

Capítulo 1

Arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X

Esaú Alejandro Pérez Rosales

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA

Resumen

Gracias a la estructura de \mathbb{R} , se sabe que $([0, 1], \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. En un arco C , es natural preguntarse si los homeomorfismos del intervalo $[0, 1]$ con C preservan el orden, y de ser así el caso, podríamos “ordenar” a los elementos de un arco. Por otro lado, en un hiperespacio de un espacio métrico, la relación de contención “ \subseteq ” es de orden parcial. Estas ideas nos permiten definir el concepto de arco ordenado en un hiperespacio. En este trabajo se determinan condiciones para asegurar la existencia de arcos ordenados en dos hiperespacios específicos de un espacio métrico X , el hiperespacio de compactos 2^X y el hiperespacio de subcontinuos $C(X)$.

1 Introducción

El presente capítulo resume el trabajo realizado por el autor como parte de su tesis de licenciatura en matemáticas ([12]). Este escrito consiste en una breve exposición de los teoremas de existencia de arcos ordenados en dos hiperespacios de un continuo, siguiendo los resultados expuestos en 1999 por Sam B. Nadler Jr. y Alejandro Illanes en los capítulos 14 y 15 de su obra *Hyperspaces: Fundamental and Recent Advances* ([6]). El propósito de este escrito es desarrollar de manera profunda las demostraciones expuestas en estos capítulos, a fin de facilitar la consulta a futuros lectores, así como ser fuente de inspiración para posibles futuros trabajos relacionados a la teoría de los continuos y sus hiperespacios.

2 Preliminares

En este capítulo, presentaremos algunas definiciones y resultados útiles que se necesitarán en los capítulos siguientes. A lo largo del presente trabajo, usaremos la letra X para denotar un espacio métrico con métrica d . A la topología generada por la métrica d se le denotará por τ_d . Dado $x \in X$ y $r > 0$, se denotará por $B_d(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$ a la bola con centro en x y radio r , omitiendo la referencia a la métrica cuando esto no provoque confusión. Dado $A \subseteq X$, los símbolos $\text{Fr}_X(A)$ y \overline{A} denotarán la frontera y la cerradura de A en X , respectivamente. Salvo cuando sea necesario, se omitirá la referencia al espacio X . Por otro lado, se usarán los símbolos \mathbb{N} y \mathbb{R} para denotar el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales, respectivamente. Todo subconjunto de \mathbb{R} se considerará con la métrica euclidiana y la topología inducida por ésta. Finalmente, en el presente trabajo se supondrá verdadero el Axioma de Elección, o equivalentemente, el Lema de Zorn (todo conjunto parcialmente ordenado L , en el que cada cadena tiene una cota superior en L , admite un elemento maximal).

Definición 2.1. Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto. Dados un continuo X y $Y \subseteq X$, diremos que Y es un **subcontinuo** de X si Y es un continuo como subespacio de X o bien, si Y tiene exactamente un punto.

Definición 2.2. Un **arco** es un espacio métrico que es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ con la métrica usual de \mathbb{R} .

Dado que $[0, 1]$ es un continuo, se sigue que todo arco también es un continuo.

Definición 2.3. Un espacio métrico X es **arco conexo** si dados cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existe un arco en X cuyos puntos extremos son x y y .

Observación 2.4. Todo espacio métrico arco conexo es conexo.

El siguiente lema nos mostrará que para verificar la arco conexidad de un espacio métrico, es suficiente fijar un punto y construir arcos entre este punto fijo y los demás puntos.

Lema 2.5. *Sean X un espacio métrico y $p \in X$. Si para cualquier $x \in X \setminus \{p\}$, existe un arco con puntos extremos x y p , entonces X es arco conexo.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si $x = p$ o $y = p$, por hipótesis, existe un arco con puntos extremos x y y , y termina la prueba, así que supongamos que $x \neq p \neq y$. Entonces existen arcos A_1 y A_2 tales que A_1 tiene puntos extremos x y p , y A_2 tiene puntos extremos y y p . Sean $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow A_1$ y $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow A_2$ homeomorfismos tales que $\alpha_1(0) = x, \alpha_1(1) = p, \alpha_2(0) = y$ y $\alpha_2(1) = p$. Definamos $A = \{t \in [0, 1] : \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$. Observemos que $A \neq \emptyset$ (ya que $1 \in A$) y A está acotado inferiormente. Sea $m = \inf A$. Por [7, Lema 1, pág 161], A es cerrado en \mathbb{R} , lo que implica que $m \in A$, con lo cual $\alpha_1(m) = \alpha_2(m)$. Definamos $\beta : [0, 1] \rightarrow A_1 \cup A_2$ como

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{si } t \in [0, m] \\ \alpha_2\left(\frac{1-t}{1-m}m\right) & \text{si } t \in [m, 1] \end{cases}$$

Observemos que

- β está bien definida, ya que $\alpha_1(m) = \alpha_2(m)$.
- $\beta(0) = \alpha_1(0) = x$ y $\beta(1) = \alpha_2(0) = y$.
- β es continua por el Lema del Pegado, ya que α_1 y α_2 son continuas.
- β es inyectiva, ya que α_1 y α_2 lo son, y $\beta([0, m]) \cap \beta([m, 1]) = \alpha_1([0, m]) \cap \alpha_2([0, m]) = \{\alpha_1(m)\} = \{\alpha_2(m)\}$.

Por lo tanto, $\beta([0, 1])$ es un arco en X con puntos extremos x y y . Se concluye que X es arco conexo. \square

Un teorema muy importante en la teoría de los continuos, conocido como el Teorema de golpes en la frontera, enuncia lo siguiente.

Teorema 2.6 (De golpes en la frontera). *Sean X un continuo y U un subconjunto propio de X , abierto y no vacío. Si K es una componente de \overline{U} , entonces $K \cap \text{Fr}(U) \neq \emptyset$. En particular, $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $K \cap \text{Fr}(U) = \emptyset$. Observemos que K y $\text{Fr}(U)$ son subconjuntos cerrados de \overline{U} . Además, $K \neq \emptyset$.

Observemos también que $\text{Fr}(U) \neq \emptyset$, ya que si $\text{Fr}(U) = \emptyset$, entonces U es un subconjunto cerrado y abierto de X , lo que contradice la conexidad de X .

Además, si existiese un subconjunto conexo A de \bar{U} tal que $A \cap K \neq \emptyset$, se tendría que $A \subseteq K$, y puesto que $K \cap \text{Fr}(U) = \emptyset$, entonces $A \cap \text{Fr}(U) = \emptyset$. Hemos probado que ningún subconjunto conexo de \bar{U} intersecta tanto a K como a $\text{Fr}(U)$. Por el Teorema del cable cortado ([6, Teorema 12.9]), se tiene que K y $\text{Fr}(U)$ están separados en \bar{U} . Esto significa que existen E y F subconjuntos separados de X tales que $\bar{U} = E \cup F$, $K \subseteq E$ y $\text{Fr}(U) \subseteq F$.

Veamos que E y $F \cup (X \setminus U)$ forman una separación de X . Observemos que $E \neq \emptyset$ y $F \cup (X \setminus U) \neq \emptyset$. Además,

$$E \cup [F \cup (X \setminus U)] = (E \cup F) \cup (X \setminus U) = \bar{U} \cup (X \setminus U) = X.$$

Finalmente, para ver que E y $F \cup (X \setminus U)$ están separados en X , probaremos primero que $\bar{E} \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in \bar{E} \cap (X \setminus U)$. Como $\bar{E} \subseteq \bar{U}$, entonces $x \in \bar{U} \cap (X \setminus U) = \bar{U} \cap \overline{X \setminus U} = \text{Fr}(U) \subseteq F$, es decir, $x \in \bar{E} \cap F$, lo que es una contradicción ya que E y F están separados. Así, $\bar{E} \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Por lo tanto,

$$\bar{E} \cap [F \cup (X \setminus U)] = (\bar{E} \cap F) \cup [\bar{E} \cap (X \setminus U)] = \emptyset \cup [\bar{E} \cap (X \setminus U)] = \bar{E} \cap (X \setminus U) = \emptyset$$

y

$$\begin{aligned} E \cap \overline{F \cup (X \setminus U)} &= E \cap (\bar{F} \cup \overline{X \setminus U}) \\ &= (E \cap \bar{F}) \cup (E \cap \overline{X \setminus U}) \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

Por consiguiente, E y $F \cup (X \setminus U)$ forman una separación de X . Como esto contradice la conexidad de X , se concluye que $K \cap \text{Fr}(U) \neq \emptyset$.

La segunda parte del teorema se sigue de que $K \cap (X \setminus U) \supseteq (K \cap \bar{U}) \cap \overline{X \setminus U} = K \cap \text{Fr}(U) \neq \emptyset$. \square

Teorema 2.7. *Sea X un continuo.*

- (a) *Si A es un subcontinuo propio de X , U un subconjunto abierto de X y $A \subseteq U$, entonces existe B subcontinuo de U tal que $A \subsetneq B$.*
- (b) *Existe un subcontinuo propio de X con más de un punto.*

Demostración. (a) Sean A un subcontinuo propio de X , $U \subseteq X$ abierto y $A \subseteq U$. Si $U = X$, entonces $B = X$ es el subcontinuo buscado y termina la prueba, así que supongamos que $U \subsetneq X$. Como X es un espacio normal, existe V subconjunto abierto tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Observar que $V \neq X$, ya que $V \subseteq U \subsetneq X$. Como A es conexo y $A \subseteq \overline{V}$, existe una componente B de \overline{V} tal que $A \subseteq B$. Por el Teorema 2.6, se tiene que $B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, y como $A \subseteq V$, se sigue que $A \neq B$. Finalmente, observemos que B es compacto (ya que B es un cerrado de X y X es compacto), conexo y no vacío, es decir, B es un subcontinuo de U .

(b) Sean $p \in X$ y $U \subsetneq X$ abierto tal que $p \in U$. Como $\{p\}$ es un subcontinuo propio de X tal que $\{p\} \subseteq U$, por (a), existe B subcontinuo de U tal que $\{p\} \subsetneq B$. Por lo tanto, B es el subcontinuo propio de X buscado. \square

Si X es un espacio métrico, entenderemos por un **hiperespacio** de X a una colección de subconjuntos de X con alguna propiedad en particular. Por ejemplo, podemos considerar el hiperespacio de cerrados de X

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}.$$

Otros hiperespacios que se consideran en este trabajo son:

- $2^X = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto}\}$, conocido como el hiperespacio de compactos de X .
- $C(X) = \{A \in CL(X) : A \text{ es compacto y conexo}\}$, que se conoce como el hiperespacio de subcontinuos de X .
- $F_1(X) = \{A \in CL(X) : |A| = 1\}$, que se conoce como el espacio de singulares de X .

Observación 2.8. En el caso de que X sea compacto, los hiperespacios $CL(X)$ y 2^X coinciden, esto es, $CL(X) = 2^X$.

Sea X un espacio métrico. Si $x \in X$ y $A \in CL(X)$, definimos y denotamos la distancia del punto x al conjunto A como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Para cualquier $r > 0$ y $A \in CL(X)$, denotamos la **nube** alrededor de A y radio r como

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

Es posible dotar a $CL(X)$ de una métrica específica, llamada la métrica de Hausdorff.

Definición 2.9. Si X es un espacio métrico con métrica acotada d , la **métrica de Hausdorff** para $CL(X)$ inducida por d , denotada por H_d , para cada $A, B \in CL(X)$ es

$$H_d(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}.$$

Observación 2.10. (1) La condición de que la métrica d sea acotada nos asegura que el conjunto que define a $H_d(A, B)$ no es vacío (si $k > 0$ es una cota superior para d , entonces $A \subseteq N(k+1, B)$ y $B \subseteq N(k+1, A)$) y por ende su ínfimo existe, con lo cual $H_d(A, B)$ siempre está definida.

(2) Si $H_d(A, B) < \varepsilon$, entonces $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$. En efecto, si $H_d(A, B) < \varepsilon$, entonces ε no es cota inferior del conjunto $\{r > 0 : A \subseteq N(r, B) \text{ y } B \subseteq N(r, A)\}$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que $A \subseteq N(\delta, B)$, $B \subseteq N(\delta, A)$ y $\delta < \varepsilon$. Luego, se tiene que $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$.

(3) El recíproco del inciso anterior se cumple cuando A y B son compactos. En efecto, supongamos que $A \subseteq N(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq N(\varepsilon, A)$. Entonces $d(a, B) < \varepsilon$ para cada $a \in A$, y $d(b, A) < \varepsilon$ para cada $b \in B$. Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = d(x, B)$ y $g(x) = d(x, A)$. Como f y g son continuas y A y B son compactos, entonces f y g alcanzan su máximo, es decir, existen puntos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que $d(a_0, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\} < \varepsilon$ y $d(b_0, A) = \max\{d(b, A) : b \in B\} < \varepsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $\max\{d(a_0, B), d(b_0, A)\} < \delta < \varepsilon$, entonces $A \subseteq N(\delta, B)$ y $B \subseteq N(\delta, A)$, con lo cual $H_d(A, B) \leq \delta < \varepsilon$.

Los hiperespacios $CLC(X)$, 2^X , $C(X)$, $F_n(X)$ y $F(X)$ adquirirán la métrica de subespacio de $CL(X)$. La colección $CL(X)$ también puede dotarse de una topología específica, denominada la topología de Vietoris, que mencionamos a continuación:

Definición 2.11. Sea (X, τ) un espacio topológico. La **topología de Vietoris** T_V para $CL(X)$ es la topología más pequeña con las siguientes propiedades:

- (1) Si U es un abierto de (X, τ) , entonces $\{A \in CL(X) : A \subseteq U\}$ es un abierto de $(CL(X), T_V)$.
- (2) Si B un es cerrado de (X, τ) , entonces $\{A \in CL(X) : A \subseteq B\}$ es un cerrado de $(CL(X), T_V)$.

Nuevamente, los hiperespacios $CLC(X)$, 2^X , $C(X)$, $F_n(X)$ y $F(X)$ tendrán la topología de subespacio heredada por la topología de Vietoris en $CL(X)$. Resulta natural preguntarse si la métrica de Hausdorff en $CL(X)$ induce la topología de Vietoris. La respuesta es afirmativa cuando y solo cuando X es un espacio métrico compacto, como demuestra en [12, Teorema 1.19].

Teorema 2.12. [12, Corolarios 1.29 y 1.31] *Si X es un espacio métrico compacto, entonces 2^X y $C(X)$ son compactos.*

Definición 2.13. Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Una **función de Whitney** para \mathcal{H} es una función continua $\omega : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

- (1) Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$ con $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se tiene que $\omega(A) < \omega(B)$.
- (2) $\omega(A) = 0$ si y solo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.

Observación 2.14. (1) El primer inciso de la definición anterior es equivalente a que $\omega : (\mathcal{H}, \subseteq) \rightarrow ([0, \infty), \leq)$ como función entre conjuntos parcialmente ordenados sea estrictamente creciente.

- (2) Si $\omega : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$ es una función de Whitney para \mathcal{H} y $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$, entonces $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$ es una función de Whitney para \mathcal{N} .

Las funciones de Whitney están estrechamente relacionadas con la estructura de arco en los hiperespacios, y su importancia radica en que siempre es posible construir una de estas funciones en cualquier hiperespacio de un compacto.

Teorema 2.15. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces cualquier hiperespacio de X tiene una función de Whitney.*

Demostración. Si ω es una función de Whitney para $CL(X)$ y $\mathcal{H} \subseteq CL(X)$, por (2) de la Observación 2.14, $\omega \upharpoonright_{\mathcal{H}}$ será una función de Whitney para \mathcal{H} . Así que bastará probar que existe una función de Whitney para $CL(X)$. Para ello, observemos que X es separable (véase [12, Lema 1.40]), así que tomemos $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de X . Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ como $f_n(x) = \frac{1}{1+d(z_n, x)}$. Ahora defínase para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\omega_n : CL(X) \rightarrow [0, 1]$ como $\omega_n(A) = \text{diám}(f_n(A))$. Finalmente, definamos $\omega : CL(X) \rightarrow [0, 1]$ como

$$\omega(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \omega_n(A).$$

Observemos que para todo $A \in CL(X)$, $0 \leq \omega_n(A) \leq 1$, con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \omega_n(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \omega_n(A)$ converge por el criterio de comparación, por lo que ω está bien definida.

Veamos que ω es una función de Whitney para $CL(X)$. Observemos que $\omega_n = \text{diám} \circ f_n^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que los lemas [12, Lema 1.39] y [12, Lema 1.32] implican que ω_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Criterio M de Weierstrass, se tiene que ω es continua.

Ahora sean $A, B \in CL(X)$ con $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Como $A \subseteq B$, se tiene que $f_n(A) \subseteq f_n(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $\omega_n(A) = \text{diám } f_n(A) \leq \text{diám } f_n(B) = \omega_n(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para comprobar que $\omega(A) < \omega(B)$, será suficiente probar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\omega_m(A) < \omega_m(B)$. Para ello, sean $p \in B \setminus A$ y $r = \frac{1}{2}d(p, A)$. Notemos que $r > 0$, ya que A es cerrado y $p \notin A$. Como $p \in X = \overline{Z}$, entonces $B(p, r) \cap Z \neq \emptyset$. Sea $z_m \in B(p, r) \cap Z$. Dado que $d(z_m, p) < r$, se tiene que

$$f_m(p) = \frac{1}{1+d(z_m, p)} > \frac{1}{1+r}. \quad (1)$$

Ahora, como $d(p, A) - d(z_m, A) \leq d(p, z_m) < r$, se tiene que $r + d(z_m, A) > d(p, A) = 2r$, lo que implica que $d(z_m, A) > r$, con lo cual

$$f_m(a) = \frac{1}{1+d(z_m, a)} < \frac{1}{1+r}. \quad (2)$$

para todo $a \in A$. Combinando (1) y (2), se tiene que

$$\sup f_m(A) \leq \frac{1}{1+r} < f_m(p). \quad (3)$$

Pero como $p \in B$, se deduce que

$$\sup f_m(A) < \sup f_m(B). \quad (4)$$

Por otro lado, como $A \subseteq B$, se cumple que $f_m(A) \subseteq f_m(B)$, con lo cual

$$\inf f_m(B) \leq \inf f_m(A). \quad (5)$$

Se sigue de (4) y (5) que $\omega_m(A) = \text{diám } f_m(A) < \text{diám } f_m(B) = \omega_m(B)$, lo que prueba que $\omega(A) < \omega(B)$.

Finalmente, veamos que ω satisface que $\omega(A) = 0$ si y solo si $A \in F_1(X)$. Así pues, sea $A \in CL(X)$. Supongamos que $A \in F_1(X)$, digamos, $A = \{x\}$. Luego, $\omega_n(A) = \text{diám } f_n(A) = \text{diám } \{f_n(x)\} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\omega(A) = 0$. Ahora supongamos que $A \notin F_1(X)$. Sean $x, y \in A$ con $x \neq y$, y sea $r = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. Como Z es denso en X , existe $z_m \in B(x, r) \cap Z$. Notemos que $z_m \notin B(y, r)$ (de lo contrario, $d(x, y) < 2r$, lo que es una contradicción), lo que implica que $f_m(x) \neq f_m(y)$. Con esto, $\omega_m(A) = \text{diám } f_m(A) > 0$, luego, $\omega(A) > 0$.

De todo lo anterior, se concluye que ω es una función de Whitney, lo que prueba el teorema. \square

3 Arcos ordenados en $C(X)$

Gracias a la estructura de \mathbb{R} , se sabe que $([0, 1], \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. En un arco C , es natural preguntarse si los homeomorfismos del intervalo $[0, 1]$ con C preservan el orden, y de ser así el caso, podríamos “ordenar” a los elementos de un arco. La respuesta es afirmativa, basta definir el siguiente orden en C : si $h : [0, 1] \rightarrow C$ es un homeomorfismo, defínase

$$h(p) \leq h(q) \text{ si y solo si } p \leq q.$$

En el caso de los hiperespacios, la relación de contención “ \subseteq ” es de orden parcial. Sin embargo, cuando hablamos de un arco α en un hiperespacio \mathcal{H} , entenderemos que el orden parcial en \mathcal{H} restringido a α coincide con el orden total del arco α . Esto queda establecido en la Definición 3.2, pero antes definamos el concepto de red:

Definición 3.1. Una colección \mathcal{N} de conjuntos es una **red** o nido si para cualesquiera $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ se cumple que $N_1 \subseteq N_2$ o bien $N_2 \subseteq N_1$.

Una red desde A_0 hasta A_1 es una red \mathcal{N} tal que $A_0, A_1 \in \mathcal{N}$ y $A_0 \subseteq N \subseteq A_1$ para cualquier $N \in \mathcal{N}$.

Definición 3.2. Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$. Un **arco ordenado** en \mathcal{H} es un arco en \mathcal{H} que es también una red.

Una red compacta $\mathcal{N} \subseteq 2^X$ es una red que es también un subconjunto compacto de 2^X .

Lema 3.3. Sean X un espacio métrico compacto, $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ y ω una función de Whitney para \mathcal{H} . Si \mathcal{N} es una red compacta en \mathcal{H} , entonces $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos que $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$ es inyectiva: sean $F, G \in \mathcal{N}$ con $F \neq G$. Por ser \mathcal{N} una red, se tiene que $F \subseteq G$ o bien $G \subseteq F$, lo que implica que $\omega(F) < \omega(G)$ o bien $\omega(G) < \omega(F)$. En cualquier caso, $\omega(F) \neq \omega(G)$. Así, $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$ es inyectiva. Luego, es posible restringir el codominio de $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$ a $\omega(\mathcal{N})$ para tener una función biyectiva. Además, $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$ es continua, ya que ω lo es, y como \mathcal{N} es compacto, concluimos que $\omega \upharpoonright_{\mathcal{N}}$ es un homeomorfismo. \square

Una red \mathcal{M} desde A_0 hasta A_1 es maximal si no existe \mathcal{N} red desde A_0 hasta A_1 tal que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N}$.

Lema 3.4. Sea X un espacio métrico compacto y sean $A_0, A_1 \in C(X)$ con $A_0 \subseteq A_1$. Si \mathcal{M} es una red maximal en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1 , entonces \mathcal{M} es compacto.

Demostración. Dado que $\mathcal{M} \subseteq C(X)$ y $C(X)$ es compacto, bastará probar que \mathcal{M} es un cerrado de $C(X)$. Para ello, sea $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{M} que converge a $A \in C(X)$ con respecto a la métrica de Hausdorff. Probaremos que $A \in \mathcal{M}$. Veamos primero que $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es una red. Como \mathcal{M} es una red, solo resta verificar que si $M \in \mathcal{M}$, entonces $M \subseteq A$ o $A \subseteq M$. Así pues, sea $M \in \mathcal{M}$. Como \mathcal{M} es una red y $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en \mathcal{M} , se tienen dos casos:

- **Caso 1:** $M \subseteq M_n$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$: en este caso, veamos que $K = \{B \in CL(X) : M \subseteq B\}$ es cerrado en $CL(X)$. Para ello, sea $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en K que converge a $L \in CL(X)$;

veamos que $L \in K$, es decir, que $M \subseteq L$. Por la Proposición ??, bastará probar que $M \subseteq \limsup L_n$. Sea $x \in M$. Como $M \subseteq L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in L_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, si U es un entorno de x , entonces $U \cap L_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $x \in \limsup L_n = L$. Esto prueba que K es cerrado en $CL(X)$. Ahora bien, como la sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A , se cumple que $A \in K$, es decir, $M \subseteq A$.

- **Caso 2:** $M_n \subseteq M$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$: en este caso, observemos que el Teorema 2.12 implica que $C(M)$ es compacto, y como la sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A , se tiene que $A \in C(M)$, en particular, $A \subseteq M$.

De ambos casos, se concluye que $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es una red. Ahora observemos que $A_0 \subseteq M_n \subseteq A_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $A_0 \subseteq A \subseteq A_1$. Así, hemos probado que $\mathcal{M} \cup \{A\}$ es una red desde A_0 hasta A_1 . Por la maximalidad de \mathcal{M} , se concluye que $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{A\}$, es decir, $A \in \mathcal{M}$. \square

Lema 3.5. *Sea X un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$. Si \mathcal{M} es una red maximal en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1 , entonces \mathcal{M} es un arco desde A_0 hasta A_1 .*

Demostración. Sea ω una función de Whitney para $C(X)$ (la cual existe por el Teorema 2.15). Sean $t_0 = \omega(A_0)$ y $t_1 = \omega(A_1)$. Como $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$, se sigue que $t_0 < t_1$. Además, como \mathcal{M} es una red desde A_0 hasta A_1 y $A_0 \neq A_1$, se sigue que $\omega(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$. Más aún, por el Lema 3.4 se sabe que \mathcal{M} es compacto, y por el Lema 3.3, se tiene que \mathcal{M} es homeomorfo a $\omega(\mathcal{M})$. Así que para demostrar que \mathcal{M} es un arco, será suficiente demostrar que $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$. Para ello, supongamos que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Entonces existe $x \in [t_0, t_1] \setminus \omega(\mathcal{M})$. Observar que $t_0 \neq x \neq t_1$, ya que $t_0, t_1 \in \omega(\mathcal{M})$. Definamos

$$S_0 = [t_0, x] \cap \omega(\mathcal{M}) \text{ y } S_1 = [x, t_1] \cap \omega(\mathcal{M}).$$

Notar que $S_0 \neq \emptyset$, ya que $t_0 \in S_0$. Sea $s_0 = \sup S_0$. Como S_0 es un cerrado de \mathbb{R} , entonces $s_0 \in S_0$, esto es, $s_0 \in \omega(\mathcal{M})$ y $t_0 \leq s_0 < x$. De igual forma, $S_1 \neq \emptyset$, ya que $t_1 \in S_1$. Sea $s_1 = \inf S_1$. Como S_1 es un cerrado de \mathbb{R} , entonces $s_1 \in S_1$, esto es, $s_1 \in \omega(\mathcal{M})$ y $x < s_1 \leq t_1$. Observemos que $s_0 < s_1$ y $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Sean $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ tales que $\omega(M_0) = s_0$ y $\omega(M_1) = s_1$. Dado que \mathcal{M} es una red, $\omega(M_0) < \omega(M_1)$ y ω es una función de Whitney, se sigue que $M_0 \subsetneq M_1$. Además, $\mathcal{M} \subseteq C(X)$, lo que quiere decir que M_0 y M_1

son continuos. Como M_0 es un subcontinuo propio de M_1 , por el Teorema 2.7 (a), existe un subcontinuo propio B de M_1 tal que $M_0 \subsetneq B$.

Veamos ahora que $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red. Como \mathcal{M} es una red, solo resta verificar que si $M \in \mathcal{M}$, entonces $M \subseteq B$ o $B \subseteq M$. Así pues, sea $M \in \mathcal{M}$. Dado que $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$, se tiene que $\omega(M) \leq s_0$ o $\omega(M) \geq s_1$.

- Si $\omega(M) \leq s_0 = \omega(M_0)$, dado que \mathcal{M} es una red, se sigue que $M \subseteq M_0$; y como $M_0 \subseteq B$, se tiene que $M \subseteq B$.
- Si $\omega(M) \geq s_1 = \omega(M_1)$, usando nuevamente que \mathcal{M} es una red, se tiene que $M_1 \subseteq M$; pero $B \subseteq M_1$, por lo que $B \subseteq M$.

De ambos incisos se concluye que $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red. Pero $B \in C(X)$, con lo cual $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red en $C(X)$. En suma, el hecho de que $s_0, s_1 \in \omega(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$ implica que $A_0 \subseteq M_0 \subseteq B \subseteq M_1 \subseteq A_1$. Hemos probado que $\mathcal{M} \cup \{B\}$ es una red en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1 . Por la maximalidad de \mathcal{M} , se concluye que $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{B\}$, es decir, $B \in \mathcal{M}$. Sin embargo, dado que $M_0 \subsetneq B \subsetneq M_1$, se tiene que $s_0 < \omega(B) < s_1$, lo que contradice el hecho de que $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Esta contradicción proviene de suponer que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Por lo tanto, se concluye que $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$, lo que prueba el lema. \square

Lema 3.6. *Si X es un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in C(X)$ son tales que $A_0 \subseteq A_1$, entonces existe una red maximal en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1 .*

Demostración. Defínase

$$\Lambda = \{\mathcal{N} \subseteq C(X) : \mathcal{N} \text{ es una red desde } A_0 \text{ hasta } A_1\}.$$

Observar que $\Lambda \neq \emptyset$, ya que $\{A_0, A_1\} \in \Lambda$. Además, (Λ, \subseteq) es un conjunto parcialmente ordenado. Veamos que toda cadena en Λ tiene una cota superior en Λ . Sea \mathcal{C} una cadena en Λ . Verifiquemos que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de \mathcal{C} en Λ .

- Veamos primero que $\bigcup \mathcal{C}$ es una red. Sean $E, F \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tales que $E \in C_1$ y $F \in C_2$. Por ser \mathcal{C} una cadena, se cumple que $C_1 \subseteq C_2$ o $C_2 \subseteq C_1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $C_1 \subseteq C_2$, entonces $E, F \in C_2$. Por ser C_2 una red, se tiene que $E \subseteq F$ o $F \subseteq E$. Así, hemos probado que $\bigcup \mathcal{C}$ es una red.

- Además, para cada $C \in \mathcal{C}$ se cumple que $A_0 \subseteq C \subseteq A_1$, por lo que $A_0 \subseteq \bigcup \mathcal{C} \subseteq A_1$.
- Finalmente, es claro que $C \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{C} \in \Lambda$ y $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de \mathcal{C} . Así, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal \mathcal{M} en Λ . Finalmente, observar que \mathcal{M} es una red maximal en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1 . \square

Los lemas anteriores son útiles para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.7. *Sea X un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in C(X)$ tales que $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$. Entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1 .*

Demostración. Por el Lema 3.6, existe una red maximal \mathcal{M} en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1 . Ahora, por el Lema 3.5, \mathcal{M} es un arco desde A_0 hasta A_1 . Por la Definición 3.2, se concluye que \mathcal{M} es un arco ordenado en $C(X)$ desde A_0 hasta A_1 . \square

4 Arco conexidad de 2^X y $C(X)$

Lema 4.1. *Sea X un espacio métrico compacto y \mathcal{A} un subcontinuo de 2^X con más de un punto. Si \mathcal{A} es una red, entonces \mathcal{A} es también un arco ordenado.*

Demostración. Sea ω una función de Whitney para 2^X (la cual existe por el Teorema 2.15). Como \mathcal{A} es una red compacta en 2^X , por el Lema 3.3, se tiene que $\omega \upharpoonright_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo. Así, $\omega(\mathcal{A})$ es un continuo, que resulta ser un intervalo cerrado y acotado de \mathbb{R} con más de un punto. Por consiguiente, \mathcal{A} es un arco, y por ser \mathcal{A} una red, se concluye que \mathcal{A} es un arco ordenado. \square

Teorema 4.2. *Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son arco conexos.*

Demostración. Primero probaremos la arco conexidad de 2^X : sea $K \in 2^X$ con $K \neq X$ y sea A_0 una componente de K . Como $A_0, X \in C(X)$ y $A_0 \neq X$, el Teorema 3.7 nos asegura la existencia de un arco ordenado α en $C(X)$ desde A_0 hasta X . Sea h un homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre α tal que $h(0) = A_0$ y $h(1) = X$. Definamos $f : [0, 1] \rightarrow 2^X$ como $f(t) = K \cup h(t)$. Se tiene que f es continua por [12, Proposición 1.24]. Además, $f(0) = K$ y $f(1) = X$. Luego,

$f([0, 1])$ es un subcontinuo de 2^X con más de un punto. Más aún, el hecho de que α sea un arco ordenado implica que $f([0, 1])$ es una red desde K hasta X . Así, por el Lema 4.1, $f([0, 1])$ es un arco ordenado en 2^X desde K hasta X .

Hemos probado que para cualquier $K \in 2^X$ con $K \neq X$, existe un arco en 2^X entre K y X . Por el Lema 2.5, se concluye que 2^X es arco conexo.

Finalmente, probaremos que $C(X)$ es arco conexo. Si $A_0 \in C(X)$ con $A_0 \neq X$, por el Teorema 3.7, existe un arco en $C(X)$ desde A_0 hasta X . Nuevamente, el Lema 2.5 nos permite concluir que $C(X)$ es arco conexo. \square

Corolario 4.3. *Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son continuos arco conexos.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.2 y la Observación 2.4. \square

5 El cubo de Hilbert encajado en 2^X

Como consecuencia de la arco conexidad de 2^X , asegurada por el Teorema 4.2, veremos que 2^X contiene un cubo de Hilbert siempre que X sea un continuo. La prueba de este hecho se basa en la existencia de arcos en 2^X . Para enunciar y probar este resultado, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 5.1. [6, Lema 14.11] *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de $X \setminus \{p\}$ tales que:*

- (a) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, A_n tiene más de un punto.*
- (b) *$A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$.*
- (c) *$\lim A_n = \{p\}$.*

Teorema 5.2. *Si X es un continuo, entonces 2^X contiene un cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea $p \in X$. Por el Lema 5.1, existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de $X \setminus \{p\}$ que cumplen (a), (b) y (c) de dicho lema. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que A_n es un continuo; por el Teorema 4.2, existe un arco α_n en 2^{A_n} . Notar que $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es un cubo de Hilbert. Encajaremos $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ en 2^X de la siguiente manera: sea $(B_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Notar que $B_n \subseteq A_n$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que la sucesión $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\{p\}$ en 2^X . Definamos $h : \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n \rightarrow 2^X$ como

$$h((B_n)_{n=1}^{\infty}) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \cup \{p\}.$$

Veamos que h es continua e inyectiva.

Primero verificaremos que h es continua: para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $B^k = (B_n^k)_{n=1}^{\infty}$; sea $B = (B_n)_{n=1}^{\infty}$ y supongamos que la sucesión $\{B^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge en $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ a B . Veamos que $\{h(B^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge en 2^X a $h(B)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de la función diámetro ([12, Lema 1.39]), se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(A_n) = \text{diám}(\lim A_n) = \text{diám}(\{p\}) = 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diám}(A_n) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$.

Como $\{B^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge en $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ a B y la convergencia en $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es coordenada a coordenada, se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} B_1^k &= B_1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} B_2^k &= B_2, \\ &\vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} B_{N-1}^k &= B_{N-1}. \end{aligned}$$

Entonces existen K_1, \dots, K_{N-1} tales que:

$$\begin{aligned} \text{si } k \geq K_1, \text{ entonces } H_d(B_1^k, B_1) &< \varepsilon; \\ \text{si } k \geq K_2, \text{ entonces } H_d(B_2^k, B_2) &< \varepsilon; \\ &\vdots \\ \text{si } k \geq K_{N-1}, \text{ entonces } H_d(B_{N-1}^k, B_{N-1}) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Defínase $K = \max\{K_1, \dots, K_{N-1}\}$. Sea $n \geq N$.

Afirmación: $H_d(B_n^k, B_n) < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$: en efecto, sea $k \in \mathbb{N}$. Como $B_n, B_n^k \in 2^{A_n}$, por (3) de la Observación 2.10 bastará verificar que $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$ y $B_n \subseteq N(\varepsilon, B_n^k)$. Veamos que $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$. Sean $x \in B_n^k$

y $b \in B_n$. Como $B_n^k \subseteq A_n$ y $B_n \subseteq A_n$, entonces $x, b \in A_n$, de donde $d(x, B_n) \leq d(x, b) \leq \text{diám}(A_n) < \varepsilon$, con lo cual $x \in N(\varepsilon, B_n)$. Luego, $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$. Análogamente se prueba que $B_n \subseteq N(\varepsilon, B_n^k)$, lo que concluye que $H_d(B_n^k, B_n) < \varepsilon$.

Hemos probado que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $k \geq K$, se cumple que $H_d(B_n^k, B_n) < \varepsilon$. Veamos que $H_d(h(B^k), h(B)) < \varepsilon$ para todo $k \geq K$. Sea $k \geq K$. Por (3) de la Observación 2.10, bastará probar que $h(B^k) \subseteq N(\varepsilon, h(B))$ y $h(B) \subseteq N(\varepsilon, h(B^k))$. Sea $x \in h(B^k) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^k) \cup \{p\}$. Si $x = p$, entonces $x \in h(B) \subseteq N(\varepsilon, h(B))$, así que supongamos que $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^k$; entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n^k$. Como $B_n^k \subseteq N(\varepsilon, B_n)$, se cumple que $d(x, B_n) < \varepsilon$. Pero $B_n \subseteq h(B)$; se sigue que $d(x, h(B)) < \varepsilon$, es decir, $x \in N(\varepsilon, h(B))$. Esto prueba que $h(B^k) \subseteq N(\varepsilon, h(B))$. Análogamente se prueba que $h(B) \subseteq N(\varepsilon, h(B^k))$. Por lo tanto, $H_d(h(B^k), h(B)) < \varepsilon$ siempre que $k \geq K$. Esto prueba la continuidad de h .

Ahora veamos que h es inyectiva: sean $(B_n)_{n=1}^{\infty}, (C_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ con $(B_n)_{n=1}^{\infty} \neq (C_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \neq C_m$. Como $B_m \subseteq A_m, C_m \subseteq A_m$ y $A_m \cap A_n = \emptyset$ si $n \neq m$, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Ahora, como $p \notin A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $p \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, con lo cual $(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \cup \{p\} \neq (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cup \{p\}$, es decir, $h((B_n)_{n=1}^{\infty}) \neq h((C_n)_{n=1}^{\infty})$. Esto prueba que h es inyectiva.

De lo anterior, se concluye que $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ está encajado en 2^X . \square

6 Arcos ordenados en 2^X

En el Teorema 3.7 del capítulo anterior, dados $A_0, A_1 \in C(X)$ con $A_0 \neq A_1$, vimos una condición suficiente para la existencia de arcos ordenados entre A_0 y A_1 . La condición era simplemente que $A_0 \subseteq A_1$. Sin embargo, si ahora $A_0, A_1 \in 2^X$, la condición no siempre es suficiente para asegurar la existencia de arcos ordenados en 2^X desde A_0 hasta A_1 . Por ejemplo, consideremos $X = [0, 1]$, $A_0 = \{0\}$ y $A_1 = \{0, 1\}$. Aquí, $A_0, A_1 \in 2^X$ y $A_0 \subseteq A_1$, pero la única red desde A_0 hasta A_1 es $\{\{0\}, \{0, 1\}\}$, la cual no es homeomorfa a $[0, 1]$ y por tanto, no es un arco. Luego, no existe arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1 .

A partir de ahora, cuando digamos que α es un arco ordenado desde A_0

hasta A_1 , entenderemos que $A_0 \subseteq A_1$ y que A_0 y A_1 son los puntos extremos de α . Hay que notar que un arco ordenado desde A_0 hasta A_1 no necesariamente es un arco ordenado desde A_1 hasta A_0 .

Lema 6.1. *Sea X un espacio métrico compacto y sean $M_0, M_1 \in 2^X$ tales que $M_0 \subseteq M_1, M_0 \neq M_1$ y cada componente de M_1 intersecta a M_0 . Entonces existe $C \in 2^X$ tal que $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$ y cada componente de C intersecta a M_0 .*

Demostración. Dado que $M_0 \subsetneq M_1$, tomemos $p \in M_1 \setminus M_0$. Sea K_1 la componente de M_1 que contiene a p . Por hipótesis, $K_1 \cap M_0 \neq \emptyset$. Sea $q \in K_1 \cap M_0$ y sea K_0 la componente de M_0 que tiene a q . Como K_0 es conexo, $q \in K_0 \cap K_1$ y $K_0 \subseteq M_1$, entonces $K_0 \subseteq K_1$. Más aún, $K_0 \subseteq K_1 \setminus \{p\}$, ya que $K_0 \subseteq M_0$ y $p \notin M_0$. Notemos que K_0 es compacto, ya que $K_0 \subseteq X$, X es compacto y K_0 es cerrado en X . Así, K_0 es un subcontinuo propio de K_1 . Por el Teorema 2.7 (a), existe B subcontinuo de $K_1 \setminus \{p\}$ tal que $K_0 \subsetneq B$. Sea $C = M_0 \cup B$. Obsérvese que C es un compacto no vacío de X , es decir, $C \in 2^X$. Además, $M_0 \subseteq C \subseteq M_1$. Como $K_0 \subsetneq B$, entonces $B \not\subseteq M_0$, lo que implica que $M_0 \subsetneq M_0 \cup B$, es decir, $M_0 \neq C$. Para ver que $C \neq M_1$, simplemente notemos que $p \in M_1$ y $p \notin C$. Solo resta verificar que cada componente de C intersecta a M_0 . Para ello, sea L una componente de C . Se tienen dos casos:

- (1) Si $L \cap B = \emptyset$, entonces $L \subseteq M_0$, y como $L \neq \emptyset$, se tiene que $L \cap M_0 \neq \emptyset$.
- (2) Si $L \cap B \neq \emptyset$, dado que $B \subseteq C$ y B es conexo, se tiene que $B \subseteq L$. Pero $K_0 \subseteq B$, así que $K_0 \subseteq L$. Como $K_0 \neq \emptyset$ y $K_0 \subseteq M_0$, se sigue que $L \cap M_0 \neq \emptyset$.

En ambos casos se concluye que $L \cap M_0 \neq \emptyset$, lo que completa la prueba. \square

Teorema 6.2. *Sean X un espacio métrico compacto y $A_0, A_1 \in 2^X$ con $A_0 \neq A_1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *Existe un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1 .*
- (b) *$A_0 \subseteq A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0 .*

Demostración. [(a) \Rightarrow (b)] Supongamos que existe α un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1 . Entonces $A_0 \subseteq A_1$, así que solo resta verificar que todas las componentes de A_1 intersectan a A_0 . Supongamos por contradicción que

existe una componente K de A_1 tal que $K \cap A_0 = \emptyset$. Como $A_0 \subseteq A_1$, por el Teorema del cable cortado ([12, Teorema 1.7]), se tiene que K y A_0 están separados en A_1 . Entonces existen E y F subconjuntos de X tales que $A_1 = E \cup F$, $A_0 \subseteq E$ y $K \subseteq F$. Definamos $\mathcal{E} = \{A \in \alpha : A \subseteq E\}$ y $\mathcal{F} = \{A \in \alpha : A \cap F \neq \emptyset\}$. Observemos lo siguiente:

- $\mathcal{E} \neq \emptyset$, ya que $A_0 \in \mathcal{E}$. También $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ya que $A_1 \in \mathcal{F}$.
- $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} = \alpha$. En efecto, si $A \in \alpha$, entonces $A \subseteq A_1 = E \cup F$. Si $A \subseteq E$, entonces $A \in \mathcal{E}$. Si $A \not\subseteq E$, entonces $A \cap F \neq \emptyset$, de donde $A \in \mathcal{F}$.
- $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset$, ya que $E \cap F = \emptyset$.
- \mathcal{E} y \mathcal{F} son cerrados en α . En efecto, como $E \cup F = A_1$ es cerrado y E y F están separados, entonces E y F son cerrados. Luego, \mathcal{E} es cerrado en α (por la Definición 2.11). Por otro lado, $X \setminus F$ es abierto en X , de donde $\{A \in \alpha : A \subseteq X \setminus F\}$ es abierto en α , con lo cual $\mathcal{F} = \alpha \setminus \{A \in \alpha : A \subseteq X \setminus F\}$ es cerrado en α .

Los incisos anteriores implican que α es desconexo. Pero esto contradice el hecho de que α es un arco. Por lo tanto, concluimos que toda componente de A_1 intersecta a A_0 .

[(b) \Rightarrow (a)] Supongamos (b) y definamos

$$\Lambda = \{\mathcal{N} \subseteq 2^X : \mathcal{N} \text{ es una red compacta desde } A_0 \text{ hasta } A_1 \text{ y para cada } N \in \mathcal{N}, \text{ cada componente de } N \text{ intersecta a } A_0\}.$$

Observar que $\Lambda \neq \emptyset$, ya que $\{A_0, A_1\} \in \Lambda$. Además, (Λ, \subseteq) es un conjunto parcialmente ordenado. Veamos que toda cadena en Λ tiene una cota superior en Λ . Sea \mathcal{C} una cadena en Λ . De la misma forma que en el Lema 3.6, se verifica que $\bigcup \mathcal{C}$ es una red desde A_0 hasta A_1 y es una cota superior para \mathcal{C} . Para ver que $\bigcup \mathcal{C} \in \Lambda$, solo resta demostrar que para todo $N \in \bigcup \mathcal{C}$, cada componente de N intersecta a A_0 . Sea $N \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existe $\mathcal{N} \in \mathcal{C}$ tal que $N \in \mathcal{N}$. Como $\mathcal{N} \in \Lambda$, se cumple que cada componente de N intersecta a A_0 .

Luego, por el Lema de Zorn, Λ tiene un elemento maximal \mathcal{M} . Observar que \mathcal{M} es una red compacta desde A_0 hasta A_1 . Para ver que \mathcal{M} es un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1 , solo resta probar que \mathcal{M} es un arco. Para ello, sea ω una función de Whitney para 2^X (la cual existe por el Teorema

2.15). Sean $t_0 = \omega(A_0)$ y $t_1 = \omega(A_1)$. Como $A_0 \subseteq A_1$ y $A_0 \neq A_1$, se sigue que $t_0 < t_1$. Además, como \mathcal{M} es una red desde A_0 hasta A_1 y $A_0 \neq A_1$, se tiene que $\omega(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$. Más aún, \mathcal{M} es compacto. Por el Lema 3.3, se tiene que \mathcal{M} es homeomorfo a $\omega(\mathcal{M})$. Así que para demostrar que \mathcal{M} es un arco, será suficiente demostrar que $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$. Para ello, supongamos que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Entonces existe $x \in [t_0, t_1] \setminus \omega(\mathcal{M})$. Observar que $t_0 \neq x \neq t_1$, ya que $t_0, t_1 \in \omega(\mathcal{M})$. Definamos

$$S_0 = [t_0, x] \cap \omega(\mathcal{M}) \text{ y } S_1 = [x, t_1] \cap \omega(\mathcal{M}).$$

Notemos que $S_0 \neq \emptyset$, ya que $t_0 \in S_0$. Sea $s_0 = \sup S_0$. Como S_0 es cerrado en \mathbb{R} , entonces $s_0 \in S_0$, esto es, $s_0 \in \omega(\mathcal{M})$ y $t_0 \leq s_0 < x$. De igual forma, $S_1 \neq \emptyset$, ya que $t_1 \in S_1$. Sea $s_1 = \inf S_1$. Como S_1 es cerrado en \mathbb{R} , entonces $s_1 \in S_1$, esto es, $s_1 \in \omega(\mathcal{M})$ y $x < s_1 \leq t_1$. Observemos que $s_0 < s_1$ y $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Sean $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ tales que $\omega(M_0) = s_0$ y $\omega(M_1) = s_1$. Dado que \mathcal{M} es una red, $\omega(M_0) < \omega(M_1)$ y ω es una función de Whitney, se sigue que $M_0 \subsetneq M_1$. Veamos que cada componente de M_1 intersecta a M_0 . Sea L una componente de M_1 . Como $M_1 \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \in \Lambda$, se tiene que $L \cap A_0 \neq \emptyset$. Además, dado que $M_0 \in \mathcal{M}$ y \mathcal{M} es una red desde A_0 hasta A_1 , se sigue que $A_0 \subseteq M_0$. Luego, $L \cap M_0 \neq \emptyset$. Por el Lema 6.1, existe $C \in 2^X$ tal que $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$ y cada componente de C intersecta a M_0 . Veamos que $C \in \mathcal{M}$; si probamos que $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Lambda$, por la maximalidad de \mathcal{M} , concluiremos lo deseado.

Afirmación 1: $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red: en efecto, como \mathcal{M} es una red, solo queda probar que si $M \in \mathcal{M}$, entonces $M \subseteq C$ o $C \subseteq M$. Sea $M \in \mathcal{M}$. Como $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$, entonces $\omega(\mathcal{M}) \leq s_0$ o $\omega(\mathcal{M}) \geq s_1$. Dado que \mathcal{M} es una red y ω una función de Whitney, en el primer caso se concluye que $M \subseteq M_0 \subseteq C$, mientras que en el segundo caso se concluye que $C \subseteq M_1 \subseteq M$.

Afirmación 2: $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red compacta: en efecto, $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red por la Afirmación 1, y es compacta por ser unión finita de compactos.

Afirmación 3: $\mathcal{M} \cup \{C\}$ es una red desde A_0 hasta A_1 . Esto se sigue del hecho de que \mathcal{M} es una red desde A_0 hasta A_1 y de que $A_0 \subseteq M_0 \subseteq C \subseteq M_1 \subseteq A_1$.

Afirmación 4: Cada componente de C intersecta a A_0 : en efecto, sea Q una componente de C , luego, $Q \cap M_0 \neq \emptyset$. Sea $z \in Q \cap M_0$ y sea Q_0 la componente de M_0 que tiene a z . Como Q_0 es un subconjunto conexo de M_1 que tiene a z , entonces $Q_0 \subseteq Q$. Ahora, como $M_0 \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \in \Lambda$, se tiene que $Q_0 \cap A_0 \neq \emptyset$. Luego, $Q \cap A_0 \neq \emptyset$.

De las cuatro afirmaciones anteriores, concluimos que $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \Lambda$, de donde $C \in \mathcal{M}$. Pero $M_0 \subsetneq C \subsetneq M_1$, lo que implica que $s_0 < \omega(C) < s_1$. Esto contradice el hecho de que $\omega(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Esta contradicción vino de suponer que $\omega(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$. Por lo tanto, $\omega(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$, lo que prueba que \mathcal{M} es un arco. Esto demuestra (a). \square

Si α es un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1 y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, diremos que α empieza en \mathcal{H} si $A_0 \in \mathcal{H}$. Cuando esto ocurra, diremos que α se queda en \mathcal{H} si $\alpha \subseteq \mathcal{H}$.

Corolario 6.3. Sean X un espacio métrico compacto y α un arco ordenado en 2^X . Si α empieza en $C(X)$, entonces α se queda en $C(X)$.

Demostración. Supongamos que α es un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta A_1 , donde $A_0 \in C(X)$. Veamos que $\alpha \subseteq C(X)$. Para ello, sea $B \in \alpha$ con $B \neq A_0$. Notemos que $A_0 \subseteq B$. Sea β el subarco de α desde A_0 hasta B . Como $\beta \subseteq \alpha$, entonces β es una red, es decir, β es un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta B . Por el Teorema 6.2, cada componente de B intersecta a A_0 . Pero A_0 es un subconjunto conexo de B , con lo cual B tiene solo una componente. Esto quiere decir que B es conexo, es decir, $B \in C(X)$. Esto prueba que $\alpha \subseteq C(X)$, como queríamos. \square

7 Arco conexidad local de 2^X y $C(X)$

Definición 7.1. Un espacio topológico Y es **localmente arco conexo en un punto** $p \in Y$ si para todo entorno U de p existe V un subconjunto abierto arco conexo de Y tal que $p \in V \subseteq U$. Decimos que un espacio topológico es **localmente arco conexo** si es localmente arco conexo en cada uno de sus puntos.

Definición 7.2. Un espacio topológico Y es **localmente conexo en un punto** $p \in Y$ si para todo entorno U de p , existe $V \subseteq Y$ abierto y conexo

tal que $p \in V \subseteq U$. Decimos que Y es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Un continuo localmente conexo es llamado un **continuo de Peano**.

Observación 7.3. Si un espacio topológico Y es localmente arco conexo en un punto $p \in Y$, entonces Y es localmente conexo en p . Como consecuencia, Y es localmente conexo siempre que Y sea localmente arco conexo.

Observación 7.4. La arco conexidad local y la conexidad local son propiedades topológicas.

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 6.2 y del Corolario 6.3.

Corolario 7.5. Si X es un continuo, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son localmente arco conexos en X .

Demostración. Verifiquemos primero la arco conexidad local de 2^X en X . Sea $U \subseteq 2^X$ un entorno de X . Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $X \in B_{H_d}(X, \varepsilon) \subseteq U$. Veamos que $B_{H_d}(X, \varepsilon)$ es un subespacio arco conexo de 2^X . Para ello, sea $A_0 \in B_{H_d}(X, \varepsilon)$ con $A_0 \neq X$. Por ser X conexo, se satisface (b) del Teorema 6.2 (con $A_1 = X$); luego, existe α un arco ordenado en 2^X desde A_0 hasta X . Veamos que $\alpha \subseteq B_{H_d}(X, \varepsilon)$. Sea $A \in \alpha$, entonces $A_0 \subseteq A$. Como $H_d(A_0, X) < \varepsilon$, se sigue que $X \subseteq N(A_0, \varepsilon) \subseteq N(A, \varepsilon)$. Por otro lado, $A \subseteq X \subseteq N(X, \varepsilon)$. Por (3) de la Observación 2.10, se tiene que $H_d(A, X) < \varepsilon$, es decir, $A \in B_{H_d}(X, \varepsilon)$.

Hemos probado que para todo $A_0 \in B_{H_d}(X, \varepsilon) \setminus \{X\}$ existe un arco en $B_{H_d}(X, \varepsilon)$ con puntos extremos A_0 y X . Por el Lema 2.5, se concluye que $B_{H_d}(X, \varepsilon)$ es arco conexa. Esto prueba la arco conexidad local de 2^X en X .

La prueba de la arco conexidad local de $C(X)$ en X se realiza de manera análoga al caso anterior, observando que ahora $A_0 \in C(X)$ y el Corolario 6.3 nos asegura que $\alpha \subseteq C(X)$. \square

Corolario 7.6. Si X es un continuo, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son localmente conexos en X .

Demostración. Es consecuencia del Corolario 7.5 y la Observación 7.3. \square

8 Homogeneidad de 2^X y $C(X)$

En esta sección, dado un continuo X , estudiaremos la homogeneidad de los hiperespacios 2^X y $C(X)$. Es conveniente recordar que un espacio topológico X es homogéneo si para cada $x, y \in X$ existe $h : X \rightarrow X$ homeomorfismo tal que $h(x) = y$.

Lema 8.1. [8, Teorema 2.67] *Sea X un continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) X es un continuo de Peano.
- (b) 2^X es un continuo de Peano.
- (c) $C(X)$ es un continuo de Peano.

Los siguientes teoremas caracterizan la homogeneidad de 2^X y de $C(X)$ cuando X es un continuo.

Teorema 8.2. *Sea X un continuo. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

- (a) 2^X es homogéneo.
- (b) X es un continuo de Peano.
- (c) 2^X es un cubo de Hilbert.

Demostración. [(a) \Rightarrow (b)] Supongamos que 2^X es homogéneo. Como X es un continuo, por el Corolario 4.2, 2^X es un continuo. Además, por el Corolario 7.6, 2^X es localmente conexo en X . Como 2^X es homogéneo, para cada $A \in 2^X$ existe un homeomorfismo que envía X en A . Luego, 2^X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, es decir, 2^X es localmente conexo y, por ende, es un continuo de Peano. Luego, por el Lema 8.1, X es un continuo de Peano.

[(b) \Rightarrow (c)] Es consecuencia del Teorema de Curtis-Schori (véase [6, Teorema 11.3]).

[(c) \Rightarrow (a)] Por [9, Teorema 3.6], los cubos de Hilbert son homogéneos. \square

Para el siguiente teorema, diremos que un arco A contenido en X es un arco libre si $A \setminus \{p, q\}$ es abierto de X , donde p y q son los puntos extremos de A .

Teorema 8.3. [6, Teorema 15.7] *Sea X un continuo. Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

- (a) $C(X)$ es homogéneo.
- (b) X es un continuo de Peano sin arcos libres.
- (c) $C(X)$ es un cubo de Hilbert.

Bibliografía

- [1] Barragán, F.; Romero, A.; Sánchez, S.; Grijalva, V., *Breve introducción a la métrica de Hausdorff*, Capítulo 3 en *Topología y sus aplicaciones 3* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.
- [2] Chaves, L., *Estudio del n -ésimo hiperespacio de un continuo*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 2 de febrero de 2018.
- [3] Córdova, V., *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada el 26 de agosto de 2011.
- [4] Escobedo, R.; López, M. de J.; Serapio, I., *Una breve introducción a los hiperespacios de conjuntos*, Capítulo 8 en *Topología y sus aplicaciones 3* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.
- [5] Grijalva, V., *Métrica de Hausdorff*, tesis de licenciatura en matemáticas aplicadas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, presentada en diciembre de 2013.
- [6] Illanes, A.; Nadler, S. B. Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

- [7] Iribarren, I., *Topología de espacios métricos*, Limusa, México, 2008.
- [8] Márquez, N., *Introducción a los continuos de Peano*, tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, presentada en julio de 2017.
- [9] Maya, D.; van Mill, J., *Continuos homogéneos*, Capítulo 10 en *Topología y sus aplicaciones 4* (Editores: Angoa, J.J., Escobedo, R., Ibarra, M.). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016.
- [10] Nadler, S. B. Jr., *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.
- [11] Nadler, S. B. Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in pure and Applied Math, Vol.49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.
- [12] Pérez, E., *Existencia de arcos ordenados en los hiperespacios $C(X)$ y 2^X* , tesis de licenciatura en matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas BUAP, presentada el 24 de junio de 2022.