Una manera de tratar la rigidez de $F_2(X)$ para continuos arco indescomponibles

Antonio de Jesús Libreros López **Fernando Macías Romero**
David Herrera Carrasco

Introducción

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, definimos el **n-ésimo producto simétrico** de X, $F_n(X) = \{A \subset X\colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$ el cual es un continuo con la metrica de Hausdorff. Decimos que $F_n(X)$ es **rígido** si para cualquier homeomorfismo $h : F_n(X) \longrightarrow F_n(X)$ se tiene que $h(F_1(X)) = F_1(X)$.

A continuación enunciamos algunos de los resultados más destacados de la rigidez del producto simétrico, que estan relacionados con este trabajo, de los cuales los últimos dos pueden ser encontrados en [3] con una prueba más detallada de estos resultados.

Resultados previos

En [2], Verónica Martínez de la Vega y Rodrigo Hernández obtienen los siguientes resultados:

- [2, Corollary 7] Si $n \geq 4$ y X es un continuo alambrado, entonces $F_n(X)$ es rígido.
- [2, Theroem 11] Si un continuo X contiene un pelo, entonces $F_2(X)$ no es rígido.
- [2, Theroem 14] Si un continuo X contiene un arco libre, entonces $F_3(X)$ no es rígido.

Más aún, por [2, Theorem 24] uno puede inferir que si X es un continuo arco indescoponible sin puntos extremos (por ejemplo un Solenoide), entonces $F_2(X)$ es rígido. Esto da paso a la siguiente pregunta.

Objetivo

[2, Question 26]¿Es $F_2(X)$ rígido para cada continuo arco indescomponible X?

Por los argumentos que se usan para probar [2, Theorem 24], uno puede conjeturar que cuando X tiene puntos extremos (por ejemplo el Arcoiris de Knaster), $F_2(X)$ no es rígido, para lo cual sería necesario exhibir un automorfismo g tal que $g(F_1(X)) \not\subset F_1(X)$.

Dada la dificultad para tratar con este tipo de continuos es conveniente buscar otras maneras de estudiarlos, en este caso nos ayudaremos de los límites inversos.

Límite inverso

Sea $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ una colección continuos, y para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$ una función continua. A $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ se le conoce como **sistema inverso**. El **límite inverso** de $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotado por $\varprojlim\{X_i, f_i\}$, es el subespacio de $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definido por

$$\varprojlim\{X_i, f_i\} = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : \text{ para cada } i \in \mathbb{N}, f(x_{i+1}) = x_i \right\}.$$

Sea X un continuo arco indescomponible y supongamos que X es homeomorfo a $\varprojlim\{X_i, f_i\}$, donde cada X_i es un continuo y f_i una función continua.
Definimos de manera natural a

$$\mathcal{F}_i : F_2(X_{i+1}) \longrightarrow F_2(X_i)$$

como $\mathcal{F}_i(A) = f_i(A)$, de los cual se concluye que $\mathcal{F}_i$ es una función continua.
Así, $Z = \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\}$ es un continuo.
Para cada $j \in \mathbb{N}$, la j-ésima proyección es la función

$$\pi_j : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \longrightarrow X_j$$
$$(x_i)_{i=1}^{\infty} \longmapsto x_j$$

$F_2(X)$ como límite inverso

Sea $h : X \longrightarrow \varprojlim\{X_i, f_i\}$ un homeomorfismo. Definimos a

$$H : F_2(X) \longrightarrow \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\}$$
$$\{a, b\} \longmapsto (\{\pi_i(h(a)), \pi_i(h(b))\})_{i=1}^{\infty}$$

el cual es un homeomorfismo.

Con esto, en vez de construir un homeomorfismo $g : F_2(X) \longrightarrow F_2(X)$ tal que $g(F_1(X)) \not\subset F_1(X)$ sería más fácil construir un homeomorfismo

$$G : \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\} \longrightarrow \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\}$$

tal que $G((\{a_i\})_{i=1}^{\infty}) = (\{x_i, y_i\})_{i=1}^{\infty}$.

Construcción del homeomorfismo

Por [1, Theorem 6.C.8 y Theorem 6.C.9], para poder construir G solo es necesario definir una sucesión de homeomorfismos $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$,

(a) $g_i : F_2(X_i) \longrightarrow F_2(X_i)$ y
(b) $\mathcal{F}_i \circ g_{i+1} = g_i \circ \mathcal{F}_i$,

y definir a G como $G((\{a_i, b_i\})_{i=1}^{\infty}) = (g_i(\{a_i, b_i\}))_{i=1}^{\infty}$.

$$\begin{tikzcd}
F_2(X_1) \arrow[d, "g_1"'] & F_2(X_2) \arrow[l, "\mathcal{F}_1"'] \arrow[d, "g_2"'] & F_2(X_3) \arrow[l, "\mathcal{F}_2"'] \arrow[d, "g_3"'] & {} \arrow[l, "\mathcal{F}_3"'] \\
F_2(X_1) & F_2(X_2) \arrow[l, "\mathcal{F}_1"] & F_2(X_3) \arrow[l, "\mathcal{F}_2"] & {} \arrow[l, "\mathcal{F}_3"]
\end{tikzcd}$$

Además, si para algún $(\{a_i\})_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{F_2(X_i), \mathcal{F}_i\}$ hacemos que $g_1(\{a_1\}) = \{x_1, y_1\}$ con $x_1 \neq y_1$, entonces

$$\mathcal{F}_1(g_2(\{a_2\})) = g_1(\mathcal{F}_1(\{a_2\})) = g_1(\{a_1\}) = \{x_1, y_1\}.$$

De esto $g_2(\{a_2\}) = \{x_2, y_2\}$ con $x_2 \neq y_2$. Procediendo recursivamente podemos observar que para cada $g_i(\{a_i\}) = \{x_i, y_i\}$ con $x_i \neq y_i$. Consiguiendo que $G((\{a_i\})_{i=1}^{\infty}) = (\{x_i, y_i\})_{i=1}^{\infty}$.

Conclusiones

En resumen, para poder probar que el segundo producto simétrico de los continuos arco indescomponibles con puntos extremos no es rígido, solo bastará analizar como se pueden construir los homeomorfismos g_i con las condiciones antes dichas.

Bibliografía

- Charles O. Christenson, William L. Voxman, *Aspects of Topology*, n, Pure and Applied Mathematics, Vol. 39, Marcel Dekker, Inc., E.U. New York and Basel, 1977.
- R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products*, Topol. Appl. 160 (2013) 1577–1587.
- D. Herrera Carrasco, A. de J. Libreros López, F. Macías Romero, *Continuos sin segundo y sin tercer producto simétrico rígido* (Capítulo 6) Matemáticas y sus aplicaciones 9, Colección Manuales y Textos, Serie Ciencias Exactas, Dirección General de Publicaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, págs. 113-139. Primera Edición 2018, ISBN: 978-607-525-520-0.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla