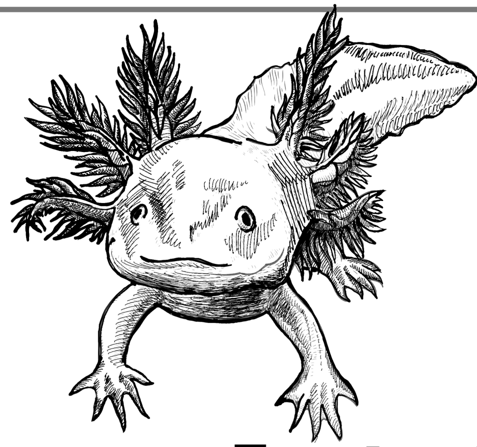
FCFM BUAP



axolote'

Revista mensual de la Academia de Matemáticas

Editorial

Este marzo 2020 seguramente será inolvidable porque en él han tenido lugar estos hechos: en Puebla, el renacimiento de la lucha estudiantil; en México, la reconsideración de la presencia imprescindible y trascendental de la mujer y la defensa de su derecho a la vida, y, en todo el planeta, la aparición de un implacable virus que, mediante la enfermedad que produce, el COVID-19, puede ser letal. La Academia de Matemáticas de la FCFM dedica su sexto número a estudiantes, mujeres y seres humanos que luchan por un mundo mejor, deseando que pronto el mundo retome la vida cotidiana con mayor sensibilidad y conciencia. Quizá debemos hacer notar que, en todo el proceso de información y, seguramente del diseño de las estrategias de control de la epidemia que el gobierno ha puesto en marcha, los modelos matemáticos y los métodos estadísticos han sido fundamentales . Una oportunidad para comenzar a hacer ver al gobierno la importancia de tener una matemática y mejor aún, una ciencia bien desarrollada en el país, y que requiere la inyección de recursos.

La primera contribución de este número tiene como tema central el número Pi, que fue escrito por Agustín Contreras el día internacional de Pi, y que lleva por título *14 de marzo casi a las 16 horas*. La segunda contribución es por parte de Manuel Ibarra, que está relacionada con la vida académica donde se relata un diálogo, muy interesante y divertido, entre un profesor y su estudiante con título *la bajada es por atrás*. También hay un cuento por el mismo autor con título *Alephs.* En la tercera contribución Esaú A. Pérez pregunta *¿es possible que un mono escriba una obra de Shakespeare?* y comenta que la pregunta se puede contestar mediante distintas herramientas que existen dentro de la disciplina de probabilidad. Como ya es común en axolote, hay varias secciones. En la sección para pensar se encuentran algunas frases célebres de Aristóteles, Platón y Pitágoras. En la sección para sonreír, divertirse y reflexionar hay algunos chistes y un reflexión anónima. El libro recomendado en marzo es *Fibonacci el soñador de números,* que es lectura para toda la familia, desde los 7 años en adelante. Este mes no hay reseña de libro, pero hay una sinopsis del libro con título *Gödel para todos* de la editorial Destino. No podía faltar la poesía; en el mes de Pi y la mujer, presentamos una, llamada 3.14159 26535 89793 23846..., nombre raro para una poesía, pero escrita de manera soberbia por la escritora polaca Wislava Szyimborska, premio Nobel de Literatura en 1996. Al final de axolote se encuentran las publicaciones de la Academia de Matemáticas, FCFM. Avisamos que los eventos como coloquios, seminarios, talleres que se anuncian en axolote quedan suspendidos hasta nuevo aviso.

14 de marzo, casi a las 16 horas

Este cuento se llama así porque fue terminado en esa fecha y a esa hora, es decir, en la hora 16 del día 14 del mes 3 (3/14/16), el instante **Pi** (el famoso número irracional, aproximado por 3.1416 y denotado por todo el mundo, desde Euler en el S.XVIII, con la letra griega π). Desde 1988 se festeja cada 14 de marzo como “Día Internacional de Pi”, por iniciativa del físico y artista estadounidense Lawrence N. Shaw (1939-2017, curador durante 33 años en el museo de ciencia de San Francisco The Exploratorium). A propuesta de la Unión Matemática Internacional, el Comité Ejecutivo de la UNESCO aprobó, en noviembre de 2019, convertir este día en “el Día Internacional de las Matemáticas”, a celebrarse por primera vez el 14 de marzo de este 2020. Por supuesto, cualquiera puede ponerle el nombre de otras remembranzas, pues también nacieron en esta fecha el matemático Waclaw Sierpinski y el físico Albert Einstein, y es el aniversario de los fallecimientos de Carlos Marx y de Stephen Hawking. Lo importante es hacer la fiesta.

En el año 225 a. de. C., todavía no se conocía ese valor aproximado de Pi, como 3.1416, que siempre se ha usado en las escuelas para sustituirlo en las famosas fórmulas $C= \pi D$, para calcular el perímetro de un círculo de diámetro D y $A= \pi r^2$, para hallar el área de cualquier círculo de radio r. Cuando estamos en la escuela primaria solemos aterrorizarnos cuando nos ponen a calcular perímetros o áreas de círculos, por tener que realizar multiplicaciones con este valor de Pi como factor, pero no sabemos que, tanto una buena aproximación de Pi, como estas horrendas fórmulas, han costado a la humanidad siglos y siglos de pensamiento matemático intenso. En estos tres logros tiene que ver, de manera preponderante, el gran matemático, físico, astrónomo, inventor e ingeniero Arquímedes de Siracusa (288-212 a.C.), quien escribió, entre otras mil realizaciones, un pequeño tratado titulado *La medida del círculo,* en el que la primera proposición ofrece un penetrante análisis del área del círculo. Antes de abordar este trabajo clásico, necesitaremos examinar lo que se conocía acerca de áreas circulares antes de que Arquímedes apareciera en escena.

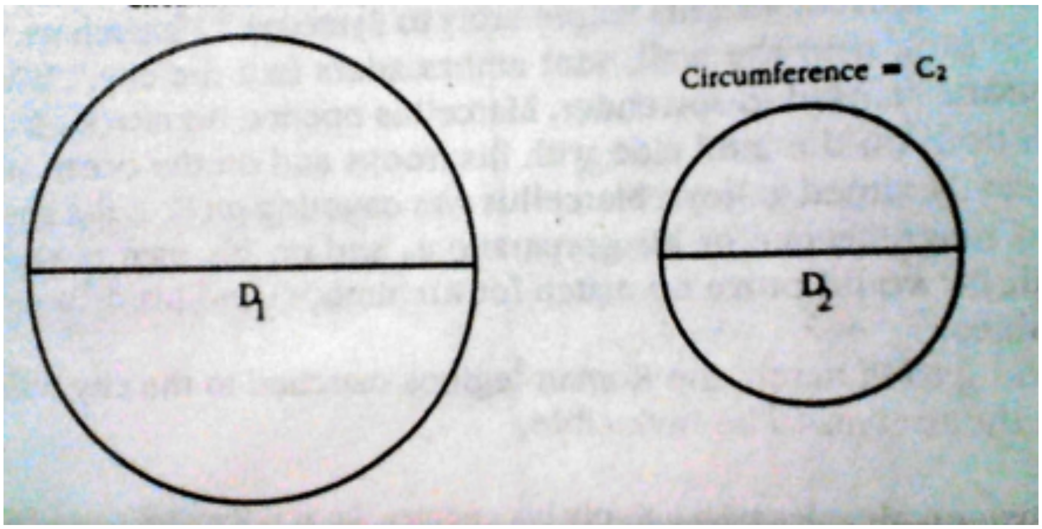
Los geómetras de ese tiempo sabían que, independientemente del círculo en cuestión, la razón entre el perímetro de un círculo y su diámetro es siempre la misma. En términos modernos diríamos que existe un número π tal que, si C es una circunferencia cualquiera de diámetro D y perímetro C, se tiene que:

$$C/D=\pi$$

o, equivalentemente,

$$C=\pi D.$$

Esta constante es la definición del número π, que aparece cuando comparamos dos longitudes: el perímetro y el diámetro de cualquier circunferencia.



$C_1/D_1=\pi$ $C_2/D_2=\pi$

Pero ¿qué se puede decir acerca de áreas circulares? La Proposición XII.2 de los *Elementos* de Euclides (ca. 325-265 a.C.) establece que la razón entre el área de un círculo cualquiera y el cuadrado de su diámetro también es una constante, es decir, existe un número k tal que, si C es una circunferencia cualquiera de diámetro D y área A, se tiene que:

$$A/D^2= k$$

o, equivalentemente, $A=kD^2$.

Todo esto estuvo perfecto hasta entonces. Pero ¿cómo se relacionan estas dos constantes k y π? ¿Se puede encontrar una relación sencilla entre la constante "uno-dimensional" $\boldsymbol{\pi}$ y la constante "dos-dimensional" **k**?

Euclides no halló tal conexión, pero en su corto y elegante tratado, *La medida del círculo*, Arquímedes probó la que vino a ser la moderna fórmula para el área circular que involucra a π. Al hacer esto, él hace el crítico enlace entre el perímetro (y por tanto π) y el área circular. Su demostración requiere dos resultados preliminares realmente directos, más una estrategia lógica llamada *reducción al absurdo doble.*

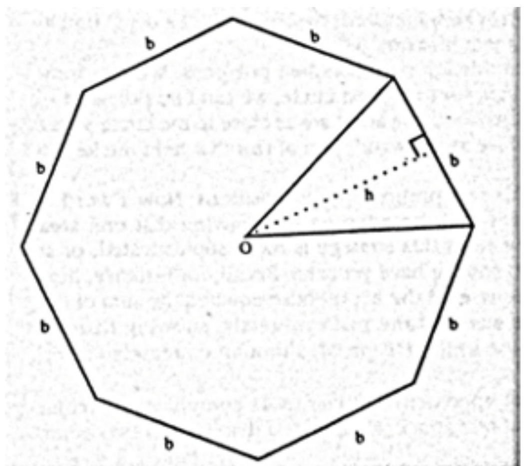
Examinaremos estos preliminares primero. Uno tiene que ver con el área de un polígono regular con centro en O, perímetro Q y apotema h, donde el apotema es la distancia desde el centro del polígono a cualquiera de los lados.

TEOREMA El área del polígono regular de perímetro Q y apotema h, es $A=\frac{1}{2}hQ$.

Demostración: supongamos que el polígono regular de la figura tiene n lados, cada uno de longitud *b*. Dibujando los radios que llegan a cada uno de los vértices del polígono, lo partimos en *n* triángulos congruentes, cada uno de altura *h* (el apotema) y base *b*. Como cada triángulo tiene área $\frac{1}{2}bh$, entonces el área *A* del polígono regular es:

$A = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh + \ldots + \frac{1}{2}bh$ (donde la suma contiene *n* términos) $= \frac{1}{2}h(b + b + \ldots + b) = \frac{1}{2}hQ$,

puesto que $(b + b + \ldots + b)$ es el perímetro del polígono. **QED**



El otro preliminar de Arquímedes era muy conocido en sus días y parece más que evidente. Dice que, dado un círculo, podemos inscribir en él un cuadrado. El mismo Euclides hizo esta construcción en su proposición IV.6 de los Elementos. El área del cuadrado inscrito es, por supuesto, menor que el área del círculo. Bisecando cada lado del cuadrado, podemos localizar los vértices de un octágono regular también inscrito en el círculo. El área del octágono se aproxima mejor al área del círculo que el área del cuadrado. Si volvemos a bisecar los lados, obtendremos un polígono regular de 16 lados (hexa-decágono) cuya área estará más cercana a la del círculo que la del octágono.

El proceso puede continuar indefinidamente. Este es, de hecho, la esencia del famoso *método exhaustivo* de Eudoxo (390-337 a.C.). Claramente, el área de un polígono inscrito nunca es igual a la del círculo. Sin importar el número de lados del polígono, habrá siempre un exceso del área del círculo sobre el área del polígono inscrito. Pero –y esta fue la clave del método de exhaustivo—si nosotros damos, a manera de un área cualquiera pre-asignada, un número **a**, no importa qué tan pequeño sea, podemos construir un polígono regular inscrito en la circunferencia, para el cual la diferencia entre el área del círculo y la del polígono es menor que la cantidad pre-asignada. Por ejemplo, si nosotros damos un área pre-asignada de **a** cm^2, podremos inscribir en el círculo un polígono regular para el cual:

Área del círculo − área del polígono < (1/1000)cm²

Que este polígono pudiera tener cientos o miles de lados, es lo de menos. Lo importante es el hecho de que existe.

Una regla análoga se cumple para polígonos circunscritos. Podemos resumir ambas reglas diciendo que:

Dado un círculo cualquiera, podemos encontrar polígonos inscritos o circunscritos, cuyas áreas están tan cercanas como queramos al área del círculo.

La expresión "tan cercanas como queramos" que aparece aquí, es la clave *del éxito de Arquímedes.*

Con estos preliminares a la mano, podemos ahora mirar un trabajo maestro en la primera proposición de *La medida del círculo.*

PROPOSICIÓN 1. El área de un círculo es igual al área de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es igual al radio del círculo y el otro cateto es igual al perímetro del círculo.

DEMOSTRACIÓN: Arquímedes comenzó con dos figuras: un círculo con centro O, radio r y perímetro C, y con un triángulo rectángulo que tiene su base de longitud C y su altura de longitud r. Denotamos por A el área del círculo y por T el área del triángulo. Mientras que la primera es el objeto de la prueba de Arquímedes, es claro que el área del triángulo es justamente $T=1/2\, rC$.

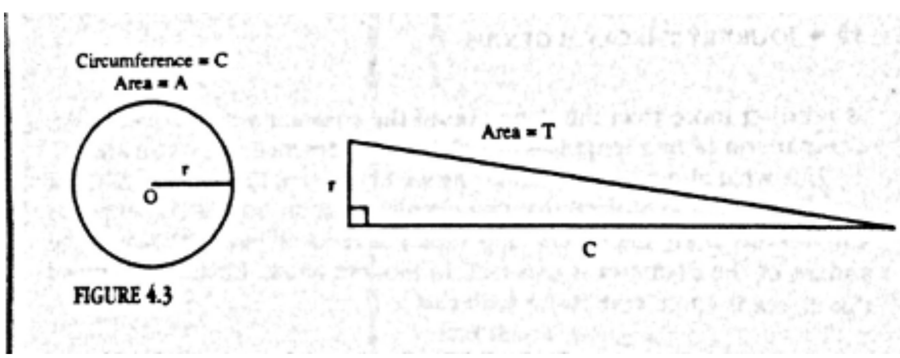


FIGURE 4.3

La proposición afirma simplemente que $A=T$. Para establecer ésta por una demostración por doble *reductio ad absurdum*, Arquímedes necesitó considerar, y eliminar, los otros dos casos.

CASO 1. Supongamos que $A>T$.

Esto asegura que el área circular excede a la del triángulo por una cierta cantidad. En otras palabras, el exceso $A-T$ es una cantidad positiva. Arquímedes sabía que, inscribiendo un cuadrado dentro de su círculo y bisecando repetidamente sus lados, él debe obtener un polígono regular P, inscrito dentro del círculo, cuya área, A_p, difiere del área del círculo por menos que la cantidad positiva $A-T$. Esto es,

$$A-A_p<A-T.$$

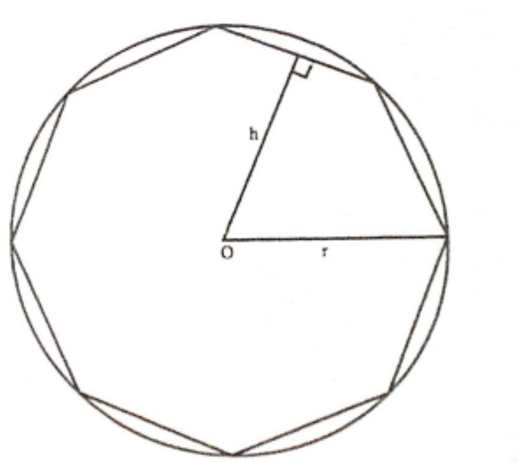
De donde obtenemos, añadiendo $A_p + T - A$ a ambos lados de la desigualdad:

$$T < A_p.$$

Pero P es un polígono inscrito y por lo tanto, su perímetro Q es menor que el perímetro de la circunferencia C, y su apotema h es menor que el radio r del círculo. Concluimos que:

$$A_p = \tfrac{1}{2}\, hQ < \tfrac{1}{2}\, rC = T.$$

Aquí Arquímedes ha llegado a una contradicción, puesto que ha encontrado ambas afirmaciones al mismo tiempo: que $T < A_p$ y que $A_p < T$. Esto nos lleva a concluir que el Caso 1 es imposible: el área del círculo no puede ser mayor que el área del triángulo.



CASO 2. Supongamos que $A < T$.

En este caso $T - A$ representa el exceso de área del triángulo sobre el círculo. Sabemos que podemos circunscribir un polígono P, alrededor del círculo, cuya área Ap excede a la del círculo por menos que esta cantidad $T - A$. En otras palabras,

$$A_p - A < T - A.$$

Añadiendo simplemente A a ambos lados de la desigualdad, concluimos que

$$A_p < T.$$

Pero P, el polígono circunscrito, tiene apotema h igual al radio r del círculo, mientras que el perímetro Q del polígono excede al perímetro C del círculo. Entonces:

$$A_p = \tfrac{1}{2}\, hQ > \tfrac{1}{2}\, rC = T.$$

De nuevo llegamos a una contradicción. Arquímedes concluyó que el Caso 2 también es imposible, así que el área del círculo no puede ser menor que el área del triángulo.

Por lo tanto, el área del círculo es igual al área del triángulo, lo cual concluye la demostración de la proposición. **Q.E.D.**

FIGURE 4.5

Esto no soluciona la cuadratura del círculo, pero sí relaciona el área desconocida de una figura, con el área conocida de una figura más simple. Pero se logró más que esto, pues el triángulo en cuestión tiene su base igual al perímetro del círculo, y esto da lugar a dos implicaciones cruciales. Primero, a diferencia de Euclides, Arquímedes relacionó el área del círculo, no con el área de otro círculo, sino con su propio perímetro y radio. Probando que

$$A = T = \tfrac{1}{2}\, rC.$$

Arquímedes ha establecido el puente entre el concepto uno-dimensional de perímetro y el concepto dos-dimensional de área. Recordando que $C = \pi D = 2\pi r$, este resultado queda:

$$A = \tfrac{1}{2}\, rC = \tfrac{1}{2}\, r\,(2\pi r) = \pi r^2$$

Y aquí emerge una de las más famosas e importantes fórmulas de la geometría.

Es también digno de mención que la audaz proposición de Arquímedes implica fácilmente el resultado de Euclides acerca de que la razón entre las áreas de dos círculos cualesquiera es la misma que la razón entre los cuadrados de sus diámetros. Esto es, si tenemos un círculo de área A_1 y diámetro D_1, y un segundo círculo de área A_2 y diámetro D_2, entonces Arquímedes probó que:

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi\,(D_1/2)^2 = \pi\, D_1^2/4 \qquad \text{y} \qquad A_2 = \pi r_2^2 = \pi\,(D_2/2)^2 = \pi\, D_2^2/4.$$

Y, por lo tanto, que:

$$A_1/A_2 = (\pi\, D_1^2/4)\,/\,(\pi\, D_2^2/4) = D_1^2\,/\,D_2^2$$

que es el teorema de Euclides. Así que la proposición Arquimediana tiene la suficiente fuerza para implicar el resultado Euclidiano como un corolario trivial. Tal es la marca de un avance matemático genuino.

Si retornamos a la discusión previa, podemos determinar el valor de la constante k en la expresión Euclidiana $A = k\, D^2$, pues teniendo a la mano el descubrimiento de Arquímedes, sabemos que:

$$\pi r^2 = A = kD^2 = k\,(2r)^2 = 4\,kr^2$$

Entonces $4\,k = \pi$, y con ello, $k = \pi / 4$. En otras palabras, la constante dos-dimensional del área es justo un cuarto de *π,* la constante uno-dimensional del perímetro. Entonces no necesitamos tener dos diferentes constantes. Si podemos determinar el valor de π desde el problema del perímetro, éste también serviría para el problema del área.

Esta última observación no fue desaprovechada por Arquímedes. De hecho, en su tercera proposición de *La medida del círculo,* él derivó justo tal valor.

PROPOSICIÓN 3 La razón entre el perímetro de un círculo y su diámetro es menor que *3 (1/7)* pero más grande que *3(10/71).*

En términos modernos, esto dice que: $3(10/71) < \pi < 3\ (1/7)$, o en fracciones decimales equivalentes, $3.140845... < \pi < 3.142857...$

Entonces la constante π ha sido calculada, hasta dos decimales, como 3.14.

Para demostrar su estimación, Arquímedes comenzó con un hexágono regular inscrito en un círculo. Bien sabía que cada lado del hexágono es igual al radio del círculo, cuya longitud llamaremos *r.* Entonces:

$$\pi = (\text{perímetro del círculo / diámetro del círculo}) > (\text{perímetro del hexágono/diámetro del círculo}) = 6r/2r = 3.$$

Esta es una estimación muy burda de π, pero Arquímedes apenas había comenzado. Él en seguida dobló el número de lados de su polígono inscrito, para obtener un dodecágono inscrito cuyo perímetro tuvo que calcular, para lo cual necesita un valor numérico para la raíz cuadrada de 3. Con nuestras calculadoras y computadoras esto no es ningún obstáculo, pero en los tiempos de Arquímedes no sólo estos dispositivos eran inconcebibles, sino que no había un buen sistema de numeración para facilitar tales cálculos. Aun así, él logró la estimación

$$(265/153) < \sqrt{3} < (1351/780),$$

que es impresionantemente cercana.

Arquímedes continuó bisecando de nuevo para obtener un 24-ágono regular y luego un 48-ágono regular, y finalmente, un 96-ágono regular. En cada caso necesitó aproximaciones a raíces cuadradas sofisticadas. Cuando llegó al 96-ágono regular, su estimación fue:

$$\pi = (\text{perímetro del círculo /diámetro del círculo}) > (\text{perímetro del 96-ágono/diámetro del círculo}) = 6336/(217+1/4) > 3(10/71).$$

Como si esto no fuera suficiente, Arquímedes hizo después estimaciones similares para 12-ágonos, 24-ágonos, 48-ágonos y 96-ágonos circunscritos a la circunferencia, para lograr la cota superior para π de 3(1/7).

Agustín Contreras Carreto

LA BAJADA ES POR ATRÁS

-Toc, toc, toc, toc, toc

-Zzzz…

-Toc, toc,…

- ¡AAAhh…! ¡Pásele!

- Perdón profe, ya lo desperté, si quiere vengo al rato.

- No, no. no, no, ya me despertó y todavía quiere hacerlo al rato otra vez, no m…e venga con eso y dígame ya, ¿qué se le ofrece?

- Es que…, la verdad,… no es del curso, es algo que venía leyendo en el micro y, pues la verdad, me sacó de onda y como recordé que usted había mencionado algo de eso en alguna clase del semestre pasado, o al menos en ese momento quise imaginar que lo dijo, pues la verdad se me hacía tarde para venir a molestarlo.

- ¡Pues vaya que lo hizo!, y eso de que venía leyendo en el micro no se lo creo, pero a ver, desembuche.

- No me mal entienda profe, no es que viniera leyendo algún libro o revista sino que lo vi en uno de los costados del micro, ahí donde ponen "LA BAJADA ES POR ATRÁS", decía así:

Lo último que uno sabe es por dónde empezar

B. Pascal

- ¡Ah caray!

- En serio profe, al principio yo también pensé que era un albur del microbusero y desde la CAPU hasta la 31 traté de encontrarle el sentido pero no le hallé ni ma…nera de entrarle; enseguida pensé que el mismísimo chofer podría haber sido un estudiante de la facultad que no pudo terminar la carrera por culpa del presidente del empleo y de que no sabía que los condones los regalan en cualquier centro de salud y que, de esa manera, desquitaba en parte la frustración por su "mala suerte" y…

- Parece que con usted lo logró, aunque haya sido por un rato, ¿o no?

- La verdad sí, y como un acto de autodefensa, al llegar aquí, a la facultad no pude dejar de observar el ambiente tan enjundioso y trabajador que impera en toda la facultad: palapas llenas de estudiantes alegres y discutidores, biblioteca rebosante de juventud estudiosa, salitas de estudio llenas de alumnos sudando la gota gorda preparando sus exámenes… En ese momento me dije, ¡noo!, ni pensarlo, eso no me puede pasar a mi y tampoco a alguno de mis compañeros. Y fue así que me vino a la mente un amigo que tengo en filosofía…

- Sí, sí, ya no me diga más y al grano, ¿o qué?, ¿sólo por eso vino a despertarme?

-No, en serio, no sé por qué pero vino a mi cabeza aquel primer día de clases. Recordé que algo estaba tratando de decirnos acerca de la importancia de preparar un curso, que se tenían que reflexionar no sé qué tantas cosas antes de ir a dar una clase. La mera verdad yo pensé, este profe ya empezó con sus m…entiras, como no preparó su clase nos va a echar un choro mareador hasta que se acaben las dos horas.

- Pues ya veo que sí se mareó usted porque yo no recuerdo haber mencionado a Pascal.

- Bueno, a lo mejor no, pero sí nos dijo que cuando pensaba en un curso que iba a dar, pss la verdad me sonó medio m…ístico, que era algo así como un fantasma, como algo que no existía, que no tenía forma, y en donde había tantas cosas que podrían entrar, que podrían decirse. Y que en cada una de ellas siempre había que preguntarse, una y otra vez, "¿y qué podría pasar si…?", y que siempre había que estar luchando con la seducción de caer en situaciones conocidas, aunque en ellas uno se sintiera cómodo y a salvo.

- ¡Vámonos!, se ve que su amigo el filósofo sí que lo está influenciando.

- Espéreme profe, todavía no termino. Recuerdo que nos dijo que para que el fantasma fuera tomando forma, tenía que limitarse; decía:

> *Como hay un programa del curso aprobado por la Academia de Matemáticas, empiezo por ahí, avanzo en el desarrollo de los temas y, entonces el fantasma como que empieza a verse, se va convirtiendo en algo real. Las palabras, las ideas (porque la matemática es de ideas, de imaginación), los conceptos, le van dando vida, ¡claro!, en la mente de uno ¿verdad?, pero ahí es donde uno empieza a tomar decisiones, a hacer elecciones (y no precisamente como las que organiza el INE). Sí, empieza uno a preguntarse sobre los ejemplos que se van a explicar o los que se van a quitar pues cada inclusión o exclusión tiene sus consecuencias; no se puede omitir un material anterior si hay un material posterior que depende de aquel, Con los teoremas en general no hay problema, pero algunos ejemplos específicos pueden aclarar más que otros el concepto o la estructura que se esté estudiando…*

Y recuerdo que usted remarcaba, ya en el clímax de la emoción, casi eufórico:

> *¡Ah! Pero eso sí, no importa la cantidad de estructuras posibles para el curso, tantas como la experiencia y la imaginación nos den en ese momento, todas y cada una de ellas forman una red interconectada y, aunque el curso tenga el mismo nombre, en cada periodo contamos una historia diferente, aún cuando siempre el inicio sea números reales y funciones, la trama sean los límites y el desenlace la derivada. ¿De quién depende la historia?, pues de los alumnos, sí, de ustedes, y el profesor, de su capacidad para lograr una comunicación efectiva en cada clase para enfrentarse a lo desconocido a través de las preguntas que surjan de su trabajo con los conceptos, del trabajo colectivo con las tareas. De ello depende que la historia del curso no se convierta en una rutina morosa y vaga, que tenga un mar de posibilidades y que, aunque todas ellas no se realicen, el sólo dejar entrever algunas, enriquecerá el pensamiento de ustedes, los estudiantes, y les irá formando la necesidad de seguir un camino hasta el final y no quedarse a la mitad de muchos de ellos. Y para que la historia tenga un final feliz, el profesor y sus alumnos deben elegir ese camino, definirlo claramente, hacerlo transitable, lo que no significa que necesariamente sea un camino recto que no los lleve a un callejón sin salida, a veces allí es donde hay que llegar, ¡sí!, a un callejón sin salida, sobre todo cuando la multitud de ideas vagas oscurecen ese camino; de esta manera es que se puede sentir la necesidad de la reconsideración, de la reflexión, y la importancia de reencontrar el camino perdido, y es en estos momentos en que hay que buscar transmutar esas ideas vagas en el concepto preciso, pues en la medida en que esto se haga es que volveremos a ese camino perdido.*

-Y por cierto, se acuerda usted que Lupita o Lulú, la verdad no me acuerdo quién de ellas, le preguntó qué tan complicado era llevar una pregunta trivial a una idea profunda y de largo alcance.

- Pues la verdad no, pero supongo que tiene que ver con transformarla en una serie de preguntas que mantenga la emoción de enfrentarse a lo desconocido, que lleve a la fascinación que se experimenta por el suspenso y el misterio al desconocer lo que va a ocurrir más adelante y que nuestra mente no puede dejar de encarar e intentar resolver… Bueno, y todo este rollo que se acaba de aventar, ¿qué tiene que ver con Pascal y su cita que vio en el micro?

- ¿Cómo que qué tiene que ver profe? Aunque no lo crea, al final del curso, mis compañeros y yo, en una de tantas amables y fogosas tertulias donde hablamos de nuestras grandes ilusiones y puros pronósticos felices, nos preguntamos sobre la importancia de las tareas que usted nos dejaba, sus dichosos "derecho a examen", los exámenes orales, etc., y entre tantas y fantasiosas cosas que dijimos, llegamos a la conclusión de que, efectivamente, hasta que teníamos una comprensión cabal de un problema es que sabíamos cómo empezar a escribir su solución.

- ¡Ah! Pues sí que me sorprende usted, pero lo que más me tiene intrigado es que después de tanto tiempo, si es capaz de recordar exactamente la primera clase del curso de cálculo, ¿cómo es que lo reprobó?

- ¿Qué pasó profe? A poco ya no se acuerda que me dejó sin derecho al primer examen por estar "jugando" con mi celular y, ¿qué cree?, que no estaba jugando, lo estaba grabando pensando en que me podía ser útil su discurso para aprobar la materia.

- Pues ya ve que no le funcionó pero, ¿por qué vino a verme si ni siquiera me ha dejado hablar?, y la verdad parece ya estar satisfecho de su visita.

- Bueno, pues vine a preguntarle si me daba permiso de publicar en el axolote lo que le acabo de decir.

- ¿Y si le digo que no?

- Pues ni modo porque ya lo mandé…

Manuel Ibarra Contreras

¿ES POSIBLE QUE UN MONO ESCRIBA UNA OBRA DE SHAKESPEARE?

El mono es considerado una de las especies más inteligentes del planeta. Es bien sabido que es capaz de fabricar y utilizar herramientas primitivas, y que puede deducir el uso de algunas que los humanos utilizamos, como los espejos. Así que tiene sentido y genera curiosidad preguntarnos qué pasaría si dejamos a un simio manipular objetos más complejos como las computadoras. Sin meternos en discusiones sobre psicología animal, supongamos que un mono aprende a usar rápidamente el teclado de la computadora y cada vez que presiona una tecla al azar, un garabato negro se vislumbra en la pantalla. Así pues, queda atónito de tal hecho que repite el acto con cualquier tecla al azar, y continúa repitiéndolo indefinidamente. ¿Es posible que en algún momento pueda escribir alguna palabra hispana de más de 10 letras? ¿Podría escribir una frase? ¿Un refrán? ¿Un cuento corto? ¿Una novela? ¿Una compleja obra de William Shakespeare?

Éste es un problema de probabilidad que puede resolverse mediante distintas herramientas dentro de la disciplina mencionada. Todos estos métodos arrojan un sorprendente resultado: el mono bien podría escribir una obra de William Shakespeare con el simple hecho de presionar caracteres del teclado aleatoriamente y de manera constante. Veamos dos pruebas sencillas, en cada una de las cuales se demuestra que la probabilidad de que tal suceso ocurra es igual a uno.

Sea k el total de caracteres disponibles en el teclado de la computadora y sea M el total de caracteres que conforman una obra arbitraria de William Shakespeare. El animal escribe caracteres al azar generando un arreglo lineal de caracteres, así que podemos ir dividiendo este arreglo en secciones de M caracteres, una después de la otra, sin dejar huecos y sin que estas secciones se empalmen. Enumeremos estas secciones. Para cada número natural n definamos el evento A_n como "la sección contiene la obra de Shakespeare 'de corrido y sin tropiezo'". Observemos que los eventos A_n son independientes pues las secciones no se traslapan, de manera que el éxito o fracaso del evento A_n no influye en el éxito o fracaso del evento A_{n+1}.

Calculemos ahora la probabilidad de cada uno de estos eventos. Dado que el mono tiene k posibilidades de escribir un caracter, la probabilidad de escribir cada uno de éstos es igual a $1/k$. Ahora bien, si en cada sección hay M caracteres escritos y considerando que el tecleo de un caracter es independiente del caracter que lo precede, la probabilidad de cada A_n igual a $P(A_n) = (1/k)^M$ la cual llamaremos . Nos interesa estudiar el caso en que el simio obtiene el primer éxito, así que definiremos el evento B_n como $A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C$, que indica que el mono no ha obtenido éxito en los primeras secciones. Cabe decir que la probabilidad del evento B_n igual a

$$P(B_n) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))\cdots(1 - P(A_n)) = (1 - p)^n.$$

Es claro que si no ha tenido éxito en las primeras $n+1$ secciones, tampoco lo ha tenido en las primeras n. Esto nos dice entonces que $B_{n+1} \subseteq B_n$, así que todos los B_n forman una sucesión decreciente que converge a la intersección de todos ellos cuando hacemos tender n a infinito, es decir,

$$lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n,$$

donde el evento $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ se interpreta como aquél en el que el mono nunca tiene éxito. Por el teorema de continuidad de la probabilidad, se tiene que

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = P(lim_{n\to\infty} B_n) = lim_{n\to\infty} P(B_n) = lim_{n\to\infty}(1-p)^n = 0,$$

es decir, la probabilidad de que el mono no obtenga ningún éxito es nula, o en otras palabras, la probabilidad de que obtenga al menos un éxito es total, con esto tendremos asegurado que en alguna sección aparecerá la transcripción perfecta de la obra de Shakespeare.

La segunda prueba es mediante el lema de Borel- Cantelli y con ella tenemos una conclusión aún más extravagante: no sólo el mono logra el objetivo una vez, sino que lo hace una infinidad de veces. Veamos primero qué nos dice el mencionado lema: sea una sucesión convergente de eventos y defina $A = limsup_{n\to\infty} A_n$,

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces $P(A) = 0$.

b) Si los eventos son independientes y $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, entonces $P(A) = 1$.

Ya vimos que los eventos $A_1, A_2, \dots$ definidos anteriormente son independientes y dado que cada uno tiene probabilidad constante e igual a $(1/k)^M$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ diverge y por la parte b) del lema de Borel-Cantelli se tiene que $P(A) = 1$, donde $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$definido como $limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ se interpreta como aquél en el que el mono tiene una infinidad de éxitos. Por lo tanto, tenemos asegurado que el mono escribirá la obra completa una infinidad de veces.

Tras semejante afirmación –que gracias a las pruebas anteriores no es para nada descabellada- cabe preguntarnos ¿ya que es posible que el mono pueda escribir completa una obra shakespeariana, entonces cuánto tiempo le tomaría hacerlo? Veamos una estimación burda.

Cada sección M de caracteres puede considerarse como un ensayo de Bernoulli donde la probabilidad de tener éxito es p y de obtener un fracaso es naturalmente 1-p . Podemos definir una variable aleatoria X que registre el número de secciones que transcurren hasta obtener el primer éxito. Al hacer eso, notemos que X tiene una distribución geométrica con parámetro p, por lo que

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p,$$

ya que si el primer éxito ocurre en la sección n, las n-1 secciones anteriores fracasaron. Se puede probar que el valor esperado de X es igual a $1/p$, y dado que $p = (1/k)^M$ se tiene que $E(X) = k^M$, es decir, en promedio se requieren k^Msecciones para obtener la obra. En términos de caracteres, se requerirían Mk^M caracteres (¿por qué?).

Lo anterior nos da una idea de la magnitud del tiempo requerido. En términos numéricos, podemos considerar que nuestro incansable sujeto de experimento escribe a una velocidad constante de un caracter por segundo, que además hay k = 80 teclas disponibles para él. Supongamos que deseamos que escriba una obra corta, digamos Macbeth en su versión hispana, la cual tiene 36 páginas, donde cada página tiene en promedio 65 líneas con 80 caracteres en cada una. Esto nos da un total de M = 187, 200 caracteres que conforman Macbeth. Con esto, el número promedio de caracteres tecleados por el mono hasta obtener el primer éxito es $(187200)(80)^{187200}$, con la misma cantidad necesaria de segundos. Dado que un año tiene 31, 536, 000 segundos, el número de años necesarios es $(1/31{,}536{,}000)(187200)(80)^{187200}$. Es una cantidad de aproximadamente 187200 dígitos. El universo mismo no ha vivido ni la diez milésima parte de ese tiempo. Ni hablar del tiempo necesario para obtener dos o más éxitos, o del tiempo necesario para obtener una obra más extensa.

Como se mencionó, esta estimación es bastante rudimentaria. En el artículo Sobre el problema del mono que escribe caracteres al azar, Luis Rincón realiza otras dos pruebas de los resultados mencionados aquí, utilizando la Ley Fuerte de los Grandes Números y cadenas de Markov, además de hacer una estimación más precisa (pero no menos sorprendente) del tiempo que tomaría el mono en lograr el primer éxito.

Finalmente, observemos que, en este caso la probabilidad de tener éxito en la n-ésima sección es $p = (1/80)^{187200}$, una cantidad extremadamente pequeña pero ciertamente positiva, que nos conduce a que, a la larga, cualquier cosa posible puede ocurrir. No es de extrañarse la analogía que se hace a estos problemas con cuestiones como el universo o la evolución de las especies: a largo plazo cualquier hecho posible e inesperado puede ocurrir con toda seguridad. En este problema, las inesperadas conclusiones nos enseñan a no subestimar al azar y a reflexionar en el hecho de que, después de todo, refranes como “el que persevera alcanza” o “de poquito en poquito se llena el jarrito” no son dichos en vano.

BIBLIOGRAFÍA:

Rincón, L. (2006). Sobre el problema del mono que escribe caracteres al azar. Miscelánea Matemática, 42, pp. 1-12.

Rincón, L. (2007). Curso intermedio de probabilidad. México DF: Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias UNAM

Esaú Alejandro Pérez Rosales

Para sonreír, divertirse y reflexionar

Piensa en un número entero del 1 al 10

Multiplícalo por 9

Suma los dígitos

Resta 5 al número obtenido

Ahora asigna a cada letra su número correspondiente en orden alfabético (1 para la A, 2 para la B,...)

Piensa en la letra correspondiente al número que obtuviste al final

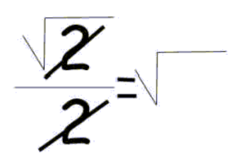
Piensa en un país que comience con esa letra

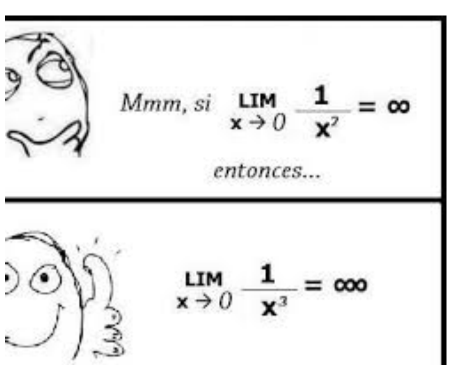
Considera la letra que sigue en orden alfabético

Piensa en un animal con esta última letra

¡ALTO! Dinamarca no es un buen lugar para cazar elefantes

-Anónimo-





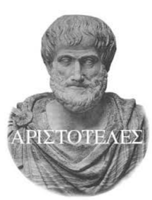
Un cuento

Alephs (o El paraíso que Cantor creó para los matemáticos)

Y entré. Todos eran muy bien parecidos y entre más me adentraba en el jardín podía ver más y más, igual de bellos y extraordinarios, hermosos ejemplares de piel aceitada que hacía resbalar mi entendimiento sobre ellos. Bailes y música entretejidos que hacían danzar ante mis ojos a los inaccesibles, ¿medibles o no medibles? De pronto, al darme vuelta, con un enorme gozo me llené de alborotada alegría: alephs de todos colores, a cual más de brillante, cantando infinitamente las más hermosas melodías. ¡Ah!, por allá se ve $\aleph_1$, intentaré alcanzarlo, ¡oh no!, ya recordé, aunque me convierta en $\aleph_0$ no podré hacerlo si no doy un gran salto, tan grande como él. ¡Mhh! ya sé, buscaré a $\aleph_{\omega}$, y si lo encuentro le pediré a $\aleph_0$ que me suba a sus hombros y dé un gran salto de su tamaño, al fin ya sé que con eso bastará para llegar hasta aquel estupendo cardinal singular. Bueno, igual y no puedo porque yo, finito al fin, aquí soy invisible, pero a quién le importa si tampoco existe mi mala memoria, y puedo infinitamente perder el tiempo. Ojalá adquiriera aquí una memoria infinita para poder acordarme de algunos de ellos cuando regrese a donde pertenezco, a los cimientos ocultos de este gran paraíso, los finitos. Aunque pensándolo bien, ¿a quién le importa salir, o a quién le interesa expulsar de este maravilloso y divino jardín de los infinitos a lo invisible, a lo que es nada?

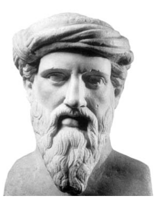
Manuel Ibarra Contreras

Para Pensar: Frases célebres



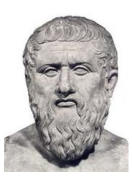
Aristóteles (384 a.C - 322 a.C)

La inteligencia consiste no sólo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica.
Uno no sabe lo que sabe hasta que puede enseñar a otro.



Pitágoras (572 a. C - 496 a.C)

Educad a los niños y no será necesario castigar a los hombres.
Los números gobiernan el mundo.



Platón (427 a.C -347 a.C)

Nadie que ignore la geometría entre aquí.
No es en los hombres sino en las cosas donde hay que buscar la verdad.

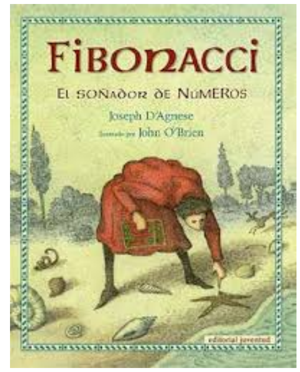
axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas

Recomendación de libro

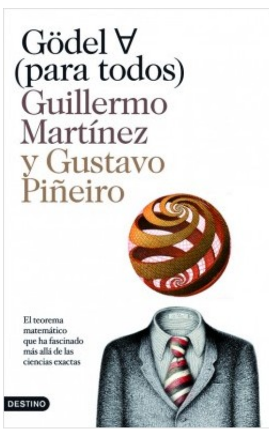
Libro: Fibonacci el soñador de números

Escritor: Joseph D’Agnese

Editorial: Juventud



Sinopsis de libro del mes de marzo



Título: Gödel para todos

Autores: Guillermo Martínez y Gustavo Piñeiro

Editorial: Destino

El teorema de la incompletitud de Gödel, uno de los más profundos y paradójicos de la lógica matemática, surgió casi a la par de la teoría de la relatividad de Einstein, aunque de manera más sigilosa. Se ha convertido en una referencia ineludible del pensamiento contemporáneo y es, posiblemente, el teorema que ha ejercido más fascinación en ámbitos alejados de las ciencias exactas. Lacan, Kristeva, Deleuze, Lyotard, Debray y muchos otros han invocado a Gödel y sus teoremas en arriesgadas analogías. Junto con otras palabras mágicas de la escena posmoderna como «caos», «indeterminación» o «aleatoriedad», la incompletitud se ha asociado también a supuestas derrotas de la razón y al fin de la certidumbre en el terreno más exclusivo del pensamiento: el reino de las fórmulas exactas.

Con el propósito de hacerlo accesible a un público amplio, Guillermo Martínez y Gustavo Piñeiro ofrecen una exposición detallada y rigurosa, pero de extrema suavidad, totalmente autocontenida: magistral.

En este libro, tanto las personas de cualquier disciplina que sólo tengan la imprescindible «curiosidad de espíritu» como los que hayan estudiado alguna vez los teoremas de Gödel podrán aventurarse a conocer en profundidad una de las hazañas intelectuales más extraordinarias de nuestra época.

Una exposición detallada y accesible del teorema de la incompletitud de Gödel, uno de los resultados más profundos y paradójicos de la lógica matemática.

Poesía del mes de marzo

3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78194 06286 20899 86280 34825 34211 70679 ....

El número Pi es digno de admiración
tres coma uno cuatro uno,
todas sus cifras siguientes también son iniciales,
cinco nueve dos, porque nunca se termina.
No permite abarcarlo con la mirada seis cinco tres cinco,
con un cálculo ocho nueve,
con la imaginación siete nueve
o en broma tres dos tres, es decir, por comparación
ocho cuatro seis con cualquier otra cosa
dos seis cuatro tres en el mundo.
La más larga serpiente después de varios metros se interrumpe.
Igualmente, aunque un poco más tarde, hacen las serpientes fabulosas.
El cortejo de cifras que forman el número Pi
no se detiene en el margen de un folio,
es capaz de prolongarse por la mesa, a través del aire,
a través del muro, de una hoja, del nido de un pájaro,
de las nubes, directamente al cielo
a través de la total hinchazón e inmensidad del cielo.
¡Oh, qué corta es la cola del cometa, como la de un ratón!
¡Qué frágil el rayo de la estrella que se encorva en cualquier espacio!
Pero aquí dos tres quince trescientos noventa
mi número de teléfono, la talla de tu camisa
año mi novecientos setenta y tres, sexto piso
número de habitantes, sesenta y cinco céntimos
la medida de la cadera, dos dedos, la charada y el código
en el que mi ruiseñor vuela y canta
y pide un comportamiento tranquilo,
también transcurren la tierra y el cielo
pero no el número Pi, éste no,
él es todavía un buen cinco,
no es un ocho cualquiera,
ni el último siete
metiendo prisa, oh, metiendo prisa a la perezosa eternidad
para la permanencia.

La escritora Wislava Szyimborska nació en Kornik, Polonia, el 2 de julio de 1923. En 1931 pasó a vivir a Cracovia, donde estudió literatura polaca y sociología en la Universidad Jagielloniana, licenciándose en letras. Ha publicado 16 colecciones de poesía, que se han traducido a varios idiomas y que han recibido premios como el Goethe (1991), el Herder (1995), y, sobre todo, el Premio Nobel de Literatura en 1996.

Información tomada de la Revista Iberoamericana de Educación (ISSN:1681-5653)).

Actividades del mes de marzo y abril

Suspendidas por la contingencia sanitaria, hasta nuevo aviso.

Publicaciones de la Academia de Matemáticas

Libro de Matemáticas y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.
Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2021. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: David Herrera Carrasco dherrera@fcfm.buap.mx y Fernando Macías Romero fmacias@fcfm.buap.mx
Los trabajos recibidos después del 6 de enero (del año en curso) se tomarán en cuenta para un año después.

Libro de Topología y sus aplicaciones de la FCFM , BUAP
Publica capítulos expositorios y artículos de investigación. Los trabajos recibidos para su publicación son sometidos a un estricto arbitraje.
Se invita a enviar trabajos para el tomo de 2021. Los trabajos deben ser enviados a alguno de los Editores: José Juan Angoa Amador jangoa@fcfm.buap.mx, Raúl Escobedo Conde escobedo@fcfm.buap.mx, Manuel Ibarra Contreras mibarra@fcfm.buap.mx, Agustín Contreras Carreto acontri@fcfm.buap.mx
La publicación del libro es anual, según sean las condiciones económicas del cuerpo académico de topología y sus aplicaciones.

Se invita a la comunidad a enviar trabajos de divulgación, problemas matemáticos para resolver, comentarios, etc., al e-mail axolote.fcfm@gmail.com

Compiladores: Docentes de la Academia de Matemáticas, véase lista de docentes en: www.fcfm.buap.mx/academiam/

Responsables de la Edición: José Juan Angoa Amador, Patricia Domínguez Soto, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto

Colaboradores Estudiantes: Josué Vázquez Rodríguez , Emilio Angulo Perkins, Jesús González Sandoval

Diseño logo: Santiago Sienra y Guillermo Sienra

axolote'
Revista mensual de la Academia de Matemáticas