Estudio de algunas propiedades del n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo

Germán Montero Rodríguez
Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

septiembre 2021

Resumen

Un continuo es un espacio métrico no degenerado, compacto y conexo. Sean X un continuo y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros positivos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideraremos los siguientes hiperespacios de X: $2^X = \{A \subset X : A$ es no vacío y cerrado en $X\}$ y $F_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n puntos$\}$. Todos estos hiperespacios son considerados con la métrica de Hausdorff. El n-ésimo producto simétrico suspensión de X, denotado por $SF_n(X)$, es el espacio cociente

$$SF_n(X) = F_n(X)/F_1(X),$$

que se obtiene de $F_n(X)$ al identificar $F_1(X)$ a un punto. Las propiedades que se estudian en este trabajo son: unicoherencia, conexidad local, arco conexidad y unicidad. Los resultados que se exponen son de los primeros en este hiperespacio, de ahí su importancia, [1], [2].

Introducción. El campo de investigación en teoría de continuos estudia hiperespacios, características y propiedades de un continuo, entre otras. Aquí presentaremos solo algunos (y sin demostración) de los resultados que se conoce por el momento de: unicoherencia, conexicad local, arco conexidad y unicidad, para el n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo.

Un continuo es una **gráfica finita** si es la unión finita de arcos tales que dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos. Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 3$. Una θ_m gráfica es la unión de m arcos $E_1, \ldots, E_m$ compartiendo los mismos puntos extremos u y v y satisfaciendo que $E_i \cap E_j = \{u, v\}$, for $i \neq j$. Un continuo X es **unicoherente** si prueba lo siguiente: si $X = A \cup B$, donde A, B son subcontinuos de X, entonces $A \cap B$ es conexo.

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, definimos el n-ésimo producto simétrico suspensión de X,denotado por $SF_n(X)$, como el espacio cociente: $SF_n(X) = F_n(X)/F_1(X)$.

con la topología cociente. Sam B. Nadler Jr., Çontinuum Theory",(3.10), se deduce que $SF_n(X)$ es un continuo.

El símbolo q_X denota la proyección natural $q_X : F_n(X) \to SF_n(X)$, y F_X denota el elemento $q_X(F_1(X))$. Así, $q_X|_{F_n(X)-F_1(X)} : F_n(X) - F_1(X) \to SF_n(X) - \{F_X\}$ es un homeomorfismo.

Modelos

K. Borsuk y S. Ulam demuestran que $F_2(I)$ es homeomorfo a I^2. A. Illanes demuestra que existe un homeomorfismo de $F_2(I)$ sobre el triángulo en el plano Euclidiano con vértices en los puntos $(0,0), (0,1)$ y $(1,1)$, de tal manera que $F_1(I)$ es homeomorfo al segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. Así, si identificamos $F_1(I)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a este triángulo. Así, $SF_2(I)$ es homeomorfo a este triángulo. Luego, $SF_2(I)$ es homeomorfo a $F_2(I)$. Por tanto, $SF_2(I)$ es homeomorfo a I^2.

También se conoce un modelo para $SF_2(T)$, donde T es un triodo simple y un modelo para $SF_2(S^1)$, donde S^1 es la circunferencia unitaria en el plano Euclidiano.

(a) $F_2(I)$ es homeomorfo a $SF_2(I)$.
(b) $F_2(T)$ es homeomorfo a $SF_2(T)$
(c) $\mathcal{Q}$ es homeomorfo a $SF_n(\mathcal{Q})$.
(d) $F_2(S^1)$ NO es homeomorfo a $SF_2(S^1)$. Note que S^1 no es unicoherente, $F_2(S^1)$ tampoco es unicoherente pero $SF_2(S^1)$ si es unicoherente.

Este último ejemplo muestra la importancia del estudio del n-ésimo producto simétrico suspensión.

Comenzamos con la propiedad de unicoherencia.

Unicoherencia

Teorema. Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$, entonces $SF_n(X)$ es unicoherente.

(.) ¿Qué sucede en el caso $n = 2$?
(.) Existe un continuo X (Unicoherente) para el cual $SF_2(X)$ no es unicoherente.

Lema. Sean X un continuo y A, B, M subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo. Si existe una componente K de $A \cap B$ tal que $K \cap M = \emptyset$, entonces el espacio cociente X/M no es unicoherente.

(.) Para demostrar que $SF_2(X)$ no es unicoherente, se aplica el Lema anterios a $F_2(X)$, con $M = F_1(X)$.

Ahora, continuamos con la propiedad de conexidad local.

Conexidad local

(1) **Teorema.** Sean X un contionuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si $F_n(X) - F_1(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente coenxo.
(2) **Teorema.** Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Un continuo X es localmente conexo si y solo si $SF_n(X)$ es localmente conexo.

Seguimos con la propiedad de arco conexidad. Un continuo es **arco conexo** si para cualesquiera dos puntos de X se pueden unir con un arco contenido en X.

Arco conexidad

(I) J.J. Charatonik, S. Macías demuestran que si un continuo X es arco conexo, entonces $F_n(X)$ es arco conexo.
(II) **Teorema.** Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si X es un continuo arco conexo, entonces $SF_n(X)$ es un continuo arco conexo.

El siguiente resultado muestra que el regreso del Teorema (II) es falso.

Arco conexidad

(III) **Teorema.** Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, y X una compactación del rayo $[0, \infty)$ con un continuo arco conexo no degenerado como reciduo L. Si existe una retracción $r : X \to L$, entonces $SF_n(X)$ es un continuo arco conexo.
Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.
(IV) **Teorema.**Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si X es una compactación del rayo $[0, \infty)$ con un continuo localmente conexo no degenarado como residuo, entonces $SF_n(X)$ es arco conexo.
(V) **Teorema.** Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, y X un continuo. Si existen dos arco componentes cerradas diferentes de X, entonces $SF_n(X)$ no es arco conexo.

Como consecuencia del Teorema (VII), tenemos que $SF_n(X)$ no es arco conexo, cuando X es el continuo de la sección de Unicoherencia.

Punto fijo

Una **retracción** es una función continua, r, de un espacio X en si mismo tal que r es la identidad sobre su rango (r(r(x))=r(x) para cada $x \in X$). Un subconjunto cerrado A de X es un **retracto** de X si existe una retracción de X sobre A. Un espacio X es un **retracto absoluto** si X es un retracto de cualquier espacio Y que contenga a X como subconjunto cerrado.

(A) **Teorema**. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si X es un ratracto absoluto, entonces $SF_n(X)$ es un retracto absoluto.
(B) K. Kuratowski demuestra que los retractos absolutos tienen la propiedad del punto fijo.
Por tanto tenemos el siguiente resultado.
(C) **Teorema**. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si X es un retracto absoluto, entonces $SF_n(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.

Terminamos con algunos de los resultados sobre la propiedad de unicidad.

Unicidad

(+) **Teorema.** Sean $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 3$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X es una gráfica θ_m, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.
(*) **Teorema.** Si X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y X no es la gráfica θ_m, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$.

[1] F. Barragán, *On the n-fold symmetric product suspensions of continuum*, Topology Appl. 157 (2010), 297–604.
[2] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, G. Montero-Rodríguez, *Finite graphs have unique n-fold simmetric product suspension*, enviado a Houston J. Math