El arco y la curva cerrada simple, únicos continuos localmente conexos sin triodos simples

Antonio de Jesús Libreros López Fernando Macías Romero David Herrera Carrasco

Definición

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Claramente un espacio conformado por solo un punto es un continuo, sin embargo estamos más intersados en los que tengan más de un punto que suelen denominarse continuos no degenerados. A continuación se presentan los espacios que estaremos estudiando.

Arco

Un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow A$ un homeomorfismo, diremos que $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ son los puntos extremos del arco A.

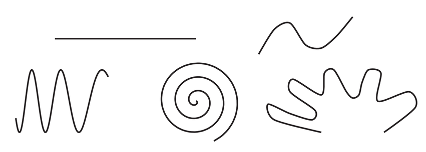


Figure 1: Ejemplos de arcos

Curva cerrada simple

Un **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano S^1.

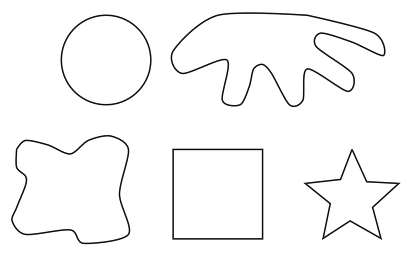


Figure 2: Ejemplos de curvas cerradas simples

Triodo simple

Un **triodo simple** T es la unión de 3 arcos que únicamente se intersectan en un punto extremo v de dichos arcos. El punto v es llamado el **vértice** de T.

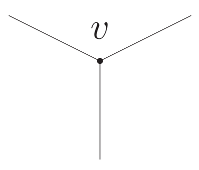


Figure 3: Triodo simple

Conexidad local

Un espacio topológico X es **localmente conexo** si para cada punto $p \in X$ y cualquier abierto U de X que contenga a p, existe V abierto y conexo tal que $p \in V \subset U$.

Claramente, el arco, la curva cerrada simple y el triodo simple son continuos, y más aún, localmente conexos. Antes de proceder con el resultado principal veamos las siguientes definiciones que son necesarias.

Arco conexidad

Un espacio topológico X es **arco conexo** si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe un arco en X con puntos extremos a y b.

Puntos de corte

Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que p es un **punto de corte** de X si $X - \{p\}$ no es conexo y p es un **punto de no corte** de X si $X - \{p\}$ es conexo.

Los siguientes resultados son muy importantes para obtener el resultado principal, y los cuales pueden ser hallados en [1] y [2, 6.6], respectivamente.

Continuos localmente conexos son arco conexos

Cualquier subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arco conexo.

Existencia de puntos de no corte

Si X un continuo no degenerado, entonces X tiene al menos dos puntos de no corte.

Teorema

Sea X un continuo localmente conexo y no degenerado. Si X no es un arco, entonces X contiene una curva cerrada simple o un triodo simple.

Demostración

Como X es un continuo no degenerado, tiene al menos dos puntos de no corte, a saber, p y q. Sea A_1 un arco que une a p y q. Como X no es un arco, existe $t \in X - A_1$. Al ser p de no corte, tenemos que $X - \{p\}$ es abierto de X y conexo. Luego, $X - \{p\}$ es arco conexo. Sea A_2 un arco en $X - \{p\}$ que une a t y q.

Caso 1. $A_1 \cap A_2 = \{q\}$.

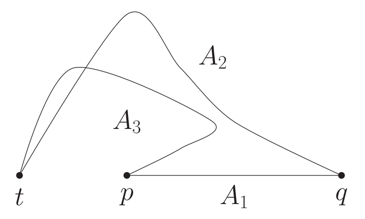


Figure 4: $A_1 \cap A_2 = \{q\}$.

Como q es de no corte, tenemos que $X-\{q\}$ es abierto de X y conexo. Luego, $X - \{q\}$ es arco conexo. Sea A_3 un arco en $X - \{q\}$ que une a t y p. Así, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ contiene una curva cerrada simple. Véase la Figura 4.

Caso 2. $A_1 \cap A_2$ tiene más de un punto.

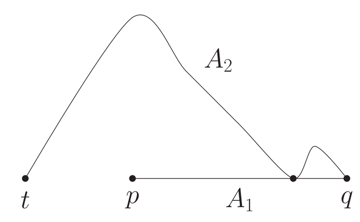


Figure 5: $A_1 \cap A_2$ tiene más de un punto.

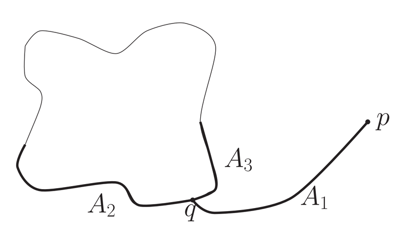
Para este caso, como se puede observar en la Figura 5, $A_1 \cup A_2$ contine un triodo simple.

Resultado principal

Si X es un continuo localmente conexo sin triodos simples, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.

Demostración

Podemos suponer que X no es un arco. Por el Teorema, X contiene una curva cerrada simple C. Supongamos que $X \neq C$. Como X es localmente conexo, X es arco conexo.



Sea $p \in X - C$ y $p \in C$ tal que el arco A_1 que une a p y q satisface que $A_1 \cap C = \{q\}$. Como C es una curva cerrada simple, existen arcos A_2 y A_3 tales que $A_2 \cap A_3 = \{q\}$. Luego, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es un triodo simple contenido en X, contradicción. Por lo tanto, X es una curva cerrada simple.

Como se puede observar en la demostración, la prueba se basa en la contrucción de arcos, por lo que se puede pensar que es posible cambiar la condición de ser localmente conexo por arco conexo. El siguiente ejemplo nos muetra que no es posible pues es un continuo arco conexo que no contiene triodos simples.

Circulo de Varsovia

Sean $S = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in (0,1]\}$ y $J = \{0\} \times [-1,1]$. Sea I un arco con extremos $(0,-1)$ y $(1, sen(1))$ tal que $(J \cup S) \cap I = \{(0,-1), (1, sen(1))\}$. El **círculo de Varsovia** es la unión de I, J y S.

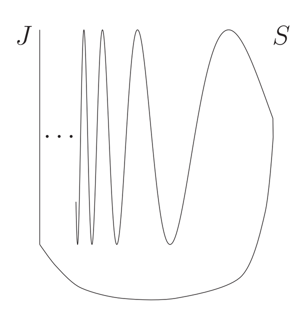


Figure 6: Círculo de Varsovia

Bibliografía

- Charles O. Christenson, William L. Voxman, *Aspects of Topology*, n, Pure and Applied Mathematics, Vol. 39, Marcel Dekker, Inc., E.U. New York and Basel, 1977.
- S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction.* Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla