La Aproximación de Números Irracionales Algebraicos y Números Trascendentes de Liouville

Abed Josué Calderón Romero, abed.calderon@alumno.buap.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Motivación

La clasificación de los números entre algebraicos y trascendentes para la resolución de problemas en teoría de números.

Teoremas

Comenzaremos con algunos resultados básicos sobre los números algebraicos y trascendentes.

Proposición

– Todo número racional m/n es algebraico, pues es raíz del polinomio $nX - m = 0$.

Teorema (de su cardinalidad)

– El campo $\mathbb{A}$ de todos los números algebraicos es un conjunto numerable.

Corolario

– Los números trascendentes existen, más aún, el conjunto de números trascendentes es no numerable.

Teorema de Liouville

En 1853, Liouville demostró que los números algebraicos no pueden ser bien aproximados por números racionales.

Teorema (Liouville)

– Dado α un número algebraico real de grado $n \neq 1$, entonces existe una constante positiva $c = c(\alpha)$ tal que para todo número racional $\frac{p}{q}$, con $(p, q) = 1$ y $q > 0$, la desigualdad

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^n}$$

se cumple.

Utilizando este Teorema, Liouville pudo dar ejemplos específicos de números trascendentes.

Ejemplos

Daremos ejemplos destacados que hacen uso del Teorema anterior para su prueba.

Ejemplo

– El número

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

es trascendente.

Con una argumentación similar a la prueba del ejemplo anterior es fácil generalizar este resultado.

Definiciones básicas

Un numero $\alpha \in \mathbb{C}$ es algebraico complejo si existe un polinomio $f(x) = a_0 + \cdots a_n x^n \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$, es algebraico real si $\alpha \in \mathbb{R}$; es trascendente si no es algebraico.

Ejemplo

– El número

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n!}$$

es trascendente para todo entero positivo a.

Por una variante del argumento de la diagonal de Cantor, el siguiente conjunto de números es no numerable.

Ejemplo

– Todo número de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k 10^{-k!}$$

es trascendente, donde $s_k \in \{1, -1\}$.

De cualquiera de los últimos dos ejemplos se deduce otra prueba de la no numerabilidad de los números trascendentes.

Mejoras del Teorema de Liouville

En 1909, Thue logro mejorar la desigualdad de Liouville.

Teorema (Thue)

– Dado α un número algebraico real de grado n, entonces existe una constante positiva $c = c(\alpha)$ tal que para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, la desigualdad

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^{n/2+1}}$$

se cumple.

Una ecuación se llama diofantina cuando las soluciones se restringen a los números enteros. El siguiente teorema es una aplicación del Teorema de Thue a ciertas ecuaciones diofantinas.

Teorema

– Dado $f(x, y)$ un polinomio irreducible de dos variables con grado $n \geq 3$. $f(x, y) = m$ para todo $m \in \mathbb{Z}^*$ solo tiene un número finito de soluciones.

Hubo muchas mejoras al Teorema de Liouville pero uno de los resultados más importantes fue el que dio Roth en 1955 quien fortaleció aún más la desigualdad.

Resultados notables

El Teorema de Liouville y sus mejoras, así como las aplicaciones de estos.

Teorema (Roth)

– Dado α un número algebraico real de grado n, entonces existe una constante positiva $c = c(\alpha, \epsilon)$ tal que para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, la desigualdad

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\alpha, \epsilon)}{q^{2+\epsilon}}$$

se cumple para todo $\epsilon > 0$.

Esta mejora nos dio una nueva familia de números trascendentes.

Ejemplo

– Los números de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-f(n)}$ donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, son trascendentes siempre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} > 2$$

Una generalización del Teorema de Liouville es la siguiente.

Teorema

– El Teorema de Liouville de cumple para α, donde α es un número algebraico complejo de grado $n \geq 2$.

Otros números trascendentes importantes son los siguientes.

Teorema (Hermite, 1873)

– El número e es trascendente.

Teorema (Lindemann, 1882)

– Dado un número algebraico α no cero, entonces e^{α} es trascendente, más aún, π es trascendente.

Problemas abiertos

En la actualidad, todavía se desconoce si son o no trascendentes números como $e + \pi$, $e\pi$, $\zeta(2n+1)$, (en donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann y $n \in \mathbb{N}$) y la constante de Euler γ.

Bibliografía

[1] Murty, M. R., & Esmonde, J. (2005). *Problems in Algebraic Number Theory*. Springer Science & Business Media.

[2] Jarvis, F. (2014). *Algebraic number theory*. Springer.