Algunas propiedades básicas de los continuos localmente conexos, enrejados y casi enrejados

Leonardo Ramírez Aparicio, Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autonoma de Puebla

Resumen

Un continuo X es un espacio métrico no degenerado que es compacto y conexo.
Si X es un continuo y n un entero positivo, denotamos como $C_n(X)$ la familia de subconjuntos cerrados no vacíos de X con a lo más n componentes y metrizado por la métrica de Hausdorff.
También, definimos, $\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x$ tiene una vecindad M en X con M una gráfica finita$\}$ y $\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X)$. Además, $\mathcal{FA}(X) = \bigcup\{\mathrm{int}_X(J) : J$ es un arco libre en $X\}$.
Presentamos algunos resultados generales que caracterizan a los continuos casi enrejados como a su subclase de los continuos enrejados y que involucran en su definición a los conjuntos $\mathcal{G}(X)$ y $\mathcal{P}(X)$
Por último, se da una caracterización para los subconjuntos de $C_n(X)$ que tienen dimensión finita cuando X es localmente conexo.

Introducción

El hiperespacio $C_n(X)$ cuando X es un continuo localmente conexo tuvo sus inicios en 1939 con M. Wojdyslawski [1]. Mucho tiempo después, en el año de 2013, en la búsqueda por encontrár qué continuos localmente conexos tienen hiperespacio único $C_n(X)$ para el cual $n \in \mathbb{N}$, en [2], se introdujeron los conjuntos $\mathcal{G}(X)$ y $\mathcal{P}(X)$. En este mismo artículo, aparecen por primera vez, los conceptos de enrejado y casi enrejado.

Preliminares

Iniciamos con la definición de enrejado y casi enrejado.

Definición

Decimos que un continuo X es **casi enrejado** si y solo si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Un continuo casi enrejado X es **enrejado** siempre que X tenga una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que, para cada elemento $U \in \mathcal{B}$, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.

Lo que sigue, es una caracterización de los continuos casi enrejado.

Lema 1

Sea X un continuo. Entonces $\mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X)) = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. Por lo tanto, X es casi enrejado si y solo si $\mathcal{FA}(X)$ es denso en X.

Enrejados y casi enrejados

Aunque a simple vista, pudiera parecer que los continuos enrejados no poseen cierta relación con los continuos localmente conexos, el siguiente resultado nos dice que esto no es así. Pero antes, tenemos el siguiente resultado

Lema 2

Sean X un continuo casi enrejado y U un subconjunto de X. Entonces $\mathrm{int}_X(U) \subset \mathrm{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$.

Ahora sí, presentamos el siguiente lema, el cual nos dice que los continuos enrejados son también, continuos localmente conexos.

Lema 3

Si X es un continuo enrejado, entonces X es un continuo localmente conexo.

Demostración

Como X es un continuo enrejado, X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que, para cada elemento $U \in \mathcal{B}$, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Sea $x \in X$ y V un subconjunto abierto de X, tal que $x \in V$. Elijamos ahora, W un subconjunto abierto tal que, $x \in W \subset \mathrm{cl}_X(W) \subset V$. Sea $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathrm{int}_X(U) \subset U \subset W$. Por el Lema 2, $\mathrm{int}_X(U) \subset \mathrm{cl}_X(U - \mathcal{P}(X)) \subset \mathrm{cl}_X(U) \subset cl_X(W) \subset V$. Esto nos dice que, $x \in \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))) \subset \mathrm{cl}_X(U - \mathcal{P}(X)) \subset V$. Además, como $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo, entonces $\mathrm{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$ también es conexo.
Así, como x es arbitrario, la familia $\{\mathrm{cl}_X(U - \mathcal{P}(X)) : U \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades conexas de X. Por lo tanto, X es conexo en pequeño y por ende, localmente conexo.

Damos ahora una caracterización para los continuos enrejados parecida a su definición, pero con una condición más fuerte.

Lema 4

Sea X un continuo. Entonces X es enrejado si y solo si X es casi enrejado, y X tiene una base $\mathcal{D}$ de subconjuntos abiertos conexos de X tal que, para cada elemento $U \in \mathcal{D}$, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.

Demostración

La suficiencia es inmediata por la definición de continuo enrejado. Para la necesidad, supongamos que X es enrejado. Sea $\mathcal{B}$ una base de vecindades de X tal que, para cada elemento $U \in \mathcal{B}$, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Sea $p \in X$ y W un subconjunto abierto no vacío de X tal que $p \in W$.
Sea $U \in \mathcal{B}$ tal que $p \in \mathrm{int}_X(U) \subset U \subset W$. Por el Lema 3, como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo Z de X tal que $p \in Z \subset \mathrm{int}_X(U)$. Como $\mathcal{P}(X)$ es un subconjunto cerrado de X, se sigue que $W - \mathcal{P}(X)$ es un subconjunto abierto de X. Como $U - \mathcal{P}(X) \subset W - \mathcal{P}(X)$, para cada $x \in U - \mathcal{P}(X)$, existe un subconjunto abierto y conexo V_x de X tal que, $x \in V_x \subset W - \mathcal{P}(X)$.
Consideremos ahora, $V = Z \cup (\bigcup\{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\})$. Notemos que V es un subconjunto abierto de X ya que es la unión de dos conjuntos abiertos de X. Sea $S = \bigcup\{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\}$, entonces $U - \mathcal{P}(X) \subset S \subset W - \mathcal{P}(X) \subset W$. En particular, $S \subset W$. Luego, como $Z \subset W$, se tiene que, $p \in Z \subset V \subset W$, es decir, $p \in V \subset W$. Además, como $V - \mathcal{P}(X) = (Z \cup S) - \mathcal{P}(X) = (Z - \mathcal{P}(X)) \cup (S - \mathcal{P}(X)) = (Z - \mathcal{P}(X)) \cup S$, se sigue que $S \subset V - \mathcal{P}(X)$. Como $Z - \mathcal{P}(X) \subset U - \mathcal{P}(X)$, entonces $V - \mathcal{P}(X) \subset (U - \mathcal{P}(X)) \cup S \subset S$ ya que $U - \mathcal{P}(X) \subset S$. Así, se obtiene que $S = V - \mathcal{P}(X)$.

Por otro lado, como $V - \mathcal{P}(X) = V \cap \mathcal{G}(X)$, se sigue que $V - \mathcal{P}(X)$ es abierto en X. Más aun, como $\{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\}$ es una familia de subconjuntos conexos de X y $U - \mathcal{P}(X)$ es un subconjunto conexo de X tal que, $U - \mathcal{P}(X) \subset S$ y cada $V_x \in \{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\}$ cumple que, $V_x \cap (U - \mathcal{P}(X)) \neq \emptyset$, entonces, S es conexo, es decir, $V - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Por último, como $V - \mathcal{P}(X) \subset V$, por el Lema 2, se sigue que $V - \mathcal{P}(X) \subset V \subset \mathrm{cl}_X(V - \mathcal{P}(X))$. Por lo tanto, V es conexo y por lo mencionado más anteriormente, también es abierto.

Existencia de gráficas finitas como vecindades de subconjuntos de $C_n(X)$ con dimensión finita

El siguiente resultado es una caracterización para los elementos de $C_n(X)$ que tienen dimensión finita cuando X es localmente conexo. Entre dicha caracterización distinguimos a estos elementos como aquellos que no intersectan al conjunto $\mathcal{P}(X)$ y que tienen una vecindad que es una gráfica finita.

Teorema

Sean X un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$. Entonces, los siguentes enunciados son equivalentes:

1. $\dim_A(C_n(X))$ es finita.
2. Existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $A \subset \mathrm{int}_X(D)$.
3. $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

References

[1] M. Wojdislawski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fundamenta Mathematicae, 32 (1939), 184-192.

[2] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes y V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, 43, (2013), 1583-16323.