



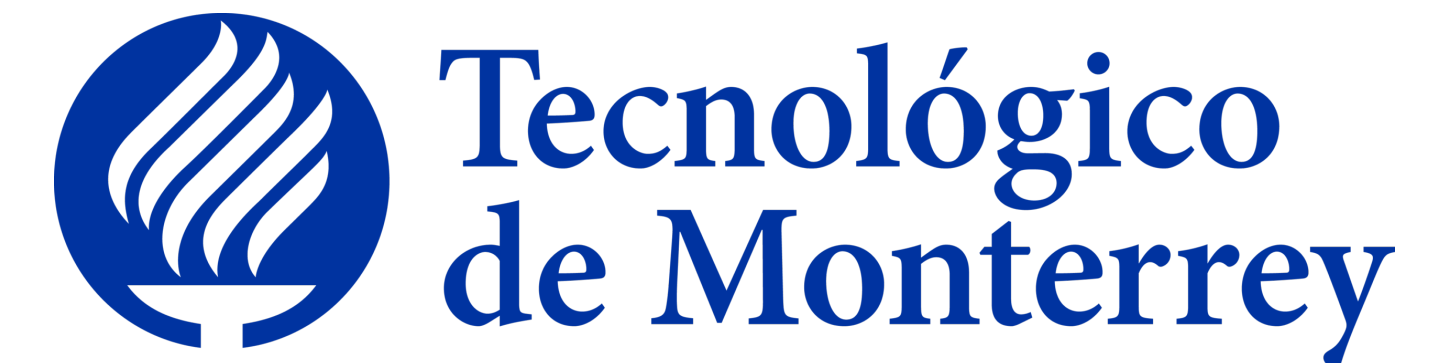
Path Homological S1-GLMY-Bykov-Pineda Duality for quivers

(Legado del Dr. Alexander Bykov)

Edgar Pineda Sota

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

edgar.pineda@tec.mx



Resumen

En esta exposición, presentamos dos nuevos resultados dentro de la teoría de homología de caminos de quivers (carcajes). En primer lugar, un teorema de coeficientes universales para la cohomología de caminos de quivers. En segundo lugar, un teorema de dualidad homológica para la homología de caminos de quivers.

1. Introducción

En 2018, A. Grigoryan y colaboradores construyeron una teoría de homología de caminos para quivers basada en (multi)grafos. Finalmente, en 2025, descubrimos un nuevo tipo de dualidad homológica cruzada de caminos de quivers que no son ni degenerados (degradados) ni cíclicos, marcando un nuevo principio dentro de la topología algebraica.

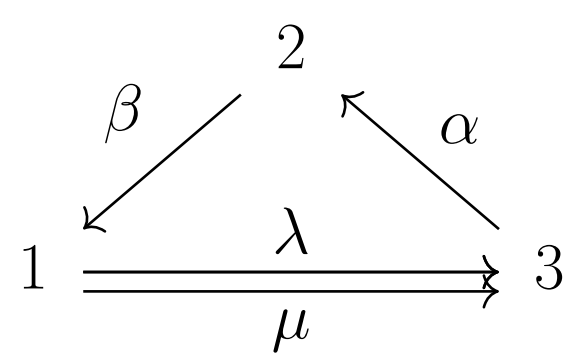
2. Quivers, Homología y Cohomología

Definición 2.1. Un carcaj (quiver) $\mathcal{Q} := (Q_0, Q_1, s, t)$ es un cuaterno que consiste de:

- (1) Q_0 conjunto de vértices ó puntos.
- (2) Q_1 conjunto de flechas.
- (3) $s : Q_1 \rightarrow Q_0$ y $t : Q_1 \rightarrow Q_0$ tales que para todo $a \in Q_1$, $s(a)$ es punto inicial y $t(a)$ es punto final de a .

Ejemplo 2.2. Sean $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \lambda, \mu\}$, $s : Q_1 \rightarrow Q_0$ con $s(\alpha) = 3, s(\beta) = 2, s(\lambda) = s(\mu) = 1$ y $t : Q_1 \rightarrow Q_0$ con $t(\alpha) = 2, t(\beta) = 1, t(\lambda) = t(\mu) = 3$.

Entonces, $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, s, t)$ con su diagrama



es un carcaj (quiver).

Definición 2.3. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, un **n-camino elemental** en un carcaj $\mathcal{Q}$ es una sucesión $a_0, \dots, a_{n-1} \in Q_1$ tal que, $t(a_i) = s(a_{i+1})$ para todo $0 \leq i \leq n-2$ el cual se denota por $P = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$.

Definición 2.4. Sea R un anillo conmutativo con unidad tal que ningún entero es divisor de cero. El **álgebra de caminos graduada** $\Omega_*(\mathcal{Q}) = R[P\mathcal{Q}]$ es el R -módulo libre generado por todos los caminos elementales en $\mathcal{Q}$ con producto:

$$p \cdot q = \begin{cases} a_0 \cdots a_n b_0 \cdots b_m, & \text{si } t(a_n) = s(b_0) \\ 0, & \text{otra manera} \end{cases}$$

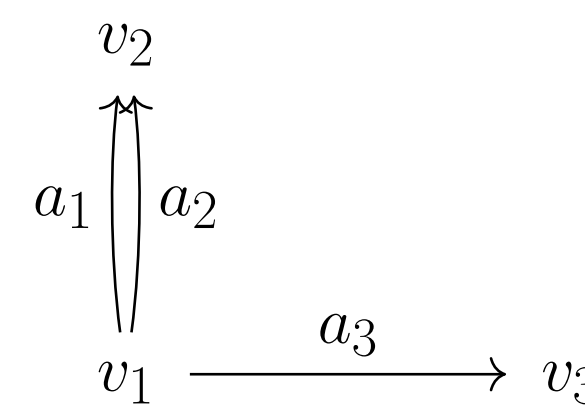
donde $p = a_0 \cdots a_n$ y $q = b_0 \cdots b_m$ son caminos elementales.

Proposición 2.5. Sean $\mathcal{Q}$ un carcaj completo de potencia N tal que, para todo $n \geq -1$ y $a_0 \cdots a_n$ un camino elemental. Se define $\partial_{n+1} : \Omega_{n+1}(\mathcal{Q}) \rightarrow \Omega_n(\mathcal{Q})$ por: $\partial_{n+1}(a_0 \cdots a_n) = N a_1 \cdots a_n - [a_0 a_1] a_2 \cdots a_n + a_0 [a_1 a_2] \cdots a_n + \cdots + (-1)^n a_0 \cdots a_{n-2} [a_{n-1} a_n] + (-1)^{n+1} N a_0 \cdots a_{n-1}$. Entonces, $\partial_{n+1}^2 = 0$ y $\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Omega_n(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \Omega_1(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\partial_1} \Omega_0(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\partial_0} 0$ es el **complejo de cadenas de caminos de $\mathcal{Q}$** .

Teorema 2.6. Sea $\mathcal{Q}$ un quiver no degenerado (degradado) ni cíclico. Entonces, para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que:

$$PH^k(\mathcal{Q}) = \text{Ext}(PH_{k-1}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(PH_k, \mathbb{Z}). \quad (1)$$

Ejemplo 2.7. Sea $\mathcal{Q}$ el siguiente carcaj (quiver):



Entonces, tenemos los siguientes complejos de cadenas:

$$\begin{aligned} \Omega_0(\mathcal{Q}) &= \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \oplus \mathbb{Z}v_3 \\ \Omega_1(\mathcal{Q}) &= \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}a_2 \oplus \mathbb{Z}a_3 \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente sucesión de cadenas y fronteras:

$$0 \xrightarrow{\partial_2} \Omega_1(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\partial_1} \Omega_0(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$\begin{aligned} \partial_1(a_1) &= 2(v_2 - v_1) \\ \partial_1(a_2) &= 2(v_2 - v_1) \\ \partial_1(a_3) &= 2(v_3 - v_1) \\ [\partial_1] &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \partial_0(v_1) &= \partial_0(v_2) = \partial_0(v_3) = 0 \end{aligned} \right.$$

$=PH_0(\mathcal{Q}, \mathbb{Z}) =$

$$PH_0(\mathcal{Q}, \mathbb{Z}) := \frac{Z_0(\mathcal{Q})}{B_0(\mathcal{Q})} = \frac{\mathbb{Z}u_1 \oplus \mathbb{Z}u_2 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_1}{\mathbb{Z}(2u_1) \oplus \mathbb{Z}(2u_2) \oplus \{0\}} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{Z}_0(\mathcal{Q}) = \ker(\partial_0) := \{c_0 \in \Omega_0(\mathcal{Q}) \mid \partial_0(c_0) = 0\}$$

$$[\partial_0] \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

Por lo que $\ker(\partial_0) \cong \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_2 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_3 = \mathbb{Z}u_1 \oplus \mathbb{Z}u_2 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_1$, donde $u_1 = (-1, 1, 0)$ y $u_2 = (-1, 0, 1)$.

$$\mathbf{B}_0(\mathcal{Q}) = \text{im}(\partial_1) := \{c_0 \in \Omega_0(\mathcal{Q}) \mid \partial_1(c_1) = c_0\}$$

$$[\partial_1] \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = c_0$$

$$c_0 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = (n_1 + n_2) \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + n_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por lo que $\text{im}(\partial_1) \cong \mathbb{Z}u_3 \oplus \mathbb{Z}u_4$, donde $u_3 = (-2, 2, 0)$ y $u_4 = (-2, 0, 2)$.

$=PH_1(\mathcal{Q}, \mathbb{Z}) =$

$$PH_1(\mathcal{Q}, \mathbb{Z}) := \frac{Z_1(\mathcal{Q})}{B_1(\mathcal{Q})} = \frac{\mathbb{Z}u_5}{\{0\}} \cong \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{Z}_1(\mathcal{Q}) = \ker(\partial_1) := \{c_1 \in \Omega_1(\mathcal{Q}) \mid \partial_1(c_1) = 0\}$$

$$[\partial_1] \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2n_1 - 2n_2 - 2n_3 \\ 2n_1 + 2n_2 \\ 2n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que $\ker(\partial_1) \cong \mathbb{Z}u_5$, donde $u_5 = (-1, 1, 0)$.

$$\mathbf{B}_1(\mathcal{Q}) = \text{im}(\partial_2) := \{c_1 \in \Omega_1(\mathcal{Q}) \mid \partial_2(c_2) = c_1\} \cong \{0\}$$

Ahora bien, construimos los siguientes cocomplejos de cocadenas:

$$\begin{aligned} \Omega^0(\mathcal{Q}) &= \mathbb{Z}v_1^* \oplus \mathbb{Z}v_2^* \oplus \mathbb{Z}v_3^* \\ \Omega^1(\mathcal{Q}) &= \mathbb{Z}a_1^* \oplus \mathbb{Z}a_2^* \oplus \mathbb{Z}a_3^* \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente sucesión de cocadenas y cofronteras:

$$0 \xleftarrow{\partial^1} \Omega^1(\mathcal{Q}) \xleftarrow{\partial^0} \Omega^0(\mathcal{Q}) \xleftarrow{\partial^{-1}} 0$$

$$\begin{aligned} \partial^0(v_1^*) &= -2a_1^* - 2a_2^* - 2a_3^* \\ \partial^0(v_2^*) &= 2a_1^* + 2a_2^* \\ \partial^0(v_3^*) &= 2a_3^* \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} [\partial^0] &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \partial^1(a_1^*) &= \partial^1(a_2^*) = \partial^1(a_3^*) = 0 \end{aligned} \right.$$

Por lo tanto,

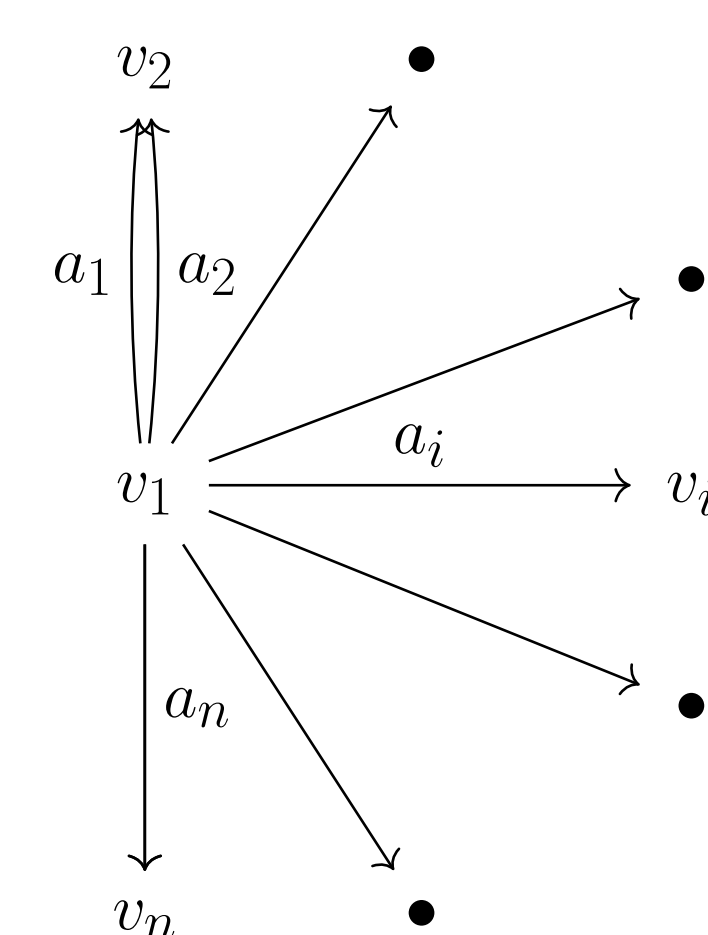
$$PH_q(\mathcal{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}, & q = 1 \end{cases}$$

$$PH^q(\mathcal{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, & q = 1 \end{cases}$$

Teorema 2.8. (S1-GLMY-Bykov-Pineda Duality)

Sea $\mathcal{Q}$ un quiver finito no degenerado ni cíclico, tal que tenga el mismo número de vértices y flechas, y todas las flechas tengan la misma dirección. Entonces, para $k \in \{0, 1\}$, se cumple que:

$$PH^k(\mathcal{Q}, \mathbb{Z}) \cong PH_{1-k}(\mathcal{Q}, \mathbb{Z}) \quad (2)$$



Demostración. Sabemos que $PH_q(\mathcal{Q}) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)^k \oplus \mathbb{Z}, & q = 0 \text{ y } 1 \leq k \leq n \\ \mathbb{Z}, & q = 1 \end{cases}$

Por el Teorema 2.6,

$$\begin{aligned} PH^0(\mathcal{Q}, \mathbb{Z}) &\cong \text{Ext}(PH_{-1}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(PH_0, \mathbb{Z}) \\ &\cong \text{Ext}(\{0\}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &\cong \left(\bigoplus_{k=1}^n \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \right) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PH^1(\mathcal{Q}, \mathbb{Z}) &\cong \text{Ext}(PH_0, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(PH_1, \mathbb{Z}) \\ &\cong \text{Ext}((\mathbb{Z}_2)^k \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &\cong \text{Ext}((\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &\cong \left(\bigoplus_{k=1}^n \text{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \right) \oplus \mathbb{Z} \\ &\cong \left(\bigoplus_{k=1}^n \mathbb{Z}_2 \right) \oplus \mathbb{Z} \\ &= (\mathbb{Z}_2)^k \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

3. Conclusión

Estos dos teoremas exponen nuevos resultados significativos en el campo de la homología de caminos de quivers. Estos resultados no solo proporcionan una nueva comprensión de la estructura algebraica de los quivers, sino que también introducen principios novedosos en la topología algebraica. La relevancia de estos hallazgos radica en su potencial para abrir nuevas direcciones en la investigación y ampliar nuestras capacidades para abordar problemas complejos en esta área.

Referencias

- [1] Alexander Grigoryan, et al. *Cohomology of digraphs and (undirected) graphs*, Asian Journal of Mathematics, 2015, vol. 19, No. 5, pp. 887-932.
- [2] Alexander Grigoryan, et al. *Path homology theory of multigraphs and quivers*, De Gruyter, Vol. 30, No. 5, pp. 1319-1337, 2018.
- [3] James R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, CRC press, 2018.
- [4] Edgar Pineda, *Laplacian Path Homological Calculus of Quivers and S1-GMLY-Bykov-Pineda Duality*, De Gruyter,