axolote'

Editorial

Con gusto presentamos el número 19 de la revista de divulgación axolote esperando la encuentren interesante. Las contribuciones de este número están a cargo del Dr. Josip Slisko y del Dr. Agustín Conteras Carreto ambos profesores investigadores de la FCFM.
Las aportaciones llevan por título *''El rompecabezas geométrico con ocho cerillos: El engaño de algunas soluciones''* y *''El nacimiento de la función trigonométrica seno''*.

En esta ocasión la sección; *Para Pensar: frases célebres* está dedicada a *Sofía Kovalévskaya*, matemática y escritora rusa. La Fundación Sofía Kovalévskaya y la Sociedad Matemática Mexicana, en conjunto, anuncian cada año una convocatoria de una distinción (apoyo económico) que apoya la participación temprana de mujeres en la investigación matemática, promoviendo acciones que signifiquen una oportunidad de proyección y desarrollo académico, la convocatoria se puede revisar en la página de la SMM, y va dirigida a

(a) Mujeres que realizan estudios de doctorado o una estancia posdoctoral en cualquier campo de la matemática en una institución académica mexicana.
(b) Mujeres que realizan investigación en matemáticas, adscritas o comisionadas a una institución mexicana de educación superior o de investigación y que hayan obtenido el doctorado dentro de los cinco años previos a la fecha de emisión de esta Convocatoria.

También se encuentran las ya tradicionales secciones: para sonreir, divertirse y reflexionar; recomendación de libro, reseña de libro y poema de mayo-agosto. Queremos recordar a la comunidad que están invitados a enviar sus aportaciones a la revista. Son bienvenidas todas las aportaciones de divulgación de estudiantes y docentes.

El rompecabezas geométrico con ocho cerillos: El engaño de algunas soluciones

Dr. Josip Slisko
Profesor-Investigador
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Introducción

Recientemente hay muchos libros impresos y/o en el formato Kindle que presentan los rompecabezas con cerillos ("*matchstik puzzles*" en inglés). Para estar convencido, basta ver su presencia impresionante en el www.amazon.com.mx (véase Figura 1).

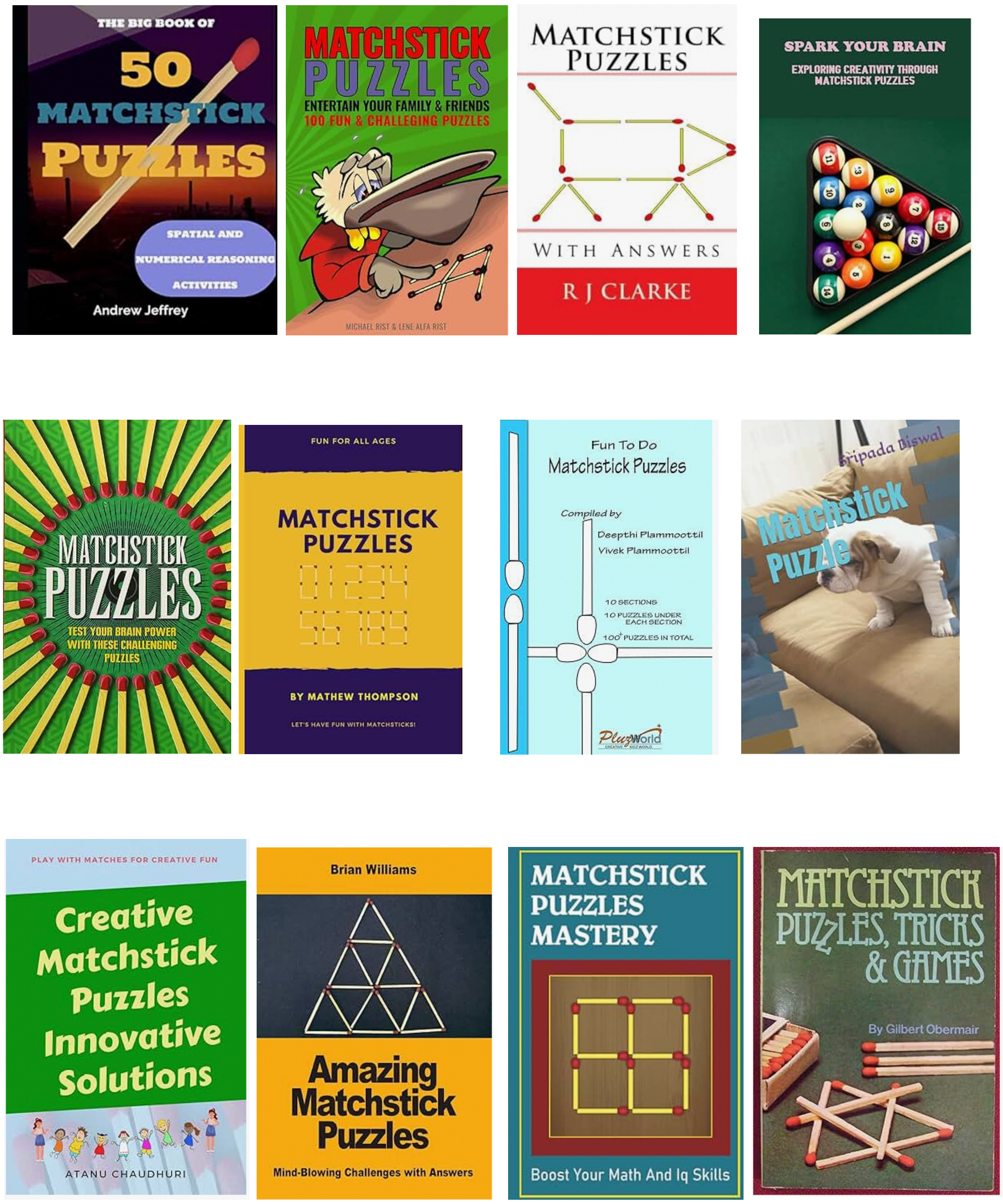


Figura 1. Las portadas de unos libros recientes dedicados a los rompecabezas con cerillos.

Tales rompecabezas, sean geométricos o aritméticos con números romanos y arábigos, no sirven solamente para los pasatiempos sino, aún más, para fomentar el pensamiento creativo, desde la educación matemática (Buckeye, 1971; Joshua, 1971; Genkin & Fomin, 1997; D'Amico, 1998; Posamentier & Poole, 2020) hasta los manuales para las habilidades en diferentes negocios (Plenert, 1995; Bothe, 2002;) o en el diseño arquitectónico (Laseu, 2000; Roberts *et al*., 2017).

Los rompecabezas con cerillos se recomiendan como una actividad mental útil en la prevención de la enfermedad de Alzheimer (Kosik, 2015; Small & Vorgan, 2023). Desde la investigación pionera de Katona (1940) sobre se usan para explorar los procesos del pensamiento creativo en la resolución de problemas (Stinessen, 1973; Gagne, 1980; Öllinger *et al*., 2006; Tseng *et al*., 2014).

El estreno del rompecabezas con ocho cerillos

El rompecabezas con ocho cerillos se publicó por primera vez en la revista "*Boy's life. The Boy Scouts' Magazine*" en el mes de mayo de 1917 (p. 42). Su formulación era:

> "Coloca 8 cerillos de tal manera que formen dos cuadrados y cuatro triángulos."

La "solución" (p. 43), ofrecida a los lectores de la revista, fue el siguiente dibujo:

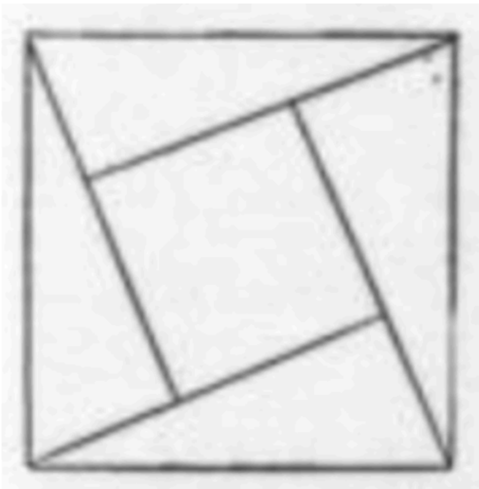


Figura 2. La "solución" del rompecabeza de ocho cerillos publicada en el año 1917.

Es fácil reconocer que los cuatro "cerillos idealizados" que forman el cuadrado pequeño no pueden tener la longitud igual a la longitud los cuatro cerillos que forman el cuadrado grande. Si sus longitudes fueran iguales, cada uno de los cuatro triángulos rectángulos tendría un cateto cuya longitud sería ¡igual a la longitud de su hipotenusa!

La conclusión inevitable es: Con ocho cerillos reales de mismas longitudes sería imposible formar en la mesa la "solución" dibujada.

El rompecabezas con ocho cerillos en los libros

La solución engañosa del rompecabezas con ocho cerillos se puede atribuir a la ignorancia matemática y el descuido del autor anónimo. Su repetición no se podría esperar en el primer libro en inglés dedicado completamente a los posibles usos de cerillos para entretenimientos, titulado "*La magia de* *cerrillos*" (Blyth, 1921). Según su subtítulo, ideado por Will Blyth con obvios fines mercantiles, el libro es una "colección de rompecabezas y juegos diverditos, sorprendentes e instructivos y experimentos científicos y constructivos".

El rompecabeza apareció con el nombre "Cuadrados y triángulos" (Blyth, 1921, p. 45):

> "Ocho cerillos se entregan a un compañero a quien se solicita que forme con ellos dos cuadrados y cuatro triángulos. Ningún serillo se puede romper ni sobreponer."

La "solución" de Blyth está dada en la Figura 3.

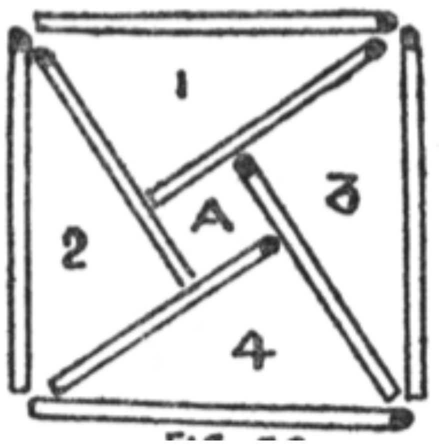


Figura 3. La "solución" del rompecabeza "Cuadrados y triángulos".

Aunque los cerillos dibujados por Blyth ya no son "idealizados" como en la primera "solución" sino tienen apariencia de cerillos reales, su "solución" sufre de los mismos defectos. Los cerillos que forman el menor cuadrado A tienen *una menor longitud* que los cerillos que forman el cuadrado mayor. En otras palabras, la "solución" ofrecida no se puede reproducir con ocho cerillos reales de la misma longitud y no merece ser llamada "científica y *constructiva*".

La gran mayoría de los autores reproducen la solución engañosa, dibujada con "cerillos idealizados" (Bowers, 1934, p. 84; Carlson, 1954, p. 331; Martignoni, 1959, p. 195; Townsend, 1992, p. 120; Russel & Carter, 1999, p. 158; Caney, 2006, p. 262) o con "cerillos aparentemente reales" (Krau, 1960, p. 69; Rigney, 1960, p. 4: Manchester, 1980, p. 384; Rreader's Digest Association, 1983, p. 144; Agostini, 1987, p. 180; Wells, 1993, p. 94).

Muy pocos autores detectaron el error en las soluciones dadas en las Figuras 2 y 3. Ellos presentan a sus lectores las soluciones más realistas, usando dibujos con "cerillos idealizados" (DiSpezio, 2005, p. 239) o sus fotos (Willard & Willard, 1965, p. 13). En ambos casos, tales soluciones difieren sustancialmente de las soluciones engañosas en las Figuras 2 y 3.

Las fotos de la solución del rompecabeza en cuestión con ocho palillos reales de la misma longitud están dadas en las Figuras 4a y 4b.

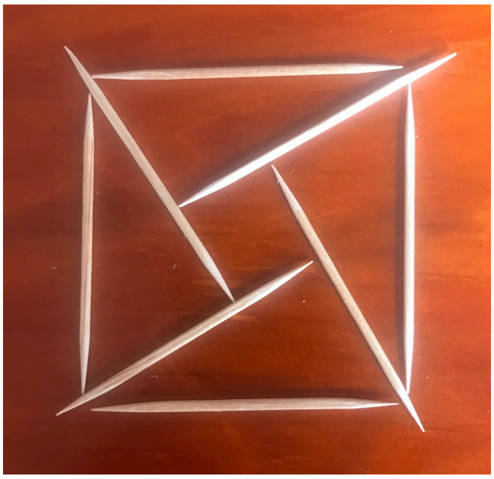
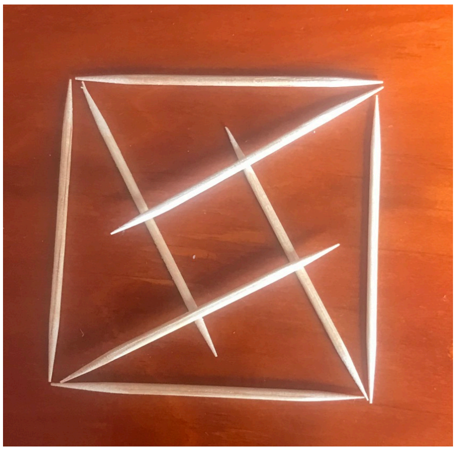

(a)

(b)

Figura 4. Las dos soluciones del rompecabeza con ocho palillos reales.

Si no se quiere que los palillos que forman el cuadrado pequeño no se sobrepongan, entonces éstos deben salir del cuadrado grande (Figura 4a). Si no se quiere que los palillos que forman el cuadrado pequeño no salgan del cuadrado grande, entonces éstos deben sobreponerse (Figura 4b).

La nueva "solución" del rompecabezas con ocho recillos

Recientemente algunos autores rusos publicaron en Internet otras "soluciones" del rompecabezas en que la tarea es formar con ocho cerillos dos cuadrados y cuatro triángulos.

Por ejemplo, en la página https://dzen.ru/a/WvBG65tAPGFp-FUp, aparece la "solución", Figura 5:

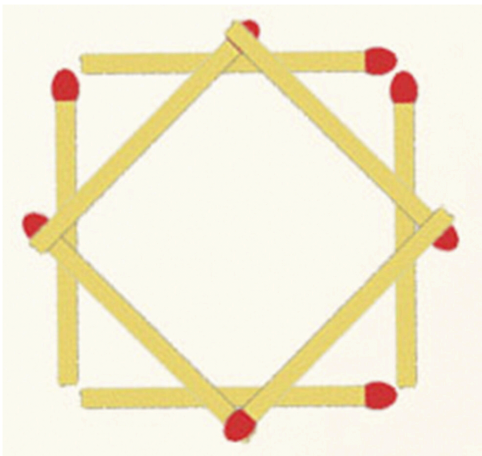


Figura 5. La solución engañosa del rompecabeza de ocho cerillos.

Lo engañoso de esta solución es "esconder" el hecho de que es imposible formar solamente los cuatro triángulos internos. Usando ocho cerillos con la misma longitud, la formación de los cuatro triángulos internos necesariamente implica la formación de los cuatro triangulos externos.

El vídeo https://vk.com/video-31803054_456239117 demuestra tal hecho geométrico (de manera aproximada), Figura 6:

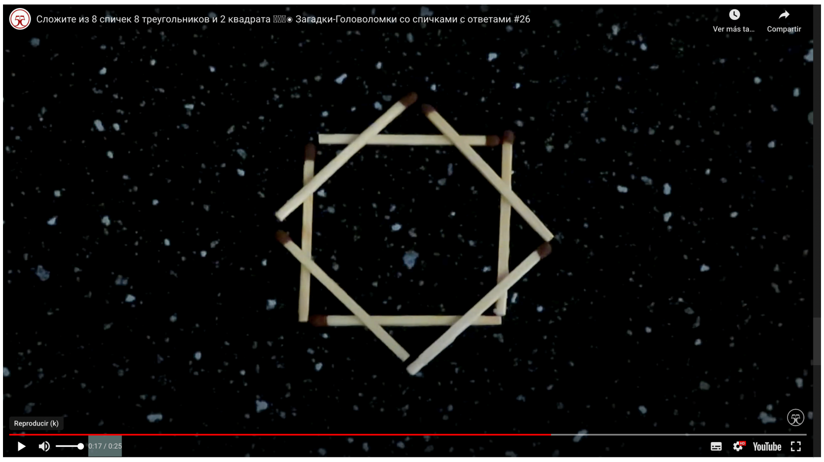


Figura 6. La formación de cuatro triángulos internos implica la formación de cuatro triángulos externos.

De hecho, el rompecabazes en que se busca construir un polígono regular (con más que cuatro lados), dos cuadrados y *ocho triangulos* usando ocho palillos fue formulada hace más de 50 años (Miro, 1970, p. 35). La solución fue dibujada con los "palillos idealizados" (Miro, 1970, p. 54), Figura 7:

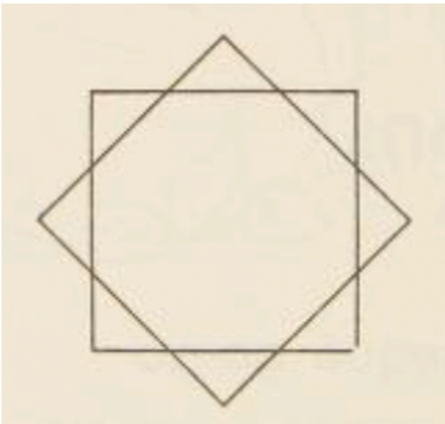


Figura 7. La solución del rompecabezas de Miro con los "palillos idealizados".

La solución aproximada con los palillos reales está dada en la Figura 8.

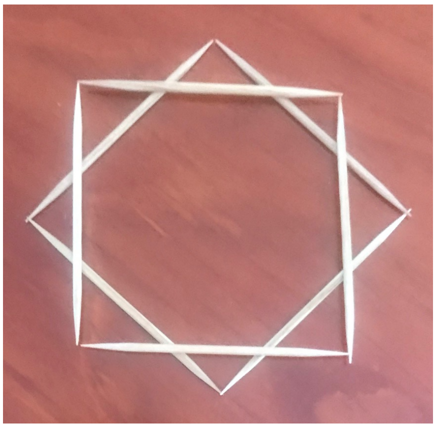


Figura 8. La solución del rompecabezas de Miro con los palillos reales.

Conclusión: La presencia de las soluciones engañosas del rompecabezas con ocho cerillos (o palillos) en libros, revistas y páginas de Internet demuestra la ignorancia matemática de los autores, revisores y editores y, aún más importante, una falta de ética de responabilidad hacia sus compradores y lectores.

En la educación matemática, las soluciones engañosas de tal rompecabezas se podrían usar para promover el pensamiento crítico de los estudiantes, dándoles las tareas de demostrar su falsedad sea por la vía práctica con cerillos reales o por el análisis de sus implicaciones matemáticas erróneas. No sobra promover en los estudiantes la comprensión de la diferencia crucial entre los "objetos del mundo real" y los "objetos matemáticos" con que se modelan, mediante los procesos de simplicación, de las situaciones y las soluciones de muchos problemas matemáticos contexutalizados.

Referencias

Agostini, F. (1987). Intelligence games. Macdonald.
Blyth, W. (1921). *Match-stick magic*. C. Arthur Pearson Limited.
Bothe, D. R. (2002). *Reducing process variation*. Landmark Publishing Company.
Bowers, E. (1934). Recreation for girls and women. A. S. Barnes and Company.
Buckeye, D. A. (1971). Creative Mathematics. Canfield Press.
Caney, S. (2006). *Steven Caney's ultimate building book*. Running Press Kids.
Carlson, V. C. (compiler) (1954). The Christian educators file. Moody Press.
Dispezio, M. A. (2005). Classic critical thinking puzzles. Main Street
Joshua, A. (1991). Maths Challenge. Graded problems for 10–13-year-olds. Simon & Schuster Education.
D'Amico, F. (1998). *Summer bridge middle school: 6th to 7th grade*. Rainbow Bridge Publication
Gagne, R. M. (1980). Learnable aspects of problem solving. *Educational Psychologist*, *15*(2), 84-92.
Genkin, S. A. & Fomin, D. V. (1997). Mathematical Circles: Russian Experience. American Mathematical Society.
Katona, G. (1940). *Organizing and memorizing. Studies in the psychology of learning and teaching*. Columbia University Press.
Kosik, K. S. (2015). Outsmarting Alzheimer's: what you can do to reduce your risk. The Reader's Digest Association.Krau, R. (1960). *The family book of games*. Mac-Graw Book Company.
Laseau. P. (2000). *Graphic thinking for architects and designers*. John Wiley & Sons.
Manchester, R. B. (1980). *The 2nd mammoth book of fun & Games*. A & W Visual Library.Martignoni, M. (1959). Every child's story book. A horn of plenty of good reading for boys and girls. Franklin Watts.
Öllinger, M., Jones, G., & Knoblich, G. (2006). Heuristics and representational change in two-move matchstick tasks. *Advances in Cognitive Psychology*, *2*(4), 239-253.
Plenert, G. J. (1995). *World Class Manager. Olympic quality performance in the new global economy.* Prima Publishing.
Posamentier, A. S. & Poole, P. (2020). Understanding Mathematics through problem solving. World Scientific.
Readers's Digest Association (1983). More tests and teasers. Berkley Books.
Rigney, F. J. (1960). Cub Scout magic. Boy Scouts of America.
Roberts, J. C., Headleand, C. &. & Ritos, P. D. (2017). *Five design-sheets: Creative design and sketching for computing and visualization*. Springer.
Russell, K. A. & Carter, Ph. H. (1999). *Classic conundrums: fiendish puzzles from the 19th century*. Barnes & Noble Books.
Small, G. & Vorgan, G. (2023). *Brain Games to Exercise Your Mind: Protect Your Brain From Memory Loss and Other Age-Related Disorders: 90 Puzzles, Logic Riddles & Brain Teasers to exercise your mind*. Humanix Books.
Stinessen, L. (1973). Effect of different training on solution of Katona's match-stick problems. *Scandinavian Journal of Psychology*, *14*(1), 106-110.
Townsend, C. B. (1992).World's most baffling puzzles. Sterling Publishing Company.
Tseng, C. C., Chen, C. H., Chen, H. C., Sung, Y. T., & Chang, K. E. (2014). Verification of Dual Factors theory with eye movements during a matchstick arithmetic insight problem. *Thinking Skills and Creativity*, *13*, 129-140.
Wells, D. G. (1993). The Guinness book of brain-teasers. Guinness.
Willard, W. & Willard, E. (1965). Hobbycraft toys & games. Lantern Press.

El nacimiento de la función trigonométrica seno

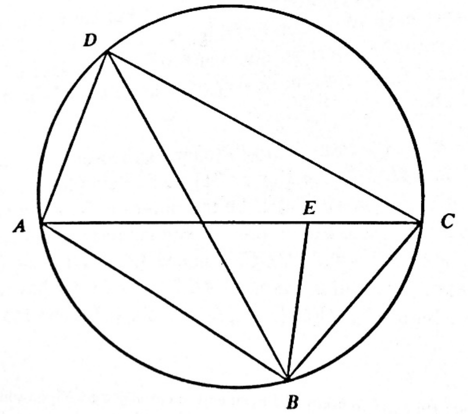
Dr. Agustín Contreras Carreto
Profesor-Investigador
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Suele denominarse *Geometría Moderna* a la geometría euclidiana desarrollada después de la muerte de Euclides. Así, los estudios sobre cónicas de Apolonio y los trabajos de Arquímedes como la famosa fórmula para el área de un círculo y la del volumen de una esfera, pertenecen a la geometría moderna. Estos son de antes de nuestra era; pero también hay muchísima geometría moderna, bella e importante, en nuestra era: las teorías de inversión geométrica y de polos y polares; los teoremas de Papus, Pascal, Desargues y Brianchon, que fueron generando la *Geometría Proyectiva*; la recta de Simpson, el círculo de los 9 puntos, etc., etc., etc., son geometría moderna. Hay muchísimos libros de texto con ese nombre y que se usan en diversos cursos de geometría, pero en todos ellos siempre encontrarán, por su sencillez y por su utilidad, el siguiente teorema clásico.

TEOREMA DE PTOLOMEO (aprox. 100-170 d.C.)**:** *En un cuadrilátero cíclico □ABCD (convexo), el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los dos pares de lados opuestos, es decir,*

$$(AB)(CD) + (AD)(CB) = (DB)(AC).$$

Demostración (la que dio Ptolomeo)**:**



Sea □*ABCD* un cuadrilátero convexo inscrito en un círculo, y sea *E* el punto de la diagonal *AC* tal que $<ABE = <DBC$. De los triángulos semejantes *ABE* y *DBC*, obtenemos: $\frac{AB}{AE} = \frac{DB}{DC}$, y entonces $(AB)(DC) = (DB)(AE)$.

También, de los triángulos semejantes *ABD* y *EBC*, obtenemos: $\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{CB}$, de donde $(AD)(CB) = (DB)(EC)$. Se sigue que:

$$(AB)(DC) + (AD)(CB) = DB\ (AE + EC) = (DB)(AC)$$

Y el teorema queda establecido.

COROLARIO 1 (Teorema de Pitágoras): *Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice C. Si a, b y c son las respectivas longitudes de los lados que se oponen a los vértices A, B y C, entonces*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Demostración: Aplíquese el Teorema de Ptolomeo a la siguiente figura:

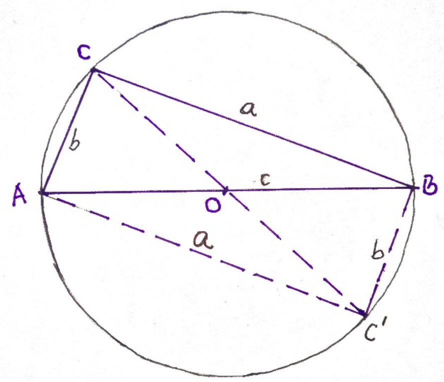


fig. 1 Teorema de Pitágoras

$a^2 + b^2 = c^2$

COROLARIO 2. *En todo pentágono regular, la razón entre la diagonal y el lado es la razón áurea* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Demostración: Inscribamos el pentágono regular *ABCDE* en una circunferencia. Entonces el cuadrilátero □*ABCE* es cíclico. Aplicando el Teorema de Ptolomeo a dicho cuadrilátero y teniendo en cuenta que los lados *AB, BC* y *EA* son lados del pentágono, de longitud *l*, y que el lado *CE* y las diagonales *AC* y *BE* del cuadrilátero son diagonales del pentágono, con longitud *d*, se tiene:

$$d^2 = l^2 + ld,$$

de donde:

$$(d/l)^2 = 1 + (d/l),$$

Entonces *d/l* satisface la ecuación:

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

cuya única solución positiva es el número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

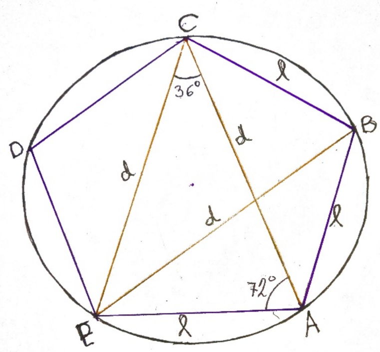


Fig. 2. Pentágono regular

Obsérvese que en el pentágono regular de la figura anterior, se forma el triángulo isósceles con *piernas* de longitud *d* y base de longitud *l* (*triángulo áureo o sublime*) y que los ángulos de la base miden 72º cada uno, y el que forman las piernas mide 36º. Entonces todo triángulo cuyos ángulos tengan estas medidas, es sublime. Así, se obtiene el siguiente corolario.

COROLARIO 3. *En un círculo de radio 1, la cuerda subtendida por un ángulo central de 36º mide* $1/\varphi = \varphi - 1 \approx 0.6180$.

Demostración: En un círculo de radio 1, con centro en un punto *O*, un ángulo central de 36º subtiende un arco *AB* y una cuerda *AB*. El ΔOAB es isósceles, con ángulos de 36º, 72º y 72º, es decir, es un triángulo sublime, con piernas de valor 1 y base de longitud *l*. Por el corolario anterior, $1/l = \varphi$, es decir,

$$l = 1/\varphi = \varphi - 1 \approx 0.618$$

Ésta es la longitud de la cuerda subtendida por el ángulo de 36º.

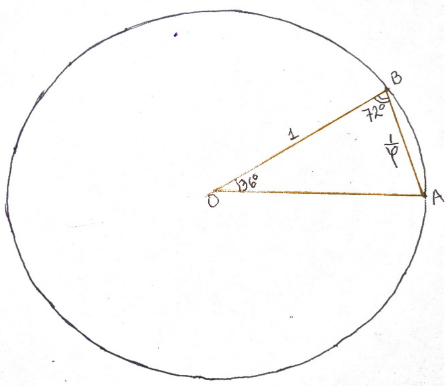


Fig. 3 Crd 36° $\simeq \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \approx 0.618$

DEFINICIÓN. *Dados un círculo C, con centro en un punto O y dos puntos distintos, A y A' en C, entonces el ángulo <AOA' se llama ángulo central correspondiente al arco de A a A' ($\widehat{AA'}$). El segmento AA' se llama la cuerda correspondiente al ángulo <AOA', o cuerda subtendida por el ángulo <AOA', o cuerda correspondiente al arco $\widehat{AA'}$.*

Podemos denotar, como hacían los griegos de la época de Ptolomeo, por *Crd* α^o, a la longitud de la cuerda subtendida por el ángulo central α^o. Así, lo que hallamos en el corolario anterior, es *Crd* $36^o \approx 0.618$.

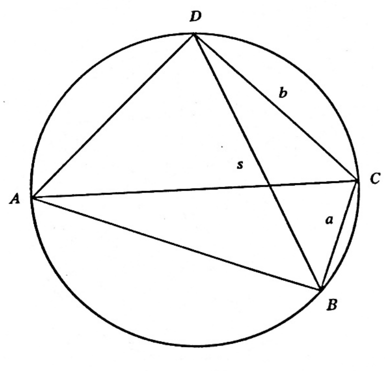
El Teorema de Ptolomeo es una herramienta geométrica poderosa para calcular las cuerdas de muchos más ángulos. A partir de él se obtienen otros muchos corolarios. Por ejemplo:

COROLARIO 4. *Si a y b son las cuerdas de dos arcos de un círculo de radio 1, entonces*

$$s = (a/2)(4 - b^2)^{1/2} + (b/2)(4 - a^2)^{1/2}$$

Es la cuerda de la suma de los dos arcos.

Demostración: Aplique el Teorema de Ptolomeo al siguiente cuadrilátero, donde AC es un diámetro, $BC = a$, y $CD = b$.

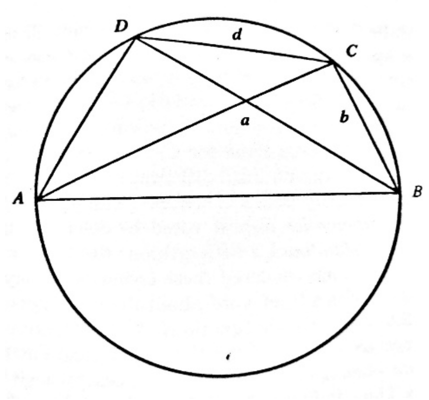


COROLARIO 5. *Si a y b, con $a \geq b$, son las cuerdas de dos arcos de un círculo de radio 1, entonces*

$$d = (a/2)(4 - b^2)^{1/2} - (b/2)(4 - a^2)^{1/2}$$

es la cuerda de la diferencia de los dos arcos.

Demostración: Aplique el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero siguiente, donde AB es un diámetro, $BD = a$, y $BC = b$.

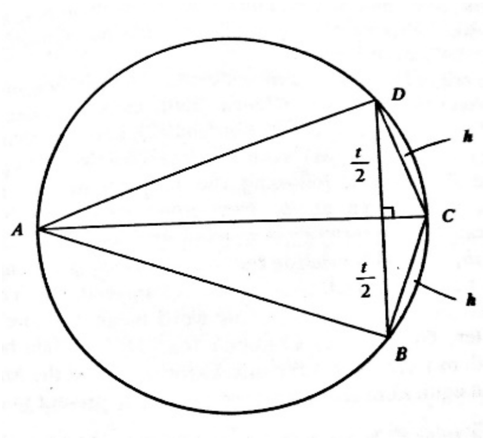


COROLARIO 6. *Si t es la cuerda de un arco menor de un círculo de radio 1, entonces*

$$h = [2 - (4 - t^2)^{1/2}]^{1/2}$$

es la cuerda de la mitad del arco.

Demostración: Aplique el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero de la siguiente figura, donde AC es un diámetro, $BD = t$ y BD es perpendicular a AC.



Obtenemos:

$$2t = 2h\,(4 - h^2)^{1/2}$$

De donde, elevando al cuadrado y reacomodando los términos, queda:

$$h^2 - 4h^2 + t^2 = 0$$

Resolviendo como una ecuación cuadrática en h^2, obtenemos:

$$h^2 = 2 \pm (4 - t^2)^{1/2}$$

Como h representa la cuerda de la mitad del arco menor de la cuerda BD, requerimos el signo menos en el resultado de arriba. Tomando raíces cuadradas obtenemos finalmente,

$$h = [2 - (4 - t^2)^{1/2}]^{1/2}$$

Ahora sí, los ejemplos:

EJEMPLOS.

1. En un círculo de radio 1, crd 60º = 1 y, como ya vimos, crd 36º = 0.618, entonces, por el corolario 5,

$$crd\ 24^o = crd\ (60^o - 36^o) = ½\ (4 - 0.618^2)^{1/2} + 0.618/2\ (4 - 1)^{1/2} = 0.9519 - 0.5352 = 0.4158$$

2. Por el corolario 6, podemos calcular sucesivamente, en círculo de radio 1, las cuerdas de 12º, 6º, 3º = 180’, 90’ y 45’.

Así:

$$\mathrm{crd}\ 90' = 0.0262$$
$$\mathrm{crd}\ 45' = 0.0131.$$

3. Aristarco de Samos (310-230 a.C.) había obtenido la relación

$$\mathrm{crd}\ a / \mathrm{crd}\ b \leq a/b, \qquad \text{si } b \leq a < 90^{o}.$$

De este modo,

$$\mathrm{crd}\ 60' / \mathrm{crd}\ 45' \leq 60/45 = 4/3, \text{ o}$$
$$\mathrm{crd}\ 1^{o} \leq 4/3\ (0.0131) = 0.01747.$$

También,

$$\mathrm{crd}\ 90' / \mathrm{crd}\ 60' \leq 90/60 = 3/2, \text{ o}$$
$$\mathrm{crd}\ 60' \geq 2/3\ (\mathrm{crd}\ 90') = 2/3\ (0.0262) = 0.01747.$$

Por lo tanto, precisando hasta 4 dígitos, queda

$$\mathrm{crd}\ 1^{o} = 0.0175.$$

4. Por el corolario 6, podemos calcular *crd (½)º.*

Ahora uno podría, por el corolario 4, construir una tabla de cuerdas en el círculo unitario, por intervalos de (½)º. Esto hizo Ptolomeo; su tabla es la siguiente:

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1; 2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2; 5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37, 4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3; 8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14, 4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

[7]

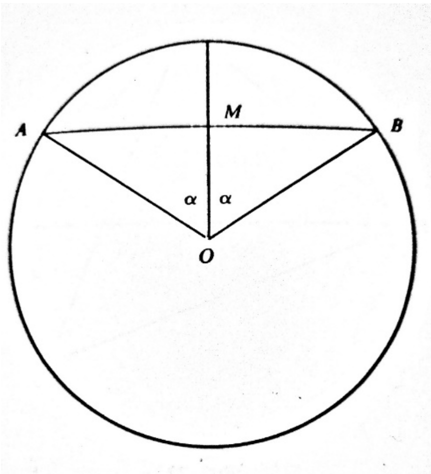
La tabla de Ptolomeo da las longitudes de las cuerdas de todos los ángulos centrales de un círculo dado, por intervalos de medio grado, desde el ángulo de $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ hasta el ángulo de 180º. El radio del círculo se divide en 60 partes y las longitudes de las cuerdas se expresan sexagesimalmente en términos de una de estas partes como unidad. Por ejemplo, en su tabla aparece:

$$crd\ 36^o = 37^p\ 4'\ 55'',$$

lo que significa que la cuerda de un ángulo central de 36º es igual a 37/60 (o 37 pequeñas partes) del radio, más 4/60 de una de estas pequeñas partes, más 55/3600 más de una de estas pequeñas partes. (37/60 + 4/3600 ≈ 0.61777), como nos dio en el ejemplo 1, cuando el radio del círculo es 1)

Es evidente, de la siguiente figura, que una tabla de cuerdas es equivalente a una tabla de senos trigonométricos, pues:

$$sen\ \alpha = \frac{\mathrm{AM}}{OA} = \frac{\mathrm{AB}}{di\acute{a}metro\ del\ c\acute{\imath}rculo} = \frac{\mathrm{crd}\ 2\alpha}{120}$$



Entonces, la tabla de cuerdas de Ptolomeo da, en realidad, los senos de ángulos por intervalos de cuartos de grado, de 0º a 90º. Se sabe que Ptolomeo usó sistemáticamente su tabla de cuerdas y aparentemente estaba consciente de la equivalencia de varias fórmulas ahora usadas en la solución de triángulos rectángulos planos y esféricos.

¿Quién fue Claudio Ptolomeo? Fue un gran astrónomo y astrólogo, matemático y geógrafo que vivió durante el siglo II d.C.; autor de muchos tratados científicos que sobreviven hasta el presente. Alrededor del 150 d.C. Ptolomeo escribió su definitivo gran trabajo griego sobre astronomía. Este tratado de gran influencia, llamado *Sintaxis Matemática* o *La Colección Matemática* es notable por ser completo, compacto y elegante. Para distinguirlo de otros trabajos menores sobre astronomía, comentaristas posteriores le asignaron el superlativo *magiste* o *más grande*. Más tarde los traductores árabes le antepusieron el artículo árabe *al* y desde entonces la obra se conoce como el *Almagesto*. Ptolomeo desarrolla en esta obra no sólo sus modelos astronómicos, sino también las otras herramientas matemáticas que, además de la geometría elemental, se necesitan para los estudios de astronomía; por ejemplo, la trigonometría. Consta de 13 libros; la teoría de "medición de triángulos" la presenta en los capítulos 10 y 11 del libro primero; el capítulo 11 está constituido por la tabla de cuerdas que presentamos. Pero *Almagesto* es una obra maestra de exposición; jamás presenta Ptolomeo una tabla sin que haya explicado previamente cómo calcularla, por ejemplo, con el uso de su fértil proposición geométrica ahora conocida como *Teorema de Ptolomeo*.

Se puede decir que *Almagesto* fue a la astronomía matemática lo que los *Elementos* de Euclides y las *Cónicas* de Apolonio fueron a sus respectivas materias.

En el mundo griego la base de toda aproximación formal a los problemas astronómicos fueron siempre modelos geométricos. Más aún, fue tal la importancia de la astronomía matemática entre las materias de estudio que, con pocas excepciones, todos los grandes geómetras, a partir de Eudoxo, dedicaron parte de sus esfuerzos a problemas de astronomía.

Desgraciadamente, las obras astronómicas de los predecesores de Ptolomeo, quedaron reducidas a curiosidades históricas superfluas, y la mayoría de ellas desaparecieron a lo largo de los años.

Afortunadamente, Ptolomeo, a diferencia de Euclides, acreditó generosa y detalladamente a sus antecesores los aportes de conocimientos con que contribuyeron a su obra; poseemos así datos mucho más ricos y seguros sobre los astrónomos pre-ptolomaicos, que sobre los matemáticos pre-euclidianos.

Uno de los grandes astrónomos que menciona Ptolomeo como una de sus grandes influencias, quizá el más grande astrónomo antes de nuestra era, es **Hiparco de Nicea**, que vivió unos 300 años antes que Ptolomeo, en el siglo II a. C. Se sabe muy poco acerca de su vida: que nació en Nicea, la mayor ciudad del reino de Bitinia (la región alrededor de la actual Estambul, Turquía), que floreció alrededor del 140 a. C., que murió en Rodas (la más grande de las Islas Egeas), y que fue un astrónomo consumado. Aunque Hiparco reportó una observación del equinoccio vernal de Alejandría en 146 a. C., sus más importantes observaciones astronómicas las realizó en el famoso observatorio de Rodas. Reconocido como un observador cuidadoso y preciso, se le atribuyen logros tales como la determinación del mes lunar medio, con una precisión de un segundo respecto del valor actualmente aceptado, un cálculo preciso de la inclinación de la eclíptica y el descubrimiento y estimación de la precesión anual de los equinoccios. También se dice que calculó el paralaje lunar, determinó el perigeo de la Luna y catalogó 850 estrellas fijas.

Abogó por el uso de la latitud y la longitud para localizar posiciones en la superficie de la Tierra y pudo haber sido el primero en introducir en Grecia la división de un círculo en 360º. Todos estos logros se conocen por referencias indirectas de diversos comentadores.

Una conexión más directa, y muy importante de Hiparco con la trigonometría, es el crédito a Hiparco, por Ptolomeo, de un tratado de 12 libros que tratan de la construcción de una *tabla de cuerdas.* Esta tabla está perdida para nosotros, pero se sabe que la tabla de Ptolomeo está adaptada del tratado de Hiparco.

Desde el principio se reconoció que el conocimiento de las longitudes de las cuerdas correspondientes a ángulos centrales sería extremadamente útil para resolver problemas astronómicos. Entonces no es sorprendente saber que Hiparco preparó una tabla de ángulos centrales, y sus correspondientes cuerdas, para uso de los astrónomos (y astrólogos).

Tenemos reportes independientes de Vettius Valens (aprox. 120-175 d.C.), un contemporáneo de Ptolomeo, y autor de un respetado trabajo astrológico, y también de Teón de Alejandría (aprox. 335-405 d.C.), en sus *Comentarios sobre el Almagesto*, que Hiparco efectivamente había preparado tal tabla. Desafortunadamente ninguna copia de este trabajo de Hiparco sobrevive hoy. Sin embargo, varios académicos en los últimos años han propuesto una probable reconstrucción de esta tabla (ver [3] y [4])

Como el lector se habrá percatado, los matemáticos griegos no sólo fueron grandes geómetras, sino que también eran capaces de realizar cálculos numéricos cuando tenían que hacerlo; sin embargo, hay que buscar mucho para poder encontrar otro calculista como Ptolomeo.

Una última observación respecto a la historia de la función *seno*. La cuerda mitad era llamada *jiva* en sánscrito. Los astrónomos árabes adoptaron tradiciones griegas e hindúes e incluyeron en sus trabajos tablas de la función cuerda mitad, y conservaron para ella el nombre sanscrito de *jiva.* En árabe, como en hebreo, generalmente sólo se escriben las consonantes de las palabras, de modo que el lector debe suplir las vocales. La palabra sánscrita *jiva* tiene las mismas consonantes que la palabra árabe *jaib,* que significa bahía o entrada. No es extraño que, cuando se tradujeron al latín las obras árabes de astronomía, los traductores, que sabían árabe pero no sánscrito, tomaron por *jaib* el título de la tabla, y lo identificaron con la palabra latina *sinus*, es decir, entrada.

Referencias

[1] Aaboe, Asger, *Episodes from the Early History of Mathematics*, Chapter 4. Vol. 13 of New Mathematical Library. The Mathematical Association of America 1964.
[2] Eves, Howard, *Great Moments in Mathematics (Before 1650).* Dolciani Mathematical Expositions No.5. The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1980.
[3] Heath, L. Thomas, *A History of Greek Mathematics. 2 vols.* Oxford, 1921.
[4] Otero, Danny, *A Genetic Context for Understanding the Trigonometric Functions.* Digital Digital Commons, Ursinus College, 2017.
[5] Van Brummelen, Glen, *The Mathematics of the heavens and the Earth. The Early History of Trigonometry.* Princeton University Press, 2009.
[6] Ueno Kenji, Shiga Koji, Morita Shigeyuki, *The Legacy of Trigonometric Functions,* Chapter 3 of A Mathematical Gift, II, The interplay between topology, functions, geometry and algebra. Iwanami Shoten, Publishers, Toyo Japan, 1995.

Para Pensar: Frases célebres

***Sofía Kovalévskaya* (1850- 1891)**: Fue una matemática y escritora rusa, de etnia romaní que hizo contribuciones significativas en los campos del análisis, las ecuaciones diferenciales parciales y la mecánica. Su nombre en ocasiones se translitera como *Sophie, Sonya, Sonja o Sonia*.

Mientras estudiaba en Heildelberg ayudó a otras mujeres a salir de Rusia y a recalar en la vieja ciudad universitaria a orillas del Neckar: su amiga Julia Lérmontova, que fue la primera doctora en química de su país; la prima de ésta, la jurista Anna Yevreinova

Gracias a Gösta Mittag-Leffler, Sofía pudo trabajar a prueba durante un año en la Universidad de Estocolmoen 1884 como Privatdozent. Su aportación más conocida sea el teorema de Cauchy-Kovalevskaya sobre ecuaciones diferenciales

"Es imposible ser matemático sin ser un poeta del alma"

"No hay oposición entra la matemática y la mujer"

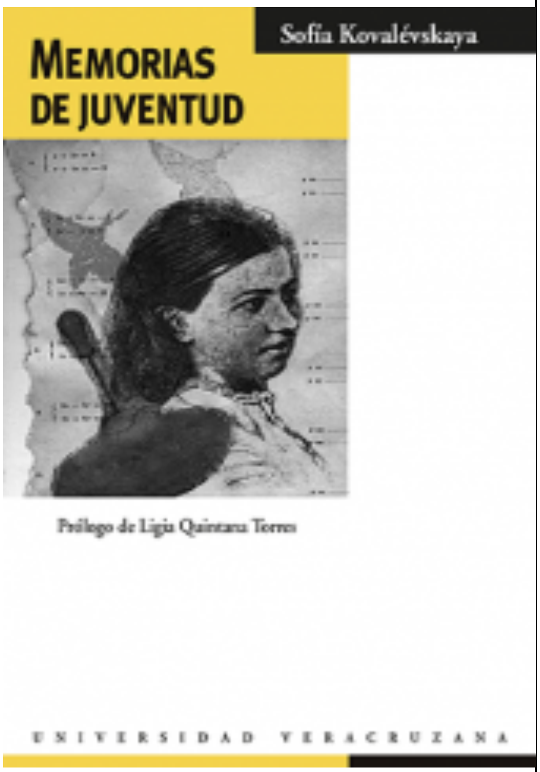
Reseña de una obra de Sofía Kovalévskaya

Libro: *Memorias de Juventud*

Autor: *Sofía Kosvalévskaya*

Editorial: *Biblioteca del Universitario, Universidad Veracruzana*

La autora de esta obra, Sofía Kovalévskaya, nacida en 1850 en Moscú, integrante de una familia de amantes de la ciencia, reconocida creadora del Teorema Cauchy-Kovalévskaya, primera mujer en impartir cátedra en una universidad europea, es una de las matemáticas más importantes del siglo XIX y una figura de gran complejidad y valentía.



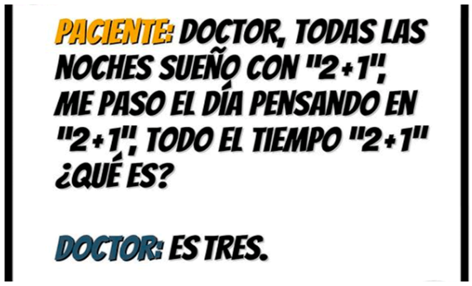
Sus demostraciones ingeniosas de las características formales importantes hicieron de sus ideas verdaderas teorías y no solo hipótesis atrevidas, además de que prepararon -tanto como las aportaciones de Weierstrass, Dedekind y Cantor- el salto hiperdimensional hacia las matemáticas modernas, con toda la marea de geometría no euclidiana, topología, teoría de los números, nueva lógica y paradojas. Y todo ello, con la restricción añadida de haber trabajado en un tiempo en el que la esfera de la investigación científica era un coto exclusivamente masculino. Se movió ahí con naturalidad y antagonismo. No se mimetizó con los hombres ni se dejó codificar como mujer. Se hizo presente con su inteligencia y su convicción.

Estas páginas autobiográficas reconstruyen los primeros años de una vida agitada y agitadora, y su exposición logra darle un rostro a aquello que el pensamiento abstracto no transmite ni puede transmitir, sobre todo porque para entender las matemáticas en los niveles elevados y apicales en que las practica Kovalévskaya, hace falca poner en marcha una exigente gimnasia mental que solo una preparación técnica profesional puede brindar.

De hecho, el extraño pánico y desagrado que las matemáticas le provocan a tanta gente es una de las razones por las que la Biblioteca del Universitario se decidió a publicar esta obra: al encontrar formas interesantes de dar vida a las matemáticas puras y de comunicar la extraordinaria belleza y la pasión por la disciplina, este es un libro del que tanto los lectores como las matemáticas salen beneficiados.

Encuentra ésta y otras novedades de la Editorial UV en las redes sociales Facebook, Twitter e Instagram Editorial Universidad Veracruzana. Los ejemplares pueden adquirirse en todo México a través de la Librería Hyperión o sus diferentes puntos de venta físicos y virtuales en todo el país: https://www.uv.mx/editorial/puntos-de-venta-11/.

Para sonreír, divertirse y reflexionar



¿Te sabes un chiste de matemáticos?

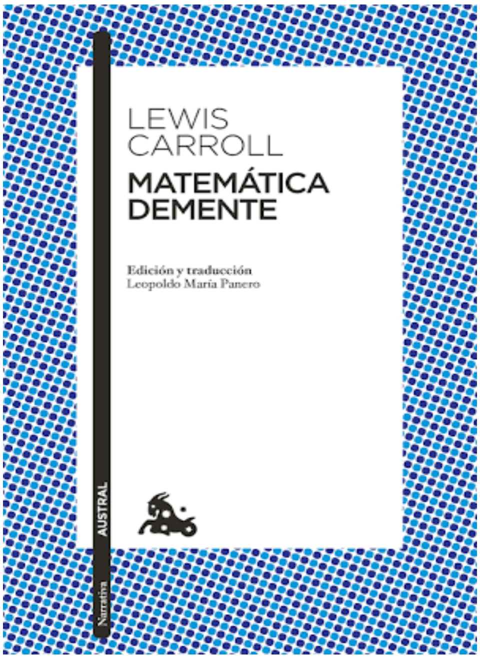
Mas o menos, ¿por?

Recomendación de libro

Libro: *Matemática Demente*

Autor: *Lewis Carrol*
Edición y Traducción: Leopolodo María Panero

Editorial: *Planeta Mexicana S.A. de C.V.*



Reseña de libro

Título: *APOCALIPSIS M4T3MÁTICO*

Autores: *Eduardo Saenz de Cabezón*

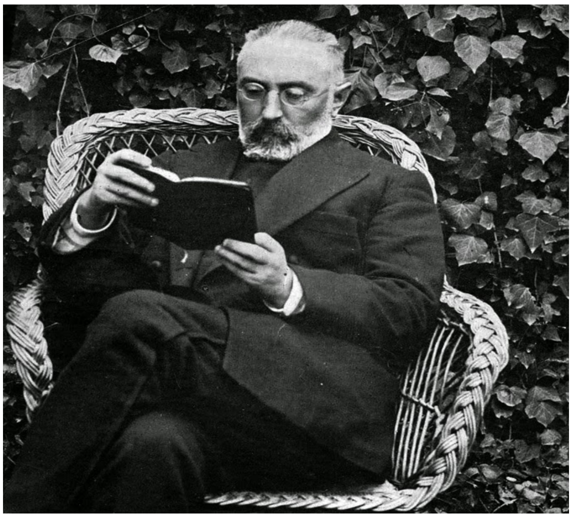
Género: *Divulgación Científica mtemáticas*

Editorial: *Plan B (Ediciones B)*

Para algunas personas resolver un ejercicio de matemáticas puede ser un suplicio. Un infierno. ¡Un verdadero apocalipsis! Pero este libro va a cambiar eso para siempre. Eduardo Sáenz de Cabezón, uno de los profesores más populares de España, demuestra que las matemáticas pueden ser apasionantes, misteriosas y divertidas.

En este libro encontrarás movidas matemáticas interesantísimas - ¿cuáles son los números perfectos?-, teorías asombrosas que cambiaron la forma de ver el mundo -¿por qué es tan importante el teorema de Pitágoras?-, aplicaciones de las matemáticas en nuestra vida cotidiana -¿cuál es la cola más rápida en el supermercado?-, acertijos y retos que desafiarán tu mente y mucho pero mucho más.

Poema de junio-agosto



Miguel de Unamuno (Bilbao, 1864-1936): Fue un escritor y filósofo español perteneciente a la generación del 98. En su obra cultivó gran variedad de géneros literarios como novela, ensayo, teatro y poesía. Rector de la Universidad de Salamanca a lo largo de tres periodos, también fue diputado de las Cortes constituyentes de la Segunda República, de la que se fue distanciando hasta el punto de secundar la sublevación militar que dio inicio a la guerra civil, si bien terminó retractándose de dicho apoyo.

.

La tabla de multipilcar

2 × 2 son 4,
2 × 3 son 6,
¡ay que corta vida
la que nos hacéis!
3 × 3 son 9,
2 × 5 10,
¿volverá ala rueda
la que fue niñez?
6 × 3 18,
10 × 10 son 100.
¡Dios! ¡No dura nada
nuestro pobre bien!
Infinito y cero,
¡la fuente y el mar!
¡Cantemos la tabla
de multiplicar.

Actividades: Academia de Matemáticas en la FCFM

Se invita a los estudiantes de licenciatura en matemáticas y licenciaturas afines a revisar la convocatoria para ingreso a la Maestría en Ciencias (Matemáticas) en la página de la FCFM.

El Plan de Estudios está compuesto de:
Cursos obligatorios: Álgebra, Análisis Matemático I y Análisis Matemático II.
1 Curso básico optativo
3 Cursos optativos
1 Seminario introducción a las especialidades
2Seminarios de tesis e investigación
Objetivo del plan de estudios
Formar recursos humanos altamente calificados con conocimientos sólidos en diferentes aspectos de las matemáticas tanto teóricas como aplicadas, con disciplina y actitud crítica en el trabajo y con habilidades tales como:

- Capacidad para plantearse y resolver problemas de investigación en matemáticas.
- Capacidad para expresar sus resultados de investigación de manera oral y escrita.
- Capacidad para detectar problemas de otras áreas (Ciencias Naturales, Economía Ingeniería, Ciencias Sociales, etc.) en donde se pueda plantear una solución matemática.
- Capacidad para interactuar en grupos interdisciplinarios y aplicar sus conocimientos en el sector productivo y de servicios.

Contribuir a mejorar la calidad docente y de investigación en el área de Matemáticas en el ámbito regional y nacional

Publicaciones de la Academia de Matemáticas

Libro de Matemáticas y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositivos y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2024. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: David Herrera Carrasco dherrera@fcfm.buap.mx y Fernando Macías Romero fmacias@fcfm.buap.mx
Los trabajos recibidos después del 6 de enero (del año en curso) se tomarán en cuenta para un año después.

Libro de Topología y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositivos y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2024. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: José Juan Angoa Amador jangoa@fcfm.buap.mx, Raúl Escobedo Conde escobedo@fcfm.buap.mx, María de Jesús López Toriz mjlopez@fcfm.buap, Agustín Contreras Carreto acontri@fcfm.buap.mx

La publicación del libro es anual, según sean las condiciones económicas del cuerpo académico de topología y sus aplicaciones.

Se invita a la comunidad a enviar trabajos de divulgación, problemas matemáticos para resolver, comentarios, etc., al e-mail axolote.fcfm@gmail.com
Las contribuciones deberán estar escritas en word con letra times new roman de 12 puntos.

Compiladores: Docentes de la Academia de Matemáticas, véase lista de docentes en www.fcfm.buap.mx/academiam/

Editores:
Patricia Domínguez Soto,
Agustín Contreras Carreto,
José Juan Angoa Amador

Colaboradores:
Carlos Cabrera Ocañas (IMATE, UNAM)

Diseño logo: Santiago Sienra y Guillermo Sienra (Facultad de Ciencias, UNAM)