El Lema del Ping-Pong

Angel Rodríguez Sánchez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
217570764@alumnos.fcfm.buap.mx

RESUMEN

Hablando en general, el Lema del Ping-Pong es un criterio para construir grupos libres a partir de acciones adecuadas. La primera versión de este Lema es atribuida a Felix Klein quien lo uso para el estudio de grupos Kleininanos, es decir, para el estudio de grupos discretos que actúan en la esfera de Riemann.
En el cartel se darán los preliminares (grupos libres su construcción (a groso modo) y su propiedad universal), posteriormente se enunciara el **Lema del Ping-Pong** y a partir de este se dará un ejemplo de su aplicación para la construcción de un grupo Kleininano generado por dos elementos parabólicos.

Grupos libres

En está sección se definirá a los grupos libres, para después estudiar a groso modo la construcción de grupos libres y su propiedad universal.

Definición 0.1. *Sea S un subconjunto no vacío de un grupo G. El subgrupo generado por S, denotado $\langle S\rangle$, se define como la intersección de todos los subgrupos de G que contienen a S, es decir,*

$$\langle S\rangle = \bigcap\{H : \ H \leqslant G \text{ es un subgrupo de } G \text{ con } S \subset H\}.$$

Observe que siempre existe un subgrupo que contiene a S: G mismo. De hecho, $\langle S\rangle$ es el subgrupo más pequeño que contiene a S, pues si $S \subset H \leqslant G$, entonces $\langle S\rangle \leqslant H$. $S = \langle S\rangle$ cuando S es subgrupo. Otra forma de caracterizar a $\langle S\rangle$ es

$$\langle S\rangle = \{s_1^{\varepsilon_1}\cdot s_2^{\varepsilon_2}\cdots s_n^{\varepsilon_n} |\ n \in \mathbb{N},\ s_1, s_2, \dots, s_n \in S, \varepsilon\ \ _1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}\}.$$

Definición 0.2. *Se dice que S genera a G si $\langle S\rangle = G$.*

Si el conjunto S genera a un grupo G, cierto producto de elementos de S pueden dar el neutro de G, por ejemplo

1. Si $s \in S$ entonces $ss^{-1} = e$.
2. Si G es cíclico de orden n generado por g entonces $g^n = e$.

A un producto de elementos de S que sea igual a la identidad en G se le llama una relación entre elementos del conjunto generador S. Hay dos tipos de relaciones.

- **Triviales**, si son consecuencia de los axiomas de grupo como en 1.
- **No triviales**, si son las que dependen de la estructura de grupo como en 2.

Definición 0.3. *Si S es un conjunto generador de G decimos que G está **libremente generado por** S si todas las relaciones entre los elementos de S son **triviales**.*

Construcción de grupos libres y propiedad universal

En esta sección se dará a groso modo la construcción de grupos libres, la construcción completa y todas las consecuencias de tal construcción (*el problema de la palabra*) puede consultarse en [1].
Sea S un conjunto. Sus elementos son llamados *letras o símbolos*. Sea $S^{-1} = \{s^{-1}|\ s \in S\}$ el conjunto de letras inversas (o símbolos inversos). Se considera al conjunto formado por las ***letras*** o símbolos de $S \cup S^{-1}$, a el cual llamaremos ***Alfabeto***. El conjunto S^*, es el conjunto de todas las palabras construidas adjuntando letras del alfabeto de manera finita, es decir, una palabra sobre S^* es una sucesión finita (posiblemente vacía) de elementos de $S \cup S^{-1}$, cuya expresión es de la forma

$$w = s_{i_1}^{\varepsilon_1} s_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

con $s_i \in S \cup S^{-1}$ y $\varepsilon_i = \pm 1$. Se usara la notación de 1 para la palabra vacía (la palabra que no tiene elementos) y se considera a está en S^*. Como un ejemplo de palabra se tiene

$$s_1 s_2 s_1^{-1} s_2 s_3 \in S^*.$$

En el conjunto S^* hay una operación binaria $(\cdot)$ consistente en adjuntar palabras. La palabra vacía sería elemento neutro de la operación $(\cdot)$, que es obviamente asociativa. La longitud de la palabra w es el número de letras en esta palabra. La longitud de la palabra vacía es 0. Pero S^* todavía no es grupo, por la ausencia de elementos simétricos. Para lograrlo, se dice que, una palabra $w \in S^*$ es ***reducida***, si esta no contiene un par de letras consecutivas de la forma ss^{-1} o $s^{-1}s$. La ***reducción*** de una palabra $w \in S^*$ es hacer recurrente, mientras sea posible, la eliminación de todas las parejas de letras consecutivas de la forma ss^{-1} o $s^{-1}s$. Por ejemplo, las palabras

$$1,\ s_2 s_1,\ s_1 s_2 s_1^{-1}$$

son reducidas, mientras que

$$s_2 s_1 s_1^{-1} s_3$$

no es reducida.
Consideremos las siguientes operaciones entre palabras:

1. Intercalar ss^{-1} o $s^{-1}s$ en una palabra, donde $s \in S \cup S^{-1}$ (Intercalar ss^{-1} en una palabra w significa escribir a w como uv y, entonces, intercalar ss^{-1} de esta manera: $uss^{-1}v$, claramente u, v pueden ser vacías).
2. Eliminar ss^{-1} o $s^{-1}s$ en una palabra, donde $s \in S \cup S^{-1}$.

Se define una relación de equivalencia en S^*, dada por $w \sim w'$ si w se puede obtener de w' por una sucesión finita de operaciones de tipo 1, 2, es decir, la relación $\sim$ en S^* esta dada por

$$us_i s_i^{-1} v \sim uv, \quad us_i^{-1} s_i v \sim uv \quad \text{donde } \ u, v \in S^*.$$

Proposición 0.4. *Cualquier palabra en S^* es equivalente a una única palabra reducida.*

Se denotará en todo lo siguiente a $F(S)$ como el conjunto de palabras reducidas. Nótese que de la proposición 0.4 se sigue que $F(S)$ se puede identificar como $S^* \diagup \sim$.

Definición 0.5. *El **grupo libre** sobre S es el conjunto $F(S)$ provisto de la operación binaria $*$ definida por: $w * w'$ es la única palabra reducida equivalente a la palabra $w \cdot w'$. El elemento neutro es la palabra vacía. El inverso de una palabra reducida*

$$w = s_{i_1}^{\varepsilon_1} s_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

esta dado por

$$w^{-1} = s_{i_n}^{-\varepsilon_n} s_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots s_{i_1}^{-\varepsilon_1}.$$

De aquí es claro que $w * w^{-1} = w^{-1} * w = 1$ en $F(S)$.
*La cardinalidad de S es llamado el **rango** de el grupo libre $F(S)$.*

Ahora se da una propiedad universal que cumplen los grupos libres.

Proposición 0.6 (**Propiedad universal de los grupos libres**). *Sea S un conjunto arbitrario. Existe un grupo $F(S)$ y una aplicación necesariamente inyectiva $i : S \hookrightarrow F(S)$ que cumple la siguiente propiedad universal: Para cualquier grupo G y alguna aplicación $\varphi : S \longrightarrow G$ se tiene que φ se factoriza a través de i, es decir, existe un único homomorfismo de grupos $\Phi : F(S) \longrightarrow G$ que hace conmutar el diagrama siguiente*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & G \\ F(S) \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 0.7 (**Unicidad de grupos libres**). *Sea S un conjunto. Entonces, hasta isomorfismo, hay a lo más un grupo libre generado por S.*

Una consecuencia directa de la propiedad universal de los grupos libres es la siguiente

Proposición 0.8. *Todo grupo es cociente de un grupo libre y un subgrupo normal del libre.*

Lema del Ping-Pong

Se dará un versión del lema del ping-pong y se dará un ejemplo como aplicación de este lema. Cabe destacar que existen versiones más generales del lema del ping-pong y se pueden consultar en [1]. La versión siguiente fue extraída de [2].

Lema 0.9 (Lema del ping-pong). *Sea G un grupo generado por los elementos a y b. Supongase que G actúa en X y que existen subconjuntos no vacíos, disjuntos $A, B \subset X$, tales que, para cada $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ se cumple que*

$$a^n(B) \subset A \quad y \quad b^n(A) \subset B,$$

Entonces G es un grupo libre de rango 2, generado por $\{a, b\}$.

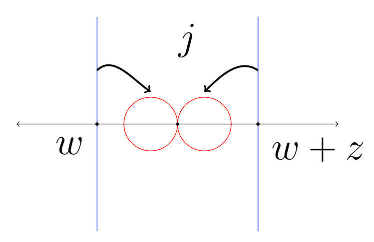
Ejemplo 0.10. *Si $|z| \geq 2$ entonces las transformaciones*

$$g_1(w) = w + z \ \ y \ \ g_2(w) = \frac{w}{zw + 1},$$

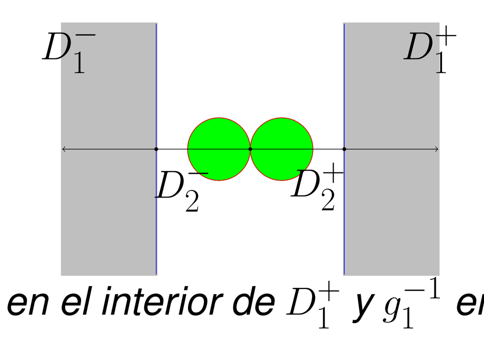
generan un subgrupo $\Gamma_z = \langle g_1, g_2\rangle$ libre de rango 2 en $M\ddot{o}b(\hat{\mathbb{C}})$, más aún este grupo es discreto.
En efecto. Sea $w, z \in \mathbb{C}$ con la condición de que $|z| \geq 2$ y consideremos las transformaciones

$$g_1(w) = w + z \quad y \quad g_2(w) = \frac{w}{wz + 1}.$$

Veamos que g_1, g_2 generan un subgrupo libre de rango dos en el grupo $M\ddot{o}b(\hat{\mathbb{C}})$. Se observa que $g_2 = j \circ g_1 \circ j$, es decir, g_2 es conjugada a g_1 vía la transformación j, donde $j(z) = \frac{1}{z}$. Se traza la recta que une a w con $w + z$, para después trazar las rectas perpendiculares a este segmento que pasan por w y $w + z$ estas rectas vistas en la esfera de Riemann son dos circunferencias tangentes en el punto al infinito. Dado que la transformación j intercambia al 0 en el infinito y viceversa. La circunferencias tangentes en el infinito se transforman en dos circunferencias tangentes en el cero mediante la transformación j.



Denotamos por D_1^+ y D_1^- el interior de las circunferencias tangentes en el infinito y a D_2^+ y D_2^- el interior de las circunferencias tangentes en cero.



Luego g_1 envía a $E_1^+ = \hat{\mathbb{C}} \diagdown D_1^-$ en el interior de D_1^+ y g_1^{-1} envía a $E_1^- = \hat{\mathbb{C}} \diagdown D_1^+$ en el interior de D_1^-. La transformación g_2 envía a $E_2^+ = \hat{\mathbb{C}} \diagdown D_2^-$ en el interior de D_2^+, y la inversa envía a $E_2^- = \hat{\mathbb{C}} \diagdown D_2^+$ en el interior de D_2^-. Aplicando el lema del Ping-Pong, se tiene el resultado.

Referencias

[1] Pierre de la Harpe, *Topics in Geometric Group* , Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago. ISBN 0-226-31719-6; Ch. II.B "The table-Tennis Lemma (Klein's criterion) and examples of free products"; pp. 25

[2] Clara Löh, *Geometric Group Theory, an introduction.* Retrieved from **http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/ggt book/ggt book draft.pdf**