Generalizando el hiperespacio $C(p, X)$

Gerardo Hernández Valdez, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Resumen

Dado un continuo X y $p \in X$, definimos el hiperespacio $C(p, X)$ como la colección de subcontinuos de X que contienen a p. Se define la unicidad de hiperespacio para $C(p, X)$ así como verificar familias de continuos que cumplan con ella. Finalmente, generalizamos la noción de este hiperespacio.

Introducción

En [2] se introdujo el hiperespacio $C(P, X)$ donde P es un subcontinuo del continuo X. Sin embargo, no fue hasta el 2003 cuando se tomó $P = \{p\}$ que se estudiaron propiedades generales de dicho hiperespacio [3]. Más aún, en el mismo artículo se construyeron modelos para este hiperespacio con continuos elementales.

Años después, en [4] y [5] se profundizó el estudio de este hiperespacio para continuos atriódicos, es decir, continuos que no contienen triodos simples, se presentaron modelos de estos y sus propiedades topológicas. De manera más reciente, en [1] comenzó el estudio de la unicidad del hiperespacio $C(p, X)$ para ciertas familias de continuos.

Preeliminares

Utilizaremos la siguiente definición de unicidad en $C(p, X)$

Unicidad de hiperespacio

Dada una familia de continuos $\mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$ y $p \in X$, se dice que el par (X, p) posee hiperespacio único $C(p, X)$ si cada que $Y \in \mathcal{C}$, $q \in Y$ y $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, Y)$, existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(p) = q$.

Ejemplificaremos esta definición considerando las gráficas finitas.

Ejemplo

Sean X un arco con puntos extremos a, b y Y una curva cerrada simple. Entonces, $C(p, X)$ y $C(q, Y)$ son 2-celdas para cada $p \in X - \{a, b\}$ y $q \in Y$. Esto nos muestra que (X, p) no posee hiperespacio único en la clase de las gráficas finitas.

Familias con unicidad de $C(p, X)$

Surge el cuestionamiento, ¿existe alguna familia de continuos que cuyo hiperespacio sea único? La respuesta es afirmativa. Si denotamos por τ a la familia de continuos conocidos como árboles, tenemos el siguiente resultado.

Teorema

Sea $X \in \tau$ y $p \in X$, entonces, (X, p) posee hiperespcio único $C(p, X)$ en τ.

Generalizando el espacio

Sea X un continuo y $p, q \in X$ tales que $p \neq q$. Consideramos el espacio $C_2(\{p, q\}, X)$, el cual consiste de elementos en $C_2(X)$ que contengan al subconjunto $\{p, q\}$.

Teorema

Si X es un continuo y $p, q \in X$ tales que $p \neq q$, entonces $C_2(\{p, q\}, X)$ es un continuo.

Demostración. La compacidad se sigue del hecho $C_2(\{p, q\}, X) \subset C_2(p, X)$ y la conexidad por la existencia de arcos ordenados.

Espacio $C(\{p, q\}, I)$

Sea $X = [0, 1]$. Analizaremos los modelos de $C_2(\{p, q\}, X)$.

- **Caso 1.** Sean $p = 0$ y $q = 1$. Esto implica que
$$C_2(\{p, q\}, X) = \{[0, s] \cup [t, 1] : s \leq t\}$$
Observemos que si $s = t$, obtenemos el espacio completo X. Construyamos la función $\gamma : [0, 1]^2 \to C_2(\{p, q\}, X)$ definida por $\gamma((s, t)) = [0, s] \cup [1 - t, 1]$ donde $s \leq 1 - t$. Esta función define un homeomorfismo entre $[0, 1]^2$ y $C_2(\{p, q\}, X)$, por lo que el hiperespacio es una $2-$celda.

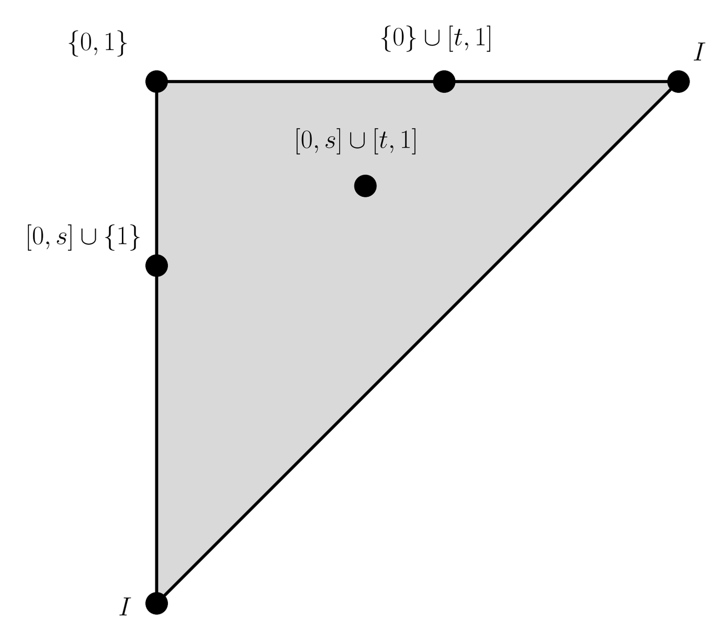

Figure 1:$p = 0, q = 1$

Espacio $C(\{p, q\}, I)$

- **Caso 2.** Sean $p = 0$ y $q \in (X)$. Los elementos del hiperespacio $C_2(\{p, q\}, X)$ son de la forma $[0, x_1] \cup [x_2, x_3]$, donde $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq q \leq x_3 \leq 1$. Es así que $C_2(\{p, q\}, X)$ es homeomorfo a una $3-$celda.
- **Caso 3.** Finalmente, consideremos $p, q \in (X)$. $C_2(\{p, q\}, X) = \{[x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] : 0 < x_1 \leq p \leq x_2 \leq x_3 \leq q \leq x_4 < 1\} \cup \{X\}$. Así, $C_2(\{p, q\}, X)$ será homeomorfo a una $4-$celda, siguiendo la misma lógica que en los casos anteriores.

Espacio $C(\{p, q\}, \mathcal{S}^1)$

Sea $X = \mathcal{S}^1$, y sean $p, q \in X$. Observemos que $C_2(\{p, q\}, X)$ está compuesto por elementos de la forma $l_p \cup l_q$ donde l_p, l_q son subarcos de $\mathcal{S}^1$ que contienen a p y q, respectivamente. Para la construcción del modelo de este hiperespacio, supondremos que $l_p \cap l_q = \emptyset$. De esta manera, tenemos que
$$C_2(\{p, q\}, X) = \{l_p \cup l_q : p \in l_p, \\ q \in l_q\} \cup \{X\}$$
Así, $C(\{p, q\}, X)$ es homeomorfo a una $4-$celda.

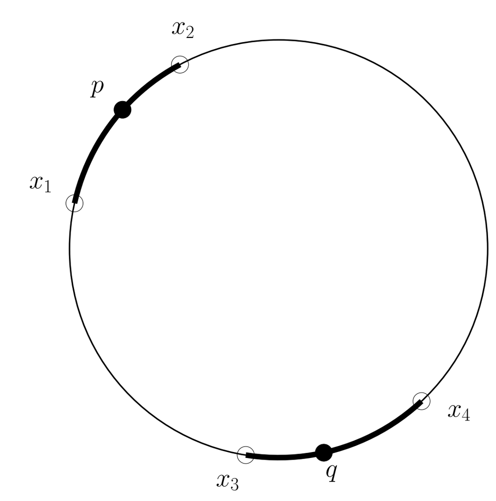

Figure 2:$C(\{p, q\}, \mathcal{S}^1$

References

[1] J. Sanchez R. Toala F. Corona, R. Quinones. Uniqueness of the hyperspaces $c(p, x)$ in the class of trees. *Topol. Appl.*, 269:123–456, 2020.

[2] J. Sanchez H. Villanueva F. Corona, R. Quinones. Hyperspaces $c(p, x)$ of finite graphs. *Topol. Appl.*, 248:40–49, 2018.

[3] P. Pellicer. The hyperspaces $c(p, x)$. *Topol. Proc.*, 27:259–285, 2003.

[4] P. Pellicer. The hyperspaces $c(p, x)$ for atriodic continua. *Houst. J. Math.*, 31:403–426, 2007.

[5] M. Martinez. Models for $c_p(x)$ for atriodic continua. *Topol. Appl.*, 154:115–123, 2007.

Contact Information

- Email: gerareg09@gmail.com
- Phone: +52 811 666 2888