El Teorema de Sharkovskii:
Un Enfoque Geométrico

Wendy Rodríguez Díaz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
wendy.fcfm@gmail.com

Resumen

En 1962 el matemático ucraniano Oleksandr Sharkovskii estableció un teorema que daba una respuesta a la pregunta: "si $n > 2$ y existe un punto de periodo n, entonces ¿existen puntos de periodo 2?". Sharkovskii descubrió que la existencia de una órbita de periodo $n > 1$ en una función, obliga necesariamente a la existencia de órbitas de otros periodos $k \neq n$. Sharkovskii determinó exactamente cuáles son esos otros periodos k obligados por la existencia de periodo n. En este trabajo se muestra cómo la geometría de las funciones primitivas evidencía los comportamientos periódicos y establece relaciones entre períodos relacionados por el Teorema de Sharkovskii, veremos cómo este teorema relaciona la existencia de órbitas periódicas y cómo estas pueden ser estudiadas a través de grafos de Markov y funciones primitivas. Se abordará un ejemplo en el que el grafo de Markov y la función primitiva nos permitirán conocer comportamientos no contemplados en el teorema de Sharkovskii y encontraremos que una función es caótica.

Sistemas Dinámicos

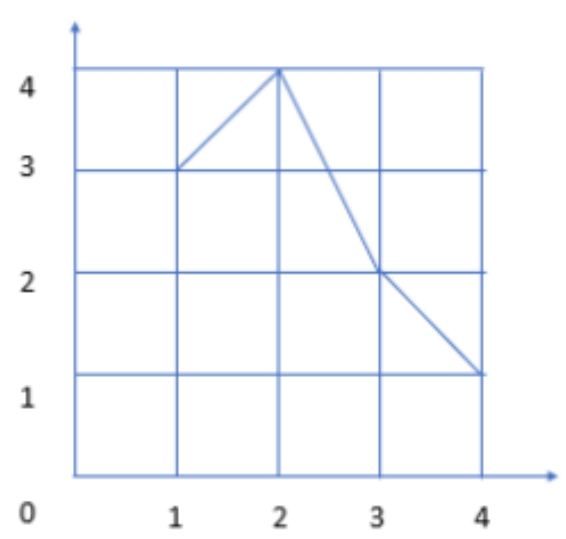
Definición 1. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. $\forall x \in X$ la sucesión $\{x, f(x), f^2(x), ...\}$ es llamada **órbita de** x **bajo** f y se denota como $O(x, f)$*

Definición 2. *El punto x se dice **fijo** para f si $f(x) = x$, es periódico de periodo n si $f^n(x) = x$. El conjunto de puntos periodicos de periodo n se denomina $Per_n(f)$. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forman una **órbita periodica**.*

¿La existencia de un punto periódico de periodo n garantiza la existencia de otros puntos periódicos?

Teorema 1. ***Li-Yorke*** *Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$. Si una función continua $f : A \to A$ tiene una órbita de periodo 3, entonces, f tiene una órbita de periodo n para todo número natural n.*

Ejemplo:Periodo 4 no implica periodo 3 Sea $I = [1, 4]$ y $f : I \to I$ una función lineal por partes definida por $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 4$ y $f(4) = 1$



- $\{1, 2, 3, 4\}$ es una orbita periódica de periodo 4
- único punto fijo $x_0 \in [2, 3]$
- x_0 es repulsor
- la órbita de todo punto $x \neq x_0$ en $[2, 3]$ eventualmente escapa i.e; existe $n \in N$ tal que $f^n(x) \notin [2, 3]$
- $x_1 = \frac{3}{2}$ punto de periodo 2
- exceptuando la órbita de x_1, todos los puntos en $[1, 2] \bigcup [3, 4]$ son de periodo 4

Por lo tanto, los únicos periodos presentes en f son 1, 2 y 4.

Casos particulares

Proposición 1. *Si $f : A \to A$ es continua en un intervalo A y tiene una órbita de periodo 4 entonces f también tiene una órbita de periodo 2*

Proposición 2. *Si $f : A \to A$ es continua en un intervalo A y tiene una órbita periódica de periodo 2^k, con $k > 1$, entonces, para cada $j \in \{0, 1, ..., k-1\}$, f tiene una órbita periódica de periodo 2^j.*

Orden de Sharkovskii

Consideremos a los números naturales ordenados de la siguiente manera. (Denotaremos este orden con el símbolo $\triangle$)

$$3 \triangle 5 \triangle 7 \triangle 9 \triangle \cdots$$
$$2*3 \triangle 2*5 \triangle 2*7 \triangle 2*9 \triangle \cdots$$
$$2^2*3 \triangle 2^2*5 \triangle 2^2*7 \triangle 2^2*9 \triangle \cdots$$
$$2^3*3 \triangle 2^3*5 \triangle 2^3*7 \triangle 2^3*9 \triangle \cdots$$
$$\cdots$$
$$\cdots \triangle 2^5 \triangle 2^4 \triangle 2^3 \triangle 2^2 \triangle 2 \triangle 1$$

$n \triangle m$ si y sólo si m está en el mismo renglón que n pero a la derecha de éste, o en algún renglón abajo del renglón que ocupa n.

Teorema 2. ***(Teorema de Sharkovskii)*** *Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$. Sean n y m números naturales.*

i) Si una función continua $f : A \to A$ tiene un punto de periodo n y $n \triangle m$, entonces f tiene un punto periódico de periodo m

ii) Si $m \triangle n$, entonces existe una función continua $f : A \to A$ que tiene periodo n pero no tiene periodo m.

iii) Existe una función continua $f : A \to A$ que tiene puntos periódicos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y no tiene puntos periódicos de ningún otro periodo.

Grafos de Markov

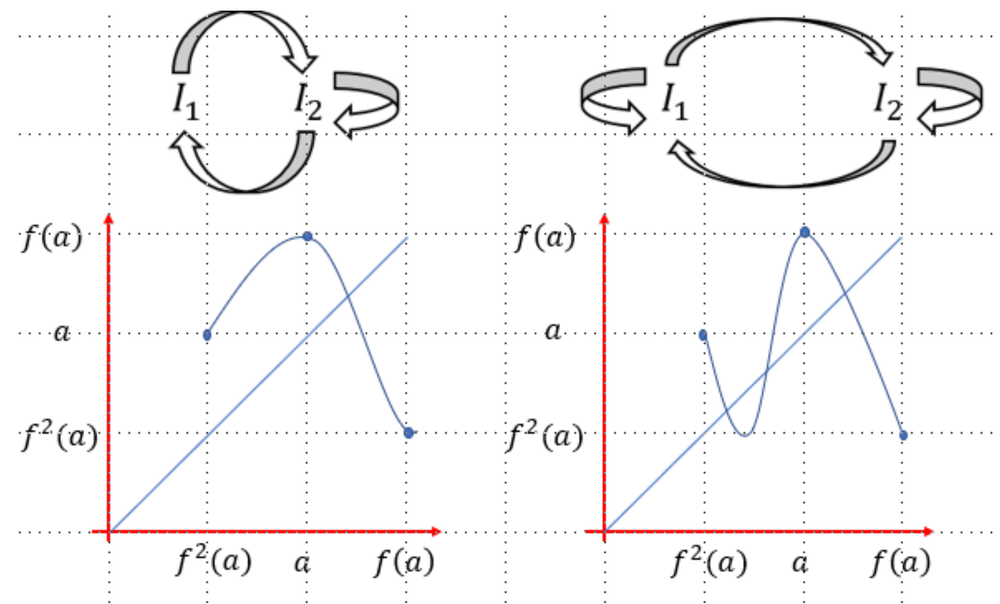
Los grafos de Markov son utilizados para estudiar la estructura de las órbitas periódicas. Estos describen a la órbita periódica a través de las relaciones existentes entre las particiones que la definen y sus imágenes.

Definición 3. *Sean $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ son los n puntos que recorre una órbita periódica de periodo n de una función $f : A \to A$, A un intervalo de $\mathbb{R}$*
Para $1 \leq j < n$, hacemos $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ Los vértices de una digráfica asociada a esta órbita periódica van a ser los subintervalos I_j y dibujamos una flecha de I_j a I_k, $I_j \to I_k$ si y sólo si $I_k \subseteq f(I_j)$.
*La digráfica así contruida se llama **gráfica de Markov** asociada a la órbita periódica.*

Ejemplo: Sea a un punto periódico de periodo 3 cuya órbita está recorrida como sigue:

$$f^2(a) < a < f(a)$$

Considerando $I_1 = [f^2(a), a]$ e $I_2 = [a, f(a)]$ las posibles digráficas asociadas son:



Definición 4. *Dada una permutación $\theta \in S_n$ la **función primitiva** f asociada esta definida de la siguiente manera:*

i) $f(k) = \theta(k)$

ii) $f(tk + (1-t)(k+1)) = t\theta(k) + (1-t)\theta(k+1)$

iii) $f(x) = \theta(1)$ si $x < 1$

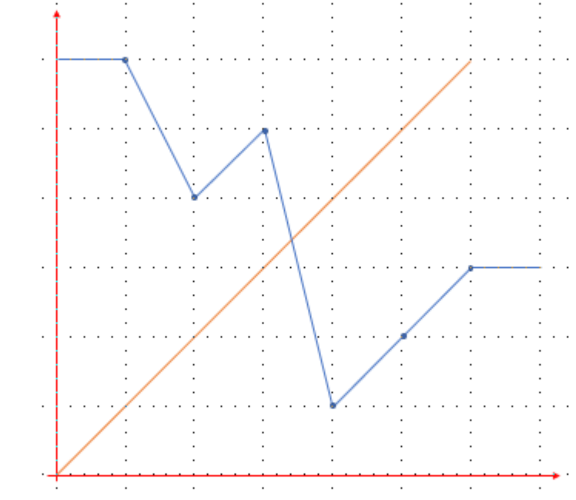
iv) $f(x) = \theta(n)$ si $x > n$; donde $k = 1, ..., n$ y $0 \leq t \leq 1$

Consideremos la permutación $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

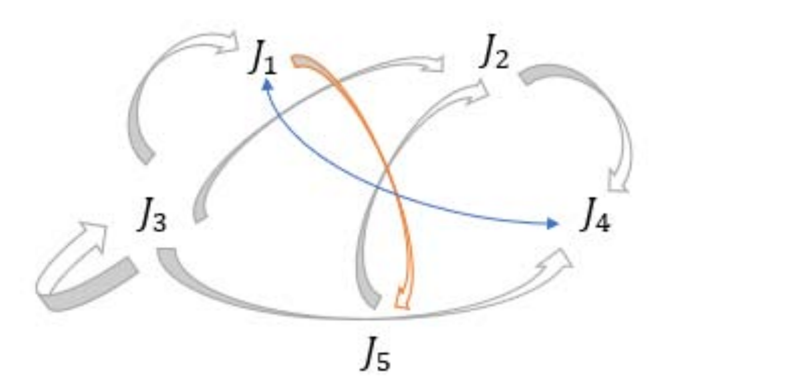
La función primitiva asociada f esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{Si } x<1 \\ -2x+8 & \text{Si } 1 \leq x < 2 \\ x+2 & \text{Si } 2 \leq x < 3 \\ -4x+17 & \text{Si } 3 \leq x < 4 \\ x-3 & \text{Si } 4 \leq x < 6 \\ 3 & \text{Si } 6 \leq x \end{cases}$$

y su gráfica es:



Los intervalos para construir el grafo de Markov de f y θ son:
$J_1 = [1, 2]$, $J_2 = [2, 3]$, $J_3 = [3, 4]$, $J_4 = [4, 5]$, $J_5 = [5, 6]$.
Se puede ver que: $f(J_2) = J_4$, $f(J_4) = J_1$, $f(J_5) = J_2$, $f(J_1) \supseteq J_4$, $f(J_1) \supseteq J_5$, $f(J_3) \supseteq J_1$, $f(J_3) \supseteq J_2$, $f(J_3) \supseteq J_3$, $f(J_3) \supseteq J_4$



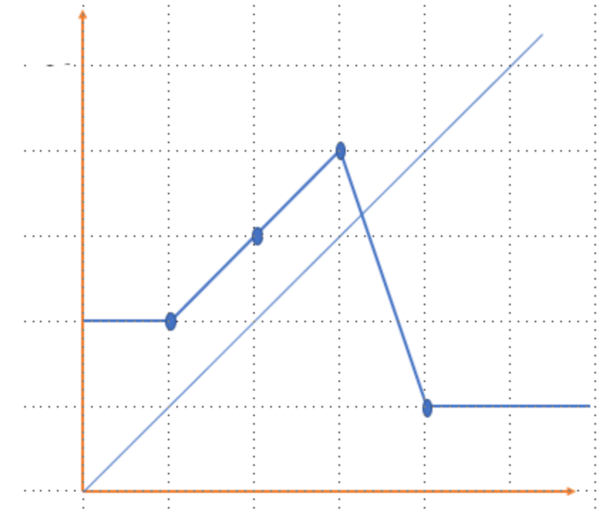
- punto fijo en J_3
- Órbita de segundo orden en J_1 y J_4
- Órbita de periodo 4 en J_1, J_5, J_2 y J_4

Consideremos ahora la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

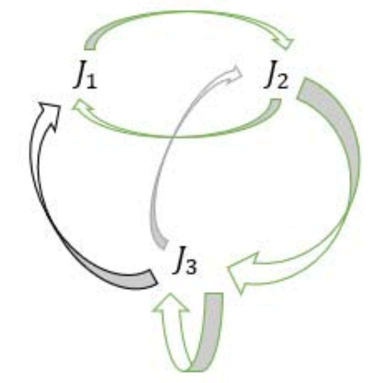
La función primitiva asociada g es:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{Si } x<1 \\ x+1 & \text{Si } 1 \leq x < 3 \\ 13-3x & \text{Si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{Si } 4 \leq x \end{cases}$$

Y su gráfica es:



Los intervalos para construir el grafo de Markov de g y σ son:
$J_1 = [1, 2]$, $J_2 = [2, 3]$, $J_3 = [3, 4]$
Se puede ver que: $f(J_1) \supseteq J_2$, $f(J_2) = J_3$ y $f(J_3) = J_1 \cup J_2 \cup J_3$



- Órbita de orden 3 en J_1, J_2 y J_3

Conclusión

El teorema de Sharkovskii nos permite afirmar la existencia de órbitas de periodo 2 y 1, mientras que el grafo de Markov nos permite hallar una órbita de periodo 3 y de este modo nos garantiza la existencia de órbitas de todos los periodos.

Referencias

[1] Li T. Y. y Yorke J. A., (1975) Period 3 implies chaos, Amer. Math. Monthly, 82, 985-992

[2] Bau-Sen Du (2004) A simple proof of Sharkovsky's Theorem, Amer. Math. Monthly, 111, 595-599.

[3] King D.J.E y Méndez L. H; (2015) Sistemas Dinámicos Discretos.

[4] Stefan P. (1977) A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuos endomorphisms of the real line , Comm. Math. Phys., 54, 237-248.