Sobre la dinámica de una perturbación meromorfa de la familia senoidal

JOSUÉ VÁZQUEZ RODRÍGUEZ

Introducción

La clase de funciones $\mathcal{M}$ está dada por:

$\mathcal{M} = \{f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}} \mid f$ es una función trascendente meromorfa con al menos un polo que no es un valor omitido$\}$

Dada una función $f \in \mathcal{M}$, consideramos los siguientes conjuntos:

El conjunto de Fatou, denotado por $F(f)$, dado por los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que la sucesión de las iteradas $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ está bien definida y forma una familia normal en alguna vecindad de z.

El conjunto de Julia, denotado por $\mathcal{J}(f)$, es el complemento del conjunto de Fatou.

Sea $f \in \mathcal{M}$ y U una componente periódica del conjunto de Fatou de periodo $n \geq 1$. Entonces la dinámica de la función f restringida en U está descrita por una de las siguientes posibilidades:

- La componente U contiene un punto periódico atractor z_0 de periodo n. Así, $f^{nk}(z) \to z_0$ para todo $z \in U$ cuando k tiende a infinito. Decimos que U es una componente atractora.
- La frontera de la componente U, denotada por ∂U, tiene un punto periódico z_0 de periodo n y $f^{nk}(z) \to z_0$ para cada $z \in U$ cuando k tiende a infinito. Entonces $(f^n)'(z_0) = 1$. En este caso, decimos que U es un dominio de Leau o una componente parabólica.
- Existe un homeomorfismo analítico $\varphi : U \to D$, donde D es el disco unitario, tal que φ conjuga f^n con $e^{2\pi\alpha}z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso, decimos que U es un disco de Siegel.
- Existe un homeomorfismo analítico $\varphi : U \to A$, donde A es un anillo, $A = \{z : 1 < |z| < r\}$, $r > 1$, tal que φ conjuga f^n con $e^{2\pi\alpha}z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso, decimos que U es un anillo de Herman.
- Existe $z_0 \in \partial U$ tal que $f^{nk}(z) \to z_0$ para cada z en U cuando k tiende a infinito y $f^n(z_0)$ no está definido. En este caso, decimos que U es un dominio de Baker.

La clase $\mathcal{B}$ está definida como el conjunto de funciones $f \in \mathcal{M}$ de tipo acotado, esto es, la clase $\mathcal{B}$ consiste de funciones $f \in \mathcal{M}$ para las cuales sus valores singulares están contenidos en un conjunto acotado de $\mathbb{C}$.

La familia $f_{\lambda,\mu,z_0}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$, $\lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

LEMA. *Los valores singulares de la familia f_{λ,μ,z_0} están contenidos en una región que contiene al eje real.*

LEMA. *La familia $f_{\lambda,\mu,z_0}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$, $\lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pertenece a la clase $\mathcal{B}$.*

TEOREMA A *Si λ, μ, $z_0 \in \mathbb{R}$ son parámetros reales tales que $0 < |\lambda| < 1$, $\mu > 0$ suficientemente pequeño y $|z_0| \geq |\lambda| + \frac{\pi}{2}$, entonces el conjunto de Fatou de la familia*

$$f_{\lambda,\mu,z_0}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z - z_0}$$

es una sola componente atractora completamente invariante que es multiplemente conexa.

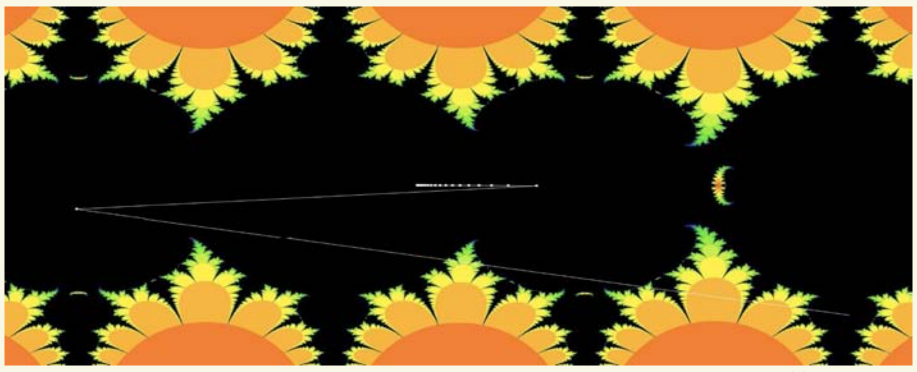

Figura 1. Conjunto de Fatou, en negro, de la función $f_{(0.5),(0.3),(3.2)} = 0.5 \sin(z) + \frac{0.3}{z-3.2}$.

La familia $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Componentes atractoras en el conjunto de Fatou de $f_{\lambda,\mu}$.

Sea $\lambda = -1$ y $\mu = \pi^2$. La función

$$f_{-1,\pi^2}(z) = -\sin(z) + \frac{\pi^2}{z}$$

tiene dos puntos fijos super atractores en $\zeta = \pi$ y $-\zeta = -\pi$.

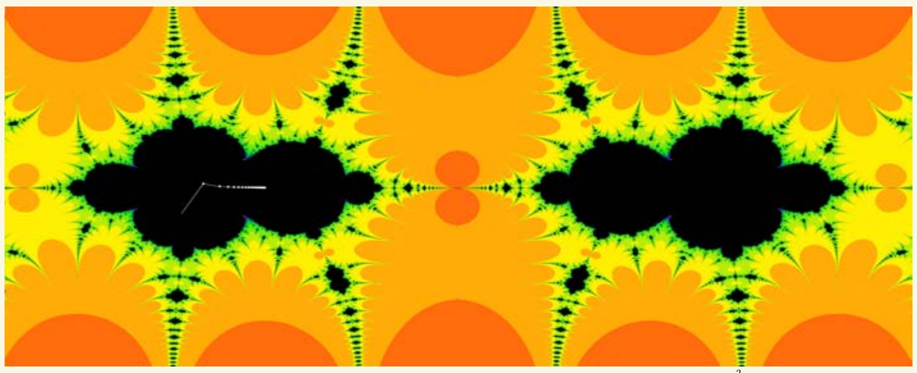

Figura 2. Los conjuntos de Fatou y Julia de $f_{-1,\pi^2}(z) = -\sin(z) + \frac{\pi^2}{z}$.

Componentes parabólicas en el conjunto de Fatou de $f_{\lambda,\mu}$

LEMA. *Para $\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{2\mu}{\pi}$, $\mu = -\frac{r\pi^2}{4}$, donde r es una raíz de la unidad, el conjunto de Fatou de la familia $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}$ contiene dos dominios parabólicos.*

Ejemplo. Sea $\lambda = \pi$ y $\mu = -\frac{\pi^2}{4}$. La función

$$f_{\pi,-\frac{\pi^2}{4}}(z) = \pi \sin(z) - \frac{\pi^2}{4z}$$

tiene dos puntos fijos indiferentes racionales en $\zeta = \frac{\pi}{2}$ y $-\zeta = -\frac{\pi}{2}$.

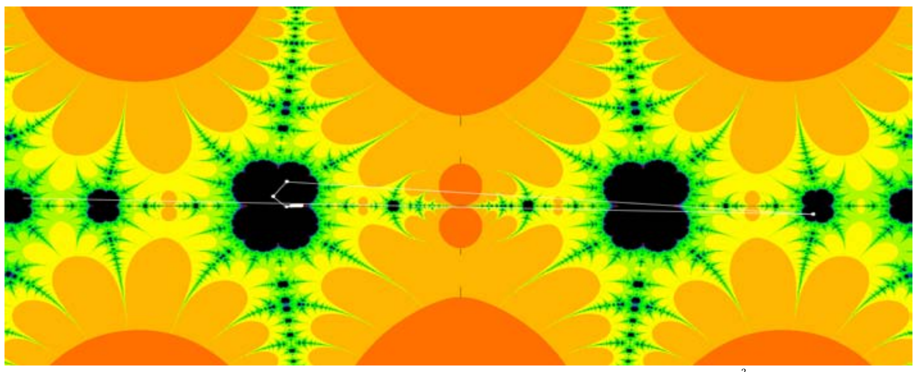

Figura 3. Los conjuntos de Fatou y Julia de $f_{\pi,-\frac{\pi^2}{4}}(z) = \pi \sin(z) - \frac{\pi^2}{4z}$.

Discos de Siegel en el conjunto de Fatou de $f_{\lambda,\mu}$.

LEMA. *Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un número de Brjuno, λ y μ son parámetros complejos tales que $\lambda = (e^{i\theta} + 1)(\pi/2)$ y $\mu = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\lambda\pi}{2}$, entonces el conjunto de Fatou de $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}$ contiene dos discos de Siegel.*

Ejemplo. El conjunto de Fatou de la función:

$$f_{\lambda,\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\lambda\pi}{2}}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\pi^2-2\lambda\pi}{4z}, \text{ para } \lambda = \left(e^{\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}} + 1\right)\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

contiene dos discos de Siegel.

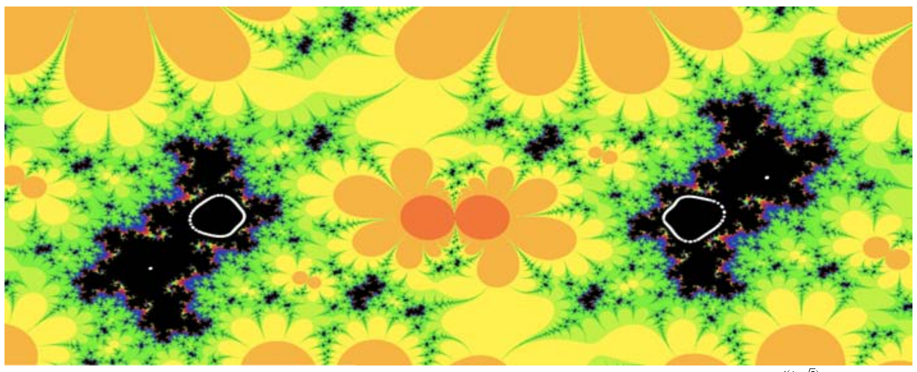

Figura 4. Los conjuntos de Fatou y Julia de $f_{\lambda,\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\lambda\pi}{2}}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\pi^2-2\lambda\pi}{4z}$, para $\lambda = \left(e^{\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}} + 1\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Conjuntos de Fatou de $f_{\lambda,\mu}$ con dos tipos de componentes.

Sea $\lambda = -2$ y $\mu = \pi^2$. La función

$$f_{-2,\pi^2}(z) = -2\sin(z) + \frac{\pi^2}{z}$$

tiene dos puntos fijos indiferentes racionales en $\zeta = \pi$ y $-\zeta = -\pi$. Más aún, f_{-2,π^2} tiene otros dos puntos fijos los cuales fueron obtenidos por métodos numéricos, y estos puntos son aproximadamente $z_3 \approx 4.9193$ y $z_4 \approx -4.9193$.

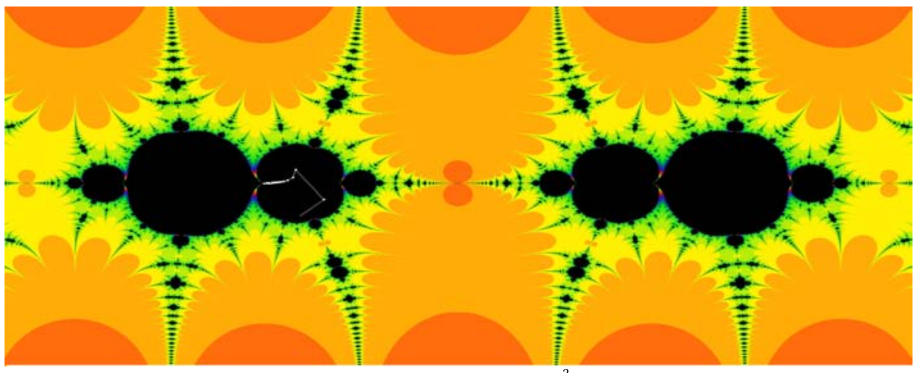

Figura 5. Los conjuntos de Fatou y Julia de $f_{-2,\pi^2}(z) = -2\sin(z) + \frac{\pi^2}{z}$ con componentes atractoras y parabólicas.

Referencias

[1] Domínguez, P., Vázquez, J., and Montes de O., M.A. (2016). A study of the dynamics of the family $f_{\lambda,\mu} = \lambda sin(z) + \frac{\mu}{z-k\pi}$, *where*$\lambda,\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Discontinuity, Nonlinearity, and Compl.*. 5 (4), 407–414.

[2] Domínguez, P. and Vázquez J. (2019). Attracting multiply connected components in the Fatou set for the family $f_{\lambda,\mu,z_0}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$, where $\lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Actas 1, Papirhos*, IMATE UNAM. *Proceedings of the 2018 Workshop on Holomorphic Dynamics*, 133–150.

[3] Domínguez, P. and Vázquez J. (2020). A study of the dynamics of the family $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \sin(z) + \frac{\mu}{z}$, where $\lambda,\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En preparación.

7 CIMA - PUEBLA 2020