Continuidad de la función ω_f en el intervalo $[0, 1]$

Felipe de Jesús Aguilar Romero, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

BUAP

7 Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones

Resumen. En el presente cartel se revisan algunas propiedades topológicas del conjunto omega límite, se presenta la función ω_f que depende de una función f, la cual se define sobre un espacio métrico compacto X. Finalmente se caracteriza al tipo de funciones f que hacen cotinuas a la función ω_f, cuando X es el intervalo $[0, 1]$.

1. Conjunto omega límite

Definición. Sea $x_0 \in X$. Decimos que $y \in X$ es un punto límite de la órbita $\mathcal{O}(x_0, f)$, si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales

$$\{n_i\}_{i=1}^{\infty},\ n_1 < n_2 < n_3...$$

tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y.$$

La colección de todos los puntos límites de $\mathcal{O}(x_0, f)$ se llama, **conjunto omega límite** de x_0 bajo f. Denotado por,

$$\omega(x_0, f) = \{y \in X : y \textit{ es un punto límite de } \mathcal{O}(x_0, f)\}.$$

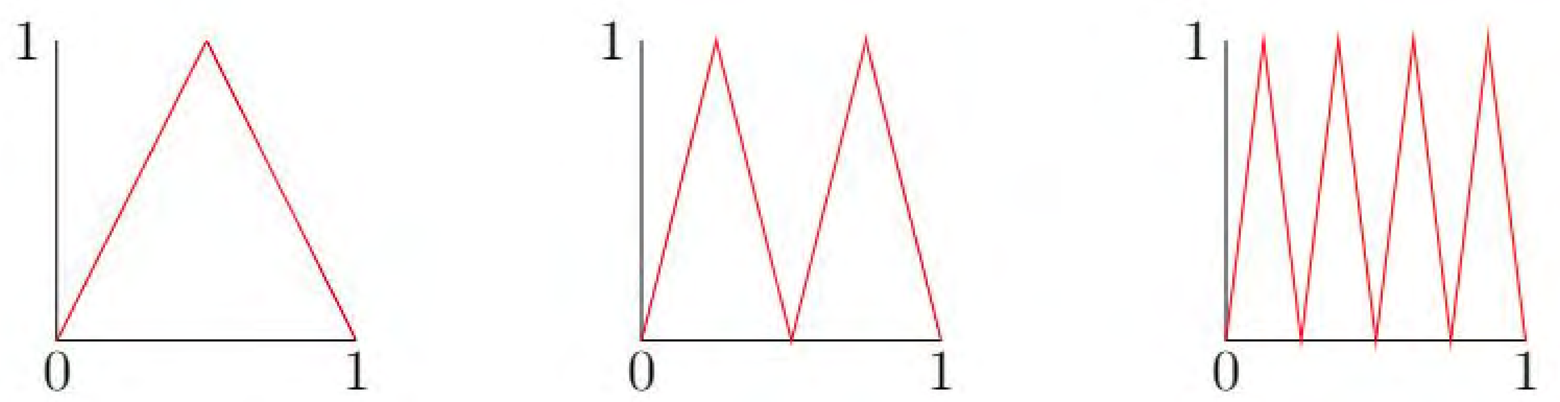
Teorema. Sean $f : X \to X$ una función continua y $x \in X$. Se cumple lo siguiente.

(a) $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado.

(b) Si X es compacto, entonces $\omega(x, f) \neq \emptyset$.

Teorema. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Para toda $x \in X$, se tiene que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Es decir, $\omega(x, f)$ es un conjunto estrictamente invariante bajo f.

Teorema. Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua, $x_0 \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $\omega(x_0, f) \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $f^n(x_0) \in U$.



Teorema. Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función tienda. Existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $\omega(x_0, T) = [0, 1]$.

2. La función ω_f

Teorema. Sea X un espacio métrico compacto. Si $f : X \longrightarrow X$ es equicontinua, entonces $\omega_f : X \longrightarrow 2^X$ es continua.

Teorema. Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ y $\omega_f : [0, 1] \to 2^{[0,1]}$ son funciones continuas, entonces $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo.

Teorema. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y suprayectiva. Si $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, entonces $f^2 = Id$.

Teorema. Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ es una función continua y periódica (en el sentido $f^n = f$, para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$), entonces f es equicontinua.

Teorema. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continua y suprayectiva. Las siguientes condiciones son equivalentes

1. f es equicontinua,
2. $\omega_f : [0, 1] \longrightarrow 2^{[0,1]}$ es continua,
3. $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo.

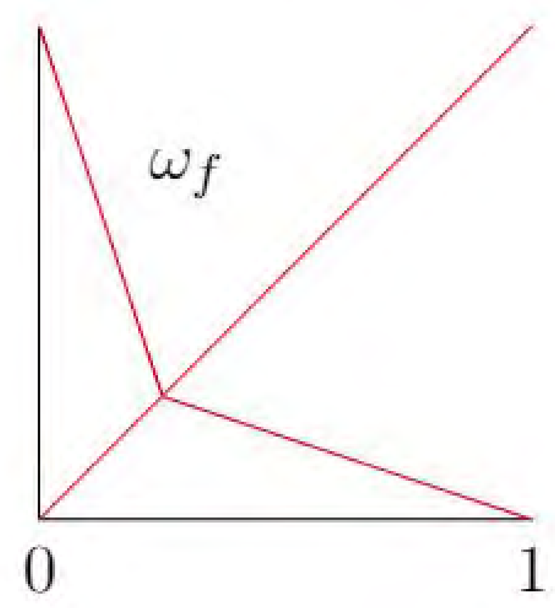
3. Ejemplos de funciones ω_f en el intervalo [0,1]

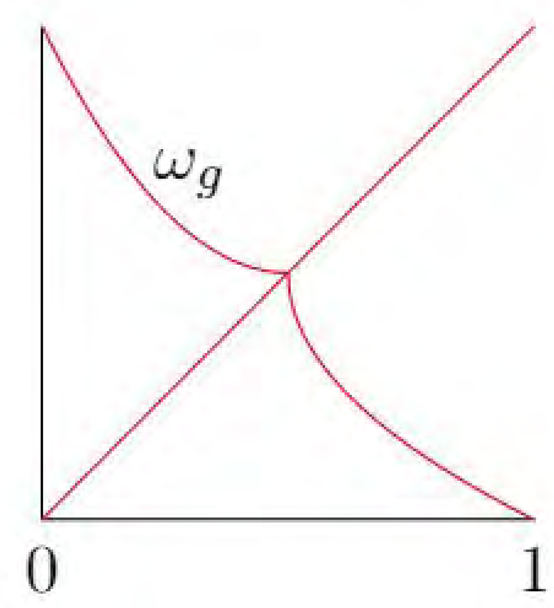
Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ -\frac{1}{3}(x - 1) & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, 1]. \end{cases}$$

Sea $g : [0, 1] \to [0, 1]$, definida por:

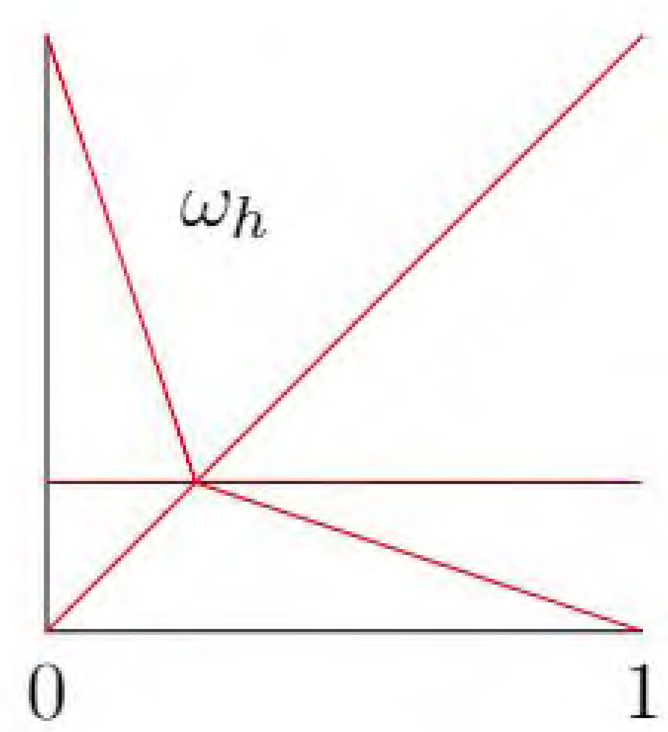
$$g(x) = \begin{cases} 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2x - 1} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$





Teorema. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua, suprayectiva y estrictamente decreciente. Entonces $f^2 = Id$ si y solo si existe $b \in (0, 1)$ y $g : [0, b] \to [b, 1]$ continua, suprayectiva y estrictamente decreciente tal que

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [0, b], \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in [b, 1]. \end{cases}$$



Teorema. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y suprayectiva. Si $f^n = Id$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^2 = Id$.

Referencias

1. A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática, ISBN:968-36-3594-6,2004.
2. F. Aguilar, D. Herrera, F. Macías, *Continuidad de la función ω_f en el intervalo* $[0, 1]$ (Capítulo 7), Matemáticas Y Sus Aplicaciones 14, Por publicarse.
3. J. King, H. Méndez, *Sistemas dinámicos discretos*, Las prensas de la ciencia, Temas de Matemáticas, ISBN: 978-607-02-5263-1, 2014.
4. S.B. Jr. Nadler, *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.