Algunos modelos de los hiperespacios $Arcos(p,X)$ y $Medio(p,X)$.

Octavo Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones 2021

José Luis Suárez López[1], María de Jesús López Toriz[1], Mauricio Esteban Chacón Tirado[1]

[1] *Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*

Introducción

Los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de un espacio topológico, X, con alguna característica particular. Los más conocidos son:

$$2^X = \{F \subset X : F \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$$

$$C(X) = \{F \in 2^X : F \text{ es conexo}\}.$$

En particular, cuando X es un continuo, a $C(X)$ se le conoce como el hiperespacios de subcontinuos del continuo X.

Uno de los resultados importantes que usualmente se usa en el estudio de los hiperespacios es:

TEOREMA. Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es un continuo.

DEFINICIÓN. Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X. Definimos $C(A,X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$.

En particular nos interesan estos hiperespacios cuando $A = \{p\}$ con $p \in X$. Es decir, los hiperespacios de la forma $C(\{p\},X) = \{B \in C(X) : p \in B\}$, los cuales denotaremos sólo por $C(p,X)$.

En 1976, Nadler propone estudiar el hiperespacio de arcos, recordemos que un arco es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0,1]$. En 1999, Adrián Ulises Soto, introduce la definición del hiperespacio de *Arcos y singulares*, la cual mencionamos acontinuación:

Definición. Para todo continuo X se definen los siguientes subespacios de $C(X)$:

$$\mathcal{A}(X) = \{A \in C(X) : A \text{ es un arco}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{A}(X) \cup F_1(X).$$

Estos espacios son el **hiperespacio de arcos** de X y el **hiperespacio de arcos y singulares** de X, respectivamente.

Modelos de los hiperespacios $Arcos(p,X)$ y $Medio(p,X)$

DEFINICIÓN. Dados un continuo X y un punto $p \in X$, definimos el hiperespacio de arcos contenidos en X que tienen a p de la siguiente manera:

$$Arcos(p,X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : p \in A\}.$$

DEFINICIÓN. Dados X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Para cada $p \in X$, definimos el hiperespacio de todos los arcos en X que tienen como punto medio a p con respecto de μ de la siguiente manera:

$$Medio(p,X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : P_\mu(A) = p\}.$$

Los siguientes resultados se pueden obtener fácilmente:

PROPOSICIÓN. Sea X un arco con puntos extremos x e y. Consideremos $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

(1) Si $p \in \{x,y\}$, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es un arco.
(2) Si $p \in X - \{x,y\}$, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a una 2-celda.

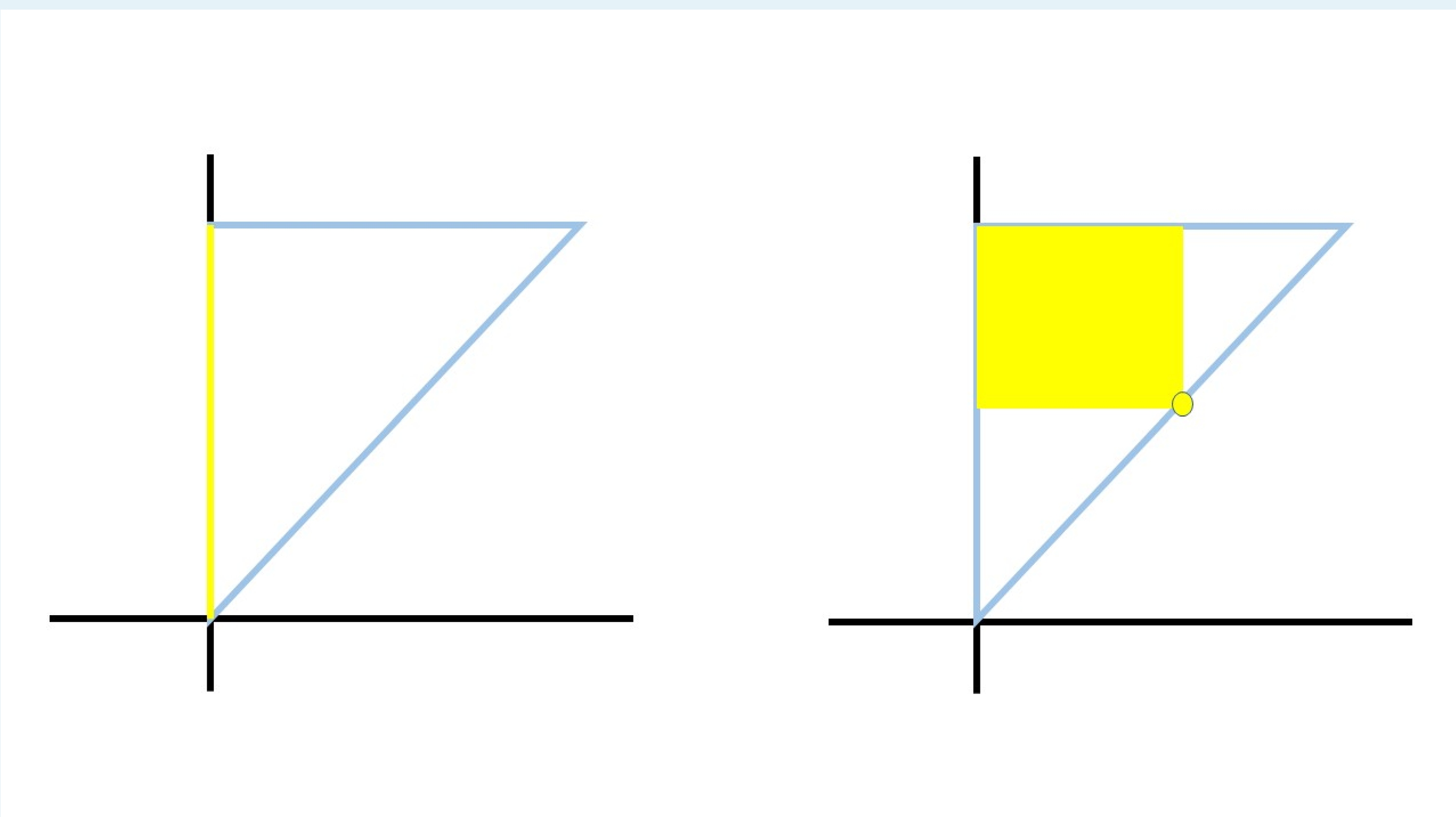

Figura: Hiperespacio $Arcos(p,X)$ cuando p es punto extremo y cuando no lo es.

PROPOSICIÓN. Sea X un arco con puntos extremos x y y. Se cumplen los siguientes enunciados:

(1) Si $p \in \{x,y\}$, entonces el hiperespacio $Medio(p,X)$ es un singular.
(2) Si $p \in X - \{x,y\}$, entonces el hiperespacio $Medio(p,X)$ es un arco.

Recordemos que una curva cerrada simple es un espacio topológico homeomordo al círculo unitario.

PROPOSICIÓN. Sea X una curva cerrada simple. Si $p \in X$, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es homeomorfo $\mathcal{K} - \{X\}$, donde $\mathcal{K}$ es una 2-celda en $C(X)$.

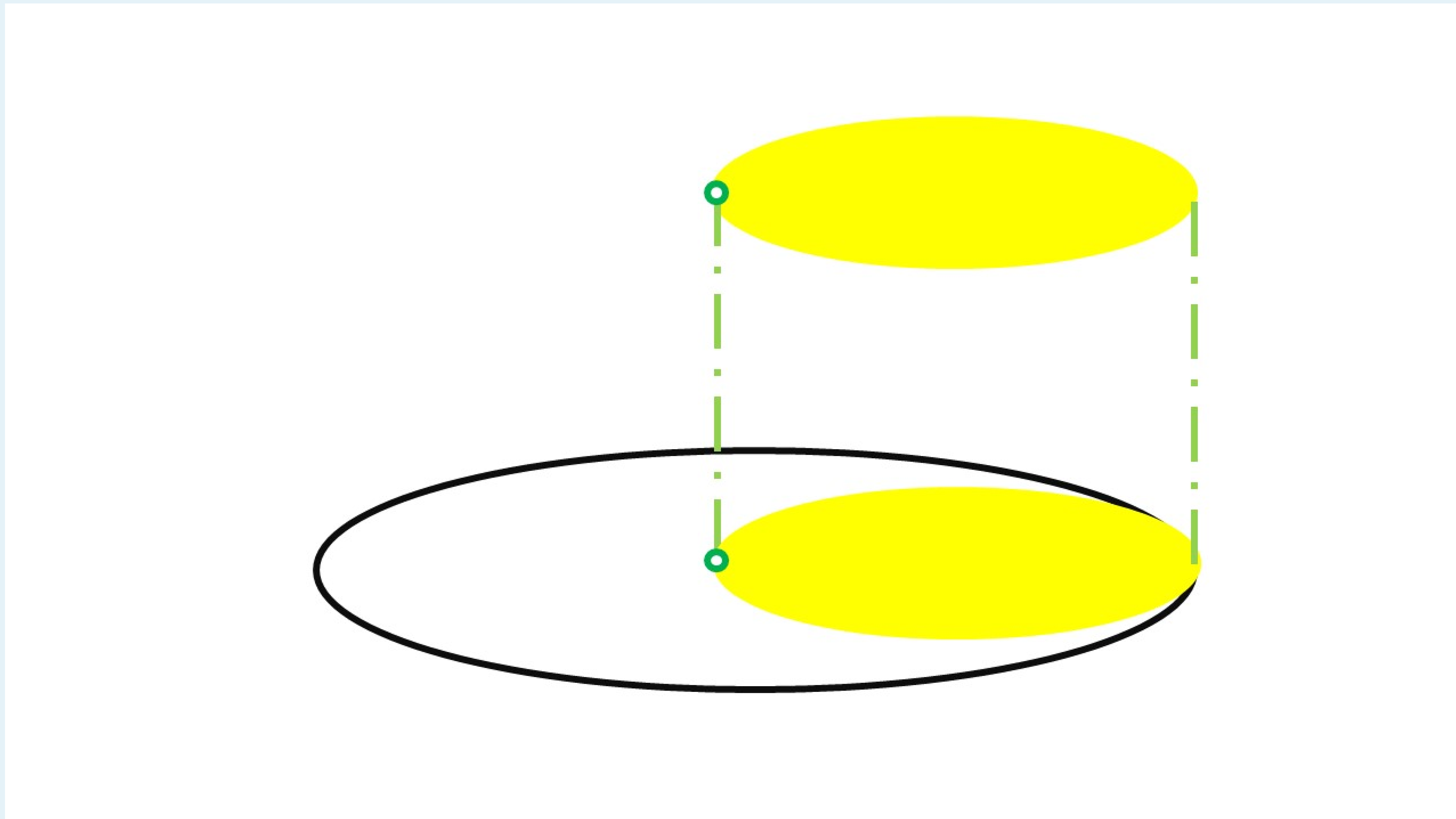

Figura: Hiperespacio $Arcos(p,X)$.

PROPOSICIÓN. Sea X una curva cerrada simple. Si $p \in X$, entonces el hiperespacio $Medio(p,X)$ es homeomorfo al intervalo $[0,1)$.

TEOREMA. Sean $X = S^1 \cup J$, con $J = [1,2] \times \{0\}$, $S^1 \cap J = \{v\}$ y $e = (2,0)$ el punto extremo de J distinto de $v = (1,0)$. Si $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

(1) Si $p = e$, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a $Y = ((-1,1) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$.
(2) Si $p \in O(X)$, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a $Y \times [0,1]$ o es homeomorfo a $(D - \{(-1,0)\}) \cup ([-1,0) \times [0,1]) \cup ((0,1] \times [0,1])$, con $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(3) Si $p = v$, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a $(D - \{(-1,0)\}) \cup ((S^1 - \{(-1,0)\}) \times [0,1])$.

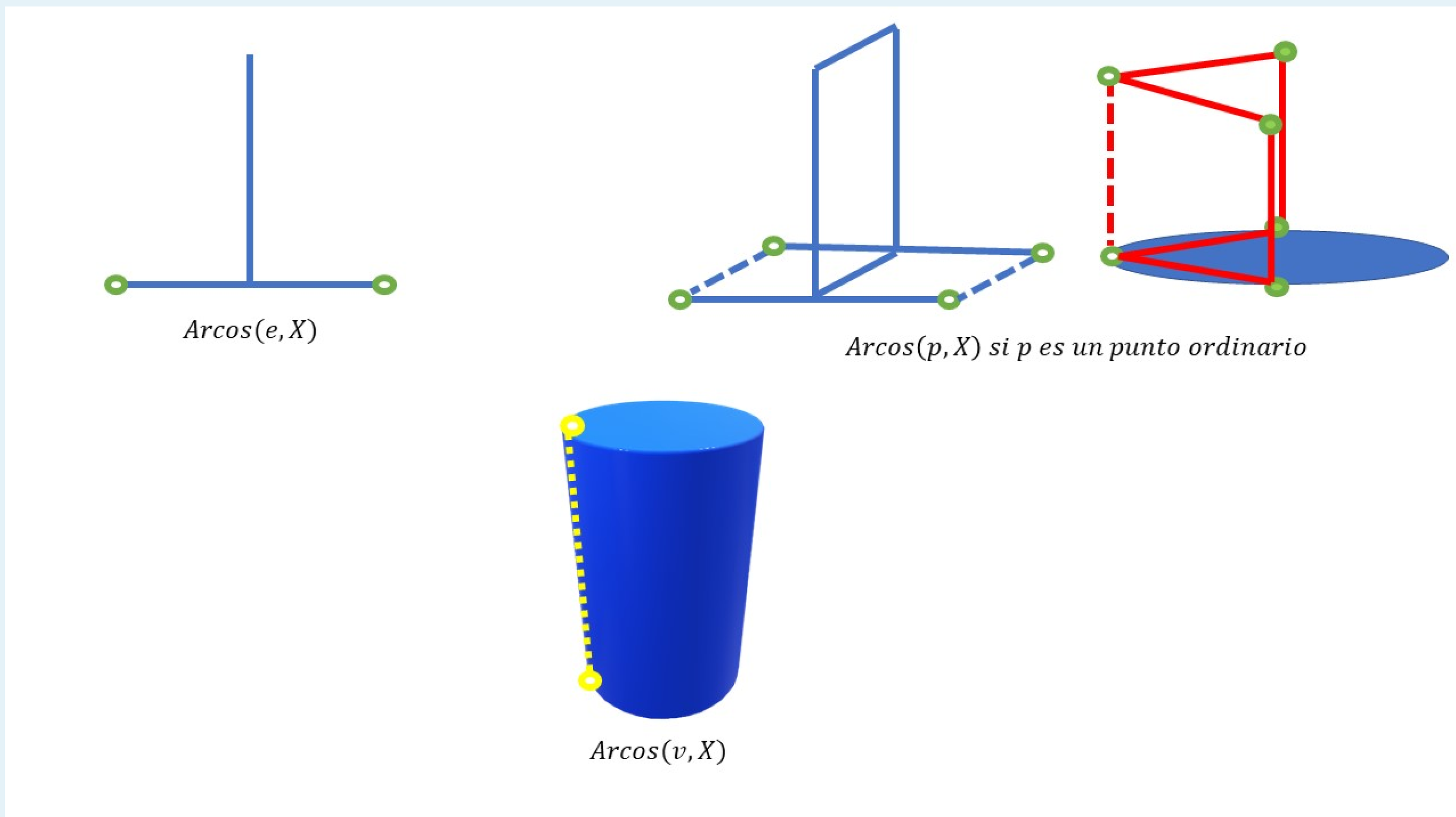

Figura: Hiperespacio $Arcos(p,X)$.

TEOREMA. Sean $X = S^1 \cup J$, con $J = [1,2] \times \{0\}$, $S^1 \cap J = \{v\}$ y $e = (2,0)$ el punto extremo de J distinto de $v = (1,0)$. Si $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

(1) Si $p = e$, entonces el hiperespacio $Medio(p,X)$ es un singular.
(2) Si $p \in O(X)$, entonces el hiperespacio $Medio(p,X)$ es un arco, o un triodo, u homeomorfo al intervalo $[,1)$ o es homeomorfo al intervalo $(0,1)$.
(3) Si $p = v$, entonces el hiperespacio $Medio(p,X)$ es un triodo o es homeomorfo a $Y = ((-1,1) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$.

Referencias

- A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- Nadler, Jr., S. B. *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- P. Pellicer-Covarrubias, *The hyperspaces $C(p,X)$*, Top. Proc., 27 (1) (2003), pág. 259-285.