Speaking about continuos functions

Erick Sandro Niño García

Dr. Luis Alberto Guerrero Méndez

Twelfth International Conference on Mathematics and its Applications

Faculty of Mathematical Physical Sciences

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

ericks.nino@gmail.com

Resumen

Este trabajo está dedicado al concepto de función continua en $\mathbb{R}$, . Analizamos su definición y ejemplos interesantes. También revisamos las propiedades que se conservan en funciones continuas.

Definiciones ye ejemplos

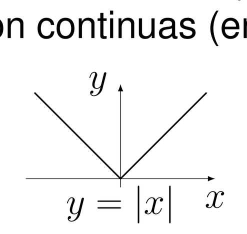
Definición (continuidad en $\mathbb{R}$). Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Decimos que f es *continua en* x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Equivalentemente, si $x_n \to x_0$ entonces $f(x_n) \to f(x_0)$. Decimos que f es continua en $A \subseteq \mathbb{R}$ si lo es en cada punto de A.

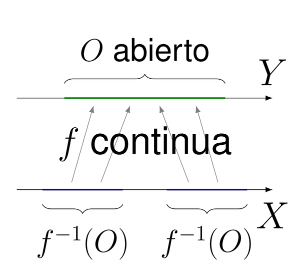
Ejemplos en $\mathbb{R}$.

- Los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{R}$; las funciones racionales son continuas en su dominio (donde el denominador es diferente de cero).
- $\exp, \sin, \cos$ son continuas en $\mathbb{R}$; $|x|$ es continua en todo punto (no diferenciable en 0).
- Funciones por tramos son continuas si coinciden los valores frontera; p. ej. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$ es continua en 1 ya que $1^2 = 2 \cdot 1 - 1$.
- Si f, g son continuas, entonces $f \pm g$, $f \cdot g$, $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ y $g \circ f$ son continuas (en sus dominios).



Propiedades que se preservan con las funciones continuas

1. **Preimagen de abierto es abierto**



Sea O abierto de $\mathbb{R}$ y $y \in O$ y $x \in f^{-1}(O)$ y $f(x) = y$, por continuidad existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(y, \varepsilon) \subseteq O,$$

entonces existe $\delta > 0$ con

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(y, \varepsilon) \subseteq O,$$

así $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(O)$.
Ejemplo: $f(x) = x^2$, $O = (0, 1)$. Entonces

$$f^{-1}(O) = (-1, 0) \cup (0, 1),$$

que es abierto.

2. **Preimagen de cerrado es cerrado.**
El complemento de un cerrado es abierto y f^{-1} conmuta con complementos:

$$f^{-1}(C^c) = \left(f^{-1}(C)\right)^c.$$

Ejemplo: $f(x) = x^2$, $C = \{1\}$. Entonces

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\},$$

que es cerrado.

3. **Imagen de compacto es compacto (Teorema clásico).**
Si K compacto y (U_i) es una cubierta abierta de $f(K)$, entonces $(f^{-1}(U_i))$ es una cubierta abierta de K, de la que extraemos una subcubierta finita y pasamos por f.

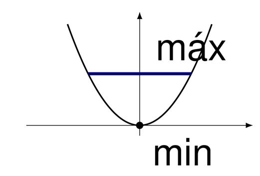
Ejemplo: $f(x) = \sin x$ en $K = [0, \pi]$. Entonces

$$f([0, \pi]) = [0, 1],$$

que es compacto.

4. **Extremos máximo y mínimo sobre compactos (Teorema del valor extremo).**
La imagen de compacto es compacto y en $\mathbb{R}$ un compacto contiene supremo e ínfimo alcanzados.

Ejemplo $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$ alcanza mínimo 0 y máximo 1.



5. **Imagen de conjunto conexo es conexa (Teorema del valor intermedio).**
Si la imagen se separase en dos abiertos disjuntos, sus preimágenes los separarían, contradicción.

Ejemplo: $f(x) = x^2$ en $[-1, 1]$, entonces

$$f([-1, 1]) = [0, 1],$$

un intervalo conexo.

6. **Preservación de límites de sucesiones:** si $x_n \to x$ entonces $f(x_n) \to f(x)$.

Ejemplo: $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $f(x) = \sin x$, entonces $f(x_n) \to 0$.

7. **Inclusión entre imágenes de clausuras:**

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Si $x_k \in A$ con $x_k \to x \in \overline{A}$, entonces $f(x_k) \to f(x)$, luego $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Ejemplo: para cualquier A y f continua, la inclusión siempre vale (pero puede ser estricta).

8. **Uniforme continuidad en compactos:**
Si f es continua en compacto, entonces f es uniformemente continua (Heine–Cantor).

Ejemplo: $f(x) = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$ pero no uniformemente continua; sí lo es en cualquier intervalo compacto $[-M, M]$.

Propiedades que no se preservan en general

1. **La imagen de un abierto no tiene por qué ser abierta.**
Contraejemplo: $f(x) = x^2$, $A = (-1, 1)$ es abierto pero

$$f(A) = [0, 1),$$

que no es abierto.

2. **La imagen de un cerrado no tiene por qué ser cerrado.**
Contraejemplo: $f(x) = \arctan x$ continua en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ es cerrado pero

$$f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

no es cerrado.

3. **La preimagen de un compacto no tiene por qué ser compacto.**
Contraejemplo: $f(x) = 0$ función constante. $\{0\}$ es compacto, pero

$$f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R},$$

que no es compacto.

4. **La imagen de un conjunto denso puede no ser densa.**
Contraejemplo: $f(x) = 0$ constante. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, pero

$$f(\mathbb{Q}) = \{0\},$$

no es denso.

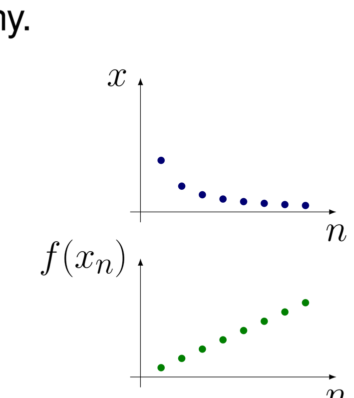
5. **La continuidad no preserva la propiedad de ser sucesión de Cauchy.**
Contraejemplo: en $(0, 1]$, la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy. Con

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

continua en $(0, 1]$, la imagen es

$$f(x_n) = n,$$

que no es Cauchy.



6. **La completitud no se conserva en la imagen.**
Contraejemplo: $f(x) = \arctan x$. La función f transforma $\mathbb{R}$ (que es completo) en

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

que no es completo.

7. **La cardinalidad puede reducirse o no.**
Contraejemplo: $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}$ manda conjuntos infinitos a un conjunto con un solo elemento.

8. **La imagen de la frontera no coincide necesariamente con la frontera de la imagen.**
Contraejemplo: para $A = (-1, 1)$,

$$\partial A = \{-1, 1\}, \quad f(x) = x^2,$$

entonces

$$f(\partial A) = \{1\},$$

pero

$$\partial f(A) = \partial [0, 1) = \{0, 1\}.$$

9. **Un conjunto perfecto puede perder esa propiedad bajo f una función continua.**
Contraejemplo: $A = \mathbb{R}$ perfecto, $f(x) = \arctan x$, entonces

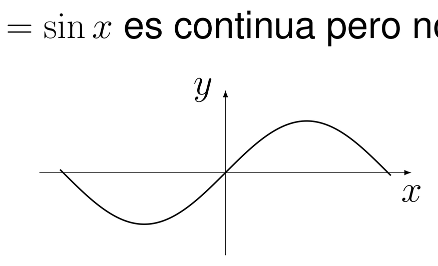
$$f(A) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

que no es cerrado ni perfecto.

10. **Continuidad no implica diferenciabilidad ni regularidad superior.**
Ejemplo: $f(x) = |x|$ es continua pero no diferenciable en 0.

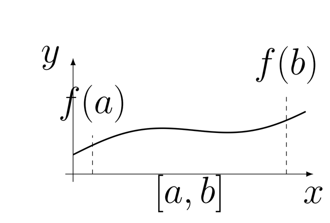
11. **Continuidad no implica uniformidad ni Lipschitz en $\mathbb{R}$.**
Ejemplo: $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x}$ no es Lipschitz cerca de 0.

12. **Continuidad no implica preservación de monotonía u orden.**
Ejemplo: $f(x) = \sin x$ es continua pero no monótona.



Algunos teoremas como consecuencia de la continuidad

Teorema (Extremos en funciones extrictamente crecientes y continuas) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si f es estrictamente creciente en (a, b), entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.
Idea breve: La imagen $f((a, b))$ es no vacía y acotada; por continuidad en los extremos $\inf f((a, b)) = f(a)$ y $\sup f((a, b)) = f(b)$.



[2, Teorema 2.31] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Defina $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x) \ \text{ para } x \in (a, b),$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(b + h) - F(b)}{h} = f(b), \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{F(a + h) - F(a)}{h} = f(a),$$

es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.
[2, Teorema 2.32] Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

[2, Teorema 2.33] Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)\,(b - a).$$

References

[1] R. G. Bartle, *Introducción al análisis matemático.* LIMUSA, 1980.

[2] J. J. Angoa Amador, María de Jesús López Toriz, et al. *Cálculo diferencial: Introducción.* México.

[3] J. J. Angoa Amador, María de Jesús López Toriz, et al. *Cálculo integral.* México.

[4] W. Rudin, *Principios de análisis matemático* (3. ed.). McGraw–Hill, 1976.

[5] H. L. Royden and P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis* (4th ed.). Pearson, 2010.