

Models of Hyperspaces

Maricela Briones de Gante ♠ David Herrera Carrasco ♠ Fernando Macías Romero ♠

FCFM, BUAP[♡]

♠bg224470496@alm.buap.mx

Introducción

En la teoría de hiperspacios de continuos, es muy útil tener una idea geométrica de su aspecto. Dado que se definen como ciertas clases de subconjuntos de un espacio dado, esta tarea no es sencilla. Por esta razón, se construyen modelos de ellos. Un modelo de un hiperspacio dado $K(X)$ es un espacio topológicamente equivalente.

En este cartel, presentamos un modelo de los hiperspacios $C([0, 1])$, $C(S^1)$, $C(\text{Triodo Simple})$ y $F_2([0, 1])$.

1. Hiperspacio de subcontinuos de $[0, 1]$

Dado que $C([0, 1])$ es el hiperspacio de subcontinuos de $[0, 1]$,

$$C([0, 1]) = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Sea $T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ y $\varphi : C([0, 1]) \rightarrow T$ dada por

$$\varphi([a, b]) = (a, b).$$

Veamos que φ es inyectiva:

Sean $[a, b], [c, d] \in C([0, 1])$ tales que $\varphi([a, b]) = \varphi([c, d])$, entonces $(a, b) = (c, d)$, luego $a = c$ y $b = d$, por lo que $[a, b] = [c, d]$.

Ahora veamos que φ es suprayectiva:

Sea $(a, b) \in T$ entonces $0 \leq a \leq b \leq 1$ por lo que $[a, b] \in C([0, 1])$ y es tal que $\varphi([a, b]) = (a, b)$.

Sea $[a, b] \in C([0, 1])$ y sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$ tenemos que si $\mathcal{H}([a, b], [c, d]) < \delta$ para $[c, d] \in C([0, 1])$, entonces $[a, b] \subset N(\delta, [c, d])$ y $[c, d] \subset N(\delta, [a, b])$, $(a - c)^2 + (b - d)^2 < 2\delta^2 = \varepsilon$, por lo tanto φ es continua.

Por [2, Teorema 26.6], tenemos que $\varphi^{-1} : T \rightarrow C([0, 1])$ es una función continua. Así concluimos que φ es un homeomorfismo entre $C([0, 1])$ y T .

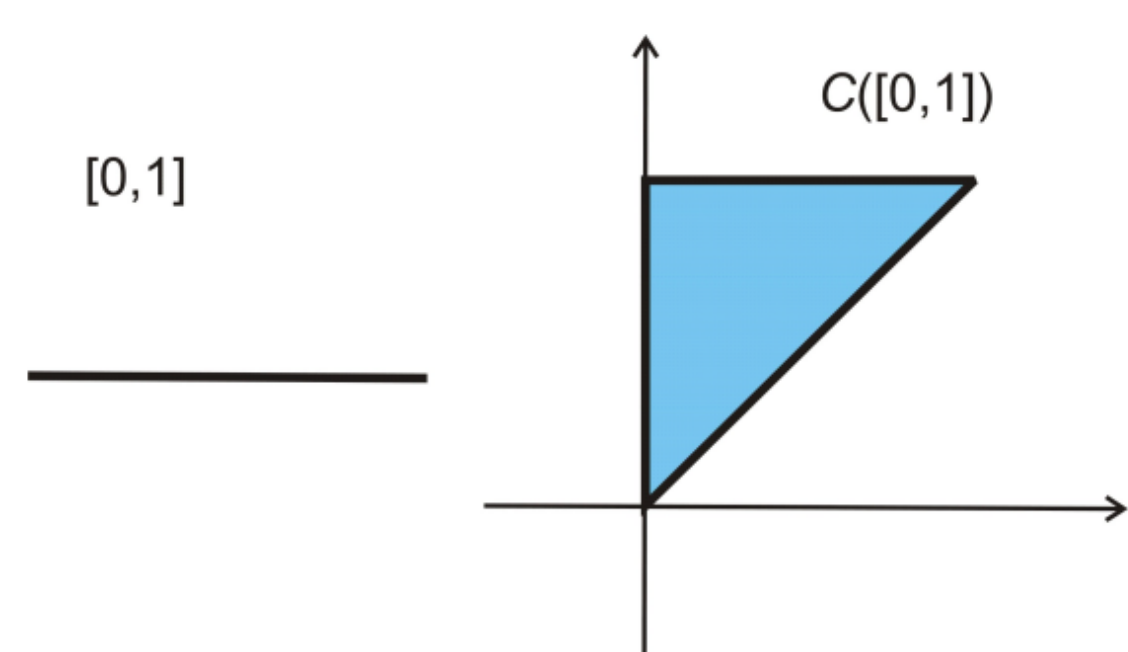


Figura 1: Modelo para $C([0, 1])$

2. Hiperspacio de subcontinuos de S^1

Tenemos que

$$C(S^1) = \{A : A \text{ es un arco en } S^1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in S^1\}$$

Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $\varphi : C(S^1) \rightarrow R$ dada por

$$\varphi(A) = \begin{cases} (1 - L(A)/2\pi)m(A), & A \neq S^1 \\ (0, 0), & A = S^1 \end{cases}$$

donde $L(A)$ es la longitud de arco de A y $m(A)$ el punto medio.

Tenemos que φ es inyectiva y suprayectiva.

Sea $A \in C([S^1])$ y sea $m(A) = (a, b)$, entonces

$$\varphi(A) = ([1 - L(A)/2\pi]a, [1 - L(A)/2\pi]b),$$

como tenemos una función en $\mathbb{R}^2$ tal que cada coordenada es continua, se sigue que φ es una función continua.

Por último, por [2, Teorema 26.6], tenemos que $\varphi^{-1} : R \rightarrow C(S^1)$ es una función continua.

Por lo tanto, φ es un homeomorfismo entre $C(S^1)$ y R , donde R es el disco unitario.

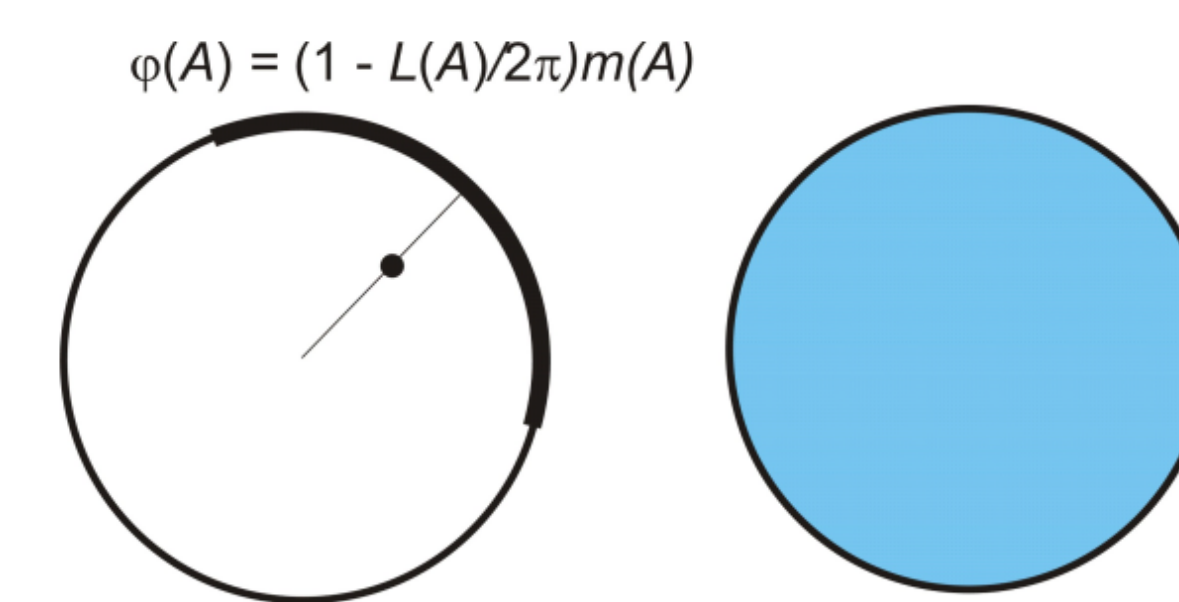


Figura 2: Modelo para $C(S^1)$

3. Hiperspacio de subcontinuos del Triodo Simple

Sea T el triodo simple, entonces $T = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, donde L_1, L_2, L_3 son arcos. Llamemos v al vértice de T . Así, $C(T) = C(L_1) \cup C(L_2) \cup C(L_3) \cup C_v(T)$, con $C_v(T) = \{A \in C(T) : v \in A\}$.

Por el modelo dado en la sección 1, $C(L_i)$ es un triángulo para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Dado $A \in C_v(T)$, A está determinado únicamente por las longitudes de las intersecciones de A con los catetos de T por lo que pueden representarse mediante un vector con tres coordenadas (a, b, c) . Variando a, b y c , obtenemos un cubo en $\mathbb{R}^3$.

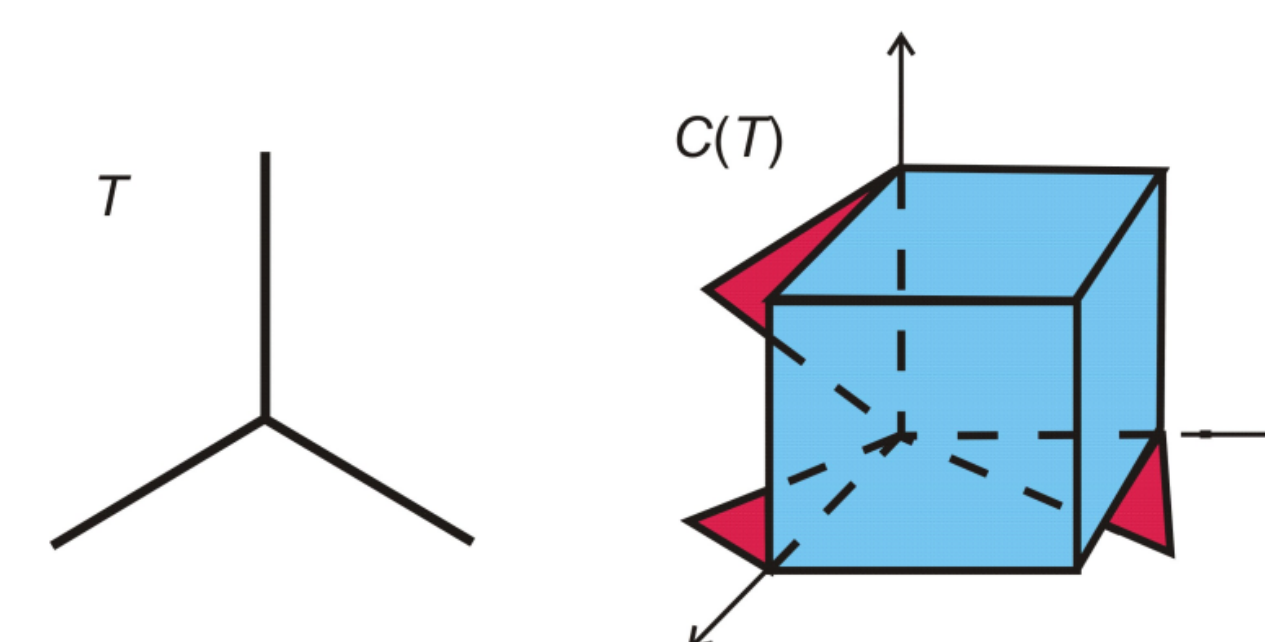


Figura 3: Modelo para $C(S^1)$

4. Hiperspacio segundo producto simétrico de $[0, 1]$

Tenemos que $F_2([0, 1]) = \{\{a, b\} : a, b \in [0, 1]\}$, dado que $\{a, b\} = \{b, a\}$,

$$F_2([0, 1]) = \{\{a, b\} : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Sea $\varphi : F_2([0, 1]) \rightarrow T$, (con T como en la sección 1) definida por

$$\varphi(\{a, b\}) = (\min\{a, b\}, \max\{a, b\}).$$

Tenemos que φ es inyectiva y suprayectiva. Veamos que φ es continua:

Sea $\{a, b\} \in F_2([0, 1])$ y sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$, entonces si $\mathcal{H}(\{a, b\}, \{c, d\}) < \delta$, con $\{c, d\} \in F_2([0, 1])$, se tiene que $|\min\{a, b\} - \min\{c, d\}| < \delta$ y $|\max\{a, b\} - \max\{c, d\}| < \delta$, luego

$$|(\min\{a, b\}, \max\{a, b\}) - (\min\{c, d\}, \max\{c, d\})| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, φ es continua, y por [2, Teorema 26.6], tenemos que φ es un homeomorfismo entre $F_2([0, 1])$ y T , (Ver Figura 1).

5. Conclusión

$C([0, 1])$, $C(S^1)$ y $F_2([0, 1])$ son 2-celdas, mientras que $C(T)$ es la unión de un cubo en $\mathbb{R}^3$ con tres triángulos unidos.

Referencias

- [1] Alejandro Illanes, *Continuum theory*, Springer, 2025.
- [2] James R. Munkres, *Topología*, Pearson, Madrid, 2002.