Propiedades del Conjunto de Cantor

Adal Téllez Sánchez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

Analizaremos la construción en el intervalo cerrado $[0,1]$ del conjunto Cantor y probaremos la siguiente propiedad.

- Para todo intervalo abierto en $[0,1]$ contiene una componente en la construcción del conjunto o está contenido en un intervalo contiguo.

Definiciones y resultados previos

Definición 1. Se dice que un espacio topológico X es Hausdorff, si para cualesquiera puntos distintos x, y de X, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U, y \in V$, y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 2. Se dice que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene la propiedad de la intersección finita, si para toda subfamilia finita $\mathcal{F}'$ no vacía de $\mathcal{F}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

Definición 3. Un espacio X es compacto si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Definición 5. Un espacio X es disconexo (no conexo), si existen U y V abiertos no vacíos, tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. De lo contrario, se dice que X es conexo.

Teorema 1. Todo intervalo en la recta real es compacto.

Teorema 2. Si un conjunto abierto contiene a la intersección de una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de un espacio de Hausdorff y compacto, entonces tal conjunto abierto contiene a alguno de los subconjuntos cerrados de esa sucesión.

Teorema 3. Sean A y B dos conjuntos separados, tales que $K \subset (A \cup B)$ con K conjunto conexo. Entonces $K \subset A$ o $K \subset B$.

Conjunto de Cantor

Se define al Conjunto de Cantor mediante la construcción inductiva en el intervalo cerrado $[0,1]$. Dicha construcción se procede de la siguiente manera:

Figura 1: Contrucción del conjunto de Cantor [1]

Es decir, el intervalo cerrado $[0,1]$ menos su tercio medio es la unión de dos intervalos cerrado ajenos los cuales son las componentes conexas de esta diferencia. Denotamos por $T(B)$ al tercio medio de un intervalo cerrado.

El conjunto de Cantor es definido como la intersección de la sucesión decreciente de conjuntos cerrados definida recursiva como sigue $E_0 = [0,1]$ y para cada número natural $n \geq 1$, $E_n = E_{n-1} \setminus \cup\{T(B) : B \text{ es componente de } E_{n-1}\}$. Así,

$$\mathbf{C} = \cap\{E_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema 4. Si un punto x del intervalo cerrado $[0,1]$ pertenece al conjunto de Cantor. Entonces, existe una única sucesión decreciente de intervalos cerrados $\{B_{x,n}\}_{n=1}^{\infty}$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_{x,n}$ es una componente del conjunto E_n y $\cap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}$.

Demostración. Dado un punto $x \in \mathbf{C}$, basta notar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in E_n$, denotar por $B_{x,n}$ a la (única) componente de E_n que contiene al punto x. $\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente y observar que $\lim_{n\to\infty} \text{diámetro}(B_{x,n}) = 0$. Además, $x \in B_{x,n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $y \in \cap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\} = B$ tal que $y \neq x$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < |x - y|$ entonces $y \notin B$; lo cual es una contradicción. □

Teorema acerca del conjunto de Cantor

Teorema 3. Si a y b son números reales tales que $0 \leq a < b \leq 1$, entonces existe un número entero positivo m tal que el intervalo abierto (a,b) contiene una componente del conjunto E_m, o el intervalo abierto (a,b) está contenido en algún intervalo contiguo al conjunto de Cantor $\mathbf{C}$.

Demostración. Con las hipótesis mencionadas, analizamos dos casos:

Caso 1. El intervalo abierto (a,b) contiene algún punto del conjunto de Cantor $\mathbf{C}$: En este caso tomamos un punto x en la intersección $(a,b) \cap \mathbf{C}$, y recordamos que $\{x\} = \cap\{B_{x,n} : n \in \mathbb{N}\}$, donde $B_{x,n}$ es la componente del conjunto E_n que contiene al punto x. Observamos que la colección de esta componentes constituye una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados del intervalo $[0,1]$, cuya intersección está contenida en el intervalo abierto (a,b). De acuerdo con el teorema 2, el intervalo abierto (a,b) contiene a alguno de los subconjuntos cerrados de esta sucesión. Es decir, existe un número entero positivo m tal que la componente $B_{x,m}$ del conjunto E_m está contenida en el intervalo abierto (a,b).

Caso 2. El intervalo abierto (a,b) no contiene algún punto del conjunto de Cantor $\mathbf{C}$. En este caso el intervalo abierto (a,b) está contenido en la unión de los intervalos contiguos al conjunto de Cantor $\mathbf{C}$. Es decir, $(a,b) \subset \cup\{T(B) : B \text{ es componente de } E_n, \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos un punto x en el intervalo (a,b). Existen un número entero positivo m y una componente, digamos B_x del conjunto E_m tales que $x \in T(B_x)$. Denotemos por U a la componente del conjunto $T(B_x)$ que contiene al punto x. Observamos que U es el tercio medio que constituye a $T(B_x)$. Por otra parte, denotemos por V a la unión de todos los intervalos contiguos al conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ que son diferentes de U. Es decir $V = \cup\{T(B) : B \text{ es componente de } E_n \text{ y } n \in \mathbb{N}\} - U$. Tenemos que U y V son dos conjuntos abiertos disjuntos tales que $(a,b) \subset U \cup V$. Como el intervalo abierto (a,b) es un conjunto conexo, y puesto que x pertenece a la intersección $(a,b) \cap U$, concluimos, por teorema 3, que el intervalo abierto (a,b) está contenido en el intervalo contiguo U. □

Referencias

[1] E.A. Sarmiento, Sistema de funciones iteradas y los fractales. Fundación Universitaria Konrad Lorenz, 2005.

[2] M. Raggi, J. Escamilla, and F. Mendoza. Intruducción a la teoría de espacios métricos. BUAP, Textos Científicos, 2010.