Operador proyector en el modelo de pendientes aleatorias

Fernando Velasco Luna, Cruz Suárez Hugo A.,
Gárate Cahuantzi Zaida A., Tajonar Sanabria Francisco S.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

2021

Resumen

Estimación en áreas pequeñas (SAE) se centra en la estimación de alguna característica de interés, como la media en el área pequeña, para subpoblaciones. Uno de los enfoques usados es el basado en el Modelo Lineal Mixto (MLM). Por otro lado la teoría de predictores proporciona el Mejor Predictor Lineal Insesgado (BLUP) de la cantidad de interés a partir del teorema general de predicción. En este trabajo se considera la generalización de la caracterización de un efecto mixto para la j-ésima área en el contexto del MLM. Se presenta la caracterización bajo un caso particular del modelo de pendientes aleatorias..

Modelo lineal general mixto

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu} + \mathbf{e}$$

$$e \sim \mathbf{N}\left(0, \sigma_{\mathbf{e}}^2 \; I_{\mathbf{kd}}\right), \quad u \sim \mathbf{N}\left(0, \sigma_{\mathbf{u}0}^2 \; I_{\mathbf{k}}\right), \quad \mathbf{Cov}(u, e) = 0,$$

de lo cual

$$\mathbf{V} = \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}) = \sigma_{u0}^2 \, \mathbf{ZZ}^t + \sigma_e^2 \, \mathbf{I}_{kd} \, .$$

Estimación y predicción

$$\mathrm{BLUE}(\boldsymbol{\beta}) = \hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}$$

$$\mathrm{BLUP}(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{GZ}^t\mathbf{V}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

Teoría de predicción

Estimación de cantidades de interés como:

* Total poblacional T

* Media poblacional $\bar{y} = T/N$

Descomposición en dos partes

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}_s) + \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}_{sr})$$

*Royall (1979) Teorema del mejor predictor lineal insesgado

$$\boldsymbol{\gamma}_s^t \mathbf{y}_s + \boldsymbol{\gamma}_r^t \left[\mathbf{X}_r \hat{\boldsymbol{\beta}}_s + \mathbf{V}_{rs}\mathbf{V}_{ss}^{-1}\left(\mathbf{y}_s + \mathbf{X}_s \hat{\boldsymbol{\beta}}_s\right)\right]$$

Operador proyector

- Proyector oblicuo sobre $S(\mathbf{X})$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-} \mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}$$

- Proyector oblicuo sobre $S(\mathbf{Z})$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^t\mathbf{Z}\right)^{-1} \mathbf{Z}^t$$

- En el modelo lineal general funciones estimables

$$c^t \hat{\boldsymbol{\beta}} = c^t \left(\mathbf{X}^t\mathbf{X}\right)^{-} \mathbf{X}^t\mathbf{Y} = \alpha^t \, \mathbf{P}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$$

Efecto mixto

Efecto mixto: es una combinación de los efectos fijos y los efectos aleatorios

$$\mathbf{k}^t\boldsymbol{\beta} + \mathbf{m}^t\mathbf{u}$$

- Henderson (1975)

$$\mathrm{BLUP}\left(\mathbf{k}^t\boldsymbol{\beta} + \mathbf{m}^t\mathbf{u}\right) = \mathbf{k}^t \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{m}^t \hat{\mathbf{u}}$$

$$= \mathbf{k}^t \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{m}^t\mathbf{GZ}^t\mathbf{V}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

Caracterización BLUP

Bajo el MLGM si se cumple la condición

$$n_j \, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$$

$$\mathbf{V} = \oplus\left(\left(n_j\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2\right)\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} + \sigma_e^2 \, \mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}\right)$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \oplus\left[\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{\left(n_j\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2\right)} - \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}}{\sigma_e^2}\right]$$

$$\sigma_{u0}^2 \, \mathbf{ZZ}^t\mathbf{V}^{-1} = \bigoplus_{j=1}^{J}\left(\frac{n_j\sigma_{u0}^2 \, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{\left(n_j\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2\right)}\right)$$

Efecto Mixto

* Entonces el BLUP del efecto mixto

$$\mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu}$$

se expresa por

$$\mathrm{BLUP}(\mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu}) = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}(\mathbf{Y}) + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\left(\bigoplus_{j=1}^{J}\left(b_j \, \mathbf{I}_{n_j}\right)\mathbf{Q}_{\mathbf{XV}}\right)\mathbf{Y}$$

Media poblacional

se expresa por

$$\left[\frac{\mathbf{1}_{N_j}^t}{N_j}\mathbf{T}_{js} + \frac{\mathbf{1}_{n_s}^{*\,js\,t}}{n_{js}}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_s}\mathbf{B}_s\mathbf{Q}_{\mathbf{X}_s\mathbf{V}_s}\right)\right]\mathbf{Y}_s$$

donde

$$\mathbf{T}_{js} = \mathbf{X}_j\left(\mathbf{X}_s^t\mathbf{V}_s^{-1}\mathbf{X}_s\right)^{-} \mathbf{X}_s^t\mathbf{V}_s^{-1}$$

Media poblacional finita

$$\left(\frac{\mathbf{1}_{n_j}^{*\,jst}}{N_j} + \frac{N_j - n_j}{N_j}\left[\frac{\mathbf{1}_{N_j}^{*\,jrt}}{n_{jr}}\mathbf{T}_{js} + \frac{\mathbf{1}_{n_s}^{*\,js\,t}}{n_{js}}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_s}\mathbf{B}_s\mathbf{Q}_{\mathbf{X}_s\mathbf{V}_s}\right)\right]\right)\mathbf{Y}_s$$

donde

$$\mathbf{T}_{js} = \mathbf{X}_j\left(\mathbf{X}_s^t\mathbf{V}_s^{-1}\mathbf{X}_s\right)^{-} \mathbf{X}_s^t\mathbf{V}_s^{-1}$$

y

$$\mathbf{B}_s = \bigoplus_{j=1}^{J}\left(b_j \, \mathbf{I}_{n_j}\right)$$

Condición de la matriz Z

Bajo el MLGM si se cumple la condición

$$n_j \, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$$

entonces el BLUP

Efecto mixto $\mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu}$

Media poblacional μ_j

Media poblacional finita $\bar{Y}_j$

Modelo intercepto aleatorio

Modelo sólo intercepto sin variables explicatorias

$$y_{ij} = \mu + u_j + e_{ij}; \; i = 1,\ldots,d; \; j = 1,\ldots,k,$$

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{1}_{n_j}$$

BLUP efecto mixto

$$\mathrm{BLUP}(\mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu}) = (1-c)\frac{\mathbf{1}_{kd}\mathbf{1}_{kd}^t}{kd}\mathbf{Y} + c\frac{\left(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t\right)}{d}\mathbf{Y}.$$

donde $c = \dfrac{d\sigma_{u0}^2}{\left(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2\right)}$

BLUP media poblacional

$$\mathrm{BLUP}\left(\mu_j\right)_{\bar{\mathbf{X}}_j} = \bar{Y}_s + \frac{c(k-1)}{k}\left[\bar{Y}_{js} - \bar{Y}_{(-j)s}\right].$$

BLUP media poblacional finita

$$\mathrm{BLUP}\left(\bar{y}_j\right) = \frac{n_j}{N_j}\bar{Y}_{js} + \frac{N_j - n_j}{N_j}\left[\bar{Y}_s + \frac{c(k-1)}{k}\left(\bar{Y}_{js} - \bar{Y}_{(-j)s}\right)\right].$$

Otros modelos

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_{1j}x_{ij} + e_{ij}; \; i = 1,\ldots,\mathrm{n}_j; \; j = 1,\ldots,J$$

$$\beta_{1j} = \beta_1 + u_{1j} \qquad u_{1j} \sim N\left(0, \sigma_{u1}^2\right)$$

Modelo combinado

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + x_{ij}u_{1j} + e_{ij}; \; i = 1,\ldots,\mathrm{n}_j; \; j = 1,\ldots,J$$

$$\mathbf{Z}_j = \mathbf{X}_j \qquad \mathbf{Z} = \bigoplus_{j=1}^{J}\mathbf{Z}_j$$

NO se cumple la condición $n_j \, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$

Generalización condición de la matriz Z

$$\mathbf{Z}_j^t\mathbf{Z}_j = \begin{bmatrix} X_{1j} & \cdots & X_{n_j j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{1j} \\ \vdots \\ X_{n_j j} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2$$

Definiendo

$$c_j = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 \qquad \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\left(\mathbf{Z}_j^t\mathbf{Z}_j\right)^{-1}\mathbf{Z}_j^t = \frac{\mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t}{c_j}$$

Condición

$$c_j \, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$$

Generalización $\mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu}$

Definiendo

$$d_j = c_j\sigma_{u1}^2 \Big/ \left(c_j\sigma_{u1}^2 + \sigma_e^2\right) \qquad \mathbf{B} = \bigoplus_{j=1}^{J}\left(d_j \, \mathbf{I}_{n_j}\right)$$

$$\mathrm{BLUP}(\mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu}) = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}(\mathbf{Y}) + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{BQ}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y}$$

Generalización

$$\bar{\mathbf{X}}_{jr}\hat{\boldsymbol{\beta}}_s + \bar{\mathbf{Z}}_{jr}\hat{u}_j$$

$$\bar{\mathbf{X}}_{jr}\hat{\boldsymbol{\beta}}_s + \bar{\mathbf{Z}}_{jr}\hat{u}_j = \bar{\mathbf{X}}_{jr}\hat{\boldsymbol{\beta}}_s + \bar{\mathbf{Z}}_{jr}^*\hat{\mathbf{u}}$$

$$= \frac{\mathbf{1}_{N_j}^{*\,jrt}\mathbf{X}_j\hat{\boldsymbol{\beta}}_s}{N_j} + \bar{\mathbf{Z}}_{jr}^*\hat{\mathbf{u}}$$

$$= \frac{\mathbf{1}_{N_j}^{*\,jrt}}{N_j}\mathbf{T}_{js}\mathbf{Y}_s + \frac{\mathbf{1}_{N}^{*\,jrt}}{n_{jr}}\mathbf{Z}\hat{\mathbf{u}}$$

$$= \frac{\mathbf{1}_{N_j}^{*\,jrt}}{N_j}\mathbf{T}_{js}\mathbf{Y}_s + \frac{\mathbf{1}_{N}^{*\,jrt}}{n_{jr}}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{BQ}_{\mathbf{XV}}\right)\mathbf{Y}_s$$

$$= \left[\frac{\mathbf{1}_{N_j}^{*\,jrt}}{N_j}\mathbf{T}_{js} + \frac{\mathbf{1}_{N}^{*\,jrt}}{n_{jr}}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{BQ}_{\mathbf{XV}}\right)\right]\mathbf{Y}_s$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_{jr}^* = (0,0,\ldots,1,1,1,\ldots,0)$$