La homogeneidad de un continuo X y el tamaño del hiperespacio K(X)

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

BUAP

8 Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones

8CIMA

FCFM - BUAP - 2021

Resumen. Sea $C(X)$ el hiperespacio de todos los subcontinuos de un continuo métrico X y $p \in X$. Se define $C(p,X)$ como el hiperespacio de todos los subcontinuos de X que contienen al punto p. En el presente cartel se estudia el hiperespacio $K(X) = \{C(p,X) : p \in X\}$ y la relación entre el grado de homogeneidad de X y el tamaño de $K(X)$, se profundiza en esto para gráficas finitas.

1. El hiperespacio K(X)

Definición. Sea X un continuo y $A \subset X$, se define el hiperespacio $K(A,X) = \{C(p,X) : p \in A\}$ y la función $\tau_A : A \to K(A,X)$ por $\tau_A(p) = C(p,X)$. Si $A = X$ denotamos $K(X,X)$ por $K(X)$ y τ_X por τ.

Definición. Sea X un continuo y $x \in X$. Decimos que X tiene la **propiedad de Kelley** en x, si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ que converge a x y para cada $A \in C(x,X)$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$ que converge a A, donde $A_n \in C(x_n, X)$.

El continuo X tiene la propiedad de Kelley, si X tienen la propiedad de Kelley en todos sus puntos.

El abaico armónico es un ejemplo de un continuo con la propiedad de Kelley y el abanico armónico con la pata alargada es un ejemplo de un continuo que no tiene la propiedad de Kelley.

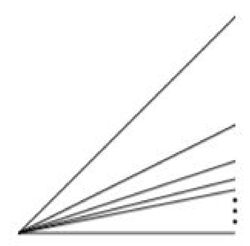


Figura 1: Abanico armónico.

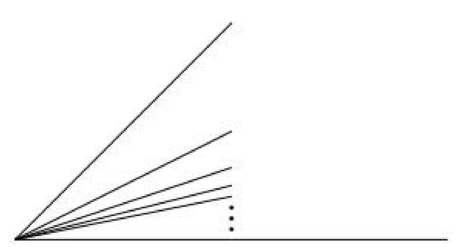


Figura 2: Abanico armónico con pata alargada.

Teorema. Sea X un continuo. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $K(X)$ es compacto;
2. La función $\tau : X \to K(X)$ es continua;
3. X tiene la propiedad de Kelley;
4. $X \approx K(X)$.

El siguiente teorema asegura que, si un subespacio B es localmente conexo, entonces $K(B,X)$ es localmente conexo. Más aun, si B es un continuo localmente conexo, entonces $K(B,X)$ es un continuo.

Teorema. Si X es un continuo y B un subespacio localmente conexo de X, entonces la función $\tau_B : B \to K(B,X)$ es continua.

2. Tamaño y homogeneidad

Dado un continuo X si dos elementos de $K(X)$ son homeomorfos esto define una relación de equivalencia $\approx$ en $K(X)$.

Definición. Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, decimos que $K(X)$ tiene **tamaño** n, si el espacio cociente $K(X)/\approx$ tiene cardinalidad n.

Dado $x \in X$ llamamos al conjunto $\mathcal{O}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{H}(X)\}$ la órbita de x en X.

Las órbitas brindan una partición de X, esto define la siguiente relación de equivalencia:

$$x \equiv y \iff x \in \mathcal{O}(y) \ \ (A).$$

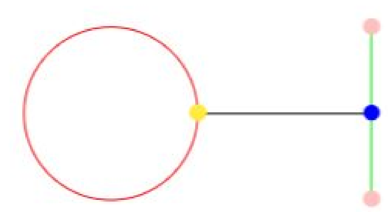
(A) es una relación de equivalencia en X, donde las clases de equivalencia son las órbitas.

Definición. Dado un entero positivo n, decimos que el espacio X es $\frac{1}{n}$**-homogéneo**, si X tiene exactamente n órbitas distintas. De otra manera, X es $\frac{1}{n}$-homogéneo si la cardinalidad del espacio cociente $X/\equiv$ es igual a n. Simplemente llamamos homogéneo al espacio 1-homogéneo.

Ejemplos. La curva cerrada simple S^1 es homogéneo y además $K(S^1)$ tiene tamaño 1. El intervalo $[0,1]$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo y $K([0,1])$ tiene tamaño 2. El triodo simple es $\frac{1}{3}$-homogéneo.

3. Gráficas finitas

Definición. Un continuo X es una **gráfica finita** si se puede expresar como la unión de un número finito de arcos tales que, cada par de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos. Cada arco que conforma a una gráfica finita le llamamos arista.



Teorema. Sea X una gráfica finita y $p \in X$. Para cada $A \in C(p,X)$ y $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{A} \subset C(p,X)$ tal que $\mathcal{A}$ contiene una n-celda, donde $n = ord(p,X)$ y $H_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.

Teorema. Sean X, Y gráficas finitas y $p \in X$, $q \in Y$ tales que $C(p,X) \approx C(q,Y)$, entonces $ord(p,X) = ord(q,Y)$.

Teorema. Sea X una gráfica finita distinta de un arco. Si $e_1, e_2 \in E(X)$ y $C(e_1,X) \approx C(e_2,X)$, entonces $ord(v(e_1),X) = ord(v(e_2),X)$.

Teorema. Sea X una gráfica finita. Si $p,q \in O(X)$ y $C(p,X) \approx C(q,X)$, entonces $\Sigma(p,X) = \Sigma(q,X)$.

Teorema. Sean $n,m \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo $\frac{1}{n}$-homogéneo y $K(X)$ tiene tamaño m, entonces $m \leq n$.

Teorema.Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una gráfica finita X_n tal que es $\frac{1}{n}$-homogénea y $K(X_n)$ tiene tamaño n.

Teorema. Sean Y un continuo pseudo-simétrico con respecto a los puntos p y q, X un continuo tal que $X = L \cup Y \cup K$, donde L y K son continuos tales que $L \cap Y = \{p\}$, $K \cap Y = \{q\}$ y $L \cap K = \emptyset$. Supongamos que existe un homeomorfismo $f : C(p,L) \to C(q,K)$ tal que $f(\{p\}) = \{q\}$ y $f(L) = K$. Entonces $C(p,X)$ es homeomorfo a $C(q,X)$.

Teorema. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una gráfica finita X_n tal que es $\frac{1}{n}$-homogénea y $K(X_n)$ tiene tamaño $n-1$.

Referencias

1. F. Corona Vázquez, Russel Arón Quiñones Estrella, Javier Sánchez Martínez, Hugo Villanueva, *Hyperspaces C(p,X) of finite graphs*, Topology and its Applications, 248 (2018), 44-49.
2. A. Illanes y Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New york, Basel (1999).
3. S.B. Jr. Nadler, *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.
4. P. Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces C(p,X)*, Topology and its Applications, 27 (1) (2003) 259-285.
5. P. Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces K(X)*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 35 (2) (2005) 655-674.