Banach y las topologías débiles

Jessica Torres Flores

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Historia

Los espacios normados fueron introducidos en la segunda década del siglo XX, paralelamente se desarrollaban teorías más generales como eran los espacios vectoriales topológicos y los espacios de Hilbert. La teoría de espacios de Hilbert fue una inagotable fuente de sugerencias y definiciones que los espacios normados recogieron y ampliaron afinándolas. Lógicamente importantes matemáticos hacían artículos con repercusión en varias teorías a la vez.
Ya desde el cálculo infinitesimal se dio el paso de lo finito a lo infinito relacionando el Algebra Lineal y el Cálculo Diferencial. Bernhard Riemann (1826-1866) en su tesis ya hablaba de colecciones de funciones formando un conjunto conexo y cerrado. Ascoli y Arzela intentaron extender la teoría de conjuntos de Cantor a conjuntos de funciones que consideraban como puntos.
El mayor esfuerzo por construir una teoría abstracta de los espacios de funciones lo hizo Maurice Fréchet (1878-1973) en su tesis doctoral de 1906, en la que introdujo los espacios métricos, así como los operadores lineales y denominó a los conjuntos secuencialmente compactos y compactos.
En 1906 E.H.Moore comenzó a extraer de la teoría de ecuaciones lineales con un número finito de incógnitas, la teoría para infinitas incógnitas, y a sus estudios los denominó Análisis General con una introducción axiomática. Los estudios de Hilbert sobre las ecuaciones integrales se basaban en el desarrollo de las funciones por su serie de Fourier, pero Hilbert no asoció los coeficientes de Fourier a puntos de un espacio infinito dimensional. Quien lo hizo fue Schmidt fundamentando desde el caso de dimensión finita al infinito las desigualdades de Bessel y la fórmula de Schwarz.
En 1907 tanto Schmidt como Fréchet anunciaron que la geometría del espacio L^2 era identica a los espacios de Hilbert.
Otra aproximación a los espacios abstractos la inició Riesz, aproximadamente en 1918, aunque la definición completa es de Banach que junto con Hahn y Helly trabajaron sabiendo que las normas podrían no tener un producto escalar asociado. La mayor generalidad llevaba a estudiar más espacios pero se perdía la ortogonalidad y por tanto la posibilidad de asegurar la existencia y localización de puntos próximos, de aquí surgieron distintos teoremas que se presentan en este cartel.
Todos estos avances pudieron ser formalizados y estructurados por los avances de la Topología General entre 1930 y 1940, afinados por el uso de Neumann en 1935 de los espacios localmente convexos y de los conjuntos acotados, que consiguieron espectaculares resultados en los trabajos de Mackey [1].

Espacios Normados

Recordemos primero la definición de norma.
Definición. Una seminorma en un espacio vectorial E sobre un campo $\mathbb{K}$ es una función $\rho : E \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$
2. $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$

Además diremos que ρ es una norma si cumple que $\rho(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Ahora podemos definir un espacio normado.
Definición. Un espacio normado es un espacio vectorial X, con una norma $||\cdot||$. Un espacio de Banach es un espacio normado completo. Recordando que un espacio es completo si toda sucesión de Cauchy converge en él.
Algunos ejemplos de espacios de Banach son:

1. Sea X un espacio topológico no vacío, entonces $$C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ continua}, \sup_{t\in X} |f(t)| < \infty\}$$ es un espacio vectorial y la expresión $||f|| = \sup_{t\in X} |f(t)|$ define una norma.
2. Sea c_0 el espacio vectorial de las sucesiones de escalares $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ que convergen a 0, con las operaciones coordenada a coordenada, con la norma $||x|| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$.
3. Sea l^∞ el espacio vectorial de las sucesiones acotadas $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \in \mathbb{K}$ para $n = 1, 2, \ldots,$ con la norma $||x||_\infty = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$

Un buen ejemplo de un espacio que no es de Banach es el siguiente:
Sea l^∞ como en el ejemplo anterior, definamos $||x||_2 = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|x_i|}{i}$ es fácil ver que es una norma, sin embargo, con esta l^∞ no completo y por lo tanto no es de Banach.

Teoremas de Banach

Como mencionamos antes, el algebra lineal fue una de las bases para el estudio de los espacios de Banach, así los operadores lineales son de interés para nosotros, por lo que vamos a definir la norma para ellos.
Definición Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Definamos la norma de un operador T por
$$||T|| = \text{ínf}\{||Tx|| \leq C||x||, x \in X\}$$
o, equivalentemente
$$||T|| = \sup_{||x||\leq 1} ||tx||$$
Denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$, al espacio de los operadores lineales continuos de X en Y con la norma anterior. Si $Y = \mathbb{K}$, el espacio $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ se denota por X^* y es conocido como el espacio dual de X.
Presentaremos entonces, algunos de los resultados que obtuvo Banach, las demostraciones de los siguientes teoremas se pueden encontrar en [2].
Teorema (Hahn- Banach real) Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\rho : E \to \mathbb{R}$ una función sublineal, F un subespacio de E y $f : F \to \mathbb{R}$ una función lineal tal que $f(x) \leq \rho(x)$ para toda $x \in F$. Entonces existe una extensión lineal $\hat{f} : E \to \mathbb{R}$ de f con $\hat{f}(x) \leq \rho(x)$ para toda $x \in E$.
Antes de pasar a la versión compleja del anterior teorema , recordemos la definición de una función r-lineal.
Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Diremos que $f : E \to \mathbb{R}$ es r-lineal si
$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$
para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y para toda $x, y \in E$
Teorema (Hann-Banach complejo) Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, ρ una seminorma en E, F un subespacio de E y $f : F \to \mathbb{C}$ una función c-lineal tal que $|f(x)| \leq \rho(x)$ para toda $x \in F$. Entonces existe una extensión c-lineal $\hat{f} : E \to \mathbb{C}$ de f con $|\hat{f}(x)| \leq \rho(x)$ para toda $x \in E$.
La noción de topopología de categoría fue introducida por Baire y ha probado ser una de las herramientas básicas del análisis, es por eso que para los siguientes tres teoremas se recomienda recordar conceptos topológicos tales como: conjunto abierto, cerrado, denso, magro, de primera o segunda categoría,. . . .
Empezaremos con el teorema de la función abierta, uno de los resultados sobre operadores en espacios de Banach.
Teorema (de la función abierta) Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo y suprayectivo. Entonces T es abierto, es decir $T(U)$ es un conjunto abierto en Y para todo conjunto abierto $U \subset X$.
EL siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema anterior y se utiliza para demostrar que un operador es invertible.
Teorema(de la función inversa) Si X y Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador biyectivo y acotado, entonces T es un isomorfismo, es decir, T^{-1} es acotado y por lo tanto
$$||T^{-1}||^{-1}||x|| \leq ||Tx|| \leq ||T||||x||$$
Notemos que, cuando un operador T es continuo, entonces su gráfica es cerrada. Para espacios de Banach, el recíproco también es cierto, es decir, si la gráfica de T es cerrada entonces es continuo.
Teorema (de la gráfica cerrada) Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una función lineal cuya gráfica es cerrada en $X \times Y$. Entonces T es continua.

Topologías débiles

Sea X un espacio normado, se puede ver que X^* es un espacio de Banach, así que podemos hablar de su dual o bidual, que denotaremos por X^{**}.El estudio de subsucesiones convergentes de sucesiones acotadas, condujo a la búsqueda de topologías más débiles, con más compactos y que respeten la estructura de espacio vectorial, las dos topologías más importantes de esta investigación son conocidas como topología débil y débil estrella, la primera en el espacio mismo y la segunda en su dual.
Definición Sean X un espacio normado y X^* su dual. La topología débil en X, denotada por $\sigma(X, X*)$ o simplemnete por ω es la topología que tiene como base local de $x_0 \in X$ a los conjuntos de la forma
$$V(x_0, x_1^*, \ldots, x_k^*, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X : |\langle x_i^*, x - x_0\rangle| < \epsilon\}$$
con $x_1^*, \ldots, x_k^* \in X^*$ y $\epsilon > 0$, donde $\langle x^*, x\rangle$ significa lo mismo que $x^*(x)$.
Se puede demostrar que la topología débil es de Hausdorff así como la débil estrella definida a continuación.
Definición Sean X un espacio normado y X^* su dual. La topología débil estrella en X^*, denotada por $\sigma(X^*, X)$ o simplemente por ω^*, es la topología que tiene como base local de $x_0^* \in X^*$ a los conjuntos de la forma
$$V(x_0^*, x_1, \ldots, x_k, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x^* \in X^* : |\langle x_0^* - x^*, x_i\rangle| < \epsilon\}$$
con $x_1, \ldots, x_k \in X^*$ y $\epsilon > 0$.
Muchas son las propiedades que se encontraron en estas topologías, sin embargo el espacio en este cartel está por terminar, por lo tanto se le invita al lector a investigar en las siguientes referencias.

Referencias

- Charbonnier, D.(2011)*Algunos teoremas fundamentales de las topologías débiles*[Tesis de maestría, UNED, Facultad de Ciencias]
- Gamboa de Buen, B. Fetter Nathansky, H.. (2008). *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach* . México: CIMAT.
- Rudin, W. (1991). *Funtional Analysis.* Singapore: McGraw-Hill, Inc.ISBN:0-07-100944-2