Compactaciones

Autor: Diana Cuaya Simbro

Coautores: Dr. David Herrera Carrasco, Dr. Fernando Macias Romero, Felipe de Jesús Aguilar Romero

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

cuayad751@gmail.com

Resumen

Una compactación de un espacio topológico, consiste en "completarlo" mediante la adición de puntos ideales o fronteras, transformándolo en un espacio compacto. Esta transformación permite aprovechar propiedades de la compacidad, como la existencia de extremos, convergencia de redes y sucesiones, y la extensión de funciones continuas.

En este cartel se estudiarán dos construcciones destacadas: la compactación de Alexandroff y la compactación de Stone-Čech. La primera se caracteriza por su simplicidad, ya que añade un único punto al espacio original para lograr la compacidad. Por otro lado, la compactación de Stone-Čech es más general y compleja, se construye a partir de funciones continuas con valores en intervalos cerrados.

Introducción

El concepto de espacio compacto fue introducido formalmente por Alexandrov y Urysohn en la década de 1920. Definieron la compacidad de un espacio topológico como una propiedad en la que toda cubierta abierta tiene un subcubierta finita. Esta propiedad permite la existencia de extremos, la convergencia de redes y sucesiones, y la extensión de funciones continuas. De aquí nace el interés de busca incrustar un espacio topológico no compacto como un subconjunto denso de un espacio compacto, lo cual se define como compactación.

Una de las compactaciones más conocidas es la compactación de Alexandroff, también conocida como la compactación por un punto, que se desarrolló como una forma de agregar un "punto en el infinito.ª un espacio localmente compacto y Hausdorff, convirtiéndolo en compacto. Más adelante, la compactación de Stone–Čech, introducida por Marshall H. Stone y Eduard Čech en las décadas de 1930 y 1940, ofreció una compactación "máxima.ᵉⁿ un sentido preciso: todo mapeo continuo desde el espacio original hacia un compacto puede extenderse a su compactación de Stone–Čech.

Conceptos básicos

Definición. *Sean X un espacio topológico y M un subespacio de X. Un* **encaje** *del subespacio M en el espacio X es una función $e_M^X : M \to X$ tal que $e_M^X(x) = x$.*

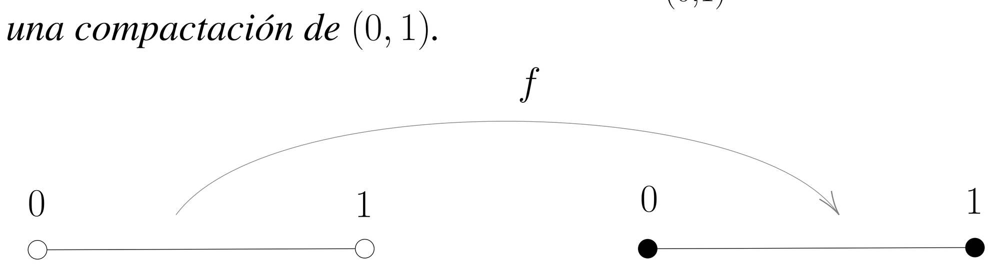
Definición. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es llamada un* **encaje homeomorfo** *si es una composición de un homeomorfismo y un encaje, es decir, si existe $Y' \subset Y$ y un homomorfismo $h : X \to Y'$ tal que $f(x) = (e_{Y'}^Y \circ h)(x)$ para todo $x \in X$. Además, se dice que X se puede encajar (o que está encajado) en Y si existe un encaje homeomorfo de X en Y.*

Note que $Y' = f(X)$ y además, $f(x) = (e_{Y'} \circ h)(x) = h(x)$ para toda $x \in X$. De manera que X se puede encajar en Y si existe Y' un subespacio de Y homeomorfo a X.

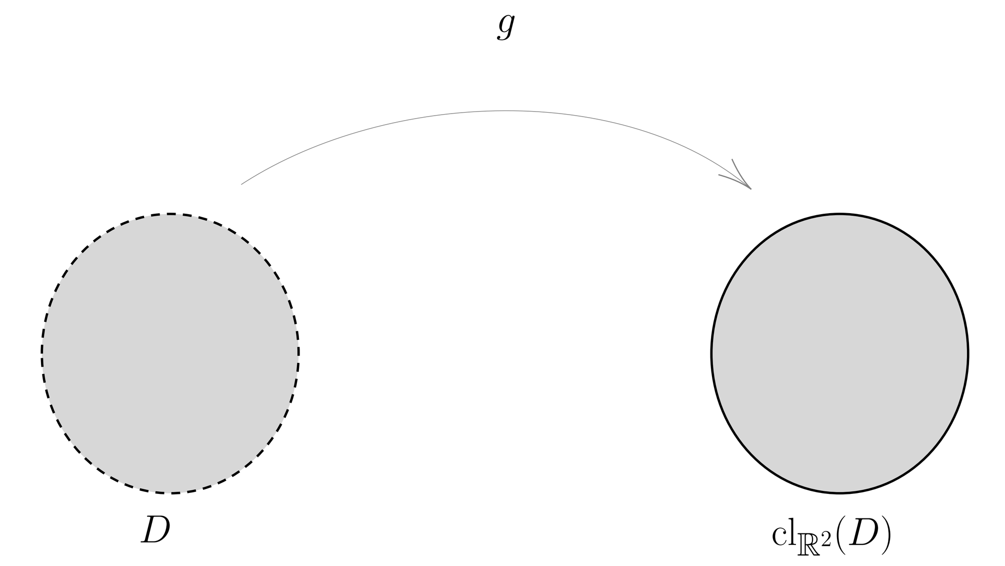
Definición. *Un espacio topológico X es llamado* **espacio compacto** *si X es un espacio de Hausdorff y cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita, es decir, si para cada cubierta abierta $\{U_s\}_{s\in S}$ del espacio X existe un conjunto finito $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$ tal que $X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \ldots \cup U_{s_k}$.*

Definición. *Una* **compactación** *del espacio X es un par (Y, c), donde Y es un espacio compacto y $c : X \to Y$ es una encaje homeomorfo de X en Y tal que $\mathrm{cl}_Y(c(X)) = Y$.*

Ejemplo. *Consideremos el intervalo abierto $(0,1)$ en $\mathbb{R}$, con la topología euclidiana inducida. El par $(e_{(0,1)}^{[0,1]}, [0,1])$ constituye una compactación de $(0,1)$.*



Ejemplo. *Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ el disco abierto unitario en $\mathbb{R}^2$. El par $(g, \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(D))$, donde g es la función de D a $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(D))$ definida por $g(x,y) = (x,y)$, constituye a una compactación de D.*

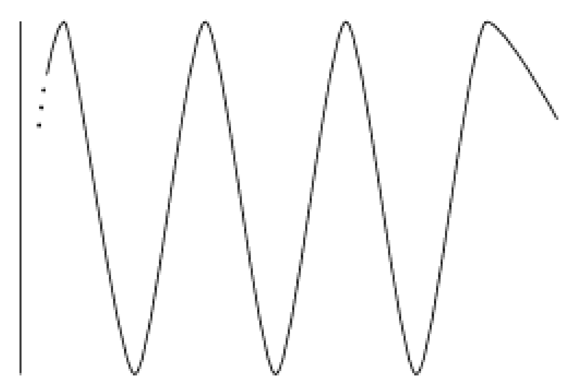


Ejemplo. *El intervalo $[-1,1]$ es una compactación de $\mathbb{R}$ con la función $h(x) : \mathbb{R} \to [-1,1]$ definido como $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$*

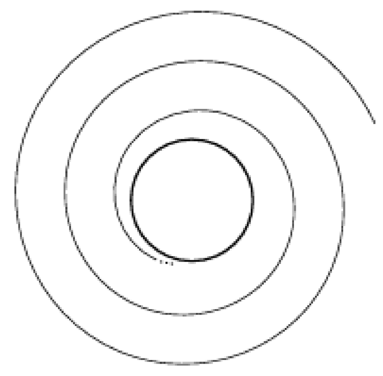
Definición. *Sea cX una compactación de un espacio X. El conjunto*

$$cX \setminus c(X) = \{x \in cX : x \notin c(X)\}$$

es llamado el **residuo** *de la compactación cX.*



Compactación del rayo con residuo un arco



Compactación del rayo con residuo S^1

Definición. *Sean X un espacio topológico y c_1X,c_2X compactaciones del espacio X. Las compactaciones c_1X y c_2X son* **equivalentes** *si existe $f : c_1X \to c_2X$ un homeomorfismo tal que $(f \circ c_1)(x) = c_2(x)$ para todo $x \in X$.*

Cuando c_1X y c_2X sean dos compactaciones equivalentes del espacio X, lo denotaremos por $c_1X \cong c_2X$.

Denotaremos por $C(X)$ a la familia de todas las compactaciones de X. La relación $\cong$ es de equivalencia en $C(X)$, por lo que para cada uno de los elementos de la familia de compactaciones de X, podemos definir su clase de equivalencia. Denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ a la familia de todas las clases de equivalencia de $C(X)$.

A continuación, definiremos una relación de orden en la familia $\mathcal{C}(X)$.

Definición. *Sea X un espacio topológico. Se define la relación $\preccurlyeq$ en la familia $\mathcal{C}(X)$ por: $c_2X \preccurlyeq c_1X$ si y solo si existe una función continua $f : c_1X \to c_2X$ tal que $(f \circ c_1)(x) = c_2(x)$ para todo $x \in X$, es decir, $f(c_1(X)) = c_2(X)$.*

La relación $\preccurlyeq$ es de orden en $\mathcal{C}(X)$.

Teorema. *Toda subfamilia no vacía $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}(X)$ tiene una mínima cota superior, con respecto al orden $\preccurlyeq$ en $\mathcal{C}(X)$.*

Corolario. *Si X es un espacio de Tychonoff, entonces existe en $\mathcal{C}(X)$ un elemento maximal con respecto al orden $\preccurlyeq$.*

Teorema. *Todo continuo X es residuo de alguna compactación del rayo.*

Compactación de Alexandroff

Ahora vamos a establecer las condiciones que debe cumplir un espacio topológico X para que la familia $\mathcal{C}(X)$ posea un elemento minimal. Esta compactación se conoce como la compactación de Alexandroff.

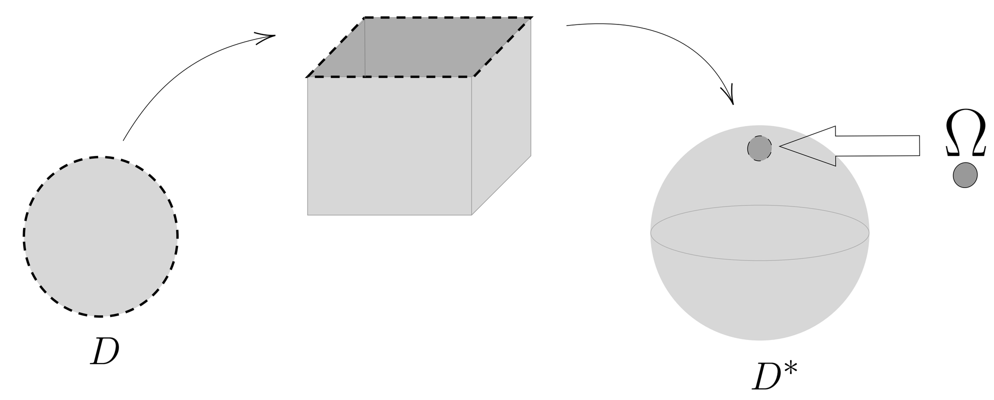
Teorema. TEOREMA DE COMPACTACIÓN DE ALEXANDROFF. *Sea X un espacio no compacto. Si X es localmente compacto, entonces existe $\omega X \in \mathcal{C}(X)$ tal que $|\omega X \setminus \omega(X)| = 1$. Esta compactación es el elemento más pequeño en $\mathcal{C}(X)$ con respecto al orden $\preccurlyeq$, y además $w(X) = w(\omega X)$.*

Si $(X, \mathcal{O})$ es un espacio localmente compacto y no compacto, y $\Omega \notin X$. Se define $\omega X = X \cup \{\Omega\}$ y

$$\mathcal{O}_\omega = \mathcal{O} \cup \{\{\Omega\} \cup (X \setminus F) : F \text{ es un subespacio compacto de } X\}.$$

La familia $\mathcal{O}_\omega$ es una topología en el conjunto ωX. A la compactación ωX, de un espacio X localmente compacto pero no compacto, se le conoce como la **compactación de Alexandroff** de X.

Ejemplo. *El círculo S^1 es una compactación de $\mathbb{R}$. En general, la n-esfera S^n es compactación del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.*



Compactación de Stone-Čech

La compactación maximal de la familia $\mathcal{C}(X)$ se conoce como la compactación de Stone–Čech. Entre las propiedades que se abordan se encuentran: la posibilidad de extender de forma continua funciones definidas en X a dicha compactación, así como la caracterización de las condiciones bajo las cuales una compactación es equivalente a la de Stone–Čech.

Definición. *La* **compactación de Stone-Čech** *de X o la* **compactación maximal** *de X, denotada por βX; es el elemento maximal de $\mathcal{C}(X)$.*

Definición. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ una función continua y $h : X \to Z$ un encaje homeomorfo. Decimos que f* **se puede extender continuamente** *a Z, si existe una función continua $F : Z \to Y$ tal que $(F \circ h)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

Note que si $X \subset Z$, es posible considerar a la función h como la función identidad.

Teorema. *Sean X un espacio de Tychonoff y Y un espacio compacto. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces f se puede extender continuamente a βX.*

Además, si para una compactación αX de X se cumple que, para todo espacio compacto Y, cualquier función continua $f : X \to Y$, f se puede extender continuamente a αX, entonces αX es equivalente a βX.

1. Referencias

- Fidel Casarrubias Segura y Ángel Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General,* Aportaciones matemáticas: Serie Textos, Núm: 37. Ciudad de México: Instituto de Matemáticas, UNAM, 2019.
- Ryszard Engelking, *General topology*. English. Rev. and compl. ed. Vol. 6. Sigma Ser. Pure Math. Berlin: Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 3–88538–006–4.
- Martínez De la Vega, V. and Minc, P., *Uncountable families of metric compactifications of the ray*, 2014.