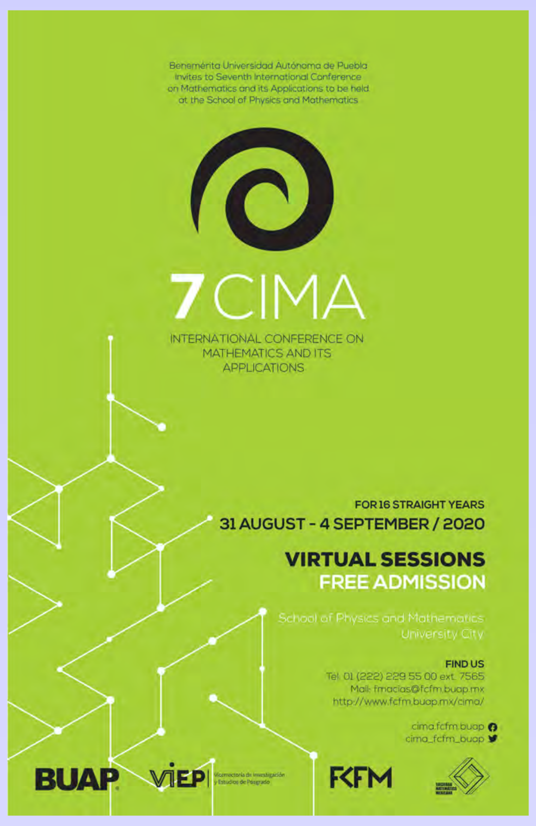
Las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único

Germán Montero Rodríguez
Dr. David Herrera Carrasco
Dra. María de J. López Toriz
Dr. Fernando Macías Romero
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
septiembre 2020



Resumen

Un continuo es un espacio métrico no degenerado, compacto y conexo. Dado un continuo X, los hiperespacios del continuo X son familias de subconjuntos de X con alguna característica en particular. Denotamos con $\mathbb{N}$ al conjunto de los números enteros positivos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideraremos los siguientes hiperespacios de un continuo X: $2^X = \{A \subset X : A$ es no vacío y cerrado en $X\}$ y $F_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n puntos$\}$. Todos estos hiperespacios son considerados con la métrica de Hausdorff. El n-ésimo producto simétrico suspensión del continuo X, denotado por $SF_n(X)$ es el espacio cociente

$$SF_n(X) = F_n(X)/F_1(X),$$

que se obtiene de $F_n(X)$ al identificar $F_1(X)$ a un punto. Un continuo X tiene hiperespacio único $SF_n(X)$ si se cumple lo siguiente: si Y es un continuo tal que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y. En el presente cartel se expone un resultado original, novedoso y recientemente probado por los autores que afirma que las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, [3].

Introducción. El campo de investigación en teoría de continuos estudia hiperespacios, características y propiedades de un continuo, entre otras. En el presente trabajo presentaremos solo algunos (y sin demostración) de los resultados que se requieren para llegar al objetivo principal.

Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos tales que dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos. Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 3$. La gráfica θ_m es la unión de m arcos $E_1, \ldots, E_m$ compartiendo los mismos puntos extremos u y v y satisfaciendo que $E_i \cap E_j = \{u, v\}$, for $i \neq j$. Sean

$\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X\colon J$ es un ciclo en $X\}$,

$\mathcal{A}_E(X) = \{J \subset X\colon J$ es un arco libre maximal tal que $|J \cap R(X)| = 1\}$,

$\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X\colon J$ es un arco libre maximal en $X\} \cup \mathcal{A}_R(X)$.

$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X)\colon A$ tiene una vecindad en $F_n(X)$ la cual es una $n-$celda$\}$.

De ahora en adelante, cuando nos referimos a X como una gráfica finita significa que X tiene $E_1, \ldots, E_m$ aristas, con $m \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos

$$\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) = \{A \in F_n(X)\colon \ | A \cap \text{int}_X(E_j) |= i_j, \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\}\}. \text{ y}$$

$$\Omega(X) = \{\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)\colon i_1 + \cdots + i_m = n\}.$$

Notación:
$\mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ si $i_j = n$ para algún $j \in \{1, \ldots, m\}$ y

El primer resultado proporsiona propiedades de $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$: tales espacios son pieza fundamental en las demostraciones.

Teorema. Si X es una gráfica finita y $m \in \mathbb{N}$, donde m es el número de aristas de X, entonces las siguientes resultados se cumplen.

(a) $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es arco conexo.
(b) $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \cap \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m) = \emptyset$ si y solo si existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $i_j \neq l_j$.
(c) $|\Omega(X)| = 1$ si y solo si $m = 1$.
(d) Si $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \in \Omega(X)$, entonces $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$.

Ahora, el primero de los más importantes resultados en este trabajo, pues demuestra lo que se conoce como: la clase de las gráficas finitas es SF_n-cerrada.

Teorema. Sean X, Y continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces X es gráfica finita si y solo si Y es gráfica finita

El siguiente resultado nos muestra una caracterización de la gráfica θ_m.

Teorema. Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y X una gráfica finita con $R(X) \neq \emptyset$. Entonces

$$\bigcap \left\{ \text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X) \right\} = \{F_X\}, \text{ si } X \neq \theta_m,$$

$$\bigcap \left\{ \text{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X) \right\} = \{F_X, q_X(\{u, v\})\}, \text{ si } X = \theta_m.$$

A continuación presentamos el primer resultado que abarca el tema de unicidad: es para el caso del arco y la curva cerrada simple.

Teorema. Sean Y un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$.

(a) Si $SF_n(Y)$ es homeomorfo a $SF_n([0, 1])$, entonces Y es homeomorfo a $[0, 1]$.
(b) Si $SF_n(Y)$ es homeomorfo a $SF_n(S^1)$, entonces Y es homeomorfo a S^1.

El siguiente resultado muestra una importante propiedad que cumplen los elementos de $\mathcal{A}_S(X)$ con los elementos de $\mathcal{A}_S(Y)$, para gráficas finitas X, Y.

Teorema. Sean X, Y gráficas finitas, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo.

(a) Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que $h(q_X(\mathcal{K}_X^j)) = q_Y(\mathcal{K}_Y^j)$, para algún $E_j' \in \mathcal{A}_S(Y)$, donde $\mathcal{K}_Y^j \subset \langle \text{int}_Y(E_j') \rangle$.
(b) La relación $E_j \mapsto E_j'$ es una biyección entre $\mathcal{A}_S(X)$ y $\mathcal{A}_S(Y)$.

El siguiente resultado muestra la unicidad del n-ésimo producto simétrico suspensión para la gráfica θ_m.

Teorema. Sean $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 3$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X es la gráfica θ_m, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.

Teorema. Sean X, Y gráficas finitas, con $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$, tales que X no es la gráfica θ_m para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 3$. Sean $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$ y $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo. Entonces $h(F_X) = F_Y$.
Si también suponemos:

(1) si $E_j \in \mathcal{A}_R(X)$, entonces $E_j' \in \mathcal{A}_R(Y)$ y
(2) si $E_j \in \mathcal{A}_E(X)$, entonces $E_j' \in \mathcal{A}_E(Y)$,

entonces X es homeomorfo a Y.

El siguiente resultado prueba la unicidad para las gráficas finitas con puntos de ramificación y distintas de la gráfica θ_m.

Teorema. Si X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y X no es la gráfica θ_m, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$.

Todos los resultados mencionados anteriormente (y otros más) nos garantizan el siguiente resultado, el cual es el objetivo de este escrito.

Corolario. Si X es una gráfica finita, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$.

1 E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topol. Appl. 153 (2006) 1434–1450.
2 D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$*, Topol. Proc. 44 (2014) 75–95.
3 D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, G. Montero-Rodríguez, *Finite graphs have unique n-fold simmetric product suspension*, enviado a Topology and its Applications.
4 D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, J. Math. Res. 4 (4) (2012) 1–9.