Introducción al Diccionario de Sullivan:
Un puente entre dinámica homomorfa y grupos de Klein

Natalia Huitzil Santamaría
Directoras: Patricia Domínguez Soto y Laura Angélica Cano COrdero

Resumen

En este cartel se presentan algunos conceptos paralelos de la teoría de los Grupos de Klein y la dinámica de funciones racionales.

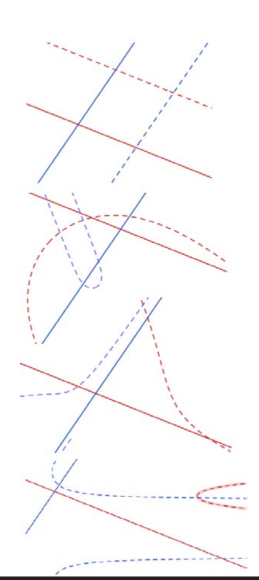
Palabras clave: Grupos de Klein , Iteración de funcione racionales.

Transformaciones de Möbius

Las **transformaciones de Möbius** son endomorfimos racionales invertibles de la esfera de Riemann de grado 1, denotadopor $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$, cumplen las siguientes propiedades:

- $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ es un grupo no abeliano que deja invariante a los círculos.
- Existe un isomorfismo de grupos entre $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ y las matrices 2x2 invertibles con coeficientes complejos.

Clasificación			
Circular:	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$z \mapsto -z$	
Parabólico:	$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$z \mapsto z + a$	
Elíptico:	$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$	$z \mapsto e^{i\theta} z$	
Hiperbólico:	$\begin{pmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{\theta/2} \end{pmatrix}$	$z \mapsto e^{\theta} z$	
Loxodrómico:	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$	$z \mapsto kz$	



Una **acción** de un grupo G en un conjunto no vacío X, es una función α que preserva la estructura de grupo de G.

Ejemplo. Sea $\alpha : \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \times \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dada por $\alpha(T, z) = T(z)$.

La **órbita** de x bajo la acción de G, se define como

$$\{\alpha(g, x) = x : g \in G\}$$

La acción G es propiamente discontinua si las órbitas bajo la acción en los conjuntos compactos en X no tienen puntos de acumulación.

Definimos los siguientes conjuntos:

(i) **Conjunto límite** es el conjunto de puntos cuya órbita bajo la acción tiene un punto de acumulación.

(ii)**Conjunto Ordinario o de discontinuidad** es el conjunto de los puntos en el semiplano superior tales que tienen una vecindad que intersecan solamente una cantidad finita de elementos de su órbita.

Ejemplo. Consideremos una familia $D_1, ..., D_r$ de discos dos a dos disjuntos en la esfera de Riemann cuyas fronteras son discos $C_1, ..., C_r$. Sean $\iota_1, ..., \iota_r$ las inversiones en estos círculos y Γ el subgrupo generado por estas funciones. Entonces Γ tiene una región de discontinuidad no vacía que contiene al complemento en la esfera de Riemann de la unión de los discos.

Funciones racionales

Sea f una función racional de grado $d \geq 2$ con la composición usual de funciones obtenemos una sucesión de funciones racionales, esto es,$f^n = f \circ f^{n-1}$.

Un **punto periódico** w de periodo p para algún $p \in \mathbb{N}$, se clasifica en:

- *Atractor* si $0 <\mid Df^p(w) \mid< 1$;
- *Superatractor* si $\mid Df^p(w) \mid= 0$;
- *Indiferente* si $\mid Df^p(w) \mid= 1$;
- *Repulsor*Si $\mid Df^p(w) \mid> 1$;

Teorema de Linealización

- Teorema de Köenings;
- Teorema de Böttcher
- Teorema de Siegel

Consideremos la sucesión de funciones racionales $\{f_n\}$ obtenida por la composición iterada de una función racional consideremos el conjunto de puntos x tales que existe una vecindad del punto en la cual la sucesión de funcione es **normal,** esto es, $\{f_n\}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos.

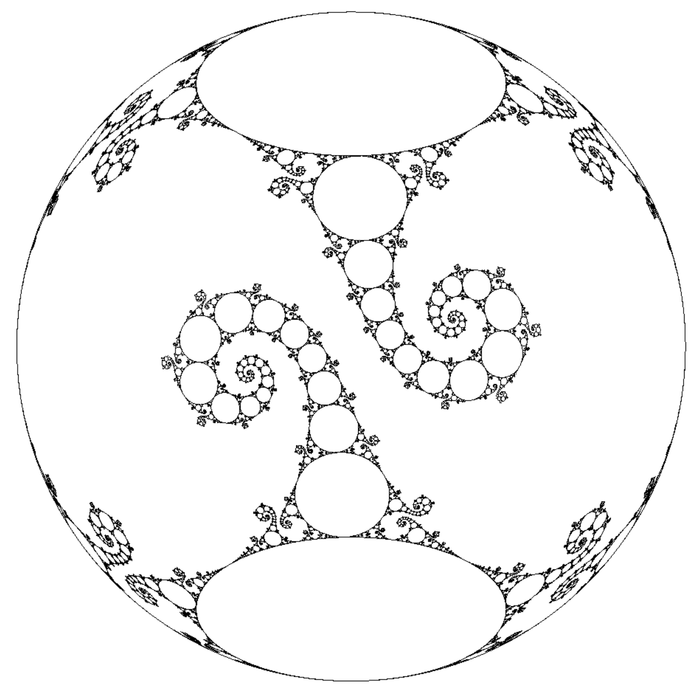
Teorema de Arzela-Ascoli Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas sobre un abierto Ω en $\mathbb{C}$ es normal si y sólo si $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada y es equicontinua en cada compacto de Ω.

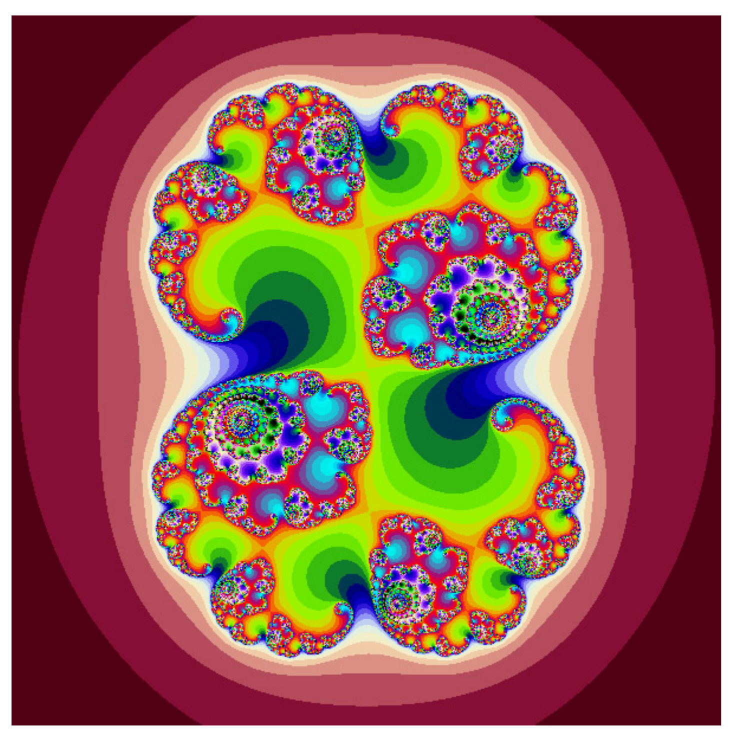
Teorema de Montel Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas definidas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ y $a, b \in \hat{\mathbb{C}}$ distintos. Si $f(z) \neq a, b$ para cada $z \in D$ y para cada $f \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ es normal en D.

El conjunto de **Fatou** $\mathcal{F}(f)$ se define como el dominio maximal de normalidad de f.

El conjunto **Julia** es su complemento $\mathcal{J}(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(f)$.

Gráficos





Diccionario de Sullivan

El diccionario de Sullivan, llamado así en honor a el matemático estadounidense D. Sullivan [3], es un paralelismo entre las definiciones, teoremas y conjeturas entre dos mundos matemáticos: el de iteraciones de funciones racionales y los grupos de Klein, el cual se presenta a continuación.

Iteración de funciones en $\mathbb{C}$	**Grupos de Klein**
f una función racional de grado mayor a dos	Γ un grupo kleiniano no elemental y finitamente generado
Conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$	Conjunto Límite $\Lambda(\Gamma)$
Conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$	Conjunto Ordinario $\Omega(\Gamma)$
$\mathcal{J}(f)$ es el menor conjunto cerrado completamente invariante no vacío	$\Lambda(\Gamma)$ es el menor conjunto cerrado invariante no vacío
Los puntos periódicos repulsores son densos en $\mathcal{J}(f)$	Puntos fijos loxodrómicos son densos en $\Lambda(\Gamma)$
Número de componentes de Fatou es $0, 1, 2$ ó ∞	Número de componentes de $\Omega(\Gamma)$ es $0, 1, 2$ ó ∞
$\mathcal{F}(f)$ tiene a lo más dos componentes invariantes	$\Omega(\Gamma)$ tiene a lo más dos componentes invariantes

Conclusión

El diccionario de Sullivan es una herramienta muy poderosa con la cual se puede trasladar los resultados de Grupos de Klein a iteraciones de funciones racionales, y viceversa.

Referencias

[1] Beardon, A.F.(1991) *Iteration of Rational Functions*. ISBN 0-387-97589- 6 volume 32 of Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag, New York. Complex analytic dynamical systems.

[2] Palka, Bruce P. (1991) *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer. New York. Undergradute Texts in Mathematics.

[3] Sullivan, D. *Quasiconformal Homeomorphism and Dynamics I. Solution of the Fatou-Julia Problem on Wandering Domains* Ann. of Math. (2), 122 (1985), no. 3, 401-418