)$. Entonces, (X, p) posee hiperespacio único $C(p, X)$ en τ.*

Demostración. Sea $p \in O(X)$ y supongamos que $Y \in \tau$ y $q \in Y$ es tal que $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$. Entonces, $\text{ord}(q, X) = \text{ord}(q, Y)$. Dado que X se puede encajar en el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$, supongamos que X es subespacio de $\mathbb{R}^4$ tal que $X \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ y $p = (0, 0, 0, 0)$. De manera análoga para Y. Considere $X' = X \cup ((0, 0, 0) \times [0, 1])$ y $Y' = Y \cup ((0, 0, 0) \times [0, 1])$. Por Lema anterior, $C(p, X')$ es homeomorfo a $C(q, Y')$, por lo que existe un homeomorfismo entre X' y Y', por ende, entre X y Y. □

Con este resultado, aunado al Teorema 3.13, obtenemos el teorema principal:

Teorema 3.16. *Sea $X \in \tau$ y $p \in X$, entonces, (X, p) posee hiperespcio único $C(p, X)$ en τ.*

4 Generalizando el hiperespacio

Sea X un continuo y $p, q \in X$ tales que $p \neq q$. Consideramos el espacio $C_2(\{p, q\}, X)$, el cual consiste de elementos en $C_2(X)$ que contengan al subconjunto $\{p, q\}$.

Teorema 4.1. *Si X es un continuo y $p, q \in X$ tales que $p \neq q$, entonces $C_2(\{p, q\}, X)$ es un continuo.*

Demostración. Observe que $C_2(\{p, q\}, X) \subset C_2(X)$. Sea $A \in \text{cl}(C_2(\{p, q\}, X)$ y consideremos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_2(\{p, q\}, X)$ convergente a A. Es claro que $A \in C_2(X)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $q \notin A$. Esto implica que $\varepsilon = d(q, A) > 0$. De esta manera, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(A, A_n) < \varepsilon/2$. Por defínción de métrica de Hausdorff, $A_n \subset N_d(\varepsilon/2, A)$, lo cual es una contradicción, pues $q \in A_n$. Concluimos que $\{p,q\} \subset A$ y así, $C_2(\{p,q\},X)$ es un conjunto cerrado en el compacto $C_2(X)$, lo que a su vez conlleva a que este conjunto sea compacto.

Para demostrar conexidad, tomemos $A, B \in C_2(\{p,q\},X)$. Por [REF], existen arcos ordenados $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to [0,1]$ tales que $\alpha_1(0) = \{p,q\}$, $\alpha_1(1) = A$ y $\alpha_2(0) = \{p,q\}$, $\alpha_2(1) = B$. De esta manera, $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$ es un arco que conecta A con B. Por consiguiente, $C_2(\{p,q\},X)$ es arco conexo, lo que implica a su vez la conexidad de este espacio. □

Ejemplo 4.2. Sea $X = [0,1]$. Analizaremos los modelos de $C_2(\{p,q\},X)$.

Caso 1. Sean $p = 0$ y $q = 1$. Esto implica que

$$C_2(\{p,q\},X) = \{[0,s] \cup [t,1] \colon s \leq t\}$$

Observemos que si $s = t$, obtenemos el espacio completo X. Construyamos la función $\gamma : [0,1]^2 \to C_2(\{p,q\},X)$ definida por $\gamma((s,t)) = [0,s] \cup [1-t,1]$ donde $s \leq 1-t$. Esta función define un homeomorfismo entre $[0,1]^2$ y $C_2(\{p,q\},X)$, por lo que el hiperespacio es una $2-$celda.

Caso 2. Sean $p = 0$ y $q \in \text{int}(X)$. Los elementos del hiperespacio $C_2(\{p,q\},X)$ son de la forma $[0,x_1] \cup [x_2,x_3]$, donde $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq q \leq x_3 \leq 1$. Es así que $C_2(\{p,q\},X)$ es homeomorfo a una $3-$celda.

Caso 3. Finalmente, consideremos $p, q \in \text{int}(X)$. Entonces, $C_2(\{p,q\},X) = \{[x_1,x_2] \cup [x_3,x_4] \colon 0 < x_1 \leq p \leq x_2 \leq x_3 \leq q \leq x_4 < 1\} \cup \{X\}$.

Así, $C_2(\{p,q\},X)$ será homeomorfo a una $4-$celda, siguiendo la misma lógica que en los casos anteriores.

Ejemplo 4.3. Sea $X = \mathcal{S}^1$, y sean $p, q \in X$. Observemos que $C_2(\{p,q\},X)$ está compuesto por elementos de la forma $l_p \cup l_q$ donde l_p, l_q son subarcos de $\mathcal{S}^1$ que contienen a p y q, respectivamente. Para la construcción del modelo de este hiperespacio, supondremos que $l_p \cap l_q = \emptyset$. De esta manera, tenemos que

$$C_2(\{p,q\},X) = \{l_p \cup l_q \colon p \in l_p, \quad q \in l_q\} \cup \{X\}$$

Tomando la notación del Caso 3 en el Ejemplo 4.2, tenemos que l_p es homeomorfo a $[x_1,x_2]$, mientras que l_q es homeomorfo a $[x_3,x_4]$, por lo que $C_2(\{p,q\},X)$ será una $4-$celda.

Con este ejemplo, es claro que si X es una gráfica finita y $p, q \in X$, entonces $(X, \{p, q\})$ no posee hiperespacio único $C_2(\{p, q\}, X)$ en la clase de continuos. Con estos ejemplos surge la pregunta:

Pregunta 1. *¿$(X, \{p, q\})$ posee hiperespacio único $C_2(\{p, q\}, X)$ para la clase de los continuos?*

Bibliografía

[1] J. Anaya, D. Maya, F. Vázquez, *The hyperspace $HS_n^m(X)$ for a finite graph X is unique*, Topology and its Applications 234, (2018), 428 – 439.

[2] F. Corona Vázquez, R. Aarón Quinones Estrella, J. Sánchez Martínez, R. Toalá Enríquez, *Uniqueness of the hyperspaces C(p,X) in the class of trees*, Topol. Appl. 269 (2020).

[3] F. Corona Vázquez, R. Quiñones Estrella, J. Sánchez Martínez, H. Villanueva, *Hyperspaces C(p,X) of finite graphs*, Topol. Appl. 248 (2018) 40 – 49.

[4] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces*, Questions and Answers in General Topology 30 (2012) 21 – 44.

[5] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Acad. Press, New York, 1968.

[6] P. Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces C(p,X)*, Topol. Proc. 27 (1) (2003) 259-285.

[7] P. Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces K(X)*, Rocky Mt. J. Math. 35 (2) (2005) 655-674.

[8] P. Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces C(p,X) for atriodic continua*, Houst. J. Math. 31 (2) (2005) 403-426.

[9] J. M. Martínez Montejano, *Models for $C_p(X)$ for atriodic continua*, Topol. Appl. 154 (2007) 115-123.

[10] S.B. Nadler Jr., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*, in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Textos, Vol. 18, 2002.

[11] S.B. Nadler Jr., *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1978.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

2170734@alumnos.fcfm.buap.com
dherrera@fcfm.buap.mx
fmacias@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 13, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-694-8

Capítulo 4

Sobre redes en hiperespacios de continuos Hausdorff y la propiedad de Kelley

Mauricio Esteban Chacón Tirado, Patricia Domínguez Soto y María de Jesús López Toriz
FCFM, BUAP

Resumen

Se analizan propiedades del límite inferior y límite superior de redes en hiperespacios de continuos Hausdorff. Es conocido que una sucesión en un hiperespacio de un continuo métrico converge a un elemento del hiperespacio si y sólo si los límites inferior y superior de la sucesión son iguales a tal elemento. En este capítulo se demuestra que el análogo de este resultado se cumple para redes en hiperespacios de continuos Hausdorff. Además, se expone una equivalencia a la propiedad de Kelley en continuos Hausdorff.

1 Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *continuo Hausdorff* es un espacio topológico Hausdorff, compacto, conexo y no vacío.

En 1958, S. Mrówka introduce los conceptos de *límite superior y límite inferior de redes* para espacios topológicos, véase [14], en este capítulo se retoman estas nociones para continuos Hausdorff, se exponen algunas propiedades de estos conceptos para redes en continuos Hausdorff. El objetivo es generalizar una caracterización para sucesiones convergentes en hiperespacios de continuos (Teorema 3.3) a una caracterización para redes convergentes en hiperespacios de continuos Hausdorff (Teorema 3.11).

La *propiedad de Kelley* para continuos fue introducida por J. L. Kelley como *Propiedad 3.2*, véase [8, pág. 26], esta noción fue usada para estudiar la contractibilidad de los hiperespacios de continuos métricos, en relación con estos conceptos se sugiere al lector revisar [15, Capítulo XVI] o [7, págs. 167–172]. En 1999, W. J. Charatonik [3, Definición 2.1] y W. Makuchowski [12, pág. 124] extienden independientemente el concepto de propiedad de Kelley, para continuos Hausdorff; Charatonik construye un ejemplo de un continuo Hausdorff homogéneo que no tiene la propiedad de Kelley, y Makuchowski usa la propiedad de Kelley para demostrar que varias definiciones relacionadas con la conexidad local, son equivalentes en el hiperespacio de subcontinuos de un continuo que tiene la propiedad de Kelley.

En relación con la propiedad de Kelley para continuos Hausdorff se sugiere al lector revisar las siguientes referencias: [1], [2], [6], [9], [10] y [11].

El material de este capítulo contiene *los Preliminares* para introducirse en una línea de investigación sobre continuos Hausdorff en el estudio de la propiedad de Kelley, véase la Sección 3. En la última sección, se presentan los conceptos de propiedad de Kelley, para continuos y para continuos Hausdorff, y se expone una prueba de que los conceptos son equivalentes en continuos (Teorema 4.3). Por otro lado, en el Teorema 4.4 se presenta una equivalencia a la propiedad de Kelley, para continuos Hausdorff, en términos de la topología del hiperespacio, usando la continuidad de la función que asigna a cada punto del continuo Hausdorff, su hiperespacio de subcontinuos anclados en tal punto.

2 Preliminares

Dados X un espacio topológico y A un subconjunto de X, se denota el interior y la cerradura de A en X por $int(A)$ y $cl(A)$, respectivamente. Sea $x \in X$, recordemos que V es una vecindad de x si existe un conjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset V$.

Dado un continuo Hausdorff X, se considera la colección de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X, denotada y definida por

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

esta colección se dota de la *topología de Vietoris*, que a continuación se describe: para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada colección finita $U_1, \ldots, U_n$ de conjuntos abiertos en X, se define

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

La colección de todos los conjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ forma una base para una topología para 2^X, llamada topología de Vietoris para 2^X, para la prueba de este hecho véase [16, Teorema 4.5]. Al conjunto 2^X con la topología de Vietoris se le llama *hiperespacio de cerrados* de X. También se considera la colección de todos los subcontinuos de X, denotada y definida por

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

considerado como subespacio de 2^X, llamado el *hiperespacio de subcontinuos de* X. Es conocido que si X es un continuo Hausdorff, entonces los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son también continuos Hausdorff [13]. De este modo, dado un continuo Hausdorff X, se tiene que

$$2^{C(X)} = \{\mathcal{A} \subset C(X) : \mathcal{A} \text{ es un subconjunto no vacío y cerrado en } C(X)\}$$

y

$$C(C(X)) = \{\mathcal{A} \in 2^{C(X)} : \mathcal{A} \text{ es conexo}\}$$

son también continuos Hausdorff, tales hiperespacios serán usados en algunos resultados de este capítulo.

Dados X un continuo Hausdorff y A, B subcontinuos de X con $A \subset B$, se sabe que existe un subconjunto cerrado y conexo $\mathcal{A}$ de $C(X)$ tal que $A, B \in \mathcal{A}$, cualesquiera dos elementos de $\mathcal{A}$ son comparables por la inclusión, y para todo $K \in \mathcal{A}$, se tiene que $A \subset K$ y $K \subset B$, en este caso el conjunto $\mathcal{A}$ se llama *arco ordenado* en $C(X)$ que une A y B, véase [5, Teorema 2.23]. Además, se considera la colección

$$C(A, B) = \{K \in C(X) : A \subset K \text{ y } K \subset B\}.$$

Lema 2.1. *Sean X un continuo Hausdorff y A, B subcontinuos de X con $A \subset B$, entonces $C(A, B)$ es un subcontinuo de $C(X)$.*

Demostración. Para ver que $C(A, B)$ es cerrado en $C(X)$, sea $L \in C(X) - C(A, B)$. Se tiene que $L - B \neq \emptyset$ o $A - L \neq \emptyset$. Si $L - B \neq \emptyset$, entonces existe un punto $x \in L - B$. Sea un conjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $U \cap B = \emptyset$. Se sigue que $L \in \langle U, X \rangle$ y $\langle U, X \rangle \cap C(A, B) = \emptyset$. Ahora, si $A - L \neq \emptyset$, entonces existe un punto $a \in A - L$. Sea un conjunto abierto V of X tal que $a \in V$ y $cl(V) \cap L = \emptyset$. Note que $L \in \langle X - cl(V) \rangle$. Si $L' \in \langle X - cl(V) \rangle$, entonces $a \notin L'$, en consecuencia $A \nsubseteq L'$. Esto implica que $L' \notin C(A, B)$. Por lo tanto, $C(A, B)$ un conjunto es cerrado.

Por otro lado, como cualquier elemento de $C(A, B)$ se puede unir con B por un arco ordenado $\mathcal{A} \subset C(A, B)$, entonces $C(A, B)$ es conexo. $\square$

Dados X un continuo Hausdorff y $\mathcal{A} \subset 2^X$, se denota por $\bigcup \mathcal{A}$ la unión de sus elementos, es decir, $\bigcup \mathcal{A} = \{x \in X : \text{existe } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } x \in A\}$.

Ahora, si X es un continuo con métrica d, el hiperespacio 2^X, también es considerado con la métrica de Hausdorff, la cual se denota por H. Se sabe que la métrica de Hausdorff en 2^X genera la topología de Vietoris [15, Teorema 0.13]. Dados $r > 0$, $x \in X$ y $A \in 2^X$, sean $B(r, x)$ la bola en X con centro en el punto x de radio r y $B_H(r, A)$ denota la bola en 2^X con centro en A y radio r; además, sea $N_d(r, A) = \bigcup\{B(r, x) : x \in A\}$, la nube con centro en A y radio r.

Dada una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos X y Y, $A \subset X$ y $B \subset Y$, se denota por $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$, la imagen de A bajo f y se denota por $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$, la imagen inversa de B bajo f.

3 Límite inferior y superior de redes

En esta sección se estudian los conceptos de límites inferior superior de sucesiones en el hiperespacio de un continuo dado. Se definen el límite inferior y límite superior de redes en el hiperespacio de un continuo Hausdorff dado. El primer autor en considerar el límite inferior y el límite superior de redes en hiperespacios fue Mrówka en [14], aquí se exponen algunas propiedades de estos conceptos. Se generaliza el Teorema 3.3, considerando redes en lugar de sucesiones en 2^X, para un continuo Hausdorff X, véase el Teorema 3.11. Además se enuncian varias propiedades interesantes de los hiperespacios de continuos Hausdorff relacionadas con los conceptos de límite inferior y límite superior.

Definición 3.1. Sea X un continuo. Dada una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X, se define el *límite inferior de la sucesión* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ por $\liminf\{A_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x \in X :$ para toda vecindad U de x en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, entonces $U \cap A_m \neq \emptyset\}$.

Definición 3.2. Sea X un continuo. Dada una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X, se define el *límite superior de la sucesión* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ por $\limsup\{A_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x \in X :$ para toda vecindad U de x en X y todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m$ y $U \cap A_m \neq \emptyset\}$.

El siguiente resultado es demostrado en [7, Lema 4.3]:

Teorema 3.3. *Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X y $A \in 2^X$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) La sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A, en la topología de Vietoris de 2^X.

(2) Los conjuntos $\liminf\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\limsup\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y A son iguales.

Definición 3.4. Se dice que un par $(D, \leq)$ es un *conjunto dirigido* si D es un conjunto no vacío, $\leq$ es una relación de orden en D, y tal que para cualesquiera $a, b \in D$ existe $c \in D$ con $a \leq c$ y $b \leq c$. Cuando el contexto lo permita, se dice simplemente que D es un conjunto dirigido, sin mencionar explícitamente la relación de orden.

Definición 3.5. Una *red* en un espacio topológico X es una función $R : D \to X$, donde D es un conjunto dirigido, la red R también se denota por $\{R(d)\}_{d \in D}$. En todo este trabajo, al considerar una red $R : D \to X$, se sobreentenderá que D es un conjunto dirigido.

La siguiente es la definición usual de convergencia de una red en un espacio topológico.

Definición 3.6. Sean X un espacio topológico, $R : D \to X$ una red en X y un punto $a \in X$. Se dice que la red R *converge al punto* a si para toda vecindad V de a, existe $n \in D$ tal que para todo $m \in D$, si $n \leq m$, entonces $R(m) \in V$.

Con el siguiente teorema se muestra que el concepto de red en un espacio topológico captura completamente su topología. Para saber más sobre redes, véase [4, 1.6, pág. 49].

Teorema 3.7. *Sean X un espacio topológico, $a \in X$ y $V \subset X$ tal que $a \in V$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) V es una vecindad de a.

(2) Si $R : D \to X$ es una red que converge al punto a, entonces existe $n \in D$ tal que para todo $m \in D$, si $n \leq m$, entonces $R(m) \in V$.

Demostración. Basta ver la implicación (2)⇒(1). Supóngase que V no es una vecindad de a. Sea la colección

$$D = \{U \subset X : U \text{ es una vecindad del punto } a\},$$

junto con la relación $\leq$ en D definida de la siguiente manera: dados $U_1, U_2 \in D$, se denota $U_1 \leq U_2$, si y sólo si $U_1 \supset U_2$. Se tiene que D es un conjunto dirigido. Observe que para todo $U \in D$, se cumple que $U - V \neq \emptyset$, porque si fuera vacío, entonces $U \subset V$, y V sería vecindad del punto a. Ahora, elíjase un punto $R(U) \in U - V$, para todo $U \in D$.

Veamos que la red R converge al punto a. Sea U una vecindad de a, damos $n = U \in D$ y sea $m \in D$ tal que $n \leq m$, entonces $n \supset m$, y como $R(m) \in m$, entonces $R(m) \in n = U$. Esto prueba que R converge a a.

Por (2), existe $n \in D$ tal que si $m \in D$ y $n \leq m$, entonces $R(m) \in V$, pero esto es una contradicción, porque $R(m) \in m - V$. Por lo tanto, V es una vecindad del punto a. □

Definición 3.8. Dados un continuo Hausdorff X y una red $R : D \to 2^X$, se define el *límite inferior de la red* R por $\liminf R = \{x \in X :$ para toda vecindad U de x en X, existe $n \in D$ tal que para todo $m \in D$, si $n \leq m$, entonces $U \cap R(m) \neq \emptyset\}$.

Definición 3.9. Dados un continuo Hausdorff X y una red $R : D \to 2^X$, se define el *límite superior de la red* R por $\limsup R = \{x \in X :$ para toda vecindad U de x en X y todo $n \in D$, existe $m \in D$ tal que $n \leq m$ y $U \cap R(m) \neq \emptyset\}$.

A continuación se expondrán los resultados básicos sobre los conceptos antes definidos. Cabe mencionar que (1) y (3) están demostrados en [14], pero se incluyen sus pruebas para comodidad del lector.

Teorema 3.10. *Sean X un continuo Hausdorff y R una red en 2^X. Se tienen las siguientes propiedades:*

(1) $\liminf R \subset \limsup R$*,*

(2) $\liminf R$ *es un conjunto cerrado en X (posiblemente vacío) y*

(3) $\limsup R$ *es un elemento de 2^X.*

Demostración. Para la parte (1), sean $x \in \liminf R$, U una vecindad de x y $n \in D$. Como $x \in \liminf R$, existe $n_0 \in D$ tal que si $m \in D$ y $n_0 \leq m$, entonces $R(m) \in U$. Existe $m \in D$ tal que $n \leq m$ y $n_0 \leq m$, por tanto $R(m) \in U$. Así que $x \in \limsup R$.

Para la parte (2), sea un punto $x \in X - \liminf R$. Luego, existe una vecindad U de x en X tal que, para todo $n \in D$ existe $m \in D$ con $n \leq m$ y $U \cap R(m) = \emptyset$. Sea V un conjunto abierto en X tal que $x \in V \subset U$, y sea $y \in V$, entonces U es una vecindad del punto y y, para todo $n \in D$, existe $m \in D$ con $n \leq m$ y $U \cap R(m) = \emptyset$, esto quiere decir que $y \notin \liminf R$. Esto prueba que $V \subset X - \liminf R$, por lo tanto, $X - \liminf R$ es un conjunto abierto en X y así $\liminf R$ es cerrado en X.

Para la parte (3), veamos que $\limsup R$ es un conjunto cerrado en X. Sea $x \in X - \limsup R$, entonces existen U vecindad de x en X y $n \in D$ tal que, para todo $m \in D$ con $n \leq m$, se tiene que $U \cap R(m) = \emptyset$. Sea V un conjunto abierto en X tal que $x \in V \subset U$, y sea un punto $y \in V$, entonces U es una vecindad de y y, para todo $m \in D$ con $n \leq m$, se tiene que $U \cap R(m) = \emptyset$, esto quiere decir que $y \notin \limsup R$. Esto prueba que $V \subset X - \limsup R$, por lo tanto, $X - \limsup R$ es un conjunto abierto en X y así, $\limsup R$ es un conjunto cerrado en X.

Ahora, veamos que $\limsup R$ es no vacío. Supóngase que $\limsup R$ es vacío, entonces para todo $x \in X$ existen una vecindad U_x de x y $n \in D$ tal que para todo $m \in D$, se cumple que $n \leq m$ entonces $R(m) \cap U_x = \emptyset$. De donde $int(U_x)$ satisface que es un abierto en X tal que $x \in U_x$, y existe $n \in D$ tal que, para todo $m \in D$ se cumple que $n \leq m$ entonces $R(m) \cap int(U_x) = \emptyset$. Sea $\mathcal{U} = \{U \subset X : U$ es abierto no vacío y existe $n \in D$, tal que, para todo $m \in D$ si $n \leq m$, entonces $R(m) \cap U = \emptyset\}$. Entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, de la cual se extrae una subcubierta finita $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, existe $n_i \in D$ tal que si $m \in D$ y $n_i \leq m$, entonces $R(m) \cap U_i = \emptyset$. Se elige $m \in D$ tal que $n_i \leq m$, para todo $i \in$

$\{1,2,\ldots,k\}$. Entonces $R(m) \cap U_i = \emptyset$ para cada $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, por lo tanto, $R(m) \cap \bigcup_{i=1}^{k} U_i = \emptyset$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\limsup R$ es no vacío. $\square$

Teorema 3.11. *Sean X un continuo Hausdorff, $R : D \to 2^X$ una red y $L \in 2^X$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) La red R converge a L, en la topología de Vietoris de 2^X.

(2) Los conjuntos $\liminf R$, $\limsup R$ y L son iguales.

Demostración. Para la implicación (1)⇒(2), se prueba la siguiente cadena de contenciones: $L \subset \liminf R \subset \limsup R \subset L$.

Sea $x \in L$, veamos que $x \in \liminf R$. Para esto sean $U \subset X$ una vecindad de x en X y $V \subset U$ abierto tal que $x \in V$. Sea $\mathcal{V} = \langle V, X\rangle$, es claro que $L \in \mathcal{V}$, y como la red R converge a L, entonces existe $n \in D$ tal que si $m \in D$ y $n \leq m$, entonces $R(m) \in \mathcal{V}$, esto además quiere decir que $R(m) \cap V \neq \emptyset$ y $R(m) \cap U \neq \emptyset$, para $n \leq m$, por lo tanto $x \in \liminf R$.

Por el Teorema 3.10, parte (1), se cumple que $\liminf R \subset \limsup R$.

Ahora, sea $x \in \limsup R$, veamos que $x \in L$, mostrando que cualquier abierto que contiene a x, intersecta a L. Supóngase que U es un abierto de X tal que $x \in U$ y $U \cap L = \emptyset$. Como $x \in \limsup R$, entonces para todo $n \in D$ existe $m \in D$ con $n \leq m$ y $U \cap R(m) \neq \emptyset$.

Para cada $y \in L$, sean V_y y W_y conjuntos abiertos ajenos en X tales que $x \in V_y$ y $y \in W_y$. Note que la familia $\{W_y : y \in L\}$ es una cubierta abierta del compacto L, de la cual se elige una subcubierta finita $\{W_{y_1}, W_{y_2}, \ldots, W_{y_k}\}$. Sea $W = U \cap \bigcap_{i=1}^{k} V_{y_k} \subset U$. Se tiene que W es un conjunto abierto que contiene al punto x. Además, $W \cap \bigcup_{i=1}^{k} W_{y_i} = \emptyset$. Sea $\mathcal{U} = \langle \bigcup_{i=1}^{k} W_{y_i}\rangle$, note que $L \subset \bigcup_{i=1}^{k} W_{y_i}$, con lo cual $L \in \mathcal{U}$. Como la red R converge a L, entonces existe $n_0 \in D$ tal que si $m \in D$ y $n_0 \leq m$, entonces $R(m) \in \mathcal{U}$, de aquí, $R(m) \subset \bigcup_{i=1}^{k} W_{y_i}$, y con lo cual $R(m) \cap W = \emptyset$. Como $x \in \limsup R$, W es una vecindad de x y $n_0 \in D$, entonces existe $m \in D$ tal que $n_0 \leq m$ y $R(m) \cap U \neq \emptyset$, que es una contradicción. Esto prueba que $U \cap L \neq \emptyset$, y por lo tanto $x \in L$.

Veamos la implicación (2)⇒(1). Supóngase que $L = \liminf R = \limsup L$. Se demostrará que la red R converge a L en la topología de Vietoris de 2^X.

Sea $\mathcal{U}$ una vecindad de L y sean conjuntos abiertos $U_1, U_2, \dots, U_n$ en X tales que $L \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$.

Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, así que $L \subset U$. Se demostrará que existe $a_0 \in D$ tal que si $m \in D$ y $a_0 \leq m$, entonces $R(m) \subset U$. Para cada $x \in X - U$, se tiene que $x \notin \limsup R$, por lo tanto, existen una vecindad U_x de x en X y $n \in D$ tal que, para todo $m \in D$, si $n \leq m$, entonces $R(m) \cap U_x = \emptyset$. Luego, $int(U_x)$ satisface que es un abierto que contiene a x y existe $n \in D$ tal que, para todo $m \in D$, si $n \leq m$, entonces $R(m) \cap int(U_x) = \emptyset$. Sea $\mathcal{W} = \{U \subset X : U$ es abierto y existe $n \in D$ tal que para todo $m \in D$, si $n \leq m$, entonces $R(m) \cap U = \emptyset\}$. Se tiene que $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta del compacto $X - U$, de la cual se extrae una subcubierta finita $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, existe $n_i \in D$ tal que, para todo $m \in D$, si $n_i \leq m$, entonces $R(m) \cap U_i = \emptyset$. Se elige un elemento $a_0 \in D$, donde $n_i \leq a_0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Así, si $m \in D$ y $a_0 \leq m$, entonces $R(m) \cap U_i = \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, por lo tanto, $R(m) \cap \bigcup_{i=1}^{k} U_i = \emptyset$. Esto prueba $R(m) \subset X - (\bigcup_{i=1}^{k} U_i) \subset X - (X - U) = U$.

Ahora, sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, se demostrará que existe $a_i \in D$ tal que, para todo $m \in D$ se tiene que si $a_i \leq m$ entonces $R(m) \cap U_i \neq \emptyset$. Como $L \cap U_i \neq \emptyset$, existe $x \in L \cap U_i$, al ser $L = \liminf R$ y U_i una vecindad de x, entonces existe $a_i \in D$ tal que para todo $m \in D$, si $a_i \leq m$, entonces $R(m) \cap U_i \neq \emptyset$.

Finalmente, se elige $b \in D$ tal que $a_i \leq b$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Así, si $m \in D$ y $b \leq m$, entonces $a_i \leq m$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, con lo cual se tiene que $R(m) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $R(m) \cap U_i \neq \emptyset$, es decir, $R(m) \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$. Por lo tanto, la red R converge a L. □

A continuación se enuncian varios teoremas relacionados con el límite inferior y límite superior de redes en hiperespacios.

Teorema 3.12. *Sean X es un continuo Hausdorff, y dos redes $R, S : D \to 2^X$ tales que para todo $n \in D$, se tiene que $R(n) \subset S(n)$, entonces* $\liminf R \subset \liminf S$ *y* $\limsup R \subset \limsup S$.

Demostración. Sean un punto $x \in \limsup R$ y U un conjunto abierto en X tal que $x \in U$, entonces existe $n \in D$ tal que si $m \geq n$, entonces $U \cap R(m) \neq \emptyset$, así que $U \cap S(m) \neq \emptyset$, de donde $x \in \liminf S$.

Ahora sean un punto $x \in \limsup R$, U un conjunto abierto en X tal que $x \in U$ y $n \in D$, entonces existe $m \geq n$ tal que $U \cap R(m) \neq \emptyset$, así que $U \cap S(m) \neq \emptyset$, por lo tanto, $x \in \limsup S$. □

Corolario 3.13. *Sean X un continuo Hausdorff, $R : D \to 2^X$ una red y $Y, Z \subset X$ cerrados. Si para todo $n \in D$ se tiene que $Z \subset R(n) \subset Y$, entonces $Z \subset \liminf R$ y $\limsup R \subset Y$.*

Demostración. Considere las redes $S, T : D \to 2^X$ definidas por $S(n) = Y$ y $T(n) = Z$, para todo $n \in D$. Entonces $\limsup S = Y$ y $\liminf T = Z$, ahora aplicando el Teorema 3.12 se obtiene la conclusión requerida. □

Teorema 3.14. *Sean X un continuo Hausdorff, $R : D \to 2^X$ una red y $Y \subset X$ cerrado. Si para todo $d \in D$ existe $m \in D$ tal que $d \leq m$ y $R(m) \cap Y \neq \emptyset$, entonces $Y \cap \limsup R \neq \emptyset$.*

Demostración. Supóngase que $Y \cap \limsup R = \emptyset$, así, para todo $y \in Y$, existe $U_y \subset X$ abierto tal que $y \in U_y$, y existe $n_y \in D$ tal que para todo $m \geq n_y$, se tiene que $R(m) \cap U = \emptyset$. Note que $\{U_y : y \in Y\}$ es cubierta abierta de Y, tome $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ subcubierta finita, donde a cada U_i le corresponde $n_i \in D$ tal que si $m \geq n_i$, entonces $R(m) \cap U_i = \emptyset$. Sea $n \in D$ tal que $n_i \leq n$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces siempre que $m \geq n$, se tiene que $R(m) \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$, por lo tanto, $R(m) \cap Y = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis. □

Teorema 3.15. *Sean X y Y continuos Hausdorff, $f : X \to Y$ una función continua y $R : D \to 2^X$ una red. Entonces $f[\limsup R] = \limsup(f \circ R)$.*

Demostración. Sean puntos $y \in f[\limsup R]$ y $x \in \limsup R$ tales que $y = f(x)$. Sean U un conjunto abierto en Y tal que $y \in U$ y $d \in D$, entonces $f^{-1}[U]$ es abierto en X y $x \in f^{-1}[U]$, de donde existe $m \in D$ tal que $d \leq m$ y $f^{-1}[U] \cap R(m) \neq \emptyset$. Se tiene que $f[f^{-1}[U]] \cap f[R(m)] \neq \emptyset$. Como $f[f^{-1}[U]] \subset U$, se sigue que $U \cap f[R(m)] \neq \emptyset$. Esto prueba que $y \in \limsup(f \circ R)$.

Sea $y \in \limsup(f \circ R)$. Supóngase que $y \notin f[\limsup R]$. Note que $\limsup R$ es un elemento de 2^X (véase el Teorema 3.10 (3)), con lo cual $f[\limsup R]$ es un subconjunto cerrado de Y. Sea U un conjunto abierto en Y tal que $y \in U$ y $cl(U) \cap f[\limsup R] = \emptyset$. Así, dado que $y \in \limsup(f \circ R)$, para todo $d \in D$ existe $m \in D$ tal que $d \leq m$ y $U \cap f[R(m)] \neq \emptyset$, con lo cual $cl(U) \cap f[R(m)] \neq \emptyset$, de esta manera $f^{-1}[cl(U)] \cap R(m) \neq \emptyset$. Utilizando el Teorema 3.14, se tiene que $f^{-1}[cl(U)] \cap \limsup R \neq \emptyset$, de donde $f[f^{-1}[cl(U)]] \cap f[\limsup R] \neq \emptyset$. Como $f[f^{-1}[cl(U)]] \subset cl(U)$, se sigue que $cl(U) \cap f[\limsup R] \neq \emptyset$, que es una contradicción. □

Teorema 3.16. *Sean X un continuo Hausdorff y $R : D \to 2^X$ una red tal que $R(d)$ es conexo, para todo $d \in D$. Si $\liminf R \neq \emptyset$, entonces $\limsup R$ es un subconjunto conexo de X.*

Demostración. Supóngase que $\limsup R$ no es conexo, y sean $A, B \subset X$ cerrados, ajenos y no vacíos tales que $A \cup B = \limsup R$. Sin perder generalidad, suponga que $A \cap \liminf R \neq \emptyset$, elíjanse puntos $a \in A \cap \liminf R$ y $b \in B \cap \limsup R$. Sean conjuntos abiertos U y V en X, ajenos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Así $\limsup R \cap (X - (U \cup V)) = \emptyset$. Como $a \in \liminf R$ y $a \in U$, elíjase $n_1 \in D$ tal que para todo $m \in D$ con $m \geq n_1$, se tiene que $R(m) \cap U \neq \emptyset$. Sea $n \in D$, elíjase $n_2 \in D$ tal que $n_2 \geq n_1$ y $n_2 \geq n$; como $b \in \limsup R$ y $b \in V$, existe $m \geq n_2$ tal que $R(m) \cap V \neq \emptyset$, además se tiene que $R(m) \cap U \neq \emptyset$, y como $R(m)$ es conexo, entonces $R(m) \cap (X - (U \cup V)) \neq \emptyset$. Por el Teorema 3.14, se tiene que $\limsup R \cap (X - (U \cup V)) \neq \emptyset$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\limsup R$ es conexo. □

Para concluir esta sección, enunciamos una propiedad del límite superior, para una red en el hiperespacio del hiperespacio de un continuo.

Teorema 3.17. *Sean X un continuo Hausdorff y $R : D \to C(X)$ una red que converge a $A \in C(X)$. Entonces $A \in \limsup\{C(R(d), X)\}_{d \in D}$, y para todo $B \in \limsup\{C(R(d), X)\}_{d \in D}$, se tiene que $A \subset B$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Como la red R converge a A, entonces existe $n \in D$ tal que si $m \in D$ y $n \leq m$, entonces $R(m) \in \mathcal{U}$. Sean $s \in D$ y $m \in D$ tales que $s \leq m$ y $n \leq m$, entonces $R(m) \in \mathcal{U}$ y $R(m) \in C(R(m), X)$, por lo tanto $\mathcal{U} \cap C(R(m), X) \neq \emptyset$. Esto prueba que $A \in \limsup\{C(R(d), X)\}_{d \in D}$.

Por otro lado, sea $B \in \limsup\{C(R(d), X)\}_{d \in D}$. Supóngase que existe un punto $a \in A - B$. Sean conjuntos abiertos U y V en X tales $a \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Note que $\langle V, X \rangle \cap C(X)$ es un conjunto abierto en $C(X)$ y $A \in \langle V, X \rangle \cap C(X)$, se sigue que, existe $d_0 \in D$ tal que para todo $m \in D$, si $m \geq d_0$, entonces $R(m) \in \langle V, X \rangle \cap C(X)$. Ahora, note que $\langle U \rangle \cap C(X)$ es un abierto en $C(X)$ y $B \in \langle U \rangle \cap C(X)$, como $B \in \limsup\{C(R(d), X)\}_{d \in D}$, para $d_0 \in D$, existe $m \in D$ con $m \geq d_0$ y $(\langle U \rangle \cap C(X)) \cap C(R(m), X) \neq \emptyset$. Sea $B_m \in (\langle U \rangle \cap C(X)) \cap C(R(m), X)$. Se tiene que $B_m \subset U$, $R(m) \subset B_m$ y $R(m) \cap V \neq \emptyset$. Esto implica que $U \cap V \neq \emptyset$, que es una contradicción. Por lo tanto, $A \subset B$. □

4 Propiedad de Kelley

En 1942, J. L. Kelley introduce el concepto de *propiedad de Kelley* para continuos, originalmente era conocida como *Propiedad 3.2*, en [8, pág. 26], que se enuncia a continuación.

Definición 4.1. Sean X un continuo con métrica d, se dice que X tiene la *propiedad de Kelley* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $p, q \in X$, si $d(p, q) < \delta$, entonces para todo $K \in C(\{p\}, X)$, existe $L \in C(\{q\}, X)$ tal que $H(K, L) < \varepsilon$.

En 1999, W. J. Charatonik [3, Definición 2.1] y W. Makuchowski [12, pág. 124] extienden independientemente el concepto de *propiedad de Kelley* para continuos Hausdorff, que se enuncia a continuación:

Definición 4.2. Sean X un continuo Hausdorff y un punto $p \in X$, se dice que X tiene la propiedad de *Kelley en* p, si para cada $K \in C(\{p\}, X)$ y para cada conjunto abierto $\mathcal{U}$ en $C(X)$ con $K \in \mathcal{U}$, existe un conjunto abierto U en X con $p \in U$ tal que si $q \in U$, entonces existe $L \in C(\{q\}, X) \cap \mathcal{U}$. Se dice que X tiene la *propiedad de Kelley* si tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos.

Primero se demostrará que las Definiciones 4.1 y 4.2 son equivalentes, en continuos:

Teorema 4.3. *Sea X es un continuo con métrica d. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $p, q \in X$, si $d(p, q) < \delta$, entonces para todo $K \in C(\{p\}, X)$, existe $L \in C(\{q\}, X)$ tal que $H(K, L) < \varepsilon$.

(2) Para cada punto $p \in X$, para cada $K \in C(\{p\}, X)$ y para cada conjunto abierto $\mathcal{U}$ en $C(X)$ con $K \in \mathcal{U}$, existe un conjunto abierto U en X con $p \in U$ tal que si $q \in U$, entonces existe $L \in C(\{q\}, X) \cap \mathcal{U}$.

Demostración. Veamos que (1) $\Rightarrow$ (2). Sean $p \in X$, $K \in C(\{p\}, X)$ y $\mathcal{U} \subset C(X)$ abierto tal que $K \in \mathcal{U}$. Recordemos que H denota la métrica de Hausdorff en $C(X)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_H(\varepsilon, K) \cap C(X) \subset \mathcal{U}$. Sea $\delta > 0$ dada por (1), y sea $U = B(\delta, p)$. Dado $q \in U$, se tiene que $d(p, q) < \delta$, entonces por (1) existe $L \in C(\{q\}, X)$ tal que $H(K, L) < \varepsilon$. Se sigue que $L \in B_H(\varepsilon, K) \subset \mathcal{U}$, por lo tanto, $L \in C(\{q\}, X) \cap \mathcal{U}$.

Veamos que (2) $\Rightarrow$ (1). Supóngase que X es un continuo métrico que satisface (2) y no satisface (1), es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen puntos $p_n, q_n \in X$ y $K_n \in C(\{p_n\}, X)$ tales que $d(p_n, q_n) < \frac{1}{n}$ y para todo $L \in C(\{q_n\}, X)$ se tiene que $H(K_n, L) \geq \varepsilon$. Pasando a subsucesiones, podemos suponer que existen un punto $p \in X$ y $K \in C(X)$ tales que las sucesiones $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ambas convergen a p y la sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a K. Luego, $p \in K$. Sea $\mathcal{U} = B_H(\frac{\varepsilon}{2}, K) \cap C(X)$. Por (2), existe $U \subset X$ abierto tal que $p \in U$ y para todo $q \in U$, existe $L \in C(\{q\}, X) \cap \mathcal{U}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \in U$ y $H(K_n, K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, existe $L \in C(\{q_n\}, X) \cap \mathcal{U}$. Se tiene que $H(K_n, L) \leq H(K_n, K) + H(K, L) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, que es una contradicción. Por lo tanto, todo continuo métrico que cumple (2), también cumple (1). $\square$

En el resultado siguiente se dan dos equivalencias a la propiedad de Kelley, para continuos Hausdorff. La equivalencia de (1) y (3) fue probada por R. Wardle para continuos en [17, (2.2) Theorem], por otro lado, W. J. Charatonik menciona, sin dar una prueba, que estos (1) y (3) son equivalentes para continuos Hausdorff en [3, Proposition 2.3]. W. Makuchowski prueba la equivalencia de (1) y (2) en [12, Theorem 11]. Para conveniencia del lector, se expone una prueba completa de estas equivalencias.

Teorema 4.4. *Si X es un continuo Hausdorff, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) X tiene la propiedad de Kelley.

(2) Para cada subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $C(X)$ se tiene que $\bigcup \mathcal{U}$ es un conjunto abierto en X.

(3) La función $f : X \to 2^{C(X)}$, definida por $f(p) = C(\{p\}, X)$, para cada $p \in X$, es continua.

Demostración. En esta prueba se consideran los hiperespacios 2^X y $2^{C(X)}$, por lo cual vamos a usar la notación $\langle \cdots \rangle_{2^{C(X)}}$ para referirnos a los abiertos básicos de la topología de Vietoris en $2^{C(X)}$.

Veamos que (1) $\Rightarrow$ (2). Sean $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en $C(X)$ y un punto $p \in \bigcup \mathcal{U}$. Sea $K \in \mathcal{U}$ tal que $p \in K$. Por hipótesis, existe $U \subset X$ abierto tal que $p \in U$ y para cada $q \in U$ existe un subcontinuo L de X tal que $q \in L \in \mathcal{U}$. Note que $U \subset \bigcup \mathcal{U}$. Así, $\bigcup \mathcal{U}$ es un conjunto abierto en X.

Para la implicación (2) $\Rightarrow$ (3), sea un conjunto abierto $\mathfrak{U}$ en $2^{C(X)}$ y sea $p \in f^{-1}[\mathfrak{U}]$. Note que $f(p) \in \mathfrak{U}$, esto es $C(\{p\}, X) \in \mathfrak{U}$. Luego, existen conjuntos abiertos, $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$, en $C(X)$ tales que $C(\{p\}, X) \in \langle \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \rangle_{2^{C(X)}} \subset \mathfrak{U}$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $\bigcup \mathcal{U}_i$ es un conjunto abierto en X. Como $C(\{p\}, X) \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $A \in C(\{p\}, X) \cap \mathcal{U}_i$, luego $p \in A \in \mathcal{U}_i$, de donde $p \in A \subset \bigcup \mathcal{U}_i$, esto implica que $p \in \bigcup \mathcal{U}_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sean $\mathcal{W} = \mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n$ y sea el conjunto $V' = \{v \in X : C(\{v\}, X) \subset \mathcal{W}\}$. Vamos a probar que V' es una vecindad del punto p. Para esto primero veamos que

$$C(X) = \mathcal{W} \cup \bigcup \{\langle U \rangle \cap C(X) : U \text{ es abierto en } X, p \notin U \text{ y } p \in int(X - U)\}. \tag{1}$$

En efecto: note que $C(\{p\}, X) \subset \mathcal{W}$. Por otro lado, si $A \in C(X)$ y $A \notin C(\{p\}, X)$, sean conjuntos abiertos, U y V, en X ajenos tales que $A \subset U$ y $p \in V$. De aquí, $A \in \langle U \rangle \cap C(X)$ y $p \in V \subset int(X - U)$. Así, la ecuación (1) está probada.

Por otro lado, de la compacidad de $C(X)$ existen $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k$ conjuntos abiertos de X tales que $p \in int(X - U_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ y

$$C(X) = \mathcal{W} \cup \bigcup_{i=1}^{k} (\langle U_i \rangle \cap C(X)).$$

Observe que $p \in int(X - \bigcup_{i=1}^k U_i)$. Ahora, veamos que si $v \in int(X - \bigcup_{i=1}^k U_i)$, entonces $C(\{v\}, X) \subset \mathcal{W}$. En efecto, sean $v \in int(X - \bigcup_{i=1}^k U_i)$ y $B \in C(\{v\}, X)$. Note que si $B \in \langle U_i \rangle$, entonces $v \in U_i$, de donde $B \notin \bigcup_{i=1}^k (\langle U_i \rangle \cap C(X))$, por lo cual $B \in \mathcal{W}$. Esto prueba que $C(\{v\}, X) \subset \mathcal{W}$, para cada $v \in int(X - \bigcup_{i=1}^k U_i)$. Luego, V' es vecindad de p.

Ahora, sea $V = V' \cap (\bigcap_{i=1}^{n}(\bigcup \mathcal{U}_i))$. Se tiene que V es una vecindad de p en X. Sean un punto $v \in V$ y vamos a probar que $f(v) \in \langle \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \rangle_{2^{C(X)}}$. Note que $v \in V \subset V'$. De donde $C(\{v\}, X) \subset \mathcal{W} = \mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n$. Por otro lado, sea $i \in \{1, \ldots, n\}$, como $v \in V \subset \bigcap_{i=1}^{n}(\bigcup \mathcal{U}_i)$, se tiene que $v \in \bigcup \mathcal{U}_i$; por lo cual existe $D \in \mathcal{U}_i$ tal que $v \in D \in \mathcal{U}_i$. Esto es $D \in C(\{v\}, X)$ y $D \in \mathcal{U}_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto prueba que $C(\{v\}, X) \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, es decir, $f(v) \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $f(v) \in \langle \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \rangle_{2^{C(X)}}$, luego $f(v) \in \mathfrak{U}$. Por lo tanto, $f^{-1}[\mathfrak{U}]$ es un conjunto abierto en X.

Veamos que (3) $\Rightarrow$ (1), sean $p \in X$, K un subcontinuo de X con $p \in K$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{U}$. Veamos que $C(\{p\}, X) \in \langle \mathcal{U}, C(X) \rangle_{2^{C(X)}}$, en efecto, como $C(\{p\}, X) \subset \mathcal{U} \cup C(X) = C(X)$, $K \in C(\{p\}, X) \cap \mathcal{U}$ y $K \in C(\{p\}, X) \cap C(X) = C(\{p\}, X)$. Sea $U = f^{-1}[\langle \mathcal{U}, C(X) \rangle_{2^{C(X)}}]$, entonces U es un conjunto abierto de X tal que $p \in U$. Sea $q \in U$, entonces $f(q) \in \langle \mathcal{U}, C(X) \rangle_{2^{C(X)}}$, de donde $C(\{q\}, X) = f(q)$ intersecta a $\mathcal{U}$. Sean $L \in C(\{q\}, X) \cap \mathcal{U}$, así $q \in L$ y $L \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley. $\square$

Por [17, Theorem (4.3)], la propiedad de Kelley se preserva por funciones sobreyectivas y confluentes en continuos, para concluir este capítulo, enunciamos la siguiente pregunta:

Pregunta 4.5. *¿Podría ser aplicada la maquinaria de redes para generalizar el resultado [17, Theorem (4.3)] a continuos Hausdorff?*

Agradecimientos

Los autores agradecen al árbitro sus sugerencias, que ayudaron a mejorar ampliamente este trabajo.

Bibliografía

[1] J. J. Charatonik and A. Illanes, *Various kinds of local connectedness*, Math. Pannonica 13/1 (2002), 103–116.

[2] J. J. Charatonik and A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math. 36 (2006), no. 3, 811–856.

[3] W. J. Charatonik, *A homogeneous continuum without the property of Kelley*, Topology Appl., 96(1999), 209–216.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.

[5] L. M. García V., *Hiperespacios de continuos no métricos*, Tesis de doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, 2015, 162 p.

[6] A. Illanes, *Hereditarily indecomposable Hausdorff continua have unique hyperspaces 2^X and $C_n(X)$*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 89(103) (2011), 49–56.

[7] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[8] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52(1942), 22–36.

[9] S. Macías, *On Jones'set function $\mathcal{T}$ and the property of Kelley for Hausdorff continua*, Topology Appl. 226 (2017), 51–65.

[10] S. Macías, *Hausdorff continua and the uniform property of Effros*, Topology Appl. 230 (2017), 338–352.

[11] S. Macías, *The property of Kelley and continua*, Rev. Integr. temas mat. 37 (2019), No. 1, 17–29.

[12] W. Makuchowski, *On local connectedness in hyperspaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 47 (1999), no. 2, 119–126.

[13] E. Michael, *Topologies on spaces os subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951) 152–182.

[14] S. Mrówka, *On the convergence of nets of sets*, Fund. Math., 45(1958), 237–246.

[15] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978. Reprinted in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.

[16] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[17] R. Wardle, *On a property of J. L. Kelley*, Houston J. Math. 3 (1977), no. 2, 291–299.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570

maeschacon@fcfm.buap.mx
pdsoto@fcfm.buap.mx,
mjlopez@fcfm.buap.mx

Matemáticas y sus aplicaciones 13, Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978-607-525-694-8

Capítulo 5

Estabilidad oscilatoria en espacios de Banach y teoremas de tipo Ramsey

Salvador García Ferreira y Ana Caren Hernández Soto
CCM, UNAM

Resumen

En este artículo panorámico, presentaremos equivalencias del Teorema de Ramsey en el contexto de espacios de Banach. Para ello introducimos la noción de “(k,ε)-oscilación estable” de una sucesión normalizada en un espacio de Banach. Como consecuencia de este resultado se probará que el Teorema de Ramsey es equivalente al Teorema de Brunel-Sucheston. Además, introduciremos otros tipos de estabilidad oscilatoria con respecto a ciertas familias de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ (Barreras y Particiones Especiales) y estableceremos sus conexiones con teoremas de tipo Ramsey conocidos.

1 Introducción

En algunas ramas de las matemáticas modernas la Teoría de Ramsey ha mostrado ser una herramienta poderosa. De manera general, los resultados en esta teoría típicamente son de la forma: para cierta función f, cuyo contradominio es finito, se puede encontrar una especie de subestructura infinita tal que la restricción de f a la subestructura es constante. A simple vista no es posible ver una conexión entre la Teoría de Ramsey y la Teoría de Espacios Banach. Sin embargo, se han encontrado aplicaciones de los Teoremas de tipo Ramsey al estudio de los espacios de Banach. Algunas de estas aplicaciones y nuevas direcciones se pueden consultar en los libros “Ramsey Methods in Analysis” [1] y “Teoría de Ramsey y Espacios de Banach” [6]. Un ejemplo de ello es la demostración encontrada por J. Farahat [10] del famoso Teorema de Rosenthal sobre ℓ_1 [18], el cual asegura que cualquier sucesión acotada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$

en un espacio de Banach posee una subsucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que alguna de las siguientes condiciones se cumple: la subsucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es débilmente Cauchy o la subsucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_1. Por otro lado, a mediados de la década de los 70's, A. Brunel y L. Sucheston [2] probaron que toda sucesión básica normalizada dentro de un espacio de Banach tiene una subsucesión "asintóticamente" subsimétrica que, de hecho, produce lo que ahora se conoce como modelo disperso. La prueba de este resultado consiste en la aplicación recursiva del Teorema de Ramsey y un proceso de diagonalización. Los modelos dispersos mantienen una estrecha relación con la sucesión inicial a través de la cual son construidos. Una de las propiedades más importantes de estos es que son finitamente bloque representables en la sucesión inicial. En otras palabras, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ podemos hallar una subsucesión con longitud n del modelo disperso que es $(1+\varepsilon)-$equivalente a la subsucesión finita formada por los primeros n elementos de la sucesión generadora. De hecho, es por medio de ellos que se obtiene el Teorema de J.L. Krivine [16] sobre la representabilidad finita de alguno de los espacios ℓ_p, para $1 \leq p \leq \infty$, y c_0 en cualquier espacio de Banach con sucesión básica. Observemos que, en realidad, el vínculo entre la Teoría de Ramsey y los espacios de Banach se encuentra en las propiedades de las sucesiones de dichos espacios. En el contexto de subsucesiones bloque de una sucesión básica se puede mencionar el Teorema de Zippin como una aportación sobre la conducta de las sucesiones. Este teorema afirma que si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a cada una de sus subsucesiones bloque normalizadas, entonces la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de c_0 o existe un $1 \leq p < \infty$ tal que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.

Este es un artículo panorámico cuyo objetivo es que el lector conozca algunas aplicaciones de los teoremas de tipo Ramsey al estudio de ciertos espacios de Banach. El primer resultado que mostraremos es una prueba detallada de la equivalencia entre el Teorema de Ramsey y el Teorema de Brunel-Sucheston, la cual aparece en el artículo no publicado [3]. Para esta labor introduciremos las nociones de $(k, \varepsilon)-$oscilación estable y $k-$oscilación asintótica estable de una sucesión normalizada en un espacio de Banach, las cuales nos conducen a una nueva aproximación del Teorema Brunel-Sucheston. Estableceremos la equivalencia del Teorema de Ramsey para cada $[\mathbb{N}]^k$, con $k \in \mathbb{N}$, y la propiedad de $(k, \varepsilon)-$estabilidad oscilatoria de una subsucesión de una sucesión normalizada. Como se mencionó anteriormente las subsucesiones bloque son importantes en el estudio del comportamiento de las sucesiones de un espacio de Banach, de aquí que generalicemos los conceptos de oscilación antes nombrados empleando subsucesiones bloque normalizadas con la particularidad de estar determinadas por bloques de barreras en $\mathbb{N}$. Presentaremos la conexión de estas nuevas propiedades de estabilidad oscilatoria con los teoremas de tipo Ramsey que involucran bloques de barreras. Las nuevas nociones de oscilación bloque estable y oscilación bloque asintoticá estable nos conducirán a considerar nuevos modelos del tipo de Brunel-Sucheston. Los resultados que involucran los nuevos conceptos forman parte del artículo [12]. Una generalización del Teorema de Ramsey y del Teorema de Hindman es el teorema conocido como Teorema de Hindman-Milliken [17]. El cual nos guía, de manera análoga, a nuevas propiedad del tipo estabilidad oscilatoria mediante el uso de bloques de sucesiones normalizadas determinadas por particiones especiales y en consecuencia se obtiene otro tipo de modelo disperso, inspirados en los "strong asymptotic models" del artículo [14].

Para entender los resultados de este trabajo sin la necesidad de consultar otra fuente, incluiremos las nociones y técnicas básicas indispensables, distribuidas de la siguiente manera:

2. Preliminares.
3. Teorema de Ramsey y Teorema de Ramsey para Analistas.
4. Barreras.
5. Teorema de Ramsey en Bloques de Barreras para Analistas.
6. Bases de Schauder.
7. Conjuntos Normantes en $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$.
8. Estabilidad Oscilatoria.
9. Modelo disperso.
10. Teorema de Hindman-Milliken.
11. Espacio de Tsirelson.
12. Preguntas abiertas.

En la segunda sección recordaremos algunas definiciones, notaciones y resultados tanto del Análisis Funcional como de la Teoría de Conjuntos, los cuales usaremos a lo largo de este texto.

En la tercera parte se enuncia el Teorema de Ramsey junto con su demostración. Además, se introduce una versión de este teorema para coloraciones por elementos de un espacio métrico totalmente acotado, conocido como el Teorema de Ramsey para Analistas, el cual induce un tipo de convergencia para coloraciones a un espacio métrico.

La cuarta sección se destina a la introducción de las nociones de barrera y de bloques de barreras. Estas nos permiten extender el Teorema de Ramsey a dichas familias. Además, daremos propiedades combinatorias que nos serán útiles en las secciones posteriores.

De igual forma que el Teorema de Ramsey, en la quinta sección, se plantea una versión analista del Teorema de Ramsey para bloques de barreras coloreados con los elementos de un espacio métrico totalmente acotado. El cual también proporciona un tipo de convergencia para las coloraciones cuyo dominio es una familia de bloques de barreras y cuyo codominio es un espacio métrico.

En este trabajo estudiaremos principalmente las bases de Schauder para un espacio de Banach. Por lo cual se presentarán, en el sexto apartado, algunos resultados que faciliten la comprensión y uso de las bases de Schauder.

En la séptima sección se plantea una técnica para construir espacios de Banach a partir del espacio normado $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$, cuya peculiaridad radica en que el espacio resultante usualmente posee como base de Schauder a la base canónica del espacio vectorial c_{00}. Al final de esta sección se da a conocer una clase de espacios de Banach que conecta a los conjuntos normantes y a las barreras en su generación.

Empezaremos la octava sección con el concepto de $(k, \varepsilon)-$oscilación estable y probaremos que esta propiedad es equivalente al Teorema de Ramsey para $[\mathbb{N}]^k$. Posteriormente, dicha noción será generalizada empleando una familia de bloques de barreras en $\mathbb{N}$, y desmostraremos su equivalencia con el Teorema de Ramsey en Bloques de Barreras.

En el noveno apartado partiendo de la $(k, \varepsilon)-$oscilación estable abordamos el Teorema de Brunel-Sucheston. Siguiendo con la tendencia de este trabajo, introduciremos la idea de modelo asintótico por bloques, determinado por una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$, que generaliza al modelo disperso. Al final de este apartado daremos ejemplos.

Siguiendo con la motivación generada por la traslación del Teorema de Ramsey al Análisis Funcional, en la décima sección, recurriremos al Teorema de Hindeman-Milliken para estudiar la conducta asintótica de algunas subsucesiones bloque normalizadas de sucesiones normalizadas de espacios de Banach.

En la onceava sección presentamos uno de los espacios de Banach más relevantes del Anális Funcional, conocido como el Espacio de Tsirelson. Probaremos algunas de sus propiedades significativas y observaremos que su norma se puede obtener a partir de un conjunto normante de $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$.

Finalmente, proponemos algunos temas de investigación que se pueden llevar a cabo posteriormente.

2 Preliminares

Dado un conjunto infinito X, denotaremos a la familia de todos los subconjuntos infinitos numerables de X como $[X]^\omega$, y para $k \in \mathbb{N}$ ponemos $[X]^k := \{s \subseteq X : |s| = k\}$, $[X]^{\leq k} := \{s \subseteq X : |s| \leq k\}$ y $[X]^{<k} := \{s \subseteq X : |s| < k\}$. Para nuestros propósitos será útil no consideraremos al cero como elemento de los números naturales. La enumeración creciente de un conjunto infinito $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ será $\{m_i : i \in \mathbb{N}\}$. Asimismo si $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $M/n := \{m \in M : m > n\}$.

El símbolo FIN denotará la familia de todos los subconjuntos finitos de N. Para especificar los elementos de un $s \in FIN$ escribiremos $s = \{s(1), \ldots, s(|s|)\}$ de manera estrictamente creciente. Si $s, t \in FIN$, entonces decimos que "s es menos que t" y escribimos $s < t$ si se cumple que $\text{máx}(s) < \text{mín}(t)$, es decir, $s(|s|) < t(1)$. En el caso $s = \{n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir simplemente $n < t$. Además, $s \sqsubseteq t$ significará que s es un segmento inicial de t, y cuando $s < t$ denotaremos por $s^\frown t$ a $s \cup t$. Si $s \in FIN$ y $M \in [\mathbb{N}]^\omega$, entonces $s \sqsubseteq M$ también significara que s es segmento inicial de M. Una sucesión $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de FIN es *sucesión bloque* si $s_1 < s_2 < \cdots s_k < \cdots$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, el símbolo e_i denotará al vector $(e^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ donde $e^i_j = \delta_{i,j}$ (la delta de Kronecker) para todo $j \in \mathbb{N}$. La sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ será llamada la *base canónica* de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. En el caso finito, para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{e_1, \cdots, e_k\}$ denotará a la base canónica de $\mathbb{R}^k$. Para cualquier $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ definimos su soporte como $supp_\mathbb{R}(x) = \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$.

La completación de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ será denotada cuando sea necesario por $\overline{(X, \|\cdot\|)}$. En este artículo trabajaremos exclusivamente con espacios de Banach reales y de dimensión infinita. La esfera unitaria de un espacios de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se denotarás por $S(X) := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ y su bola unitaría cerrada por $B_1(X) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. El espacio dual de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se escribirá X^* o $(X, \|\cdot\|)^*$ cuando se desee hacer énfasis en la norma. Una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se llama *normalizada* si $\|x_i\| = 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por conveniencia, cada subsucesión $(x_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ también se puede expresar como $(x_i)_{i\in M}$, donde $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$. Para todo subconjunto Y de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, el símbolo $\langle Y\rangle$ denotará al subespacio vectorial de X generado por Y. Mientras que $[Y]$ representará la cerradura topológica de $\langle Y\rangle$ en $(X, \|\cdot\|)$. La *norma* de una función acotada (continua) $T : X \to Y$, entre dos espacios de Banach, será denotada por $\|T\|$ y recordamos que $\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$ para todo $x \in X$ y $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_X : x \in S(X)\}$.

Ejemplo 2.1. Algunos de los espacios clásicos de Banach a los que recurriremos con frecuencia son los siguientes:

1. Para cada número real $p \in [1, \infty)$, el espacio vectorial $\ell_p = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$ con la norma

$$\|x\|_{\ell_p} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

2. El espacio vectorial $c_0 = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_i \to 0\}$ con la norma del supremo

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}.$$

Dados un espacio métrico (X, d) y $\varepsilon > 0$, la bola abierta de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ se denotará por $B_r(x)$.

Definición 2.2. Una *ε-red* de un espacio métrico (X, d) es una sucesión finita de puntos $\{x_0, \ldots, x_n\}$ de X tal que $X = \bigcup_{i\leq n} B_\varepsilon(x_i)$. Decimos que un espacio métrico X es *totalmente acotado* si X tiene una ε-red para toda $\varepsilon > 0$.

En la sección de Barreras necesitaremos algunas nociones y resultados sobre conjuntos bien ordenados que a continuación presentamos.

Recordemos que para cada conjunto bien ordenado $(A, \leq)$, existe un único isomorfismo de orden de $(A, \leq)$ a un número ordinal, al cual se le denomina *tipo de orden* de $(A, \leq)$ y lo denotamos como $ord(A)$.

Teorema 2.3. *Dados $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado y $B \subseteq A$ tales que existe un isomorfismo de orden $f : A \longrightarrow B$. Entonces $a \leq f(a)$ para toda $a \in A$.*

Demostración. Consideramos $D := \{a \in A : f(a) < a\}$. Si $D = \emptyset$, entonces hemos terminado. Por otro lado, supongamos que $D \neq \emptyset$. Como A es un conjunto bien ordenado, resulta que D contiene un elemento mínimo d. Además, $f(d) < d$ ya que $d \in D$. Aplicando el isomorfismo de orden se tiene que $f(f(d)) < f(d)$. Por lo tanto, $f(d) \in D$, una contradicción a la existencia de un único elemento mínimo. En consecuencia $D = \emptyset$. □

Teorema 2.4. *El tipo de orden de un conjunto bien ordenado $(A, \leq)$ no es igual al tipo de orden del segmento inicial $\mathscr{S}(a) = \{b \in A : b < a\}$ para cualquier $a \in A$.*

Demostración. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $ord(A) = ord(\mathscr{S}(a))$, es decir, existe un isomofismo de orden $f : A \to \mathscr{S}(a)$. Notemos que $f(a) \in \mathscr{S}(a)$ implica que $f(a) < a$, por definición de segmento inicial, pero esto contradice el Teorema 2.3. □

No es díficil que el lector se convenza del siguiente hecho.

Teorema 2.5. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado. Si $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición finita de A tal que para cualquier $i < n$ se satisface que $a_i < a_{i+1}$ para toda $a_i \in P_i$ y toda $a_{i+1} \in P_{i+1}$, entonces $ord(A) = \sum_{i=1}^{n} ord(P_i)$.*

Aquellas nociones y resultados que usaremos y no hemos mencionado el lector los podrá consultar en libros básicos del tema correspondiente.

3 Teorema de Ramsey y Teorema de Ramsey para Analistas

La Teoría de Ramsey es una de las herramientas matemáticas más importantes en la Combinatoria Finita. Esta teoría se deriva de un resultado clásico de F.P. Ramsey que data de 1928, conocido con el nombre de Teorema de

Ramsey. En esta sección hablaremos de este teorema y su relación con el Análisis Matemático. Para comodidad del lector, damos una demostración de este famoso teorema el cual habla sobre coloraciones y conjuntos monocromáticos.

Definición 3.1. Dados $k, q \in \mathbb{N}$, una *coloración finita* es una función

$$\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \{1, \cdots, q\}.$$

Decimos que $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ es *monocromático*, bajo la coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \{1, \dots, q\}$, si existe $i \leq q$ tal que $[M]^k \subseteq \varphi^{-1}(i)$.

Actualmente el Teorema de Ramsey tiene muchas variaciones y generalizaciones, enseguida enunciamos una de las más comunes y que utilizaremos en este trabajo.

Teorema 3.2 (de Ramsey)**.** *Sean $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $k, q \in \mathbb{N}$. Para cada coloración finita $\varphi : [N]^k \longrightarrow \{1, \dots, q\}$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que M es monocromático.*

Demostración. La prueba será por inducción sobre k. Para el caso $k = 1$ el resultado es evidente. Ahora, supongamos que el teorema es válido para $k \in \mathbb{N}$. Probemos que se cumple para $k + 1$. Para ello consideremos una coloración finita arbitraria

$$\varphi : [N]^{k+1} \longrightarrow \{1, \dots, q\}.$$

Después, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\varphi_n : [N/n]^k \longrightarrow \{1, \dots, q\}$ mediante la regla

$$\varphi_n(s) = \varphi(\{n\} \cup s) \text{ para cada } s \in [\mathbb{N}/n]^k.$$

Sean $M_0 := N$ y $m_0 := \text{mín}(M_0)$. Por la hipótesis de inducción, encontramos un conjunto monocromático $M_1 \in [M_0/m_0]^\omega$ bajo la coloración finita φ_{m_0}. Sean $m_1 := \text{mín}(M_1)$ e $i_1 \leq q$ el color elegido por el conjunto monocromático $[M_1]^k$. Para el paso de recursión suponemos que para cada $0 < j \leq n$, con $n \in \mathbb{N}$, hemos encontrado $M_j \in [\mathbb{N}]^\omega$ e $i_j \leq q$ tal que $M_j \in [M_{j-1}/m_{j-1}]^\omega$, $m_j := \text{mín}(M_j)$ y $[M_j]^k \subseteq \varphi_{m_{j-1}}^{-1}(i_j)$. Aplicando la hipótesis de inducción a la coloración finita

$$\varphi_{m_n} \restriction_{[M_n/m_n]^k} : [M_n/m_n]^k \longrightarrow \{1, \dots, q\},$$

se obtiene un conjunto infinito $M_{n+1} \in [M_n/m_n]^\omega$ de tal modo que $[M_{n+1}]^k$ sea monocromático bajo la coloración finita $\varphi_{m_n} \restriction_{[M_n/m_n]^k}$ con color $i_{n+1} \leq q$.

De este modo se obtiene una sucesión $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de conjuntos infinitos en $\mathbb{N}$, una sucesión $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ y una sucesión $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $\{1,\ldots,q\}$ tales que $[M_j]^k \subseteq \left(\varphi_{m_{j-1}} \restriction_{[M_{j-1}/m_{j-1}]^k}\right)^{-1}(i_j)$. Consideramos el conjunto infinito $M' = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ y la coloración finita

$$\varphi' : [M']^k \longrightarrow \{1,\ldots,q\}$$

dada por la fórmula $\varphi'(s) = i_{\ell_s+1}$ donde $\min(s) = m_{\ell_s}$ y $\ell_s \in \mathbb{N}$ para toda $s \in [M']^k$. Usando nuevamente la hipótesis inductiva, existe $M \in [M']^\omega$ tal que $[M]^k$ es monocromático bajo la coloración finita φ'. Fijemos $s,t \in [M]^{k+1}$, entonces tenemos que

$$\varphi(s) = \varphi_{\text{mín}(s)}(s \setminus \{\text{mín}(s)\}) = i_{\ell_s+1} \text{ y } \varphi(t) = \varphi_{\text{mín}(t)}(t \setminus \{\text{mín}(t)\}) = i_{\ell_t+1}.$$

Pero como $s\setminus\{\text{mín}(s)\}, t\setminus\{\text{mín}(t)\} \in [M]^k$ y $[M]^k$ es monocromático bajo la coloración φ', se cumple que $i_{\ell_s+1} = i_{\ell_t+1}$. Esto muestra que el conjunto $[M]^{k+1}$ es monocromático bajo la coloración inicial φ tal y como se deseaba. $\square$

Para propósitos futuros es suficiente suponer que $q = 2$ tal y como se establece en el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sean $k, q \in \mathbb{N}$ y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) Para toda coloración finita $\varphi : [N]^k \longrightarrow \{1,2\}$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que M es monocromático

(2) Para toda coloración finita $\psi : [N]^k \longrightarrow \{1,\ldots,q\}$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que M es monocromático.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Consideremos una coloración arbitraria $\psi : [N]^k \longrightarrow \{1,\ldots,q\}$. Para cada $n < q$ definamos la función $\varphi_n : [N]^k \longrightarrow 2$, en el elemento $s \in [N]^k$, como

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(s) = n \\ 2 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Por comodidad ponemos $M_0 := N$. Debido a la hipótesis existe un conjunto monocromático $M_1 \in [M_0]^\omega$ bajo la coloración φ_1 con color $i_1 \leq 2$. Si $i_1 = 1$, entonces M_1 es un conjunto monocromático bajo ψ con color 1, por lo cual hemos terminado la demostración. Supongamos que $i_1 = 2$. Aplicando la hipótesis se obtiene un conjunto monocromático $M_2 \in [M_1]^\omega$ con color $i_2 \leq 2$, bajo la coloración $\varphi_2 \upharpoonright_{[M_1]^k}$. Si $i_2 = 1$, entonces M_2 es un conjunto monocromático bajo ψ y su color es 2. En el caso $i_2 = 2$, nuevamente, por hipótesis podemos encontrar un conjunto monocromático $M_3 \in [M_2]^\omega$ con color $i_3 \leq 2$ bajo la coloración $\varphi_3 \upharpoonright_{[M_2]^k}$. Así sucesivamente este procedimiento se puede repetir hasta $q-1$ veces. De aquí podemos suponer que $i_j = 2$ para cada $1 \leq j < q-1$. Entonces $\psi([M_{q-2}]^k) \subseteq \{q-1, q\}$. Por hipótesis encontramos un conjunto monocromático $M_{q-1} \in [M_{q-2}]^k$ bajo la coloración $\psi \upharpoonright_{[M_{q-2}]^k}$. Siendo así M_{q-1} el conjunto deseado que elige color $q-1$ o q.

(2) $\Rightarrow$ (1). Esta implicación es inmediata. □

De manera más general, es posible usar los elementos de cualquier conjunto X, no vació, para colorear al conjunto $[\mathbb{N}]^k$ donde k es cualquier número entero positivo, simplemente se selecciona una función $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow X$. Dicha generalización y el Teorema de Ramsey (Teorema 3.2) inducen un resultado conocido como el Teorema de Ramsey para Analistas, el cual fue formulado por primera vez en las notas de Th. Schlumprecht [20] que se pueden consultar fácilmente en internet.

Teorema 3.4 (de Ramsey para Analistas)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Para cada coloración $\varphi : [N]^k \longrightarrow X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que*

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon$$

si $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [M]^k$.

Demostración. Es suficiente probar el resultado para $N = \mathbb{N}$, ya que existe una biyección entre N y $\mathbb{N}$ que preserva el orden creciente de ambos conjuntos para toda $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado y $k \in \mathbb{N}$. Fijamos una coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow X$ y $\varepsilon > 0$, ambos arbitrarios. De acuerdo a la hipótesis, podemos encontrar $x_1, \ldots, x_q$ en X, para algún $q \in \mathbb{N}$, tal que $X = \bigcup_{i \leq q} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Definimos los conjuntos

$$A_1 = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1) \text{ y } A_i = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \setminus \Big(\bigcup_{j<i} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) \Big) \;\; \text{para cada } 1 < i \leq q.$$

Entonces la familia $\{A_i : i \leq q\}$ es una partición finita de X. Ahora, consideremos la función $\phi : X \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ definida como

$$\phi(x) = i \text{ si } x \in A_i \text{ para algún } i \leq q.$$

Es claro que ϕ está bien definida y que

$$\phi \circ \varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$$

es una coloración finita. El Teorema de Ramsey (Teorema 3.2) nos garantiza la existencia de un conjunto monocromático $M \in [\mathbb{N}]^\omega$, es decir, para algún $i \leq q$ resulta que $[M]^k \subseteq (\phi \circ \varphi)^{-1}(i) = \varphi^{-1}(\phi^{-1}(i))$. Lo cual implica que $\varphi([M]^k) \subseteq \phi^{-1}(i) = A_i \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. En consecuencia se obtiene que

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon$$

para todo $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [M]^k$, tal y como se deseaba. $\square$

A continuación presentamos una versión asintótica del Teorema de Ramsey para Analistas.

Corolario 3.5. *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado y $k \in \mathbb{N}$. Para cada coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow X$ y cada sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$, existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para todo $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [M]^k$ se cumple que*

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon_\ell,$$

donde $\text{mín}\{s(1), t(1)\} = m_\ell$ *para algún $\ell \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado y $k \in \mathbb{N}$. Consideremos una coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow X$ y una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$, arbitrarias. Por el Teorema 3.4, existe un conjunto $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon_1$ para todo $s, t \in [M_1]^k$. Pongamos $m_1 := \text{mín}(M_1)$. Aplicando el Teorema 3.4 recursivamente a $\varphi \restriction_{[M_i/m_i]^k}$ y a ε_{i+1} para cada $i \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números naturales tales que:

1. $m_i := \text{mín}(M_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$.
2. $M_1 \in [N]^\omega$ y $M_{i+1} \in [M_i/m_i]^\omega \subseteq [M_i]^\omega$ para cada $i \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $m_i < m_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

3. Se cumple que $d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon_{i+1}$ para todo $s, t \in [M_{i+1}]^k$.

Sea $M := \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$. Si $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [M]^k$, entonces $s, t \in [M_\ell]^k$ donde $\min\{s(1), t(1)\} = m_\ell$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$. En consecuencia se tiene que

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon_\ell.$$

Por lo tanto, M es el conjunto buscado. $\square$

Veamos que el Teorema de Ramsey para Analistas nos proporciona un tipo de convergencia de coloraciones a espacios métricos, que formalmente se establece de la siguiente manera:

Definición 3.6. Sean (X, d) un espacio métrico, $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que una coloración $\varphi : [M]^k \longrightarrow X$ converge a $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\varphi(s), x) < \varepsilon,$$

para todo $s = \{s(1), \ldots, s(k)\} \in [M/\ell]^k$. Esta convergencia la denotaremos por el símbolo

$$\lim_{[M]^k \ni \{s(1),\ldots,s(k)\} \to \infty} \varphi(\{s(1), \ldots, s(k)\}) = x.$$

En algunos artículos la convergencia de una coloración $\varphi : [M]^k \longrightarrow X$, en el sentido de la definición anterior, se expresa de la forma

$$\lim_{s(1)\to\infty} \lim_{s(2)\to\infty} \cdots . \lim_{s(k)\to\infty} \varphi(\{s(1), \ldots, s(k)\}) = x,$$

pero se debe tener precaución para no confundirla con la convergencia iterada ya que no son equivalentes, como se ejemplifica a continuación.

Ejemplo 3.7. Consideremos la corolación $\varphi : [\mathbb{N}]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface la regla

$$\varphi(\{n_1, n_2\}) = (-1)^{n_1+n_2}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}) \text{ para cada } \{n_1, n_2\} \in [\mathbb{N}]^2.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Entonces

$$\begin{aligned}|\varphi(\{n_1, n_2\}) - 0| &= \left|(-1)^{n_1+n_2}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\right| \\ &= \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} < \varepsilon \text{ para todo } \{n_1, n_2\} \in [N/\ell]^2.\end{aligned}$$

Lo cual significa que

$$\lim_{[\mathbb{N}]^k \ni \{n_1,n_2\}\to\infty} \varphi(\{n_1,n_2\}) = 0.$$

Por otra parte, fijamos $n_1 \in \mathbb{N}$ y observamos que

$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{n_1+2k}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{2k}) = (-1)^{n_1}\frac{1}{n_1} \quad \text{y}$$
$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{n_1+(2k-1)}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{2k-1}) = (-1)^{n_1+1}\frac{1}{n_1}.$$

Esto implica que $\lim\limits_{n_2\to\infty} (-1)^{n_1+n_2}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})$ no existe. Por consiguiente, el límite iterado de $\varphi(\{n_1,n_2\})$ tampoco existe.

Las coloraciónes sobre espacios métricos en general no convergen, por ejemplo consideremos el conjunto de los números naturales con la métrica discreta y la coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como $\varphi(s) = \text{máx}(s)$ para cada $s \in [\mathbb{N}]^2$. El siguiente resultado nos asegura que toda coloración a un espacio métrico compacto posee una restricción convergente.

Corolario 3.8. *Sean (K,d) un espacio métrico compacto y k un número entero positivo. Para cada $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y cada coloración $\varphi : [N]^k \longrightarrow K$ existen $M \in [N]^\omega$ y $x \in K$ tal que*

$$\lim_{[M]^k \ni \{s(1),\ldots,s(k)\}\to\infty} \varphi(\{s(1),\ldots,s(k)\}) = x.$$

Demostración. Sean (K,d) un espacio métrico compacto y $k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow K$ una coloración arbitaria. Por el Corolario 3.5 , hallamos $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para cualesquiera $s = \{s(1),\ldots,s(k)\}$, $t = \{t(1),\ldots,t(k)\} \in [M]^k$ resulta que

$$d(\varphi(s),\varphi(t)) < \frac{1}{2^\ell},$$

donde $\text{mín}\{s(1),t(1)\} = m_\ell$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como K es compacto y la familia $\big\{cl_K\big(\{\varphi(s) : s \in [M/j]^k\}\big)\big\}_{j\in\mathbb{N}}$ cuenta con la propiedad de intersección finita, podemos encontrar un punto

$$x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} cl_K\big(\{\varphi(s) : s \in [M/j]^k\}\big).$$

Ahora, mostremos que la coloración $\varphi : [M]^k \longrightarrow K$ converge a x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^\ell} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in cl_K(\{\varphi(s) : s \in [M/m_{\ell-1}]^k\})$, entonces existe $t \in [M/m_{\ell-1}]^k$ tal que $d(\varphi(t), x) < \frac{1}{2^\ell}$. Por lo cual se concluye que

$$\begin{aligned} d(\varphi(s), x) &\leq d(\varphi(s), \varphi(t)) + d(\varphi(t), x) \\ &< \frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $s \in [M/m_{\ell-1}]^k$. □

4 Barreras

En la literatura reciente se han utilizado ciertas familias de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ para dotar a c_{00} de una norma peculiar que al tomar su completación obtengamos un espacio de Banach con base de Schauder satisfaciendo ciertas propiedades predeterminadas. Entre estas familias sobresalen las barreras, un objeto matemático que se introducirá en esta sección y que es esencial en el desarrollo de este trabajo.

En lo que resta del artículo usaremos la siguiente notación:

Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $s \in FIN$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s &= \{t \in FIN : s < t \text{ y } s^\frown t \in \mathcal{F}\} \text{ y} \\ \mathcal{F} \restriction_M &= \{t \in \mathcal{F} : t \subseteq M\} \end{aligned}$$

son dos tipos de restricciones de $\mathcal{F}$. Consideremos al conjunto FIN como un subespacio topológico del conjunto de Cantor, vía las funciones características. De esta forma $\overline{\mathcal{F}}$ denota la clausura topológica de $\mathcal{F} \subseteq FIN$. Asimismo, para cada $\mathcal{F} \subseteq FIN$ consideraremos otros dos tipos de clausura: la clausura "hacia abajo" con respecto a la inclusión $\subseteq$,

$$\overline{\mathcal{F}}^{\subseteq} = \{t \in FIN : t \subseteq s \text{ para algún } s \in \mathcal{F}\}, \text{ y}$$

la clausura "hacia abajo" con respecto a la relación $\sqsubseteq$,

$$\overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq} = \{t \in FIN : t \sqsubseteq s \text{ para algún } s \in \mathcal{F}\}.$$

A continuación presentamos una propiedad importante de la Teoría de Nash-Williams que posee una notoria relación con el Teorema de Ramsey (Teorema 3.2).

Definición 4.1 (Nash-Williams)**.** Dada una familia $\mathcal{F} \subseteq FIN$, decimos que $\mathcal{F}$ tiene la *Propiedad de Ramsey* si para cada coloración $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$, donde $q \in \mathbb{N}$, existe un conjunto $M \in [\mathbb{N}]^{\omega}$ tal que a lo más una de las restricciones $\varphi^{-1}(1) \restriction_M, \varphi^{-1}(2) \restriction_M, \ldots, \varphi^{-1}(q) \restriction_M$ es no vacío. En particular, $\mathcal{F}$ posee la *Propiedad de Ramsey no nula* si existe $M \in [\mathbb{N}]^{\omega}$ tal que exactamente una de las restricciones es no vacío.

Ahora, enunciemos las condiciones que un subconjunto de FIN debe cumplir para que se denomine barrera.

Definición 4.2. Dado un conjunto $N \in [\mathbb{N}]^{\omega}$, una colección $\mathcal{B} \subseteq FIN$ no vacía es una *barrera* en N si:

i) $s, t \in B$ y $s \neq t$, entonces $s \nsubseteq t$ y $t \nsubseteq s$.

ii) Para cada $M \in [N]^{\omega}$ existe un $s \in \mathcal{B}$ tal que $s \sqsubseteq M$.

Los ejemplos más simples de barreras son:

Ejemplo 4.3. 1. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $N \in [\mathbb{N}]^{\omega}$, $[N]^k = \{s \subseteq N : |s| = k\}$ es una barrera en N.

2. La barrera de Schreier, $\mathcal{S} = \{s \in FIN : |s| = \text{mín}(s)\}$.

Directamente de la definición de barrera se concluye su unicidad bajo contención como enseguida lo veremos.

Lema 4.4. *Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son barreras en algún $N \in [\mathbb{N}]^{\omega}$ tal que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.*

La estructura de barrera se preserva bajo ciertas restricciones y puede generar nuevas barreras tal como lo establece el siguiente resultado.

Lema 4.5. *Sea $\mathcal{B} \subseteq FIN$ una barrera en $N \in [\mathbb{N}]^{\omega}$.*

1. Para todo $M \in [N]^{\omega}$, el conjunto $\mathcal{B} \restriction_M$ es una barrera en M.

2. Para cada $s \in FIN \setminus \mathcal{B}$, el conjunto $\mathcal{B}_s$ es una barrera en $N/\text{máx}(s)$.

3. *A la barrera $\mathcal{B}$ se le puede asociar una barrera en $\mathbb{N}$: Si $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ es la enumeración creciente de N, entonces $\mathcal{B}_{\mathbb{N}} := \{\{i \in \mathbb{N} : n_i \in s\} : s \in \mathcal{B}\}$ es una barrera en $\mathbb{N}$.*

Por la tercera propiedad del lema anterior, toda barrera puede ser considerada una barrera en $\mathbb{N}$.

Veamos que es posible construir nuevas barreras a partir de otras barreras. Para ello se usa la operación que se describe a continuación: Si $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k \subseteq FIN$, entonces

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i := \{s_1{}^\frown s_2{}^\frown \cdots {}^\frown s_k : \forall i \leq k \ (s_i \in \mathcal{B}_i) \text{ y } s_1 < s_2 < \cdots < s_k\}.$$

Lema 4.6. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k \subseteq FIN$ barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Entonces el conjunto $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ es una barrera en N.*

Demostración. Basta con probar el caso $k = 2$. Fijemos $M \in [N]^\omega$, como $\mathcal{B}_1$ es barrera en N entonces existe $s \in \mathcal{B}_1$ tal que $s \sqsubseteq M$. Tomemos $m := \text{máx}(s)$. Gracias a la definición de barrera y a que $M/m \in [N]^\omega$, podemos encontrar $t \in \mathcal{B}_2$ que satisface que $t \sqsubseteq M/m$. Por lo tanto, hallamos $s^\frown t \in \bigoplus_{i=1}^{2} \mathcal{B}_i$ tal que $s^\frown t \sqsubseteq M$. Además, supongamos que existen $s_1{}^\frown s_2, t_1{}^\frown t_2 \in \bigoplus_{i=1}^{2} \mathcal{B}_i$ tal que $s_1{}^\frown s_2 \subseteq t_1{}^\frown t_2$. Entonces alguna de las siguientes condiciones se cumple:

(i) $s_1{}^\frown s_2 \subseteq t_1$,

(ii) $s_1{}^\frown s_2 \subseteq t_2$, y

(iii) $s_1{}^\frown s_2 \cap t_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$.

Si (i) o (ii) se cumple que $s_1 \subseteq t_1$ o $s_2 \subseteq t_2$, respectivamente, lo cual contradice la definición de barrera. Para el caso (iii) se tiene que $s_1 \subseteq t_1$ o $s_2 \subseteq t_2$ ya que $s_1 < s_2$ y $t_1 < t_2$, nuevamente una contradicción a la definición de barrera. De todo lo anterior podemos concluir que $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{B}$ es una barrera en N. $\square$

Es fácil ver que para cualquier $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y cada sucesión finita $(n_i)_{i=1}^k$ de números naturales resulta que $\bigoplus_{i=1}^{k} [N]^{n_i} = [N]^{n_1+n_2+\cdots+n_k}$.

Otra propiedad relevante de las barreras, que enseguida exponemos, es la conexión entre sus clausuras: topológica, respecto a la inclusión y respecto al segmento inicial.

Lema 4.7. *Si $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$, entonces $\overline{\mathcal{B}}^{\subseteq} = \overline{\mathcal{B}}^{\sqsubseteq} = \overline{\mathcal{B}}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$. Vamos a probar que $\overline{\mathcal{B}}^{\sqsubseteq} \subseteq \overline{\mathcal{B}}^{\subseteq} \subseteq \overline{\mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{B}}^{\sqsubseteq}$. De manera inmediata se observa que $\overline{\mathcal{B}}^{\sqsubseteq} \subseteq \overline{\mathcal{B}}^{\subseteq}$. Ahora demostremos $\overline{\mathcal{B}}^{\subseteq} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$, para ello tomamos $s \in \overline{\mathcal{B}}^{\subseteq} \setminus \mathcal{B}$. Por definición $s \subseteq t$ para algún $t \in \mathcal{B}$. Pongamos $m := \text{máx}(s)$. Debido la propiedad ii) de las barreras es posible construir inductivamente una sucesión $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en la barrera $\mathcal{B}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumpla que

$$(\chi_{s_i}(j))_{j\in\mathbb{N}} \in \big(\prod_{j\in r}\{\chi_s(j)\}\big) \times \big(\prod_{j\in(\mathbb{N}\setminus r)}\{0,1\}\big),$$

para cualquier $r \subseteq \{1, 2\ldots, m, m+1, \ldots, m+i\}$. En efecto, supongamos que hallamos una sucesión finita $(s_i)_{i=1}^{n}$ en la barrera $\mathcal{B}$ que satisface, para cada $i \leq n$, la condición

$$(\chi_{s_i}(j))_{j\in\mathbb{N}} \in \big(\prod_{j\in r}\{\chi_s(j)\}\big) \times \big(\prod_{j\in(\mathbb{N}\setminus r)}\{0,1\}\big),$$

para todo $r \subseteq \{1, 2\ldots, m, m+1, \ldots, m+i\}$. A causa de la propiedad ii) de las barreras existe $s_{n+1} \in \mathcal{B}$ tal que $s_{n+1} \sqsubseteq \big(\mathbb{N}/(m+n+1)\big) \cup s$. Observemos que $s \sqsubseteq s_{n+1}$, de lo contrario $s_{n+1} \sqsubseteq s \subseteq t$, lo cual contradice la definición de barrera. Además, el conjunto $\{j \leq m+n+1 : \chi_s(j) = 0\}$ no corta a s_{n+1} y $s \cup \{j \leq m+n+1 : \chi_s(j) = 0\}$=$\{$1,2. . . ,m+n+1$\}$. Por esta razón se tiene que

$$\big(\chi_{s_{n+1}}(j)\big)_{j\in\mathbb{N}} \in \big(\prod_{j\in r}\{\chi_s(j)\}\big) \times \big(\prod_{j\in(\mathbb{N}\setminus r)}\{0,1\}\big),$$

para todo $r \subseteq \{1, 2\ldots, m, m+1, \ldots, m+n+1\}$. Veamos que $(\chi_{s_i}(j))_{j\in\mathbb{N}} \longrightarrow (\chi_s(j))_{j\in\mathbb{N}}$. Sea V un conjunto abierto básico de la topología de Cantor que contiene a $(\chi_s(j))_{j\in\mathbb{N}}$. Sabemos que V es de la forma

$$\big(\prod_{j\in v}\{\chi_s(j)\}\big) \times \big(\prod_{j\in(\mathbb{N}\setminus v)}\{0,1\}\big) \text{ para algún } v \in FIN,$$

entonces $(\chi_{s_i}(j))_{j\in\mathbb{N}} \in V$ para todo $i \geq max(v)$. De esta manera obtenemos que $s \in \overline{\mathcal{B}}$. Finalmente probaremos la contención $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{B}}^{\sqsubseteq}$. Sea $s \in \overline{\mathcal{B}}$ y fijemos una sucesión $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en la barrera $\mathcal{B}$ tal que $(\chi_{s_i}(j))_{j\in\mathbb{N}} \longrightarrow (\chi_s(j))_{j\in\mathbb{N}}$. Consideremos $m := \text{máx}(s)$ y el abierto

$$V := \Big(\prod_{j\leq m}\{\chi_s(j)\}\Big) \times \Big(\prod_{j\in(\mathbb{N}/m)}\{0,1\}\Big).$$

Por convergencia existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $(\chi_{s_i}(j))_{j\in\mathbb{N}} \in V$ para todo $i \geq \ell$. Lo cual implica que $s \sqsubseteq s_i$ para cada $i \geq \ell$. Así es que $s \in \overline{\mathcal{B}}^{\sqsubseteq}$. □

Para probar algunos resultados que involucran barreras, el método por inducción transfinita es una herramienta eficiente. Para ello consideramos la relación de *orden lexicográfico* en la familia de subconjuntos finitos de los números naturales, definida para cualesquiera $s, t \in FIN$ como

$$s <_{lex} t \text{ si y solo si } \text{mín}(s \triangle t) \in s,$$

donde $s \triangle t$ es la diferencia simétrica $s\backslash t \cup t\backslash s$.

Lema 4.8. *Toda barrera es un conjunto bien ordenado respecto al orden lexicográfico.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Decimos que $s \leq t$ si y soló si $s <_{lex}$ o $s = t$ para cualesquiera $s, t \in \mathcal{B}$. Por demostrar que $(\mathcal{B}, \leq)$ es un orden total y todo subconjunto infinito de la barrera $\mathcal{B}$ posee un elemento mínimo. Por la definición del orden lexicográfico y las propiedades de las barreras es fácil ver que la relación $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y comparable (total ó completa). Ahora supongamos que existe $r, s, t \in \mathcal{B}$ tal que $r \leq s$ y $s \leq t$. Si $r = s$ o $s = t$, entonces $r \leq t$. En el caso $r < s$ y $s < t$ hay dos posibilidades: $\text{mín}(r \triangle s) < \text{mín}(s \triangle t)$ o $\text{mín}(r \triangle s) > \text{mín}(s \triangle t)$. Si $\text{mín}(r \triangle s) < \text{mín}(s \triangle t)$, entonces $r \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(r \triangle s) - 1\} \sqsubseteq t$ y $\text{mín}(r \triangle s) \notin t$. De lo contrario $t < s$. Así es que $\text{mín}(r \triangle t) = \text{mín}(r \triangle s) \in r$, lo que significa que $r < t$. Análogamente, si $\text{mín}(r \triangle s) > \text{mín}(s \triangle t)$ se tiene que $t \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(s \triangle t) - 1\} \sqsubseteq r$ y $\text{mín}(s \triangle t) \notin r$. En su defecto $s < r$. Por lo tanto, $\text{mín}(r \triangle t) = \text{mín}(s \triangle t) \in s$ y como $\text{mín}(r \triangle s) > \text{mín}(s \triangle t)$ concluimos que $\text{mín}(r \triangle t) \in r$, es decir, $r < t$.

Finalmente probemos la existencia del mínimo por contradicción. Supongamos que la barrera $\mathcal{B}$ contiene una sucesión infinita $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ decreciente respecto a la relación $\leq$. Observemos que $\text{mín}(s_i \triangle s_j) \neq \text{mín}(s_j \triangle s_k)$ para todo

$i < j < k$ en $\mathbb{N}$. Consideramos la coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^3 \to \{1, 2\}$ dada por

$$\varphi(\{i,j,k\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \min(s_i \triangle s_j) < \min(s_j \triangle s_k) \\ 2 & \text{si } \min(s_i \triangle s_j) > \min(s_j \triangle s_k) \end{cases}, \text{ para todo } \{i,j,k\} \in [\mathbb{N}]^3.$$

Por el Teorema de Ramsey (Teorema 3.2) existe $\ell \in \{1, 2\}$ y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $[N]^3 \subseteq \varphi^{-1}(\ell)$. Sin embargo, es imposible que $\min(s_i \triangle s_j) > \min(s_j \triangle s_k)$ para cada $i < j < k$ en N, ya que $\min(s_i \triangle s_j)$ es un número finito y $(s_i)_{i \in N}$ es una sucesión infinita. Por esta razón, para cada $i < j < k$ en N, la desigualdad

$$\min(s_i \triangle s_j) < \min(s_j \triangle s_k) \tag{1}$$

se satisface. Definamos la coloración $\phi : [N]^3 \to \{1, 2, 3\}$ como

$$\phi(\{i,j,k\}) =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } s_i \cap \{1,2,\ldots, min(s_i \triangle s_j)\} \sqsupset s_j \cap \{1,2,\ldots,\min(s_j \triangle s_k)\} \\ 2 & \text{si } s_i \cap \{1,2,\ldots, \min(s_i \triangle s_j)\} \sqsubseteq s_j \cap \{1,2,\ldots,\min(s_j \triangle s_k)\} \\ 3 & \text{si } s_i \cap \{1,2,\ldots, \min(s_i \triangle s_j)\} = s_j \cap \{1,2,\ldots,\min(s_j \triangle s_k)\} \end{cases},$$

para todo $\{i,j,k\} \in [\mathbb{N}]^3$ con $i < j < k$. Nuevamente, por el Teorema de Ramsey (Teorema 3.2), existe $\ell \in \{1, 2, 3\}$ y $M \in [N]^\omega$ tal que $\phi([M]^3) = \{\ell\}$. Notemos que $\ell \neq 1$ ya que $s_i \cap \{1, 2, \ldots, \min(s_i \triangle s_j)\}$ es un conjunto finito para cada $i, j \in M$ y $(s_i)_{i \in M}$ es una sucesión infinita. Supongamos que $s_i \cap \{1,2,\ldots,\min(s_i \triangle s_j)\} \sqsubseteq s_j \cap \{1,2,\ldots,\min(s_j \triangle s_k)\}$ para todo $i < j < k$ en M. Consideremos el conjunto $\big\{ \min(s_i \triangle s_{i+1}) : i \in M \big\} \subseteq \mathbb{N}$, el cual es infinito ya que la relación entre los conjuntos es propia, como $\mathcal{B}$ es barrera en $\mathbb{N}$ existe $t \in \mathcal{B}$ tal que $t \sqsubseteq \{\min(s_i \triangle s_{i+1}) : i \in M\} \subseteq \mathbb{N}$. Lo anterior implica que existe $j \in M$ tal que $t \sqsubseteq s_j \cap \{1, 2, \ldots, \min(s_j \triangle s_{j+1})\} \sqsubseteq s_j$. Una contradicción de las propiedades de las barreras. Por lo tanto, ℓ debe ser igual a 3, es decir, $s_i \cap \{1,2,\ldots,\min(s_i \triangle s_j)\} = s_j \cap \{1,2,\ldots,\min(s_j \triangle s_k)\}$ para todo $i < j < k$ en M. Como (1) y la sucesión es decreciente se tiene que $\min(s_i \triangle s_j) \in s_j \cap \{1, 2, \ldots, \min(s_j \triangle s_k)\} \subseteq s_i$ para todo $i < j < k$ in M, lo cual es una contradicción. En consecuencia, el Teorema de Ramsey no se cumple. De esta forma se prueba que todo subconjunto infinito de la barrera $\mathcal{B}$ contiene un elemento mínimo. □

La clasificación de las barreras según su tipo de orden es de gran ayuda en la demostración del teorema principal de este texto (Teorema 8.11). Algunas características relacionadas al tipo de orden, que son de suma importancia para nuestros propósitos, serán descritas en los siguientes resultados (4.13,4.14).

Lema 4.9. *Dada una barrera $\mathcal{B}$ en $\mathbb{N}$ se cumple que $ord(\mathcal{B}_{\{n\}}) < ord(\mathcal{B})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ y fijemos $n \in \mathbb{N}$ arbitraria. Si $\mathcal{B}_{\{n\}}$ es el conjunto vacío, entonces $ord(\mathcal{B}_{\{n\}}) < ord(\mathcal{B})$. En el caso de que $\mathcal{B}_{\{n\}}$ no sea el conjunto vacío, definimos la función $f : \mathcal{B}_{\{n\}} \to \mathcal{B}$ como $f(s) = \{n\}^\frown s$ para cada $s \in \mathcal{B}_{\{n\}}$. Es fácil ver que la función f es inyectiva y preserva el orden lexicográfico. Además, por propiedades de las barreras, existe $s_{n+1} \in \mathcal{B}$ tal que $s_{n+1} \sqsubseteq \mathbb{N}/n$. En consecuencia, $f(s) <_{lex} s_{n+1}$ para todo $s \in \mathcal{B}_{\{n\}}$, es decir, $f(\mathcal{B}_{\{n\}}) \subseteq \mathscr{S}(s_{n+1})$. De aquí se deduce que $ord(\mathcal{B}_{\{n\}}) \leq ord(\mathscr{S}(s_{n+1}))$. Mientras que el Teorema 2.4 garantiza que $ord(\mathscr{S}(s_{n+1})) < ord(\mathcal{B})$. Por lo cual podemos concluir que $ord(\mathcal{B}_{\{n\}}) < ord(\mathcal{B})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Lema 4.10. *Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$. Si existe $s \in \mathcal{B}$ tal que $|s| = k$, entonces $ord(\mathcal{B}) \geq \omega^k$.*

Demostración. Basta probar que si $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$ y $s \in \mathcal{B}$ tal que $|s| = k$ con $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{B}$ contiene un subconjunto S de orden ω^k, respecto al orden lexicográfico, tal que $s \leq_{lex} t$ para todo $t \in S$. Procederemos por inducción sobre k. En el caso $k = 1$, sea $s_1 = \{s_1(1)\} \in \mathcal{B}$. Por la definición de barrera podemos encontrar $s_i \in \mathcal{B}$ tal que $s_i \sqsubseteq \{s_1(1)+i-1, s_1(1)+i, s_1(1)+i+1, s_1(1)+i+2, \dots\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Notemos que $s_i <_{lex} s_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, por construcción. Por lo tanto, existe un isomorfismo de orden entre $S = \{s_i : i \in \mathbb{N}\}$ y ω, inducido de manera natural por el orden lexicográfico. Esto implica que $ord(S) = \omega$.

Para $k = 2$, sea $s_1 = \{s_1(1), s_1(2)\} \in \mathcal{B}$. La propiedad ii) de las barreras nos permite hallar $s_i \in \mathcal{B}$ tal que $s_i \sqsubseteq \{s_1(2) + i - 2, s_1(2) + i - 1, s_1(2) + i, s_1(2) + i + 1, \dots\}$ para toda $i \in \mathbb{N}/1$. Mientras que la propiedad i) de las barreras implica que $\{s_1(2) + i - 2, s_1(2) + i - 1\} \sqsubseteq s_i$ para cada $i \in \mathbb{N}/1$. De modo que $|s_i| \geq 2$ y $s_i <_{lex} s_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Tomando $\ell_i = |s_i|$ para cada $i \in \mathbb{N}$, nuevamente por la definición de barrera, obtenemos $s_{i,j} \in \mathcal{B}$ tal que $s_{i,j} \sqsubseteq \{s_i(1), \dots s_i(\ell_i - 1), s_i(\ell_i) + j, s_i(\ell_i) + j + 1, \dots\}$ y $\{s_i(1), \dots s_i(\ell_i - 1), s_i(\ell_i)+j\} \sqsubseteq s_{ij}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Por construcción, resulta que $s_i <_{lex} s_{i,1}$ y $s_{i,j} <_{lex} s_{i,j+1} <_{lex} s_{i+1}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Denotemos como S al conjunto $\{s_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{s_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$. Observemos que existe un isomorfismo de orden entre S y ω^2 dado naturalmente por el orden lexicográfico:

$$\begin{array}{cccccc}
s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_m & \dots \\
s_{1,1} & s_{2,1} & s_{3,1} & \dots & s_{m,1} & \dots \\
s_{1,2} & s_{2,2} & s_{3,2} & \dots & s_{m,2} & \dots \\
s_{1,3} & s_{2,3} & s_{3,3} & \dots & s_{m,3} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
s_{1,m} & s_{2,m} & s_{3,m} & \dots & s_{m,m} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}.$$

Por esta razón el orden de S es ω^2.

Supongamos que si $s \in \mathcal{B}$ y $|s| = k$, entonces existe $S \subseteq \mathcal{B}$ de orden ω^k tal que $s \leq_{lex} t$ para todo $t \in S$. Para el caso inductivo $k+1$, sea $s_1 = \{s_1(1), \dots, s_1(k+1)\} \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$, encontramos $s_i \in \mathcal{B}$ tal que es segmento inicial de

$$\begin{cases} \{s_1(i), s_1(i+1), \dots s_1(k), s_1(k+1), s_1(k+1)+1, \dots\} & \text{si } i \leq k+1 \\ \{s_1(k+1)+i-k-1, s_1(k+1)+i-k, s_1(k+1)+i-k+1, & \\ s_1(k+1)+i-k+2, \dots\} & \text{si } i > k+1 \end{cases}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, la condición i) de las barreras implica que

$$\begin{aligned} &\{s_1(i), s_1(i+1), \dots s_1(k), s_1(k+1), s_1(k+1)+1, \dots, \\ &\qquad s_1(k+1)+(k+1)-(i-1)\} \sqsubseteq s_i \text{ si } i \leq k+1, \\ \text{o } &\{s_1(k+1)+(i-k)-1, s_1(k+1)+(i-k), s_1(k+1)+(i-k)+1, \dots, \\ &\qquad s_1(k+1)+(i-k)+(k-1)\} \sqsubseteq s_i \text{ si } i > k+1 \end{aligned}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Por construcción tenemos que $|s_i| \geq k+1$ y $s_i <_{lex} s_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Renombremos a los elementos de s_i como $\{s_i(1), \dots, s_i(\ell_i)\}$, donde $|s_i| = \ell_i \geq k+1$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos la barrera $\mathcal{B}_{\{s_i(1),\dots,s_i(\ell_i-k)\}}$ y tomemos el elemento $t_i := \{s_i(\ell_i-k+1), s_i(\ell_i-k+2), \dots, s_i(\ell_i)\} \in \mathcal{B}_{\{s_i(1),\dots,s_i(\ell_i-k)\}}$. Como $|t_i| = k$, la hipótesis de inducción nos dice que existe $T_i \subseteq \mathcal{B}_{\{s_i(1),\dots,s_i(\ell_i-k)\}}$ de orden ω^k tal que $t_i \leq_{lex} t$ para todo $t \in T_i$. Sea

$$S_i = \big\{\{s_i(1), \dots, s_i(\ell_i-k)\}^\frown t : t \in T_i\big\} \subseteq \mathcal{B}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. La función $f : T_i \to S_i$ definida como $f(t) = \{s_i(1), \dots, s_i(\ell_i-k)\}^\frown t$ para cada $t \in T_i$, con $i \in \mathbb{N}$, es un isomorfismo de orden respecto al orden lexicográfico. Por lo cual el $ord(S_i) = \omega^k$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Notemos, para cada $i \in \mathbb{N}$, que $s <_{lex} s_{i+1}$ para todo $s \in S_i$ ya que $s(1) < s_{i+1}(1)$. Esto implica la existencia de un isomorfismo de orden entre $S = \cup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ y ω^{k+1} inducido naturalmente por el orden lexicográfico, es decir, $ord(S) = \omega^{k+1}$. $\square$

Corolario 4.11. *La única barrera en* $\mathbb{N}$ *con orden* ω *es* $[\mathbb{N}]^1$.

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$ con orden ω y $\mathcal{B} \neq [\mathbb{N}]^1$, entonces existe $s \in \mathcal{B}$ que satisface $|s| \geq 2$. Por el Lema 4.10 se concluye que $ord(\mathcal{B}) \geq \omega^2$. $\square$

Lema 4.12. *Si* $\mathcal{B}$ *es una barrera en* $\mathbb{N}$ *distinta de* $[\mathbb{N}]^1$, *entonces* $|\mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^1| < \infty$. *En particular, se tiene que* $\{i\} \in \mathcal{B}$ *para cada* $i \leq n$ *donde* $n = \max\big(\bigcup(\mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^1)\big)$.

Demostración. Sea $\mathcal{B} \neq [\mathbb{N}]^1$ una barrera en $\mathbb{N}$ y supongamos que el conjunto $\mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^1$ es infinito. Tomamos $s = \{s(1), \ldots, s(k)\} \in \mathcal{B} \setminus [\mathbb{N}]^1$, con $k \geq 2$. Como $\mathcal{B}$ es una barrera, para cada $m \geq s(k)$ encontramos un $t \in \mathcal{B}$ tal que $\{s(1), \ldots, s(k-1), m\} \sqsubseteq t$. Debido a que $|\mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^1| = \infty$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > s(k)$ y $\{m\} \in \mathcal{B}$. Así que $\{m\} \subseteq t$ para algún $t \in \mathcal{B}$, una contradicción de la propiedad i) de las barreras.

Sea $n = \max\big(\bigcup(\mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^1)\big)$ y supongamos que existe $i < n$ tal que $\{i\} \notin \mathcal{B}$. Consideremos el conjunto infinito $\{i, n, n+1, n+2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$. Por la definición de barrera existe $s \in \mathcal{B}$ tal que $s \sqsubseteq \{i, n, n+1, n+2, \ldots\}$. Sabemos que $s \neq \{i\}$, entonces $\{i, n\} \sqsubseteq s$ y en consecuencia $\{n\} \subseteq s$, lo cual es una contradicción. $\square$

El lema anterior también implica que para toda barrera $\mathcal{B}$ de $\mathbb{N}$ distinta de $[\mathbb{N}]^1$ se tiene que $\mathcal{B} \setminus [\mathbb{N}]^1$ es barrera en $\mathbb{N}/n$ donde $n = \max\big(\bigcup(\mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^1)\big)$.

Teorema 4.13. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$ *con* $k \geq 2$ *se cumplen las siguientes afirmaciones:*

$(1)_k$ *Sea* $\mathcal{B}$ *una barrera en* $\mathbb{N}$. *Entonces* $\mathcal{B}$ *tiene orden* ω^k *si y solo si todo* $s \in \mathcal{B}$ *satisface que* $|s| \leq k$ *y existe* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tal que* $[\mathbb{N}/n]^k \subseteq \mathcal{B}$.

$(2)_k$ *Para toda barrera* $\mathcal{B}$ *en* $\mathbb{N}$ *con* $ord(\mathcal{B}) > \omega^k$ *se tiene que el conjunto*

$$\mathfrak{M}_k = \big\{m \in \mathbb{N} : m = \min(s) \text{ para algún } s \in \mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^k\big\} \text{ es finito.}$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre k. Para el caso $k = 2$ tenemos que:

$(1)_2$ $(\Rightarrow)$ Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ con orden ω^2. Supongamos que existe $s \in \mathcal{B}$ tal que $|s| > 2$, entonces $ord(\mathcal{B}) \geq \omega^3$ por el Lema 4.10. Lo cual contradice la hipótesis. Por consiguiente, para todo $s \in \mathcal{B}$ se cumple que $|s| \leq 2$. Aplicando el Lema 4.12 y el resultado previo, obtenemos que $[\mathbb{N}/n]^2 \subseteq \mathcal{B}$ donde $n = \text{máx}\big(\bigcup(\mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^1)\big)$.

$(\Leftarrow)$ Consideramos $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que todo $s \in \mathcal{B}$ satisface que $|s| \leq 2$ y $[\mathbb{N}/n]^2 \subseteq \mathcal{B}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, el conjunto $\mathcal{B}_{\{i\}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<2}$ para cada $i \leq n$. En consecuencia, $\mathcal{B}_{\{i\}}$ es vacío o $\mathcal{B}_{\{i\}} = [\mathbb{N}/i]^1$ si $i \leq n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{B}_{\{i\}} \neq \emptyset$ para cada $i \leq n$. Esto implica que el orden de $\Gamma_{\{i\}} := \{\{i\}^\frown s : s \in \mathcal{B}_{\{i\}}\} \subseteq \mathcal{B}$ es igual al $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) = \omega$ para cada $i \leq n$. Aplicando el Teorema 2.5 a $\{\Gamma_{\{i\}}\}_{i=1}^n \cup \{[\mathbb{N}/n]^2\}$ obtenemos que

$$ord(B) = \sum_{i=1}^{n} ord(\Gamma_{\{i\}}) + ord([\mathbb{N}/n]^2) = \omega^2.$$

$(2)_2$ Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que $ord(\mathcal{B}) > \omega^2$ y supongamos que $\mathfrak{M}_2(\mathcal{B})$ es infinito. Primero probemos que existe $\ell \in N$ tal que la barrera $\mathcal{B}_{\{\ell\}}$ tiene un elemento s con cardinalidad mayor o igual a 2. Supongamos que $\mathcal{B}_{\{i\}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<2}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\mathcal{B}_{\{i\}}$ es el conjunto vacío o una barrera. Sin pérdida de generalidad, gracias al Lema 4.12, podemos suponer que $\mathcal{B}_{\{i\}} \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) = \omega$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Debido al Teorema 2.5 y a los resultados previos tenemos que

$$\begin{aligned} ord(\mathcal{B}) &= \sum_{i=1}^{\infty} ord(\Gamma_{\{i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \omega = \omega^2, \end{aligned}$$

ya que de igual manera al inciso anterior se cumple que $ord(\Gamma_{\{i\}}) = ord(\mathcal{B}_{\{i\}})$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Lo cual contradice la hipótesis. Como existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que hay algún $s \in \mathcal{B}_{\{\ell\}}$ con $|s| \geq 2$, el Lema 4.10 afirma que el orden de $\mathcal{B}_{\{\ell\}}$ es mayor o igual a ω^2. Mientras que por el Teorema 4.12, obtenemos que $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}_{\{\ell\}}) = \bigcup(\mathcal{B}_{\{\ell\}} \cap [\mathbb{N}]^1)$ es finito. Por consiguiente, si $n = \text{máx}\, \mathfrak{M}_1(\mathcal{B}_{\{\ell\}}) > \ell$ entonces $\mathcal{B}_{\{\ell\}} \restriction_{\mathbb{N}/n}$ es una barrera en $\mathbb{N}/n$ que no tiene elementos con cardinalidad 1. Por otro lado, como $\mathfrak{M}_2(\mathcal{B})$ es infinito, hallamos $m \in \mathfrak{M}_2(\mathcal{B})$ tal que $m > n$. Tomamos algún $\{m, i\} \in \mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^2$ y consideramos el conjunto $\{m, i, i+1, i+2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}/n$. Por definición de barrera, obtenemos $s \in \mathcal{B}_{\{\ell\}}$ tal que $s \sqsubseteq \{m, i, i+1, i+2, \ldots\}$. Debido a la construcción $s \neq \{m\}$. Lo anterior implica que $\{m, i\} \sqsubseteq s$. Por eso $\{\ell\}^\frown s \in \mathcal{B}$ y $\{m, i\} \in \mathcal{B}$, lo cual contradice la propiedad i) de las barreras.

Supongamos que $(1)_j$ y $(2)_j$ se cumplen para cada $1 < j \leq k$. Por demostrar que las afirmaciones son válidas para $k+1$.

$(1)_{k+1}$ $(\Rightarrow)$ Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que $ord(\mathcal{B}) = \omega^{k+1}$. Supongamos que existe $s \in \mathcal{B}$ tal que $|s| > k+1$, aplicando el Lema 4.10 obtenemos que $ord(B) > \omega^{k+2}$. Una contradicción de la hipótesis. Por lo tanto, para todo $s \in \mathcal{B}$ se satisface que $|s| \leq k+1$. Observemos que $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ son conjuntos finitos por el Lema 4.12 y $(2)_j$ para $1 < j \leq k$. En consecuencia, $\mathfrak{M}_{k+1}$ es un conjunto infinito. Finalmente, los resultados previos implican que $[\mathbb{N}/n] \subseteq \mathcal{B}$ para $n = \text{máx} \cup_{j \leq k} \mathfrak{M}_j$.

$(\Leftarrow)$ Consideramos $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que todo $s \in \mathcal{B}$ satisface que $|s| \leq k+1$ y $[\mathbb{N}/n]^{k+1} \subseteq \mathcal{B}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis $\mathcal{B}_{\{i\}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<k+1}$ para cada $i \leq n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{B}_{\{i\}} \neq \emptyset$ para $i \leq n$. Gracias al Lema 4.10 se tiene que $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) \geq \omega^{d_i}$, donde $d_i = \text{máx}\{|t| : t \in \mathcal{B}_{\{i\}}\}$, para cada $i \leq n$. Notemos que $d_i \leq k$ para toda $i \leq n$, entonces $\omega^{d_i} \leq \omega^k$. Aplicando el Lema 4.12 y $(2)_j$ para $1 < j < d_i$ obtenemos que los conjuntos $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}_{\{i\}}), \ldots, \mathfrak{M}_{d_i - 1}(\mathcal{B}_{\{i\}})$ poseen cardinalidad finita si $i \leq n$. En consecuencia, $\mathfrak{M}_{d_i}(\mathcal{B}_{\{i\}})$ es un conjunto infinito para cada $i \leq n$. Por la contrapuesta de $(2)_{d_i}$ tenemos que $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) \leq \omega^{d_i}$ para toda $i \leq n$. Por lo cual podemos concluir que $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) = \omega^{d_i}$ si $i \leq n$. Finalmente, gracias al Teorema 2.5 y a la igualdad $ord(\Gamma_{\{i\}} = ord(\mathcal{B}_{\{i\}})$para cada $i \leq n$, resulta que

$$\begin{aligned} ord(\mathcal{B}) &= \sum_{i \leq n} ord(\Gamma_{\{i\}}) + ord([\mathbb{N}/n]^{k+1}) \\ &= \sum_{i \leq n} \omega^{d_i} + \omega^{k+1} \\ &= \omega^{k+1}. \end{aligned}$$

$(2)_{k+1}$ Consideremos $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ con orden mayor a ω^{k+1} y supongamos que $\mathfrak{M}_{k+1}(\mathcal{B})$ es un conjunto infinito. Primero probemos que existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $|s| \geq k+1$ para algún $s \in \mathcal{B}_{\{\ell\}}$. Para ello supongamos que $\mathcal{B}_{\{i\}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<k+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$, es decir, $\mathcal{B} \subseteq [\mathbb{N}]^{\leq k+1}$. Del Lema 4.10 se obtiene que $ord(\mathcal{B}) = \omega^d$ con $d = \{|s| : s \in \mathcal{B}\} \leq k+1$. Observemos que $\mathfrak{M}_d(\mathcal{B})$ es un conjunto infinito ya que $|s| \leq d$ para toda $s \in \mathcal{B}$ y $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}), \ldots, \mathfrak{M}_{d-1}(\mathcal{B})$ poseen cardinalidad finita, por el Lema 4.12 y $(2)_j$ para $j \leq d-1$. Esto implica que $[\mathbb{N}/n]^d \subseteq \mathcal{B}$ donde $n = \max \cup_{i \leq d-1} \mathfrak{M}_i(\mathcal{B})$. Por $(1)_{k+1}$ se concluye que $ord(\mathcal{B}) = \omega^d \leq \omega^{k+1}$. Una contradicción de la hipótesis. Sea $\ell \in \mathbb{N}$ tal que hay un elemento $s \in \mathcal{B}$ con $|s| \geq k+1$. Entonces $ord(\mathcal{B}_{\{\ell\}}) \geq \omega^{k+1}$ gracias al Lema 4.10. Los incisos $(1)_j$ para $j \leq k$ nos dicen que $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}_{\{\ell\}}), \ldots, \mathfrak{M}_k(\mathcal{B}_{\{\ell\}})$ son conjuntos finitos. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{\{\ell\}} \restriction_{\mathbb{N}/n}$ es una barrera en $\mathbb{N}/n$ con $n = \max \cup_{i \leq k} \mathfrak{M}_i(\mathcal{B}_{\{\ell\}})$ y $n > \ell$. Nótese que todo $s \in \mathcal{B}_{\{\ell\}} \restriction_{\mathbb{N}/n}$ cumple que $|s| \geq k+1$. Luego, como $\mathfrak{M}_{k+1}(\mathcal{B})$ es infinito, existe $m \in \mathfrak{M}_{k+1}(\mathcal{B})$ tal que $m > n$. Tomamos algún $\{m, i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^{k+1}$ y consideramos el conjunto infinito $\{m, i_1, i_2, \ldots, i_k, i_k+1, i_k+2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}/n$. Por defininción de barrera, podemos encontrar $s \in \mathcal{B}_{\{\ell\}} \restriction_{\mathbb{N}/n}$ tal que $s \sqsubseteq \{m, i_1, i_2, \ldots, i_k, i_k+1, i_k+2, \ldots\}$. Pero dado que $|s| \geq k+1$ se tiene que $\{m, i_1, i_2, \ldots, i_k\} \sqsubseteq s$. Así $\{\ell\}^\frown s$ y $\{m, i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ pertenecen a $\mathcal{B}$. Una contradicción de la definición de barrera.

□

Corolario 4.14. *Si $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$ con orden menor a ω^ω, entonces $ord(\mathcal{B}) = \omega^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Dada $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que $ord(\mathcal{B}) < \omega^\omega$ y $ord(\mathcal{B}) \neq \omega^k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\omega^n < ord(\mathcal{B}) < \omega^{n+1}$. Por el

Teorema 4.13 los conjuntos $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ son finitos. Además, por contrapuesta del Lema 4.10, ningún $s \in \mathcal{B}$ cumple que $|s| \geq n+1$. En otras palabras, $|s| \leq n$ para toda $s \in \mathcal{B}$. Esto implica que $\mathfrak{M}_i$ es un conjunto infinito para algún $i \leq n$, lo cual es una contradicción. $\square$

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes que conectan a familias arbitrarias de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ con barreras, la demostración se puede encontrar en el libro [1].

Teorema 4.15 (de Galvin)**.** *Para cada $\mathcal{F}$ familia de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y todo $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que $\mathcal{F} \restriction_M$ es vacío o contiene una barrera.*

Una consecuencia directa del teorema anterior y la definición de barrera es:

Teorema 4.16 (de Ramsey en Barreras)**.** *Toda barrera tiene la propiedad de Ramsey no nula.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ y $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \{1, 2\}$ una coloración. Tomamos $B_i := \varphi^{-1}(i)$, la preimagen de i bajo φ, para cada $i \leq 2$. Por el Teorema de Galvin (Teorema 4.15) existe $M \in [N]^\omega$ tal que $B_1 \restriction_M$ es vacío o una barrera en M. Si $B_1 \restriction_M = \emptyset$, entonces $\mathcal{B} \restriction_M = B_2 \restriction_M$, y debido al Lema 4.5 sabemos que $\mathcal{B} \restriction_M$ es una barrera en M, se termina la demostración. Supongamos entonces que $B_1 \restriction_M$ es una barrera en M. Ya que por Lema 4.5 tenemos que $B \restriction_M$ es una barrera en M, el Lema 4.4 nos permite concluir que $B_1 \restriction_M = B \restriction_M$ y $B_2 \restriction_M = \emptyset$. $\square$

Por otro lado, motivados por la relevancia de las sucesiones bloque de una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach, introduciremos el siguiente concepto.

Definición 4.17. Dados $k \in \mathbb{N}$ y barreras $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k \subseteq FIN$ en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, definimos el conjunto

$$Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) := \{\{s_1, \ldots, s_k\} : \forall i \leq k \ (s_i \in \mathcal{B}_i) \text{ y } s_1 < s_2 < \cdots < s_k\},$$

y lo llamamos *la familia de bloques de barreras de la sucesión* $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$. Si $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \cdots = \mathcal{B}_k$, entonces denotamos brevemente a $Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ como $Bl^k(\mathcal{B}_1)$.

Ahora, extendemos la propiedad de Ramsey no nula a una familia de bloques de barreras.

Definición 4.18. Dados $q, k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Se dice que $Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ tiene la *propiedad de Ramsey no nula* si para toda coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \to \{1, \ldots, q\}$ existen $i \leq q$ y $M \in [N]^\omega$ tal que se cumple $Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M) \neq \emptyset$ y $\varphi\,(Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)) = \{i\}$.

El siguiente teorema del artículo [12] generaliza el Teorema de Ramsey.

Teorema 4.19 (de Ramsey en Bloques de Barreras)**.** *Dada una sucesión finita $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, la familia $Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ tiene la propiedad de Ramsey no nula.*

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Definimos la función $f : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \to \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ como $f(\{s_1, \ldots, s_k\}) = s_1{}^\frown s_2{}^\frown \cdots{}^\frown s_k$ para todo $\{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$. Es fácil ver que f es una biyección. Lo cual implica la existencia de su inversa f^{-1}.

Por otra parte, fijemos una coloración finita $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_k) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, q\}$ y consideremos la coloración $\varphi \circ f^{-1} : \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i \to \{1, \ldots, q\}$. Por el Lema 4.6 y el Teorema 4.16 encontramos $i \leq q$ y $M \in [N]^\omega$ tal que

$$(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i) \restriction_M \neq \emptyset \text{ y } (\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i) \restriction_M \subseteq (\varphi \circ f^{-1})^{-1}(i).$$

Como $(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i) \restriction_M = \bigoplus_{i=1}^k (\mathcal{B}_i \restriction_M)$ y f es una biyección, se tiene que $Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M) \neq \emptyset$ y $\varphi(Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)) = \{i\}$. □

5 Teorema de Ramsey en Bloques de Barreras para Analistas

En base a la noción de bloques de barreras y su propiedad de Ramsey no nula, que se introdujeron previamente, es natural pensar en su conexión con el Análisis Matemático. Esta idea se expone en [12] y es la que abordaremos en la presente sección, siguiendo las pautas asentadas en el apartado Teorema de Ramsey y Teorema de Ramsey para Analistas.

Teorema 5.1 (de Ramsey en Bloques de Barreras para Analistas)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión* *finita de barreras en* $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. *Para cada coloración* $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow X$ *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $M \in [N]^\omega$ *tal que*

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon$$

si $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$.

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Fijemos una coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow X$ y $\varepsilon > 0$, ambos arbitrarios. Como X es totalmente acotado, existen $q \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_q$ en X tal que $X = \bigcup_{i \le q} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Consideremos la partición $\{A_i : i \le q\}$ de X, donde

$$A_1 = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1) \quad \text{y} \quad A_i = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \setminus \Big(\bigcup_{j<i} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)\Big) \text{ para cada } 1 < i \le q.$$

Entonces podemos definir la función $\phi : X \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$, en el punto $x \in X$, como

$$\phi(x) = i \text{ si } x \in A_i \text{ para algún } i \le q.$$

Es claro que ϕ está bien definida y que

$$\phi \circ \varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$$

es una coloración finita. El Teorema de Ramsey en Bloques de Barreras (Teorema 4.19) nos garantiza que podemos hallar $i \le q$ y $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M) \subseteq (\phi \circ \varphi)^{-1}(i) = \varphi^{-1}(\phi^{-1}(i))$. Por consiguiente $\varphi\big(Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)\big) \subseteq \phi^{-1}(i) = A_i \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Lo cual significa que

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon$$

para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$. □

Mediante el teorema anterior y cierto proceso de diagonalización se obtiene una variación del Teorema 5.1, en donde los bloques de barreras resultantes se acercan asintóticamente entre sí.

Corolario 5.2. *Sean* (X, d) *un espacio métrico totalmente acotado,* $k \in \mathbb{N}$ *y* $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ *una sucesión de barreras en* $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. *Para cada coloración* φ :

$Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k) \longrightarrow X$ y cada sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$, existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que

$$d(\varphi(S),\varphi(T)) < \varepsilon_\ell, \text{ siempre que } \min(s_1 \cup t_1) = m_\ell \text{ para algún } \ell \in \mathbb{N},$$

para cualesquiera $S = \{s_1,\ldots,s_k\}$, $T = \{t_1,t_2\ldots,t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_M)$.

Demostración. Sean (X,d) un espacio métrico totalmente acotado, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Consideremos una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ y una coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k) \longrightarrow X$, arbitrarias. Por el Teorema 5.1, existe un conjunto $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $d(\varphi(S),\varphi(T)) < \varepsilon_1$ para todo $S,T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_1},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M_1})$. Pongamos $m_1 := \min(M_1)$. Supongamos que para todo $i < n$ con $n \in \mathbb{N}$ existe $M_{i+1} \in [M_i/m_i]^\omega$, donde $m_i := \min(M_i)$, que satisface que $d(\varphi(S),\varphi(T)) < \varepsilon_{i+1}$ para todo $S,T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_{i+1}},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M_{i+1}})$. Aplicando el Teorema 5.1 a $\varphi \restriction_{Bl(\mathcal{B}_1\restriction_{M_n/m_n},\ldots,\mathcal{B}_k\restriction_{M_n/m_n})}$ y a ε_{n+1}, encontramos un conjunto $M_{n+1} \in [M_n/m_n]^\omega$ tal que $d(\varphi(S),\varphi(T)) < \varepsilon_{n+1}$ para todo $S,T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_{n+1}},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M_{n+1}})$. Ponemos $m_{n+1} := \min(M_{n+1})$. De esta forma generamos una sucesión $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números naturales y una sucesión $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos infinitos de N, con las siguientes características:

1. $m_i := \min M_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

2. $M_1 \in [N]^\omega$ y $M_{i+1} \in [M_i/m_i]^\omega \subseteq [M_i]^\omega$ para cada $i \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $m_i < m_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

3. Para cada $i \in \mathbb{N}$, se cumple que $d(\varphi(S),\varphi(T)) < \varepsilon_i$ para todo $S,T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_i},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M_i})$

Ahora, tomemos $M := \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$. Notemos que para cada $S = \{s_1,\ldots,s_k\}$, $T = \{t_1,\ldots,t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_M)$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\min(s_1 \cup t_1) = m_\ell$. De ahí que $S,T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_\ell},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M_\ell})$ y

$$d(\varphi(S),\varphi(T)) < \varepsilon_\ell.$$

Por lo tanto, M es el conjunto buscado. □

De manera análoga a lo que se hizo en el Teorema 3.4, el Teorema 5.1 nos conduce a un tipo de convergencia de coloraciones de bloques de barreras a espacios métricos. Más aún, esta convergencia es una extensión de la expuesta en la Definición 3.6.

Definición 5.3. Sean (X, d) un espacio métrico, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Una coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow X$ converge a $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\varphi(S), x) < \varepsilon,$$

para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{N/\ell}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{N/\ell})$. Esta convergencia la denotaremos por el símbolo

$$\lim_{Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k)\ni S\longrightarrow\infty} \varphi(S) = x.$$

La compacidad de un espacio métrico nos asegura que toda coloración tiene una restricción convergente.

Corolario 5.4. *Sean (K, d) un espacio métrico compacto, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Para cada coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow K$ existen $M \in [N]^\omega$ y $x \in K$ tal que*

$$\lim_{Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k\restriction_M)\ni S\longrightarrow\infty} \varphi(S) = x.$$

Demostración. Sean (K, d) un espacio métrico compacto, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Fijemos una coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow K$. Por el Corolario 5.2, hallamos $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [N]^\omega$ tal que

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \frac{1}{2^\ell}, \text{ donde } \min(s_1 \cup t_1) = m_\ell \text{ para algún } \ell \in \mathbb{N},$$

para cada $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$. Por otra parte, como K es compacto y la familia $\big\{cl_K\big(\{\varphi(S) : S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/j}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/j})\}\big)\big\}_{j\in\mathbb{N}}$ posee la propiedad de intersección finita, podemos encontrar un punto

$$x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} cl_K\big(\{\varphi(S) : S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/j} \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/j})\}\big).$$

Ahora, probemos que la coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M) \longrightarrow K$ converge a x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^\ell} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in cl_K\big(\{\varphi(S) : S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{\ell-1}}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{\ell-1}})\}\big)$, existe $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{\ell-1}}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{\ell-1}})$ tal que $d(\varphi(T), x) < \frac{1}{2^\ell}$. Finalmente, se concluye que

$$\begin{aligned} d(\varphi(S), x) &\leq d(\varphi(S), \varphi(T)) + d(\varphi(T), x) \\ &< \frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{\ell-1}}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{\ell-1}})$. $\square$

6 Bases de Schauder

Uno de los temas más fascinantes del Análisis Funcional que actualmente han llamada mucho la atención a los expertos, es el estudio de los espacios de Banach que poseen una base de Schauder. Dentro de este tema, ha cobrado mucha relevancia el conocido Teorema de A. Brunel y L. Sucheston [2] del cual hablaremos en una futura sección. Para poder exponer dicho resultado, daremos algunos preliminares.

Definición 6.1. Una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se denomina una *base de Schauder* para $(X, \|\cdot\|)$ si, para cada vector $x \in X$, existe una única sucesión de números reales $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,$$

es decir, la serie converge a x. En general, decimos que una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $(X, \|\cdot\|)$ es *básica* si es una base de Schauder para la cerradura del subespacio vectorial que la sucesión genera, $[\{x_i : i \in \mathbb{N}\}]$. Además, dado $C \geq 1$, una sucesión básica $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es *C-incondicional* si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cada $(\varepsilon_i)_{i=1}^n \in \{1, -1\}^n$ la desigualdad

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq C\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i x_i\|$$

es válida para toda $(a_i)_{i=1}^n \in [1, -1]^n$.

No es difícil convencernos que toda sucesión básica de un espacio de Banach es linealmente independiente. También, vale la pena observar que todo espacio de Banach con base de Schauder tiene que ser separable. Pero no todo espacio de Banach separable tiene una base de Schauder tal y como lo estableció P. Enflo en su trabajo [8].

Enseguida, enunciamos algunos de los espacios de Banach clásicos que poseen una base de Schauder.

Ejemplo 6.2. La base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para cada uno de los siguientes espacios de Banach: $(\ell_p, \|\cdot\|_{\ell_p}$ con $p \in [1, \infty)$ y $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

En un espacio de Banach con una base de Schauder se pueden definir funcionales y operadores especiales que nos permiten estudiar sus propiedades y equiparlo con una nueva norma equivalente que resulta ser, en algunos caso, maś conveniente.

Definición 6.3. Dada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$ definimos:

- el *funcional coordenada n-ésima*, $x_n^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$, como $x_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = a_n$; y
- la *proyección n-ésima*, $P_n : X \longrightarrow X$, como $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

Se deduce directamente de la definición que:

- $x_n^*(x_i) = \delta_{n,i}$ para toda $n, i \in \mathbb{N}$,
- P_n es una proyección sobre el subespacio $S_n := P_n(X)$ de X generado por $\{x_i : i \leq n\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y
- $P_n \circ P_m = P_{\text{mín}\{n,m\}}$ para toda $n, m \in \mathbb{N}$.

Las ideas originales de las demostraciones de las siguientes propiedades que involucran a las funciones lineales x_n^*'s y P_n's pertenecen a S. Banach.

Lema 6.4. *Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Para cada $x \in X$, el número*

$$|||x||| := \sup\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

está bien definido, y $|||\cdot||| : X \to [0, \infty)$ es una norma en X que es equivalente a la norma original $\|\cdot\|$. En particular, $(X, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Fijamos $x \in X$ y escribimos $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Esto último significa que $P_n(x) \to x$ en la norma $\|\cdot\|$ y en consecuencia existe $C \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|P_n(x)\| \leq C$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De aquí se deducen las desigualdades siguientes

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n(x)\| \leq |||x||| = \sup\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Por las propiedades de la norma y el supremo nos podemos convencer que $|||\cdot|||$ es una norma en X. Ahora, demostraremos que $(X, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach. Para esto supongamos que $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, |||\cdot|||)$. Como

$$\|P_n(y_i) - P_n(y_j)\| \leq |||y_i - y_j|||,$$

para toda $i, j, n \in \mathbb{N}$, resulta que las sucesiones $\{(P_n(y_i))_{i\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\}$ son uniformemente Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$. Por lo cual, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in X$ tal que $\lim_{i\to\infty} P_n(y_i) = z_n$. Más aún, las sucesiones $\{(P_n(y_i))_{i\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\}$ convergen uniformemente en X. De aquí y de la desigualdad

$$\begin{aligned}\|z_n - z_m\| &\leq \|z_n - P_n(y_i)\| + \|P_n(y_i) - P_m(y_i)\| + \|P_m(y_i) - z_m\| \\ &\leq \|z_n - P_n(y_i)\| + \|P_n(y_i) - y_i\| + \|y_i - P_m(y_i)\| + \|P_m(y_i) - z_m\|,\end{aligned}$$

para cada $n, m, i \in \mathbb{N}$, se tiene que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy in $(X, \|\cdot\|)$. Por lo cual, existe $z \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, en la norma $\|\cdot\|$. Notemos que $z_n \in S_n$ y por lo cual $P_n(z_n) = z_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para probar que $\lim_{i\to\infty} y_i = z$, en la norma $|||\cdot|||$, necesitamos el siguiente resultado:

Afirmación: Existe una única sucesión $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tal que $z_n = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ y $z = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$.

Demostración de la Afirmación. Primero veamos que P_m es acotada (continua) en el espacio S_n de dimensión n para cualesquiera par de números enteros $m, n \in \mathbb{N}$. Esto se debe a que S_n es un espacio vectorial de dimensión finita y que todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes. De aquí, podemos deducir que P_m es acotada en S_n pues es una transformación lineal [5, p. 71-72]. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, por la continuidad de P_m en S_n, se cumple que

$$P_m(z_n) = P_m\big(\lim_{i\to\infty} P_n(y_i)\big) = \lim_{i\to\infty} P_m\big(P_n(y_i)\big) = \lim_{i\to\infty} P_{\min\{m,n\}}(y_i) = z_{\min\{m,n\}}.$$

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y pongamos $z_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^n x_i$. Entonces tenemos que $a_1^n x_1 = P_1(z_n) = z_1 = a_1^1 x_1$ y por consiguiente $a_1^n = a_1^1$. Y de aquí se sigue que

$$a_1^1 x_1 + a_2^n x_2 = a_1^n x_1 + a_2^n x_2 = P_2(z_n) = z_2 = a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 = a_1^1 x_1 + a_2^2 x_2,$$

de donde obtenemos que $a_2^n = a_2^2$. Inductivamente podemos probar que $a_i^n = a_i^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $b_n := a_n^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que $z_n = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$. Así, por la convergencia y por la propiedad de unicidad de la base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, concluimos que $z = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$.

Por la afirmación y la convergencia uniforme de $\{(P_n(y_i))_{i\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\}$, se deduce que

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} |||y_i - z||| &= \lim_{i\to\infty} \sup\{\|P_n(y_i) - P_n(z)\| : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \lim_{i\to\infty} \sup\{\|P_n(y_i) - z_n\| : n \in \mathbb{N}\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Con estó se prueba que $(X, ||| \cdot |||)$ es un espacio de Banach. Finalmente, consideremos la función identidad $Id : (X, ||| \cdot |||) \to (X, \| \cdot \|)$. Ya que $\|x\| \leq |||x|||$ para todo $x \in X$, se aplica el Teorema de la Función Abierta y se concluye que las normas $||| \cdot |||$ y $\| \cdot \|$ son equivalentes. □

Teorema 6.5. *Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *P_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$C := \sup\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, es decir, las proyecciones $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ son uniformemente acotadas.*
3. *x_n^* es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Del Lema 6.4 sabemos que las normas $||| \cdot |||$ y $\| \cdot \|_X$ son equivalentes, es decir, existe $C_0 > 0$ tal que $|||x||| \leq C_0\|x\|_X$ para cada $x \in X$. Lo cual implica que P_n es acotada y $\|P_n\| \leq C_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, tenemos que $C := \sup\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\} \leq C_0$. Por otro lado, como $x_1^* = P_1$ y $x_n^* = P_n - P_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}/1$, se puede concluir que x_n^* es acotada para toda $n \in \mathbb{N}$. □

Al número C se le conoce como la *constante de base* de la sucesión básica $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Además, observemos que

$$\|(P_n \circ P_n)(x)\|_X = \|P_n(x)\|_X \leq \|P_n\|\|P_n(x)\|_X$$

para toda $x \in X$ y toda $n \in \mathbb{N}$. De donde podemos ver que $C \geq 1$ y $\|P_n\| \geq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. A una base de Schauder con constante 1 también se le denomina *base monótona*. Por ejemplo, la base canónica para ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$, es una base monóntona. Además, de la prueba del Lema 6.4, resulta que una base de Schauder para cualquier espacio de Banach tiene constante de base 1 bajo la norma equivalente $|||\cdot|||$.

Ahora, presentamos una caracterización de las bases de Schauder que nos permite ver de manera sencilla cuando una sucesión es básica, la cual también es una aportación de Banach.

Teorema 6.6. *Dada una sucesión* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de elementos no cero en un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$, *las siguientes dos propiedades son equivalentes:*

(1) $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *es base de Schauder para* $(X, \|\cdot\|)$.

(2) $X = [\{x_i : i \in \mathbb{N}\}]$ *y existe un* $C \geq 1$ *tal que:*

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq C \|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| \tag{2}$$

para todo $n \leq m$ *y* $(a_i)_{i=1}^{m} \in [-1, 1]^m$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Para cualquier $x \in X$, como $(x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $(X, \|\cdot\|)$, sabemos que $P_n(x) \to x$. Por esta razón el espacio generado por $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ es denso en $(X, \|\cdot\|)$. Después, por el Teorema 6.5, notemos que

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| = \left\|P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)\right\| \leq (\sup\{\|P_k\| : k \in \mathbb{N}\}) \|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|,$$

para todo $n \leq m$ y $(a_i)_{i=1}^{m} \in [-1, 1]^m$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Denotemos con S el subespacio generado por $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. La primera condición nos dice que S es denso en X. Ahora demostraremos que la segunda condición implica la independencia lineal de $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Supongamos que $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y $(a_i)_{i=1}^{m} \in \mathbb{R}^m$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(a_i)_{i=1}^{m} \in [-1, 1]^m$. Observemos

que

$$\begin{aligned}
|a_n|\|x_n\| &= \Big\|P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) - P_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)\Big\| \\
&\leq \Big\|P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)\Big\| + \Big\|P_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)\Big\| \\
&\leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| + \|\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\| \\
&\leq 2C\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|,
\end{aligned}$$

para todo $n \leq m$. Por lo anterior se deduce que $|a_n|\|x_n\| = 0$ para toda $n \leq m$. Como $x_i \neq 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $a_n = 0$ para toda $n \leq m$. De aquí que $\{x_i : i \leq m\}$ es linealmente independiente. Para toda $n \in \mathbb{N}$, definamos la función $P'_n : S \to X$ como

$$P'_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_i x_i & \text{si } m < n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & \text{si } m \geq n \end{cases} \quad \text{para todo } \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \in S, \text{ con } m \in \mathbb{N}.$$

Por la independencia lineal de $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, la función P'_n es una proyección lineal bien definida para toda $n \in \mathbb{N}$. Más aún, la propiedad (2) asegura que cada P'_n tiene norma a lo más C en S. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única función $P_n : X \to S_n$ lineal y acotada en X que extiende a P'_n, definida como $P_n(x) = \lim_{i\to\infty} P'_n(y_i)$ para toda $x \in X$ donde $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S que converge a x. La definición de P_n y las propiedades de P'_n implican que P_n sea una proyección, $P_m \circ P_n = P_{\min\{m,n\}}$ y $\|P_n\| \leq C$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Ahora, solo falta probar que $P_n(x) \to x$ para poder concluir que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de X. Dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $s = \sum_{i=1}^{m} b_i x_i \in S$ tal que $\|x - s\| < \frac{\epsilon}{C+1}$ ya que S es denso en X. Entonces, por definición y continuidad de P_n, para toda $n \geq m$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\|x - P_n(x)\| &\leq \|x - s\| + \|s - P_n(s)\| + \|P_n(s) - P_n(x)\| \\
&\leq \|x - s\| + \|s - s\| + \|P_n\|\|s - x\| \\
&= \big(\|P_n\| + 1\big)\|x - s\| < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

El corolario que sigue nos garantiza que toda subsucesión de una sucesión básica es básica.

Corolario 6.7. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, cuya constante de base es $C \geq 1$. Para toda $s = \{s(1), \ldots, s(m)\} \in FIN$ y para toda $(a_i)_{i=1}^m \in [-1,1]^m$ se cumple que*

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{s(i)}\| \leq C \|\sum_{i=1}^{m} a_i x_{s(i)}\| \quad \textit{para toda } 1 \leq n \leq m.$$

Demostración. Consideramos $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, cuya constante de base es $C \geq 1$. Fijamos $s = \{s(1), \ldots, s(m)\} \in FIN$ y $(a_i)_{i=1}^m \in [-1,1]^m$. Después, definimos $(a'_j)_{j=1}^{s(m)} \in [-1,1]^{s(m)}$ como

$$a'_j = \begin{cases} a_i & \text{si } j = s(i) \text{ para algún } 1 \leq i \leq m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{para cada } j \leq s(m).$$

Como la constante de base de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es C y $s(n) \leq s(m)$ para todo $1 \leq n \leq m$, resulta que

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{s(i)}\| = \|\sum_{j=1}^{s(n)} a'_j x_j\| \leq C\|\sum_{j=1}^{s(m)} a'_j x_j\| = C\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_{s(i)}\|.$$

$\square$

El siguiente criterio nos dice cuando dos sucesiones se comportan de manera análoga.

Definición 6.8. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones básicas en los espacios de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, respectivamente. Se dice que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es *$C-$equivalente* a $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si existen constantes reales positivas A y B con $AB \leq C$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple la condición

$$A^{-1}\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|_X \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\|_Y \leq B\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|_X,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$. Diremos que las sucesiones básicas $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si existe una constante real positiva C tal que estas son $C - equivalentes$.

Dado un vector en un espacio de Banach el cual posee una base de Schauder, es natural asignar a este el conjunto de índices con coeficientes no cero de su única representación en esta base.

Definición 6.9. Para cada $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ con base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, el *soporte* de x (con respecto a $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$) es el conjunto

$$supp(x) := \{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}.$$

El concepto anterior nos permitirá enunciar una clase de sucesiones muy útiles en el estudio de las bases de Schauder.

Definición 6.10. Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica. Una sucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $[\{x_i : i \in \mathbb{N}\}]$ es una *subsucesión bloque* de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y se denota como $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \preceq (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si el soporte de y_i es finito para cada $i \in \mathbb{N}$ y

$$supp(y_1) < supp(y_2) < \cdots < supp(y_n) < \cdots .$$

Recordemos que $c_{00} = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |supp_{\mathbb{R}}(x)| < \omega\} \subseteq c_0$ es un espacio vectorial normado con la norma $\|\cdot\|_\infty$. El siguiente teorema determina una relación entre cualquier espacio de Banach con base de Schauder y el espacio c_{00}.

Teorema 6.11 (Folklore)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Definimos*

$$|||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i||| := \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|_X$$

para cada $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in c_{00}$. Entonces $|||\cdot||| : c_{00} \to [0, \infty)$ es una norma en c_{00} y la completación de este espacio vectorial normado $(c_{00}, |||\cdot|||)$ es isométricamente isomorfo a $(X, \|\cdot\|_X)$. Además, la base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de c_{00} resulta ser una base de Schauder de esta completación.

El teorema anterior establece que todo espacio de Banach con base de Schauder es isomorfo a una completación de c_{00} bajo cierta norma. Esto proporciona una metodología para encontrar espacios de Banach con base de Schauder especiales, la cual consiste en equipar con una norma adecuada al espacio vectorial c_{00} y tomar su completación. Un ejemplo del uso de esta metodología es la obtención del famoso espacio de Tsirelson, el cual se presentará en una sección posterior de este artículo junto con algunas de sus propiedades más importantes. Enseguida se exponen dos resultados conocidos (uno de ellos es el famoso Teorema de Distorsión de James) que serán empleados en el análisis de dicho espacio.

La demostración del siguiente resultado puede ser consultada en [13, Cor. I.1.19].

Lema 6.12. *Dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ con una base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y que posee una copia isomorfa a c_0 ($\ell_p, 1 \leq p < \infty$), existe una subsucesión bloque de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ equivalente a la base canónica de c_0 ($\ell_p, 1 \leq p < \infty$, respectivamente).*

Teorema 6.13 (de James)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con una base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Si X contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una subsucesión bloque normalizada $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que para cada $k \in \mathbb{N}$ satisface que*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sum_{i=1}^{k}|a_i| \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i z_i\| \leq \sum_{i=1}^{k}|a_i|,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Demostración. Supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con una base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y que posee un subespacio isomorfo a ℓ_1. Gracias al Lema 6.12, obtenemos una subsucesión bloque $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $0 < A \leq B < \infty$ tales que cada $k \in \mathbb{N}$ satisface que

$$A\sum_{i=1}^{k}|a_i| \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i u_i\| \leq B\sum_{i=1}^{k}|a_i|,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Consideremos

$$C = \sup\Big\{D \leq B : \exists (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \preceq (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \forall k \in \mathbb{N} \forall (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k \\ \big(\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\| \geq D\sum_{i=1}^{k}|a_i|\big)\Big\}.$$

Fijamos $\varepsilon > 0$. Luego elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\frac{C-\delta}{C+\delta} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Entonces, por propiedad del supremo, existe una subsucesión bloque $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que para cada $k \in \mathbb{N}$ cumple que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\| \geq (C-\delta)\sum_{i=1}^{k} |a_i|, \text{ para toda } (a_i)_{i=1}^{k} \in [-1,1]^k. \tag{3}$$

Por otra parte, de manera inductiva podemos construir una sucesión $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en la familia FIN, con $s_i < s_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y una sucesión $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $[-1,1]$ tales que

$$\|\sum_{j\in s_i} b_j y_j\| < (C+\delta)\sum_{j\in s_i} |b_j| \quad \text{para toda } i \in \mathbb{N}.$$

Efectivamente, supongamos que encontramos una sucesión finita $(s_i)_{i=1}^{n}$ en la familia FIN, con $s_i < s_{i+1}$ para cada $i \leq n-1$, y una sucesión $(b_i)_{i=1}^{\ell}$ en $[-1,1]$, donde $\ell = \text{máx}(s_n)$, para los cuales la desigualdad

$$\|\sum_{j\in s_i} b_j y_j\| < (C+\delta)\sum_{j\in s_i} |b_j|$$

es válida para todo $i \leq n$. Notemos que $(y_i)_{i\in\mathbb{N}/\ell}$ es una subsucesión bloque de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Como $C+\delta > C$, para algún $k \in \mathbb{N}$ y alguna $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1,1]^k$ resulta que $\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{\ell+i}\| < (C+\delta)\sum_{i=1}^{k} |a_i|$. Tomamos

$$s_{n+1} = \{\ell+1, \ell+2, \ldots, \ell+k\} \quad \text{y} \quad (b_i)_{i=\ell+1}^{\ell+k} = (a_i)_{i=1}^{k}.$$

Ahora, consideremos la subsucesión bloque normalizada $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definida como

$$z_i = \frac{\sum_{j\in s_i} b_j y_j}{\|\sum_{j\in s_i} b_j y_j\|} \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i z_i\| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \; \|z_i\| = \sum_{i=1}^{k} |a_i|,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$, y por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$ se deduce que

$$\|\sum_{i=1}^k a_i z_i\| = \|\sum_{i=1}^k a_i \left(\frac{\sum_{j\in s_i} b_j y_j}{\|\sum_{j\in s_i} b_j y_j\|} \right)\| \geq (C-\delta) \sum_{i=1}^k |a_i| \left(\frac{\sum_{j\in s_i} |b_j|}{\|\sum_{j\in s_i} b_j y_j\|} \right)$$
$$\geq (C-\delta) \sum_{i=1}^k \frac{|a_i|}{C+\delta} = \frac{C-\delta}{C+\delta} \sum_{i=1}^k |a_i| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^k |a_i|,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. □

7 Conjuntos Normantes en c_{00}

Recordemos que el Teorema 6.11 establece que todo espacio de Banach que posee una base de Schauder es isométricamente isomorfo a la completación del espacio vectorial c_{00} junto con una norma. Por esta razón el objetivo principal de este capítulo es describir un método para construir normas para el espacio vectorial c_{00}. Dicho método es el que más se usa en Análisis Funcional y consiste esencialmente en la búsqueda de un conjunto de funcionales en c_{00}^*, donde al espacio c_{00} es equipado con la norma infinito, que nos permiten llevar a cabo nuestra tarea. Muestra de esto será la construcción del espacio de Tsirelson que se mostrará a detalle en la onceava sección.

Sabemos, por una consecuencia del famoso Teorema de Hahn-Banach [5, Cor. 6.7], que para todo espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se cumple que $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in B_1(X^*)\}$ para cada $x \in X$. Generalizando este hecho introduciremos la siguiente noción.

Definición 7.1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Un conjunto no vacío $W \subseteq X^*$ es un *conjunto normante* de X si $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in W\}$ para cada $x \in X$.

Cabe mencionar que en otros trabajos se condiciona que el espacio vectorial X en cuestión sea Banach y el conjunto W sea acotado (ver por ejemplo [4]).

La defindión de conjunto normante motiva un método de construcción de nuevas seminormas que en algunos casos inducen nuevos espacios de Banach con propiedades predeterminadas:

Definición 7.2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio vectorial normado. Decimos que un subconjunto no vacío $W \subseteq X^*$ es un *conjunto seminormante de* X si se cumple que $sup\{|f(x)| : f \in W\} < \infty$ para toda $x \in X$.

Si $W \subseteq X^*$ es un conjunto seminormante, entonces para cada $x \in X$ definimos $\|x\|_W := sup\{|f(x)| : f \in W\}$. No es difícil probar que la función $\|\cdot\|_W : X \to [0, +\infty)$ es una seminorma en X.

Observemos que si $W \subseteq X^*$ es un conjunto acotado por $r \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\|x\|_w \leq r\|x\| \text{ para cada } x \in X. \tag{4}$$

Para nuestros propósitos futuros es importante resaltar la condición siguiente:

$\|\cdot\|_W$ es una norma en X si y solo si para cada $x \in X \backslash \{0\}$ existe un funcional $f \in W$ tal que $f(x) \neq 0$.

Por lo anterior convenimos, de manera muy general, denominar *conjunto normante de* X a cada conjunto seminormante $W \subseteq X^*$ cuando $\|\cdot\|_W$ es una norma. Si $W \subseteq X^*$ es un conjunto normante, denotamos por $(X_W, \|\cdot\|_W)$ a la completación de $(X, \|\cdot\|_W)$ y por X_W^* al espacio dual de la completación.

Hasta este punto es posible que exista confusión sobre las dos definiciones de conjuntos normantes que se han presentado. La primera hace referencia a la norma ya existente de un espacio normado, y la segunda nos proporciona una norma, sobre un espacio normado, posiblemente distinta a la original. Sin embargo, el lema siguiente nos permite establecer una conexión entre ellas.

Lema 7.3. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $W \subseteq X^*$ *un conjunto seminormante que genera una norma para* X. *Entonces para cada* $f \in W$ *existe una única* $\widetilde{f} \in X_W^*$ *tal que* $\widetilde{f}(x) = f(x)$ *para toda* $x \in X$ *y* $\|\widetilde{f}\| \leq 1$. *Más aún, si* $\widetilde{W} := \{\widetilde{f} \in X_W^* : f \in W\}$, *entonces* $\|x\|_W = \|x\|_{\widetilde{W}}$ *para toda* $x \in X_W$.

Demostración. Fijemos una función $f \in W$. Por definición se cumple que $|f(x)| \leq \|x\|_W$ para toda $x \in X$. Lo cual implica que $f : (X, \|\cdot\|_W) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es una función acotada y $\|f\| \leq 1$. Por otro lado, el Teorema de Hahn Banach para espacios normados nos asegura la existencia de $\widetilde{f} \in X_W^*$ tal que $\|f\| = \|\widetilde{f}\| \leq 1$ y $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para toda $x \in X$. La unicidad de $\widetilde{f}$ es consecuencia de su continuidad y de que X es un conjunto denso en

X_W. Ahora, considerando el conjunto $\widetilde{W} := \{\widetilde{f} \in X_W^* : f \in W\}$, vamos a demostrar que $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_{\widetilde{W}}$ sobre el espacio vectorial X_W. Sea $x \in X_W$, como X es denso en X_W, entonces existe $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_i \to x$ bajo la norma $\|\cdot\|_W$. Observemos que

$$\begin{aligned}\|x\|_W &= \lim_{i\to\infty} \|x_i\|_W = \lim_{i\to\infty} \sup\{|f(x_i)| : f \in W\} \\ &= \lim_{i\to\infty} \sup\{|\widetilde{f}(x_i)| : \widetilde{f} \in \widetilde{W}\} = \sup\{|\widetilde{f}(x)| : \widetilde{f} \in \widetilde{W}\} = \|x\|_{\widetilde{W}}.\end{aligned}$$

Como $x \in X_W$ es arbitraria, se concluye que $\|x\|_W = \|x\|_{\widetilde{W}}$ para toda $x \in X_W$. □

Del lema anterior podemos identificar W con $\widetilde{W}$ y así considerar a W como un conjunto normante, según la definición 7.1, del espacio de Banach $(X_W, \|\cdot\|_W)$.

Regresando a nuestro objetivo principal de este capítulo, necesitamos recordar la definición de producto interno.

Definición 7.4. El *producto interno* de cualesquiera dos elementos $x, y \in c_{00}$ es el número real $< x, y > := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, donde $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Mediante el producto interno y los elementos del mismo espacio vectorial c_{00} podemos generar funcionales sobre $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$. En efecto, para $x \in c_{00}$ se define $x^* : c_{00} \to \mathbb{R}$ como

$$x^*(y) = < x, y > \text{ para cada } y \in c_{00}.$$

Observemos que

$$|x^*(y)| \leq \sum_{i\in supp(x)} |x_i||y_i| \leq \|y\|_\infty \sum_{i\in supp(x)} |x_i| \leq k\|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

para todo $y \in c_{00}$, donde $k = |supp(x)|$. Por lo tanto, x^* es un funcional lineal acotado y pertenece a $B_1((c_{00}, \|\cdot\|_\infty)^*)$ si $\|x\|_\infty \leq 1/k$.

Por otra parte, existe una correspondencia entre el conjunto FIN y el conjunto $c_{00} \cap \{0,1\}^{\mathbb{N}}$: A cada $s \in FIN$ lo asociamos con el elemento $\sum_{i\in s} e_i$. De esta manera podemos considerar a cada $s \in FIN$ como un elemento en c_{00}. Observemos que al tomar el espacio vectorial c_{00} con la norma $\|\cdot\|_{\ell_1}$, se obtiene que $|(\sum_{i\in s} e_i)^*(x)| = |\sum_{i\in s} x_i| \leq \|x\|_{\ell_1}$ para todo $x \in c_{00}$ y $s \in FIN$.

En nuestros futuros ejemplos para garantizar que obtengamos normas bastará con que suponer que nuestro conjunto seminormante W contiene al conjunto $G_0 := \{\pm e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$, que está contenido en $B_1((c_{00}, \|\cdot\|_\infty)^*)$. De ahora en adelante la completación de c_{00} con la norma $\|\cdot\|_W$ será denotada por X_W para hacer énfasis en el conjunto normante. A continuación enlistamos algunos ejemplos de normas que vienen de conjuntos normantes:

1. Si $W = G_0$, entonces $(X_W, \|\cdot\|_W)$ es isométricamente isomorfo a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

2. Si $W = \{\sum_{i\in s} \pm e_i^* \ : s \in FIN\}$, entonces $(X_W, \|\cdot\|_W)$ es isométricamente isomorfo a $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$.

3. Si $W = \{\sum_{i=n}^{\infty} e_i^* : n \in \mathbb{N}\}$, $(X_W, \|\cdot\|_W)$ es isométricamente isomorfo a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Algunas veces resulta difícil identificar la completación X_W de c_{00} y sus propiedades partiendo del conjunto normante W. Mientras el Teorema 6.11 afirma que todo espacio de Banach con base de Schauder es isomemétrico a la completación de alguna norma de c_{00}, el siguiente resultado nos permite describir los elementos de X_W para algunos casos.

Teorema 7.5. *Si $\|\cdot\|$ es una norma definida en c_{00} en la cual la base canónica es $1-$ básica. Entonces la completación resulta ser $\overline{(c_{00}, \|\cdot\|)} = (\mathscr{C}, |||\cdot|||)$, donde*

$$\mathscr{C} := \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\sum_{i=1}^{n} a_i e_i)_{n=1}^{\infty} \text{ es una sucesión de Cauchy en } (c_{00}, \|\cdot\|)\} \text{ y}$$

$$|||(a_i)_{i=1}^{\infty}||| := \limsup \Big\{ \| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \| : n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Demostración. Primero demostremos que el espacio normado $(\mathscr{C}, |||\cdot|||)$ es completo. Dado $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy donde $\alpha_\lambda = (a_i^\lambda)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}$ para toda $\lambda \in \mathbb{N}$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|||\alpha_\lambda - \alpha_\gamma||| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } \lambda, \gamma \geq N.$$

Definamos $s_k = \sup\{\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^\lambda - a_i^\gamma)e_i\| : k \leq n\}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es 1-básica tenemos que

$$s_k = s_t \text{ para cada } k, t \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

y en consecuencia

$$\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^\lambda - a_i^\gamma)e_i\| \leq |||\alpha_\lambda - \alpha_\gamma||| \text{ para toda } n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Por lo tanto, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |a_j^\lambda - a_j^\gamma| \; \|e_j\| &= \|(a_j^\lambda - a_j^\gamma)e_j\| \\ &\leq \|\sum_{i=1}^{j}(a_i^\lambda - a_i^\gamma)e_i\| + \|\sum_{i=1}^{j-1}(a_i^\lambda - a_i^\gamma)e_i\| \\ &< \varepsilon \text{ si } \lambda, \gamma \geq N. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que, para toda $i \in \mathbb{N}$, $(a_i^\gamma)_{\gamma\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Recordemos que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $a_i \in \mathbb{R}$ tal que $(a_i^\gamma)_{\gamma\in\mathbb{N}}$ converge a a_i. Consideremos $\alpha = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, vamos a demostrar que $\alpha \in \mathscr{C}$. Observemos que, gracias a (6),

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=n+1}^{m}(a_i^\lambda - a_i^\gamma)e_i\| &= \|\sum_{i=1}^{n}(a_i^\lambda - a_i^\gamma)e_i - \sum_{i=1}^{m}(a_i^\lambda - a_i^\gamma)e_i\| \\ &\leq \|\sum_{i=1}^{n}(a_i^\lambda - a_i^\gamma)e_i\| + \|\sum_{i=1}^{m}(a_i^\lambda - a_i^\gamma)e_i\| \\ &< \varepsilon \text{ si } \lambda, \gamma \geq N \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N} \text{ con } n < m. \end{aligned}$$

Haciendo tender a λ a infinito, y por continuidad de la norma $\|\cdot\|$ y la suma de vectores, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=n+1}^{m}(a_i - a_i^\gamma)e_i\| &= \|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_i^\gamma)e_i - \sum_{i=1}^{m}(a_i - a_i^\gamma)e_i\| \\ &< \varepsilon \text{ si } \gamma \geq N \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N} \text{ con } n < m. \end{aligned}$$

Se deduce que $(a_i - a_i^N)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}$, y como $\mathscr{C}$ es un espacio vectorial $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i - a_i^N)_{i\in\mathbb{N}} + (a_i^N)_{i\in\mathbb{N}}$ está en $\mathscr{C}$. Para demostrar que $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ converge a

α hacemos tender a γ a infinito en (6) y, por continuidad, tenemos que $\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^{\lambda}-a_i)e_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para toda $\lambda \geq N$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}
|||(a_i^{\lambda})_{i\in\mathbb{N}}-(a_i)_{i\in\mathbb{N}}||| &= \text{lím sup}\left\{\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^{\lambda}-a_i)e_i\| : n\in\mathbb{N}\right\}\\
&= \sup\left\{\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^{\lambda}-a_i)e_i\| : n\in\mathbb{N}\right\} \qquad \text{por (5)}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \text{ para toda } \lambda \geq N.
\end{aligned}$$

Dado que la sucesión de Cauchy $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ es arbitraria, concluimos que $(\mathscr{C}, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach.

Ahora, definamos $\phi : (c_{00}, \|\cdot\|) \to (\mathscr{C}, |||\cdot|||)$ como

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = (a_i)_{i=1}^{\infty} \text{ para cada } \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in c_{00}.$$

Es fácil ver que ϕ es una transformación lineal. Más aún, como $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $1-$básica, ϕ es una isometría:

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\| = |||\phi(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i)||| \text{ para todo } \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in c_{00},$$

Sea $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ elemento en $\mathscr{C}$, entonces $((a_i)_{i=1}^{n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de $\mathscr{C}$ donde $(a_i)_{i=1}^{n}$ pertenece a $\phi(c_{00})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición del conjunto $\mathscr{C}$ y que ϕ es una isometría, $((a_i)_{i=1}^{n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $(\mathscr{C}, |||\cdot|||)$. De hecho, se puede probar que $((a_i)_{i=1}^{n})_{n=1}^{\infty}$ converge a $(a_i)_{i=1}^{\infty}$. Por lo tanto, $\phi(c_{00})$ es denso en $\mathscr{C}$. Finalmente, debido a que la completitud de un espacio normado es única salvo isomorfismo isométrico, resulta que $\overline{(c_{00}, \|\cdot\|)} = (\mathscr{C}, |||\cdot|||)$. $\square$

A continuación introducimos el espacio de Schreier, el cual es un claro ejemplo de la utilidad de las barreras en la creación de espacios de Banach que poseen base de Schauder.

Definición 7.6. Recordemos que la barrera de Schreier $\mathcal{S}$ es igual al conjunto $\{s \in FIN : |s| = \text{mín}(s)\}$. El espacio de Schreier es la completación de $(c_{00}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$, donde la norma está dada por

$$\|x\|_{\mathcal{S}} = \sup\{\sum_{i \in s} |a_i| : s \in \mathcal{S}\}$$

para cada $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ en c_{00}. Directamente de la definición de la norma se tiene que la base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para la completación de $(c_{00}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$. Además, una de las características principales de este espacio es que no contiene algún subespacio isomorfo a ℓ_1. Sin embargo, el modelo disperso generado por su base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es isomorfo a ℓ_1.

Como una generalización del espacio de Schreier se propone lo siguiente:

Definición 7.7. Sean $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ y $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base canónica del espacio vectorial c_{00}. Definimos dos normas $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ y $|||\cdot|||_{\mathcal{B}}$ sobre el espacio c_{00} mediante las formulas

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \sup\{\sum_{i \in s} |a_i| : s \in \mathcal{B}\} \text{ y}$$

$$|||x|||_{\mathcal{B}} = \sup\{|\sum_{i \in s} a_i| : s \in \mathcal{B}\}, \text{ para todo } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in c_{00}.$$

A la completación del espacio normado $(c_{00}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ se le conoce como el $\mathcal{B}-$*Espacio de Schreier* y se denota por $S_{\mathcal{B}}$.

Se demostrará en el Teorema 7.9 que las dos normas previas son equivalentes. Es por esto que no hay distinción en el uso de una u otra. Para entender este espacio primero daremos a conocer algunas de sus propiedades.

Lema 7.8. *Para toda $\mathcal{B}$ barrera en $\mathbb{N}$, la base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ del espacio vectorial c_{00} es una base mónotona de Schauder para $S_{\mathcal{B}}$. Más aún, la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $1-$incondicional.*

Demostración. Consideremos el espacio de Banach $(S_{\mathcal{B}}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ donde $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$. Por definición $\langle\{e_i : i \in \mathbb{N}\}\rangle$ es un conjunto denso en $S_{\mathcal{B}}$ bajo la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Ahora, fijemos $m \in \mathbb{N}$ y $(a_i)_{i=1}^{m} \in [-1,1]^m$. Como $\{1,\ldots,n\} \cap s \subseteq \{1,\ldots,m\} \cap s$ para toda $s \in \mathcal{B}$ y cada $n \leq m$, se deduce que

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_{\mathcal{B}} \leq \|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\|_{\mathcal{B}} \text{ para cualquier } n \leq m.$$

Por el Teorema 6.6, podemos concluir que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $S_\mathcal{B}$ con constante 1. Por otro lado, notemos que $\sum_{i\in s}|\pm a_i| = \sum_{i\in s}|a_i|$ para todo $s\in\mathcal{B}$ y para cada $\sum_{i=1}^{\infty} a_ie_i \in c_{00} \subseteq S_\mathcal{B}$. Lo cual implica que

$$\|\sum_{i=1}^{m} \pm a_ie_i\|_\mathcal{B} = \|\sum_{i=1}^{m} a_ie_i\|_\mathcal{B},$$

para cualquier $m\in\mathbb{N}$ y toda $(a_i)_{i=1}^m \in [-1,1]^m$. De esta manera se prueba que la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $1-$incondicional. □

Veamos que las normas dadas en la Definición 7.7 se pueden obtener mediante un conjunto normante y el vínculo que existe entre ellas.

Para cada conjunto infinito $\mathcal{F}\subseteq FIN$ definimos los conjuntos:

$$W_\mathcal{F} = \{\sum_{i\in s} e_i^* : s\in\mathcal{F}\} \text{ y } W_\mathcal{F}^\pm = \{\sum_{i\in s} \pm e_i^* : s\in\mathcal{F}\}.$$

Teorema 7.9. *Para cada barrera $\mathcal{B}$ en $\mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *Para cada $x\in S_\mathcal{B}$ se satisface que $|||x|||_\mathcal{B} \le \|x\|_\mathcal{B} \le 2|||x|||_\mathcal{B}$, es decir, las normas son equivalentes.*
2. *Para cada $x\in S_\mathcal{B}$ resulta que $\|x\|_\mathcal{B} = \|x\|_{W_\mathcal{B}^\pm}$ y $|||x|||_\mathcal{B} = \|x\|_{W_\mathcal{B}}$.*
3. *La sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder 2-incondicional para $(S_\mathcal{B}, |||\cdot|||_\mathcal{B})$.*

Demostración. 1. Basta probar que para cada $x=\sum_{i=1}^{\infty} a_ie_i \in c_{00}$ se cumple la desigualdad $|||x|||_\mathcal{B} \le \|x\|_\mathcal{B} \le 2|||x|||_\mathcal{B}$. Fijemos $x=\sum_{i=1}^{\infty} a_ie_i \in c_{00}$ con $w = supp(x)$. Por la desigualdad del triángulo sabemos que

$$|\sum_{i\in s} a_i| \le \sum_{i\in s} |a_i| \text{ para todo } s\in\mathcal{B}.$$

Gracias a lo anterior y a la definición de las normas se puede inferir que

$$|||x|||_\mathcal{B} \le \|x\|_\mathcal{B}.$$

Por otro lado, tomamos $s \in \mathcal{B}$ y consideramos los conjuntos $t = \{i \in s : a_i \geq 0\}$ y $r = s \setminus t$. Entonces se tiene que

$$\sum_{i\in s} |a_i| = \sum_{i\in t} |a_i| + \sum_{i\in r} |a_i| = |\sum_{i\in t} a_i| + |\sum_{i\in r} a_i|.$$

Como $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$, existen $s_1, s_2 \in \mathcal{B}$ tal que

$$t \sqsubseteq s_1 \sqsubseteq (\mathbb{N}/\max(s \cup w)) \cup t \text{ y } r \sqsubseteq s_2 \sqsubseteq (\mathbb{N}/\max(s \cup w)) \cup r.$$

En consecuencia, se cumple que

$$\sum_{i\in s} |a_i| = |\sum_{i\in t} a_i| + |\sum_{i\in r} a_i| = |\sum_{i\in s_1} a_i| + |\sum_{i\in s_2} a_i|.$$

Lo cual nos permite deducir que

$$\|x\|_{\mathcal{B}} \leq 2|||x|||_{\mathcal{B}}.$$

Como $x \in c_{00}$ es arbitrario, se concluye que $||| \cdot |||_{\mathcal{B}} \leq \| \cdot \|_{\mathcal{B}} \leq 2||| \cdot |||_{\mathcal{B}}$.

2. Primero demostremos que $|||x|||_{\mathcal{B}} = \|x\|_{W_{\mathcal{B}}}$ para cada $x \in c_{00}$. Fijemos $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ en el espacio c_{00}. Observemos que para todo $s \in \mathcal{B}$ tenemos que

$$|\sum_{i\in s} a_i| = |\sum_{i\in s} e_i^*(x)| = |(\sum_{i\in s} e_i^*)(x)|.$$

De la identidad anterior y la definición de las normas se obtiene que $|||x|||_{\mathcal{B}} \leq \|x\|_{W_{\mathcal{B}}} \leq |||x|||_{\mathcal{B}}$. Por lo tanto, $|||x|||_{\mathcal{B}} = \|x\|_{W_{\mathcal{B}}}$ para cualquier $x \in c_{00}$. Ahora, probemos que $\|x\|_{\mathcal{B}} = \|x\|_{W^{\pm}_{\mathcal{B}}}$ para cada $x \in c_{00}$. Para ello tomamos $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ en el espacio c_{00}. Dado $s \in \mathcal{S}$ seleccionamos la sucesión $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que[1]

$$\varepsilon_i = \begin{cases} sgn(a_i) & \text{si } a_i \neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

[1]Recordemos que $sgn(a) = 1$ si $a > 0$ y $sgn(a) = -1$ si $a < 0$.

para casa $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{i\in s} \varepsilon_i e_i^*$ es un funcional en $W_{\mathcal{B}}^{\pm}$ y se cumple que

$$\sum_{i\in s} |a_i| = |\sum_{i\in s} \varepsilon_i e_i^*(x)| = |\big(\sum_{i\in s} \varepsilon_i e_i^*\big)(x)|.$$

Por la igualdad previa y la definición de las normas, se tiene que

$$\|x\|_{\mathcal{B}} \leq \|x\|_{W_{\mathcal{B}}^{\pm}}.$$

Si $f \in W_{\mathcal{B}}^{\pm}$, entonces $f = \sum_{i\in s} \varepsilon_i e_i^*$ para algún s en la barrera $\mathcal{B}$ y sucesión $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{-1, 1\}$. Como consecuencia de lo anterior y la desigualdad triangular resulta que

$$\sum_{i\in s} |a_i| \geq |\sum_{i\in s} \varepsilon_i a_i| = |\sum_{i\in s} \varepsilon_i e_i^*(x)| = |\big(\sum_{i\in s} \varepsilon_i e_i^*\big)(x)|.$$

Lo cual implica que

$$\|x\|_{\mathcal{B}} \geq \|x\|_{W_{\mathcal{B}}^{\pm}}.$$

Ya que $x \in c_{00}$ es arbitrario, podemos concluir que $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} = \|\cdot\|_{W_{\mathcal{B}}^{\pm}}$.

3. El primer inciso nos asegura que las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ y $|||\cdot|||_{\mathcal{B}}$ sobre el espacio $S_{\mathcal{B}}$ son equivalentes, lo cual implica que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder para $(S_{\mathcal{B}}, |||\cdot|||_{\mathcal{B}})$. Falta demostrar que la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $2-$incondicional bajo la norma $|||\cdot|||_{\mathcal{B}}$. Para ello fijamos un número entero positivo m y una sucesión finita $(\varepsilon_i)_{i=1}^m \in \{1, -1\}^m$. La desigualdad del primer inciso y el Lema 7.8 nos conduce a que

$$|||\sum_{i=1}^m \varepsilon_i a_i e_i|||_{\mathcal{B}} \leq \|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i a_i e_i\|_{\mathcal{B}} \leq \|\sum_{i=1}^m a_i e_i\|_{\mathcal{B}} \leq 2|||\sum_{i=1}^m a_i e_i|||_{\mathcal{B}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^m \in [-1, 1]^m$. Esto confirma que la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $2-$incondicional en el espacio de Banach $(S_{\mathcal{B}}, |||\cdot|||_{\mathcal{B}})$. □

8 Estabilidad Oscilatoria

Recordemos del libro [1, Def. III.5.4] que una función $f : S(X) \to \mathbb{R}$ se llama *oscilación estable* sobre X si para todo subespacio de Banach de dimensión infinita Y de X y cada $\varepsilon > 0$ existe un subespacio de Banach de dimensión infinita Z de Y tal que

$$\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S(Z)\} < \varepsilon.$$

Esta noción permitió a los autores del artículo [3] observar la existencia de una propiedad oscilatoria dentro de las condiciones que conducen a la construcción de un modelo disperso (ver la Definición 9.1). De manera formal enunciamos dicha observación de la siguiente manera:

Definición 8.1. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(X, \|\cdot\|)$ se denomina (k, ε)-*oscilación estable* si para cualesquiera $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ tenemos que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)}\| - \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)}\|\Big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

La relevancia de la anterior propiedad es su relación con el Teorema de Ramsey, la cual será expuesta y demostrada posteriormente en esta sección. Para ello introducimos el espacio métrico que fué crucial en la demostración del Teorema de Brunel-Sucheston (Teorema 9.3) según las notas de Th. Schlumprecht [20]:

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el espacio métrico

$$\mathcal{M}_k = \{\rho : \mathbb{R}^k \to [0, \infty) : \rho \text{ es una norma y } \rho(e_i) = 1\ \forall i = 1, \ldots, k\}$$

cuya métrica esta dada por

$$d_k(\rho_1, \rho_2) = \sup\left\{\big|\rho_1(a) - \rho_2(a)\big| : a \in [-1, 1]^k\right\}.$$

para cada par de normas $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}_k$. Una afirmación errónea en una de las pruebas del Teorema de Brunel-Sucheston (Teorema 9.3) fue "el espacio $\mathcal{M}_k$ es compacto, para toda $k \in \mathbb{N}$". A continuación se presenta un ejemplo simple que nos permite observar que, efectivamente, estos espacios no son compactos.

Ejemplo 8.2. Sea $(\mathcal{M}_2, d_2)$ el espacio métrico previamente definido y supongamos que es un espacio compacto. Consideremos la sucesión $(\|\cdot\|_{W_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de normas de $\mathbb{R}^2$ definidas por lo conjuntos normantes $W_n = \{e_1^* - e_2^*, \frac{1}{n}e_2^*,\} \subseteq (\mathbb{R}^2)^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Primero demostremos que la sucesión $(\|\cdot\|_{W_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, en otras palabras, dado $\varepsilon > 0$ encontremos $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_2(\|\cdot\|_{W_n}, \|\cdot\|_{W_m}) = \sup\left\{\big|\|a\|_{W_n} - \|a\|_{W_m}\big| : \ a \in [-1,1]^2\right\} < \varepsilon \quad \text{si } n, m \geq \ell.$$

Tomemos $a \in [-1,1]^2$, sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \leq \|a\|_{W_n} - \|a\|_{W_m}$ y observemos que:

1) Si $\|a\|_{W_n} = |\frac{1}{n}e_2^*(a)|$ y $\|a\|_{W_m} = |\frac{1}{m}e_2^*(a)|$, entonces

$$\begin{aligned}\|a\|_{W_n} - \|a\|_{W_m} &= |\frac{1}{n}e_2^*(a)| - |\frac{1}{m}e_2^*(a)| \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)|e_2^*(a)| \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

2) Si $\|a\|_{W_n} = |(e_1^* - e_2^*)(a)|$ y $\|a\|_{W_m} = |(e_1^* - e_2^*)(a)|$, entonces $\|a\|_{W_n} - \|a\|_{W_m} = 0$.

3) Si $\|a\|_{W_n} = |(e_1^* - e_2^*)(a)|$ y $\|a\|_{W_m} = |\frac{1}{m}e_2^*(a)|$, entonces

$$\begin{aligned}\|a\|_{W_n} - \|a\|_{W_m} &= |(e_1^* - e_2^*)(a)| - |\frac{1}{m}e_2^*(a)| \\ &\leq |(e_1^* - e_2^*)(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| = 0.\end{aligned}$$

4) Si $\|a\|_{W_n} = |\frac{1}{m}e_2^*(a)|$ y $\|a\|_{W_m} = |(e_1^* - e_2^*)(a)|$, entonces

$$\begin{aligned}\|a\|_{W_n} - \|a\|_{W_m} &= |\frac{1}{n}e_2^*(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| \\ &\leq |\frac{1}{n}e_2^*(a)| - |\frac{1}{m}e_2^*(a)| \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Así $\big|\|a\|_{W_n} - \|a\|_{W_m}\big| \leq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$, y como $a \in [-1,1]^2$ es arbitrario se concluye que

$$d_2(\|\cdot\|_{W_n}, \|\cdot\|_{W_n}) \leq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Finalmente eligiendo $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell > \frac{2}{\varepsilon}$, se cumple que

$$d_2(\|\cdot\|_{W_n}, \|\cdot\|_{W_n}) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon \quad \text{si } n, m \geq \ell.$$

De ahí que $(\|\cdot\|_{W_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y consecuentemente $(\|a\|_{W_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ para cada $a \in \mathbb{R}^2$. Definimos $\rho : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ como $\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a\|_{W_n}$ para toda $a \in \mathbb{R}^2$. De hecho, para cada $a \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\rho(a) = \begin{cases} |(e_1^* - e_2^*)(a)| & \text{si } e_1^*(a) \neq e_2^*(a) \\ 0 & \text{si } e_1^*(a) = e_2^*(a) \end{cases}.$$

Ahora probemos que $lim_{n\to\infty}\|\cdot\|_{W_n} = \rho$. Dado $a \in [-1,1]^2$ tenemos que:

1. Si $e_1^*(a) = e_2^*(a)$, entonces $\big|\|a\|_{W_n} - \rho(a)\big| = |\frac{1}{n}e_2^*(a)| = \frac{1}{n}|e_2^*(a)| \leq \frac{1}{n}$

2. Si $e_1^*(a) \neq e_2^*(a)$, entonces

$$\|a\|_{W_n} - \rho(a) =$$
$$\begin{cases} |(e_1^* - e_2^*)(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| = 0 & \text{si } \ \|a\|_{W_n} = |(e_1^* - e_2^*)(a)| \\ |\frac{1}{n}e_2^*(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| \leq \frac{1}{n}|e_2^*(a)| \leq \frac{1}{n} & \text{si } \ \|a\|_{W_n} = |\frac{1}{n}e_2^*(a)| \end{cases}$$

y

$$\|a\|_{W_n} - \rho(a) =$$
$$\begin{cases} |(e_1^* - e_2^*)(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| = 0 & \text{si } \ \|a\|_{W_n} = |(e_1^* - e_2^*)(a)| \\ |\frac{1}{n}e_2^*(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| \geq |(e_1^* - e_2^*)(a)| & \\ -|(e_1^* - e_2^*)(a)| = 0 & \text{si } \ \|a\|_{W_n} = |\frac{1}{n}e_2^*(a)| \end{cases}.$$

De lo anterior inferimos que $\big|\|a\|_{W_n} - \rho(a)\big| \leq \frac{1}{n}$ para toda $a \in [-1,1]^2$, es decir, $d_2(\|\cdot\|_{W_n}, \rho) \leq \frac{1}{n}$. Así que al tomar $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell > \frac{1}{\varepsilon}$ para cada $\varepsilon > 0$, obtenemos la desigualdad

$$d_2(\|\cdot\|_{W_n}, \rho) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{si } n \geq \ell.$$

Sin embargo, ρ no es una norma ya que $\rho((1,1)) = 0$. Por lo tanto, $(\mathcal{M}_2, d_2)$ no es compacto.

La afirmación se vuelve cierta si reemplazamos "norma" por "seminorma" de la siguiente manera

$$\mathcal{N}_k = \{\rho : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,\infty) : \rho \text{ es una seminorma y } \rho(e_i) = 1 \ \forall i = 1,\ldots,k\}.$$

Enseguida verificaremos que $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es un espacio métrico compacto. Para esto es importante observar que si $\|\cdot\|_{\ell_1}$ es la norma de $\mathbb{R}^k$, dada por $\|(a_1,\cdots,a_k)\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^k |a_i|$ para toda $(a_1,\cdots,a_k) \in \mathbb{R}^k$, y $\rho \in \mathcal{N}_k$, entonces $|\rho(a)| \leq \|a\|_{\ell_1}$ para todo $a \in \mathbb{R}^k$.

Lema 8.3. *Para cada número natural k, el espacio métrico $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es compacto.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Demostraremos que el espacio es completo y totalmente acotado (esto es equivalente a la compacidad en espacios métricos, una prueba de ello se puede consultar en [9]). Para ver que es completo tomamos una sucesión de Cauchy $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{N}_k, d_k)$. De la definicíon de la métrica d_k podemos ver que las sucesiones $\{(\rho_n(x))_{n\in\mathbb{N}} : x \in \mathbb{R}^2\}$ son uniformemente Cauchy en el espacio de Banach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Más aún, las sucesiones $\{(\rho_n(x))_{n\in\mathbb{N}} : x \in \mathbb{R}^2\}$ convergen uniformemente en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Tomando el límite puntual podemos definir $\rho(x) := \text{lím}_{n\to\infty} \rho_n(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^k$. Es fácil ver que ρ es una seminorma en $\mathbb{R}^k$ y $\rho_n \to \rho$. Ahora probaremos que $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es totalmente acotado. Fijemos $\varepsilon > 0$ y consideremos una $\frac{\varepsilon}{4}$-red B en $([-1,1]^k, \|\cdot\|_{\ell_1})$ y A una $\frac{\varepsilon}{4}$-red en $[0,k]$. Para cada función $f : B \to A$ definimos

$$C_f = \{\rho \in \mathcal{N}_k : \ |\rho(b) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{4} \ \forall b \in B\}.$$

Afirmamos que $\rho_1, \rho_2 \in C_f$ satisfacen que $d_k(\rho_1, \rho_2) < \varepsilon$. Para ver esto tomamos $x \in [-1,1]^k$ y $b \in B$ tal que $\|x - b\|_{\ell_1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |\rho_1(x) - \rho_2(x)| &\leq |\rho_1(x) - \rho_1(b)| + |\rho_1(b) - f(b)| \\ &\quad + |f(b) - \rho_2(b)| + |\rho_2(b) - \rho_2(x)| \\ &\leq |\rho_1(x-b)| + |\rho_2(b-x)| + \frac{2\varepsilon}{4} \\ &\leq 2\|x-b\|_{\ell_1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora para cada C_f no vacío fijamos $\rho_f \in C_f$. Veamos que $\{\rho_f \in \mathcal{N}_k : f : B \to A\}$ es una ε-red en $\mathcal{N}_k$. Ciertamente, dada ρ en $\mathcal{N}_k$ consideramos la función $f : B \to A$ definida por

$$f(b) = \text{mín}\{a \in A : |\rho(b) - a| < \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

De donde se sigue que $\rho \in C_f$ y por ello se cumple que $d_k(\rho, \rho_f) < \varepsilon$. Esto prueba que $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es totalmente acotado. Por lo tanto, $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es compacto. $\square$

Siendo más específicos, la prueba del Teorema de Brunel-Sucheston a la que hicimos referencia previamente, usa el Teorema de Ramsey para Analistas (Teorema 3.4) sobre ciertas coloraciones cuyo codominio está en el espacio $\mathcal{M}_k$, suponiendo de manera equivocada que es un espacio compacto. Pero esto se puede rescatar simplemente usando subconjuntos cerrados de $\mathcal{N}_k$ que resultan ser compactos.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ usaremos, a continuación, el espacio métrico compacto $\mathcal{N}_k$ y una sucesión normalizada de un espacio de Banach para colorear la familia de bloques de k barreras arbitrarias.

Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Ahora, para cada $s \in FIN$, escogemos el vector $\mathcal{X}(s) := \frac{\sum_{i\in s} x_i}{\|\sum_{i\in s} x_i\|}$. Finalmente definimos la coloración $\beta_k : Bl(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \mathcal{N}_k$ asociada a la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, en el punto $S = \{s_1, \dots, s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$, como

$$\beta_k(S)(\sum_{i=1}^k a_i e_i) := \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\|$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$. Por comodidad cuando consideremos las coloraciones β_k's se entenderá a que sucesión están asociadas sin nombrarla. En un caso muy particular, cuando $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k) = ([\mathbb{N}]^1, \dots, [\mathbb{N}]^1)$, la coloración $\beta_k : Bl^k([\mathbb{N}]^1) \longrightarrow \mathcal{N}_k$ se identificará con la función $\psi_k : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \mathcal{N}_k$ definida en el punto $s = \{s(1), \dots, s(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ como

$$\psi_k(s)(\sum_{i=1}^k a_i e_i) := \|\sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)}\|,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Además, podemos ver que para cada $S \in Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k)$ y cada $s \in [\mathbb{N}]^k$

$$\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| \leq \sum_{i=1}^k \|a_i\mathcal{X}(s_i)\| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| = \|\sum_{i=1}^k a_ie_i\|_1 \text{ y}$$

$$\|\sum_{i=1}^k a_ix_{s(1)}\| \leq \sum_{i=1}^k \|a_ix_{s(i)}\| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| = \|\sum_{i=1}^k a_ie_i\|_1, \text{ para todo } (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k.$$

El siguiente lema garantiza que cada coloración β_k converge a una norma dentro del espacio compacto $\mathcal{N}_k$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Lema 8.4. *Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ sucesión finita de barrera en $\mathbb{N}$, existen una norma $\rho_k : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,\infty)$ y $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que*

$$\lim_{Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k\restriction_M)\ni S\longrightarrow\infty} \beta_k(S) = \rho_k,$$

esta convergencia se establece dentro del espacio métrico compacto $\mathcal{N}_k$.

Demostración. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en el espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ y C su constante de base. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión finita de barrera en $\mathbb{N}$. De acuerdo con el Corolario 5.4 podemos encontrar $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $\rho_k \in \mathcal{N}_k$ de tal modo que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in M$ tal que

$$d_k(\beta_k(S),\rho_k) = \sup\{\big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\|_X - \rho_k\big(\sum_{i=1}^k a_ie_i\big)\big| : (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k\} < \frac{\varepsilon}{C}$$

para toda $S = \{s_1,\ldots,s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/\ell},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M/\ell})$. Para finalizar con la demostración solo nos queda comprobar que ρ_k es una norma. Para esto supongamos que hallamos $(b_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ tal que $\rho_k\big(\sum_{i=1}^k b_ie_i\big) = 0$. Consideremos $i_0 = \min\{i \leq k : b_i \neq 0\}$ y fijemos $0 < \varepsilon < |b_{i_0}|$. Por el Corolario 6.7 y la convergencia de la coloración, tenemos que

$$|b_{i_0}| = \|\sum_{i=1}^{i_0} b_i\mathcal{X}(s_i)\| \leq C\|\sum_{i=1}^k b_i\mathcal{X}(s_i)\| \leq Cd_k(\beta_k(S),\rho_k) < \varepsilon,$$

para cada $S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/\ell},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M/\ell})$, lo cual es imposible. De este modo concluimos que ρ_k es una norma. □

Corolario 8.5. *Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existen una norma $\rho_k : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,\infty)$ y $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que*

$$\lim_{s\in[M]^k\to\infty} \psi_k(s) = \rho_k,$$

esta convergencia se establece dentro del espacio métrico compacto $\mathcal{N}_k$.

Enseguida enunciamos uno de los resultados claves de esta sección, el cual aparece en el artículo [3]. Para comodidad del lector incluimos una demostración completa y accesible.

Teorema 8.6. *Para cada entero positivo $k \in \mathbb{N}/1$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Teorema de Ramsey) Dado $q \in \mathbb{N}$ y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, para cada función $\varphi : [N]^k \longrightarrow \{1,\dots,q\}$ podemos encontrar $i \leq q$ y $M \in [N]^\omega$ tal que $[M]^k \subseteq \varphi^{-1}(i)$.

(2) (Teorema de Ramsey para Analistas) Sean (X,d) un espacio métrico totalmente acotado y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Para cada coloración $\varphi : [N]^k \longrightarrow X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon$$

si s, $t \in [M]^k$.

(3) Para cada sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es (k,ε)-oscilación estable.

Demostración. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) es el Teorema 3.4.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos la función $\psi_k : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \mathcal{N}_k$, asociada a la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, definida anteriormente. Fijamos $\varepsilon > 0$. Aplicando el Teorema de Ramsey para Analistas, podemos encontrar $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que

$$d_k(\psi_k(s), \psi_k(t)) < \varepsilon$$

para todo s, $t \in [M]^k$. Es decir, si $s = \{s(1),\dots,s(k)\}$, $t = \{t(1),\dots,t(k)\} \in [M]^k$, entonces

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)}\|_X - \|\sum_{i=1}^k a_i x_{t(i)}\|_X\Big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por ende, la sucesión $(x_i)_{i\in M}$ es (k,ε)-oscilación estable.

(3) $\Rightarrow$ (1). Como se plantea en el Lema 3.3, basta probar el caso $q = 2$. Dados $k \in \mathbb{N}$ y una coloración arbitraria $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \{1,2\}$. Consideremos el espacio vectorial c_{00} y el conjunto normante

$$W = G_0 \cup \{\sum_{i\in s} e_i^* : s \in [\mathbb{N}]^k \text{ y } \varphi(s) = 0\}.$$

Notemos que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión nomalizada bajo la norma generada por W. Además, es fácil ver que si $s \in [\mathbb{N}]^k$ y $\varphi(s) = 0$, entonces $\|\sum_{i\in s} e_i\|_W = k$. Más aún, probemos que $\|\sum_{i\in t} e_i\|_W \le k-1$ para cada $t \in [\mathbb{N}]^k$ tal que $\varphi(t) = 1$. Para ello supongamos que $t \in [\mathbb{N}]^k$ y $\varphi(t) = 1$. Fijemos $f \in W$. Si $f \in G_0$, es claro que $f(\sum_{i\in t} e_i) \le 1$. Si $f \in W \setminus G_0$, entonces existe $u \in [\mathbb{N}]^k$ tal que $\varphi(u) = 0$ y $f = \sum_{i\in u} e_i^*$. Como $t \neq s$ y $|t| = |u|$, existe $i_0 \in t\backslash u$. Así, tenemos que

$$f(\sum_{i\in t} e_i) = f(\sum_{i\in t\backslash\{i_0\}} e_i) \le k-1.$$

Por lo tanto, $\|\sum_{i\in t} e_i\|_W \le k-1$ siempre que $t \in [\mathbb{N}]^k$ y $\varphi(t) = 1$. Aplicando la hipótesis a la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y a $\varepsilon = \frac{1}{2}$, podemos encontrar $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ de tal modo que:

$$\big|\|\sum_{i\in s} e_i\|_W - \|\sum_{j\in t} e_j\|_W\big| < \frac{1}{2},$$

para cada s, $t \in [M]^k$. Supongamos que existen s, $t \in [M]^k$ tal que $\varphi(s) = 0$ y $\varphi(t) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\big|\|\sum_{j\in s} e_j\|_W - \|\sum_{j\in t} e_j\|_W\big| &< \frac{1}{2}\\
k - \|\sum_{j\in t} e_j\|_W &< \frac{1}{2}\\
k - \frac{1}{2} &< \|\sum_{j\in t} e_j\|_W.
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción e implica que $[M]^k \subseteq \varphi^{-1}(i)$ para algún $i \le 2$. $\square$

La noción de (k, ε)-oscilación estable nos conduce a una propiedad de asintoticidad, la cual se formaliza en la siguiente definición.

Definición 8.7. Dados un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $k \in \mathbb{N}$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en X se dice $k-$*oscilación asintótica estable* si existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para todo $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ se cumple que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon_{\text{mín}\{s(1),t(1)\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

A continuación enunciamos una condición que es equivalente a la propiedad de $k-$estabilidad oscilatoria asintótica y facilita su uso en algunos casos.

Lema 8.8. *Sea k un número natural. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es k-oscilación asintótica estable si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}/n]^k$ se satisface que*

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

Demostración. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $k \in \mathbb{N}$.

($\Rightarrow$) Primero supongamos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $k-$oscilación asintóticamente estable, es decir, existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para cualesquiera $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ se cumple la desigualdad

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon_{\text{mín}\{s(1),t(1))\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$. Dado $\varepsilon > 0$, como $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y converge a 0, encontramos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$. Observemos que si $s, t \in [\mathbb{N}/n]^k$, entonces

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon_{\text{mín}\{s(1),t(1)\}} \leq \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

($\Leftarrow$) Para el recíproco, supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ hallamos $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}/n]^k$ se tiene que

$$\big|\| \sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^k a_i x_{t(i)} \|\big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Observemos que si $s, t \in [\mathbb{N}]^k$, entonces para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ se satisface la condición

$$\begin{aligned}\big|\| \sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^k a_i x_{t(i)} \|\big| &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \|x_{s(i)}\| + \sum_{i=1}^k |a_i| \|x_{t(i)}\| \\ &= \sum_{i=1}^k |a_i| + \sum_{i=1}^k |a_i| \leq 2k.\end{aligned}$$

Por hipótesis, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera s, $t \in [\mathbb{N}/n_1]^k$ resulta que

$$\big|\| \sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^k a_i x_{t(i)} \|\big| < \frac{1}{2},$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Definimos

$$\varepsilon_i = 2k + \frac{n_1 + 1 - i}{2^{n_1}} \text{ para } i \leq n_1.$$

Notemos que $(\varepsilon_i)_{i \leq n_1}$ es estrictamente decreciente, $\varepsilon_i > 2k$ para todo $i \leq n_1$ y $\varepsilon_{n_1} = 2k + \frac{1}{2^{n_1}}$. Aplicando de forma recursiva la hipótesis se puede encontrar, para cada $j \in \mathbb{N}/1$, un número entero positivo n_j con $n_j > n_{j-1}$ tal que para todo s, $t \in [\mathbb{N}/n_j]^k$ se cumple la condición

$$\big|\| \sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^k a_i x_{t(i)} \|\big| < \frac{1}{2^j},$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Después, tomando $d_j = \max\{j, n_j - n_{j-1}\}$, definimos

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{n_j + 1 - i}{2^{d_j}} \text{ para } n_{j-1} < i \leq n_j.$$

Por construcción, para cada $j \in \mathbb{N}/1$, se obtiene que $(\varepsilon_i)_{i \leq n_j}$ es estrictamente decreciente, $\varepsilon_i > \frac{1}{2^{j-1}}$ para todo $n_{j-1} < i \leq n_j$ y $\varepsilon_{n_j} = \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^{d_j}}$. Más aún, $\varepsilon_i \searrow 0$.

Por otro lado, consideremos los elementos $s, t \in [\mathbb{N}]^k$. Si $\min\{s(1), t(1)\} \leq n_1$, entonces resulta que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < 2k < \varepsilon_{\min\{s(1),t(1)\}},$$

para cualquier $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. En el caso $\min\{s(1), t(1)\} > n_1$, como $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell = \max\{j \in \mathbb{N} : n_j < \min\{s(1), t(1)\}\}$ y $\min\{s(1), t(1)\} \leq n_{\ell+1}$. Lo cual implica que $s, t \in [\mathbb{N}/n_\ell]^k$ y

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \frac{1}{2^\ell} < \varepsilon_{\min\{s(1),t(1)\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por lo tanto, la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $k-$oscilación asintótica estable. $\square$

Esta nueva propiedad nos proporciona una versión equivalente al Teorema 8.6.

Corolario 8.9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) El Teorema de Ramsey para Analistas.

(2) Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Para toda $\varepsilon_i \searrow 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que todo $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [M]^k$ satisface que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon_\ell \text{ donde } \min\{s(1), t(1)\} = m_\ell,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

(3) Para cada sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es $k-$oscilación asintóticamente estable.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $k \in \mathbb{N}$. Consideremos la coloración $\psi_k : [\mathbb{N}]^k \to \mathcal{N}_k$ asociada a la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Por el Corolario 3.5, para cada $\varepsilon_i \searrow 0$, obtenemos un conjunto $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ tal que para cualquier par $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [M]^k$ la desigualdad $\big|\| \sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)}\| - \| \sum_{i=1}^k a_i x_{t(i)}\|\big| \leq d_k(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon_\ell$, donde $\min\{s(1), t(1)\} = m_\ell$, es cierta para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Esta implicación es inmediata.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $k \in \mathbb{N}$ y $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Por el Teorema 8.6 basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M_\varepsilon}$ es $(k, \varepsilon)-$oscilación estable. Por hipótesis existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es $k-$oscilación estable. Gracias al Lema 8.8 sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $s, t \in [M/n_\varepsilon]^k$, entonces

$$\Big|\| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)}\| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)}\|\Big| < \varepsilon$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$. Para cada $\varepsilon > 0$ pongamos $M_\varepsilon := M/n_\varepsilon$, entonces podemos concluir que $(x_i)_{i\in M_\varepsilon}$ es $(k, \varepsilon)-$oscilación estable. □

En las nociones de "$(k, \varepsilon)-$oscilación estable" y "$k-$oscilación asintótica estable" están presente la barrera $[\mathbb{N}]^k$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, y es importante que sus elementos esten enumerados de manera creciente. Esto motivó algunos resultados importantes del trabajo [12] que están presentes en esta sección, entre ellos una generalización de la oscilación utilizando una familia de bloques de una cantidad finita de barreras como la formalizaremos a continuación.

Notación: Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y para cada $s \in FIN$ definimos el vector bloque

$$\mathcal{X}(s) = \frac{\sum_{i\in s} x_i}{\| \sum_{i\in s} x_i\|}.$$

Definición 8.10. Dados un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, una sucesión finita de barreras $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ en $\mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en X se dice que es $((\mathcal{B}_i)_{i=1}^k, \varepsilon)-$*oscilación bloque estable* si para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ se cumple que

$$\Big|\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Particularmente, la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se denomina $(\mathcal{B},k,\varepsilon)-$*oscilación bloque estable* si es $((\mathcal{B},\ldots,\mathcal{B}),\varepsilon)-$oscilación bloque estable.

Nuestra principal contribución en el artículo [12] son las siguientes condiciones equivalentes al Teorema de Ramsey, que muestran una conexión de este con el Análisis Funcional.

Teorema 8.11. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Teorema de Ramsey.

(2) Teorema de Ramsey en Barreras.

(3) Dados $k,q\in\mathbb{N}$ y una sucesión de barreras $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ en $\mathbb{N}$. Para cualquier coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k) \longrightarrow \{1,\ldots,q\}$ existen $i\le q$ y $M\in[\mathbb{N}]^\omega$ tal que $Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k\restriction_M)\subseteq\varphi^{-1}(i)$.

(4) Sean (X,d) un espacio métrico totalmente acotado y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión finita de barreras en $\mathbb{N}$. Para toda coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k)\to X$ y cada $\varepsilon>0$ existe $M\in[\mathbb{N}]^\omega$ tal que $d(\varphi(S),\varphi(T))<\varepsilon$ si $S,T\in Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k\restriction_M)$.

(5) Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$. Para cada sucesión finita de barreras $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ en $\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon>0$, podemos encontrar $M\in[\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es $((\mathcal{B}_i\restriction_M)_{i=1}^k,\varepsilon)-$oscilación bloque estable.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Procederemos por inducción sobre el orden de la barrera. Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $N\in[\mathbb{N}]^\omega$ con orden ω^k para algún $k\in\mathbb{N}$ y $q\in\mathbb{N}$. Tomemos una coloración arbitraria $\varphi:\mathcal{B}\longrightarrow\{1,\ldots,q\}$. Por el Corolario 4.11 y el Teorema 4.13, existe $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $[N/n]^k\subseteq\mathcal{B}$. Consideremos la restricción $\varphi|_{\mathcal{B}\restriction_{N/n}}:\mathcal{B}\restriction_{N/n}\to q$, donde $\mathcal{B}\restriction_{N/n}=[N/n]^k$. Por el Teorema de Ramsey (Teorema 3.2) hallamos $i\le q$ y $M\in[N/n]^\omega$ tal que $[M]^k\subseteq(\varphi|_{\mathcal{B}\restriction_{N/n}})^{-1}(i)$. Lo cual implica que $\mathcal{B}\restriction_M\subseteq\varphi^{-1}(i)$.

Ahora, supongamos que para toda barrera $\mathcal{B}$ en $N\in[\mathbb{N}]^\omega$ con $ord(\mathcal{B})<\alpha$ tal que $\omega^\omega\le\alpha$ y cada coloración finita $\varphi:\mathcal{B}\longrightarrow\{1,\ldots,q\}$ existen $i\le q$ y $M\in[N]^\omega$ tal que $\mathcal{B}\restriction_M\subseteq\varphi^{-1}(i)$.

Sean $\mathcal{B}$ una barrera en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ de orden $\alpha \geq \omega^\omega$ y $\varphi : \mathcal{B} \to \{1, \ldots, q\}$ una coloración finita arbitraria. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{B}_{\{n\}} \neq \emptyset$ para toda $n \in N$. Entonces definimos, para cada $n \in N$,

$$\varphi_n : \mathcal{B}_{\{n\}} \to q \text{ como } \varphi_n(s) = \varphi(\{n\}^\frown s) \text{ para todo } s \in \mathcal{B}_{\{n\}}.$$

Notemos que, por el Lema 4.9, $ord(\mathcal{B}_{\{n\}} \upharpoonright M) < \alpha$ para cualquier $n \in N$ y toda $M \in [N]^\omega$. Pongamos $m_1 := \text{mín}(N)$. Aplicando la hipótesis de inducción a φ_{m_1} resulta que existen $i_1 \leq q$ y $M_1 \in [N/m_1]^\omega$ tal que $\varphi_{m_1}(\mathcal{B}_{\{m_1\}} \upharpoonright_{M_1}) = \{i_1\}$. Tomamos $m_2 := \text{mín}(M_1)$ y consideremos la restricción $\varphi_{m_2} \upharpoonright_{\mathcal{B}_{\{m_2\}} \upharpoonright_{M_1}}$. Nuevamente, por la hipótesis de inducción, encontramos $i_2 \leq q$ y $M_2 \in [M_1/m_2]^\omega$ tal que $\varphi_{m_2}(\mathcal{B}_{\{m_2\}} \upharpoonright_{M_2}) = \{i_2\}$. De manera recursiva obtenemos $i_j \leq q$ y $M_j \in [M_{j-1}/m_j]^\omega$ tal que $\varphi_{m_j}(\mathcal{B}_{\{m_j\}} \upharpoonright_{M_j}) = \{i_j\}$, donde $m_j := \text{mín}(M_{j-1})$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Definimos la coloración finita $\phi : [\mathbb{N}]^1 \to \{1, \ldots, q\}$ por la regla

$$\phi(\{j\}) = i_j \text{ para cada } \{j\} \in [\mathbb{N}]^1.$$

Por lo expuesto en la sección de barreras sabemos que $ord([\mathbb{N}]^1) = \omega$. En consecuencia podemos hallar $i \leq q$ y $L \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $\phi([L]^1) = \{i\}$. Consideremos el conjunto $M = \{m_j : j \in L\}$. Dado $s \in \mathcal{B} \upharpoonright M$ arbitrario, tenemos que $s = \{m_{j_1}, \ldots, m_{j_{\ell_s}}\}$ con $|s| = \ell_s$. Recordemos que $m_{j_2} = \text{mín}(M_{j_2-1})$ y $M_{j_2-1} \subseteq M_{j_1}$ ya que $j_1 \leq j_2 - 1$. De ahí que $\{m_{j_2}, \ldots, m_{j_{\ell_s}}\}$ pertenezca a $\mathcal{B}_{\{m_{j_1}\}} \upharpoonright_{M_{j_1}}$. Por lo tanto, $\varphi(s) = \varphi_{m_{j_1}}(\{m_{j_2}, \ldots, m_{j_{\ell_s}}\}) = i$. Debido a que $s \in \mathcal{B} \upharpoonright M$ es arbitrario se concluye que $\varphi(s) = i$ para todo $s \in \mathcal{B} \upharpoonright M$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sean $k, q \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Definimos la función $f : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ como $f(\{s_1, \ldots, s_k\}) = s_1{}^\frown s_2{}^\frown \cdots {}^\frown s_k$ para todo $\{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$. Es fácil de ver que f es una biyección. Lo cual implica la existencia de su inversa f^{-1}.

Por otra parte, sea $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ una coloración y consideremos la coloración $\varphi \circ f^{-1} : \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$. Como consecuencia del Lema 4.6 y la hipótesis, existen $i \leq q$ y $M \in [N]^\omega$ tal que

$$(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i) \upharpoonright_M \neq \emptyset \text{ y } (\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i) \upharpoonright_M \subseteq (\varphi \circ f^{-1})^{-1}(i).$$

Como $(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i) \upharpoonright_M = \bigoplus_{i=1}^k (\mathcal{B}_i \upharpoonright_M)$ y f es una biyección, se tiene que $Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_M, \ldots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_M) \neq \emptyset$ y $Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_M, \ldots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_M)$ es monocromático con color i.

(3) $\Rightarrow$ (4). Análogo a la prueba del Teorema de Ramsey para Analistas (Teorema 3.4).

(4) $\Rightarrow$ (5). Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach X y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión finita de barreras en $\mathbb{N}$. Esta implicación se deduce directamente de aplicar el cuarto inciso a la función $\beta_k : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \mathcal{N}_k$ asociada a la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Sean k un número natural, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach X y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 8.6 es suficiente demostrar que la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión (k, ε)-oscilación estable. Consideremos la sucesión finita de barreras $([\mathbb{N}]^1, \ldots, [\mathbb{N}]^1)$ de tamaño k. Aplicando el quinto inciso encontramos un conjunto $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es $([M]^1, k, \varepsilon)$-oscilación bloque estable. Por lo anterior y la igualdad $[\mathbb{N}]^k = Bl^k([\mathbb{N}]^1)$, se determina que $(x_i)_{i\in M}$ es una subsucesión (k, ε)-oscilación estable. $\square$

En la siguiente sección veremos la importancia de la noción de asintoticidad de una oscilación estable en la obtención de un modelo disperso, es por esto que a continuación introducimos una condición de asintoticidad para oscilaciones bloque estable.

Teorema 8.12. *Sea $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$, con $k \in \mathbb{N}$. Para cada sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_j)_{j\in M}$ es $((\mathcal{B}_i\restriction_M)_{i=1}^k, \varepsilon)-$oscilación bloque estable.

(2) Para cada $\varepsilon_i \searrow 0$ existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ para cualesquiera $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k\restriction_M)$ se satisface que

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_\ell \text{ donde } \min(s_1 \cup t_1) = m_\ell,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

(3) Existen $\varepsilon_i \searrow 0$ y $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tales que para todo $S =$

$\{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ *resulta que*

$$\big|\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_\ell \text{ siempre que } \min(s_1 \cup t_1) = m_\ell,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$ y $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Consideremos una sucesión $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números reales, decreciente y que converja a cero. De manera inductiva podemos encontrar una sucesión $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de conjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ que poseen las siguientes cualidades:

1. $m_j := \min(M_j)$ para toda $j \in \mathbb{N}$,
2. $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $M_{j+1} \in [M_j/m_j]^\omega \subseteq [M_j]^\omega$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y,
3. para cualquier $j \in \mathbb{N}$, la subsucesión $(x_i)_{i\in M_j}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_{M_j})_{i=1}^k, \varepsilon_j)-$oscilación bloque estable.

En efecto, supongamos que hemos hallado una sucesión finita $(M_j)_{j=1}^n$ de conjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y una sucesión finita $(m_j)_{j=1}^n$ estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ que obedece las condiciones antes enlistadas. Enseguida consideremos la sucesión normalizada $(x_i)_{i\in M_n/m_n}$ y ε_{n+1}. Usando el primer inciso encontramos un conjunto $M_{n+1} \in [M_n/m_n]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M_{n+1}}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_{M_{n+1}})_{i=1}^k, \varepsilon_{n+1})-$oscilación bloque estable, esto es, que cada $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_{n+1}}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_{n+1}})$ cumple que

$$\big|\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_{n+1},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

Proponemos a $M := \{m_j : j \in \mathbb{N}\}$ como el conjunto deseado. Efectivamente, observemos que para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ se tiene que

$$\big|\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_\ell$$

siempre que $\min(s_1 \cup t_1) = m_\ell$, para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$, ya que S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_\ell}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_\ell})$ y $(x_i)_{i \in M_{n+1}}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_{M_\ell})_{i=1}^k, \varepsilon_\ell)-$oscilación bloque estable.

(2) $\Rightarrow$ (3) Esta implicación es inmediata.

(3) $\Rightarrow$ (1). Por la afirmación del tercer inciso existen $\varepsilon_i \searrow 0$ y $N = \{n_j : j \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tales que para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_N, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_N)$ resulta que

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_\ell \text{ donde } \min(s_1 \cup t_1) = n_\ell \text{ para algún } \ell \in \mathbb{N},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Como la sucesión $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y converge a 0, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ que satisface $\varepsilon_\ell \leq \varepsilon$. En consecuencia, al tomar $M = N/n_{\ell-1}$ obtenemos que la subsucesión $(x_i)_{i\in M}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i=1}^k, \varepsilon)-$oscilación bloque estable. □

El Teorema anterior induce la siguiente propiedad de estabilidad oscilatoria asintótica por bloques para una sucesión normalizada en un espacio de Banach.

Definición 8.13. Sean k un número natural y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, se dice $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k-$*oscilación bloque asintótica estable* si existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ se cumple la condición

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_{\min(s_1 \cup t_1)}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

De manera análoga al Lema 8.8 se obtiene el resultado:

Lema 8.14. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k-$oscilación bloque asintótica estable si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n})$, entonces*

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Consideremos $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k-$oscilación bloque asintótica estable, es decir, existe una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ se tiene que

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_{\text{mín}(s_1\cup t_1)},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Dado $\varepsilon > 0$, como $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y converge a 0, existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$. Observemos que si S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n})$, entonces

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_{\text{mín}(s_1\cup t_1)} \leq \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

($\Leftarrow$) Para el recíproco, supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que cualesquiera $S = \{s_1, \ldots, s_k\}, T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n})$ cumplen que

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Notemos que si $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$, entonces para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ se tiene que

$$\begin{aligned}\big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\big| &\leq \sum_{i=1}^k |a_i|\|\mathcal{X}(s_i)\| + \sum_{i=1}^k |a_i|\|\mathcal{X}(t_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^k |a_i| + \sum_{i=1}^k |a_i| \leq 2k.\end{aligned}$$

Por la hipótesis, hallamos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n_1}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n_1}$) se cumple la desigualdad

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\big| < \frac{1}{2}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Para cada $i \leq n_1$ definimos

$$\varepsilon_i := 2k + \frac{n_1 + 1 - i}{2^{n_1}}.$$

Por construcción $(\varepsilon_i)_{i\leq n_1}$ es estrictamente decreciente, $\varepsilon_i > 2k$ para todo $i \leq n_1$ y $\varepsilon_{n_1} = 2k + \frac{1}{2^{n_1}}$. Aplicando de forma recursiva la hipótesis, para cada $j \in \mathbb{N}/1$, se puede encontrar $n_j \in \mathbb{N}$ con $n_j > n_{j-1}$ tal que si $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n_j}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n_j})$, entonces

$$\left|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\right| < \frac{1}{2^j}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Después, tomando $d_j := \text{máx}\{j, n_j - n_{j-1}\}$ para cada $j \in \mathbb{N}/1$, definimos para cada $i \in \mathbb{N}$, que cumpla la restricción $n_{j-1} < i \leq n_j$, el número real positivo

$$\varepsilon_i := \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{n_j + 1 - i}{2^{d_j}}.$$

Se obtiene que $(\varepsilon_i)_{i\leq n_j}$ es estrictamente decreciente, $\varepsilon_i > \frac{1}{2^{j-1}}$ para todo $i \leq n_j$ y $\varepsilon_{n_j} = \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^{d_j}}$. Más aún, la sucesión $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y converge a cero.

Ahora, consideremos S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$. Si el $\text{mín}(s_1 \cup t_1) \leq n_1$, entonces resulta que

$$\left|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\right| < 2k < \varepsilon_{\text{mín}(s_1\cup t_1)}$$

para cualquier $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. En el caso contrario, como $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell = \text{máx}\{j \in \mathbb{N} : n_j < \text{mín}(s_1 \cup t_1)\}$ y $\text{mín}(s_1 \cup t_1) \leq n_{\ell+1}$. Lo cual implica que S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n_\ell}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n_\ell})$ y

$$\left|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\right| < \frac{1}{2^\ell} < \varepsilon_{\text{mín}(s_1\cup t_1)},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por lo tanto, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k-$oscilación bloque asintótica estable. $\square$

La siguiente definición extiende el concepto de oscilación bloque asintótica estable a través de una sucesión infinita de barreras en $\mathbb{N}$.

Definición 8.15. Sea $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}-$*oscilación bloque asintótica estable* si existe una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $T = \{t_1, \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/(k-1)}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/(k-1)})$ se cumple que

$$\big|\|\sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{X}(s_j)\| - \|\sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{X}(t_j)\|\big| < \varepsilon_{\text{mín}(s_1\cup t_1)},$$

para toda $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1,1]^k$.

El lector conocedor del Teorema de Brunel-Sucheston (Teorema 9.3) puede adivinar hacia donde vamos, obviamente a una generalización de dicho teorema. Para establecer esta generalización necesitamos el siguiente lema y posteriormente enunciamos el corolario que nos permite demostrar el Teorema de Brunel Sucheston empleando la noción de oscilación estable. Cabe mencionar que por si solo este lema es importante ya que nos asegura la existencia de sucesiones con la propiedad de estabilidad oscilatoria asintótica por bloques respecto a una sucesión infinita de barreras tal y como está enunciado en la definición anterior.

Lema 8.16. *Sea $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces para cada $\varepsilon_i \searrow 0$ existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $T = \{t_1, \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{k-1}}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{k-1}})$ se satisface la desigualdad*

$$\big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_\ell \textit{ donde } \text{mín}(s_1 \cup t_1) = m_\ell,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1,1]^k$. Es decir, $(x_i)_{i\in M}$ es $(\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}-$ oscilación bloque asintótica estable.

Demostración. Sean $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$ y $\varepsilon_i \searrow 0$ una sucesión arbitraria. Consideremos una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Por el quinto inciso del Teorema 8.11 podemos hallar $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M_1}$ es una $(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_1}, 1, \varepsilon_1)-$oscilación bloque estable. En otras palabras, si $S = \{s_1\}$, $T = \{t_1\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_1})$, entonces

$$\big|\|a\mathcal{X}(s_1)\| - \|a\mathcal{X}(t_1)\|\big| < \varepsilon_1$$

para cada $a \in [-1, 1]$. Pongamos $m_1 := \text{mín}(M_1)$. Aplicando recursivamente el quinto inciso del Teorema 8.11, obtenemos una sucesión $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ creciente en $\mathbb{N}$ tales que:

1. $m_j := \text{mín}(M_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$,
2. $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $M_{j+1} \in [M_j/m_j]^\omega$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y
3. la subsucesión $(x_i)_{i\in M_j}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_{M_j})_{i=1}^j, \varepsilon_j)-$oscilación bloque estable para toda $j \in \mathbb{N}$.

Del tercer inciso vemos que si $j \in \mathbb{N}$ y $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_j}, \dots, \mathcal{B}_j \restriction_{M_j})$, entonces se cumple que

$$\big|\|\sum_{i=1}^{j} a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^{j} a_i\mathcal{X}(t_i)\|\big| < \varepsilon_j,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^j \in [-1, 1]^j$. Tomemos el conjunto $M = \{m_j : j \in \mathbb{N}\}$. Fijamos $k \in \mathbb{N}$ y S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{k-1}}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{k-1}})$. Observamos que $\text{mín}(s_1 \cup t_1) = m_\ell$ para alguna $\ell \in \mathbb{N}$. Por la propiedad ii) de las barreras existen $S' = \{s'_i \in \mathcal{B}_i \restriction_M : k + 1 \leq i \leq \ell\}$ y $T' = \{t'_i \in \mathcal{B}_i \restriction_M : k + 1 \leq i \leq \ell\}$ tal que $S \cup S', T \cup T' \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{\ell-1}}, \dots, \mathcal{B}_\ell \restriction_{M/m_{\ell-1}})$. Entonces se cumple la siguiente relación

$$\begin{aligned}\big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}(t_i)\|\big| =& \big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}(s_i) + \sum_{i=k+1}^{\ell} 0\mathcal{X}(s'_i)\| \\ & - \|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}(t_i) + \sum_{i=k+1}^{\ell} 0\mathcal{X}(t'_i)\|\big| < \varepsilon_\ell,\end{aligned}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$. Lo cual demuestra que M es el conjunto deseado. □

En particular, cuando se considera la sucesión $([\mathbb{N}]^1, [\mathbb{N}]^1, \dots, [\mathbb{N}]^1, \dots)$ obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 8.17. *Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces para cada $\varepsilon_i \searrow 0$ existe una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tal que para toda s, $t \in FIN$ con $s(1) \geq |s| = k = |t| \leq t(1)$ se cumple que*

$$\Big| \| \sum_{j=1}^{k} a_j x_{n_{s(j)}} \| - \| \sum_{j=1}^{k} a_j x_{n_{t(j)}} \|_X \Big| < \varepsilon_{\text{mín}\{s(1),t(1)\}},$$

para toda $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1,1]^k$.

9 Modelo Disperso

Empezaremos esta sección definiendo la noción de modelo disperso asociado a una sucesíon básica normalizada, la cual fue introducida por A. Brunel y L. Sucheston en 1973 [2]. Posteriormente daremos una demostración de la existencia de dicho modelo que es conocido como el Teorema de Brunel-Sucheston. Por último, introduciremos la noción de modelo asintótico por bloques y enunciaremos su teorema tipo Brunel-Sucheston correspondiente.

Definición 9.1. Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Una base de Schauder $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un *modelo disperso* de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si existe una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para todo $s = \{s(1), \ldots, s(k)\} \in FIN$ con $s(1) \geq |s| = k$ se tiene que

$$\Big| \| \sum_{j=1}^{k} a_j x_{s(j)} \|_X - \| \sum_{j=1}^{k} a_j y_j \|_Y \Big| < \varepsilon_{s(1)},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1,1]^k$. También decimos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genera a $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como *modelo disperso*.

El lector puede comprobar fácilmente que la base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Banach c_0 (ℓ_p con $p \in [1,\infty)$) es modelo disperso de cualquier subsucesión de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en el mismo espacio de Banach.

Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach. La norma del modelo disperso $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ relacionado a la sucesión básica $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se puede expresar, por consecuencia directa de la definición, como

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y = \lim_{[\mathbb{N}]^k \ni t \to \infty} \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \|_X, \tag{7}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Recordemos que una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se denomina *sucesión dispersa* si para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $s \in [\mathbb{N}]^k$ se cumple que $\|\sum_{i=1}^k a_i x_i\| = \|\sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)}\|$, para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. El lema que a continuación presentamos garantiza que todo modelo disperso es una sucesión dispersa.

Lema 9.2. *Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un par de sucesiones básicas normalizadas en los espacios de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, respectivamente. Si la sucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un modelo disperso de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces para toda $k \in \mathbb{N}$ y toda $s \in [\mathbb{N}]^k$ se cumple que*

$$\|\sum_{i=1}^k a_i y_i\|_Y = \|\sum_{i=1}^k a_i y_{s(i)}\|_Y,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Demostración. Consideremos dos sucesiones básicas normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en los espacios de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, respectivamente. Supongamos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genera a $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como modelo disperso. Primero fijemos $k \in \mathbb{N}$ y $s = \{s(1), \ldots, s(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$. Por la observación (7) sobre la norma de un modelo disperso, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}/\ell]^k$ resulta que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i x_{t(i)}\|_X - \|\sum_{i=1}^k a_i y_i\|_Y\Big| < \varepsilon,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Después, a cada sucesión $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ le asociamos una sucesión $(b_i)_{i=1}^{s(k)} \in [-1,1]^{s(k)}$ definida, en cada $i \le s(k)$, como

$$b_i = \begin{cases} a_j & \text{si } i = t(j) \text{ para algún } j \le k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Notemos que, para toda $t \in [\mathbb{N}]^{s(k)}$ y cada sucesión $(b_i)_{i=1}^{s(k)}$ relacionada con alguna $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$, la identidad $\|\sum_{i=1}^{s(k)} b_i x_{t(i)}\|_X = \|\sum_{i=1}^k a_i x_{t(s(i))}\|_X$ es válida. Además, para cualquier $t \in [\mathbb{N}/\ell]^{s(k)}$ se cumple que $\{t(s(1)), \ldots, t(s(k))\}$ pertenece a $[\mathbb{N}/\ell]^k$. Por consiguiente, si $t \in [\mathbb{N}/\ell]^{s(k)}$, entonces

$$\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(s(i))}\|_X - \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_Y\Big| < \varepsilon$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. En otras palabras

$$\lim_{[\mathbb{N}]^{s(k)} \ni t \to \infty} \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(s(i))}\|_X = \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_Y, \text{ para cualquier } (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k.$$

Como el límite es único, obtenemos que $\| \sum_{i=1}^k a_i y_i\|_Y = \| \sum_{i=1}^k a_i y_{s(i)}\|_Y$ para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Finalmente, ya que $k \in \mathbb{N}$ y $s \in [\mathbb{N}]^k$ son arbitrarios, podemos concluir que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $s \in [\mathbb{N}]^k$ se cumple que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_Y = \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)}\|_Y, \text{ para toda } (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k.$$

$\square$

A. Brunel y L. Sucheston [2] establecieron el siguiente teorema clásico del Análisis Funcional.

Teorema 9.3 (de Brunel-Sucheston)**.** *Toda sucesión básica normalizada de un espacio de Banach posee una subsucesión que genera un modelo disperso.*

Demostración. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $\varepsilon_i \searrow 0$. Por el Corolario 8.17 podemos encontrar una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que para cualesquiera $s, t \in FIN$ con $s(1) \geq |s| = k = |t| \leq t(1)$ se satisface que

$$\Big|\|\sum_{j=1}^{k} a_j x_{n_{s(j)}}\| - \|\sum_{j=1}^{k} a_j x_{n_{t(j)}}\|_X\Big| < \frac{\varepsilon_{\min\{s(1),t(1)\}}}{2}, \tag{8}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Ahora, tomamos k un número natural fijo. Es fácil ver que el conjunto $[\mathbb{N}]^k$ con la relación $\leq$, definida como

$$s < t \text{ si y solo si } \max(s) < \min(t) \quad \text{y}$$
$$s = t \text{ si y solo si } s = t \text{ (como conjuntos)}$$

para cada $s, t \in [\mathbb{N}]^k$, es un conjunto dirigido. Consideremos la red $(\psi_k(s))_{s \in [\mathbb{N}]^k}$, recordando que

$$\psi_k(s)(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i) = \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_{s(i)}} \| \text{ para todo } (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k,$$

en el espacio métrico compacto $(\mathcal{N}_k, d_k)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_\ell \leq 2\varepsilon$ y $\ell \geq k$, ya que $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que converge a cero. Por la construcción previa, si $s, t \in [\mathbb{N}]^k$ y satisfacen que $s, t \geq \{\ell, \ell + 1, \ldots, \ell + k - 1\}$, entonces se cumple la desigualdad

$$d_k\big(\psi_k(s), \psi_k(t)\big) < \frac{\varepsilon_{\min\{s(1),t(1)\}}}{2} \leq \frac{\varepsilon_\ell}{2} \leq \varepsilon.$$

Lo cual significa que $(\psi_k(s))_{s \in [\mathbb{N}]^k}$ es una red de Cauchy en el espacio compacto $\mathcal{N}_k$. De manera que existe una seminorma $\rho_k \in \mathcal{N}_k$ a la cual converge la red. Enseguida, mostremos que

$$\lim_{[\mathbb{N}]^k \ni s \to \infty} \psi_k(s) = \rho_k. \tag{9}$$

Como la red converge, dado $\varepsilon > 0$ existe $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ tal que $d_k(\psi_k(s), \rho_k) < \varepsilon$ para toda $s \in [\mathbb{N}]^k$ tal que $s \geq t$. Por definición, si $s \in [\mathbb{N}/t(k)]^k$, entonces $s > t$. En consecuencia,

$$d_k(\psi_k(s), \rho_k) < \varepsilon \text{ para todo } s \in [\mathbb{N}/t(k)]^k.$$

De esta manera concluimos que ρ_k es el límite de la coloración ψ_k. Además, el Lema 8.5 afirma que ρ_k es una norma para $\mathbb{R}^k$.

El siguiente paso es encontrar el modelo disperso y su espacio de Banach a través de las normas límite obtenidas anteriormente:

Consideremos el espacio vectorial c_{00} y la base canónica $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ para c_{00}. Definamos la norma $|||\cdot||| : c_{00} \to [0, \infty)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, como

$$|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = \rho_k\big(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\big) \quad \text{en } \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \in c_{00}.$$

Esta última función está bien definida ya que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $s \in [\mathbb{N}]^{k+1}$ resulta que

$$\psi_{k+1}(s)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i + 0 e_{k+1}\right) = \psi_k(s \setminus \{s(k+1)\})\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right),$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i + 0e_{k+1}\right) &= \lim_{[\mathbb{N}]^{k+1}\ni s\to\infty} \psi_{k+1}(s)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i + 0e_{k+1}\right)\\
&= \lim_{[\mathbb{N}]^{k}\ni t\to\infty} \psi_{k}(t)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)\\
&= \rho_k\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)
\end{aligned}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. La sucesión normalizada $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en el espacio de Banach $(E, |||\cdot|||)$, donde E es la completación del espacio c_{00} bajo la norma $|||\cdot|||$, es la candidata a ser el modelo disperso de $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Primero probemos que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $(E, |||\cdot|||)$. Como $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica, existe $C \geq 1$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ y $s \in [\mathbb{N}]^m$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\psi_n(\{s(1),\ldots,s(n)\})(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i) &= \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{n_{s(i)}}\|_X\\
&\leq C\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_{n_{s(i)}}\|_X = C\psi_m(s)(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i),
\end{aligned}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^m \in [-1,1]^m$. Así pues, para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ resulta que

$$|||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i||| = \rho_n(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i) \leq C\rho_m(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i) = C|||\sum_{i=1}^{m} a_i e_i|||,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^m \in [-1,1]^m$. Por el Teorema 6.6, podemos concluir que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $(E, |||\cdot|||)$. Por último, mostremos que la desigualdad, entre la sucesión básica normalizada y su modelo disperso propuesto, se cumple. Para ello fijamos $k \in \mathbb{N}$ y $s \in [\mathbb{N}/(k-1)]^k$. Debido a la convergencia (9) y a la definición de le norma $|||\cdot|||$, existe $\ell \in \mathbb{N}/(k-1)$ tal que para cualquier $t \in [\mathbb{N}/\ell]^k$ tenemos que

$$\left|\|\sum_{i\in t} a_i x_{n_i}\| - |||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i|||\right| < \frac{\varepsilon_{s(1)}}{2}, \tag{10}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por las desigualdades (8) y (10), al tomar algún $t \in [\mathbb{N}/\max\{\ell, s(1)\}]^k$, se deduce que

$$\begin{aligned}\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i x_{n_{s(i)}}\| - |||\sum_{i=1}^k a_i e_i|||\Big| &\leq \Big|\|\sum_{i=1}^k a_i x_{n_{s(i)}}\| - \|\sum_{i=1}^k a_i x_{n_{t(i)}}\|\Big| \\ &\quad + \Big|\|\sum_{i=1}^k a_i x_{n_{t(i)}}\| - |||\sum_{i=1}^k a_i e_i|||\Big| < \varepsilon_{s(1)},\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. □

El Teorema de Brunel-Sucheston es equivalente al Teorema de Ramsey (Teorema 3.2), lo cual se demuestra como se hizó previamente mediante la noción de oscilación estable y el Teorema 8.6.

Teorema 9.4. . *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *Teorema de Ramsey.*
2. *Teorema de Ramsey para Analistas.*
3. *Teorema de Brunel-Sucheston.*

Por lo que hemos visto hasta aquí surge de manera natural la idea de extender la noción de modelo disperso relacionandolo a una sucesión de barreras, sin embargo, el modelo que se obtiene no necesariamente es una sucesión dispersa, como veremos en el Ejemplo 9.10 al final de esta sección. Pero siguiendo la línea del artículo [14] podemos introducir un modelo asintótico mediante el uso de bloques de una sucesión básica normalizada:

Definición 9.5. ([12]) Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Una base de Schauder $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}-$*modelo asintótico por bloques* de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/(k-1)}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/(k-1)})$ se tiene que

$$\Big|\|\sum_{j=1}^k a_j \mathcal{X}(s_j)\|_X - \|\sum_{j=1}^k a_j y_j\|_Y\Big| < \varepsilon_{\text{mín}(s_1)},$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. En particular, si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces diremos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genera a $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como $\mathcal{B}-$*modelo asintótico por bloques.*

Si $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}-$modelo asintótico por bloques generado por alguna sucesión básica normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ la norma $\|\cdot\|_Y$ se puede obtener de la siguiente manera

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_Y = \lim_{Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k)\ni S\to\infty} \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i)\|_X, \tag{11}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Para cualquier barrera $\mathcal{B}$ es fácil verificar que un $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques tiene la propiedad de dispersión. Para comodidad del lector presentamos una prueba de este hecho.

Teorema 9.6. *Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$. Dado un $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de alguna sucesión básica normalizada en un espacio de Banach, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $s = \{s(1),\ldots,s(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ se satisface que*

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_Y = \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)}\|_Y,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Demostración. Consideremos una sucesión básica normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en el espacio de Banach $(X,\|\cdot\|_X)$. Supongamos que $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$. Primero fijamos $k \in \mathbb{N}$, $s = \{s(1),\ldots,s(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ y $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ y luego elegimos $(b_i)_{i=1}^{s(k)} \in [-1,1]^{s(k)}$ tal que para cada $i \leq s(k)$ se tiene que

$$b_i = \begin{cases} a_j & \text{si } i = s(j) \text{ para algún } j \leq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Por la elección de $(b_i)_{i=1}^{s(k)}$ sabemos lo siguiente

$$\|\sum_{i=1}^{s(k)} b_i y_i\|_Y = \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)}\|_Y \quad y \quad \|\sum_{i=1}^{s(k)} b_i \mathcal{X}(t_i)\|_X = \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_{s(i)})\|_X$$

para todo $T = \{t_1, \ldots, t_{s(k)}\} \in Bl^{s(k)}(\mathcal{B})$. Gracias a las igualdades anteriores y a (11), resulta que

$$\lim_{Bl^k(\mathcal{B}) \ni T = \{t_1, \ldots, t_k\} \to \infty} \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \|_X = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y \quad y$$

$$\lim_{Bl^{s(k)}(\mathcal{B}) \ni T = \{t_1, \ldots, t_{s(k)}\} \to \infty} \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_{s(i)}) \|_X = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)} \|_Y .$$

En otras palabras, dado $\varepsilon > 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que para cada $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ en $Bl^k(\mathcal{B} \restriction_{\mathbb{N}/\ell})$ se cumple

$$\big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \|_X - \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y \big| < \varepsilon .$$

Es fácil ver que si $T = \{t_1, \ldots, t_{s(k)}\} \in Bl^{s(k)}(\mathcal{B} \restriction_{\mathbb{N}/\ell})$, entonces $\{t_{s(1)}, \ldots, t_{s(k)}\}$ pertenece a $Bl^k(\mathcal{B} \restriction_{\mathbb{N}/\ell})$. De esto se infiere que, para todo $T \in Bl^{s(k)}(\mathcal{B} \restriction_{\mathbb{N}/\ell})$, la desigualdad

$$\big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_{s(i)}) \|_X - \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y \big| < \varepsilon$$

es válida. Así, tenemos que

$$\lim_{Bl^{s(k)}(\mathcal{B}) \ni T \to \infty} \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_{s(i)}) \|_X = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y$$

y la unicidad del límite nos garantiza que $\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)} \|_Y = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y$. Finalmente, como $k \in \mathbb{N}$, $s \in [\mathbb{N}]^k$ y $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1, 1]^k$ son arbitrarios, podemos concluir que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $s \in [\mathbb{N}]^k$ se satisface que

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)} \|_Y ,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1, 1]^k$. $\square$

Lo anterior atestigua que el concepto de $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques extiende la noción de modelo disperso. Por esta razón, es conveniente llamar al $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques simplemente $\mathcal{B}-$*modelo disperso.*

El siguiente teorema establecido en [12] es una generalización del Teorema de Brunel-Sucheston (9.3) y es equivalente a cualquiera de las condiciones del Teorema 8.11.

Teorema 9.7. *Para toda sucesión básica normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y toda sucesión $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de barreras en $\mathbb{N}$, existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que la subsucesión $(x_i)_{i\in M}$ induce una norma $|||\cdot|||$ en el espacio c_{00} tal que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un $(\mathcal{B}_i\restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}$-modelo asintótico por bloques de $(x_i)_{i\in M}$.*

Demostración. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$ y $\varepsilon_i \searrow 0$. Por el Lema 8.16, podemos encontrar $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $S = \{s_1 \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1 \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{k-1}}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{k-1}})$ cumplen la desigualdad

$$\Big|\|\sum_{j=1}^{k} a_j\mathcal{X}(s_j)\| - \|\sum_{j=1}^{k} a_j\mathcal{X}(t_j)\|\Big| < \frac{\varepsilon_\ell}{2}, \text{ siempre que } \min(s_1\cup t_1) = m_\ell, \tag{12}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Es fácil verificar que el conjunto $Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k\restriction_M)$ con la relación $\leq$, definida como

$$\begin{aligned} &S < T \text{ si y solo si } \max(s_1) < \min(t_1) \quad \text{y} \\ &S = T \text{ si } \cup_{i\leq k} s_i = \cup_{i\leq k} t_i \text{ (como conjuntos)} \end{aligned}$$

para cualesquiera $S = \{s_1 \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1 \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k\restriction_M)$, es un conjunto dirigido. Consideremos la red $\big(\beta_k(S)\big)_{S\in Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k\restriction_M)}$, donde

$$\beta_k(S)(\sum_{i=1}^{k} a_ie_i) = \|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}(s_i)\| \text{ para todo } (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k,$$

en el espacio métrico compacto $(\mathcal{N}_k, d_k)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_\ell \leq 2\varepsilon$ y $\ell \geq k$. Por la propiedad ii) de las barreras podemos hallar $R =$

$\{r_1, \ldots, r_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ tal que $\text{mín}(r_1) = m_\ell$. Observemos que para cualquier par $S,\ T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ resulta que

$$\begin{aligned} T \leq S &\Leftrightarrow \text{máx}(t_1) \leq \text{mín}(s_1) \text{ ó } \cup_{i\leq k} t_i = \cup_{i\leq k} s_i \\ &\Leftrightarrow S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/\,\text{máx}(t_1)}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/\,\text{máx}(t_1)}) \cup \{T\}. \end{aligned}$$

Lo que incide en que si $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ y $S, T \geq R$, entonces

$$d_k\big(\beta_k(S), \beta_k(T)\big) < \frac{\varepsilon_{\ell'}}{2} \leq \frac{\varepsilon_\ell}{2} \leq \varepsilon \text{ donde } \text{mín}(s_1 \cup t_1) = m_{\ell'} \text{ para algún } \ell' \in \mathbb{N}.$$

Es decir, $(\beta_k(S))_{S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)}$ es una red de Cauchy. Por lo tanto, existe $\rho_k \in \mathcal{N}_k$ tal que la red $\big(\beta_k(S)\big)_{S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)}$ converge a ρ_k. Vamos a mostrar que

$$\lim_{Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M) \ni S \to \infty} \beta_k(S) = \rho_k. \tag{13}$$

Por la convergencia de la red, dado $\varepsilon > 0$ existe $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ tal que $d_k(\beta_k(S), \rho_k) < \varepsilon$ si $S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ y $S \geq T$. Lo cual implica que

$$d_k(\beta_k(S), \rho_k) < \varepsilon \text{ para todo } S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/\,\text{máx}(t_1)}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/\,\text{máx}(t_1)}).$$

En consecuencia, el Lema 8.4 asegura que ρ_k es una norma para $\mathbb{R}^k$.

Ahora, construyamos una norma a partir de las normas ρ_k's que encontramos anteriormente. Consideramos el espacio vectorial c_{00} y su base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Definimos la función $|||\cdot||| : c_{00} \to [0, \infty)$ como

$$|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = \rho_k\big(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\big),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $\sum_{i=1}^{k} a_i e_i \in c_{00}$. Notemos que $|||\cdot|||$ está bien definida ya que para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $S = \{s_1, \ldots, s_{k+1}\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_{k+1} \restriction_M)$ resulta que

$$\beta_{k+1}(S)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i + 0e_{k+1}\right) = \beta_k(S \setminus \{s_{k+1}\})\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right),$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por consiguiente, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_{k+1}\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i + 0e_{k+1}\right) &= \lim_{Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_{k+1}\restriction_M)\ni S\to\infty} \beta_{k+1}(S)\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i + 0e_{k+1}\right)\\ &= \lim_{Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_{k}\restriction_M)\ni T\to\infty} \beta_{k}(T)\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)\\ &= \rho_k\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)\end{aligned}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Además, $|||\cdot|||$ es una norma para c_{00} gracias a que, para cada $k \in \mathbb{N}$, ρ_k es una norma para $\mathbb{R}^k$. Denotemos por $(E, |||\cdot|||)$ al espacio de Banach resultante de la completación del espacio normado $(c_{00}, |||\cdot|||)$. Propongamos a la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como el posible $(\mathcal{B}\restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}-$modelo asintótico por bloques de $(x_i)_{i\in M}$. En primer lugar, mostremos que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $(E, |||\cdot|||)$. Por la definición del espacio vectorial c_{00} y el espacio de Banach $(E, |||\cdot|||)$, sabemos que E es la completación de $\langle\{e_i : i \in \mathbb{N}\}\rangle$ bajo la norma $|||\cdot|||$. Como la sucesión $(x_i)_{i\in M}$ es básica, existe $C \geq 1$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ y todo $S \in Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_m\restriction_M)$ se cumple que

$$\beta_n(\{s_1,\ldots,s_n\})(\sum_{i=1}^n a_ie_i) = \|\sum_{i=1}^n a_i\mathcal{X}(s_i)\| \leq C\|\sum_{i=1}^m a_i\mathcal{X}(s_i)\| = C\beta_m(S)(\sum_{i=1}^m a_ie_i),$$

para toda $(a_i)_{i=1}^m \in [-1,1]^m$. De donde se puede deducir que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$ la desigualdad

$$|||\sum_{i=1}^n a_ie_i||| = \rho_n(\sum_{i=1}^n a_ie_i) \leq C\rho_m(\sum_{i=1}^m a_ie_i) = C|||\sum_{i=1}^m a_ie_i|||$$

es válida para todo $(a_i)_{i=1}^m \in [-1,1]^m$. El Teorema 6.6 nos permite concluir que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $(E, |||\cdot|||)$. Finalmente probemos que la base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisface la condición para ser un $(\mathcal{B}_i\restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}-$modelo asintótico por bloques de $(x_i)_{i\in M}$. Para ello, fijamos $k \in \mathbb{N}$ y $S \in Bl(\mathcal{B}_1\restriction_{M/m_{k-1}}, \ldots, \mathcal{B}_k\restriction_{M/m_{k-1}})$, donde $\mathrm{mín}(s_1) = m_\ell$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$. Por la convergencia (13), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $T = \{t_1,\ldots,t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1\restriction_{M/n}, \ldots, \mathcal{B}_k\restriction_{M/n})$ se satisface que

$$\left|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\| - |||\sum_{i=1}^k a_ie_i|||\right| < \frac{\varepsilon_\ell}{2}, \tag{14}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Sea $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/\max\{n,m_\ell\}}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/\max\{n,m_\ell\}}$) arbitrario. Teniendo en cuenta (12) y (14) se obtiene que

$$\begin{aligned} \Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| | \sum_{i=1}^k a_i e_i \| | \Big| \leq & \Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| \\ & + \Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| - \| | \sum_{i=1}^k a_i e_i \| | \Big| < \varepsilon_\ell, \end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. □

Una consecuencia directa del teorema anterior es el hecho de que una sucesión básica normalizada puede originar más de un modelo asintótico por bloques, cada uno relacionado a una distinta sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. La pregunta natural que surgió en el proceso de elaboración del trabajo [12] fue:

¿Existe alguna conexión entre los diversos modelos asintóticos por bloques generados por una misma sucesión básica normalizada?

Esta pregunta motiva un nuevo tema de investigación que nos permitirá establecer un vínculo entre los modelos dispersos y los modelos asintóticos por bloques. En especial, se busca descartar que todos los modelos asintóticos por bloques de una misma sucesión básica normalizada sean isomorfos.

A continuación presentamos dos $\mathcal{B}-$modelos asintóticos por bloques, para distintas $\mathcal{B}$ barreras en $\mathbb{N}$, de una sucesión básica normalizada, que fueron descritos en [12], los cuales nos permiten concluir que sus normas asociadas no son iguales pero son equivalentes.

Ejemplo 9.8. Primero construimos un espacio de Banach, que posea una sucesión básica, a partir del espacio vectorial c_{00} y un conjunto normante. Dados $n, m \in \mathbb{N}/1$ con $n < m$, consideremos el conjunto normante

$$W = G_0 \cup \left\{ \frac{n+1}{2n} \sum_{i \in s} \pm e_i^* : s \in [\mathbb{N}]^n \right\} \cup \left\{ \frac{m+1}{2m} \sum_{i \in s} \pm e_i^* : s \in [\mathbb{N}]^m \right\},$$

donde $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es la base canónica del espacio vectorial c_{00}. La completación del espacio normado $(c_{00}, \|\cdot\|_W)$ se denotará como $(X_W, \|\cdot\|_W)$. Ahora, veamos que la elección del conjunto normante W le aporta a la norma las siguientes propiedades:

Observación 9.9. Dados $k \in \mathbb{N}$ y $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ se cumple que

(1) $\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i\|_W$ para todo $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$,

(2) $\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^k a_{\sigma(i)} e_i\|_W$ para cada permutación $\sigma : \{1,\dots,k\} \to \{0,\dots,k\}$, y

(3) $\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^k a_i e_{t(i)}\|_W$ para todo $t \in [\mathbb{N}]^k$.

Demostración de la observación. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Fijemos una función $f \in W$ arbitraria. Por definición $f = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i e^*_{s(i)}$ para algunos $s \in [\mathbb{N}]^\ell$ y $(\gamma_i)_{i=1}^\ell \in \{-1,1\}^\ell$, con $\ell \in \{1,n,m\}$. Entonces

$$f(\sum_{i=1}^k a_i e_i) = \sum_{i=1}^k a_i f(e_i) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^k a_i \gamma_i \chi_s(i).$$

(1) Dado $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$, consideremos la sucesión finita $(\delta_i)_{i=1}^\ell \in \{-1,1\}^\ell$, definida como $sgn(\delta_i) = sgn(\varepsilon_i a_i)$ para cada $i \le \ell$, y $g = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^\ell \delta_i e^*_{s(i)} \in W$. Como

$$g(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i g(e_i) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^k \delta_i \varepsilon_i a_i \chi_s(i) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^k |a_i| \chi_s(i)$$

resulta que

$$f(\sum_{i=1}^k a_i e_i) \le g(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i) \le \|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i\|_W.$$

En consecuencia

$$\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W \le \|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i\|_W.$$

Como $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$ es arbitrario se tiene que la desigualdad anterior se satisface para todo $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$. Por lo tanto, podemos concluir que

$$\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i\|_W$$

para cada $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$.

Para la prueba de los siguientes incisos podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_i \geq 0$ y $\gamma_i = 1$ para todo $i \leq k$, esto es, gracias a lo anterior y a la definición de la norma.

(2) Para una permutación fija $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$, definamos $\hat{\sigma} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ para todo $i \leq k$ y $\hat{\sigma}(i) = i$ para todo $i > k$. Consideremos el conjunto $r := \{\hat{\sigma}^{-1}(s(1)), \ldots, \hat{\sigma}^{-1}(s(\ell))\}$. Primero veamos que

$$\begin{aligned} i \in r \cap \{1, \ldots, k\} &\Leftrightarrow i = \hat{\sigma}^{-1}(s(j)) \in \{1, \ldots, k\} \text{ para algún } j \leq \ell \\ &\Leftrightarrow \sigma(i) = \hat{\sigma}(i) = \hat{\sigma}(\hat{\sigma}^{-1}(s(j)) = s(j) \in \{1, \ldots, k\} \text{ para algún } j \leq \ell \\ &\Leftrightarrow \sigma(i) \in s \cap \{1, \ldots, k\}. \end{aligned}$$

Para el funcional $g = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i=1}^{\ell} e^*_{r(i)} \in W$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} g(\sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)} e_i) &= \sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)} g(e_i) = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)} \chi_r(i) = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i \in r \cap \{1,\ldots,k\}} a_{\sigma(i)} \\ &= \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{\sigma(i) \in s \cap \{1,\ldots,k\}} a_{\sigma(i)} = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)} \chi_s(\sigma(i)) \\ &= \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_s(j) = f(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i). \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \|_W \leq \| \sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)} e_i \|_W$$

se satisface para la permutación σ que fue tomada arbitrariamente. Por ende, podemos concluir que

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \|_W = \| \sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)} e_i \|_W,$$

para toda permutación σ de 1 hasta k.

(3) Fijemos $t \in [\mathbb{N}]^k$ y tomemos una permutación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumpla que $\sigma(i) = t(i)$ para todo $i \leq k$ y $\sigma(i) = i$ para todo $i > t(k)$. Consideremos

el conjunto $r := \{\sigma(s(1)), \ldots, \sigma(s(\ell))\}$. Primero notemos que

$$\begin{aligned}\sigma(i) \in r \cap t &\Leftrightarrow \sigma(i) = \sigma(s(j)) \in t \ \text{ para algún } j \leq \ell\\ &\Leftrightarrow i = s(j) \in \{1, \ldots, k\} \text{ para algún } j \leq \ell\\ &\Leftrightarrow i \in s \cap \{1, \ldots, k\}.\end{aligned}$$

De aquí podemos observar que para el funcional $g = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i=1}^{\ell} e^*_{r(i)} \in W$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}g(\sum_{i=1}^{k} a_i e_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{k} a_i g(e_{\sigma(i)}) &= \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_r(\sigma(i)) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{\sigma(i)\in r\cap t} a_i\\ &= \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i\in s\cap\{1,\ldots,k\}} a_i = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{k} a_i\chi_s(i)\\ &= f(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i).\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_W \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{\sigma(i)}\|_W = \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{t(i)}\|_W.$$

Como $t \in [\mathbb{N}]^k$ es arbitrario se tiene que la desigualdad anterior se satisface para todo elemento en $[\mathbb{N}]^k$. Por lo tanto, podemos concluir que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{t(i)}\|_W$$

para todo $t \in [\mathbb{N}]^k$. $\square$

En lo que resta de este ejemplo, por las condiciones de los primeros dos incisos de la Observación 9.9, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_k \geq 0$.

Enseguida, vamos a demostrar que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es básica. Para ello, usemos el Teorema 6.6. Fijemos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \leq q$ y $(a_i)_{i=1}^{q} \in [0,1]^q$ arbitrarios. Luego, fijemos $f \in W$. Como se mencionó en las observaciones previas $f = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{\ell}\gamma_i e^*_{s(i)}$ para algunos $s \in [\mathbb{N}]^{\ell}$ y $(\gamma_i)_{i=1}^{\ell} \in \{-1,1\}^{\ell}$, con $\ell \in \{1,n,m\}$. Más aún, podemos considerar $(\gamma_i)_{i=1}^{\ell} = (1,\ldots,1)$ gracias al primer inciso de la Observación 9.9 y a que $(a_i)_{i=1}^{q} \in [0,1]^q$. Como $\{1,\ldots,p\}\cap s \subseteq \{1,\ldots,q\}\cap s$, se obtiene que

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{p} a_i e_i) &= \sum_{i=1}^{p} a_i f(e_i) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i\in\{1,\ldots,p\}\cap s} a_i \leq \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i\in\{1,\ldots,q\}\cap s} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{q} a_i f(e_i) = f(\sum_{i=1}^{q} a_i e_i). \end{aligned}$$

En consecuencia se deduce que $\|\sum_{i=1}^{p} a_i e_i\|_W \leq \|\sum_{i=1}^{q} a_i e_i\|_W$. De aquí podemos concluir que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para el espacio de Banach $(X_W, \|\cdot\|_W)$.

Ahora, vamos a expresar a la norma $\|\cdot\|_W$ mediante una fórmula conveniente: Para todo $t \in FIN$ tal que $|t| = k \geq n$ tenemos que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{t(i)}\|_W = \begin{cases} a_1 & \text{si } a_1 \geq \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i \\ & \text{y } a_1 \geq \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{\min\{k,m\}} a_i, \\ \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i & \text{si } a_1 \leq \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i \\ & \text{y } \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{\min\{k,m\}} a_i, \\ \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{\min\{k,m\}} a_i & \text{si } a_1 \leq \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{\min\{k,m\}} a_i \\ & \text{y } \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{\min\{k,m\}} a_i, \end{cases} \tag{$*$}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^{k} \in [0,1]^k$. En particular

$$\|\sum_{i=1}^{k} e_{t(i)}\|_W = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si } k = n \\ \frac{(m+1)k}{2m} & \text{si } n < k < m \\ \frac{m+1}{2} & \text{si } m \leq k \end{cases}.$$

Por el algoritmo de la división sabemos que existe $q, r \in \mathbb{Z}$ con $r < n$ tal que $m = qn + r$. Tomando en cuenta tal resultado y $(*)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo

$S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl^k([\mathbb{N}]^n)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W &= \| \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} e_{s_i(j)}}{\| \sum_{j=1}^{n} e_{s_i(j)} \|_W} \right) \|_W = \frac{2}{n+1} \| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_i e_{s_i(j)} \|_W \\
&= \frac{2}{n+1} \begin{cases} \frac{n+1}{2} a_1 & \text{si } \frac{n+1}{2} a_1 \geq \frac{m+1}{2m} h((a_i)_{i=1}^k) \\ \frac{m+1}{2m} h((a_i)_{i=1}^k) & \text{si } \frac{n+1}{2} a_1 \leq \frac{m+1}{2m} h((a_i)_{i=1}^k) \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_1 & \text{si } \frac{n+1}{2} a_1 \geq \frac{m+1}{2m} h((a_i)_{i=1}^k) \\ \frac{m+1}{(n+1)m} h((a_i)_{i=1}^k) & \text{si } \frac{n+1}{2} a_1 \leq \frac{m+1}{2m} h((a_i)_{i=1}^k) \end{cases} \\
&\text{en donde } h((a_i)_{i=1}^k) = \text{mín}\{n \sum_{i=1}^{k} a_i, n \sum_{i=1}^{q} a_i + r a_{q+1}\},
\end{aligned}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [0,1]^k$. Igualmente, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl^k([\mathbb{N}]^m)$, resulta que

$$\begin{aligned}
\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(t_i) \|_W &= \| \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{\sum_{j=1}^{m} e_{t_i(j)}}{\| \sum_{j=1}^{m} e_{t_i(j)} \|_W} \right) \|_W = \frac{2}{m+1} \| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} a_i e_{t_i(j)} \|_W \\
&= \frac{2}{m+1} \left(\frac{m+1}{2} a_1 \right) = a_1
\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [0,1]^k$. Además, observemos que

$$\frac{m+1}{(n+1)m} \text{mín}\{n \sum_{i=1}^{k} a_i, n \sum_{i=1}^{q} a_i + r a_{q+1}\} \leq \frac{m+1}{(n+1)m} \text{mín}\{nka_1, ma_1\}$$

ya que $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 0$. Por otra parte, si

$$\frac{n+1}{2} a_1 \leq \frac{m+1}{2m} \text{mín}\{n \sum_{i=1}^{k} a_i, n \sum_{i=1}^{q} a_i + r a_{q+1}\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
a_1 = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n+1}{2} a_1 \right) &\leq \frac{2}{n+1} \left(\frac{m+1}{2m} \text{mín}\{n \sum_{i=1}^{k} a_i, n \sum_{i=1}^{q} a_i + r a_{q+1}\} \right) \\
&= \frac{m+1}{(n+1)m} \text{mín}\{n \sum_{i=1}^{k} a_i, n \sum_{i=1}^{q} a_i + r a_{q+1}\}.
\end{aligned}$$

Lo cual implica que, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $S \in Bl^k([\mathbb{N}]^n)$ y $T \in Bl^k([\mathbb{N}]^m)$, se cumpla la desigualdad

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(t_i)\|_W \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W \leq \frac{m+1}{(n+1)m} \min\{nk, m\} \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(t_i)\|_W, \tag{15}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [0,1]^k$.

Finalmente, aplicando dos veces el Teorema 9.7, primero para la barrera $[\mathbb{N}]^n$ y después para la barrera $[\mathbb{N}]^m$, podemos encontrar un conjunto $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que la subsucesión $(e_i)_{i \in M}$ genera a $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ como $[M]^n$-modelo disperso y como $[M]^m$-modelo disperso, es decir, para cada $\ell \in \{n, m\}$ existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl^k([M/m_{k-1}]^\ell)$ se tiene que

$$\left| \|\sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{E}(s_j)\|_W - \|\sum_{j=1}^{k} a_j e_j\|_\ell \right| < \varepsilon_{n_1} \text{ donde } \min(s_1) = m_{n_1} \text{ para algún } n_1 \in \mathbb{N},$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Recordemos que, para cada $\ell \in \{n, m\}$, se tiene que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_\ell = \lim_{Bl^k([M]^\ell) \ni S \to \infty} \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ y

$$E_\ell = [\{e_i : i \in \mathbb{N}\}] \text{ respecto a la norma } \|\cdot\|_\ell.$$

Por los cálculos anteriores y suponiendo que $(a_i)_{i=1}^k$ satisface que $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 0$ con $k \in \mathbb{N}$, se concluye que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_n = \begin{cases} a_1 & \text{si } \frac{n+1}{2} a_1 \geq \frac{m+1}{2m} h((a_i)_{i=1}^k) \\ \frac{m+1}{(n+1)m} h((a_i)_{i=1}^k) & \text{si } \frac{n+1}{2} a_1 \leq \frac{m+1}{2m} h((a_i)_{i=1}^k) \end{cases},$$

recordando que $h((a_i)_{i=1}^k) = \min\{n \sum_{i=1}^{k} a_i, n \sum_{i=1}^{q} a_i + r a_{q+1}\}$, y

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_m = a_1.$$

En particular, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|\sum_{i=1}^{k} e_i\|_n = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ \frac{nk(m+1)}{(n+1)m} & \text{si } 1 < k \leq q \\ \frac{m+1}{n+1} & \text{si } q < k \end{cases}$$

$$\|\sum_{i=1}^{k} e_i\|_m = 1.$$

Además, por la desigualdad (15) y propiedades del límite, para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_m \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_n \leq \frac{m+1}{n+1}\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_m$$

para todo $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1,1]^k$.

Por lo tanto, los modelos asintóticos generados por $(e_i)_{i\in M}$ respecto a las barreras $[M]^n$ y $[M]^m$ poseen distintas normas que resultan ser equivalentes. Lo cual implica que $(E_n, \|\cdot\|_n)$ y $(E_m, \|\cdot\|_m)$ son espacios de Banach isomorfos.

El siguiente ejemplo muestra que en general un modelo asintótico por bloques no es disperso.

Ejemplo 9.10. Consideremos la base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Banach anterior $(X_W, \|\cdot\|_W)$ con $n = 2$ y $m = 8$. De acuerdo con el Teorema 9.7 podemos encontrar $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y una norma $\|\cdot\|_{2,8}$ tal que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bajo dicha norma es $([M]^2, [M]^8, \ldots, [M]^2, [M]^8, \ldots)$-modelo asintótico por bloques de $(e_i)_{i\in M}$.

Antes de probar que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión dispersa en la norma $\|\cdot\|_{2,8}$ recordemos que

$$\|\sum_{i=1}^{2k} a_i e_i\|_{2,8} = \lim_{Bl([\mathbb{N}]^2,[\mathbb{N}]^8,\ldots,[\mathbb{N}]^2,[\mathbb{N}]^8)\ni\{s_1,\ldots,s_{2k}\}\to\infty} \|\sum_{i=1}^{2k} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [-1,1]^k$. También tengamos presente, como se mostró en el ejemplo previo, que para cada $k \in \mathbb{N}$, todo

$S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl^k([\mathbb{N}]^2)$ y todo $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl^k([\mathbb{N}]^8)$ se resulta que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W = \begin{cases} a_1 & \text{si } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}\sum_{i=1}^{\text{mín}\{k,4\}} a_i \\ \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{\text{mín}\{k,4\}} a_i & \text{si } \frac{3}{2}a_1 \leq \frac{9}{8}\sum_{i=1}^{\text{mín}\{k,4\}} a_i \end{cases}$$

y

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(t_i)\|_W = a_1,$$

para cualesquiera $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$.

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} \|e_1 + e_3\|_{2,8} &= \lim_{Bl([\mathbb{N}]^2,[\mathbb{N}]^8,[\mathbb{N}]^2)\ni\{s_1,s_2,s_3\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_1) + \mathcal{E}(s_3)\|_W \\ &= \lim_{Bl^2([\mathbb{N}]^2)\ni\{s_1,s_2\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_1) + \mathcal{E}(s_2)\|_W \\ &= \lim_{Bl^2([\mathbb{N}]^2)\ni\{s_1,s_2\}\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ &\text{y} \\ \|e_2 + e_4\|_{2,8} &= \lim_{Bl([\mathbb{N}]^2,[\mathbb{N}]^8,[\mathbb{N}]^2,[\mathbb{N}]^8)\ni\{s_1,s_2,s_3,s_4\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_2) + \mathcal{E}(s_4)\|_W \\ &= \lim_{Bl^2([\mathbb{N}]^8)\ni\{t_1,t_2\}\to\infty} \|\mathcal{E}(t_1) + \mathcal{E}(t_2)\|_W \\ &= \lim_{Bl^2([\mathbb{N}]^8)\ni\{t_1,t_2\}\to\infty} 1 = 1, \end{aligned}$$

lo cual muestra que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es dispersa.

Finalmente, ejemplifiquemos que la equivalencia entre dos modelos asintóticos por bloques no preserva la propiedad de dispersión.

Ejemplo 9.11. Nuevamente, consideremos la base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para el anterior espacio de Banach $(X_W, \|\cdot\|_W)$, donde $n = 2$ y $m = 8$. Por el Teorema 9.7 podemos encontrar un conjunto $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con una norma $\|\cdot\|_8$ es un $[M]^8-$modelo disperso de $(e_i)_{i\in M}$ y $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con una norma $\|\cdot\|_{2,2,8}$ un $([M]^2, [M]^2, [M]^8, \ldots)-$modelo asintótico por bloques de

$(e_i)_{i\in M}$. Recordemos como están dadas las normas anteriores:

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_8 = \lim_{Bl^k([M]^8)\ni\{s_1,\ldots,s_k\}\to\infty} \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W \tag{16}$$

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_{2,2,8} = \lim_{Bl([M]^2,[M]^2,[M]^8,\ldots,[M]^8)\ni\{s_1,\ldots,s_k\}\to\infty} \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W \tag{17}$$

para cada $k\in\mathbb{N}$ y todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Mostraremos que estos dos modelos asintóticos por bloques son equivalentes, pero solo uno de ellos es una sucesión dispersa. Para ello analizaremos las normas $\|\cdot\|_8$ y $\|\cdot\|_{2,2,8}$ a través de las identidades (17) y (16).

En el Ejemplo 9.8 se establece que $\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W = \text{máx}\{|a_i| : i\le k\}$ para cada $k\in\mathbb{N}$, cualquier $S=\{s_1,\ldots,s_k\}\in Bl([M]^2,[M]^2,[M]^8,\ldots,[M]^8)$ y toda $(a_i)_{i=1}^k\in[-1,1]^k$. Lo cual implica que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_8 = \text{máx}\{|a_i| : i\le k\} \tag{18}$$

para cualquier $k\in\mathbb{N}$ y toda $(a_i)_{i=1}^k\in[-1,1]^k$.

Por el primer inciso de la Observación 9.9 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los coeficientes de las combinaciones lineales de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son no negativos al calcular sus normas en $\|\cdot\|_W$. Por otra parte, gracias a la fórmula $(*)$ de $\|\cdot\|_W$ obtenemos lo siguiente:

Para todo $S=\{s_1,s_2\}\in Bl^2([\mathbb{N}]^2)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|a_1\mathcal{E}(s_1)+a_2\mathcal{E}(s_2)\|_W &= \|a_1\left(\frac{\sum_{j=1}^2 e_{s_1(j)}}{\|\sum_{j=1}^2 e_{s_1(j)}\|_W}\right)+a_2\left(\frac{\sum_{j=1}^2 e_{s_2(j)}}{\|\sum_{j=1}^2 e_{s_2(j)}\|_W}\right)\|_W\\
&= \frac{2}{3}\|\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)}\|_W\\
&= \frac{2}{3}\begin{cases} \frac{3}{2}\text{máx}\{a_1,a_2\} & \text{si } \frac{3}{2}\text{máx}\{a_1,a_2\}\ge \frac{9}{8}(a_1+a_2)\\ \frac{9}{8}(a_1+a_2) & \text{si } \frac{3}{2}\text{máx}\{a_1,a_2\}< \frac{9}{8}(a_1+a_2)\end{cases}\\
&= \begin{cases} \text{máx}\{a_1,a_2\} & \text{si } \frac{3}{2}\text{máx}\{a_1,a_2\}\ge \frac{9}{8}(a_1+a_2)\\ \frac{3}{4}(a_1+a_2) & \text{si } \frac{3}{2}\text{máx}\{a_1,a_2\}< \frac{9}{8}(a_1+a_2)\end{cases},
\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^2 \in [0,1]^2$. Además, respetando las condiciones para calcular la norma anterior, se deduce que cualquier $S \in Bl^2([\mathbb{N}]^2)$ cumple la desigualdad

$$\text{máx}\{a_1, a_2\} \leq \|a_1\mathcal{E}(s_1) + a_2\mathcal{E}(s_2)\|_W \leq \frac{3}{2}\,\text{máx}\{a_1, a_2\}, \tag{19}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^2 \in [0,1]^2$. Ahora, si $S = \{s_1, s_2, s_3\} \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{3} a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W &= \|a_1\left(\frac{\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}}{\|\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}\|_W}\right) + a_2\left(\frac{\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}}{\|\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}\|_W}\right) \\
&\quad + a_3\left(\frac{\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)}}{\|\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)}\|_W}\right)\|_W \\
&= \frac{2}{3}\|\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)}\|_W
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{cases}
\frac{3}{2}a_1 & \text{si } a_1 \geq a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \\
\frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) & \text{si } a_1 \geq a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 < \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \\
\frac{3}{2}a_1 & \text{si } a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_2 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_3) \\
\frac{9}{8}(a_1 + a_3) & \text{si } a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_2 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 < \frac{9}{8}(a_1 + a_3) \\
\frac{3}{2}a_2 & \text{si } a_2 \geq a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \\
\frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) & \text{si } a_2 \geq a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 < \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \\
\frac{3}{2}a_2 & \text{si } a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 \geq \frac{9}{8}(a_2 + a_3) \\
\frac{9}{8}(a_2 + a_3) & \text{si } a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 < \frac{9}{8}(a_2 + a_3) \\
\frac{3}{2}a_3 & \text{si } \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{1}{3}a_3 \geq a_2
\end{cases}$$

$$= \begin{cases}
a_1 & \text{si } a_1 \geq a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \\
\frac{3}{4}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) & \text{si } a_1 \geq a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 < \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \\
a_1 & \text{si } a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_2 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_3) \\
\frac{3}{4}(a_1 + a_3) & \text{si } a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_2 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 < \frac{9}{8}(a_1 + a_3) \\
a_2 & \text{si } a_2 \geq a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \\
\frac{3}{4}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) & \text{si } a_2 \geq a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 < \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \\
a_2 & \text{si } a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 \geq \frac{9}{8}(a_2 + a_3) \\
\frac{3}{4}(a_2 + a_3) & \text{si } a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 < \frac{9}{8}(a_2 + a_3) \\
a_3 & \text{si } \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{1}{3}a_3 \geq a_2
\end{cases} \tag{20}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^3 \in [0,1]^3$. Asímismo, considerando todos los posibles órdenes del conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ y acatando las relaciones establecidas en (20), llegamos a que cada $S \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8)$ cumple que

$$\text{máx}\{a_1, a_2, a_3\} \leq \| \sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W \leq 2 \,\text{máx}\{a_1, a_2, a_3\}, \tag{21}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^3 \in [0,1]^3$.

Para cuando $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, [\mathbb{N}]^8)$ resulta que

$$\begin{aligned}\| \sum_{i=1}^{4} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W &= \| \sum_{i=1}^{2} a_i \left(\frac{\sum_{j=1}^{2} e_{s_i(j)}}{\| \sum_{j=1}^{2} e_{s_i(j)} \|_W} \right) + \sum_{i=3}^{4} a_i \left(\frac{\sum_{j=1}^{8} e_{s_i(j)}}{\| \sum_{j=1}^{8} e_{s_i(j)} \|_W} \right) \|_W \\ &= \frac{2}{3} \| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)}) \|_W.\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$. Tomemos un elemento $S \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, [\mathbb{N}]^8)$ y analicemos la norma

$$\| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} \|_W$$

para cada $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$. Para ello examinemos dos casos: $a_4 \geq a_3$ y $a_3 \geq a_4$. Primero seleccionemos $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$ tal que $a_4 \geq a_3$. Por comodidad, en algunas ocasiones, denotaremos al vector $\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)}$ por x. Fijemos $f = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i \in s} e_i^*$ con $s \in [\mathbb{N}]^\ell$ para algún $\ell \in \{1, 2, 8\}$. Observemos que si $s \cap s_3 = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f\Big(\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} \Big) \\ &\leq \| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} \|_W. \end{aligned}$$

Cuando $s \cap s_3 \neq \emptyset$, podemos tomar un subconjunto t de $s_4 \backslash s$ con cardinalidad

$|s \cap s_3|$ y la función $g = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i \in t \cup (s \setminus s_3)} e_i^*$, de tal suerte que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ell+1}{2\ell}\left[\frac{|s \cap s_3| a_3}{3} + \sum_{i \in (s \setminus s_3)} e_i^*\big(x - \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)}\big)\right] \\
&\leq \frac{\ell+1}{2\ell}\left[\frac{|t| a_4}{3} + \sum_{i \in (s \setminus s_3)} e_i^*\big(x - \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)}\big)\right] \\
&= \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i \in t \cup (s \setminus s_3)} e_i^*\big(x - \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)}\big) \\
&= g\big(x - \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)}\big) \\
&\leq \| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)})\|_W.
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned}
\| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} &+ \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} \|_W \\
&\leq \| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} \|_W.
\end{aligned}$$

Como $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $(X_W, \|\cdot\|_W)$ es una base de Schauder con constante de base uno y una sucesión dispersa, tal y como se indica en el tercer inciso de la Observación 9.9, entonces si tomamos $s \in [\mathbb{N}]^8$ con $s > s_4$ la condición

$$\begin{aligned}
\| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} &+ \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} \|_W \\
&= \| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s(j)} \|_W \\
&\geq \| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} \|_W
\end{aligned}$$

es válida para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$. Así, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\|a_1(\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}) + a_2(\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}) + \frac{1}{3}a_3(\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)}) + \frac{1}{3}a_4(\sum_{j=1}^{8} e_{s_4(j)})\|_W \\ = \|a_1(\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}) + a_2(\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}) + \frac{1}{3}a_3(\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)})\|_W\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$ con $a_3 \geq a_4$. Para nuestro segundo caso $a_3 \geq a_4$, procediendo de manera similar al caso anterior llegamos a que

$$\begin{aligned}\|a_1(\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}) + a_2(\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}) + \frac{1}{3}a_3(\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)}) + \frac{1}{3}a_4(\sum_{j=1}^{8} e_{s_4(j)})\|_W \\ = \|a_1(\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}) + a_2(\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}) + \frac{1}{3}a_3(\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)})\|_W,\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$. Por lo tanto, para todo $S \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, [\mathbb{N}]^8)$ se tiene que

$$\|\sum_{i=1}^{4} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W = \begin{cases} \|a_1\mathcal{E}(s_1) + a_2\mathcal{E}(s_2) + a_3\mathcal{E}(s_3)\|_W & \text{si } a_3 \geq a_4 \\ \|a_1\mathcal{E}(s_1) + a_2\mathcal{E}(s_2) + a_4\mathcal{E}(s_4)\|_W & \text{si } a_4 \geq a_3 \end{cases},$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$. Adicionalmente, la identidad previa nos permite inferir que cualquier $S \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, [\mathbb{N}]^8)$ satisface la desigualdad

$$\text{máx}\{a_i : i \leq 4\} \leq \|\sum_{i=1}^{4} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W \leq 2\,\text{máx}\{a_i : i \leq 4\}, \tag{22}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$.

El caso $k = 4$ nos conduce a generalizar algunas características de la norma de los vectores que nos interesan:
Para cada $k \in \mathbb{N}/3$ y todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, \ldots, [\mathbb{N}]^8)$

resulta que

$$
\begin{aligned}
&\|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W \\
&= \begin{cases}
\|a_1\mathcal{E}(s_1)+a_2\mathcal{E}(s_2)+a_3\mathcal{E}(s_3)\|_W & \text{si } a_3 \geq a_j \ \forall 3 < j \leq k \\
\|a_1\mathcal{E}(s_1)+a_2\mathcal{E}(s_2)+a_4\mathcal{E}(s_4)\|_W & \text{si } a_4 \geq a_j \ \forall 3 \leq j \leq k \text{ con } j \neq 4 \\
& \vdots \\
\|a_1\mathcal{E}(s_1)+a_2\mathcal{E}(s_2)+a_k\mathcal{E}(s_k)\|_W & \text{si } a_k \geq a_j \ \forall 3 \leq j \leq k \text{ con } j \neq k
\end{cases}
\end{aligned}
$$

y, en consecuencia, se cumple la relación

$$\text{máx}\{a_i : i \leq k\} \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W \leq 2\,\text{máx}\{a_i : i \leq k\}, \tag{23}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [0,1]^k$.

Debido a las desigualdades (19), (21), (22) y (23) y a las identidades (17) y (18) se concluye que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_8 \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_{2,2,8} \leq 2\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_8$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$, es decir, $((e_i)_{i\in\mathbb{N}}, \|\cdot\|_8)$ y $((e_i)_{i\in\mathbb{N}}, \|\cdot\|_{2,2,8})$ son equivalentes como sucesiones básicas.

Sabemos por el Lema 9.6 que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión dispersa bajo la norma $\|\cdot\|_8$. Sin embargo, si consideramos los vectores e_1+e_2 y e_3+e_4 con la norma $\|\cdot\|_{2,2,8}$ resulta que

$$
\begin{aligned}
\|e_1+e_2\|_{2,2,8} &= \lim_{Bl^2([M]^2,[M]^2)\ni\{s_1,s_2\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_1)+\mathcal{E}(s_2)\|_W \\
&= \lim_{Bl^2([M]^2,[M]^2)\ni S\to\infty} \frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

y

$$\begin{aligned}
\|e_3+e_4\|_{2,2,8} &= \lim_{Bl([M]^2,[M]^2,[M]^8,[M]^8)\ni\{s_1,s_2,s_3,s_4\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_3)+\mathcal{E}(s_4)\|_W \\
&= \lim_{\in Bl^2([M]^8,[M]^8)\ni\{t_1,t_2\}\to\infty} \|\mathcal{E}(t_1)+\mathcal{E}(t_2)\|_W \\
&= \lim_{Bl^2([M]^2,[M]^2)\ni T\to\infty} \text{máx}\{1,1\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Entonces la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bajo la norma $\|\cdot\|_{2,2,8}$ no posee la propiedad de dispersión.

10 Teorema Hindman-Milliken

Los teoremas notables del trabajo [12] motivan un nuevo tema de investigación que gira al rededor del Teorema de Hindman- Milliken. Algunos conceptos y resultados inmediatos necesarios para comprender dicho tema los compartiremos con el lector en esta sección.

Definición 10.1. Sea $M\in[\mathbb{N}]^\omega$. Una *partición* $P=\{p_i : i\in I\}$ de un conjunto M es una familia de subconjuntos no vacíos de M tal que son disjuntos entre sí y satisfacen que $\bigcup_{i\in I} p_i = M$. Los elementos de una partición P serán llamados *bloques*.

Si P es una partición de algún subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, entonces P se denomina una *partición especial* si para todo par de bloques $p_i, p_j \in P$ se tiene que $p_i < p_j$, $p_i = p_j$ ó $p_i > p_j$.

Dadas P_1 y P_2 dos particiones especiales. Decimos que P_1 es *más gruesa* que P_2, o P_2 es *más fina* que P_1 y lo denotamos por $P_1 \sqsubseteq P_2$, si cada bloque de P_1 es la unión de bloques de P_2.

Notemos que si P es una partición especial cuya cardinalidad es infinita, entonces todos sus bloques son subconjuntos finitos.

En esta sección utilizaremos la siguiente notación:

- Para todo cardinal $\nu\le\omega$, denotemos por $\langle\omega\rangle^\nu$ a la familia de todas las particiones especiales P de algún subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $|P|=\nu$. En particular, $\langle\omega\rangle^\omega$ es el conjunto de todas las particiones especiales formadas por un número infinito de bloques.

- Para una partición especial P y un cardinal $\nu \leq \omega$ definimos $\langle P\rangle^\nu := \{Q \in \langle\omega\rangle^\nu : Q \sqsubseteq P\}$.
- Además, para un conjunto $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ denotaremos por $\mathsf{P}(M)$ a la familia de todas las particiones especiales de M.

Previamente los teoremas de tipo Ramsey fueron empleados para describir propiedades de las sucesiones de un espacio de Banach, como la oscilación y los modelos asintóticos (en particular los modelos dispersos). En esta dirección, usaremos el conocido Teorema de Hindman-Milliken, que a continuación enunciamos, para introducir nuevas ideas de oscilación y modelo disperso.

Teorema 10.2 (de Hindman-Milliken)**.** *Sean k, m números enteros positivos, $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ una partición y $\varphi : \langle Q\rangle^k \to \{1, \ldots, m\}$ una función, entonces existe $P \in \langle Q\rangle^\omega$ tal que φ es constante sobre $\langle P\rangle^k$.*

El teorema anterior es una versión más fuerte del Teorema de Ramsey (Teorema 3.2) y fue demostrado por K. Milliken en [17]. Otra consecuencia de este resultado, a la cual se le atribuye parte de su nombre, es el Teorema de Hindman [15].

De manera similar que en el Teorema de Ramsey es posible trasladar el Teorema de Hindman-Milliken a un espacio métrico con propiedades específicas.

Teorema 10.3 (de Hindman-Milliken para Analistas)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ una partición y $k \in \mathbb{N}$. Para cada función $\varphi : \langle Q\rangle^k \longrightarrow X$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \langle Q\rangle^\omega$ tal que*

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon$$

para todo S, $T \in \langle P\rangle^k$.

Demostración. Análoga al Teorema de Ramsey para Analistas. $\square$

Aplicando el teorema previo, de manera recursiva, y argumentos de diagonalización se puede concluir el siguiente resultado.

Corolario 10.4. *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Para cada función $\varphi : \langle Q\rangle^k \to X$ y cada sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ en $\mathbb{R}^+$ existe $P = \{p_i : i \in \mathbb{N}\} \in \langle Q\rangle^\omega$ tal que*

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon_{\min\{i \,:\, p_i \subseteq s_1 \cup t_1\}}$$

para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in \langle P\rangle^k$

Motivados por las ideas de la sección del Teorema de Ramsey, es posible definir una convergencia relacionada a la familia $\langle Q\rangle^\nu$ para algúna partición $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ y algún cardinal $\nu \leq \omega$.

Definición 10.5. Dados un espacio métrico (X, d), una partición $Q = \{q_i : i \in \mathbb{N}\} \in \langle\omega\rangle^\omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Una función $\varphi : \langle Q\rangle^k \to X$ converge a $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\varphi(S), x) < \varepsilon \text{ para todo } S \in \langle Q \backslash \{q_i\}_{i=1}^n\rangle^k.$$

Siguiendo el patrón de notación para las convergencias anteriormente definidas en este texto, denotaremos esta convergencia como

$$\lim_{\langle Q\rangle^k \ni S \to \infty} \varphi(S) = x.$$

En analogía al Corolario 3.8 se puede establecer lo siguiente:

Corolario 10.6. *Sean* (K, d) *un espacio métrico compacto,* $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ *y* $k \in \mathbb{N}$*. Para toda función* $\varphi : \langle Q\rangle^k \to K$ *existe* $P \in \langle Q\rangle^\omega$ *y* $x \in K$ *tal que*

$$\lim_{\langle P\rangle^k \ni S \to \infty} \varphi(S) = x.$$

Enseguida presentamos nuestra oscilación inspirada en el Teorema de Hindman-Milliken.

Definición 10.7. Dados un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, una partición $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ de $\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $(X, \|\cdot\|)$ es $(Q, k, \varepsilon)-$*oscilación bloque estable* si para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in \langle Q\rangle^k$ se satisface que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| < \varepsilon,$$

para cada $(a_i)_{j=1}^k \in [-1, 1]^k$. Si $Q = [\mathbb{N}]^1$, entonces decimos que la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $(k, \varepsilon)-$ oscilación bloque estable

Notemos que si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es (k,ε)-oscilación bloque estable para algún $k\in\mathbb{N}$, entonces es una $(Q,k,\varepsilon)-$oscilación bloque estable para toda $Q\in\langle\omega\rangle^\omega$ ya que $\langle Q\rangle^k\subseteq\langle[\mathbb{N}]^1\rangle^k$.

Siguiendo la afirmación del último inciso del Teorema 8.6, de una sucesión normalizada de un espacio de Banach podemos obtener una subsucesión que cumpla las condiciones de la Definición 10.7:

Teorema 10.8. *Dadas una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ y una partición $Q\in\langle\omega\rangle^\omega\cap\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Para cada $k\in\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon>0$ existen $M\in[\mathbb{N}]^\omega$ y $P\in\langle Q\rangle^\omega$ una partición de M, tal que $(x_i)_{i\in M}$ es (P,k,ε)-oscilación bloque estable.*

Demostración. Tomemos $k\in\mathbb{N}$, una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ y $Q\in\langle\omega\rangle^\omega\cap\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Definimos la función $\nu_k:\langle Q\rangle^k\to\mathcal{N}_k$ en $S=\{s_1,\ldots,s_k\}\in\langle Q\rangle^k$ como

$$\nu_k(S)\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)=\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\|,\quad\text{para cada}\quad(a_i)_{i=1}^k\in[-1,1]^k.$$

Fijando $\varepsilon>0$, el Teorema 10.3 nos dice que existe $P\in\langle Q\rangle^\omega$ tal que $d_k(\nu_k(S),\nu_k(T))<\varepsilon$ para toda S, $T\in\langle P\rangle^k\subseteq\langle Q\rangle^k$. En otras palabras, si $S,T\in\langle P\rangle^k$, entonces

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\|-\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\big|<\varepsilon,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k\in[-1,1]^k$. Por lo tanto, tomando $M=\cup P$, se concluye $(x_i)_{i\in M}$ es una sucesión (P,k,ε)-oscilación bloque estable. □

Considerando las funciones ν_k's definidas en la demostración previa y aplicando el Corolario 10.4 se obtiene la siguiente noción de asintoticidad.

Corolario 10.9. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $k\in\mathbb{N}$. Para toda sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $(X,\|\cdot\|)$ y toda sucesión $\varepsilon_i\searrow 0$ en $\mathbb{R}^+$, existe una partición $P=\{p_i:i\in\mathbb{N}\}\in\langle\omega\rangle^\omega$ tal que para toda $S=\{s_1,\ldots,s_k\}$, $T=\{t_1,\ldots,t_k\}\in\langle P\rangle^k$ se satisface que*

$$\big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i,b)\|-\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i,b)\|\big|<\varepsilon_{\min\{i:p_i\subseteq s_1\cup t_1\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

El corolario anterior se generaliza de la siguiente manera (comparar con el Lema 8.16).

Lema 10.10. *Para toda sucesión normalizada* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *en un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$*, toda partición* $Q \in \langle\omega\rangle^\omega \cap \mathsf{P}(\mathbb{N})$ *y toda sucesión* $\varepsilon_i \searrow 0$ *en* $\mathbb{R}^+$*, existe una partición* $P = \{p_i : i \in \mathbb{N}\} \in \langle Q\rangle^\omega$ *tal que para cada* $k \in \mathbb{N}$ *y cualesquiera* $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$*,* $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in \langle P \setminus \{p_1, \ldots, p_{k-1}\}\rangle^k$ *se cumple que*

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \varepsilon_{\text{mín}\{i:p_i\subseteq s_1\cup t_1\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Demostración. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, una partición $Q \in \langle\omega\rangle^\omega \cap \mathsf{P}(\mathbb{N})$ y una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$. Consideremos, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función ν_k. Al aplicar el Teorema de Hindman-Milliken para Analistas (Teorema 10.3) a la función ν_1 y a ε_1 se obtiene $P_1 = \{p_i^1 : i \in \mathbb{N}\} \in \langle[\mathbb{N}]^1\rangle^\omega$ tal que para todo $S = \{s_1\}$, $T = \{t_1\} \in \langle P_1\rangle^1$ se tiene que

$$\big|\|a_1\mathcal{X}(s_1)\| - \|a_1\mathcal{X}(t_1)\|\big| < \varepsilon_1,$$

para cada $a_1 \in [-1,1]$. Tomamos $p_1 := p_1^1$. Usando recursivamente el Teorema 10.3 en $\nu_i \restriction_{\langle P_{i-1}\setminus\{p_{i-1}\}\rangle^i}$ y ε_i para cada $i \in \mathbb{N}/1$, se construyen paralelamente una sucesión $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\langle\omega\rangle^\omega$ y una sucesión $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en FIN tales que

1. $p_i := p_1^i$, donde $p_1^i \in P_i$, para toda $i \in \mathbb{N}$.

2. $P_1 \in \langle Q\rangle^\omega$ y $P_{i+1} \in \langle P_i\setminus\{p_i\}\rangle^\omega \subseteq \langle P_i\rangle^\omega$ para cada $i \in \mathbb{N}$, en consecuencia $p_i < p_{i+1}$.

3. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in \langle P_k\rangle^k$ se cumple que

$$|\|\sum_{j=1}^k a_j\mathcal{X}(s_j)\| - \|\sum_{j=1}^k a_j\mathcal{X}(t_j)\|| < \varepsilon_k,$$

para cada $(a_j)_{j=1}^k \in [-1,1]^k$.

Ahora, verifiquemos que $P = \{p_i \in \mathbb{N}\}$ es la partición deseada. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y tomemos $S, T \in \langle P \backslash \{p_i\}_{i \leq k-1} \rangle^k$. Sea $m := \text{mín}\{i : p_i \subseteq (s_1 \cup t_1)\}$, debido a la construcción de P es fácil ver que $S, T \in \langle P \backslash \{p_i\}_{i \leq m-1} \rangle^k \subseteq \langle P_m \rangle^k$. Entonces las particiones especiales

$$\{s_i\}_{i=1}^k \cup \{p_{\text{máx}\{j:p_j \subseteq s_k\}+i-k}\}_{i=k+1}^m \quad \text{y} \quad \{t_i\}_{i=1}^k \cup \{p_{\text{máx}\{j:p_j \subseteq t_k\}+i-k}\}_{i=k+1}^m$$

pertenecen a $\langle P_m \rangle^m$. Lo cual implica que la desigualdad

$$\begin{aligned} \Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| = \Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) + \sum_{i=k+1}^m 0 \mathcal{X}(p_{\text{máx}\{j:p_j \subseteq s_k\}+i-k}) \| \\ - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) + \sum_{i=k+1}^m 0 \mathcal{X}(p_{\text{máx}\{j:p_j \subseteq t_k\}+i-k}) \| \Big| \\ < \varepsilon_{\text{mín}\{i:p_i \subseteq s_1 \cup t_1\}} \end{aligned}$$

se satisface para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$. □

Estamos listos para describir otro tipo de modelo disperso (comparar con las Definiciones 9.1 y 9.5). Modelos más generales que estos, llamados "strong asymptotic models", fueron introducidos y estudiados en el artículo [14], en donde los autores emplearon matrices cuyas filas son sucesiones básicas de un mismo espacio de Banach y que denominan "strong basic array".

Definición 10.11. Dada una sucesión básica normalizada $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \| \cdot \|)$ y una partición $P = \{p_i : i \in \mathbb{N}\} \in \langle \omega \rangle^\omega$ de $\mathbb{N}$. Una base de Schauder $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ para el espacio de Banach $(Y, \| \cdot \|_Y)$ es un *P-modelo disperso* de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ si existen una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ siempre que $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in \langle P \setminus \{p_i\}_{i \leq k-1} \rangle^k$ se cumple la condición

$$\Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i y_i \|_Y \Big| < \varepsilon_{\text{mín}\{i:p_i \subseteq s_1\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

Modificando la demostración del Teorema 9.6 se justifica el adjetivo disperso en la definición anterior.

A este punto, el lector debe estar ya familiarizado con la técnica empleada para probar la existencia de los modelos dispersos y los modelos asintóticos por bloques expuestos en este texto. La demostración del siguiente teorema sigue la misma metodología gracias al Lema 10.10.

Teorema 10.12. *Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $Q \in \langle\omega\rangle^\omega \cap \mathsf{P}(\mathbb{N})$, entonces existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $P \in \langle Q\rangle^\omega \cap \mathsf{P}(M)$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ genera un $P-$modelo disperso.*

Para introducir la última oscilación usaremos un teorema de tipo Ramsey más fuerte que el Teorema de Ramsey y el Teorema de Hindman, pero más debíl que el Teorema de Hindman-Milliken. Pero primero establecemos la notación del objeto central de dicho teorema y un atributo de este, el cual es consecuencia inmediata de su definición.

Si $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y α un cardinal tal que $\alpha \leq \omega$, entonces $\langle N\rangle^\alpha_\Sigma$ es la colección de conjuntos $s \in [\mathbb{N}]^\alpha$ tal que $s = \{\sum_{j\in t_i} j : i \leq \alpha\}$ para alguna sucesión $(t_i)_{i=1}^\alpha$ en $[N]^{<\omega}$ tal que $t_i \neq \emptyset$ y $t_i < t_{i+1}$ para cada $i < \alpha$.

Lema 10.13. *Si $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, α es un cardinal menor o igual a ω y $M \in \langle\mathbb{N}\rangle^\omega_\Sigma$, entonces $\langle M\rangle^\alpha_\Sigma \subseteq \langle N\rangle^\alpha_\Sigma$.*

Ahora si, enunciemos el teorema que motiva otro tipo de oscilación siguiendo las equivalencias del Teorema de Ramsey presentadas en el Teorema 8.6.

Teorema 10.14. *Para cada número natural $k \geq 2$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Dados $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $m \in \mathbb{N}$, para toda función $f : \langle N\rangle^k_\Sigma \to \{1, \ldots, m\}$ existe $M \in \langle N\rangle^\omega_\Sigma \cap \langle\{2^i : i \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}\rangle^\omega_\Sigma$ tal que f es constante en $\langle M\rangle^k_\Sigma$.*

2. *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y m un números natural. Para cada función $f : \langle N\rangle^k_\Sigma \to \{1, \ldots, m\}$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $M \in \langle N\rangle^\omega_\Sigma \cap \langle\{2^i : i \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}\rangle^\omega_\Sigma$ tal que $d(f(s), f(t)) < \varepsilon$ para todo $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in \langle M\rangle^k_\Sigma$.*

3. *Para cada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, toda $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe $M \in \langle\{2^i : i \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}\rangle^\omega_\Sigma$ tal que cualesquiera $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in \langle M\rangle^k_\Sigma$ satisfacen la desigualdad*

$$\left|\|\sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)}\| - \|\sum_{i=1}^k a_i x_{t(i)}\|\right| < \varepsilon,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

11 Espacio de Tsirelson

A continuación, introduciremos uno de los espacios de Banach más importantes en el Análisis Funcional, el espacio de Tsirelson. Su importancia radica en dar una respuesta negativa a la pregunta: Dado un espacio de Banach de dimensión infinita $(X, \|\cdot\|)$, ¿Es posible encontrar un subespacio Y de X, tal que este sea isomorfo a uno de los espacios clásicos de sucesiones c_0 o ℓ_p con $p \geq 1$? Este problema estuvo abierto durante muchos años. Por lo cual es merecedor de una sección propia en este trabajo. Dicho contraejemplo fue construido por B. S. Tsirelson en 1974 [21]. Sin embargo, la presentación que vamos a enunciar en este capítulo se debe a T. Fiegel y W. B. Johnson [11], la cual corresponde al dual del espacio original y posee la ventaja de dar una descripción analítica de la norma. Además, desarrollaremos algunas propiedades significativas.

Consideremos el espacio normado $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ y su base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Para cada $s \in FIN$, la función $P_s : c_{00} \longrightarrow c_{00}$, dada por $P_s(\sum_{i=1}^\infty a_i e_i) = \sum_{i\in s} a_i e_i$ para todo $\sum_{i=1}^\infty a_i e_i \in c_{00}$, se denomina la proyección sobre el conjunto s. Definamos inductivamente una sucesión de normas $(\|\cdot\|_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ sobre c_{00} como: Para cada $x \in c_{00}$ se tiene que

$$\|x\|_0 = \|x\|_\infty, y$$

$$\|x\|_{n+1} = \text{máx}\left\{\|x\|_n, \frac{1}{2}\,\text{máx}\left\{\sum_{i=1}^k \|P_{s_i}(x)\|_n\right\}\right\}, \text{para cada } n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

donde la función máximo “interno” varia sobre toda $k \in \mathbb{N}$ y toda sucesión finita $(s_i)_{i=1}^k$ en FIN tal que $k \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$.

Es fácil de ver que $\|\cdot\|_n$ es norma en c_{00} para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, la sucesión $(\|x\|_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ es creciente para todo $x \in c_{00}$ y

$$\|x\|_n \leq \sum_{i=1}^\infty |a_i| \text{ para cada } x = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i \in c_{00} \text{ y todo } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

En consecuencia, para cada $x \in c_{00}$, el $\lim_{i\to\infty} \|x\|_i$ existe, esta acotado por $\|x\|_{\ell_1}$ y

$$\|x\|_{n+1} = \max\left\{\|x\|_\infty, \frac{1}{2}\max\left\{\sum_{i=1}^{k}\|P_{s_i}(x)\|_n\right\}\right\}, \text{para cualquier } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Para cada $x \in c_{00}$ denotamos al $\lim_{i\to\infty} \|x\|_i$ por $\|x\|_T$ y observamos que $\|\cdot\|_T$ es una norma sobre c_{00}. Finalmente, el espacio de Tsirelson T es la completación de c_{00} respecto a la norma $\|\cdot\|_T$.

La construcción de la norma del espacio de Tsirelson mediante un conjunto normante es muy conocida en la literatura y es de mucha utilidad para la demostración de algunas propiedades de la norma de Tsirelson. Enseguida daremos los detalles del conjunto normante para obtener dicha norma. Para esto consideremos la siguiente familia de conjuntos, los cuales son definidos de manera recursiva:

- $W_0 = \{\pm e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$.
- Si $(f_i)_{i=1}^k$ es una sucesión finita en W_n tal que $k \leq supp^2(f_1) < supp(f_2) < \cdots < supp(f_k)$, entonces $f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k f_i \in W_{n+1}$, para toda $n, k \in \mathbb{N}$.

Tomamos $W_T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} W_n$.

Por construcción $W_i \cap W_j = \emptyset$ para distintos $i, j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Como W_T es subconjunto del espacio dual c_{00}^* relacionado con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y $G_0 \subseteq W_T$, resulta que W_T es un conjunto normante para el espacio c_{00}. Además, si $f \in W_T$, entonces f puede expresarse como una combinación lineal de $\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$ con coeficientes en $\{\pm\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$. Por esta razón y la desigualdad $|supp(x)| < \omega$, se tiene que $\|x\|_{W_T} = \max\{|f(x)| : f \in W_T\}$ para cada $x \in c_{00}$.

Vamos a demostrar que la norma $\|\cdot\|_T$ es igual a la norma $\|\cdot\|_{W_T}$ generada por el anterior conjunto normante W_T. Primero, presentaremos una propiedad útil de los conjuntos W_k's.

Lema 11.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si la función $f \in W_n$ y el conjunto $s \in FIN$ tal que $s \cap supp(f) \neq \emptyset$, entonces $f \circ P_s \in W_n$.*

[2] En este ocasión, $supp(f) := s$ para algún $s \in FIN$ tal que $f = \sum_{i\in s} a_i e_i^*$.

Demostración. La prueba se realizará por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $f \in W_1$ y $s \in FIN$ tal que $s \cap supp(f) \neq \emptyset$. Por definición, existen $k \in \mathbb{N}$ y $t \in [\mathbb{N}/(k-1)]^k$ tal que $f = \frac{1}{2}\sum_{i \in t} e_i^*$. De manera que $f \circ P_s = \frac{1}{2}\sum_{i \in t \cap s} e_i^*$. Como $k \leq t \cap s$ y $m = |t \cap s| < k$, entonces $t \cap s \in [\mathbb{N}/(m-1)]^m$. Por consiguiente, $f \circ P_s \in W_1$. Supongamos que para todo $f \in W_n$, con $n \in \mathbb{N}$, y todo $s \in FIN$ tal que $s \cap supp(f) \neq \emptyset$ se cumple que $f \circ P_s \in W_n$. Por demostrar que si $f \in W_{n+1}$ y $s \in FIN$ tal que $s \cap supp(f) \neq \emptyset$, entonces $f \circ P_s \in W_{n+1}$. Tomemos $f \in W_{n+1}$ y $s \in FIN$ tal que $s \cap supp(f) \neq \emptyset$. Por definición, existen $k \in \mathbb{N}$ y $(f_i)_{i=1}^k$ una sucesión en W_n, con $k \leq supp(f_1) < \cdots < supp(f_k)$, tal que $f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k f_i$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $s \cap supp(f_i) \neq \emptyset$ para toda $i \leq k$. Entonces $f \circ P_s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k (f_i \circ P_s)$ y $k \leq supp(f_1 \circ P_s) < \cdots < supp(f_k \circ P_s)$. Además, por hipótesis de inducción, $f_i \circ P_s \in W_n$ para cada $i \leq k$. Lo cual implica que $f \circ P_s \in W_{n+1}$. □

Teorema 11.2. *La norma del espacio de Tsirelson coincide con la norma generada por el conjunto normante W_T.*

Demostración. Tomemos $V_n = \cup_{i \leq n W_i}$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $V_n \subseteq V_{n+1}$ para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es suficiente probar que $\|x\|_n = \|x\|_{V_n}$ para todo $x \in c_{00}$ y todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Procederemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ en el espacio c_{00}. Como el caso $n = 0$ es trivial, demostremos que $\|x\|_1 = \|x\|_{V_1}$. Si $\|x\|_1 = \|x\|_0$, entonces $\|x\|_1 \leq \|x\|_{V_1}$ ya que $\|x\|_0 = \|x\|_{V_0} \leq \|x\|_{V_1}$. Para el otro caso, Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y una sucesión $(s_i)_{i=1}^k$ en FIN con $k \leq s_1 < \cdots < s_k$. Por definición, para cada $i \leq k$,

$$\|P_{s_i}(x)\|_0 = \|P_{s_i}(x)\|_\infty = |a_{n_i}| \text{ para algún } n_i \in E_i.$$

Tomamos $t = \{n_i : i \leq k\}$ y notemos que se cumple la condición $t \in [\mathbb{N}/(k-1)]^k$. Entonces

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \|P_{s_i}(x)\|_0 = \sum_{i \in t}^{k} sgn(a_i) e_i^*(x) \leq \|x\|_{V_1}.$$

De esto se deduce que $\|x\|_1 \leq \|x\|_{V_1}$. Para probar la desigualdad restante, fijamos $f \in V_1$. Si $f \in V_0$, entonces $\|x\|_1 \geq \|x\|_0 \geq |f(x)|$. Para el caso $f \in W_1$, sabemos que existen $k \in \mathbb{N}$, $t \in [\mathbb{N}/(k-1)]^k$ y $(\gamma_i)_{i=1}^k \in \{-1, 1\}^k$ tal que $f = \frac{1}{2}\sum_{i \in t} \gamma_i e_i$. Tomamos la sucesión $(s_i)_{i=1}^k$ en FIN, donde $s_i = \{t(i)\}$

para cada $i \leq k$. Por construción, $k \leq s_1 < \cdots < s_k$. Entonces tenemos que

$$\|x\|_1 \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \|P_{s_i}(x)\|_0 = \frac{1}{2}\sum_{i\in s} |e_i^*(x)| \geq \sum_{i\in s} \gamma_i e_i(x) = f(x).$$

Como $f \in V_1$ es arbitraria, se concluye que $\|x\|_1 \geq \|x\|_{V_1}$. Supongamos que $\|x\|_n = \|x\|_{V_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Por demostrar que $\|x\|_{n+1} = \|x\|_{V_{n+1}}$. Por definición e hipótesis de inducción, obtenemos la identidad

$$\|x\|_{n+1} = \text{máx}\left\{\|x\|_{V_n}, \frac{1}{2}\,\text{máx}\left\{\sum_{i=1}^{k} \|P_{s_i}(x)\|_{V_n}\right\}\right\}.$$

De modo que es equivalente probar que

$$\text{máx}\left\{\|x\|_{V_n}, \frac{1}{2}\,\text{máx}\left\{\sum_{i=1}^{k} \|P_{s_i}(x)\|_{V_n}\right\}\right\} = \|x\|_{V_{n+1}}.$$

Por definición de los conjuntos normantes, $\|x\|_{V_n} \leq \|x\|_{V_{n+1}}$. Si fijamos $k \in \mathbb{N}$ y $(s_i)_{i=1}^k$ una sucesión en FIN tal que $k \leq s_1 < \cdots < s_k$. Por propiedades del conjunto normante V_n, existe $f_i \in W_n$ tal que $\|P_{s_i}(x)\|_{V_n} = (f_i \circ P_{s_i})(x)$ para cada $i \leq k$. Gracias al Lema 11.1 tenemos que $(f_i \circ P_{s_i})_{i=1}^k$ es una sucesión en V_n. Más aún, se cumple que $k \leq supp(f_1 \circ P_{s_1}) < \cdots < supp(f_k \circ P_{s_k})$. En consecuencia, la función $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k (f_i \circ P_{s_i})$ pertenece a V_{n+1} y resulta que

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \|P_{s_i}(x)\|_{V_n} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(f_i \circ P_{s_i})(x) \leq \|x\|_{V_{n+1}}.$$

Por lo tanto, $\text{máx}\left\{\|x\|_{V_n}, \frac{1}{2}\,\text{máx}\left\{\sum_{i=1}^{k} \|P_{s_i}(x)\|_{V_n}\right\}\right\} \leq \|x\|_{V_{n+1}}$. Para verificar la desigualdad que falta, fijemos $f \in V_{n+1}$. Si $f \in V_n$, entonces

$$\text{máx}\left\{\|x\|_{V_n}, \frac{1}{2}\,\text{máx}\left\{\sum_{i=1}^{k} \|P_{s_i}(x)\|_{V_n}\right\}\right\} \geq \|x\|_{V_n} \geq |f(x)|.$$

En el caso $f \in W_{n+1}$, por definición, existen $m \in \mathbb{N}$ y una sucesión de funciones $(f_i)_{i=1}^m$ en $W_n \subseteq V_n$ tal que $m \leq supp(f_1) < \cdots < supp(f_k)$.

Tomamos la sucesión $(t_i)_{i=1}^m$ en FIN definida como $t_i = supp(f_i)$ para cada $i \leq m$. De esta forma $m \leq t_1 < \cdots < t_m$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\text{máx}\left\{\|x\|_{V_n}, \frac{1}{2}\,\text{máx}\left\{\sum_{i=1}^{k}\|P_{s_i}(x)\|_{V_n}\right\}\right\} &\geq \frac{1}{2}\,\text{máx}\left\{\sum_{i=1}^{m}\|P_{t_i}(x)x\|_{V_n}\right\}\\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}|f_i(x)| \geq f(x).\end{aligned}$$

Por ende, la desigualdad $\text{máx}\left\{\|x\|_{V_n}, \frac{1}{2}\,\text{máx}\left\{\sum_{i=1}^{k}\|P_{s_i}(x)\|_{V_n}\right\}\right\} \geq \|x\|_{V_{n+1}}$ se cumple. □

Los siguientes resultados para el espacio de Tsirelson se deducen fácilmente de la definición de la norma o las propiedades del límite de sucesiones relacionadas a máx y a sup.

Lema 11.3. *(1) La sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder para el espacio de Tsirelson.*

(2) Si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ y $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ en T satisfacen que $|b_i| \leq |a_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\|y\|_T \leq \|x\|_T$.

(3) Para cada $x \in T$,

$$\|x\|_T = \text{máx}\left\{\|x\|_\infty, \frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}\|P_{s_i}(x)\|_T\right\}\right\}$$

donde la función sup *varia sobre cada $k \in \mathbb{N}$ y toda sucesión $(s_i)_{i=1}^k$ en FIN con $k \leq s_1 < \cdots < s_k$.*

(4) Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier subsucesión bloque normalizada $(y_i)_{i=1}^k$ de la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal que $k \leq supp(y_1)$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}|a_i| \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_T \leq \sum_{i=1}^{k}|a_i|,\ \textit{para todo}\ (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k.$$

Demostración. Las demostraciones de las incisos (1), (3) y (4) son fáciles de establecer.

(2)Basta con probar que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cualesquiera $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ y $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ en c_{00}, con $|b_i| \leq |a_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$, se cumple la desigualdad $\|y\|_n \leq \|x\|_n$. Procedemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Omitimos la desmostración para el caso $n = 0$, ya que es evidente. Ahora, supongamos que la desigualdad es válida para n. Escojamos $x, y \in c_{00}$ con la condición mencionada en la hipótesis. Debido a suposición inductiva, para cada $k \in \mathbb{N}$ y toda sucesión $(s_i)_{i=1}^{k}$ en FIN tal que $k \leq s_1 < \cdots < s_k$, sucede que

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \|P_{s_i}(y)\|_n \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \|P_{s_i}(x)\|_n.$$

De donde se deduce que $\|y\|_{n+1} \leq \|x\|_{n+1}$. Por lo tanto, $\|y\|_{n+1} \leq \|x\|_{n+1}$ para cualesquiera $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ y $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ en c_{00}, con la propiedad $|b_i| \leq |a_i|$ para todo $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Finalmente, presentaremos una demostración de una de las propiedades que le otorga relevancia al espacio de Tsirelson.

Teorema 11.4. *El espacio de Tsirelson no posee subespacios isomorfos a c_0 o a ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Su prueba de divide en dos casos:

Caso 1. El espacio T no contiene a ℓ_1. Supongamos que el espacio de Tsirelson tiene un copia isomorfa de ℓ_1. Por el Teorema 6.13 de James, existe una subsucesión bloque normalizada $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que cada $n \in \mathbb{N}$ cumple que

$$\frac{8}{9}\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\|_T \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \tag{24}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^{n} \in [-1,1]^n$. En otras palabras, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $(1+\frac{1}{8})-$equivalente a la base canónica de Schauder para ℓ_1. Consideramos los elementos $y_1 + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r+1} y_i$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Por la desigualdad (24) se tiene que

$$\frac{16}{9} = \frac{8}{9}(1 + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r+1} 1) \leq \|y_1 + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r+1} y_i\|_T \quad \text{para todo } r \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Ahora, fijemos $k \in \mathbb{N}$ y una sucesión $(s_i)_{i=1}^k$ en FIN tal que $k \le s_1 < s_2 < \cdots < s_k$. Tomamos $m = \max(supp(y_1))$. Si $k > m$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \|P_{s_i}\Big(y_1 + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r+1} y_i\Big)\|_T &= \sum_{j=1}^{k} \|P_{s_i}\Big(\frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r+1} y_i\Big)\|_T \\ &\le 2\|\frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r+1} y_i\|_T \le \frac{2}{r}\sum_{i=2}^{r+1} 1 = 2 \qquad (26)\end{aligned}$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Si $k \le m$, consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned}A &= \{i \le r : \|P_{s_j}(y_i)\|_T \neq 0 \text{ para al menos dos valores de } j\},\\ B &= \{i \le r : \|P_{s_j}(y_i)\|_T \neq 0 \text{ para a lo más un valor de } j\}.\end{aligned}$$

Como A tiene cardinalidad a lo mas $k-1$, resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \|P_{s_j}\Big(y_1 + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r+1} y_i\Big)\|_T &\le \sum_{j=1}^{k} \|P_{s_j}(y_1)\|_T + \frac{1}{r}\left[\sum_{i=2}^{r+1}\Big(\sum_{j=1}^{k}\|P_{s_j}(y_i)\|_T\Big)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k} \|P_{s_j}(y_1)\|_T + \frac{1}{r}\left[\sum_{i\in A}\Big(\sum_{j=1}^{k}\|P_{s_j}(y_i)\|_T\Big) + \sum_{i\in B}\Big(\sum_{j=1}^{k}\|P_{s_j}(y_i)\|_T\Big)\right] \\ &\le 2\|y_1\|_T + \frac{1}{r}\Big(2\sum_{i\in A}\|y_i\|_T + \sum_{i\in B}\|y_i\|_T\Big) \\ &\le 2 + \frac{1}{r}[2(k-1) + r - (k-1)] = 3 + \frac{k-1}{r} \le 3 + \frac{m}{r}\end{aligned}$$

para todo $r \in \mathbb{N}$. De ahí que

$$\sum_{j=1}^{k} \|P_{s_j}\Big(y_1 + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r+1} y_i\Big)\|_T \le \frac{7}{2} \quad \text{si } r \ge 2m. \qquad (27)$$

Por (25), (26), (27) y el tercer inciso del Lema 11.3 se concluye que

$$\frac{16}{9} \le \|y_1 + \frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r+1} y_i\|_T \le \frac{7}{4} \quad \text{para cada } r \ge 2m,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el espacio de Tsirelson no posee una copia isomorfa a ℓ_1.

Caso 2. El espacio T no contiene a c_0 ni a ℓ_p, con $1 < p < \infty$. Supongamos que el espacio de Tsirelson tiene un copia isomorfa de c_0 (ℓ_p, con $1 < p < \infty$). El Lema 6.12 nos garantiza la existencia de una subsucesión bloque $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que es equivalente a la base canónica de Schauder para c_0 (ℓ_p, con $1 < p < \infty$, respectivamente). En otras palabras, existen $C, D > 0$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$C^{-1}\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_X \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\|_T \leq D\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_X, \tag{28}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^{n} \in [-1,1]^n$, donde $X = c_0$ ($X = \ell_p$, con $1 < p < \infty$, respectivamente). Tomamos $m_i := \text{mín}(supp(y_i))$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $s_i := \{m_i, m_i+1, \ldots, m_{i+1}-1\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $i \leq s_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, se deduce de la identidad del tercer inciso del Lema 11.3 y de la desigualdad (28) que

$$\|\sum_{i=r}^{2r-1} y_i\|_T \geq \frac{1}{2}\sum_{j=r}^{2r-1} \|P_{s_j}\Big(\sum_{i=r}^{2r-1} y_i\Big)\|_T = \frac{1}{2}\sum_{i=r}^{2r-1}\|y_i\|_T \geq \frac{r}{2C} \quad \text{para todo } r \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Mientras que, gracias a (28), se tiene que

$$\|\sum_{i=r}^{2r-1} y_i\|_T \leq \begin{cases} D & \text{si } (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ es equivalente a la base de } c_0 \\ Dr^{1/p} & \text{si } (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ es equivalente a la base de } \ell_p,\ p > 1. \end{cases}$$

Para $r \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, la desigualdad anterior es una contradicción de (29). En consecuencia, el espacio de Tsirelson no posee subespacios isomorfos a c_0 ni a ℓ_p, con $1 < p < \infty$. $\square$

12 Preguntas Abiertas

Este trabajo contiene nuevas ideas y resultados como son distintos tipos de oscilación determinados por familias de subconjuntos finitos en los naturales y, en algunos casos, su equivalencia con teoremas de tipo Ramsey. Lo cual abre nuevas líneas de investigación dentro del estudio de las propiedades de las sucesiones básicas normalizadas. A continuación enlistamos algunos problemas abiertos que consideramos interesantes.

Como se observó en el Ejemplo 9.8, una misma sucesión básica normalizada puede generar dos modelos asintóticos por bloques, respecto a diferentes barreras en $\mathbb{N}$, cuya normas son distintas, pero equivalentes. Lo cual nos lleva a cuestionarnos lo siguiente:

Pregunta 2. *Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach, ¿son los modelos asintóticos por bloques definidos por distintas sucesiones de barreras y la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ isomorfos entre sí (o son sus normas equivalentes)?*

Recordemos que en el Ejemplo 9.10 se probó que los modelos asintóticos por bloques pueden no cumplir la propiedad de dispersión, para ello se utilzó la barrera $[\mathbb{N}]^2$ y la sucesión de barreras $([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, \ldots, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, \ldots)$. Esto nos encamina a la siguiente pregunta que es un caso particular de la anterior.

Pregunta 3. *Dadas dos barreras distintas $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ se pueden obtener tres modelos: un $\mathcal{B}_1-$modelo disperso*[3]*, un $\mathcal{B}_2-$modelo disperso y un $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots)-$ modelo asintótico por bloques. ¿Qué relación hay entre estos tres modelos? ¿Qué pasa con los modelos dispersos?*

En el Teorema 9.4 se presenta la equivalencia entre el Teorema de Ramsey (Teorema 3.2) y el Teorema de Brunel-Sucheston (Teorema 9.3), lo cual nos conduce a formularnos la siguiente pregunta.

Pregunta 4. *¿Es el Teorema de Hindman-Milliken (Teorema 10.2) equivalente a un teorema de tipo Brunel-Sucheston?*

Cabe mencionar que los $P-$modelos dispersos generalizan el modelo disperso de Brunel y Sucheston. Además, debido a que los modelos dispersos, asociados tanto a una barrera como a una partición, poseen la propiedad de dispersión es natural preguntarse:

Pregunta 5. *Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach, ¿existe alguna relación entre los $\mathcal{B}-$modelos dispersos y los $P-$modelos dispersos, ambos generados por $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$ y P una partición especial infinita de $\mathbb{N}$?*

En base al Ejemplo 9.11, en general, los $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}-$modelos asintóticos por bloques no pueden obtenerse mediante $P-$modelos dispersos.

[3] Ver comentario del Teorema 9.6

Agradecimientos

La investigación del primer autor fue apoyada por el proyecto PAPIIT no. IN-105318.

Bibliografía

[1] S. A. Argyros y S. Todorcevic, *Ramsey Methods in Analysis* Birkhäuser Verlag (2005).

[2] A. Brunel y L. Sucheston, *On B -convex Banach spaces*, Math. Systems Theory **7** no. 4 (1974), 294–299.

[3] E. A. Calderon-Garcia y S. Garcia-Ferreira, *Asymptotic models via plegma families*, arXiv:1806.08749v1.

[4] B. Cascales y G. Vera, *Norming sets and compactness*, The Rocky Mountain J. Math. **25** no.3 (1995), 919–925.

[5] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Text in Mathematics Vol. **96**, Springer-Verlag (1985).

[6] C. A. Di Prisco y J. López-Abad, *Teoría de Ramsey y Espacios de Banach*, Ediciones del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (2006).

[7] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduated Text in Mathematics Vol. **92**, Springer-Verlag (1984).

[8] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** no. 1 (1973), 309—317.

[9] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics Vol. **6**, Heldermann Verlag (1989).

[10] J. Farahat, *Espaces de Banach contenant l^1, d'après HP Rosenthal*, Séminaire Analyse fonctionnelle (dit"Maurey-Schwartz") (1974), 1–6.

[11] T. Figiel y W. B. Johnson, *A uniformly convex Banach space which contains no l_p*, Compositio Mathematica **29** no. 2 (1974), 179–190.

[12] S. Garcia-Ferreira y A. C. Hernandez-Soto, *Oscillatory Stability in Banach Spaces and Ramsey Type Theorems*, Manuscrito en proceso.

[13] S. Guerre-Delabriere, *Classical Sequences in Banach Spaces* CRC Press Vol. **166** (1992).

[14] L. Halbeisen y E. Odell, *On asymptotic models in Banach spaces*, Israel J. Math. **139** (2004), 253–291.

[15] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of N*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **17** no.1 (1974), 1–11.

[16] J. L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Math. Ann. **104** no. 1 (1976), 1–29.

[17] K. R. Milliken, *Ramsey's theorem with sums or unions,* J. Combinatorial Theory, Series A, **18** no. 3, (1975), 276–290.

[18] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* ℓ_1, Proceedings of the National Academy of Sciences **71** no. 6, (1974), 2411–2413.

[19] H. P. Rosenthal, *The unconditional basic sequence problem*, In Geometry of Normed Linear Spaces, Contemp. Math. **52**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1986), 70–88.

[20] Th. Schlumprecht, *Logic and Set Theory in Analysis Course Notes: Math 663-601, Fall 2006*, http://www.math.tamu.edu/ schlump/publ.html

[21] B. S. Tsirelson, *It is impossible to imbed lp or c0 into an arbitrary Banach space*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **8**, (1974), 57–60.

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM
Apartado Postal 61-3
Xangari, 58089
Morelia, Michoacán
México

sgarcia@matmor.unam.mx
caren.hdez@gmail.com

Índice de autores

Matemáticas y sus aplicaciones 13
Editado por Fernando Macías Romero y David Herrera Carrasco está a disposición en pdf en la página
de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)
www.fcfm.buap.mx
a partir del 26 de octubre de 2020
peso del archivo: 2 MB
El cuidado de la edición es de Antonio de Jesús Libreros López.