

TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ

Diana Valeria González Segura^{1*}, Francisco Javier Mendoza Torres ¹

¹Facultad Ciencias Físico Matemáticas (FCFM), BUAP.

*diana.gonzalezseg@alumno.buap.mx

1 Conceptos Preliminares

Definición 1 [La Integral de Stieltjes] Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones, si para cualquier partición $\pi = \{I_K\}_{K=1}^n$ de $[a, b]$, con $I_k = (x_{k-1}, x_k)$. Escogemos cualquier punto $z_k \in \overline{I_k} = [x_{k-1}, x_k]$ y formamos la suma:

$$S(f, g, \pi) = \sum_{k=1}^n f(z_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

Si el limite existe,

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} S(f, g, \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

Se llama "Integral de Stieltjes" que se denota:

$$\int_a^b f dg$$

Significa: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall |\pi| < \delta, \forall z_k \in \overline{I_k},$

$$|\int_a^b f dg - \sum_{k=1}^n f(z_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]| < \epsilon$$

Definición 2 [Variación Acotada] Sean $g \in C[a, b] = \{g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{continua}\}$ y $\pi = \{I_K\}_{K=1}^n$ una partición de $[a, b]$. La variación de g sobre $[a, b]$ representada por $V_a^b(g)$ esta dada por

$$V_a^b(g) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \right\}$$

Es de variación acotada si $V_a^b(g) < \infty$. Al conjunto de todas las funciones de variación acotada en $[a, b]$ se denota por $BV[a, b]$

Definición 3 [Funcional Lineal] Sea V un espacio vectorial sobre un campo K , un funcional lineal es una aplicación

$$F : V \longrightarrow K$$

tal que es lineal, satisface la siguiente: $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$

$$F(\alpha x + y) = \alpha F(x) + F(y)$$

Definición 4 Sea el espacio $C[a, b]$, definimos una norma sobre él:

$$\|f\|_{\infty} = \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \}$$

Este espacio normado se denota, $(C[a, b], \|f\|_{\infty})$.

Sea el conjunto $\mathbb{R}$, definimos sobre él la norma usual, valor absoluto:

$$\|x\| = |x|$$

denotándolo como $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$.

Sea $\gamma = \{T : (C[a, b], \|f\|_{\infty}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|) : T \text{ funcional lineal acotado} \}$

Sobre γ definimos la norma:

$$\begin{aligned} \|F\|_{\gamma} &= \inf \{ M : |F(f)| \leq M \|f\|_{\infty}, \forall f \in C[a, b] \} \\ &= \sup \left\{ \frac{|F(f)|}{\|f\|_{\infty}}, \forall f \in C[a, b] \right\} \end{aligned}$$

Este espacio normado se denota $(\gamma, \|\cdot\|_{\gamma})$.

Proposición 1 Si $f \in C[a, b]$ y $g \in BV[a, b]$ podemos definir un Funcional lineal, F_g en $C[a, b]$ de la siguiente forma:

$$F_g(f) = \int_a^b f dg$$

Es un funcional lineal acotado si,

$$\begin{aligned} |F_g(f)| &= \left| \int_a^b f dg \right| \leq V_a^b(g) \|f\|_{\infty} \\ \|F_g\| &\leq V_a^b(g) \end{aligned}$$

Proposición 2 Sean $g \in BV[a, b]$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ y existe $\int_a^b f dg$ entonces,

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq M V_a^b(g)$$

Proposición 3 Si $g \in BV[a, b]$ entonces existen $g_1, g_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones crecientes tal que son una descomposición de Jordan de g , es decir, $g = g_1 - g_2$ y si existen $\int_a^b f dg_1$ y $\int_a^b f dg_2$ entonces existe $\int_a^b f dg$ que es igual a:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f dg_1 - \int_a^b f dg_2$$

2 Teorema de Representación de Riesz en C[a,b]

Teorema 1 Sea $F \in (\gamma, \|\cdot\|_{\gamma})$ un funcional lineal acotado en el espacio normado entonces, existe una función $g \in BV[a, b]$ tal que

$$F(f) = \int_a^b f dg,$$

$$\forall f \in C[a, b] \text{ y } \|F\|_{\gamma} = V_a^b(g)$$

Demostración 1 Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a \\ F(X_{[a,x]}) & \text{si } x \in (a, b] \end{cases}$$

Veamos que g es de variación acotada: Si $\pi = \{I_k\}_{k=1}^n$ una partición de $[a, b]$ y definimos $\sigma_k = \text{sgn}[g(x_k) - g(x_{k-1})]$, tenemos:

$$\sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| = F\left(\sum_{k=1}^n \sigma_k X_{[x_{k-1}, x_k]}\right) \leq |F\left(\sum_{k=1}^n \sigma_k X_{[x_{k-1}, x_k]}\right)|$$

$$\leq \|F\|_{\gamma} \left\| \sum_{k=1}^n \sigma_k X_{[x_{k-1}, x_k]} \right\|_{\infty} = \|F\|_{\gamma}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \|F\|_{\gamma}$$

entonces $g \in BV[a, b]$ y $V_a^b(g) \leq \|F\|_{\gamma}$.

Para cualquier $f \in C[a, b]$ y cualquier $\pi_{[a,b]}$ tomamos $z_k \in \overline{I_k}$ y definamos:

$$S = \sum_{k=1}^n f(z_k) X_{[x_{k-1}, x_k]}$$

$$F(S) = F\left(\sum_{k=1}^n f(z_k) X_{[x_{k-1}, x_k]}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n f(z_k) F(X_{[x_{k-1}, x_k]}) = \sum_{k=1}^n f(z_k) |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} F(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k) |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \int_a^b f dg$$

Como $f \in C[a, b]$, f es uniformemente continua en $[a, b]$: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x, y \in [a, b]$. Si $|\pi| < \delta$, $|F(f) - F(s)| \leq \|F\|_{\gamma} \|f - s\|_{\infty} < \epsilon \|F\|_{\gamma}$ por lo tanto:

$$F(f) = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} F(s) = \int_a^b f dg$$

con $\|F\|_{\gamma} \leq V_a^b(g)$ por lo tanto $\|F\|_{\gamma} = V_a^b(g)$.

3 (T. Riesz) Espacios Topologicos de Hausdroff Localmente Compactos

Teorema 2 Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea T un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$ entonces existe una σ -algebra en X que contiene todos los conjuntos de Borel en X y existe una unica medida regular de Borel μ sobre la σ -algebra tal que:

$$T(f) = \int_X f d\mu$$

Referências

[1] Libro, Norman B. Haaser & Joseph A. Sullivan (1978), *Análisis Real*, [Capítulo 10: La Integral de Stieltjes, Pag. 371-373]