Revista de Divulgación Número 15 enero-abril viernes 29 de abril de 2022

FCFM Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

axolote'

Revista mensual de la Academia de Matemáticas

Editorial

Ya regresamos; el equipo del axolote celebra esta gran noticia, sobre todo porque nos volvimos a ver no sólo en forma virtual. Regresamos, es la gran noticia que en nuestras mentes confinadas, después de 2 años, nos parece que es motivo de gran gozo. Fundamentalmente, porque los reencuentros, ahora no penados, pueden suceder sin violar ningún protocolo sanitario, es decir se pueden realizar con toda felicidad.

Pero ¿qué fue el confinamiento? En una actitud más crítica que anecdótica, entendemos que fue algo más que un recurso sanitario; tal vez sin intención se convirtió en la forma más justificada de prescindir del otro. En los que están acostumbrados a no ver al otro, la virtualidad profundizó su práctica de invisibilizar al diferente. La discapacidad tecnológica, ya sea por falta de recursos o por falta de conocimientos, te condenaba a no existir. No tienes computadora o internet: no existes. Todo esto generó un racismo tecnológico que, en un país como el nuestro es preocupante. Pero tal vez lo más preocupante sea la falta de sensibilidad ante esta problemática; las clases siguieron, todo se convirtió en virtual segregando a los discapacitados tecnológicos. El compartir, acto profundamente humano, se convirtió en un acto de transferir archivos es decir se redujo a una actividad cibernética, insistimos, realizable en el marco de las capacidades cibernéticas posibles.

Otro gran problema que se expresó en el confinamiento fue la gran incapacidad de la medicina oficial de resolver el problema sanitario, incapacidad que, con una gran ausencia de autocrítica, no se reconoció en su momento. Ahora que el virus en su evolución natural se convierte en inocuo, aún se persiste en el protagonismo de la ciencia médica. La medicina como apéndice de la industria farmacéutica está tocando fondo.

Debemos entender que ésta es la pandemia del capitalismo globalizado, es un inicio hacia una comprensión social de la pandemia, debemos entender que ella no es el resultado de un bicho malo, sino de una relación irresponsable con el medio ambiente; esta comprensión puede prepararnos para la siguiente.

Debemos entender, como en pandemias anteriores, que sólo una nueva ciencia y nuevas prácticas sociales pueden asegurarnos estrategias más fructíferas ante nuevas pandemias. La mancha urbana en los países pobres no deberá crecer sin ninguna regulación, ya que el crecimiento de la mancha urbana reduce el hábitat de las especies animales. Antes, a los países ricos no les importaban los problemas urbanos de los países pobres, pero ahora deberían tomar conciencia de que la extrema pobreza también se globaliza, y esta dualidad, riqueza extrema con pobreza extrema, forma parte de un problema que pone en peligro a la especie.
Los países ricos deberían incluirse en la especie y tomar medidas ante las expresiones de su riqueza y pobreza globalizadas. O que ¿acaso ya tienen otro planeta para migrar? Debemos advertirles que también lo echarán a perder, ya que lo que siempre llevarán será su ideología; estamos ante la encrucijada de capitalismo o especie. Y debemos decidirnos ante ello.

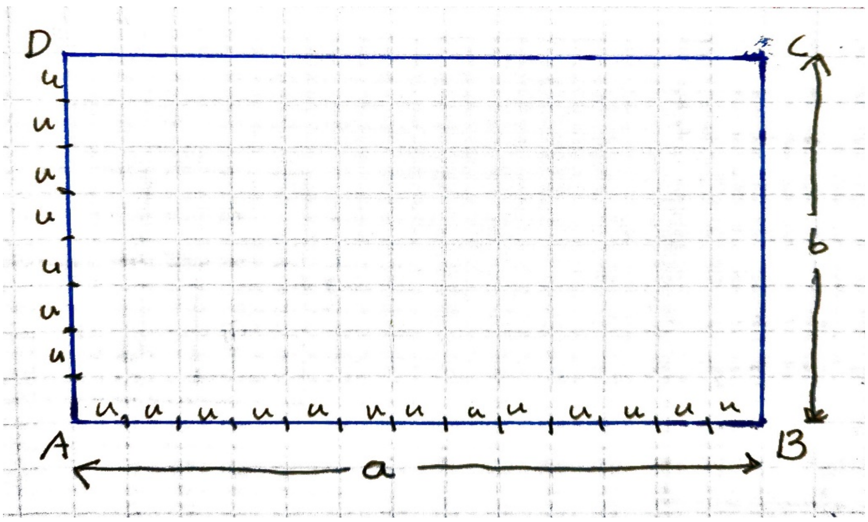
¿El área de un rectángulo? ¡Pero si es muy fácil!

Agustín Contreras Carreto
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Para calcular el área de un rectángulo □ABCD cuyos lados tienen longitudes *l(AB)=a* y *l(BC)=b*, usamos la fórmula $A = ab$ que nos enseñaron en la escuela primaria. ¿Cómo se obtuvo esta fórmula? ¿Quién la demostró por vez primera? ¿Fue Euclides?

El argumento que algunas veces dan los profesores para convencernos de la fórmula, consiste en dividir el rectángulo en muchos (*ab* en total) cuadraditos iguales (unidades cuadradas), sin preguntarse si ésto se puede realizar o no. Elos dicen:

"Dividimos el semento AB en m segmentos iguales, cada uno de longitud u, y el segmento BC en n segmentos, también de longitud u, cada uno de ellos. Entonces el rectángulo □ABCD queda dividido en mn cuadrados, cada uno de área u^2*, con lo que el área total del rectángulo es* $(mn)u^2=(mu)(nu)=ab$*. ¿Ven qué fácil?*



Este tipo de argumento lo practicaban los pitagóricos del siglo VI a.C. (Tales de Mileto o Pitágoras), porque pensaban que cualesquiera dos segmentos son conmensurables:

Definición. *Dos segmentos AB y CD, de longitudes a y b, respectivamente, son conmensurables, si existe un segmento de longitud u que cabe un número entero de veces, digamos m, en AB (o que divide al segmento AB en m segmentos de longitud u) y un número entero de veces, digamos n, en CD, es decir, a=mu y b=nu.*

Esto equivale a decir que la razón entre las longitudes de los segmentos AB y CD, es un número racional: Si los segmentos AB y CD, de longitudes a y b, respectivamente, son conmensurables, existe un segmento de longitud u y números naturales m y n tales que a=mu y b=un. Entonces $\frac{a}{b} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}$.

Por otro lado, si $\frac{a}{b}$ es racional, existen números naturales m y n tales que $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. Dividimos el semento AB en n segmentos iguales, cada uno de longitud u. Entonces a=mu, y así, $b=\frac{an}{m} = \frac{(mu)n}{m} = nu$. Es decir, el segmento BC queda dividido en n segmentitos también de longitud u. Entonces los segmentos AB y BC son conmensurables.

Desde el siglo V a.C. se sabe que existen segmentos que no son conmensurables, por ejemplo, la diagonal y el lado de un mismo cuadrado: la razón entre sus longitudes es $\sqrt{2}$. Entonces, el argumento con el que nos convenció el profesor de antaño, proporciona una demostración incompleta de la fórmula para el área de un rectángulo.

Max Dehn, el célebre matemático alemán que, siendo aún estudiante de doctorado de David Hilbert, logró solucionar el tercer problema que su eminente maestro planteó, junto con otros 22, presentándolos en el Congreso de París de 1900 como algunos de los más importantes retos matemáticos del inicio del siglo XX, demostró, en 1903 (ver **[D3]**), que:

Teorema 1. *Un rectángulo □ABCD, con dimensiones a=l(AB) y b=l(BC) (longitudes de AB y BC, respectivamente), se puede descomponer en un número finito de cuadrados más pequeños (baldosas) si , y sólo si,* $\frac{a}{b}$ *es racional.* (Ver **[B1]**).

Gracias a este teorema sabemos que, si los lados de un rectángulo miden a y b, *con* $\frac{a}{b}$ irracional, no podremos descomponerlo en un número finito de cuadraditos, así que el cálculo de su área no se puede hacer con el argumento pitagórico de arriba. Cabe preguntarse entonces: ¿Cómo se demuestra la fórmula del área de un rectángulo?, ¿cómo la obtuvo Euclides?

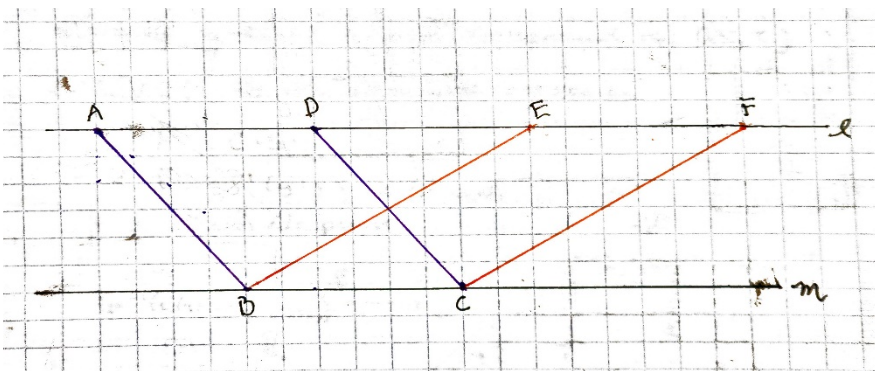
Les sorprenderá saber que Euclides no usaba fórmulas, sino que comparaba las áreas o los volúmenes entre dos figuras, descomponiéndolas y reacomodándolas. Por ejemplo, sin necesidad de tener la fórmula para el área de un paralelogramo, él sabía que:

EI.35 (Teorema 35 del libro I de los *Elementos*). *Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas, son iguales entre sí.*

Demostración

En la figura de abajo, ΔDCF y ΔABE son congruentes y tienen, por lo tanto, áreas iguales. Si P y Q son las áreas de los paralelogramos □$ABCD$ y □$EBCF$, repectivamente, y si R es el área del cuadrilátero □$ABCF$, se tiene la siguiente igualdad en áreas:

$P = R - \text{Área de } \Delta DCF = R - \text{Área de } \Delta ABE = Q.$



El propósito de este escrito es demostrar el Teorema 1. Lo haremos en varios pasos:

Lema. *Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reales. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$, existen un número natural q y números enteros $p_1, p_2, \dots, p_n$, tales que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene*

$$|a_i - (p_i / q)| < \frac{\varepsilon}{q}.$$

Si además, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i > 0$, entonces $p_i \geq 0$.

Demostración:
Sean $M \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{M} < \varepsilon$, y $C = [0, 1]^n$, subespacio de $\mathbb{R}^n$. Si, para cada $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $\{x\}$ a la parte fraccional de x, consideremos los siguientes M^n puntos en $\mathbb{R}^n$:

$Q_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, $Q_1 = (\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\})$, $Q_2 = (\{2a_1\}, \{2a_2\}, \ldots, \{2a_n\})$, …, $Q_3 = (\{3a_1\}, \{3a_2\}, \ldots, \{3a_n\})$, …, $Q_{M^n} = (\{M^n a_1\}, \{M^n a_2\}, \ldots, \{M^n a_n\})$.

Podemos partir C en M^n pequeños cubos congruentes cuyas aristas tengan longitud $\frac{1}{M}$. Como hay $M^n + 1$ puntos Q_l en C, por el *Principio del encasillamiento*, debe haber un cubo pequeño que contenga al menos dos de estos puntos, digamos Q_r y Q_s, con $r \neq s$. Entonces, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\left| \{ra_i\} - \{sa_i\} \right| < \frac{1}{M}.$$

Como, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$ra_i = [ra_i] + \{ra_i\} \quad y \quad sa_i = [sa_i] + \{sa_i\},$$

entonces

$$(r - s)\, a_i = ra_i - sa_i = [ra_i] + \{ra_i\} - ([sa_i] + \{sa_i\}) = [ra_i] - [sa_i] + (\{ra_i\} - \{sa_i\}) =$$
$$= p_i + (\{ra_i\} - \{sa_i\}),$$

donde $p_i = [ra_i] - [sa_i]$. *Por lo tanto,*

$$\{ra_i\} - \{sa_i\} = (r - s)\, a_i - p_i$$

Entonces, si $q = \left| r - s \right|$, *entonces* $\frac{1}{q}(\{ra_i\} - \{sa_i\}) = \frac{r-s}{|r-s|}a_i - (p_i/q)$. Así, si $r > s$,

$$|a_i - (p_i / q)| = |a_i - (p_i / q)| = |(\{ra_i\} - \{sa_i\})/q| \leq \frac{1}{Mq} < \frac{\varepsilon}{q}$$

Si además, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i > 0$, *entonces* $p_i \geq 0$. ■

Definición. *Dados dos rectángulos R y R' en* $\mathbb{R}^2$, *se dice que R se puede descomponer en R', por traslaciones de rectángulos, si existen descomposiciones de R y de R',* $R = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} R_i$, $R' = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} R_i'$, *en rectángulos con interiores ajenos entre sí, de modo que, para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *existe una traslación* $T_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que* $T_i(R_i) = R_i'$.

Teorema 2: *Sean* $R = [s, S] \times [t, T]$ *y* $R' = [s', S'] \times [t', T']$ *dos rectángulos en* $\mathbb{R}^2$, *tales que* $a = S - s$, $b = T - t$, $c = S' - s'$ *y* $d = T' - t'$, *es decir, de dimensiones* $a \times b$ *y* $c \times d$, *respectivamente. Entonces R se puede descomponer en R', por traslaciones de rectángulos, si y sólo si* $ab = cd$ *y* $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$.

Demostración:
Sean $R = [s, S] \times [t, T]$ y $R' = [s', S'] \times [t', T']$ dos rectángulos en $\mathbb{R}^2$.
Probaremos primero la suficiencia:
Supongamos que $ab = cd$ *y* $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$. Entonces existen u, v números naturales tales que $\frac{a}{c} = \frac{u}{v}$.
Tomemos particiones

(1) $x_0 = s < x_1 < x_2 < \ldots < x_u = S$,

del intervalo [s, S], tales que, para toda $i \in \{1, \ldots, u\}$, $x_i - x_{i-1} = \frac{a}{u}$,

(2) $x_0' = s' < x_1' < x_2' < \ldots < x_u' = S'$,

del intervalo [s', S'], tales que, para toda $j \in \{1, \ldots, v\}$, $x_i' - x_{i-1}' = \frac{c}{v}$,

(3) $y_0 = t < y_1 < y_2 < \ldots < y_v = T$,

del intervalo [t, T], tales que, para toda $i \in \{1, \ldots, v\}$, $y_i - y_{i-1} = \frac{b}{v}$, y

(4) $y_0' = t' < y_1' < y_2' < \ldots < y_u' = T'$,

del intervalo [t', T'], tales que, para toda $j \in \{1, \dots, u\}$, $y_i' - y_{i-1}' = \frac{d}{u}$.

Estas particiones dan lugar a sendas disecciones (descomposiciones) de los rectángulos R y R', cada uno en uv rectangulitos:

$$R = \bigcup_{(i,j)\in\{1,\dots,u\}x\{1,\dots,v\}} R_{ij}, \qquad R' = \bigcup_{(j,i)\in\{1,\dots,v\}x\{1,\dots,u\}} R_{ji}'$$

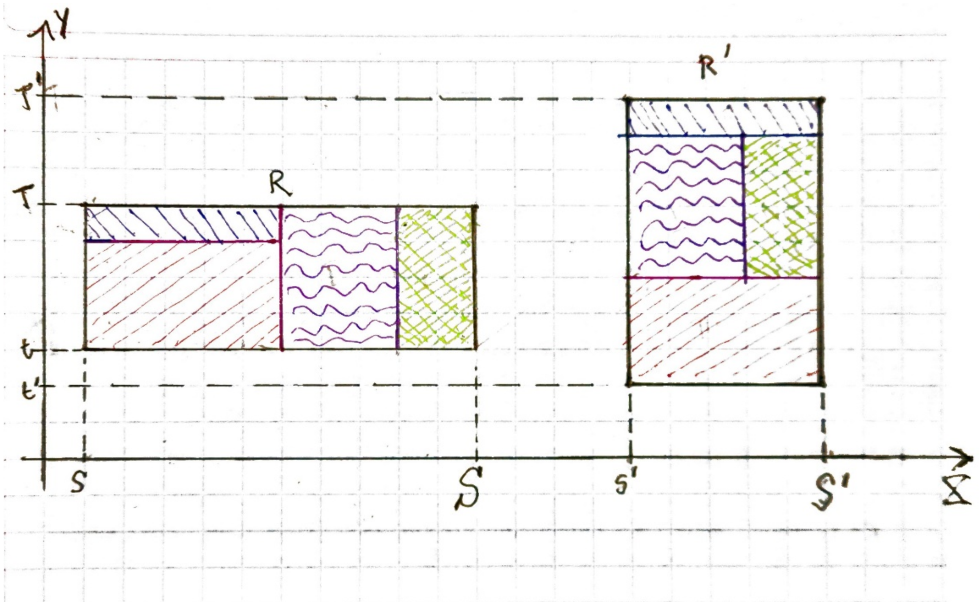
donde, para cada $(i, j) \in \{1, \dots, u\}x\{1, \dots, v\}$, $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\ X\ [y_{j-1}, y_j]$, tiene dimensiones $\frac{a}{u} x \frac{b}{v}$ y, para cada $(j, i) \in \{1, \dots, v\}\ x\ \{1, \dots, u\}$, $R_{ji}' = [x_{j-1}', x_j']\ X\ [y_{i-1}', y_i]$, tiene dimensiones $\frac{c}{v} x \frac{d}{u}$. Como $\frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \frac{u}{v}$, entonces $\frac{a}{u} = \frac{c}{v}$ y $\frac{d}{u} = \frac{b}{v}$. Entonces cada rectangulito R_{ij} tiene las mismas dimensiones que R_{ji}' *y* se puede trasladar a él.

Ahora nos toca demostrar la necesidad: Supongamos, para comenzar, que *R y R'* están en el semiplano superior y que $[s, S] \cap [s', S'] = \emptyset$.

Ahora vamos a suponer que R se puede descomponer en R' por traslación de rectángulos. Entonces

$$R = \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} [x_i, X_i]\ x\ [y_i, Y_i] \quad \text{y} \quad R' = \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} [x_i', X_i']\ x\ [y_i', Y_i'],$$

donde cada $[x_i, X_i]\ x\ [y_i, Y_i]$ se corresponde con $[x_i', X_i']\ x\ [y_i', Y_i']$ y, en particular, tienen la misma área. Así, R y R' tienen la misma área: $ab = cd$.



Sobre el eje X, los puntos $x_1, X_1, \dots, x_n, X_n$, parten al intervalo $[s, S]$ en subintervalos cerrados y no degenerados $L_1, \dots, L_u$, mientras que los puntos $x_1', X_1', \dots, x_n', X_n'$, parten al intervalo $[s', S']$ en subintervalos $L_{u+1}, \dots, L_N$, cerrados y no degenerados.

Por el Lema 1, dada $\varepsilon = \frac{1}{2N}$, existen enteros positivos $q, p_1, \dots, p_n$, tales que para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, se cumple:

$$|l(L_i) - (p_i / q)| < \frac{1}{2Nq} \qquad (1)$$

Para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, definimos la "medida entera" del intervalo L_i:

$$m(L_i) = p_i \qquad \text{y},$$

si $I \subseteq \{1, \dots, N\}$, $\quad m(\bigcup_{i\in I} L_i) = \sum_{i\in I} m(L_i)$.

La propiedad más importante de m es que conserva la igualdad, en el sentido de que, para cada par I, J de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, N\}$,

$$l(\bigcup_{i\in I} L_i) = l(\bigcup_{j\in J} L_j) \quad \Longrightarrow \quad m(\bigcup_{i\in I} L_i) = m(\bigcup_{j\in J} L_j). \qquad (2)$$

En efecto,

$$|\sum_{i\epsilon I} m(L_i) - \sum_{j\epsilon J} m(L_j)| = |\sum_{i\epsilon I} m(L_i) - q\sum_{i\epsilon I} l(L_i) + q\sum_{j\epsilon J} l(L_j) - \sum_{j\epsilon J} m(L_j)|$$

$$= q\, |\sum_{i\epsilon I} (m(L_i)/q - l(L_i)) - \sum_{j\epsilon J} (m(L_j)/q - l(L_j))|$$

$$= q\, |\sum_{i\epsilon I} (p_i/q - l(L_i)) - \sum_{j\epsilon J} (p_j/q - l(L_j))| \leq q\, |\sum_{i\epsilon I} 1/(2Nq) + \sum_{j\epsilon J} 1/(2Nq)\, |$$

$$< 2Nq\, (\tfrac{1}{2Nq}) = 1.$$

Como $\sum_{i\epsilon I} m(L_i) - \sum_{j\epsilon J} m(L_j)$ es un entero, se deduce que

$$\sum_{i\epsilon I} m(L_i) = \sum_{j\epsilon J} m(L_j).$$

En particular, como, para cada $i \epsilon \{1, \ldots, n\}$, $l([x_i , X_i]) = l([x_i' , X_i'])$, se concluye que

$$m([x_i , X_i]) = m([x_i' , X_i']) \qquad (3)$$

y entonces,

$$\sum_{i \epsilon \{1,\ldots,n\}} m([x_i , X_i])\, l([y_i , Y_i]) = \sum_{i \epsilon \{1,\ldots,n\}} m([x_i' , X_i'])\, l([y_i' , Y_i']) \qquad (4)$$

Si, para cada $i \epsilon \{1, \ldots, n\}$, $\{L_j\}_{j\epsilon I^{(i)}}$ es la familia de subintervalos que forman $[x_i , X_i]$, obtenemos

$$m([x_i , X_i]) = m(\cup_{j\epsilon I^{(i)}} L_j) = \sum_{j\epsilon I^{(i)}} m(L_j) \qquad (5)$$

y, por lo tanto,

$$\sum_{i \epsilon \{1,\ldots,n\}} m([x_i , X_i])\, l([y_i , Y_i]) = \sum_{i \epsilon \{1,\ldots,n\}} (\sum_{j\epsilon I^{(i)}} m(L_j))\, l([y_i , Y_i]). \qquad (6)$$

Ahora intercambiemos el orden de las sumatorias. Fijemos $k \epsilon \{1, \ldots, u\}$. ¿Cuál es el coeficiente de $m(L_k)$ en la suma doble (6)?

Como $K \epsilon I^{(i)}$ si y sólo si $L_k \subseteq [x_i , X_i]$, obtenemos los coeficientes de $m(L_k)$ añadiendo las alturas $l([y_i , Y_i])$ de aquéllos rectángulos $[x_i, X_i] \times [y_i , Y_i]$ que están arriba de L_k. Dado que esta suma es igual a b, obtenemos la siguiente "propiedad aditiva":

$$\sum_{i \epsilon \{1,\ldots,n\}} m([x_i , X_i])\, l([y_i , Y_i]) = (\sum_{k \epsilon \{1,\ldots,u\}} m(L_k))\, b. \qquad (7)$$

Análogamente,

$$\sum_{i \epsilon \{1,\ldots,n\}} m([x_i' , X_i'])\, l([y_i , Y_i]) = (\sum_{k \epsilon \{u+1,\ldots,N\}} m(L_k))\, d \qquad (8)$$

Por (4), (7) y (8),

$$\frac{d}{b} = (\sum_{k \epsilon \{1,\ldots,u\}} m(L_k)) / (\sum_{k \epsilon \{u+1,\ldots,N\}} m(L_k))$$

es racional. Entonces también $\frac{a}{c}$ $(= \frac{d}{b})$.

Como un corolario, demostremos, ahora sí, el Teorema 1:

Teorema 1. (ver [D3]) *Un rectángulo □ABCD, con dimensiones a=l(AB) y b=l(BC), puede ser descompuesto en un número finito de cuadrados más pequeños (baldosas) si , y sólo si,* $\frac{a}{b}$ *es racional.* (Ver **[B1]**).

Demostración:

Si $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$, donde u y v son números naturales, entonces dividimos el segmento $\overline{AB}$ en u segmentos iguales, cada uno de longitud $\frac{a}{u}$, y el segmento $\overline{BC}$ en v segmentos iguales, cada uno de longitud $\frac{b}{v}$ $(= \frac{a}{u})$. Entonces el rectángulo queda teselado en uv cuadrados.

Ahora supongamos que existe una descomposición (teselación) del rectángulo en un número finito de cuadrados. Rotemos el rectángulo, junto con su teselación, un ángulo de 90 grados.

El nuevo rectángulo, *R'*, tiene dimensiones $b \times a$. Note que el rectángulo original *R* se puede descomponer en *R'* por traslaciones de rectángulos (de hecho, usando los cuadrados de las teselaciones). Entonces, por el Teorema 2, *a/b* es racional. □

Referencias

[A] M. Aigner, G. M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2013.
[B1] D. Benko: *A new Approach to Hibert's Third Problem*, Amer. Math. Montly, **114** (2007), 665-676.
[B2] V. G. Boltyanskii: *Figuras equivalents y equidescomponibles*, Editorial Limusa-Wiley, S. A., México 1973.
[C] P. Cartier: *Décomposition des Polyédres: le point sur le troisiéme probléme de Hilbert*, Sémin. Bourbaki (1984-1985), No. 646
[D1] M. Dehn: *Ueber raumgleiche Polyeder*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse (1900), 465-478.
[D2] M. Dehn: *Ueber den Rauminhalt,* Mathematische Annalen **55** (1902).
[D3] M. Dehn: *Über die Zerlengung von Rechtecken in Rechtecke,* Math. Ann. **57** (1903).
[G] C. F. Gauss: *"Congruenz und Symmetrie": Briefwechsel mit Gerling,* pp. 240-249 in: Werke, Band VIII, Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; B. G. Teubner, Leipzig 1900.
[H1] R. Hartshorne: *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, New York Berlin Heildelberg 2000.
[H2] D. Hilbert: *Mathematical Problems*, Lecture delivered at the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, Bulletin Amer. Math. Soc. **8** (1902), 423-479.
[S] J. P. Syder: *"Sur la decomposition des polyèdres"*, Comm. Math. Helv. **16** (1943-1944), pp. 266-273.

Iteración y Fractales

Patricia Domínguez Soto
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Iterar es el acto de repetir varias veces un proceso con la intención de alcanzar un objetivo o resultado deseado. A cada repetición del proceso se le llama una **"iteración"**, y los resultados de una iteración se utilizan como punto de partida para la siguiente iteración.

Un ejemplo muy simple es el siguiente: Tomemos la ecuación: X + 5.

Empecemos con: X =2.

2 + 5 = 7 primera iteración

7 + 5 = 12 segunda iteración

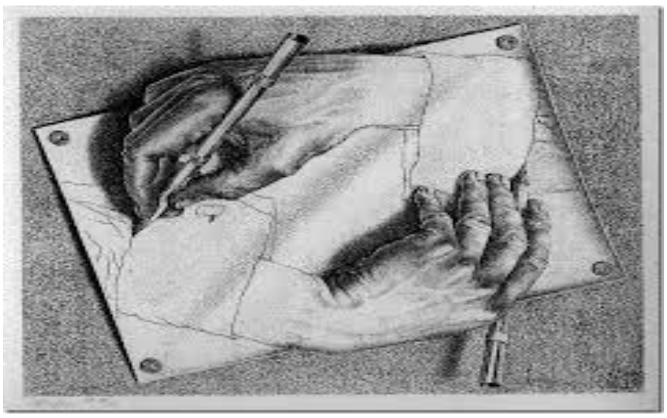
12 + 5 = 17 tercera iteración

…..

…..etc.

Así, obtenemos la sucesión 2, 7, 17, 22, …..

Otro ejemplo de un proceso iterativo es la litografía de Escher (manos dibujando).



La iteración se puede utilizar en varias áreas por ejemplo:

A. En el **análisis numérico** o **cálculo numérico**, que es la rama de las matemáticas encargada de diseñar algoritmos para simular aproximaciones de solución a problemas en análisis matemático, los métodos más utilizados en esta rama son el Método Newton y la Fórmula de Newton Raphson

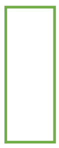
B. En la **geometría**, utilizando reglas básicas para construir fractales.

C. En la **economía,** en los gráficos de precios y en los fractales de gráficas.

D. En el área de los **sistemas dinámicos discretos,** encontrando los conjuntos de Julia que son fractales.

El método de aproximaciones tiene sus orígenes en la matemática de los babilonios quienes desarrollaron un método de aproximación para encontrar la raíz cuadrada de un número determinado. Explicamos el método con un ejemplo.

Si se quería encontrar la raíz cuadrada de 20, se buscaba construir un cuadrado cuya área fuera 20 y determinar la longitud de este cuadrado, que correspondería a la raíz de 20. Primero se construiría un rectángulo de área 20, y se escogerían los lados 10 y 2 como en la figura.

10

2

Se toma el promedio de las longitudes, es decir, 6 servirá para aproximar a la raíz del número. Luego, construimos un rectángulo de base 6 y área 20. Recordar A= b x h, así A/b = h. Entonces la altura debe ser h= 20/6 =3.33 y se obtiene la figura siguiente.

3.33

6

Con este nuevo rectángulo, de nuevo se promedian las longitudes del último rectángulo , es decir, (3.33 + 6)/2 = 9.33/2 = 4.665 y se construiría un nuevo rectángulo de base 4.665 y de área 20, cuya altura será de 20/4.665=4.287.

4.287

4.665

Observemos en la siguiente tabla, cómo se han ido aproximando los datos a la raíz buscada.

BASE	**ALTURA**	**ÁREA**
2	10	20
6	3.333	20
4.666667	4.285714	20
4.47619	4.468085	20
4.472138	4.472134	20
4.472136	4.472136	20

Para el cálculo de la raíz cuadrada se hace uso del concepto de área de un rectángulo, al cual se le hacen varias compensaciones entre sus lados, de tal manera que el área permanezca constante.
De manera general, si *n* es el número al que se desea extraer las raíz cuadrada, se establecerá que existen dos números que multiplicados dan *n*.

Sean los números x_0, x_1 con $(x_0)(x_1) = n$. Los siguientes números se encuentran por las fórmulas:

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad x_3 = \frac{n}{x_2}, \quad x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{\frac{n}{x_3} + x_3}{2}, \quad x_5 = \frac{n}{x_4}, \ \ldots.$$

De forma general se tiene la fórmula

$$\boldsymbol{x_i = \frac{\frac{n}{x_{i-1}} + x_{i-1}}{2}}.$$

Otro método de aproximación es el método de Newton que consiste en aproximar soluciones de polinomios, sin usar derivada. El método fue sistemáticamente discutido por Joseph Raphson en 1690 y usando la derivada (que Newton no ocupó) obtuvo la familiar **fórmula de Newton-Raphson**.

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}.$$

Podemos seguir comentando sobre métodos recursivos, pero ese no es el principal propósito del tema. Quermos ver cómo se utiliza la iteración para construir fractales. Por eso, la siguiente definición es de fractal.

Un **fractal** es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas.
El término fractal fue propuesto por Benoît Mandelbrot en1975 y deriva del latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal.

Benoît Mandelbrot (1924 – 2010)

Un objeto fractal debe tener la siguiente característica:

Existencia de similitud entre detalles a gran escala y a pequeña escala del objeto.

Para explicar lo anterior recordemos lo siguiente: Una **transformación de semejanza** en el plano o en el espacio, la obtenemos componiendo las tres transformaciones siguientes:

1. A la figura dada se le aplica **una escala**, aumentando o disminuyendo el tamaño.

2. Luego a la figura que se obtuvo se le aplica una **rotación** respecto a algún centro dado, y en el espacio se dice en que plano y en qué dirección tiene que rotarse la figura.

3. Finalmente se **desplaza** la figura que se obtuvo sin cambiar su tamaño ni girarla o rotarla.

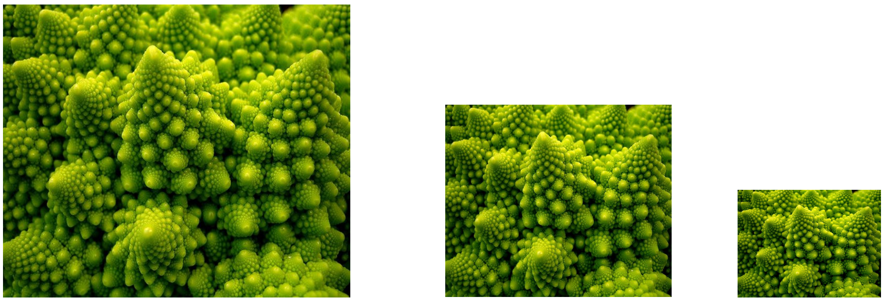
Con estos tres pasos se obtiene una figura en la que todos sus ángulos son iguales a los de la figura original, las proporciones de la figura se preservan, salvo la escala, lo único que cambia en la figura es el tamaño y la disposición en el plano o en el espacio.

Autosemejanza es la propiedad de un objeto (llamado *objeto autosimilar*) en el que el todo es exacta o aproximadamente semejante a una parte de sí mismo.

Con la anterior definición podemos dar un anueva definición de fractal: Un **fractal** es una estructura que está formada por partes semejantes, en cierta manera, al conjunto completo. Esta definición enfatiza un aspecto predominante en las objetos fractales que es la invariancia en presencia de cambios de escala.

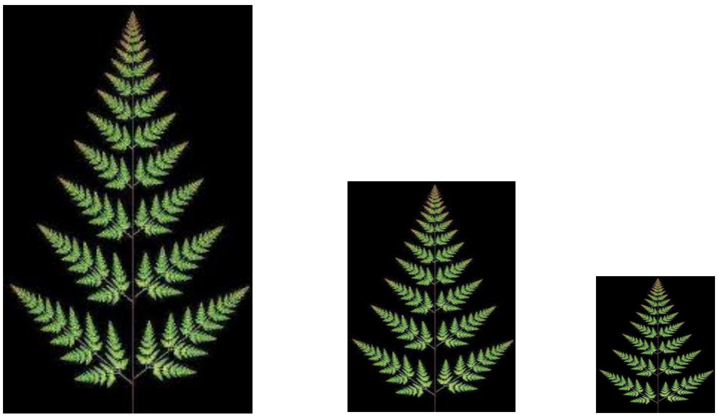
Algunos ejemplos de **fractales en la naturaleza** son los siguientes:

Tomemos la brócoli del dibujo (a) y cortemos con un cuchillo uno de sus picos, ahora la rotamos y la trasladamos para obtener la figura (b) y así sucesivamente. Observemos que la figura ha sufrido un cambio de escala, pero el pedazo más pequeño en (c) de la brócoli es semejante a la original en (a).



(a) (b) (c)

Lo mismo pasaría si tomamos una hoja de helecho y cortamos un trozo y utilizamos rotación y traslación.



También se pueden construir **fractales en matemáticas** utilizando reglas simples. El ejemplo más conocido es el triángulo de Sierpinski, para construirlo tomemos el siguiente proceso.

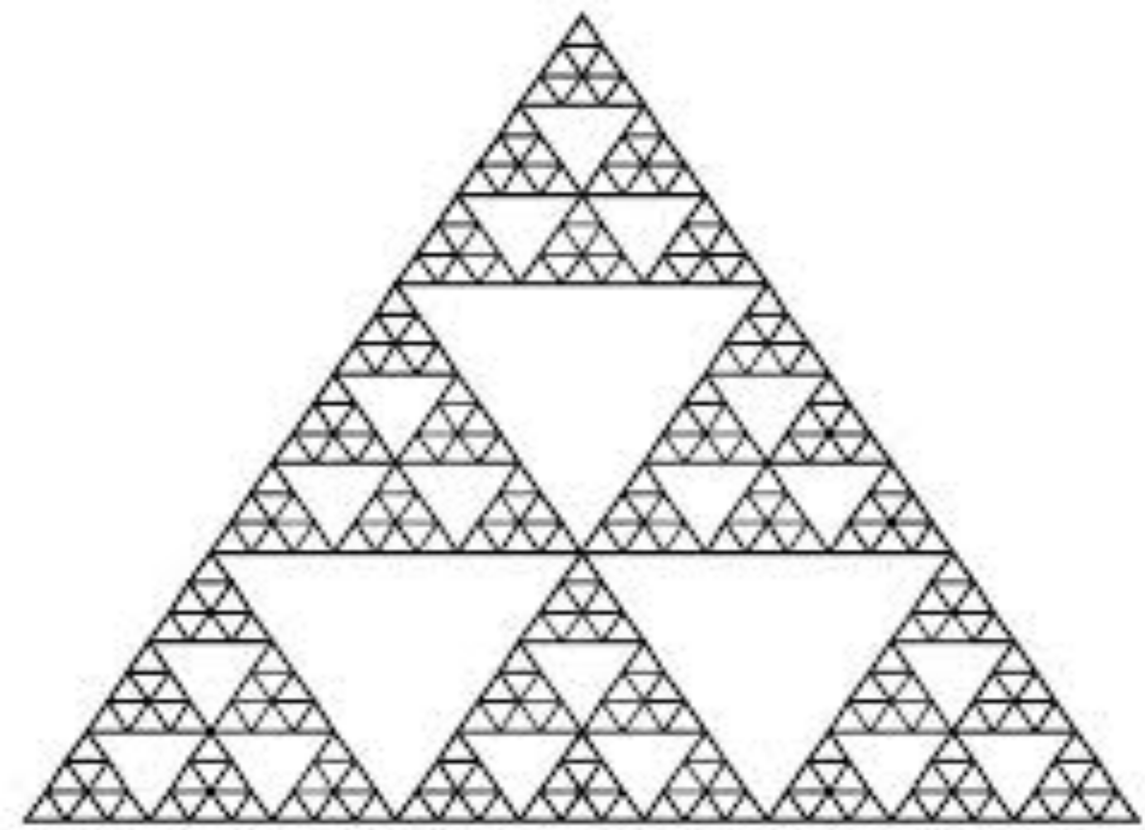
Proceso = Cuando veas un triangulo equilátero toma los puntos medios de los lados y traza un triangulo, después quita el triángulo que trazaste. Repite el proceso indefinidamente.

Primera iteración

Segunda iteración

Tercera iteración

Con una hoja más grande de papel podemos continuar el proceso



El tríangulo de Sierpinski es un fractal que se construye usando el proceso, mencionado arriba, infinitas veces. Cada uno de nosotros podemos construir fractales interesantes usando reglas muy simples.

¡Inténtalo!

Para Pensar: Frases célebres

Katherin Jhonson (26/08/1918-24/02/2020): Matemática, física y científica espacial estadounidense conocida por sus contribuciones en el campo de la aeronáutica y sus programas espaciales que trabajó 35 años para la NASA ayudando con sus cálculos en la consecución de los primeros vuelos espaciales tripulados del país.

En matemáticas, o tienes razón o estás equivocado.

Siempre tendremos a STEM con nosotros. Algunas cosas caerán fuera del ojo público y desaparecerán, pero siempre habrá ciencia, ingeniería y tecnología. Y siempre, siempre habrá matemáticas.

Para sonreir, divertirse y reflexiona

Primaria: 5+5=10
Secundaria: x+4=-2
Bachillerato: $x^2+3x-5=sen(x)$
Universidad: ∫√x/(x(e^(1-ln(x))
Vida diaria: 2+2=4

Problema

Enrique Barradas Guevara
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Comedia algebraica 2=3

En primer lugar aparece en escena una igualdad indiscutible: $4 - 10 = 9 - 15$.

En el siguiente “cuadro” se suma a ambos miembros de esta igualdad una misma cantidad, 6(1/4):

$$4-10+6(1/4) = 9-15+6(1/4).$$

El anterior desarrollo de la comedia se reduce a transformaciones:

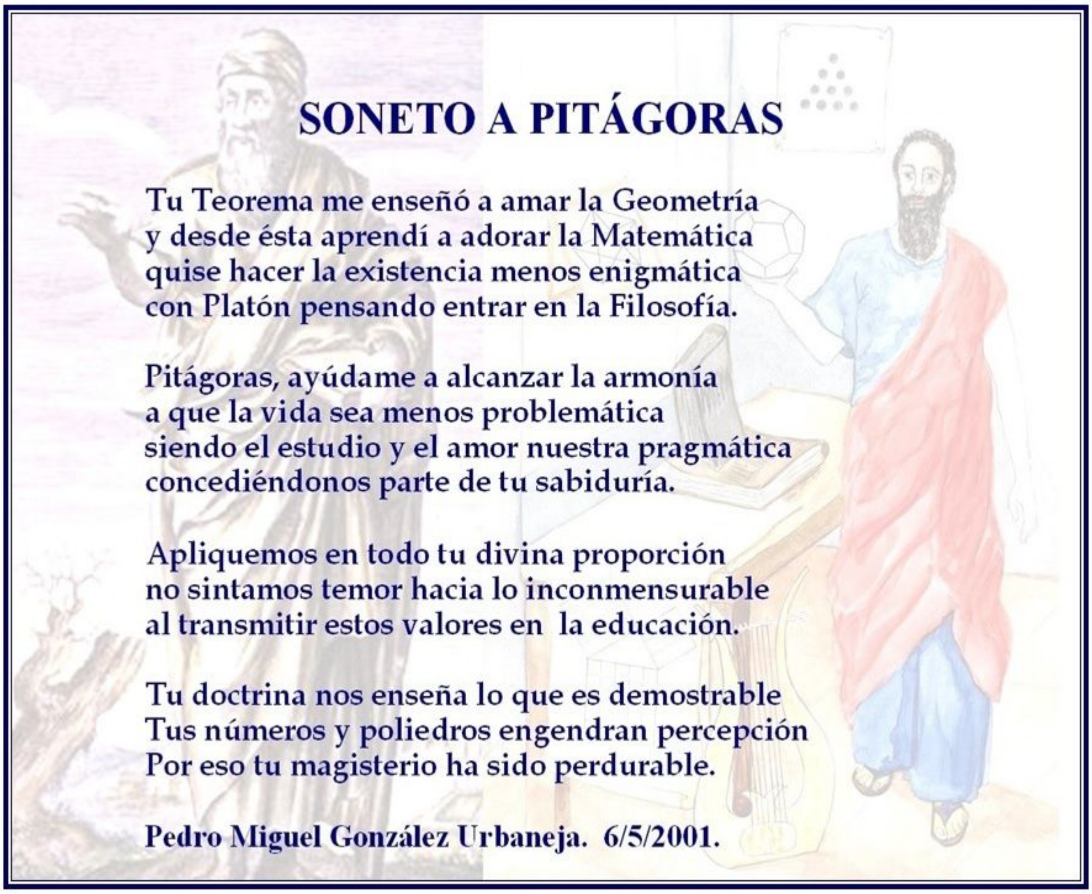
$$2^2 - 2\times2\times(5/2)+(5/2)^2 = 3^2 - 2\times3\times(5/2)+(5/2)^2$$
$$(2 - 5/2)^2 = (3 - 5/2)^2$$

Extraída la raíz cuadrada de ambos miembros de la igualdad, resulta: $2-5/2 = 3-5/2$.

Sumando 5/2 a uno y otro miembro, llegamos a la igualdad absurda: $2=3$.

¿En qué consiste el error? (respuesta en el próximo número).

Soneto de enero-abril

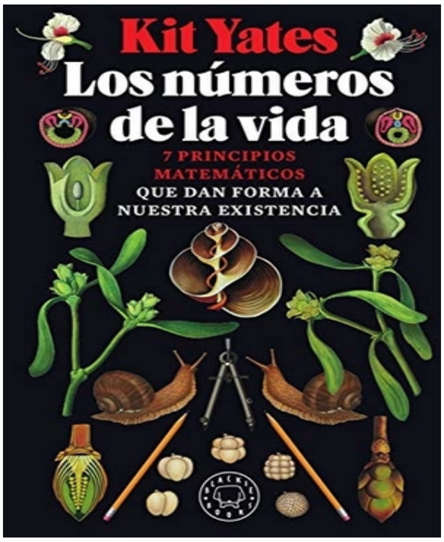


Recomendación de libro

Libro: *Los números de la vida*

Autor: *Kit Yats; Traducción de Francisco J. Ramos Mena*

Editorial: *Blackie Books S.L.U.*



Cualquier cosa con la que nos encontremos en la vida se puede articular a través de esta ciencia. Por eso, este libro trata de **explicar la magia aplicada de los números** que describen nuestra vida y la del planeta. Sin ser un libro de Matemáticas al uso, ni estar destinado a grandes expertos, nos ayuda a comprender cómo funciona el mundo, la sociedad y, en general, la vida.

Reseña de libro

Título: *La gran novela de las matemáticas*

Autores: *Michaël Launay*

Editorial: ***PAIDÓS***

Reseña de Francisco R. Villatoro
Te recomiendo el estupendo libro de Mickaël Launay @mickaellaunay, «La gran novela de las matemáticas. De la prehistoria a la actualidad», Paidós (2017) [246 pp.]. Al hilo de la historia el autor nos muestra su pasión por las matemáticas y cómo esta área del saber ha evolucionado desde Babilonia hasta su tesis doctoral en teoría de la probabilidad.

El libro es muy entretenido incluso para los lectores legos. El autor lleva muchos años divulgando matemáticas en Francia. Su canal de youtube Mickaël Launay es una visita obligada si entiendes el francés. Además te recomiendo su página web Micmaths sobre matemáticas recreativas. A lo largo del libro se nota la gran experiencia del autor como divulgador. Más aún, el autor derrocha pasión, mostrando que las matemáticas son hermosas, poéticas, emocionantes y sorprendentes. Un libro ideal para leer y para regalar

El libro está dividido en la introducción y 17 capítulos breves (de entre 10 y 15 páginas por capítulo). En la introducción [pp. 9-11], el autor nos pide permiso para, «a lo largo de estas páginas, [llevarnos a] los meandros de una de las disciplinas más fascinantes y asombrosas que jamás ha practicado la especie humana. Partamos al encuentro de quienes han forjado su historia a golpe de descubrimientos inesperados y de ideas fabulosas. Abramos juntos la gran novela de las matemáticas».

En el capítulo 1, «Matemáticas a su pesar» [pp. 13-24], «la primera parada [es] en Mesopotamia. [Hace] diez mil años». Se nos presentan «las siete categorías de cenefas» que se pueden observar en la alfarería mesopotámica en los museos, como el Louvre. «Y al principio fue el número» [pp. 25-35], el segundo capítulo, parte en la ciudad de Uruk, donde «a finales del cuarto milenio, [poco] a poco, la escritura se perfila y adopta su aspecto cuneiforme, compuesta de pequeñas muestras en forma de clavo». Se nos presenta la evolución histórica de la grafía usada para representar los números, incluyendo el inicio de la notación posicional y finalizando con los guarismos arábigos.
«Que no entre aquí nadie que no sea geómetra» [pp. 37-48], el capítulo 3, se dedica a la geometría, que «cautivó a los más grandes sabios de la Antigüedad.» Todo empezó con los agrimensores y las cuerdas marcadas con nudos en las posiciones 3-4-5 que permitían dibujar ángulos rectos. Finaliza el capítulo con los números triangulares y su relación con las áreas.

El capítulo 4, «El tiempo de los teoremas» [pp. 49-65], nos lleva de la Geoda a los cinco poliedros regulares, y su relación mutua (sin olvidar la geometría del balón de fútbol). Finaliza el capítulo con Pitágoras y su secta, los pitagóricos. ¿Pitágoras fue el primero en ofrecer una demostración del teorema de Pitágoras? «Ninguna fuente fiable permite confirmarlo, y la demostración más antigua que ha llegado hasta nosotros solo aparecerá en los *Elementos* de Euclides, tres siglos más tarde».
«Un poco de método» [pp. 67-77], el capítulo 5, justifica el camino trazado por Euclides para las matemáticas: «demostraciones – axiomas – teoremas – demostraciones». «Una paradoja es algo que debería funcionar, pero que no funciona, [como la frase] «estoy mintiendo». [Si] un enunciado viene a afirmar su propia falsedad, entonces no puede ser lógicamente verdadero ni falso». Por supuesto, el autor no olvida a Zenón, Aquiles y la tortuga. «La noción de infinito en matemáticas será, sin duda, la principal fuente de paradojas, pero también la cuna de las teorías más fascinantes».

El capítulo 6, «En busca de π» [pp. 79-89], se escribió «el 14 de marzo de 2015. ¡Hoy es un día de fiesta!». Aparece Hipatia, una de las primeras matemáticas, ya que «se admitía a las mujeres en la escuela de Pitágoras [y] conocemos los nombres de varias de ellas, como Teano, Autocáridas o Habroteleia, pero es preciso decir que no sabemos prácticamente nada de ellas». Hay más capítulos interesantes para perderse en la lectura.

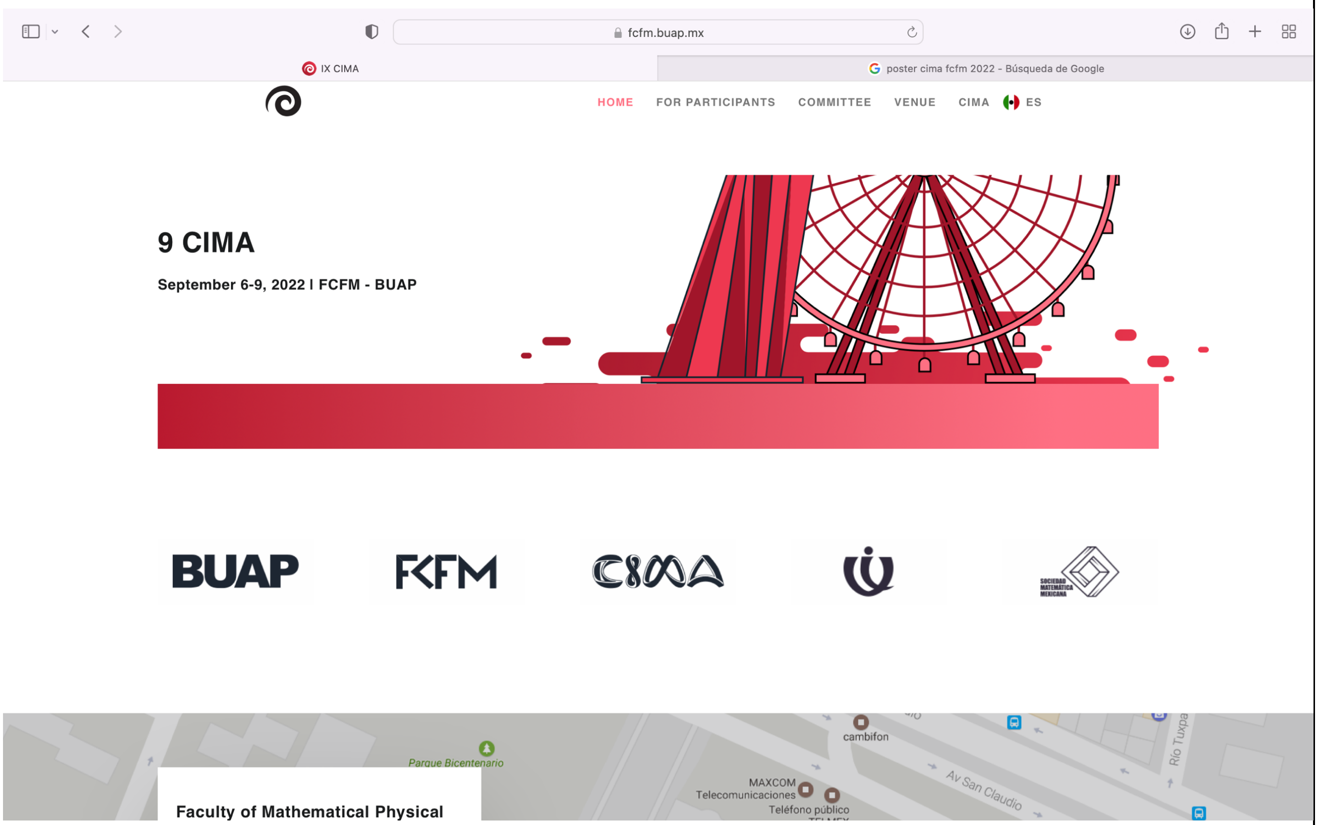
En resumen, un libro que se lee muy fácil, repleto de anécdotas y curiosidades, que disfrutará todo el mundo, pero en especial los aficionados a la divulgación científica al hilo de la historia.

Si te ha interesado lo escrito hasta ahora y quires seguir con la reseña del libro, puedes consultar el blog de Francisco R. Villatoro quien estudió informática, física, se doctoró en matemáticas, investiga en ciencias computacionales, le dio clases a ingenieros industriales y ahora imparte bioinformática a futuros bioquímicos en la Universidad de Málaga. Quiere ser escritor de libros de divulgación científica cuando se jubile. Mientras tanto escribe en su blog para practicar el arte de hacer fácil lo difícil. Aunque no siempre lo logre,

Puedes encontrar la reseña en la siguiente liga:
https://francis.naukas.com/2017/06/03/resena-la-gran-novela-de-las-matematicas-de-mickael-launay/

Actividades Academia de Matemáticas en la FCFM

Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones 6-9 de septiembre de 2022 en las intalaciones d ela FCFM



The Benemérita Universidad Autónoma de Puebla through the Mathematics Academy of the Faculty of Mathematical Physical Sciences

Call

to the Ninth International Conference on Mathematics and its Applications (9CIMA), will take place from **September 6 to 9, 2022**, at the Faculty of Physical Mathematical Sciences (FCFM) of the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

Talk Sessions

Algebra, integral theory and its applications, Categories, Differential equations and mathematical modeling, Geometry, History, philosophy and outreach of mathematics, Mathematical analysis, Mathematical education, Mathematics for Computer Science and Electronic, Mathematics and society, Probability, statistics, and actuarial science, Topology.

Nos complace informar a la comunidad Matemática, que el 55 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana se llevará a cabo del 23 al 28 de octubre de 2022, teniendo como sede el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías CUCEI, de la Universidad de Guadalajara (U de G).
Agradecemos el apoyo de las autoridades de la U de G y de la Sociedad Matemática Mexicana para la organización del Congreso Nacional. Esperamos que disfruten su estancia en este magno evento.

¡Nos vemos en Guadalajara!

Publicaciones de la Academia de Matemáticas

Libro de Matemáticas y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2022 Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: David Herrera Carrasco dherrera@fcfm.buap.mx y Fernando Macías Romero fmacias@fcfm.buap.mx
Los trabajos recibidos después del 6 de enero (del año en curso) se tomarán en cuenta para un año después.

Libro de Topología y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.

Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2022. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: José Juan Angoa Amador jangoa@fcfm.buap.mx, Raúl Escobedo Conde escobedo@fcfm.buap.mx, Manuel Ibarra Contreras mibarra@fcfm.buap.mx, Agustín Contreras Carreto acontri@fcfm.buap.mx

La publicación del libro es anual, según sean las condiciones económicas del cuerpo académico de topología y sus aplicaciones.

Se invita a la comunidad a enviar trabajos de divulgación, problemas matemáticos para resolver, comentarios, etc., al e-mail axolote.fcfm@gmail.com
Las contribuciones deberán estar escritas en word con letra times new roman de 12 puntos.

Compiladores: Docentes de la Academia de Matemáticas, véase lista de docentes en www.fcfm.buap.mx/academiam/

Responsables de la Edición:
José Juan Angoa Amador,
Patricia Domínguez Soto,
Manuel Ibarra Contreras,
Agustín Contreras Carreto

Colaboradores:
Carlos Cabrera Ocañas (IMATE, UNAM)

Diseño logo: Santiago Sienra y Guillermo Sienra (Facultad de Ciencias, UNAM)

axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas