Geometría de la función zeta de Riemann

E. Centeno Contreras
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP

Resumen

Una función muy importante en el área de teoría de números es la función zeta de Riemann, la cual es una función meromorfa en todo el plano complejo, a esta función se le relaciona con la distribución de los números primos. Para estudiar el comportamiento geométrico es necesario un análisis profundo de dicha función, pues su relación va desde fórmulas establecidas por Leonhard Euler, hasta el estudio de las ecuaciones funcionales, pues una de las hipótesis más conocidas sobre esta función es acerca de sus ceros no triviales. El objetivo de este trabajo es mostrar la convergencia de la función zeta de Riemann de manera geométrica para valores con parte real mayor a 1. Una vez que se pruebe dicha convergencia, se busca aplicar la función a algún sistema.

Introducción

La funcioón zeta de Riemann es una función que intenta relacionar los números complejos con los números primos, esta función fue planteada por primera vez por Bernhard Riemann en el año 1859 en el artículo "On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude" como una extención de la definición de Euler.
La función está definida como:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Estudio de la función

Para realizar un estudio adecuado de la función zeta de Riemann es necesario tener conocimientos acerca de análisis complejo, continuación analítica, geometría de funciones complejas, entre otras. estudiaremos la función para el plano $S = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$
Si vemos a s=x+iy tenemos que la función queda como:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+iy}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\frac{1}{n^{iy}}$$

Si y=0, de análisis en variable real, tenemos que la serie converge.
Para observar que sucede cuando $y \neq 0$ es necesario estudiar como se comporta una función cuando es elevada a una potencia imaginaria.
sea $f(z) = a^z$ con $a \in \mathbb{R}$

$$a^z = a^{x+iy} = a^x a^{iy} = a^x (e^{lna})^{iy} = a^x (e^i)^{ylna} = a^x (cos(ylna) + isen(ylna))$$

observamos que la parte real de la función aumenta o disminuye la longitud de a, mientras que la parte imaginaria lo que hace es rotar sobre una circunferencia. Con esto podemos estudiar la función zeta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\frac{1}{n^{iy}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} n^{-iy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}(cos(yln(n)) - isen(yln(n)))$$

donde se observa que la parte real converge y la parte imaginaria rota los valores.
Ahora para estudiar los valores para $S' = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) < 1\}$ se necesita conocer la función eta de Dirichlet, definida como $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ la cual se relaciona a la función zeta de Riemann de la siguiente manera$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ y despejando tenemos que $\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1-2^{1-s}}$, lo cual nos permite calcular los valores cuando $Re(s) < 1$

Evaluacion de algunos valores para ver el comportamiento de la función

Sea $s \in S$, en partícular tomando:
s=2 obtenemos:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad (1)$$

para s=3

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots \approx 1.202 \qquad (2)$$

para s=-1

$$\zeta(-1) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{(n-1)}}{n}}{1-2^2} = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots}{-3} = \frac{\frac{1}{4}}{-3} = -\frac{1}{12} \qquad (3)$$

para s=3+i

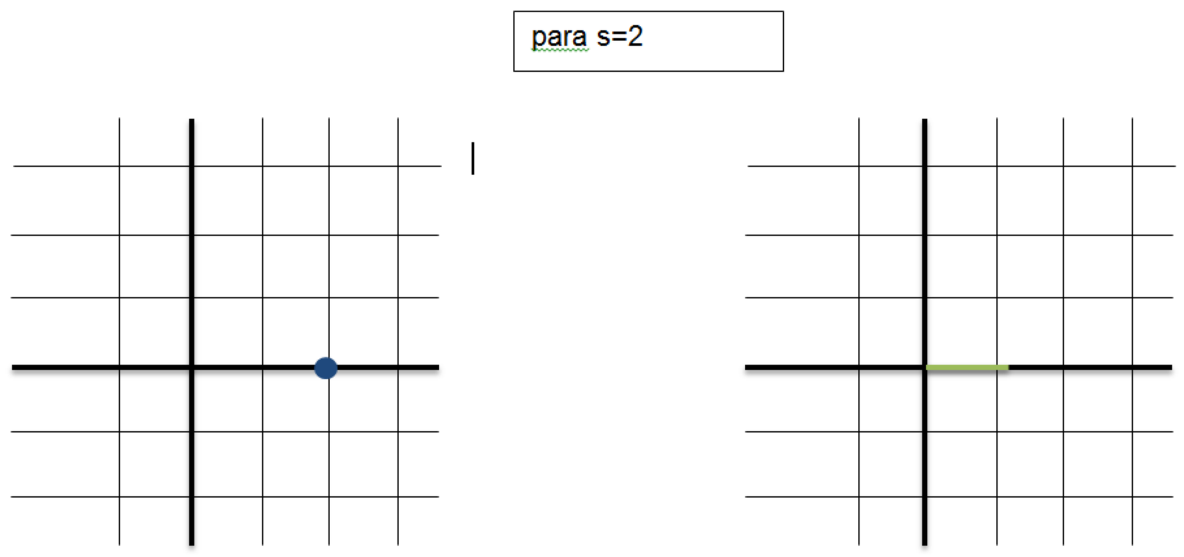
$$\zeta(3+i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(3+i)}} = \frac{1}{1^{(3+i)}} + \frac{1}{2^{(3+i)}} + \frac{1}{3^{(3+i)}} + \cdots = 1(\frac{1}{3})^i + \frac{1}{2^3}(\frac{1}{3})^i + \frac{1}{3^3}(\frac{1}{3})^i + \cdots$$

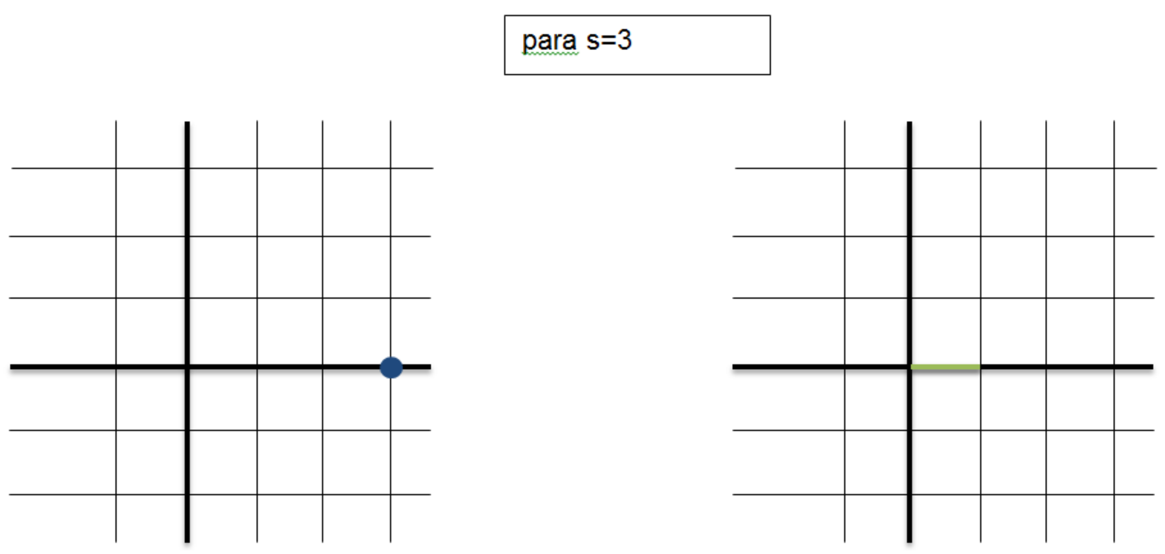
para s=4-3i

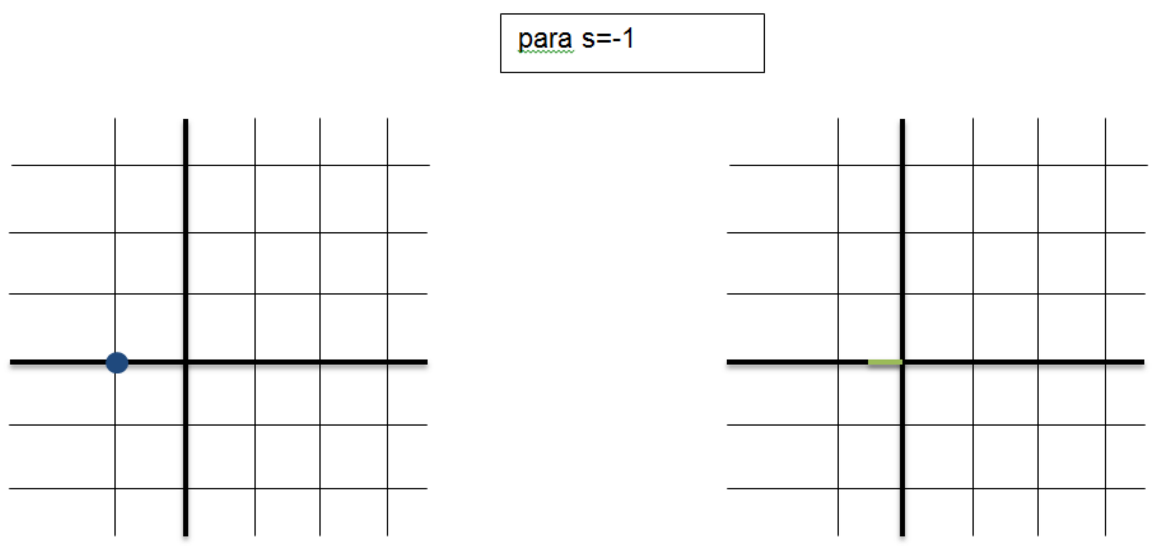
$$\zeta(4+3i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(4-3i)}} = \frac{1}{1^{(4-3i)}} + \frac{1}{2^{(4-3i)}} + \frac{1}{3^{(4-3i)}} + \cdots = 1(3)^i + \frac{1}{2^4}(3)^i + \frac{1}{3^4}(3)^i + \cdots$$

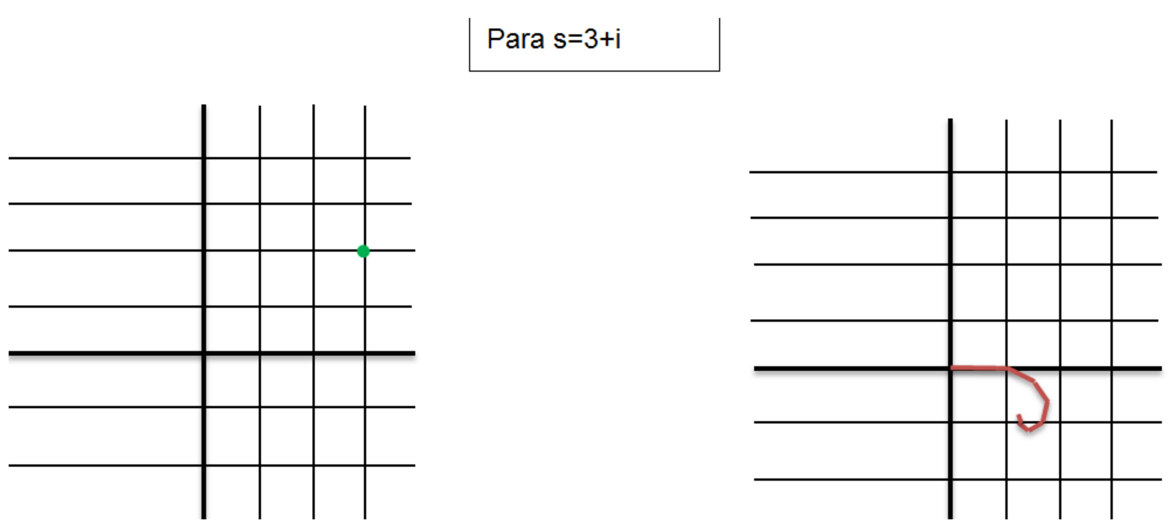
Gráficos

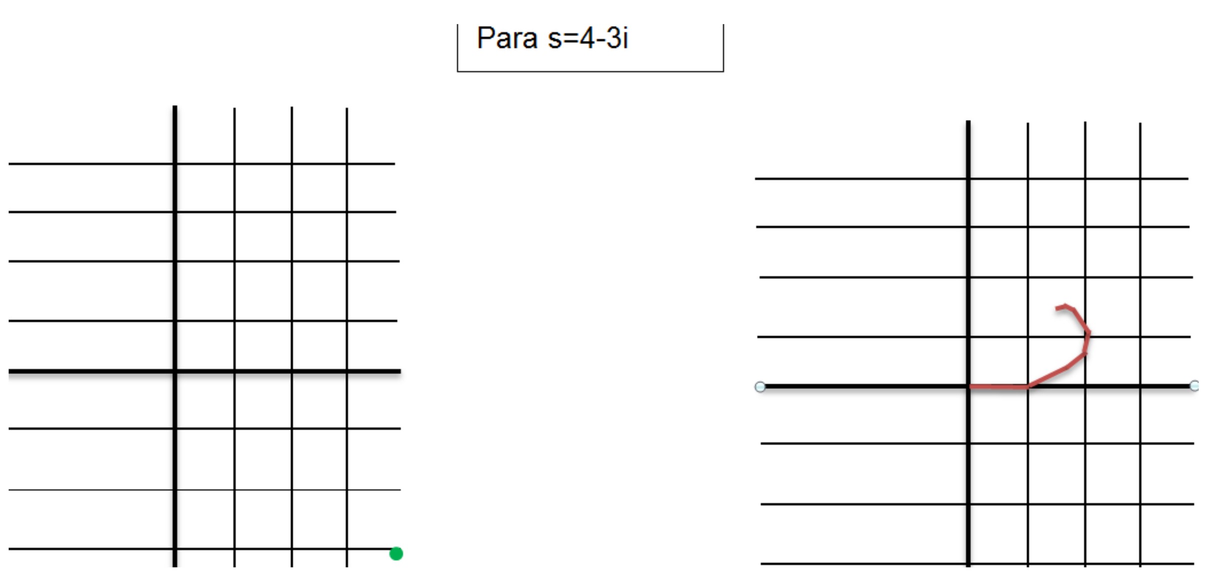
Veamos el comportamiento de la función graficámente











Referencias

Terence T. (2010). The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation. 2020, de canadian mathematical society Sitio web: https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation/
Edwards, H. M.,(1974), Riemann's Zeta Function, Academic Press, NewYork.
Ingham, A. E.,(1932), The Distribution of Prime Numbers, Cambridge University Press. .