Dinámica de dos familias holomorfas -Facultad de Ciencias Físico Matemáticas– Miguel Angel Saloma Meneses

Resumen En este trabajo se expone la teoría necesaria para el estudio de la dinámica de las familias $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $f_{\lambda,\mu,z_0}\lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$.

Introducción

El estudio de interacciones de funciones de variable compleja comenzó con los trabajos de los matemáticos franceses Piere Fatou y Gaston Julia. estos dos matemáticos estudiaron principalmente la iteración de funciones racionales en esfera de Riemann.
Posteriormente un resultado del matemático Paúl Montel sobre familias normales, les permitió descomponer a la Esfera de Riemann en conjunto que llevan sus nombres como los cuales definiremos más adelante.El marco teórico obtenido por los trabajos de Fatou Julia puede extenderse en general a la iteración de funciones holomorfas sobre cualquier superficie de Riemann arbitraria .En 1926 Fatou extiende la teoría a funciones transcendentes enteras donde infinito es singularidad esencial y en 1990 Baker extiende la teoría para funciones transcendentes meromorfas con una singularidad esencial y con al menos un polo que no es omitido.

En los últimos años se había estudiado la familia λe^z y el respectivo plano de parámetros y se pensaba que la función $\sin(z)$, la cual se puede reescribir como una familia en términos de la función exponencial debería poseer una dinámica similar, sin embargo un resultado de McMullen demostró que el conjunto de Julia para la función exponencial tiene medida cero pero no sucede lo mismo para la función $\sin(z)$.

Preliminares

Recordemos que una función f de variable compleja es llamada analítica en un punto z_0 si existe su derivada en ese punto .

Definición

Un punto en el cual la función f no es analítica es llamado un punto singular o singularidad de f. .
El punto z_0 es una singularidad aislada o un punto singular aislado si tiene una vecindad que no contiene otro punto singular, en caso contrario se dirá que es un punto singular no aislado.

Las singularidades aisladas de una función de variable compleja se clasifican de la siguiente forma. Un punto singular aislado z_0 se dice punto singular evitable de la si existe el limite

$$\lim_{z\to\infty} f(z)(z-z_0).$$

Un punto singular aislado z_0 es un polo si

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

Un punto singular aislado z_0 le decimos singularidad esencial si no es polo ni singularidad aislada.
Diremos que ∞ es una singularidad aislada de una función f si existe $R > 0$ tal que f es analítica en la región $A_r = \{z \in \mathcal{C} | |z| > R\}$.
Una función meromorfa f es una función que es anal??tica excepto en los polos.
Los valores singulares de una función de variable compleja f son de dos tipos, valores críticos y valores asintótico, los cuales se definen a continuación.
Los puntos críticos de una función de variable compleja f son los puntos donde la derivada se anula. Decimos que z_0 es valor critico de f si es la imagen de un punto critico.
Decimos que es un valor asintótico de una función de variable compleja f si existe una curva γ tal que si

$$\gamma(t) \to \infty \Rightarrow f \circ \gamma \to z_0.$$

Clases de funciones

Consideremos las siguientes clases de funciones donde $X = \mathbb{C}$ y Y es el plano complejo extendido.

$$\mathcal{E} = \{f : X \to X : f \text{ es entera trascendente}\}.$$

$\mathcal{M} = \{f : X \to$
$Y | f$ es trascendente meromorfa con al menos un polo que no es omitido$\}$.
Un valor omitido es un valor que no se encuentra en la imagen de una función.
También recordemos que f^n denota la n-esima iterada de f.
Si z_0 es un punto fijo de periodo uno de la función f , el punto z 0 se puede clasificar de la siguiente forma:
z_0 es súper atractor, si $\lambda = 0$.
z_0 es atractor, si $0 < |\lambda| < 1$.
z_0 es repulsor, si $|\lambda| > 1$.
z_0 es indiferente, si $|\lambda| = 1$.

Definición

Sea f una función en la clase $\mathcal{E}$ o en la clase $\mathcal{M}$. El conjunto de Fatou, denotado por $F(f)$, se define como el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$, tal que la sucesión de iteradas (f^n) está bien definida y es normal en alguna vecindad de z. El conjunto de Julia es el complemento del conjunto de Fatou y se denota por $J(f)$.

si U es una componente periódica de $F(f)$ esta se puede clasificar en
componente atractora
componente parabólica
componente errante
Disco de Siegel
y dominio de Baker.

Las familias $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$, y $f_{\lambda,\mu,z_0} = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$

La familia $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$, ha sido estudiada con anterioridad por Domínguez y Sienra en [?], por lo que se conocen algunos resultados acerca de su dinámica tales como

Observación

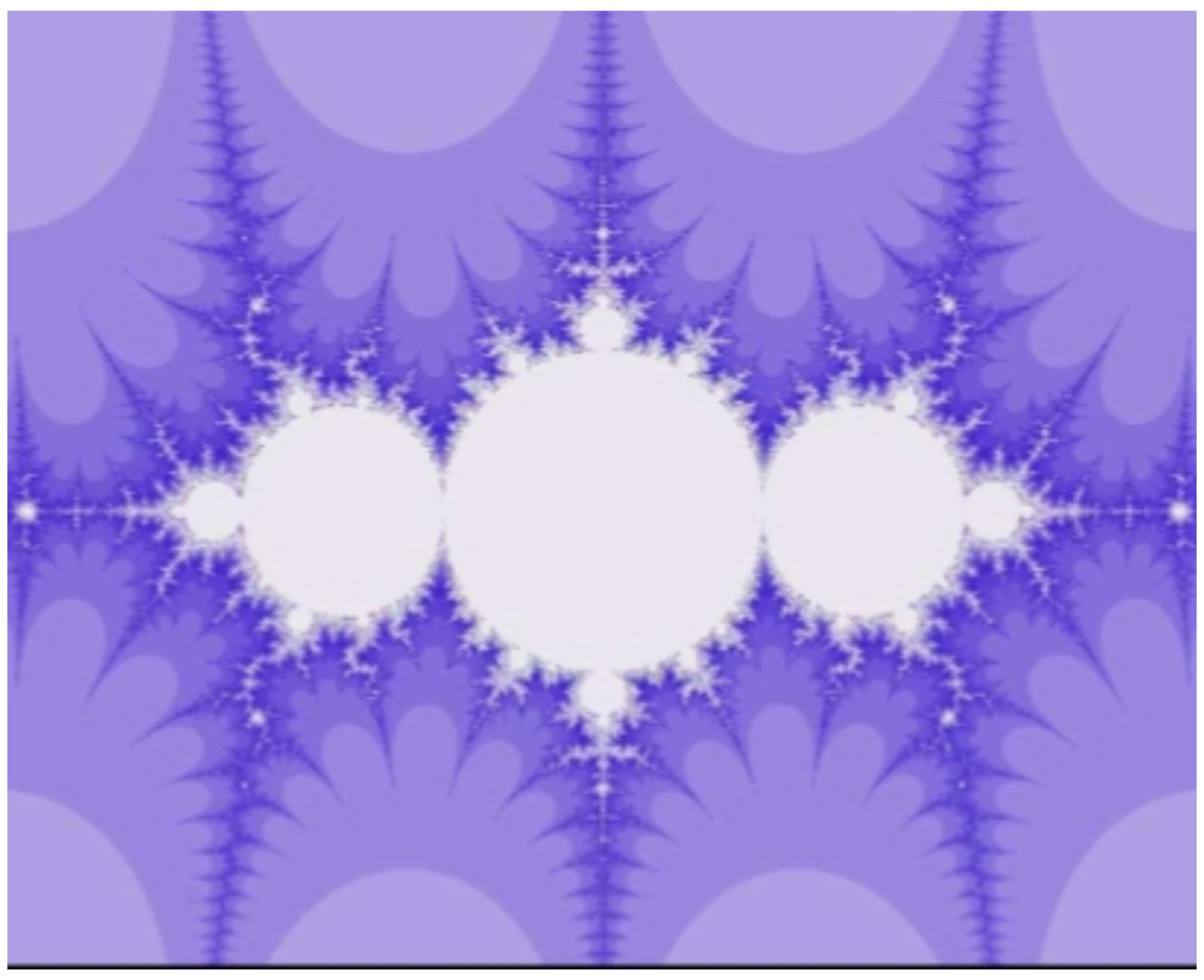
A) $z = 0$ es un punto fijo.
B)Los valores del parámetro λ y $-\lambda$son sus valores críticos y además no son asintóticos.
C) Esta familia no tiene anillos de Herman porque la familia $\lambda \sin(z)$ pertenece a la clase $\mathcal{E}$ y se ha mostrado que esta clase de funciones no tiene este tipo de componentes.No tiene componentes errantes ni dominios de Baker.
D) La familia $\lambda \sin(z)$ unicamente puede tener componentes atractoras, parabólicas y discos de Siegel. A continuación algunos resultados para que esto suceda.

A

Teorema

1) Si $0 < |\lambda| < 1$ tiene componentes atractora.
2) Para $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ donde theta es irracional, la familia $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$ tiene un disco de Siegel que es invariante alrededor del 0.

continuación se muestra el plano de parámetros de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$



Por otra parte, la familia $f_{\lambda,\mu,z_0} = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$ ha sido estudiada por Domínguez y Vázquez en el año 2019 y han obtenido resultados tales como

Teorema

A) Si los parámetros son reales y μ tiende a cero y $|z_0| \geq \frac{\pi}{2}$, entonces el conjunto de Fatou de la familia $f_{\lambda,\mu,z_0} = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$ tiene un atractor multiplemente conexo invariante.
B) Si $z_0 = 0$, $z \in \mathbb{R}$ y $\mu = 1$ la familia $f_{\lambda,\mu,z_0} = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$ tiene una infinidad de puntos críticos.

En el inciso B se puede observar la importancia de analizar también la dinámica cuando los parámetros son números reales es por eso que una pregunta planteada en este trabajo es investigar si podemos estudiar a las familias y sus similitudes bajo conjugaciones.

Conclusiones

Como hemos visto la dinámica de la familia $f_{\lambda,\mu,z_0} = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$ tiene propiedades interesantes al agregarle un polo de la forma $\frac{\mu}{z-z_0}$. Por lo que el objetivo de este trabajo es realizar un análisis comparativo con la finalidad de hacer aportaciones a los resultados ya obtenidos y avances en las conjeturas que se han hecho.

REFERENCIAS

- Baker I. N., Kotus J. and Lü Y., Iterates of meromorphic fucntions II: Examples of wandering domains, *J. London. Math. Soc.*, 42(2) (1990), 267-278.
- Baker I. N., Kotus J. and Lü, Y., Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 11 (1991), 603-618.
- Domínguez P. and Sienra, G., A study of the dynamics of $\lambda sinz$, *nternational Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(12) (2002), 2869-2883.
- Domínguez P. Montes M. and Vázquez J. A., Study of the Dynamics of the Family $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin z + \frac{\mu}{z+k\pi}$ where $\lambda, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ and $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 5(4) (2016), 407-414.
  States of America, 1994.
- Montel, P., Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 29 (1912), 487-535.
- Montel, P., Sur les familles normales de fonctions analytiques, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 33 (1916), 223-302.