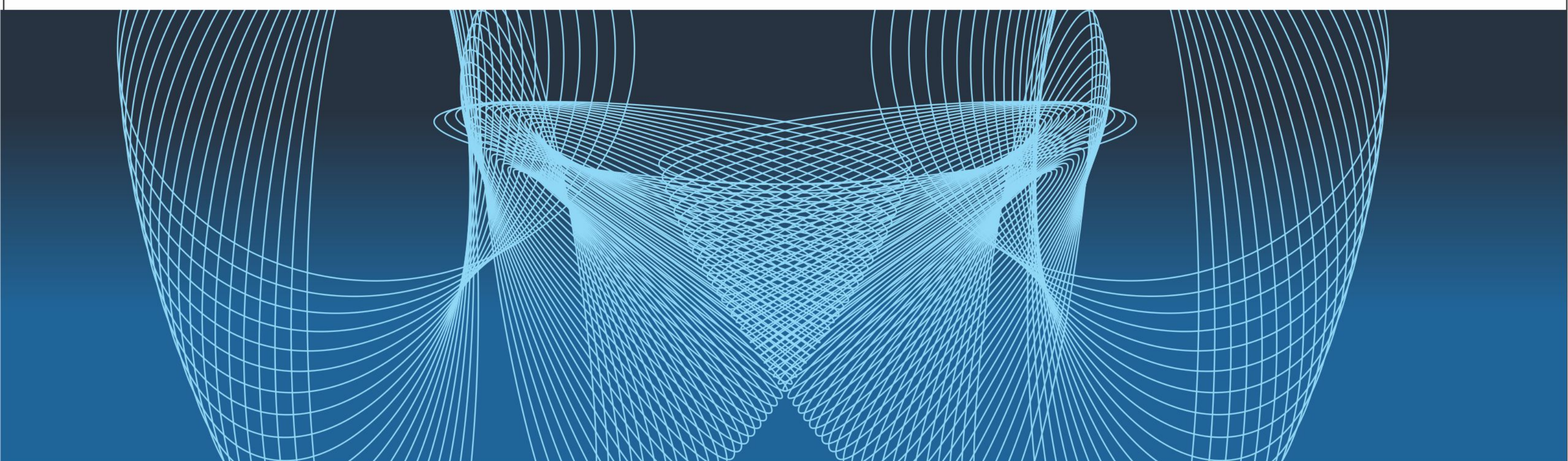
Dirección
General de
Publicaciones



Topología
y sus aplicaciones 11

JOSÉ JUAN ANGOA AMADOR
AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO
RAÚL ESCOBEDO CONDE
MARÍA DE JESÚS LÓPEZ TORIZ

editores

MANUALES Y TEXTOS
ciencias exactas

Topología y sus aplicaciones 11

Editores literarios

Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Raúl Escobedo,
María de Jesús López Toriz

Cuerpo Académico de Topología y sus Aplicaciones

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Rectora: María Lilia Cedillo Ramírez
Secretaria General: José Manuel Alonso Orozco
Vicerrector de Extensión y Difusión de la Cultura: Luis Antonio Lucio Venegas
Dirección General de Publicaciones: Jorge David Cortés Moreno

Primera edición: 2025
ISBN: ISBN 978-607-2637-58-0

4 Sur 104, Col. Centro Histórico, Puebla, Pue. CP. 72000
Teléfono: 222 229 55 00
www.buap.mx

2 Norte 104, Centro Histórico, Puebla, Pue., CP. 72000
Tels.: 01 (222) 246 85 59 y 01 (222) 229 55 00, ext. 5768
www.dgp.buap.mx | libros.dgp@correo.buap.mx
www.publicaciones.buap.mx

Hecho en México
Made in Mexico

Presentación

Para ti que nos lees, el cuerpo académico de topología y sus aplicaciones, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, saca a la luz el nuevo volumen de su serie de textos en topología[1]. Persistimos con nuestra propuesta: ofrecer un espacio para generar y difundir conocimiento en topología y temas afines, con artículos expositivos y de investigación, de motivación para estudiantes y especialistas.

Entre los doce capítulos que contiene este volumen se exponen temas de teoría de categorías, de topología general, de hiperespacios de conjuntos, de continuos, de dinámica topológica y de teoría de conjuntos: particularmente se presentan estudios sobre aspectos categóricos de los espacios vectoriales y sobre la noción categórica de teoría topológica; se expone sobre los espacios $T_{\frac{1}{2}}$; se estudia cierta generalización de los espacios Lindelof Σ, y sobre los conceptos de completez y pseudocompletez en topología; se expone sobre la dimensión del hiperespacio de los subconjuntos compactos; se incluyen trabajos sobre la propiedad de Kelley y algunas generalizaciones; además, un trabajo de dinámica en productos; cierra el volumen un sorprendente trabajo que nos muestra cómo pueden intrincarse los caminos de la teoría de conjuntos, el álgebra lineal y la topología, para conocer más sobre la estructura del conjunto de los números reales y, también, para decirnos que aún desconocemos aspectos importantes de este habitual conjunto. Los trabajos en este libro aportan resultados originales o pruebas nuevas de hechos conocidos.

En esta entrega colaboran investigadores y estudiantes de las siguientes instituciones: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMéx), Univesidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSH), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Universidad del Papaloapan (UNPA) y Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM).

Agradecemos a los autores por elegir nuestro libro para publicar sus investigaciones, a los árbitros por sus cuidadosas revisiones y, especialmente, te agradecemos a ti porque nos lees.

Los editores
Febrero de 2025

[1]Esta serie inició en 2007; los primeros volúmenes se denominan Topología y sistemas dinámicos I-IV, los siguientes Topología y sus aplicaciones 1-10. Contacto de editores: jangoa@fcfm.buap.mx, acontri@fcfm.buap.mx, escobedo@fcfm.buap.mx, mjlopez@fcfm.buap.mx,

Contenido

CAPÍTULO 1

Aspectos categóricos de las bases y los morfismos en los espacios vectoriales

José de Jesús Sáez-Macegoza, Iván Fernando Vilchis-Montalvo
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

En la mayor parte de la bibliografía referente al álgebra lineal, es común ver que se mencionan propiedades de los espacios vectoriales que si las reflexionamos un poco tienen un sentido categórico.
En este capítulo se presentan aspectos categóricos particularmente relacionados con las bases y los tipos de morfismos así como un par de funtores adjuntos entre las categorías **Set** y $\mathbf{Vec}_K$, lo que nos indica que éstas tienen una relación muy fuerte, pues sabemos que al tener funtores adjuntos se puede pasar fácilmente de una categoría a la otra.

2. Preliminares

En este apartado expondremos el material necesario, en su mayoría ya conocido pero relevante para los resultados que exhibiremos en este capítulo, relacionados con Álgebra lineal y Espacios vectoriales de interés.

En este apartado daremos los conceptos y resultados respecto a espacios vectoriales que consideramos necesarios para desarrollar este trabajo.

Notación 2.1. *Para indicar que un grupo abeliano* $(V.+,0)$ *es un espacio vectorial sobre un campo* K*, escribiremos* ${}_KV$*.*

A continuación se construirá un espacio vectorial de mucho interés para nuestros propósitos en este trabajo.

Definición 2.2. *Si X es un conjunto no vacío y K es un campo, definimos el conjunto*

$$K^X = \{f \in \mathcal{P}(X \times K) \mid f \text{ es función}\}.$$

Este conjunto es llamado ***el conjunto de las funciones de X en K***.

Teorema 2.3. *Sea K un campo y X un conjunto no vacío. Entonces el conjunto K^X tiene estructura de espacio vectorial sobre K, con la suma*

$$\begin{array}{cccc} +: & K^X \times K^X & \to & K^X \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array}$$

donde $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ para cada $x \in X$; y el producto por escalar

$$\begin{array}{cccc} \cdot: & K \times K^X & \to & K^X \\ & (a,f) & \mapsto & af \end{array}$$

donde $(af)(x) = af(x)$ para cada $x \in X$.

Demostración: Notemos que la función $\overline{0} : X \to K$, dada por $\overline{0}(x) = 0$, para cada $x \in X$, es un elemento de K^X. Veamos que $\left(K^X, +, \overline{0}\right)$ es un grupo abeliano:

(1) Sean $f, g, h \in K^X$, entonces, para $x \in X$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(f + (g+h))(x) =& f(x) + (g+h)(x)\\ =& f(x) + (g(x) + h(x))\\ =& (f(x) + g(x)) + h(x)\\ =& (f+g)(x) + h(x)\\ =& ((f+g)+h)(x)\end{aligned}$$

es decir, $f+(g+h) = (f+g)+h$, con lo cual establecemos la asociatividad.

(2) Sean $f, g \in K^X$, entonces, para $x \in X$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) =& f(x) + g(x)\\ =& g(x) + f(x)\\ =& (g+f)(x)\end{aligned}$$

de ahí que $f + g = g + f$.

(3) Sea $f \in K^X$, entonces para $x \in X$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(f+\overline{0})(x) =& f(x) + \overline{0}(x)\\ =& f(x) + 0\\ =& f(x)\end{aligned}$$

por consiguiente, $f + \overline{0} = f = \overline{0} + f$, por lo que $\overline{0}$ es el neutro aditivo en K^X.

(4) Sea $f \in K^X$, definamos $-f : X \to K$ como $(-f)(x) = -f(x)$, para cada $x \in X$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:
$$\begin{aligned}(f + (-f))(x) =& f(x) + (-f)(x)\\ =& f(x) + (-f(x))\\ =& 0\\ =& \overline{0}(x)\end{aligned}$$
así, $-f$ es el inverso aditivo de f, para cada $f \in K^X$.

Por lo tanto, $\big(K^X, +, \overline{0}\big)$ es un grupo abeliano.
Vamos a mostrar que el producto por escalar propuesto satisface las propiedades de la definición de espacio vectorial:

(1) Sea $f \in K^X$, si $x \in X$, entonces $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$, pues 1 es el neutro multiplicativo en K, de ahí que $1f = f$.
(2) Sean $c, d \in K$, $f \in K^X$, entonces, para $x \in X$, $((cd)f)(x) = (cd)f(x) = c(df(x)) = c(df)(x)$. Por consiguiente, $(cd)f = c(df)$.
(3) Sean $c, d \in K$, $f \in K^X$, entonces para $x \in X$, $((c+d)f)(x) = (c+d)f(x) = cf(x) + df(x) = (cf)(x) + (df)(x)$, así que $(c + d)f = cf + df$.
(4) Sea $c \in K$, $f, g \in K^X$, entonces para $x \in X$, $(c(f + g))(x) = c(f + g)(x) = c(f(x) + g(x)) = cf(x) + cg(x) = (cf)(x) + (cg)(x)$, de ahí que $c(f + g) = cf + cg$.

Por lo tanto, ${}_K K^X$ es un espacio vectorial. □

Notación 2.4. *Si ${}_K V$ es un espacio vectorial y W es un subespacio de V, escribiremos $W \leqslant V$.*

Notación 2.5. *Para indicar que un conjunto A es finito, escribiremos $|A| < \infty$.*

Una vez que hemos construido el espacio K^X, vamos a mostrar un subespacio de interés que tiene este último y mediante el cuál, más adelante mostraremos que todos los espacios vectoriales son de esta forma, salvo isomorfismo.

Definición 2.6. *Sea K un campo, X un conjunto no vacío y $f \in K^X$. Definimos el **soporte** f como*
$$sop(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$
Con lo anterior, definimos el conjunto
$$K^{(X)} = \{f \in K^X \mid \big|sop(f)\big| < \infty\}.$$

Teorema 2.7. *Si K es un campo y X un conjunto no vacío, entonces $K^{(X)} \leqslant K^X$.*

DEMOSTRACIÓN:

- Sean $f, g \in K^{(X)}$, luego $|sop(f)|, |sop(g)| < \infty$, veamos que $sop(f + g) \subseteq sop(f) \cup sop(g)$, en efecto, sea $x \in sop(f + g)$, entonces $(f + g)(x) \neq 0$, esto es $f(x)+g(x) \neq 0$, por lo que $f(x) \neq 0$ ó $g(x) \neq 0$, así que $x \in sop(f)$ ó $x \in sop(g)$, es decir, $x \in sop(f) \cup sop(g)$. Por lo tanto, $sop(f + g) \subseteq sop(f) \cup sop(g)$, entonces $|sop(f+g)| \leqslant |sop(f) \cup sop(g)|$ y dado que $sop(f)$ y $sop(g)$ son finitos se tiene que $sop(f) \cup sop(g)$ es finito, lo cual nos obliga a concluir que $sop(f + g)$ es finito. Por lo tanto $f + g \in K^{(X)}$.
- Sabemos que $\overline{0} : X \to K$ definida por $\overline{0}(x) = 0$, para cada $x \in X$, es el elemento neutro en K^X, además $sop(\overline{0}) = \emptyset$, por lo que $sop(\overline{0})$ es finito, así que $\overline{0} \in K^{(X)}$.

- Sea $a \in K$, $f \in K^{(X)}$, entonces para $x \notin sop(f)$ se tiene que $f(x) = 0$ y por tanto $af(x) = 0$, es decir, $(af)(x) = 0$, para $x \notin sop(f)$, además, si $a = 0$, entonces $af = \overline{0}$. Finalmente, si $a \neq 0$, entonces $sop(af) = sop(f)$, pues para cada $x \in sop(f)$, $af(x) \neq 0$, es decir, $(af)(x) \neq 0$, por lo que $sop(af)$ es finito, en consecuencia $af \in K^{(X)}$.

Por lo tanto, $K^{(X)} \leqslant K^X$. □

Observación 2.8. *Cuando X es un conjunto finito, entonces $K^{(X)} = K^X$. En efecto, por definición, $K^{(X)} \leqslant K^X$. Ahora, si $f \in K^X$, se tiene que $sop(f) \subseteq X$ y dado que $|X| < \infty$, se sigue que $\big|sop(f)\big| < \infty$, lo que implica que $f \in K^{(X)}$. De lo anterior se concluye que $K^X \subseteq K^{(X)}$ y de ambas contenciones se sigue la igualdad.*

2.1. Base y dimensión. En este apartado vamos a mostrar resultados que nos permiten elegir bases de nuestros espacios vectoriales así como definir el concepto de dimensión, aún cuando no estemos trabajando con espacios de dimensión finita. Cabe mencionar que este trabajo estamos asumiendo como verdadero el Axioma de Elección (AE). Para nuestros resultados utilizaremos dos resultados fuertes de teoría de conjuntos, los cuáles se enuncian a continuación.

Teorema 2.9 (Lema de Zorn)**.** *Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior, tiene al menos un elemento máximo.*

Teorema 2.10 (Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein)**.** *Sean A y B conjuntos. Si $|A| \leqslant |B|$ y $|B| \leqslant |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

Notación 2.11. *Si ${}_KV$ es un espacio vectorial y X es un subconjunto de V, para denotar al subespacio generado por X, escribiremos $\langle X \rangle$.*

Definición 2.12 (Conjunto generador)**.** *Sea ${}_KV$ un espacio vectorial y $S \subseteq V$. Decimos que S genera a V, si $\langle S \rangle = V$. En tal caso también se dice que S es un conjunto generador de V.*

Observación 2.13. *Dado que $V \subseteq V$ y $\langle V \rangle = V$, entonces V es un conjunto generador de V, por lo que se concluye que todo espacio vectorial tiene conjuntos generadores.*
De igual forma, dado que $\emptyset$ es l.i en cualquier espacio vectorial ${}_KV$, se concluye que todo espacio vectorial tiene conjuntos l.i.

Notación 2.14. *Para un espacio vectorial ${}_KV$, denotamos:*

$$\begin{array}{rl} \mathcal{I}(V) = & \big\{L \subseteq V \mid L \text{ es l.i}\big\}. \\ \mathcal{G}(V) = & \big\{G \subseteq V \mid G \text{ genera a } V\big\}. \end{array}$$

Por la Observación 2.13, ambas familias son no vacías.

Teorema 2.15 (Caracterización de las bases)**.** *Sea ${}_KV$ un espacio vectorial. Son equivalentes para $B \subseteq V$:*

(1) B es base de V.
(2) B es un elemento máximo en $\mathcal{I}(V)$.
(3) B es un elemento mínimo en $\mathcal{G}(V)$.

Demostración: 1. $\Rightarrow$ 2.: Supongamos que B es base de V. Claramente, $B \in \mathcal{I}(V)$. Veamos que es máximo, supongamos que $B \subsetneq B'$, luego, existe $x \in V$ tal que $x \in B'$ y $x \notin B$, como $\langle B \rangle = V$, entonces $B \cup \{x\}$ es l.d, ya que $x \in V = \langle B \rangle =$

$\langle (B \cup \{x\}) \setminus \{x\} \rangle$, pero $B \cup \{x\} \subseteq B'$, con $B \cup \{x\}$ l.d, por consiguiente B' es l.d, de ahí que $B' \notin \mathcal{I}(V)$ y así queda establecida la maximalidad de B en $\mathcal{I}(V)$.
2. $\Rightarrow$ 3.: Supongamos que B es un elemento máximo en $\mathcal{I}(V)$, luego $B \in \mathcal{I}(V)$. Primero veamos que $V = \langle B \rangle$, es claro que $\langle B \rangle \leqslant V$. Ahora, sea $x \in V$, entonces $x \in B$ ó $x \notin B$. Si $x \in B$, como $B \subseteq \langle B \rangle$, trivialmente se tiene que $x \in \langle B \rangle$. Si $x \notin B$, entonces $B \subsetneq B \cup \{x\}$, pero B es máximo en $\mathcal{I}(V)$, así que $B \cup \{x\}$ es l.d, luego existe una combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_{n+1} x = 0$, con $a_i \in K$, $x_i \in B$, con $a_i \neq 0$, para algún $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, si $a_{n+1} = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, con $a_i \neq 0$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, pero esto es absurdo ya que B es l.i, de ahí que $a_{n+1} \neq 0$, en consecuencia $x = \sum_{i=1}^{n} (-a_{n+1}^{-1} a_i) x_i$, con lo que $x \in \langle B \rangle$. Por lo tanto, de cualquier manera $V \leqslant \langle B \rangle$, por consiguiente, $V = \langle B \rangle$, es decir, $B \in \mathcal{G}(V)$.
Ahora, falta ver que B es mínimo en $\mathcal{G}(V)$, en efecto sea $B' \subsetneq B$, luego existe $x \in V$ tal que $x \in B$ y $x \notin B'$, así $B' \cup \{x\} \subseteq B$, como B es l.i, tenemos que $B' \cup \{x\}$ es l.i, luego, para cada $y \in B' \cup \{x\}$, tenemos que $\langle B' \cup \{x\} \setminus \{y\} \rangle \lneqq \langle B' \cup \{x\} \rangle$, en particular, $\langle B' \cup \{x\} \setminus \{x\} \rangle \lneqq \langle B' \cup \{x\} \rangle$, es decir, $\langle B' \rangle \lneqq \langle B' \cup \{x\} \rangle$, luego, como $B' \subseteq B' \cup \{x\} \subseteq B$, entonces $\langle B' \rangle \lneqq \langle B' \cup \{x\} \rangle \leqslant \langle B \rangle = V$, con lo que $\langle B' \rangle \lneqq V$, esto es $B' \notin \mathcal{G}(V)$, con lo que se establece la minimalidad de B en $\mathcal{G}(V)$.
3. $\Rightarrow$ 1.: Dado que B es mínimo en $\mathcal{G}(V)$, se tiene que $V = \langle B \rangle$. Ahora, como B es un generador mínimo, para cada $x \in B$, $\langle B \setminus \{x\} \rangle \lneqq V = \langle B \rangle$, lo que implica que B es l.i. □

A continuación exponemos un teorema y un corolario que tienen que ver con la existencia de bases.

Teorema 2.16. *Sea ${}_K V$ un espacio vectorial, L un conjunto l.i en V y G un conjunto generador de V tales que $L \subseteq G$. Entonces existe una base B tal que $L \subseteq B \subseteq G$.*

Demostración: Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\Gamma, \subseteq)$, donde

$$\Gamma = \left\{ X \in \mathcal{I}(V) \mid L \subseteq X \subseteq G \right\}.$$

Dado que por hipótesis $L \in \Gamma$, tenemos que $\Gamma \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ una cadena contenida en Γ y consideremos $C = \bigcup_{i \in I} C_i$. Notemos que para cada $i \in I$, $C_i \subseteq C$, lo que implica que C es una cota superior para $\mathcal{C}$. Nos falta ver que $C \in \Gamma$. Primero observemos que para cada $i \in I$, $L \subseteq C_i \subseteq G$, por lo que $L \subseteq C \subseteq G$. Ahora mostremos que C es l.i en V, para eso tomemos un subconjunto finito $H = \{x_1, \ldots, x_n\}$ contenido en C, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, existe $i_j \in I$ tal que $x_j \in C_{i_j}$. Dado que $\mathcal{C}$ es una cadena, también lo es $\{C_{i_j}\}_{j=1}^{n}$, en consecuencia, existe $N \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\bigcup_{j=1}^{n} C_{i_j} = C_{i_N}$. Observese que $H \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} C_{i_j} = C_{i_N}$, por consiguiente, $H \subseteq C_{i_N}$ y como C_{i_N} es l.i en V, también H debe ser l.i en V, de ahí que C es l.i en V, concluyendo que $C \in \Gamma$. Así las cosas, hemos mostrado que toda cadena contenida en Γ tiene una cota superior en Γ, por el Lema de Zorn, Γ tiene un elemento máximo, digamos B. De la definición de Γ se tiene que B es l.i y $L \subseteq B \subseteq G$. Para mostrar que B es base de V necesitamos exhibir que $V = \langle B \rangle$. En efecto, si $\langle B \rangle \lneqq V$, como $V = \langle G \rangle$, $G \nsubseteq \langle B \rangle$, de lo contrario, $V = \langle G \rangle \leqslant \langle B \rangle \leqslant V$, lo que implicaría que $V = \langle B \rangle$, en contra de nuestra suposición. Luego, existe $y \in G$ tal que $y \notin \langle B \rangle$, dado que B es l.i, se tiene que $B \cup \{y\}$ es l.i en V, además, $L \subseteq B \subseteq B \cup \{y\} \subseteq G$. Así, se tiene que $B \cup \{y\} \in \Gamma$ con $B \subsetneq B \cup \{y\}$, contradiciendo la maximalidad de B en Γ. Por lo tanto, $V = \langle B \rangle$ y así B es una base de V con las condiciones buscadas. □

Corolario 2.17.

(1) *Todo espacio vectorial tiene base.*
(2) *Todo conjunto l.i en un espacio vectorial está contenido en una base de V.*
(3) *Todo conjunto generador contiene una base.*

DEMOSTRACIÓN: Sea ${}_KV$ un espacio vectorial.

(1) Aplicando el Teorema 2.16 a $L = \emptyset$ y $G = V$ se obtiene la base deseada.
(2) Si S es un conjunto l.i en V, se aplica el Teorema 2.16 a $L = S$ y $G = V$.
(3) Si G' es un conjunto generador de V, se aplica el Teorema 2.16 a $L = \emptyset$ y $G = G'$.

□

Vamos a generalizar el teorema de reemplazo para cualquier espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita).

Teorema 2.18 (Teorema de reemplazo). *Sea ${}_KV$ un espacio vectorial, B una base de V y S un conjunto l.i en V. Entonces existe $S' \subseteq B$ tal que $S \cup S'$ es base de V.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la familia

$$\mathcal{A} = \{T \subseteq B \mid S \cup T \in \mathcal{I}(V)\}$$

ordenada por inclusión de conjuntos. Notemos que $\emptyset \in \mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Consideremos $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$ una cadena y $C = \bigcup_{i \in I} C_i$. Notemos que $C_i \subseteq C$ para cada $i \in I$, por lo que C es una cota superior para $\mathcal{C}$. Mostremos que $C \in \mathcal{A}$, para eso tomemos un conjunto finito $H = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\} \subseteq S \cup C$, donde $x_i \in S$, $y_j \in C$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$. Luego, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, existe $i_j \in I$ tal que $y_j \in C_{i_j}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, también lo es $\{C_{i_j}\}_{j=1}^m$, por consiguiente, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\{y_j\}_{j=1}^m \subseteq C_k$, lo cual implica que $H \subseteq S \cup C_k$. Dado que $S \cup C_k$ es l.i, H es l.i y por tanto $S \cup C$ es l.i, de donde se concluye que $C \in \mathcal{A}$. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{A}$ tiene un elemento máximo, digamos S'. Así las cosas, $S \cup S'$ es l.i en V, para ver que es base nos resta ver que $\langle S \cup S' \rangle = V$. Si $\langle S \cup S' \rangle \lneq V$, como $V = \langle B \rangle$, existe $x \in B$ tal que $x \notin \langle S \cup S' \rangle$, lo que implica que $S \cup (S' \cup \{x\})$ es l.i, por tanto, $S' \cup \{x\} \in \mathcal{A}$ con $S' \subsetneq S' \cup \{x\}$, lo que contradice la maximalidad de S'. Por lo tanto, $S \cup S'$ genera a V, con lo que se establece que $S \cup S'$ es base de V. □

Observación 2.19. *Del teorema anterior podemos deducir que si ${}_KV$ es un espacio vectorial y $S \subseteq V$ es l.i, existe $S' \subseteq V$ tal que $S \cap S' = \emptyset$ y $S \cup S'$ es base de V.*

Definición 2.20 (Suma directa). *Sea ${}_KV$ un espacio vectorial, W y L subespacios de V. Decimos que V es suma directa de W y L si $V = W + L$ y $W \cap L = \{0\}$. Además, se dice que W es un complemento de L y que L es un complemento de W.*

Debido a la existencia de bases se tiene que todo subespacio tiene un complemento.

Teorema 2.21. *Sea ${}_KV$ un espacio vectorial, $W \leqslant V$. Entonces existe $W' \leqslant V$ tal que $V = W \oplus W'$.*

Demostración: Como $W \leqslant V$, en particular es espacio vectorial, por el Corolario 2.17, existe $S \subseteq W$ tal que S es base de W. Ahora, como S es l.i en W y $W \subseteq V$, entonces, S es l.i en V, luego, existe $S' \subseteq V$ tal que $S \cap S' = \emptyset$ y $S \cup S'$ es base de V. Consideremos $W' = \langle S' \rangle$. Vamos a mostrar que $V = W \oplus W'$, veamos primero que $V = W + W'$, en efecto, $V = \langle S \cup S' \rangle = \langle S \rangle + \langle S' \rangle = W + W'$. De lo anterior, tenemos que $V = W + W'$. Finalmente, vamos a demostrar que $W \cap W' = \{0\}$. Supongamos que $x \in W \cap W'$, luego, $x \in \langle S \rangle$ y $x \in \langle S' \rangle$, así, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ con $a_i \in K$, $x_i \in S$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$ con $a_j \in K$, $y_j \in S'$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces, $0 = x - x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$, con $x_i, y_j \in S \cup S'$, pero como $S \cup S'$ es l.i, entonces $a_i = 0$, $b_j = 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, con lo que $x = 0$. Por lo tanto, $V = W \oplus W'$. $\square$

Es conocido para espacios vectoriales de dimensión finita que todas las bases tienen el mismo número de vectores y a tal número común le llamamos la dimensión del espacio.
En el siguiente teorema, estableceremos que en el caso general, cualesquiera dos bases tienen la misma cardinalidad. La demostración que presentamos se debe al matemático Hugo Alberto Rincón Mejía y se puede consultar en [2]. En la prueba aquí presentada se aclaran todos los detalles necesarios para su comprensión. Antes de proceder con el teorema, establecemos algunas cuestiones con respecto a la notación.

Notación 2.22. *Si A, B son conjuntos y $f : A \to B$ es una función inyectiva, podemos denotar $f : A \rightarrowtail B$. La notación antes mencionada indicará que la función es inyectiva, aún cuando no se diga en palabras.*

Notación 2.23. *Si $A \subseteq B$, para denotar la función inclusión $\iota : A \to B$, definida por $\iota(a) = a$, para cada $a \in A$, se escribirá simplemente $A \hookrightarrow B$. Dicha notación se referirá a la inclusión, aún cuando no se diga explícitamente.*

Notación 2.24. *Si A y B son conjuntos no vacíos, $C \subseteq A$ y $f : A \to B$ es una función, la función*

$$\begin{array}{rccc} g: & C & \to & B \\ & c & \mapsto & f(c) \end{array}$$

conocida como la restricción de f a C, la denotaremos por $f_{|C}$, es decir, $g = f_{|C}$.

Notación 2.25. *Si A y B son conjuntos y C es la unión ajena de A con B, denotamos $C = A \mathring{\cup} B$, esto siginifica que $C = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.*

Teorema 2.26. *Sea ${}_K V$ un espacio vectorial, A y B bases de V. Entonces $|A| = |B|$.*

Demostración: La prueba consistirá en utilizar en Teorema de Cantor-Schroeder-Berstein, por lo que se mostrará que hay una función inyectiva de A en B y otra de B en A, para eso consideremos el siguiente conjunto.

$$Q = \left\{ (X, F_X) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times B) \mid F_X : X \rightarrowtail B, [B \setminus F_X(X)] \mathring{\cup} X \in \mathcal{I}(V) \right\}.$$

En palabras, en Q tenemos la colección de parejas (X, F_X), donde $X \subseteq A$, $F_X : X \to B$ es una función inyectiva, $[B \setminus F_X(X)] \cup X$ es l.i en V y $[B \setminus F_X(X)] \cap X = \emptyset$. Aún más explicado, a B le quitamos la imagen $F_X(X)$, dicha imagen la reemplazamos por el conjunto X, quitamos los elementos comunes y pedimos que este conjunto resultante sea l.i en V.

Vamos a justificar que Q es un conjunto. Como A es un conjunto, por el Axioma del conjunto potencia, $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto. Por otro lado, se tiene que $A \times B$ es un conjunto, usando nuevamente el Axioma del conjunto potencia, $\mathcal{P}(A \times B)$ es un conjunto, lo que implica que $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times B)$ es un conjunto. Al considerar la propiedad

$$P(X, F_X) : F_X : X \to B \text{ es inyectiva y } [B \setminus F_X(X)] \mathring{\cup} X \in \mathcal{I}(V)$$

por el Axioma esquema de comprensión, podemos formar el conjunto de los elementos de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times B)$ que poseen la propiedad $P(X, F_X)$, este conjunto no es otro más que Q. De esta manera queda establecido que el conjunto Q existe.
Ahora vamos a mostrar que $Q \neq \emptyset$. Notemos que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, además, por vacuidad se tiene que la función vacía $\overline{\emptyset} : \emptyset \to B$ es inyectiva, más aún, $\overline{\emptyset}(\emptyset) = \emptyset$. Así las cosas, tenemos que

$$[B \setminus \overline{\emptyset}(\emptyset)] \cup \emptyset = B \setminus \emptyset = B.$$

Al ser B una base de V, B en particular es l.i, además $[B \setminus \overline{\emptyset}(\emptyset)] \cap \emptyset = \emptyset$. De esta manera se concluye que $(\emptyset, \overline{\emptyset}) \in Q$ y en consecuencia se sigue que $Q \neq \emptyset$.
Definamos la relación $\leqslant$ en Q de la siguiente manera: para $(X, F_X), (Y, F_Y) \in Q$, $(X, F_X) \leqslant (Y, F_Y)$ si y solo si $X \subseteq Y$ y $F_{Y|X} = F_X (F_{Y|X}$ es la restricción de F_Y a $X)$. Mostraremos que $\leqslant$ es un orden parcial en Q:
Reflexividad: Sea $(X, F_X) \in Q$. Luego $X \subseteq X$ y $F_{X|X} = F_X$, por lo que $(X, F_X) \leqslant (X, F_X)$.
Antisimetría: Sean $(X, F_X), (Y, F_Y) \in Q$. Supongamos que $(X, F_X) \leqslant (Y, F_Y)$ y $(Y, F_Y) \leqslant (X, F_X)$, luego $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq X$, entonces $X = Y$. Además, $F_{Y|X} = F_X$ y $F_{X|Y} = F_Y$, entonces $F_X = F_{X|X} = F_{X|Y} = F_Y$. Por lo tanto $X = Y$ y $F_X = F_Y$, es decir, $(X, F_X) = (Y, F_Y)$.
Transitividad: Sean $(X, F_X), (Y, F_Y), (Z, F_Z) \in Q$. Supongamos que $(X, F_X) \leqslant (Y, F_Y)$ y $(Y, F_Y) \leqslant (Z, F_Z)$, entonces $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq Z$, por la transitividad de $\subseteq$, $X \subseteq Z$, además $F_{Y|X} = F_X$ y $F_{Z|Y} = F_Y$. Observemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "F_Z"] & B \\ Y \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "F_Y"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F_Y"] & B \\ X \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "F_X"'] & \end{tikzcd}$$

así, tenemos que

$$F_{Z|X} = (F_{Z|Y})_{|X} = F_{Y|X} = F_X.$$

De ahí que $X \subseteq Z$ y $F_{Z|X} = F_X$, es decir, $(X, F_X) \leqslant (Z, F_Z)$.
Así las cosas, $\leqslant$ es un orden parcial en Q y en consecuencia, $(Q, \leqslant)$ es un COPO.
Vamos a mostrar que $(Q, \leqslant)$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn, para eso, consideremos un conjunto de índices no vacío I y $\Gamma = \big\{(X_\alpha, F_{X_\alpha})\big\}_{\alpha \in I}$ una cadena

contenida en Q. Definamos la función

$$\begin{array}{rccl} F: & \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha & \to & B \\ & v & \mapsto & F_{X_\beta}(v),\ \text{si } v\in X_\beta \text{ y } \beta\in I. \end{array}$$

En primera instancia, vamos a mostrar que F está bien definida, para eso, supongamos que $v \in X_\beta$ y $v \in X_\gamma$, con $(X_\beta, F_{X_\beta}), (X_\gamma, F_{X_\gamma}) \in \Gamma$, como Γ es una cadena, entonces $(X_\beta, F_{X_\beta}) \leqslant (X_\gamma, F_{X_\gamma})$ ó $(X_\gamma, F_{X_\gamma}) \leqslant (X_\beta, F_{X_\beta})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(X_\beta, F_{X_\beta}) \leqslant (X_\gamma, F_{X_\gamma})$, entonces $X_\beta \subseteq X_\gamma$ y $F_{X_\gamma|X_\beta} = F_{X_\beta}$, así

$$F_{X_\gamma}(v) = F_{X_\gamma|X_\beta}(v) = F_{X_\beta}(v)$$

lo que muestra que F está bien definida.
Mostraremos que F es inyectiva. En efecto, si $v, w \in \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$, con $v \neq w$, entonces $v \in X_\beta$ y $w \in X_\gamma$, para algunos $\beta, \gamma \in I$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $(X_\beta, F_{X_\beta}) \leqslant (X_\gamma, F_{X_\gamma})$, así $X_\beta \subseteq X_\gamma$ y en consecuencia, $v, w \in X_\gamma$. Así, $F(v) = F_{X_\beta}(v) = F_{X_\gamma}(v) \neq F_{X_\gamma}(w) = F(w)$, puesto que F_{X_γ} es inyectiva.

Ahora, vamos a exhibir que $\left[B \setminus F\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)\right] \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$ es l.i en V, en efecto, sabemos que

$$\begin{aligned}\left[B \setminus F\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)\right] \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right) &= \left[B \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in I} F(X_\alpha)\right)\right] \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right) \\ &= \left[\bigcap_{\alpha\in I} (B \setminus F(X_\alpha))\right] \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)\end{aligned}$$

así, si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \bigcap_{\alpha\in I}(B \setminus F(X_\alpha))$ y $\{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$, entonces $\{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq X_\beta$, para algún $\beta \in I$, ya que Γ es una cadena y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq B \setminus F(X_\beta)$, así tenemos que $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\} \subseteq [B \setminus F(X_\beta)] \cup X_\beta$, el cual es l.i, por lo que $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ es l.i. Así las cosas, hemos mostrado que cualquier subconjunto finito de $\left[B \setminus F\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)\right] \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$ es l.i, por lo tanto, $\left[B \setminus F\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)\right] \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$ es l.i. Finalmente, vamos a ver que $B \setminus F\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$ y $\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ son conjuntos ajenos, en efecto, supongamos que existe $v \in \left[B \setminus F\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)\right] \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$, entonces $v \in \bigcap_{\alpha\in I}(B \setminus F(X_\alpha))$ y $v \in X_\beta$, para algún $\beta \in I$, con lo que $v \in (B \setminus F(X_\beta)) \cap X_\beta$, para algún $\beta \in I$, pero esto es imposible, pues para cada $\alpha \in I$, $(B \setminus F(X_\alpha)) \cap X_\alpha = \emptyset$. Por lo tanto, $B \setminus F\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right)$ y $\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ son ajenos.

Con todo lo anterior, tenemos que $\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha, F\right) \in Q$, además es una cota superior para Γ, ya que para cada $\alpha \in I$, $X_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $F_{|X_\alpha} = F_{X_\alpha}$, es decir, para cada $(X_\alpha, F_{X_\alpha}) \in \Gamma$, $(X_\alpha, F_{X_\alpha}) \leqslant \left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha, F\right)$. Por el Lema de Zorn, Q tiene un elemento máximo, digamos (M, g). Luego, $g : M \to B$ es una función inyectiva y $[B \setminus g(M)] \mathring{\cup} M$ es l.i en V.
Vamos a demostrar que $B \setminus g(M) = \emptyset$ ó $A \setminus M = \emptyset$. Supongamos que no es

así, entonces existe $v \in V$ tal que $v \in B \setminus g(M)$ y $A \setminus M \neq \emptyset$, entonces $(B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M$ es l.i en V, ya que $(B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \subseteq (B \setminus g(M))\mathring{\cup} M$ y $(B \setminus g(M))\mathring{\cup} M$ es l.i. Además, $\left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle \neq V$, pues de no ser así, tendríamos que $v \in \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle$, pero observemos que

$$\left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle = \left\langle [(B \setminus (g(M))\mathring{\cup} M] \setminus \{v\} \right\rangle$$

lo que implica que $v \in \left\langle [(B \setminus (g(M))\mathring{\cup} M] \setminus \{v\} \right\rangle$, de donde $(B \setminus (g(M))\mathring{\cup} M$ es l.d(recordemos que $S \subseteq V$ es l.d, si y solo si, existe $x \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$), lo que es imposible. Más aún, $A \setminus M \nsubseteq \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle$, pues si $A \setminus M \subseteq \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle$, tendríamos que

$$A = (A \setminus M) \cup M \subseteq \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle$$

por tanto, $V = \langle A \rangle \leqslant \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle$, por lo que

$$V = \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle,$$

lo cual acabamos de mostrar que es imposible. Así las cosas,

$$A \setminus M \nsubseteq \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle,$$

por lo que existe $w \in V$ tal que $w \in A \setminus M$ y $w \notin \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle$. Consideremos $\overline{M} = M \cup \{w\}$ y definamos

$$\begin{array}{cccc} \overline{g}: & \overline{M} & \to & B \\ & M \ni m & \mapsto & g(m) \\ & w & \mapsto & v \end{array}$$

la cual es claro que está bien definida y es inyectiva. Veamos que $(\overline{M}, \overline{g}) \in Q$, en efecto, nótese que

$$[B \setminus \overline{g}(\overline{M})]\mathring{\cup}\overline{M} = [B \setminus (g(M) \cup \{v\})]\mathring{\cup}(M \cup \{w\}) = [B \setminus (g(M) \cup \{v\})\mathring{\cup} M] \cup \{w\}$$

el cual es l.i, ya que $[B \setminus (g(M) \cup \{v\})]\mathring{\cup} M$ es l.i y $w \notin \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle$. Además, $B \setminus (g(M) \cup \{v\})$ y $M \cup \{w\}$ son ajenos, de otra manera

$$w \in \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\}))\mathring{\cup} M \right\rangle,$$

lo que es absurdo. Por consiguiente, $(\overline{M}, \overline{g}) \in Q$, además, $M \subsetneq \overline{M}$ y $\overline{g}_{|M} = g$, en consecuencia $(M, g) \lneq (\overline{M}, \overline{g})$, pero esto contradice la maximalidad de (M, g) en Q. Por lo tanto, $B \setminus g(M) = \emptyset$ ó $A \setminus M = \emptyset$.

Analicemos cada caso. Si $A \setminus M = \emptyset$, entonces $A \subseteq M \subseteq A$, así $A = M$ y $(B \setminus g(A))\mathring{\cup} A$ es l.i en V, pero A es l.i máximo, pues es base de V, entonces $B \setminus g(A) = \emptyset$, consecuentemente $B = g(A)$, lo que implica que $g: A \to B$ es una biyección y en este caso $|A| = |B|$.

Si $B \setminus g(M) = \emptyset$, entonces $B \subseteq g(M) \subseteq B$, es decir, $B = g(M)$, entonces $g: M \to B$ es suprayectiva, con lo que $|A| \geqslant |M| \geqslant |B|$, por transitividad, $|A| \geqslant |B|$. Tomando una familia de parejas con las mismas características que Q, pero ahora considerando subconjuntos de B y realizando el mismo razonamiento, tendríamos que $|B| \geqslant |A|$, aplicando el Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein, tenemos que $|A| = |B|$. □

Definición 2.27 (Dimensión de un espacio vectorial)**.** *Si ${}_K V$ es un espacio vectorial, definimos* ***la dimensión de*** *V como $|B|$, donde B es una base de V.*

En el siguiente ejemplo vamos a calcular la dimensión de el espacio $K^{(X)}$ construido en el Teorema 2.7.

Ejemplo 2.28. *Consideremos un campo K y X un conjunto no vacío. Recordemos que $K^{(X)} = \{f \in F^X \mid |sop(f)| < \infty\}$. Vamos a ver que $dim(K^{(X)}) = |X|$, consideremos la función*

$$\begin{array}{rccc} \delta: & X & \to & K^{(X)} \\ & x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

donde $\delta_x : X \to K$ se define por $\delta_x(x) = 1$ y $\delta_x(y) = 0$, si $y \neq x$. Veamos primero que $\delta : X \to K^{(X)}$ es inyectiva, en efecto, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, si $\delta(x) = \delta(y)$, entonces $1 = \delta_x(x) = \delta_y(x) = 0$, es decir, $1 = 0$, lo cual es absurdo dado que K es campo, así que $\delta(x) \neq \delta(y)$. Por lo tanto $\delta : X \to K^{(X)}$ es inyectiva, además $Im(\delta) = \{\delta_x\}_{x\in X}$, por lo que $\delta : X \to \{\delta_x\}_{x\in X}$ ya es una función biyectiva. Ahora, por simplicidad denotemos $B = Im(\delta) = \{\delta_x\}_{x\in X}$, demostremos que B es una base de $F^{(X)}$:

- *B es l.i: Supongamos que $\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i} = \overline{0}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in K$, $\delta_{x_i} \in B$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Ahora, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos las siguientes igualdades:*

$$c_j = c_j\delta_{x_j}(x_j) = \left(\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}\right)(x_j) = \overline{0}(x_j) = 0$$

  es decir, $c_j = 0$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, B es l.i en $K^{(X)}$.
- *B genera a $K^{(X)}$: Sea $f \in K^{(X)}$. Si $f = \overline{0}$ es inmediato, así que podemos suponer que $f \neq \overline{0}$, entonces $sop(f) = \{x_1, \dots, x_n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, por lo que $f(x_j) = c_j$ con $c_j \neq 0$ para $j \in \{1, \dots, n\}$. Veamos que $f = \sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}$, en efecto, si $x \notin sop(f)$ la igualdad se ve de forma inmediata. Ahora, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, ($x_j \in sop(f)$), tenemos lo siguiente:*

$$f(x_j) = c_j = c_j\delta_{x_j}(x_j) = \left(\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}\right)(x_j)$$

  Así las cosas, tenemos que para cada $x \in X$, $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}\right)(x)$, de ahí que $f = \sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}$. De esta manera queda demostrado que B genera a $K^{(X)}$.

De lo anterior tenemos que $dim(K^{(X)}) = |B| = |X|$. De esta manera se tiene que $dim(K^{(X)}) = \kappa$, donde κ es el cardinal asociado a X, el cual puede ser finito o infinito, en otras palabras la dimensión de $K^{(X)}$ depende del cardinal de X.

Observación 2.29. *Si definimos $K^{(\emptyset)} = \{0\}$ y $K^{(X)}$ como antes cuando $X \neq \emptyset$, tenemos que $K^{(X)}$ existe para cualquier conjunto X. De este hecho deducimos que dado un campo K fijo, hay tantos espacios vectoriales sobre K como conjuntos existan.*

3. Teoría de categorías

A continuación exponemos el material del área de categorías que consideramos relevante para el desarrollo del capítulo.

Definición 3.1. *Una categoría $\mathcal{C}$ consta de los siguientes elementos:*

(1) *Una clase de objetos $Obj(\mathcal{C})$.*
(2) *Un conjunto $\mathcal{C}(A, B)$, para cada $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, cuyos elementos serán llamados* ***flechas o morfismos de*** *A* ***a*** *B.*
(3) *Una operación*

$$\circ : \quad \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \quad \rightarrow \quad \mathcal{C}(A, C)$$

para cada $A, B, C \in Obj(\mathcal{C})$

(4) *Una flecha $id_A : A \rightarrow A$, para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$.*

los cuáles estás sujetos a los siguientes axiomas:

a. *Para cada $A, B, C, D \in Obj(\mathcal{C})$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $h \in \mathcal{C}(B, C)$ y $h \in \mathcal{C}(C, D)$, se tiene que*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

b. *Para cada $A, B, C \in Obj(\mathcal{C})$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$ y $g \in \mathcal{C}(B, C)$, se tiene que $id_B \circ f = f$ y $g \circ id_B = g$.*

Notación 3.2. *Para indicar que $A \in Obj(\mathcal{C})$, escribiremos $A \in \mathcal{C}$.*

Notación 3.3. *Si $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$ y $g \in \mathcal{C}(B, C)$, denotaremos $g \circ f = gf$.*

Definición 3.4. *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, decimos que $\mathcal{D}$ es una* ***subcategoría de*** *$\mathcal{C}$, si $Obj(\mathcal{D}) \subseteq Obj(\mathcal{D})$ y para cada $A, B \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$.*

Definición 3.5. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría, definimos la categoría opuesta de $\mathcal{C}$, denotada como $\mathcal{C}^{op}$, donde $Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C})$ y para cada $g \in \mathcal{C}(A, B)$, existe $\overline{g} \in \mathcal{C}^{op}(B, A)$. En este caso, para $\overline{f} \in \mathcal{C}^{op}(A, C)$, definimos $\overline{f}\,\overline{g} = \overline{gf}$.*

Definición 3.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $A, B \in \mathcal{C}$ y $f \in \mathcal{C}(A, B)$. Entonces:*

- *f es llamado* ***monomorfismo****, si para cada $C \in \mathcal{C}$, $g, h \in \mathcal{C}(C, A)$, $fg = fh$, implica $g = h$.*
- *f es llamado* ***epimorfismo****, si para cada $C \in \mathcal{C}$, $g, h \in \mathcal{C}(B, C)$, $gf = hf$, implica $g = h$.*
- *f es llamado* ***bimorfismo****, si es monomorfismo y epimorfismo.*
- *f es una* ***sección****, si existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $gf = id_A$.*
- *f es una* ***retracción****, si existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $fg = id_B$.*
- *f es* ***isomorfismo*** *si existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $gf = id_A$ y $fg = id_B$. Cuando existe un isomorfismo entre A y B, se dice que A y B son* ***isomorfos*** *y se denota $A \cong B$.*

Observación 3.7. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría, $A, B \in \mathcal{C}$ y $f \in \mathcal{C}(A, B)$, entonces f es isomorfismo, si y solo si f es sección y retracción. En efecto, si f es isomorfismo, es claro que es sección y retracción. Ahora, si f es sección y retracción, existen $h, k \in \mathcal{C}(B, A)$ tales que $hf = id_A$ y $fk = id_B$. Veamos que $h = k$, para eso observemos lo siguiente:*

$$h = hid_B = h(fk) = (hf)k = id_A k = k$$

por lo que haciendo $g = h = k$, tenemos que $gf = id_A$ y $fg = id_B$, de donde se sigue que f es isomorfismo.

Definición 3.8. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un* ***funtor*** *$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una asignación, sujeta a los siguientes axiomas:*

(1) *Para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$, $F(A) \in Obj(\mathcal{D})$.*

(2) Para cada $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ y $f \in \mathcal{C}(A,B)$, $F(f) \in \mathcal{D}(F(A),F(B))$
(3) Para cada $A, B, C \in Obj(\mathcal{C})$, $f \in \mathcal{C}(A,B)$ y $g \in \mathcal{C}(B,C)$, se tiene que $F(gf) = F(g)F(f)$.
(4) Para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$, se tiene que $F(id_A) = id_{F(A)}$.

Definición 3.9. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Una* ***transformación natural****, denotada por $\tau : F \Rightarrow G$, es una familia de morfismos en $\mathcal{D}$*

$$\tau = \left\{\tau_A : F(A) \to G(A) \mid A \in Obj(\mathcal{C})\right\}$$

tal que para cada $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ y $f : A \to B$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{D}$, es decir, $G(f)\tau_A = \tau_B F(f)$.
En este caso se dice que para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$, $\tau_A : F(A) \to G(A)$ es un morfismo natural. En ocasiones se suele denotar $\tau = \{\tau_A\}_{A \in Obj(\mathcal{C})}$.

Observación 3.10. *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son funtores, $\tau : F \Rightarrow G$ y $\sigma : G \Rightarrow H$ son transformaciones naturales. La composición de σ con τ la definimos como $\sigma\tau : F \Rightarrow H$, dada por $(\sigma\tau)_A = \sigma_A \tau_A$, para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$. Veamos que efectivamente $\sigma\tau$ es una transformación natural, para eso sean $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$ y $f : A \to B$ un morfismo. Debemos tener que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "(\sigma\tau)_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "(\sigma\tau)_B"] & H(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero tal diagrama lo podemos escribir como

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \arrow[r, "\sigma_B"] & H(B)
\end{tikzcd}$$

de manera que tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
H(f)(\sigma\tau)_A &= H(f)(\sigma_A\tau_A) \\
&= (H(f)\sigma_A)\tau_A \\
&= (\sigma_B G(f))\tau_A \\
&= \sigma_B(G(f)\tau_A) \\
&= \sigma_B(\tau_B F(f)) \\
&= (\sigma_B\tau_B)F(f) \\
&= (\sigma\tau)_B F(f)
\end{aligned}$$

es decir, $H(f)(\sigma\tau)_A = (\sigma\tau)_B F(f)$, en consecuencia, $\sigma\tau : F \Rightarrow H$ es una transformación natural.

Definición 3.11. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores y $\tau : F \Rightarrow G$ una transformación natural. Decimos que σ es un* ***isomorfismo natural*** *si para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$, $\tau_A : F(A) \to G(A)$ es un isomorfismo. En este caso se dice que F y G son naturalmente isomorfos y se denota $F \cong G$(naturalmente).*

A continuación introduciremos la definición de funtores adjuntos, pero antes de hacerlo es necesario precisar algunos detalles para establecer nuestra notación. Consideremos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Para morfismos $f : A' \to A$ en $\mathcal{C}$ y $g : B \to B'$ en $\mathcal{D}$, al ser F un funtor de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, tenemos que $F(f) : F(A') \to F(A)$ es un morfismo en $\mathcal{D}$ y $G(g) : G(B) \to G(B')$ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Por consiguiente, dado un morfismo $\alpha : F(A) \to B$ en $\mathcal{D}$, tenemos que la composición $g\alpha F(f) : F(A') \to B'$ es un morfismo en $\mathcal{D}$. Análogamente, dado un morfismo $\beta : A \to G(B)$ en $\mathcal{C}$, tenemos que la composición $G(g)\beta f : A' \to G(B')$ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Además, es claro que dichas composiciones son únicas. Lo anterior, nos motiva a introducir la siguiente definición.

Definición 3.12. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Para morfismos $f : A' \to A$ en $\mathcal{C}$ y $g : B \to B'$ en $\mathcal{D}$, definimos la función*

$$\begin{array}{rccc} g\_F(f): & \mathcal{D}(F(A), B) & \to & \mathcal{D}(F(A'), B') \\ & \alpha & \mapsto & g\alpha F(f). \end{array}$$

Análogamente, definimos la función

$$\begin{array}{rccc} G(g)\_f: & \mathcal{C}(A, G(B)) & \to & \mathcal{C}(A', G(B')) \\ & \beta & \mapsto & G(g)\beta f. \end{array}$$

Observación 3.13. *Es importante notar que la definición de las funciones descritas anteriormente, depende tanto de los objetos como de los morfismos elegidos. Sin embargo, para no hacer la notación tan complicada, no se denota tal dependencia y por eso en este apartado hacemos la aclaración.*

Definición 3.14. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Decimos que G es adjunto derecho de F y que F es adjunto izquierdo de G si para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$ y $B \in Obj\,(\mathcal{D})$, existe un isomorfismo $\Phi_{A,B} : \mathcal{D}(F(A), B) \to \mathcal{C}(A, G(B))$, que es natural tanto en C como en D, esto es, para cada morfismo $f : A' \to A$ en $\mathcal{C}$ y para cada morfismo $g : B \to B'$ en $\mathcal{D}$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(F(A), B) \arrow[r, "\Phi_{A,B}"] \arrow[d, "g\_F(f)"] & \mathcal{C}(A, G(B)) \arrow[d, "G(g)\_f"] \\ \mathcal{D}(F(A'), B') \arrow[r, "\Phi_{A',B'}"] & \mathcal{C}(A', G(B')) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $G(g)\_f\Phi_{A,B} = \Phi_{A',B'}g\_F(f)$. En este caso denotamos $F \dashv G$.

Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ son funtores con $F \dashv G$, de la definición de funtor adjunto tenemos que para $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}(F(A), B) \cong^{\Phi_{A,B}} \mathcal{C}(A, G(B))$$

en particular,

$$\mathcal{D}(F(A), F(A)) \cong^{\Phi_A} \mathcal{C}(A, GF(A)) \tag{1.1}$$

y

$$\mathcal{D}(FG(B), B) \cong^{\Phi_B} \mathcal{C}(G(B), G(B)). \tag{1.2}$$

De (1.1), tenemos que $\eta_A = \Phi_A(id_{F(A)}) \in \mathcal{C}(A, GF(A))$. Análogamente, de (1.2), tenemos que $\xi_B = \Phi_B^{-1}(id_{G(B)}) \in \mathcal{D}(FG(B), B)$. Esto da lugar al siguiente teorema.

Teorema 3.15. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores con $F \dashv G$. Entonces:*

- *$\eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$, dada por $\eta = \{\eta_A\}_{A \in Obj(\mathcal{C})}$ es una transformación natural.*
- *$\xi : FG \Rightarrow Id_{\mathcal{D}}$, dada por $\xi = \{\xi_B\}_{B \in Obj(\mathcal{D})}$ es una transformación natural.*

Además, para $A \in Obj(\mathcal{C})$, $B \in Obj(\mathcal{D})$, $f : F(A) \to B$ morfismo en $\mathcal{D}$ y $g : A \to G(B)$ morfismo en $\mathcal{C}$, se tiene que $\Phi_{A,B}(f) = G(f)\eta_A$ y $\Phi_{A,B}^{-1}(g) = \xi_B F(g)$.

Definición 3.16. *η y ξ, definidas en el teorema anterior son llamados respectivamente, **unidad** y **co-unidad** de la adjunción.*

4. Propiedades categóricas de las bases y los morfismos en los espacios vectoriales

4.1. Los espacios vectoriales como categoría. Los espacios vectoriales sobre un campo previamente fijado tienen una estructura categórica, la cuál se define a continuación.
Sea K un campo fijo. Entonces, $\mathbf{Vec}_K$ es la categoría de los espacios vectoriales sobre K, donde

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{Vec}_K) = \{V \mid V$ es un espacio vectorial sobre $K\}$.
- Para cada $V, W \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Vec}_K)$,

$$\mathbf{Vec}_K(V, W) = Hom_K(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es una transformación lineal}\}.$$

- La composición es la composición usual de funciones, debido a que composición de trasformaciones lineales es transformación lineal.
- Para cada $V \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Vec}_K)$, $id_V : V \to V$ es la transformación lineal identidad.

Notación 4.1. *Debido a que estamos tratando los espacios vectoriales con un enfoque categórico, para indicar que $_KV$ es un espacio vectorial escribiremos $_KV \in$ **Vec**$_K$.*

Una vez que tenemos definida nuestra categoría de espacios vectoriales vamos a resaltar algunos aspectos categóricos de estos objetos.

5. Propiedades categóricas de las bases

Para introducir una definición categórica de la base de un espacio vectorial vale la pena retomar el Ejemplo 2.28. Notemos que en el espacio $K^{(X)}$, X es un conjunto, sin embargo, hay una función inyectiva, a saber, $\delta : X \to K^{(X)}$ de manera que $\delta(X)$ es una base de $K^{(X)}$, lo que nos permitiría abusar y decir que "X es una base de $K^{(X)}$", esto porque $X \cong \delta(X)$ (como conjuntos). Para darle sentido categórico a las bases de nuestros espacios vectoriales, daremos dos definiciones de base, una algebraica y una categórica y posteriormente mostraremos que en algún sentido ambas definiciones son equivalentes.

Definición 5.1 (Base algebraica)**.** *Sea ${}_KV$ un espacio vectorial. Un subconjunto $B \subseteq V$ es una* ***base algebraica de*** *V, si es una base de V en el sentido usual, es decir, B es l.i y genera a V.*

Definición 5.2 (Base categórica)**.** *Sea ${}_KV$ un espacio vectorial, X un conjunto y $\Lambda : X \to V$ una función. Diremos que el par (X, Λ) es una* ***base categórica de*** *V si satisface la siguiente propiedad universal:*

- *Para cada ${}_KW \in \boldsymbol{Vec}_K$ y cada función $f : X \to W$, existe una única $T \in \boldsymbol{Vec}_K(V, W)$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Lambda"'] & W \\ V \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

  conmuta, es decir, $T\Lambda = f$.

Observación 5.3. *Si ${}_KV \in \boldsymbol{Vec}_K$ y (X, Λ) es una base categórica de V, entonces $\Lambda : X \to V$ es una función inyectiva. En efecto, supongamos que no lo es, entonces existen $x, y \in X$, $x \neq y$ con $\Lambda(x) = \Lambda(y)$. Sabemos que $K \in \boldsymbol{Vec}_K$, entonces definimos la función*

$$\begin{array}{rrcl} f: & X & \to & K \\ & x & \mapsto & 1 \\ & X \setminus \{x\} \ni z & \mapsto & 0. \end{array}$$

Al ser K un campo, se tiene que $1 \neq 0$. Es claro que f está bien definida. Luego, existe una única $T \in \boldsymbol{Vec}_K(V, K)$ de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Lambda"'] & K \\ V \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $T\Lambda = f$. Así, obtenemos las siguientes igualdades:

$$1 = f(x) = (T\Lambda)(x) = T(\Lambda(x)) = T(\Lambda(y)) = (T\Lambda)(y) = f(y) = 0$$

es decir, $1 = 0$, lo que es absurdo debido a que K es campo. De ahí que Λ debe ser inyectiva.

Las definiciones de base algebraica y base categórica son equivalentes en el siguiente sentido.

Teorema 5.4. *Sea ${}_KV \in \boldsymbol{Vec}_K$, X un conjunto y $\Lambda : X \to V$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) (X, Λ) es una base categórica de V.
(2) $\Lambda(X)$ es una base algebraica de V.

Demostración:
1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que (X, Λ) es una base categórica de V. Probaremos primero

que $\Lambda(X)$ es l.i en V. En efecto, si $\Lambda(X)$ es l.d en V, entonces existe $y \in X$ tal que $\Lambda(y) \in \langle \Lambda(X) \setminus \{\Lambda(y)\} \rangle$. Definimos la función

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & K \\ & y & \mapsto & 1 \\ & X \setminus \{y\} \ni x & \mapsto & 0. \end{array}$$

Por hipótesis, existe una única $T \in \mathbf{Vec}_K(V, K)$ tal que $T\Lambda = f$. Como $\Lambda(y) \in \langle \Lambda(X) \setminus \{\Lambda(y)\} \rangle$, entonces $\Lambda(y) = \sum_{x \in X} c_x \Lambda(x)$ con $x \neq y$, $c_x \in K$ y $c_x = 0$ para casi todo $x \in X \setminus \{y\}$. De esta manera, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} 1 = f(y) = (T\Lambda)(y) = T(\Lambda(y)) &= T\left(\sum_{x \in X} c_x \Lambda(x) \right) \\ = \sum_{x \in X} c_x T(\Lambda(x)) &= \sum_{x \in X} c_x (T\Lambda)(x) = \sum_{x \in X} c_x f(x) = 0 \end{aligned}$$

es decir, $1 = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\Lambda(X)$ es l.i en V.
Ahora mostraremos que $\langle \Lambda(X) \rangle = V$. Supongamos que no es cierto, es decir, supongamos que $\langle \Lambda(X) \rangle \lneq V$. Por el Teorema 2.21, existe $\{0\} \neq L \lneq V$ tal que $V = \langle \Lambda(X) \rangle \oplus L$. Entonces, la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} P: & V = \langle \Lambda(X) \rangle \oplus L & \to & V \\ & u + l = v & \mapsto & u \end{array}$$

es tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\Lambda"'] & V \\ V \arrow[ur, "P"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, pues $(P\Lambda)(x) = P(\Lambda(x)) = \Lambda(x)$ para cada $x \in X$, ya que $\Lambda(X) \subseteq \langle \Lambda(X) \rangle$. De igual manera, es claro que la transformación lineal $id_V : V \to V$ hace el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\Lambda"'] & V \\ V \arrow[ur, "id_V"'] & \end{tikzcd}$$

conmutativo. Ahora bien, como $\langle \Lambda(X) \rangle \lneq V$, existe $v_0 \in V \setminus \langle \Lambda(X) \rangle$, luego, $v_0 = u_0 + l_0$, con $u_0 \in \langle \Lambda(X) \rangle$, $l_0 \in L$ y $l_0 \neq 0$, pues si $l_0 = 0$, se tendría que $v_0 = u_0 \in \langle \Lambda(X) \rangle$, lo que contradice nuestra suposición. De esta manera

$$P(v_0) = P(u_0 + l_0) = u_0 \neq u_0 + l_0 = id_V(u_0 + l_0) = id_V(v_0)$$

por lo que $P(v_0) \neq id_V(v_0)$, en consecuencia, $P \neq id_V$, en contra de la unicidad de la transformación lineal con la propiedad. Por lo tanto, $V = \langle \Lambda(X) \rangle$, de donde se sigue que $\Lambda(X)$ es una base algebraica de V.
2. $\Rightarrow$ 1. Supóngase que $\Lambda(X)$ es una base algebraica de V. Vamos a mostrar que (X, Λ) es una base categórica de V. Sean $W \in \mathbf{Vec}_K$ y $f : X \to W$ una función. Por hipótesis, para cada $v \in V$, existe una única representación

$$v = \sum_{x \in X} c_{x_v} \Lambda(x)$$

donde $c_{x_v} \in K$ y $c_{x_v} = 0$ para casi todo $x \in X$, de donde se tiene que la función

$$\begin{array}{rccc} T: & V & \to & W \\ & \sum_{x\in X} c_{x_v}\Lambda(x) = v & \mapsto & \sum_{x\in X} c_{x_v} f(x) \end{array}$$

está bien definida. Además, si $x \in X$, como $\Lambda(X)$ es base algebraica de V, se tiene que $\Lambda(x) = 1 \cdot \Lambda(x)$, por lo que

$$(T\Lambda)(x) = T(\Lambda(x)) = T(1 \cdot \Lambda(x)) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

de donde se tiene que $T\Lambda = f$. Ahora, veamos que T es lineal, para eso tomemos $u, v \in V$ y $c \in K$, luego

$$u = \sum_{x\in X} c_{x_u}\Lambda(x)$$

y

$$v = \sum_{x\in X} c_{x_v}\Lambda(x)$$

con $c_{x_u}, c_{x_v} \in K$, $c_{x_u} = c_{x_v} = 0$ para casi toda $x \in X$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} T(u+cv) &= T\left(\sum_{x\in X} c_{x_u}\Lambda(x) + c\sum_{x\in X} c_{x_v}\Lambda(x)\right) \\ &= T\left(\sum_{x\in X}(c_{x_u} + cc_{x_v})\Lambda(x)\right) \\ &= \sum_{x\in X}(c_{x_u} + cc_{x_v})f(x) \\ &= \sum_{x\in X} c_{x_u} f(x) + c\sum_{x\in X} c_{x_v} f(x) \\ &= T(u) + cT(v) \end{aligned}$$

con lo cual se exhibe la linealidad de T.
Finalmente, probaremos la unicidad de T. Si $S \in \mathbf{Vec}_K(V, W)$ es tal que $S\Lambda = f$, tenemos que

$$S(v) = S\left(\sum_{x\in X} c_{x_v}\Lambda(x)\right) = \sum_{x\in X} c_{x_v} S(\Lambda(x)) = \sum_{x\in X} c_{x_v}(S\Lambda)(x) = \sum_{x\in X} c_{x_v} f(x) = T(v)$$

es decir, $S(v) = T(v)$, lo que sucede para cada $v \in V$, de donde se sigue que $S = T$. □

Ejemplo 5.5. *En la notación del Ejemplo 2.28, tenemos que (X, δ) es una base categórica de $K^{(X)}$, pues $\delta(X)$ es una base algebraica para tal espacio.*

Ejemplo 5.6. *Si ${}_KV$ es un espacio vectorial y $B \subseteq V$ es una base algebraica de V, entonces la pareja (B, ι) es una base categórica para V, donde*

$$\begin{array}{rccc} \iota: & B & \to & V \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

*es la función inclusión. Este hecho es el que en la mayor parte de la bibliografía le llaman "**Propiedad universal de las bases**", que en palabras naturales significa "para definir una transformación lineal, basta definirla en la base". Ahora vemos* *que el nombre que le dan a esta propiedad es compatible con la definición categórica de base.*

Observación 5.7. *Del ejemplo anterior podemos concluir que todo espacio vectorial tiene al menos una base categórica.*

Observación 5.8. *Si (X, Λ) es una base categórica, entonces $dim_K V = |X|$, pues como $\Lambda(X)$ es una base algebraica de X y $\Lambda : X \to V$ es una función inyectiva, entonces*

$$dim_K V = \left|\Lambda(X)\right| = |X|.$$

6. Tipos de morfismos en $\mathbf{Vec}_K$

En este apartado vamos a discutir sobre los tipos de morfismos en la categoría de los espacios vectoriales. Es común notar que en mucha bibliografía referente al álgebra lineal, definen monomorfismo como una transformación lineal inyectiva, epimorfismo como una transformación lineal suprayectiva e isomorfismo como una transformación lineal biyectiva. Vamos a ver que estas definiciones son compatibles con las definiciones en sentido categórico.

Teorema 6.1. *Sean ${}_KV, {}_KW \in \boldsymbol{Vec}_K$ y $T \in \boldsymbol{Vec}_K(V, W)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) T es monomorfismo.
(2) T es inyectiva.
(3) T es sección.

DEMOSTRACIÓN:
1. $\Rightarrow$ 2.: Supongamos que T es monomorfismo. Mostremos que T es inyectiva. Sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $T(v_1) = T(v_2)$. Tenemos que ${}_KK \in \mathbf{Vec}_K$ y $\{1\}$ es base de K, luego existen transformaciones lineales

$$\begin{array}{cccc} S_1: & K & \to & V \\ & 1 & \mapsto & v_1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} S_2: & K & \to & V \\ & 1 & \mapsto & v_2 \end{array}$$

por lo que

$$(TS_1)(1) = T(S_1(1)) = T(v_1) = T(v_2) = T(S_2(1)) = (TS_2)(1)$$

lo que implica que $TS_1 = TS_2$, pero T es monomorfismo, así que $S_1 = S_2$, entonces $v_1 = S_1(1) = S_2(1) = v_2$, con lo que se establece la inyectividad de T.
2. $\Rightarrow$ 3.: Sea B una base de V, como T es inyectiva, $T(B)$ es l.i en W, por tanto existe C base de W tal que $T(B) \subseteq C$, luego $g = T_{|B}^{|C} : B \to C$ es una función inyectiva, entonces existe $h : C \to B$ tal que $hg = id_B$. En particular h es una función de C a V, luego existe una única $S \in \mathbf{Vec}_K(W, V)$ tal que $S_{|C} = h$. Entonces para $x \in V$

$$(ST)(x) = S(T(x)) = S(g(x)) = h(g(x)) = (hg)(x) = id_B(x)$$

por lo que $(ST)_{|B} = (id_V)_{|B}$, lo que implica que $ST = id_V$, concluyendo así que T es una sección.
3. $\Rightarrow$ 1.: Si T es sección, existe $S \in \mathbf{Vec}_K(W, V)$ tal que $ST = id_V$. Tomemos $X \in \mathbf{Vec}_K$, $S_1, S_2 \in \mathbf{Vec}_K(X, V)$ tales que $TS_1 = TS_2$. Luego, se tiene que

$$S_1 = id_V S_1 = (ST)S_1 = S(TS_1) = S(TS_2) = (ST)S_2 = id_V S_2 = S_2$$

es decir, $S_1 = S_2$, concluyendo así que T es monomorfismo. Observemos que en esta parte de la demostración no se utilizaron propiedades propias de los espacios vectoriales, únicamente las propiedades categóricas generales. □

Teorema 6.2. *Sean ${}_K V, {}_K W \in$ **Vec**$_K$ y $T \in$ **Vec**$_K(V, W)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) T es epimorfismo.
(2) T es suprayectiva.
(3) T es retracción.

DEMOSTRACIÓN:
1. $\Rightarrow$ 2.: Supongamos que T es epimorfismo. Si T no es sobreyectiva, entonces $T(V) \lneq W$, por lo que existe $\{0\} \neq Y \lneq W$ tal que $W = T(V) \oplus Y$. Entonces las transformaciones lineales

$$\begin{array}{rccc} id_W: & W & \to & W \\ & w & \mapsto & w \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} P: & W = T(V) \oplus Y & \to & W \\ & T(v) + y = v & \mapsto & T(v) \end{array}$$

son tales que $id_W T = PT$, sin embargo, como $T(V) \lneq W$, se tiene que $id_W \neq P$, lo que contradice que T es epimorfismo. Por lo tanto, T es suprayectiva.
2. $\Rightarrow$ 3.: Supongamos que T es suprayectiva. Vamos a contruir una transformación lineal $S : W \to V$ que sea inversa derecha de T. Tomemos B una base de V, como T es suprayectiva, $T(B)$ es un generador de W, luego, existe una base $C \subseteq W$ tal que $C \subseteq T(B)$. Luego $g = T^C_{|B} : B \to C$ es una función suprayectiva, por el Axioma de elección, existe $h : C \to B$ tal que $gh = id_C$. Como h en particular es una función de C en V y C es base de W, existe una única $S : W \to V$ lineal tal que $S_{|C} = h$. Entonces para $c \in C$, tenemos que

$$(TS)(c) = T(S(c)) = T(h(c)) = g(h(c)) = (gh)(c) = id_C(c)$$

así las cosas, tenemos que $(TS)_{|C} = (id_W)_{|C}$, de donde se sigue que $TS = id_W$.
3. $\Rightarrow$ 1.: Si T es retracción, existe $S : W \to V$ lineal tal que $TS = id_W$. Sea $Y \in$ **Vec**$_K$, $U_1, U_2 : W \to Y$ lineales tales que $U_1 T = U_2 T$. Entonces se tiene que

$$U_1 = U_1 id_W = U_1(TS) = (U_1 T)S = (U_2 T)S = U_2(TS) = U_2 id_W = U_2$$

es decir, $U_1 = U_2$, de donde se sigue que T es epimorfismo. Notemos que en esta implicación no se utilizaron como tal las propiedades particulares de los espacios vectoriales. □

Teorema 6.3. *Sean ${}_K V, {}_K W \in$ **Vec**$_K$ y $T \in$ **Vec**$_K(V, W)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) T es isomorfismo.
(2) T es biyectiva.
(3) T es bimorfismo.
(4) T es sección y retracción.

DEMOSTRACIÓN: Debido a los Teoremas 6.1 y 6.2, es suficiente probar 1. $\Leftrightarrow$ 2..
1. $\Rightarrow$ 2.: Si T es isomorfismo, entonces es sección y retracción, por los Teoremas 6.1 y 6.2, es inyectiva y suprayectiva, por tanto biyectiva.
2. $\Rightarrow$ 1. Si T es biyectiva, por el Teorema 6.1 y 6.2, T es sección y retracción, por lo tanto T es isomorfismo. □

Con el objetivo de exhibir que las equivalencias de los Teoremas 6.1, 6.2 y 6.3, en general pueden no cumplirse, a continuación se dan ejemplos de categorías donde tales equivalencias fallan.

Ejemplo 6.4 (Monomorfismo no inyectivo)**.** *Recordemos que un grupo abeliano* $(G, +, 0)$ *es divisible, si para cada* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *y cada* $g \in G$*, existe* $y \in G$ *tal que* $ny = g$*. Consideremos la categoría* $\boldsymbol{DAb}$*, cuyos objetos son los grupos abelianos divisibles y los morfismos son los homomorfismos usuales de grupos. Tomemos los objetos* $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *de* $\boldsymbol{DAb}$ *y consideremos el morfismo natural*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ & q & \mapsto & q + \mathbb{Z}. \end{array}$$

Vamos a demostrar que f *es un monomorfismo en* $\boldsymbol{DAb}$*, para eso tomemos* $D \in \boldsymbol{DAb}$ *y morfismos* $h, k : D \to \mathbb{Q}$ *tales que* $fh = fk$*. Debemos mostrar que* $h = k$*. En efecto, si* $h \neq k$*, existe* $d \in D$ *tal que* $h(d) \neq k(d)$*, luego* $h(d) - k(d) \neq 0$*. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que* $h(d) - k(d) = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ *donde* $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*. Como* D *es divisible,* $2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *y* $d \in D$*, existe* $d' \in D$ *tal que* $d = 2d'$*. En consecuencia, tenemos lo siguiente:*

$$\frac{m}{2n} = \frac{1}{2}\frac{m}{n} = \frac{1}{2}(h(d) - k(d)) = \frac{1}{2}(h(2d') - k(2d')) = \frac{2}{2}(h(d') - k(d')) = h(d') - k(d')$$

es decir, $h(d') - k(d') = \frac{m}{2n}$*. Como* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*,* $d' \in D$ *y* D *es divisible, existe* $b \in D$ *tal que* $d' = mb$*. Luego, se tienen las siguientes igualdades:*

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{m}\frac{m}{2n} = \frac{1}{m}(h(d') - k(d')) = \frac{1}{m}(h(mb) - k(mb)) = \frac{m}{m}(h(b) - k(b)) = h(b) - k(b)$$

es decir, $h(b) - k(b) = \frac{1}{2n}$*. De esta manera, tenemos que*

$$(fh)(b) - (fk)(b) = f(h(b)) - f(k(b)) = f(h(b) - k(b)) = f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} + \mathbb{Z}$$

pero $\frac{1}{2n} + \mathbb{Z} \neq 0$ *(*$0 = 0 + \mathbb{Z}$*), ya que* $\frac{1}{2n} \notin \mathbb{Z}$*, de donde se sigue que* $(fh)(b) - (fk)(b) \neq 0$*, es decir,* $(fh)(b) \neq (fk)(b)$*, consecuentemente,* $fh \neq fk$*, lo cual contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto,* $h = k$*, concluyendo así que* f *es un monomorfismo en* $\boldsymbol{DAb}$*. Sin embargo,* f *no es inyectiva, ya que* $Ker(f) = \mathbb{Z} \neq \{0\}$*.*

Ejemplo 6.5 (Epimorfismo no suprayectivo)**.** *Consideremos la categoría* $\boldsymbol{CRing}$*, cuyos objetos son los anillos conmutativos y los morfismos son los homomorfismos de anillos. Consideremos los objetos* $\mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{Q}$ *en* $\boldsymbol{CRing}$ *y el morfismo*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ & n & \mapsto & \frac{n}{1}. \end{array}$$

en $\boldsymbol{CRing}$*. Mostremos que* f *es un epimorfismo. Para eso tomemos* $R \in \boldsymbol{CRing}$ *y morfismos* $h, k : \mathbb{Q} \to R$ *tales que* $hf = kf$*. Vamos a mostrar que* $h = k$*, para eso tomemos* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *y observemos las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} h\left(\frac{m}{n}\right) &= h\left(\frac{m}{1}\frac{1}{n}\right) = h\left(\frac{m}{1}\right)h\left(\frac{1}{n}\right) = k\left(\frac{m}{1}\right)h\left(\frac{1}{n}\right) = k\left(\frac{m}{n}\frac{n}{1}\right)h\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= k\left(\frac{m}{n}\right)k\left(\frac{n}{1}\right)h\left(\frac{1}{n}\right) = k\left(\frac{m}{n}\right)h\left(\frac{n}{1}\right)h\left(\frac{1}{n}\right) = k\left(\frac{m}{n}\right) \end{aligned}$$

es decir, $h\left(\frac{m}{n}\right) = k\left(\frac{m}{n}\right)$*, para cada* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$*, por lo que* $h = k$*, concluyendo que* f *es epimorfismo. Sin embargo,* f *no es suprayectiva, ya que* $Im(f) = \{\frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subsetneq \mathbb{Q}$*.*

*Aún hay más con este morfismo, resulta que f también es un monomorfismo. En efecto, si $S \in$ **CRing** y $s, t : S \to \mathbb{Z}$ son morfismos en **CRing** tales que $fs = ft$, tenemos que para cada $a \in S$, $s(a), t(a) \in \mathbb{Z}$, en consecuencia, ocurre lo siguiente:*

$$\frac{s(a)}{1} = f(s(a)) = (fs)(a) = (ft)(a) = f(t(a)) = \frac{t(a)}{1}$$

es decir, $\frac{s(a)}{1} = \frac{t(a)}{1}$, lo que implica que $s(a) = t(a)$ para cada $a \in S$, por lo que $s = t$. Así las cosas, tenemos que f es un bimorfismo que no es isomorfismo, pues al no ser biyectivo no es invertible ni siquiera como función.

Ejemplo 6.6 (Biyección que no es isomorfismo)**.** *Consideremos la categoría* ***POSET****, cuyos objetos son los conjuntos parcialmente ordenados y para $(A, \leqslant)$, $(B, \preccurlyeq)$, los morfismos son las funciones $f : A \to B$ tales que para $x, y \in A$, $x \leqslant y$ implica $f(x) \preccurlyeq f(y)$, las cuáles son llamadas* ***morfismos de orden****. En esta categoría, tenemos que $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ ($|$ es la divisibilidad) y $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leqslant)$($\leqslant$ es el orden usual en los naturales) son objetos en* ***POSET*** *y*

$$\begin{array}{rccc} id_{\mathbb{N}\setminus\{0\}} : & (\mathbb{N} \setminus \{0\}, |) & \to & (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leqslant) \\ & n & \mapsto & n \end{array}$$

es un morfismo de orden biyectivo, pues por propiedades de divisibiliad, se tiene que para $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m \mid n$, implica $m \leqslant n$. La inversa de $id_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ es ella misma (como conjuntos), es decir,

$$\begin{array}{rccc} id_{\mathbb{N}\setminus\{0\}} : & (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leqslant) & \to & (\mathbb{N} \setminus \{0\}, |) \\ & n & \mapsto & n. \end{array}$$

Sin embargo, esta inversa no es un morfismo de orden, pues $2, 3 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $2 \leqslant 3$ pero $2 \nmid 3$. Así las cosas, $id_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ es un morfismo biyectivo que no es isomorfismo en ***POSET****.*

Continuando con nuestro énfasis en los espacios vectoriales, presentamos el siguiente teorema.

Teorema 6.7. *Sea K un campo. Entonces la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en Obj(**Vec**$_K$).*

DEMOSTRACIÓN:

- **Reflexividad:** Sea $_KV \in \mathbf{Vec}_K$. Luego, la transformación identidad $id_V : V \to V$, definida por $id_V(v) = v$ para cada $v \in V$ es un isomorfismo, de ahí que $V \cong V$.
- **Simetría:** Sean $_KV,_K W \in \mathbf{Vec}_K$ espacios vectoriales. Supongamos que $V \cong W$, luego, existe un isomorfismo $T : V \to W$, luego, $T^{-1} : W \to V$ es un isomorfismo, de ahí que $W \cong V$.
- **Transitividad:** Sean $_KV$, $_KW$ y $_KZ \in \mathbf{Vec}_K$ espacios vectoriales. Supongamos que $V \cong W$ y $W \cong Z$, entonces existen isomorfismos $T : V \to W$ y $S : W \to Z$, entonces, $ST : V \to W$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $V \cong Z$.

De lo anterior, tenemos que la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en Obj($\mathbf{Vec}_K$). □

Definición 6.8. *Sea $_KV \in$ **Vec**$_K$. Definimos la clase de isomorfismo de V de la siguiente manera:*

$$\mathrm{C}(V) = \left\{ W \in \boldsymbol{Vec}_K \mid W \cong V \right\}.$$

Así, podemos particionar la clase de espacios vectoriales sobre un campo dado en clases de isomorfismos. En el siguiente teorema mostraremos que basta que dos espacios vectoriales tengan la misma dimensión (finita o infinita) para que sean isomorfos.

Teorema 6.9. *Sean ${}_KV, {}_KW \in$ **Vec**$_K$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $V \cong W$.
(2) $dim(V) = dim(W)$.

Demostración: 1. $\Rightarrow$ 2.: Supongamos que $V \cong W$, luego existe un isomofismo $T : V \to W$. Si X es una base algebraica de V, entonces $T(X)$ es una base algebraica de W y $g = T_{|X}^{|T(X)} : X \to T(X)$ es una biyección, entonces

$$dim(V) = |X| = \big|T(X)\big| = dim(W).$$

2. $\Rightarrow$ 1.: Supongamos que $dim(V) = dim(W)$. Consideremos (X, Λ) y (Y, Γ) bases categóricas de V y W, respectivamente. Por hipótesis, hay una biyección $\sigma : X \to Y$. De modo que tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\Lambda"'] & Y \arrow[d, "\Gamma"] \\ V & W \end{tikzcd}$$

Entonces por un lado tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\Lambda"'] & Y \arrow[r, "\Gamma"] & W \\ V & & \end{tikzcd}$$

por lo que al ser (X, Λ) base categórica de V y $W \in \mathbf{Vec}_K$, existe una única $T : V \to W$ lineal, de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Gamma\sigma"] \arrow[d, "\Lambda"'] & W \\ V \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $T\Lambda = \Gamma\sigma$. Por otro lado, del diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\Lambda\sigma^{-1}"] \arrow[d, "\Gamma"'] & V \\ W & \end{tikzcd}$$

y el hecho de que (Y, Γ) es base categórica de W y $V \in \mathbf{Vec}_K$, existe una única $S : W \to V$ lineal de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\Lambda\sigma^{-1}"] \arrow[d, "\Gamma"'] & V \\ W \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $S\Gamma = \Lambda\sigma^{-1}$. Ahora, notemos que

$$(ST)\Lambda = S(T\Lambda) = S(\Gamma\sigma) = (S\Gamma)\sigma = (\Lambda\sigma^{-1})\sigma = \Lambda(\sigma^{-1}\sigma) = \Lambda id_X = \Lambda.$$

por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\Lambda"'] & V \\ V \arrow[ur, "ST"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, pero el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\Lambda"'] & V \\ V \arrow[ur, "id_V"'] & \end{tikzcd}$$

también es conmutativo, por lo que $ST = id_V$. De manera completamente similar se prueba que $TS = id_W$, por consiguiente $T : V \to W$ es isomorfismo y en consecuencia, $V \cong W$. $\square$

Observación 6.10. *De acuerdo con el teorema anterior, para $V \in \boldsymbol{Vec}_K$, podríamos redefinir la clase de isomorfismo de V como*

$$\mathrm{C}(V) = \{W \in \boldsymbol{Vec}_K \mid dim(W) = dim(V)\}.$$

Por ejemplo, si $n \in \mathbb{N}$, K^n es un representante de la clase de isomorfismo de todos los espacios vectoriales sobre K de dimensión n.

Corolario 6.11. *Si ${}_KV \in \boldsymbol{Vec}_K$, entonces $V \cong K^{(X)}$ para algún conjunto X.*

Demostración: Si X es una base algebraica de V, entonces

$$dim(V) = |X| = dim\left(K^{(X)}\right),$$

por el Teorema 6.9, $V \cong K^{(X)}$. $\square$

El corolario anterior nos dice que todo espacio vectorial es de la forma $K^{(X)}$, salvo isomorfismo. Entonces, si X es un conjunto,

$$\mathrm{C}\left(K^{(X)}\right) = \{V \in \mathbf{Vec}_K \mid dim(V) = |X|\}.$$

De modo que $K^{(X)}$ representa a todos los espacios vectoriales de base X. Dado que a cada conjunto X se le puede asignar un cardinal (por el Axioma de Elección), se concluye que hay tantos espacios vectoriales sobre un campo dado como cardinales hay.

7. Una adjunción entre Set y $\mathbf{Vec}_K$

Lo expuesto anteriormente nos permite definir un par de funtores adjuntos entre las categorías **Set** y $\mathbf{Vec}_K$, por lo que hay una relación fuerte entre tales categorías.

Definición 7.1. *Sea K un campo. El funtor que olvida $F : \boldsymbol{Vec}_K \to \boldsymbol{Set}$ está definido en objetos como:*

$$\begin{array}{rccc} F: & Obj(\boldsymbol{Vec}_K) & \to & Obj(\boldsymbol{Set}) \\ & {}_KV & \to & V \end{array}$$

donde V es el conjunto subyacente de ${}_KV$, en otras palabras le quitamos a ${}_KV$ la estructura de espacio vectorial. En morfismos se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} F: & \boldsymbol{Vec}_K({}_KV, {}_KW) & \to & \boldsymbol{Set}(V,W) \\ & T & \to & T \end{array}$$

donde $T : V \to W$ es la función entre los conjuntos V y W, es decir, le quitamos a T la linealidad.

Teorema 7.2. *Sea K un campo. Entonces existe un funtor $L : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Vec}_K$, definido en objetos como:*

$$\begin{array}{rccc} L: & Obj(\boldsymbol{Set}) & \to & Obj(\boldsymbol{Vec}_K) \\ & X & \to & F^{(K)} \end{array}$$

y en morfismos como:

$$\begin{array}{rccc} L: & \boldsymbol{Set}(X,Y) & \to & \boldsymbol{Vec}_K(K^{(X)}, K^{(Y)}) \\ & f & \to & T_f \end{array}$$

donde T_f es la única transformación lineal $T_f : K^{(X)} \to K^{(Y)}$ que cumple $T_f\delta_X = \delta_Y f$.

Demostración: Es claro que la asignación está bien definida en objetos, ya que por el Teorema 2.7, $K^{(X)}$ es un espacio vectorial sobre el campo K, para cualquier conjunto X. Además, por el Corolario 6.11, todos los espacios vectoriales que tengan como base al conjunto X están en la misma clase de isomorfismo de $K^{(X)}$ y eso los hace indistinguibles algebraicamente.
Ahora veamos que está bien definida en morfismos. Si X y Y son conjuntos y $f : X \to Y$ es una función, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_X"'] & Y \arrow[r, "\delta_Y"] & K^{(Y)} \\ K^{(X)} & & \end{tikzcd}$$

como (X, δ_X) es base categórica de $K^{(X)}$, existe una única transformación lineal $T_f : K^{(X)} \to K^{(Y)}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_Y f"] \arrow[d, "\delta_X"'] & K^{(Y)} \\ K^{(X)} \arrow[ur, "T_f"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $T_f\delta_X = \delta_Y f$, de esta manera establecemos que el funtor está bien definido en morfismos.
Veamos que se cumple 3. de la definición de funtor, para eso sean X, Y, Z conjuntos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones, luego $gf : X \to Z$ es una función, $T_f : K^{(X)} \to K^{(Y)}$ y $T_g : K^{(Y)} \to K^{(Z)}$ son transformaciones lineales, luego, $T_gT_f : K^{(X)} \to K^{(Z)}$ es una transformación lineal y por la definición del funtor, $T_{gf} : K^{(X)} \to K^{(Z)}$ es una transformación lineal. Debemos mostrar que $T_{gf} = T_gT_f$. Es suficiente

mostrar que $T_{gf}\delta_X = (T_gT_f)\delta_X$. En efecto, de los diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_Y f"] \arrow[d, "\delta_X"'] & K^{(Y)} \\ K^{(X)} \arrow[ur, "T_f"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\delta_Z g"] \arrow[d, "\delta_Y"'] & K^{(Z)} \\ K^{(Y)} \arrow[ur, "T_g"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_Z gf"] \arrow[d, "\delta_X"'] & K^{(Z)} \\ K^{(X)} \arrow[ur, "T_{gf}"'] & \end{tikzcd}$$

tenemos que

$$T_{gf}\delta_X = \delta_Z gf = (\delta_Z g)f = (T_g\delta_Y)f = T_g(\delta_Y f) = T_g(T_f\delta_X) = (T_gT_f)\delta_X$$

es decir, $T_{gf}\delta_X = (T_gT_f)\delta_X$, por ser (X, δ_X) base categórica de $K^{(X)}$, tenemos que $T_{gf} = T_gT_f$, es decir, $L(gf) = L(g)L(f)$.
Es claro que para cada conjunto X, $T_{id_X} = id_{K^{(X)}}$, es decir, $L(id_X) = id_{K^{(X)}}$. Por lo tanto, $L : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vec}_F$ es un funtor. $\square$

Proposición 7.3. *Los funtores $F : \mathbf{Vec}_K \to \mathbf{Set}$ y $L : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vec}_K$ respetan monomorfismos y epimorfismos. Más aún, ambos funtores respetan isomorfismos.*

Demostración: Si $T : V \to W$ es monomorfismo, por el Teorema 6.1, T es sección, luego existe $S : W \to V$ tal que $ST = id_V$, entonces

$$F(S)F(T) = F(ST) = F(id_V) = id_{F(V)}$$

por lo que $F(T)$ es sección en **Set** y por tanto $F(T)$ es monomorfismo en **Set**. Análogamente se ve que L manda monomorfismos en **Set** a monomorfismos en $\mathbf{Vec}_K$. Note que estas conclusiones se deben a que en las categorías **Set** y $\mathbf{Vec}_F$ monomorfismo es equivalente a sección. Para el caso de los epimorfismos se razona de manera análoga. Más aún, debido a que en $\mathbf{Vec}_F$ y en **Set**, los isomorfismos son bimorfismos, se concluye que ambos funtores respetan isomorfismos. $\square$

Usando estos funtores podemos demostrar una caracterización de espacios isomorfos a través de los monomorfismos.

Teorema 7.4 (Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein para espacios vectoriales)**.** *Sean ${}_KV$ y ${}_KW$ espacios vectoriales. Las siguentes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $V \cong W$.
(2) Existen monomorfismos $T : V \to W$ y $S : W \to V$.

Demostración:
1. $\Rightarrow$ 2.: Es claro, pues si $V \cong W$ mediante un isomorfismo $T : V \to W$. Luego $T : V \to W$ y $T^{-1} : W \to V$ son isomorfismos, en particular monomorfismos.
2. $\Rightarrow$ 1.: Consideremos (X, Λ) y (Y, Γ) bases categóricas de V y W, respectivamente.

Aplicando el funtor F a T y W, tenemos que $F(T) : V \to W$ y $F(S) : W \to V$ son funciones inyectivas, enntonces de los diagramas

$$X \xrightarrow{\Lambda} \Lambda(X) \xrightarrow{F(T)} F(T)\Lambda(X) \xrightarrow{\psi} Y$$

y

$$Y \xrightarrow{\Gamma} \Gamma(Y) \xrightarrow{F(S)} F(S)\Gamma(Y) \xrightarrow{\phi} X$$

donde $\psi : F(T)\Lambda(X) \to Y$ y $\phi : F(S)\Gamma(Y) \to X$ son funciones inyectivas (recordemos que los monomorfismos mandan conjuntos l.i en conjuntos l.i y todo conjunto l.i se sumerge en cualquier base), de tiene que $|X| \leqslant |Y|$ y $|Y| \leqslant |X|$, por el Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein para conjuntos, se tiene que $|X| = |Y|$, es decir, $dim(V) = dim(W)$, por el Teorema 6.9, $V \cong W$. $\square$

Finalmente mostraremos que los funtores anteriores son adjuntos.

Teorema 7.5. *Sea K un campo, L : $\boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Vec}_K$ el funtor del Teorema 7.2 y F : $\boldsymbol{Vec}_K \to \boldsymbol{Set}$ el funtor que olvida. Entonces $L \dashv F$.*

Demostración: Sea X un conjunto y ${}_KV$ un espacio vectorial. Proponemos:

$$\begin{array}{rccc} \tau_{X,V} : & \mathbf{Vec}_K\left(K^{(X)}, {}_K V\right) & \to & \mathbf{Set}\,(X, V) \\ & T & \mapsto & \tau_{X,V}(T) \end{array}$$

donde $\tau_{X,V}(T) : X \to V$ está definida por $\tau_{X,V}(T)(x) = T\delta(x)$, para cada $x \in X$. Claramente, $\tau_{X,V}(T)$ está bien definida. Vamos a demostrar que $\tau_{X,V}(T)$: $\mathbf{Vec}_K\left(K^{(X)}, {}_K V\right) \to \mathbf{Set}\,(X, V)$ es una biyección:

- **Inyectividad:** Sean $T : K^{(X)} \to_K V$, $U : K^{(X)} \to_K V$ transformaciones lineales y supongamos que $\tau_{X,V}(T) = \tau_{X,V}(U)$. Debemos exhibir que $T = U$. Basta demostrar que $T\delta = U\delta$. En efecto, para $x \in X$, $T\delta(x) = \tau_{X,V}(T)(x) = \tau_{X,V}(U)(x) = U\delta(x)$, es decir, $T\delta(x) = U\delta(x)$, para cada $x \in X$. Por lo tanto, $T = U$.
- **Suprayectividad:** Sea $g : X \to V$ una función, como (X, δ) es base categórica de de $K^{(X)}$, existe una única transformación lineal $T_g : K^{(X)} \to_K V$ tal que $T\delta = g$. Ahora, si $x \in X$, entonces $\tau_{X,V}(T_g)(x) = T_g\delta(x) = g(x)$, de esta manera $g = \tau_{X,V}(T_g)$ y así se concluye que $\tau_{X,V}$ es suprayectiva.

Así las cosas, tenemos que $\tau_{X,V}$: $\mathbf{Vec}_K\left(K^{(X)}, {}_K V\right) \to \mathbf{Set}\,(X, V)$ es una biyección.

Finalmente, vamos a probar la naturalidad. Tomemos un conjunto Y, un espacio vectorial ${}_KW$, una función $f : Y \to X$ y una transformación lineal $T :_K V \to_K W$. Necesitamos exhibir que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vec}_K(K^{(X)}, {}_K V) \arrow[r, "\tau_{X,V}"] \arrow[d, "T\_L(f)"] & \mathbf{Set}(X, V) \arrow[d, "F(T)\_f"] \\ \mathbf{Vec}_K(K^{(Y)}, {}_K W) \arrow[r, "\tau_{Y,W}"] & \mathbf{Set}(Y, W) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $F(T)\_f\tau_{X,V} = \tau_{Y,W}T\_L(f)$, donde $(T\_L(f))(S) = TSL(f)$, para cada $S : K^{(X)} \to_K V$ en $\mathbf{Vec}_K$ y $(F(T)\_f)(g) = F(T)gf$, para cada $g : X \to V$ en **Set**. Tomemos $S : K^{(X)} \to_K V$ en $\mathbf{Vec}_K$. Por un lado, $(F(T)\_f\tau_{X,V})(S) =$

$F(T)\tau_{X,V}(S)f : Y \to W$ es una función en **Set** y para cada $y \in Y$, tenemos lo siguiente:

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{rcl} (F(T)\tau_{X,V}(S)f)(y) & = & (F(T)\tau_{X,V}(S))(f(y)) \\ & = & F(T)(\tau_{X,V}(S)(f(y))) \\ & = & F(T)(S\delta_X(f(y)) \\ & = & T(S\delta_X(f(y))) \\ & = & TS\delta_X f(y) \end{array}$$

Por otro lado, $(\tau_{Y,W}T\_L(f))(S) = \tau_{Y,W}(TSL(f)) : Y \to W$ es una función en **Set** y para $y \in Y$ se cumplen las siguientes igualdades:

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{rcl} \tau_{Y,W}(TSL(f))(y) & = & TSL(f)\delta_Y(y) \\ & = & (TS)(L(f)\delta_Y)(y) \\ & = & (TS)(\delta_X f)(y) \\ & = & TS\delta_X f(y). \end{array}$$

Comparando las igualdades (I) y (II), tenemos que $H(T)\_f\tau_{X,V} = \tau_{Y,W}T\_G(f)$, lo que estabamos buscando.
Por lo tanto, $\tau_{X,V} : \mathbf{Vec}_K\left(K^{(X)}, {}_K V\right) \to \mathbf{Set}\,(X, V)$ es una biyección natural, para cada $X \in Obj(\mathbf{Set})$ y ${}_K V \in Obj(\mathbf{Vec}_K)$. En consecuencia, $G \dashv H$. $\square$

Observación 7.6. *En los funtores anteriores, para $X \in$ **Set**, la unidad $\eta_X : X \to K^{(X)}$, es $\eta_X = \tau_X(id_{K^{(X)}})$, donde $\eta_X = \delta_X$, que no es otra cosa que la función que define la base categórica (X, δ_X) de $K^{(X)}$.*
*Para ${}_K V \in$ **Vec**$_F$, la counidad es $\xi_B : K^{(V)} \to_K V$, con $\xi_V = \tau_V^{-1}(id_V)$, lo que es equivalente a que $\tau_V(\xi_V) = id_V$, de donde se sigue que $\xi_V : K^{(V)} \to_K V$ es la única transformación lineal tal que $\xi_V \delta_V = id_V$.*

8. Conclusiones

De acuerdo a los resultados presentados anteriormente podemos darnos cuenta que tan solo con reflexionar un poco las propiedades que conocemos de los espacios vectoriales y relacionarlas con la teoría de categorías, podemos expresar las propiedades conocidas en términos de esta herramienta (las categorías) que aunque es relativamente moderna nos puede permitir encontrar resultados interesantes u obtener definiciones más generales como se hizo en el caso de las bases.
Es importante mencionar que solo se exploraron aspectos muy básicos como son los tipos de morfismos y las bases, si analizamos un poco más otras propiedades más avanzadas de nuestros espacios vectoriales muy posiblemente se puedan también expresar a través de herramientas de la teoría de categorías, pero eso probablemente sea tema para otro capítulo.

Bibliografía

[1] Alejandro Bravo Mojica, Hugo Rincón Mejía, César Rincón Orta *Álgebra superior*, Facultad de ciencias, UNAM, México, (1), (2006).
[2] Hugo Alberto Rincón Mejía, *Álgebra Lineal*, Facultad de ciencias, UNAM, México, (2), (2006).
[3] MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics,New York, (5), (1971).
[4] Fernando Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos, una introducción*, Sociedad matemática mexicana, México, (2), (2003).

[5] Joseph J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Springer, New York, (2), (2008).
[6] Tomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer, New York, (1974).
[7] Jonathan S. Golan, *The linear algebra a beginning graduate student ought to know*, Springer, New York, (2), (2007).
[8] José de Jesús Sáez Macegoza, *Los funtores Hom y Tensor en la categoría de espacios vectoriales*, Tesis de Licenciatura, FCFM-BUAP, Puebla, México, (2023).

Correos electrónicos:
sm223470379@alm.buap.mx (José de Jesús Sáez-Macegoza),
fvilchis@fcfm.buap.mx (Iván Fernando Vilchis-Montalvo).

CAPÍTULO 2

Teorías topológicas

Juan Angoa-Amador, Jesús González Sandoval
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

En la búsqueda de la esencia de lo topológico, se han planteado diversas estrategias para exhibirlo, desde proponer nuevas estructuras para analizar lo topológico, hasta salir de *Top* hacia otras categorías con diversos funtores. Desde el libro *Fundamentos de la topología* de Preuss, el concepto de constructo rondaba en las mentes de los matemáticos, sin encontrar una definición formal, creemos que bajo la mirada **categórica de las teorías topológicas**[Oswald Wyler 1970, G.C.L. Brümer, 1983] podemos obtener una definición más formal del concepto de *algo* adisionado con una estructura.

2. Definiciones

Enseguida definimos el importante concepto de "teoría topológica", en donde la categoría de conjuntos ordenados juega un papel muy importante así como un funtor que permite establecer la relación entre una categoría esencialmente topológica y los conjuntos ordenados:

Definición 2.1 (Oswald Wyler en 2.2 de [**4**]). *Sea $\mathfrak{U}$ una categoría y $P^* : \mathfrak{U}^{op} \to Ord$ un funtor entre la categoría $\mathfrak{U}^{op}$ y la categoría de los conjuntos ordenados Ord que cumple:*

1. Para todo $A \in Ob(\mathfrak{U})$, $P^*(A)$ es una retícula completa.

2. Sea $f \in Mor(\mathfrak{U})$, digamos $f : A \to B$ para $A, B \in Ob(\mathfrak{U})$ ($P^*(f) : P^*(B) \to P^*(A)$), y si $\{y_i : i \in I\} \subseteq P^*(B)$, entonces $P^*(f)(\bigwedge_{i\in I} y_i) = \bigwedge_{i\in I} P^*(f)(y_i)$ ($P^*(f)$, (preserva ínfimos).

Diremos que $P^* : \mathfrak{U}^{op} \to Ord$ es una teoría topológica.

Este concepto nos lleva a una noción de constructo, que desarrollamos en la siguiente definición:

Definición 2.2. *Sea $P^* : \mathcal{U}^{op} \to Ord$ una teoría topológica, definimos la categoría $\mathcal{U}^p$, donde sus objetos son parejas (A, x) donde $A \in Ob(\mathcal{U})$ y $x \in P^*(A)$ y $f \in Mor(\mathcal{U}^p)$, si $f = (x, g, y) : (A, x) \to (B, y)$, donde $g \in Mor(\mathcal{U})$, $g : A \to B$, $x \in p^*(g)(A)$, $y \in P * (B)$ y $x \leqslant p^*(g)(y)$ con la relación de orden de $P^*(A)$.*

Podemos decir que si $(A, x) \in Ob(\mathcal{U}^p)$, donde $A \in Ob(\mathcal{U})$ y $x \in P^*(A)$, a A, le estamos incorporando la estructura x que vive en $P^*(A)$, la cual es la colección de las posibles estructuras que da la teoría topológica P^* al objeto A, es importante notar que los morfismos de $\mathcal{U}^p$, son morfismos de $\mathcal{U}$, que tienen una noción de *preservar estructura* dada por la exigencia de que $x \leqslant P^*(g)(y)$.

2.1. Categoría topológica. Pensamos comparar las dos estrategias categóricas que preténden mostrar la esencia de lo topológico: las teorías topológicas y los funtores topológicos, en ese camino definimos funtor topológico:

Definición 2.3. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor, diremos que F es un funtor topológico si:*

Para toda F-fuente en $\mathcal{U}$, $(f_i : X \to F(X_i))_{i \in I}$, existe una única χ-fuente $(\bar{f}_i : \bar{X} \to X_i)_{i \in I}$, llamada el F-levantamiento inicial, tal que:

1. $F(\bar{X}) = X$ y $F(\bar{f}_i) = f_i$ para todo $i \in I$.

2. Para toda χ- fuente $(g_i : Y \to X_i)_{i \in I}$ y todo $h : F(Y) \to X$ $\mathcal{U}$- morfismo, tal que $hf_i = F(g_i)$ para todo $i \in I$, existe un único χ-morfismo $\hat{h} : Y \to \bar{X}$, tal que $\bar{f}_i \hat{h} = g_i$ para todo $i \in I$.

La condición 2 de la Definición 2.3 se describe con los siguientes diagramas conmutativos unos en χ y otros en $\mathcal{U}$:

Dadas, las χ- fuentes

$$\begin{tikzcd}
\bar{X} \arrow[r, "\bar{f}_i"'] & X_i \\
Y \arrow[ur, "g_i"] &
\end{tikzcd}$$

tal que existe $h \in Mor(\mathcal{U})$ tal que conmuta en $\mathcal{U}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_i"'] & F(X_i) \\
F(Y) \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "F(g_i)"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único $\hat{h}$ tal que en χ, conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bar{X} \arrow[r, "\bar{f}_i"'] & X_i \\
Y \arrow[u, "\hat{h}"] \arrow[ur, "g_i"] &
\end{tikzcd}$$

3. Propiedades

Veamos algunas propiedades que nos acercan a vislumbrar la relación entre estas dos propuestas categóricas:

Lema 3.1. *Si $P^* : \mathcal{U}^{op} \to Ord$ una teoría topológica, entonces (ver Definición 2.2)*

1. $\mathcal{U}^p$ es una categoría, donde si $(x, f, y), (y, g, z) \in Mor(\mathcal{U}^p)$, con $f : B \to C$, $g : C \to A$ definimos $(y, g, z) \circ (x, f, y) = (x, gf, z) : (x, A, y) \to (y, B, Z)$.

2. $P : \mathcal{U}^p \to \mathcal{U}$, definido como $P((A, x)) = A$ y $P((x, g, y)) = g$ es un funtor topológico.

Demostración:

1. Sean $(x, f, y), (y, g, z) \in Mor(\mathcal{U}^p)$, donde $f : B \to C$, $g : C \to A$, $x \in p^*(B)$, $y \in p^*(C)$ y $z \in p^*(A)$, queremos demostrar que $x \leqslant P^*(gf)(z)$ es decir $(x, gf, z) \in Mor(\mathcal{U}^p)$, pero $x \leqslant P^*(f)(y)$ y $y \leqslant P^*(g)(z)$, entonces $P^*(f)(y) \leqslant P^*(f)(P^*(g)(z)) = P * (gf)(z)$ y $x \leqslant P^*(f)(y)$, luego $x \leqslant P^*(gf)(z)$ y se concluye lo deseado, recordar que $P^*(f)$ y $P^*(g)$ son morfismos de orden. Además $P^*(Id_B)(x) = x$ para cada $x \in P^*(B)$ pues $P^*(Id_B)$ es la función identidad, de donde $(x, Id_B, x) : (B, x) \to (B, x)$ es un morfismo en $\mathcal{U}^p$ que funciona como la identidad del objeto (B, x).

2. Sea el P-pozo $(f_i : A_i = P(A_i, x_i) \to A)_{i \in I}$ en $\mathcal{U}$. Sea $x = \bigwedge_{i \in I} P^*(f_i)(x_i)$, afirmamos que $(x, f_i, x_i) = \bar{f}_i : (A, x) \to (A_i, x_i)$ es el P-levantamiento inicial. Sea $((z, g_i, x_i) : (A_i, x_i \to (B, z)))$ una $\mathcal{U}^p$- fuente, es decir $z \leqslant P^*(g_i)(y_i)$ para todo $i \in I$, y $h : A \to B$ un $\mathcal{U}$-morfismo, tal que $hf_i = g_i$, definamos $\hat{h} = (z, h, x)$ y veamos que $\hat{h} : (B, z) \to (A, x)$, es decir $\hat{h} \in Mor(\mathcal{U}^p)$.

Es decir que es morfismo de $\mathcal{U}^p$ y luego que conmuta el diagrama respectivo: Tenemos que $P^*(h)(x) = P^*(h)(\bigwedge_{i \in I} P^*(f_i)(x_i)) = \bigwedge_{i \in I}(P^*(hf_i)(x_i)) = \bigwedge_{i \in I} P^*(g_i)(x_i)$, pero $z \leqslant \bigwedge_{i \in I} P^*(g_i)(x_i)$ recordar que $z \leqslant P^*(g_i)(y_i)$ para todo $i \in I$, por tanto $z \leqslant P^*(h)(x)$, luego $\hat{h} \in Mor(\mathcal{U}^p)$. Ahora, es claro que $(z, \bar{f}_i\hat{h}, x_i) = (z, hf_i, x_i) = (z, g_i, x_i)$

La unicidad se implica de la antisimetría de la relación de orden en $P^*(A)$, ya que, si $((y, g_i, x_i) : (B, y) \to (A_i, x_i))_{i \in I}$ es otra $\mathcal{U}^p$- fuente con $P(B, y) = A$ y $P(y, g_i, x_i) = f_i$ para todo $i \in I$, entonces $y \leqslant p^*(g_i)(x_i) = p^*(f_i)(x_i)$, luego $y \leqslant x$.

Ahora, usando la inicialidad, tenemos que $Id_A : A \to B$ es un $\mathcal{U}$-morfismo, como trivialmente, $Id_A f_i = f_i$, entonces existe $\widehat{Id_A} = (x, Id_A, y) : (B, y) \to (A, x)$, luego $x \leqslant y$, por tanto $(A, x) = (B, y)$ y el levantamiento es único.

Veamos en diagramas la demostración:

Sea $(f_i : A_i \to A)_{i \in I}$ morfismos en $\mathcal{U}$ con $x_i \in A_i$, si $x = \bigwedge_{i \in I} P^*(f_i)(x_i)$, entonces $(x, f_i, x_i) = \bar{f}_i : (A, x) \to (A_i, x_i)$ es una $\mathcal{U}^p$-fuente que es inicial. Sean los diagramas en $\mathcal{U}$ conmutativos para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "h"'] & A_i \arrow[l, "f_i"'] \arrow[dl, "g_i"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

y sea la $\mathcal{U}^p$-fuente $((z, g_i, x_i) : (B, z) \to (A_i, x_i))_{i \in I}$,
es decir $z \leqslant g_i(x_i)$ para todo $i \in I$:

si definimos, $\hat{h} = (z, h, x) : (B, z) \to (A, x)$, obtenemos en $\mathcal{U}^p$ el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} (A,x) \arrow[r, "\bar{f}_i"'] & (A_i,x_i) \\ (B,z) \arrow[u, "\hat{h}"'] \arrow[ur, "(z,g_i,x_i)"'] & \end{tikzcd}$$

□

4. De categorías topológicas a teorías topológicas

Ahora, si partimos de un funtor topológico, veamos cómo podemos "levantar" una teoría topológica. Recordaremos el siguiente resultado

Teorema 4.1 (ver 21 de [**1**]). *Todo funtor topológico es fiel, amnésico y transportable.*

Definición 4.2. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor de fibras pequeñas, entonces si $C, D \in F^{-1}(A)$ con $A \in Ob(\mathcal{U})$, definimos que $C \leqslant_F D$ si y sólo si existe $\phi : C \to D$, $\mathcal{U}$-morfismo tal que $F(\phi) = Id_A$*

Teorema 4.3. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ funtor topológico, para todo $A \in Ob(\mathcal{U})$, se cumple que $(F^{-1}(A), \leqslant_F)$ es una retícula completa*

Demostración:

Sea $X_\lambda \in F^{-1}(A)$ para $\lambda \in \Lambda$, denotamos por $f_\lambda = Id_A : A \to F(X_\lambda)$, entonces $(f_\lambda = Id_A : A \to F(X_\lambda))$ es una F- fuente, sea $(\bar{f}_\lambda : \bar{A} \to X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ su levantamiento inicial, afirmamos que $\bar{A} = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, es claro que $\bar{A} \leqslant_F X_\lambda$ par todo $\lambda \in \Lambda$, ya que $F(\bar{f}_\lambda) = Id_A$. Ahora, si $Z \in F^{-1}(A)$ tal que $Z \leqslant_F X_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces existen $\phi_\lambda : Z \to X_\lambda$ tal que $F(\phi_\lambda) = Id_A$ para todo λ, tenemos los siguientes morfismos en χ:

$$\begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, "\bar{f}_\lambda"'] & X_\lambda \\ Z \arrow[ur, "\phi_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

como para todo λ, el diagrama en $\mathcal{U}$ es conmutativo, con el morfismo identidad.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_\lambda"'] & F(X_\lambda) \\ F(Z) \arrow[u, "Id_A"'] \arrow[ur, "F(\phi_\lambda)"'] & \end{tikzcd}$$

obtenemos el siguiente diagrama en χ, conmutativo

$$\begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[r, "\bar{f}_\lambda"'] & X_\lambda \\ Z \arrow[u, "\widehat{Id_A}"] \arrow[ur, "\phi_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

como $F(\widehat{Id_A}) = Id_A$, entonces $Z \leqslant \bar{A}$. Luego $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \overline{A}$. Usando que el funtor es amnésico se puede demostrar que el orden en $F^{-1}(A)$ es antisimétrico, para esto si $X \leqslant_F Y$ y $Y \leqslant_F X$ en $F^{-1}(A)$, tenemos que existen $\mathcal{U}$-morfismos $\phi : X \to Y$ y $\varphi : Y \to X$ con $F(\phi) = Id_A$ y $F(\varphi) = Id_A$, ya que $F(\varphi \circ \phi) = Id_A$ tenemos que $\varphi \circ \phi = Id_X$, análogamente $\phi \circ \varphi = Id_Y$, finalmente φ es un isomorfismo con $F(\varphi)$ una identidad y así φ es una identidad, con lo que $X = Y$.

De manera análoga si $f_\lambda = Id_A : F(X_\lambda) \to A$, donde $X_\lambda \in F^{-1}(A)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, es un F-pozo, y como todo funtor topológico es co-topológico, se tiene un levantamiento final, sea $(\underline{f_\lambda} : X_\lambda \to \underline{A})_{\lambda\in\Lambda}$ para tal levantamiento, se puede demostrar que $\underline{A} = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Las demás propiedades son sencillas de demostrar y así podemos conlcuir que $F^{-1}(A)$ es retícula completa □

Estamos en el camino de construir un funtor entre $\mathcal{U}^{op}$ y Ord, es claro que a los objetos se les puede asociar $F^{-1}(A)$, pero ahora hay que definir la asociación en morfismos.

Definición 4.4. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico y $f : A \to B$ morfismo de $\mathcal{U}$, definimos: $f^* : (F^{-1}(B), \leqslant_F) \to (F^{-1}(A), \leqslant_F)$ donde para $Y \in F^{-1}(B)$ sea $f^*(Y) = X$. Donde, como $f : A \to B = F(Y)$ es una F-fuente, entonces existe $\overline{f} : X \to Y$ F-levantamiento inicial de f y X es el dominio de tal levantamiento inicial.*

Lema 4.5. *Sea $f : A \to B$ morfismo de $\mathcal{U}$, entonces $f^* : F^{-1}(B) \to F^{-1}(A)$ preserva orden.*

DEMOSTRACIÓN:

Sean $Y_1 \leqslant_F Y_2$, con $Y_1, Y_2 \in F^{-1}(B)$, entonces existe $\phi : Y_1 \to Y_2$ tal que $F(\phi) = Id_B$, entonces $(f : A \to F(Y_i) = B)$, es una F- fuente en $\mathcal{U}$, si $(\overline{f_i} : X_i \to Y_i)_{i\in\{1,2\}}$ son sus F-levantamientos iniciales, entonces $f^*(Y_1) = X_1$ y $f^*(Y_2) = X_2$ es decir:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\overline{f_1}"'] & Y_1 \arrow[d, "\phi"'] \\ X_2 \arrow[r, "\overline{f_2}"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Como

$$\begin{tikzcd} F(X_1) \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "Id_A"'] & B \arrow[d, "Id_B"'] \\ F(X_2) \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Conmuta. Entonces, existe $\widehat{Id_A} : X_1 \to X_2$ tal que $F(\widehat{Id_A}) = Id_A$ tal que

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\overline{f_1}"'] \arrow[d, "\widehat{Id_A}"'] & Y_1 \arrow[d, "\phi"'] \\ X_2 \arrow[r, "\overline{f_2}"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Conmuta. luego $X_1 \leqslant_F X_2$. $\square$

Definición 4.6. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico y $f : A \to B$ morfismo de $\mathcal{U}$, definimos: $f_* : (F^{-1}(A), \leqslant_F) \to (F^{-1}(B), \leqslant_F)$ donde para $X \in F^{-1}(A)$ $f_*(X) = Y$. Donde, como $f : A = F(X) \to B$ es un F-pozo, entonces $\underline{f} : X \to Y$ es su F-levantamiento final de f, así que Y es el co-dominio de tal levantamiento final.*

Lema 4.7. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico y $f : A \to B$ morfismo de $\mathcal{U}$, entonces f_* preserva orden.*

Demostración: De igual manera que en el Lema 4.5, sean $X_1, X_2 \in F^{-1}(A)$, tales que $X_1 \leqslant_F X_2$, entonces existe un $\mathcal{U}$- morfismo ϕ tal que $\phi : X_1 \to X_2$ y $F(\phi) = Id_A$. Entonces obtenemos los F-pozos $(f : F(X_i) = A \to B)_{i\in\{1,2\}}$, entonces obtenemos los F-levantamiento finales $(\underline{f_i} : X_i \to Y_i)_{i\in\{1,2\}}$. Luego

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\underline{f_1}"'] \arrow[d, "\phi"'] & Y_1 \\ X_2 \arrow[r, "\underline{f_2}"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Como

$$\begin{tikzcd} F(X_1) \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "Id_A"'] & B \arrow[d, "Id_B"'] \\ F(X_2) \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Conmuta. Entonces, existe $\widehat{Id_B} : Y_1 \to Y_2$ tal que $F(\widehat{Id_B}) = Id_B$ tal que

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\underline{f_1}"'] \arrow[d, "\phi"'] & Y_1 \arrow[d, "\widehat{Id_B}"'] \\ X_2 \arrow[r, "\underline{f_2}"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

conmuta, luego $Y_1 \leqslant_F Y_2$. $\square$

Lema 4.8. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico. Para todo $f : A \to B$ $\mathcal{U}$-morfismo, y para todo $X \in F^{-1}(A)$ y para todo $Y \in F^{-1}(B)$, se cumple que:*
$X \leqslant_F f^*(f_*(X))$ y $f_*(f^*(Y)) \leqslant_F Y$.

Demostración: Sea $f : A \to B$, entonces $f : F(X) \to B$ es un F-pozo y sea $f_* : F^{-1}(A) \to F^{-1}(B)$ y $\underline{f} : X \to f_*(X)$, usando la inicialidad y finalidad en los diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} f^*(f_*((X))) \arrow[r, "\overline{f}"'] & f_*(X) \\ X \arrow[u, "\widehat{Id_A}"'] \arrow[ur, "\underline{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] & B = F(f_*(X)) \\ A = F(X) \arrow[u, "Id_A"'] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} .$$

Usando la finalidad e inicialidad en los diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} f^*(Y) \arrow[r, "\underline{f}"'] \arrow[dr, "\overline{f}"'] & f_*(f^*(Y)) \arrow[d, "\widehat{Id_B}"'] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A = F(f^*(Y)) \arrow[r, "f"'] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "Id_B"'] \\ & B = F(Y). \end{tikzcd}$$

Luego $F(\widehat{Id_A}) = Id_A$ y $F(\widehat{Id_B}) = Id_B$, por lo tanto,
$X \leqslant_F f^*(f_*(X))$ y $f_*(f^*(Y)) \leqslant_F Y$. $\square$

Teorema 4.9. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico, entonces $P_F^* : \mathcal{U}^{op} \to Ord$ definido como $P_F^*(A) = F^{-1}(A)$ y si $f : A \to B$ morfismo de $\mathcal{U}$, entonces $P_F^*(f) = f^*$ es una teoría topológica.*

Demostración: Como f^* y f_* son adjuntos como mapeos de clases pre-ordenada, entonces f^* preserva ínfimos. $\square$

En resumen: Sea $F : \chi :\to \mathcal{U}$ un funtor topológico con fibras pequeñas, y sea $P_F^* : \mathcal{U}^{op} \to Ord$ un funtor, donde $P_F^*(A) = F^{-1}(A)$ y $P_F^*(f) = f^*$, entonces $P_F^* : \mathcal{U}^{op} \to Ord$ es una teoría topológica y podemos definir $P_F : \mathcal{U}^{P_F} \to \mathcal{U}$ (ver la Definición 2.2) que es un funtor topológico definido como $P_F(A, Z) = A$ y $P(X, f, Y) = f$. El cual es "casi" un funtor que olvida.

5. Isomorfismo

Teorema 5.1. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico. Sea $\mathcal{G} : \chi \to \mathcal{U}^{P_F}$, definido como $\mathcal{G}(X) = (F(X), X)$ y para $f : Y \to X$, $\mathcal{G}(f) = (X, F(f), Y) : (F(X), X) \to (F(Y), Y)$*

Sea $\mathcal{H} : \mathcal{U}^{P_F} \to \chi$ donde $\mathcal{H}(A, X) = X$ y $\mathcal{H}((X, f, Y)) = \overline{f}\phi$, donde $\overline{f} : f^*(Y) \to Y$ es el levantamiento F-inicial de $f : X \to F(Y)$ y $\phi : X \to P_F^*(f)(Y) = f^*(Y)$ tal que $F(\phi) = id_A$, entonces χ y $\mathcal{U}^{P_F}$ son categorías isomorfas mediante $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$.

Demostración:

Comprobemos que si $f : X \to Y$ con $f \in Mor(\chi)$, entonces $(X, F(f), Y) \in Mor(\mathcal{U}^{P_F})$, pero $F(f) : F(X) \to F(Y)$, pero $X \in F^{-1}(F(X))$ y $Y \in F^{-1}(F(Y))$. Notar que $\mathcal{G}(\mathcal{H}(A, X)) = (F(X), X) = (A, X)$ y $\mathcal{H}(\mathcal{G}(X)) = \mathcal{H}(F(X), X) = X$ y en los morfismos: $\mathcal{G}(\mathcal{H}(X, f, Y)) = \mathcal{G}(\overline{f}\phi) = (X, F(\overline{f}\phi), Y) = (X, fId_A, Y) = (X, f, Y)$, es decir $\mathcal{H}\mathcal{G} = ID_\chi$ y $\mathcal{G}\mathcal{H} = ID_{\mathcal{U}^{P_F}}$. $\square$

Teorema 5.2. *Los funtores $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, F y P_F, conmutan el diagrama de funtores.*

$$\begin{tikzcd} \chi \arrow[rr, bend left, "\mathcal{G}"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{U}^{P_F} \arrow[ll, bend left, "\mathcal{H}"] \arrow[dl, "P_F"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

Demostración:

Sea $X \in Ob(\chi)$, entonces $P_F(\mathcal{G}(X)) = P_F(F(X), X) = F(X)$, luego $\mathcal{G}(X) = F(X)$ sea $P_F(\mathcal{G}(f)) = P_F((X, F(f), Y)) = F(f)$.

Análogamente, sea $(A, X) \in Ob(\mathcal{U}^{P_F})$, entonces $F(\mathcal{H}((A, X))) = F(X) = A = P_F((A, X))$, y si $(X, f, Y) \in Mor(\mathcal{U}^{P_F})$, entonces $F(\mathcal{H}((X, f, Y))) = F(f) = P_F((X, f, Y))$ □

6. Subcategorías bireflexivas en categorías topológicas

Teorema 6.1. *Si $\mathcal{R}$ es una subcategoría plena, repleta y bireflexiva de χ, con $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico y $\mathcal{U}$ una categoría balanceada, entonces $\mathcal{R}$ es cerrada bajo la formación de estructuras iniciales (en χ).*

Demostración:

Sea $(f_\lambda : A \to F(Y_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ una F-fuente con $Y_\lambda \in Obj(\mathcal{R})$ para cada $\lambda \in \Lambda$, consideremos $r : \overline{A} \to R(\overline{A})$ la $\mathcal{R}$-bireflexión de $\overline{A}$, tenemos que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un único χ-morfismo $g_\lambda = (\overline{f}_\lambda)^0 : R(\overline{A}) \to Y_\lambda$ tal que $g_\lambda \circ r = \overline{f}_\lambda$. Tenemos que $F(r)$ es bimorfismo, así existe $\mathcal{U}-$morfismo $s = (F(r))^{-1} : F(R(\overline{A})) \to F(\overline{A})$, además ya que para cada $\lambda \in \Lambda$, $F(g_\lambda) \circ F(r) = f_\lambda$, se tiene que para cada $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda \circ s = F(g_\lambda)$, y por propiedad del levantamiento F-inicial tenemos que existe un único χ-morfismo $\widehat{s} : R(\overline{A}) \to \overline{A}$ tal que $F(\widehat{s}) = s$ y para cada $\lambda \in \Lambda$, $\overline{f}_\lambda \circ \widehat{s} = g_\lambda$, además $\widehat{s} \circ r = 1_{\overline{A}}$ pues $F(\widehat{s} \circ r) = F(1_{\overline{A}})$, de donde r es una retracción y bimorfismo, así r es isomorfimo y $\overline{A} \cong R(\overline{A})$. □

Corolario 6.2. *Si $\mathcal{R}$ es una subcategoría plena, repleta y bireflexiva de χ, con $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico y $\mathcal{U}$ una categoría balanceada, entonces $\mathcal{R}$ es cerrada bajo la formación de ínfimos.*

Proposición 6.3. *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico y $\mathcal{R}$ una subcategoría cerrada bajo ínfimos y "estructuras iniciales", entonces $\mathcal{R}$ es bireflexiva en χ*

Demostración:

Para cada $X \in Obj(\mathcal{R})$, consideremos

$$R(X) := \bigwedge \{Y \in Obj(\mathcal{R}) | X \leqslant_F Y\}$$

Ya que $\mathcal{R}$ es cerrada bajo ínfimos, tenemos que $R(X)$ es un objeto de $\mathcal{R}$, además tenemos que $X \leqslant_F R(X)$, de donde existe $\varphi : X \to R(X)$ con $F(\varphi) = 1_{F(X)}$, de donde φ es bimorfismo (Todo funtor topológico preserva monofuentes y epipozos, ver 21.13 de [**1**]), veamos que $r_X = \varphi$ es la $\mathcal{R}$-reflexión de X. Sea $f : X \to Y$ un χ-morfismo, tenemos que $(F(f))^*(Y)$ es un $\mathcal{R}$-objeto tal que $X \leqslant (F(f))^*(Y)$, de donde $R(X) \leqslant_F (F(f))^*(Y)$, así existe un χ-morfismo $\psi : R(X) \to (F(f))^*(Y)$ tal que $F(\psi) = 1_{F(R(X))}$, finalmente para $f^0 := \overline{F(f)} \circ \psi$ se tiene que $f^0 \circ r_X = f$. □

Proposición 6.4 (Dual de Proposición 19)**.** *Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena y bicorreflexiva de χ, con $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico y $\mathcal{U}$ una categoría balanceada, entonces $\mathcal{R}$ es cerrada bajo la formación de estructuras finales (en χ).*

Corolario 6.5 (Dual de Corolario 20)**.** *Si $\mathcal{R}$ es una subcategoría plena y bicorreflexiva de χ, con $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico y $\mathcal{U}$ una categoría balanceada, entonces $\mathcal{R}$ es cerrada bajo la formación de supremos.*

Proposición 6.6 (Dual de Proposición 21). *Sea $F : \chi \to \mathcal{U}$ un funtor topológico y $\mathcal{C}$ una subcategoría cerrada bajo supremos y "estructuras finales", entonces $\mathcal{C}$ es bicorreflexiva en χ con correflector*

$$C(X) := \bigvee\{Y \in Obj(\mathcal{C}) | Y \leqslant_F X\}$$

Proposición 6.7. *Sea $\mathcal{A}$ una clase de χ-objetos, la envolvente birreflexiva de $\mathcal{A}$ en χ, denotada por $\mathcal{A}_R$ está dada por*

$$X \in \mathcal{A}_R \Leftrightarrow \exists\Lambda(\exists B \in Obj(\mathcal{U})(\exists\{f_\lambda : B \to F(A_\lambda)\} \wedge X = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} f^*_\lambda(A_\lambda)))$$

Demostración:

Ya que para cada $X \in \mathcal{A}$ se tiene que $A = 1^*_{F(A)}(A)$, se tiene que $\mathcal{A} \subset Obj(\mathcal{A}_R)$. Si $\mathcal{B}$ es una subcategoría birreflexiva con $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, se tiene que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo la formación de estructuras iniciales e ínfimos, así $\mathcal{A}_R$ es una subcategoría de $\mathcal{B}$. Si $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia de $\mathcal{A}_R$-objetos, tenemos que

$$\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma = \bigwedge_{\gamma\in\Gamma}\bigwedge_{\lambda\in\Lambda_\gamma} f^*_\lambda(A_\lambda) = \bigwedge_{\lambda\in\bigcup\Lambda_\gamma} f^*_\lambda(A_\lambda)$$

de donde $\mathcal{A}_R$ es cerrada bajo ínfimos. Si X es un $\mathcal{A}_R$-objeto y $g : A \to F(X)$ es un $\mathcal{U}$-morfismo, tenemos que

$$g^*(X) = g^*(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} f^*_\lambda(A_\lambda)) = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} g^*(f^*_\lambda(A_\lambda)) = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(f_\lambda \circ g)^*(A_\lambda)$$

así $g^*(X)$ es un $\mathcal{A}_R$-objeto. Finalmente por la proposición 6.3, tenemos que $\mathcal{A}_R$ es bireflexiva. □

Proposición 6.8 (Dual de Proposición 6.7). *Sea $\mathcal{A}$ una clase de χ-objetos, la envolvente bicorreflexiva de $\mathcal{A}$ en χ, denotada por $\mathcal{A}_C$ está dada por*

$$X \in \mathcal{A}_C \Leftrightarrow \exists\Lambda(\exists B \in Obj(\mathcal{U})(\exists\{f_\lambda : F(A_\lambda) \to B\} \wedge X = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} f^*_\lambda(A_\lambda)))$$

Bibliografía

[1] J. Adámek, H. Herrlich, George E. Strecker, *Abstract and concrete categories, the joy of cats*, 1990, http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf

[2] G.C.L. Brümmer, *Topological categories*, Topology and its applications, 27- 41, 18, 1971.

[3] Dikrajan D., Giuli E., Closure Operators, Topology and its applications, 129-143, 18, 1987.

[4] Wyler O., *Top categories and categorical topology*, Topology and its aplications, 17-28, 1, 1971.

Correos electrónicos:

jangoa@fcfm.buap.mx (Juan Angoa-Amador),

jgs2501@outlook. com (Jesús González-Sandoval),

CAPÍTULO 3

Espacios $T_{\frac{1}{2}}$

Armando Martínez García
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

Este capítulo tiene como objetivo presentar y estudiar algunas propiedades de los espacios $T_{\frac{1}{2}}$ dicho trabajo esta dividido en 6 secciones.

En la sección 2 daremos los resultados generales necesarios para llevar a buen fin este trabajo, en la sección 3 presentamos la definición de conjunto g-cerrado así como algunas equivalencias a la definición que nos serán útiles en las siguientes secciones, en la sección 4 daremos la definición de espacio $T_{\frac{1}{2}}$ así también presentamos algunas condiciones bajo las cuales un espacio topológico es $T_{\frac{1}{2}}$, en la sección 5 daremos algunas equivalencias a ser un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$ así como su relación con otras clases de espacios. Finalizamos este capítulo presentando la sección 6 dando algunas propiedades que satisface esta clase de espacios.

2. Resultados generales

En esta sección daremos las definiciones y resultados necesarios en este trabajo.

Definición 2.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$*

(1) El interior de $A \subset X$, lo denotamos por $int(A)$.
(2) A es un conjunto cerrado si $X \setminus A \in \tau$.
(3) La cerradura de A la cual denotaremos como $cl(A)$ es el conjunto
$$cl(A) = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } U \in \tau \text{ tal que } x \in U\}.$$
(4) El kernel de A, el cual denotaremos como $ker(A)$ es el conjunto
$$ker(A) = \cap\{U \in \tau : A \subset U\}.$$
(5) $I(A) = ker(A) \cap cl(A)$.

Lema 2.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces*
$$cl(A) = \cap\{F : A \subset F \text{ y } F \text{ es un conjunto cerrado}\}.$$

Lema 2.3. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto cerrado.*
(2) *$A = cl(A)$.*

Definición 2.4. *Sean (X,τ) un espacio topológico, $Y \subset X$ y $A \subset Y$.*

(1) *La topología relativa en Y la cual denotaremos como τ_Y es*
$$\tau_Y = \{O \cap Y : O \in \tau\}.$$
(2) *La cerradura de A en Y la cual denotaremos como $cl_Y(A)$ es*
$$cl_Y(A) = cl(A) \cap Y.$$

Definición 2.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces*

(1) *(X,τ) es localmente indiscreto si*
$$U = cl(U) \text{ para todo } U \in \tau.$$
(2) *(X,τ) es simétrico si*
$$x \in cl(\{y\}) \text{ implica } y \in cl(\{x\}) \text{ para todo } x, y \in X.$$
(3) *(X,τ) es de $Alexandroff$ si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
(4) *(X,τ) es puerta si para todo $A \subset X$*
$$A \in \tau \text{ o } A = cl(A).$$

Las siguientes afirmaciones relacionadas con espacios de Alexandroff aparecen en [**9**].

Se demuestra que si (X,τ) es un espacio de Alexandroff existe un preorden $\leqslant$ en X que genera la topología τ. En particular se demuestra el siguiente resultado

Lema 2.6. *Sean (X,τ) un espacio topológico de $Alexandroff$ y $x \in X$.*

(1) *El conjunto $U_x = \{y \in X : x \leqslant y\}$ es el abierto mínimo que contiene a x.*
(2) *El conjunto $V_x = \{y \in X : y \leqslant x\}$ satisface que $cl_X\{x\} = V_x$.*

Con respecto a este preorden se consideran los siguientes conjuntos

(1) $M = \{x \in X : x$ es elemento maximal de $X\}$.
(2) $m = \{x \in X : x$ es elemento minimal de $X\}$.

y se demuestra la siguiente afirmación.

Lema 2.7. *Sean (X,τ) un espacio topológico de $Alexandroff$ y $x \in X$.*

(1) *Si $x \in m$, entonces $cl(\{x\}) = \{x\}$.*
(2) *Si $x \in M$, entonces $\{x\} \in \tau$.*

Definición 2.8. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$.*

(1) *(X,τ) es T_D si para todo $x \in X$, existe $U \in \tau$ y un conjunto cerrado F tales que*
$$\{x\} = U \cap F.$$
(2) *(X,τ) es submaximal si*
$$D \in \tau \text{ para todo conjunto denso } D \subset X.$$
(3) *A es un conjunto localmente cerrado si existen $U \in \tau$ y un conjunto cerrado $F \subset X$ tales que*
$$A = U \cap F.$$

Teorema 2.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico T_D. Entonces (X, τ) es T_0.*

DEMOSTRACIÓN: Sean (X, τ) T_D y $x, y \in X$ con $x \neq y$.

Como (X, τ) un espacio topológico T_D y $x \in X$, entonces existe $U \in \tau$ y un conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $\{x\} = U \cap F$.

Como $x \neq y$, entonces $y \notin \{x\}$ lo cual implica que $y \notin U \cap F$ de donde se sigue que $y \notin U$ o $y \notin F$ es decir
$$(x \in U \text{ y } y \notin U) \text{ o } (y \in X \setminus F \text{ y } x \notin X \setminus F).$$

Por lo tanto
$$(X, \tau) \text{ es } T_0.$$

□

Teorema 2.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es T_D.
(2) Para todo $x \in X$ existe $U \in \tau$ tal que $\{x\} = U \cap cl(\{x\})$.

DEMOSTRACIÓN: 1) implica 2) Sea $x \in X$ como (X, τ) es T_D existen $U \in \tau$ y un conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $\{x\} = U \cap F$.

Como $\{x\} = U \cap F$, entonces $\{x\} \subset U$ y $\{x\} \subset F$ lo cual implica $\{x\} \subset U$ y $\{x\} \subset cl(\{x\})$ de donde se sigue que
$$\{x\} \subset U \cap cl(\{x\}) \subset U \cap F = \{x\}.$$
Por lo tanto
$$\{x\} = U \cap cl(\{x\}).$$

2) implica 1) Es inmediato. □

Los siguientes dos teoremas fueron demostrados en [**13**].

Teorema 2.11. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) A es un conjunto localmente cerrado.
(2) Existe $U \in \tau$ tal que $A = U \cap cl(A)$.
(3) $cl(A) \setminus A$ es un conjunto cerrado en X.
(4) $A \cup (X \setminus cl(A))$ es un conjunto abierto.
(5) $A \subset int(A \cup [X \setminus cl(A)])$.

Corolario 2.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

(1) Para todo $U \in \tau$, U es localmente cerrado.
(2) Para todo conjunto cerrado $F \subset X$, F es localmente cerrado.

Teorema 2.13. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es submaximal.
(2) Para todo conjunto $A \subset X$, A es localmente cerrado.

El siguiente resultado es demostrado en [**14**].

Teorema 2.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico de $Alexandroff$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es submaximal.

(2) $X = M \cup m$.

Demostración: 1) implica 2) Sea (X, τ) submaximal.

Supongamos que existe $x \in X$ que no es minimal ni maximal, entonces existen $y, z \in X$ tales que $z < x < y$.

Como $x < y$, del Lema 2.6 se tiene $y \in U_x$ lo cual implica $x \in cl(\{y\}) \subset cl(X \setminus \{x\})$ por lo tanto el conjunto $D = X \setminus \{x\}$ es denso en X, además es claro que $z \in D$ y como $z < x$ del mismo lema se tiene que $x \in U_z \setminus D$ de donde $z \notin int(D)$. Esto implica que D no es un conjunto abierto, es decir (X, τ) no es submaximal.

2) implica 1) Sean $X = M \cup m$ y $D \subset X$ un conjunto denso.

Del Lema 2.7 se tiene que para cada $x \in M$, $U_x = \{x\}$ con $U_x \cap D \neq \emptyset$. Se sigue que $M \subset D$. Por otro lado para cada $x \in D \setminus M$ como $x \notin M$, existe $y_x \in X$ tal que $x < y_x$ de donde $y_x \in X \setminus m \subset M$, entonces $y_x \in D$, lo cual implica que para todo $x \in D$, se tiene que $U_x \subset D$ lo cual implica que $D = \cup_{x \in D} U_x$.

Por lo tanto

$$(X, \tau) \text{ es submaximal.}$$

□

Definición 2.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$.*

(1) A es un conjunto preabierto si

$$A \subset int[cl(A)].$$

(2) (X, τ) es R_0, si para todo $U \in \tau$

$$U = \cup\{F \subset U : F = cl(F)\}.$$

El siguiente teorema fue demostrado en [**13**].

Teorema 2.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es localmente indiscreto.
(2) Para todo conjunto $A \subset X$, A es preabierto.
(3) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto preabierto.
(4) Para todo conjunto cerrado $F \subset X$, F es preabierto.

El siguiente teorema fue demostrado en [**1**].

Teorema 2.17. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es R_0.
(2) $cl(\{x\}) \subset U$ para todo $U \in \tau$ y para cada $x \in U$.
(3) $ker(F) = F$ para todo $F \subset X$ tal que $F = cl(F)$.
(4) $cl(\{x\}) \subset ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.
(5) $cl(\{x\}) = ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.
(6) $I(x) = cl(\{x\})$ para todo $x \in X$.
(7) $I(x) = ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.
(8) Para todo $x, y \in X$ tales que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) \neq \emptyset$ implica $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$.
(9) Para todo $x, y \in X$ tales que $ker(\{x\}) \cap ker(\{y\}) \neq \emptyset$ implica $ker(\{x\}) = ker(\{y\})$.

3. Conjuntos g-cerrados

Iniciaremos esta sección dando la definición de conjunto g-cerrado la cual aparece en [**10**] y daremos algunas condiciones bajo las cuales un conjunto $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado. En particular el Teorema 3.5 aparece en [**6**] y la g cerradura así como los resultados que se dan en este trabajo aparecen en [**7**].

Definición 3.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ definimos*

(1) A es un conjunto g-cerrado si

$$cl(A) \subset U \text{ para todo } U \in \tau \text{ tal que } A \subset U.$$

(2) La g cerradura de A la cual denotaremos como $cl_g(A)$ es el conjunto

$$cl_g(A) = \cap\{F \subset X : A \subset F \text{ con } F \text{ un conjunto } g-\text{cerrado}\}.$$

El inciso 4 que se da en la siguiente observación así como el Teorema 5.17 aparecen en [**4**].

Observación 1. Si A es un conjunto cerrado, entonces

(1) A es un conjunto g-*cerrado.*
(2) $cl_g(A) = A$.
(3) No todo conjunto g-cerrado es un conjunto cerrado.
(4) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto cerrado o $X \setminus \{x\}$ es un conjunto g-cerrado.

DEMOSTRACIÓN: 3) Sea

$$X = \{a, b, c\},\ \tau = \{\emptyset, \{a\}, X\} \text{ y } A = \{a, b\}.$$

Es claro que A es un conjunto g-cerrado pero no cerrado.

4) Sea $x \in X$. Si $\{x\}$ no es un conjunto cerrado, entonces $X \setminus \{x\}$ no es un conjunto abierto de donde se sigue que el único conjunto abierto que lo contiene es X lo cual implica que $cl(X \setminus \{x\}) \subset X$.

Por lo tanto para todo $x \in X$

$$\{x\} \text{ es un conjunto cerrado o } X \setminus \{x\} \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado.}$$

□

Teorema 3.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico localmente indiscreto y $A \subset X$. Entonces $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $A \subset X$ y $O \in \tau$ tal que $A \subset O$, entonces $cl(A) \subset cl(O)$ de donde aplicando la Definición 2.5 se sigue que $cl(O) = O$ lo cual implica que $cl(A) \subset O$.

Por lo tanto

$$A \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado .}$$

□

De los Teoremas 2.16 y 3.2 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico que satisface cualquiera de las siguientes afirmaciones. Entonces todo conjunto $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado.*

(1) Para todo conjunto $A \subset X$, A es un conjunto preabierto.
(2) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto preabierto.
(3) Para todo conjunto cerrado $F \subset X$, F es un conjunto preabierto.

Teorema 3.4. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\gamma = \{F \subset X : F = cl(F)\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) $\tau = \gamma$.
(2) *Todo conjunto $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: 1) implica 2) Supongamos que $\tau = \gamma$. Sean $A \subset X$ y $O \in \tau$ tales que $A \subset O$.

Como $\tau = \gamma$ y $O \in \tau$ son tales que $A \subset O$, entonces $cl(A) \subset cl(O) = O$ lo cual implica que $cl(A) \subset O$.

Por lo tanto de la Definición 3.1 se tiene que

$$A \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado.}$$

2) implica 1) Supongamos que todo conjunto $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado.

Sea $O \in \tau$, como $O \subset O$ y O es un conjunto g- cerrado, entonces $cl(O) \subset O$ y como $O \subset cl(O)$, entonces $O = cl(O)$.

Por lo tanto $\tau \subset \gamma$. En forma análoga podemos demostrar que $\gamma \subset \tau$.

Por lo tanto

$$\tau = \gamma.$$

□

Teorema 3.5. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *A es un conjunto g-cerrado.*
(2) *$cl(\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ para cada $x \in cl(A)$.*
(3) *$cl(A) \setminus A$ no contiene conjuntos cerrados no vacíos.*

DEMOSTRACIÓN: 1) implica 2) Sea A un conjunto g-cerrado.

Supongamos que existe $x \in cl(A)$ tal que $cl(\{x\}) \cap A = \emptyset$, entonces $A \subset X \setminus cl(\{x\})$ y dado que A es un conjunto g-cerrado se sigue que $cl(A) \subset X \setminus cl(\{x\})$, lo cual implica que $x \in X \setminus cl(\{x\})$ lo que es una contradicción.

Por lo tanto

$$cl(\{x\}) \cap A \neq \emptyset \text{ para cada } x \in cl(A).$$

2) implica 3) Supongamos que para cada $x \in cl(A)$, $cl(\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ y que existe un conjunto cerrado $F \subset cl(A) \setminus A$, tal que $F \neq \emptyset$.

Como $F \neq \emptyset$ existe $x \in F$ de donde $\{x\} \subset F$, entonces $cl(\{x\}) \subset F$ y como $F \subset cl(A) \setminus A$ tenemos que

$$\emptyset \neq cl(\{x\}) \cap A \subset F \cap A \subset (cl(A) \setminus A) \cap A$$

que es una contradicción.

Por lo tanto

$$\text{Si } F \subset cl(A) \setminus A \text{ es un conjunto cerrado, entonces } F = \emptyset.$$

3) implica 1) Supongamos que $cl(A) \setminus A$ no contiene conjuntos cerrados no vacíos.

Sea $U \in \tau$ tal que $A \subset U$. Es claro que $cl(A) \cap (X \setminus U)$ es un conjunto cerrado tal que

$$cl(A) \cap (X \setminus U) \subset cl(A) \setminus A.$$

Se sigue que $cl(A) \cap (X \setminus U) = \emptyset$, lo cual implica que $cl(A) \subset U$.

Por lo tanto,

$$A \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado.}$$

$\square$

Teorema 3.6. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) A es un conjunto g cerrado.
(2) $cl(A) \subset ker(A)$.

Demostración: 1) implica 2) Sea A un conjunto g cerrado. Entonces $cl(A) \subset U$ para todo conjunto abierto tal que $A \subset U$. Así,

$$cl(A) \subset \cap\{U \subset X : A \subset U \text{ con } U \text{ conjunto abierto}\}.$$

Por lo tanto,

$$cl(A) \subset ker(A).$$

2) implica 1) Supongamos que $cl(A) \subset ker(A)$.

Como $cl(A) \subset ker(A)$, entonces $cl(A) \subset U$ para todo $U \in \tau$ tal que $A \subset U$.

Por lo tanto,

$$A \text{ es un conjunto } g \text{ cerrado.}$$

$\square$

Teorema 3.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico, Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es simétrico.
(2) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado.

Demostración: 1) implica 2) Sea (X, τ) simétrico y supongamos que existe $x \in X$ tal que, $\{x\}$ no es un conjunto g-cerrado.

Como $\{x\}$ no es un conjunto g-cerrado, entonces existe $O \in \tau$ tal que $\{x\} \subset O$ y $cl(\{x\})$ no esta contenido en O.

Dado que $cl(\{x\})$ no está contenido en O, entonces $cl(\{x\}) \cap (X \setminus O) \neq \emptyset$, de donde existe $y \in cl(\{x\}) \cap (X \setminus O)$ es decir $y \in cl(\{x\})$ y $y \in (X \setminus O)$. Como $y \in cl(\{x\})$ aplicando la Definición 2.5 $x \in cl(\{y\})$ lo cual implica que $x \in cl(\{y\}) \subset (X \setminus O)$ es decir $\{x\} \subset (X \setminus O)$ que es una contradicción.

Por lo tanto, para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado.

2) implica 1) Supongamos que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado y que (X, τ) no es simétrico.

Como (X, τ) no es simétrico existen $x, y \in X$ tales que $x \in cl(\{y\})$ y $y \notin cl(\{x\})$.

Dado que $y \notin cl(\{x\})$, entonces $\{y\} \subset (X \setminus cl(\{x\})$ y por hipótesis se sigue que $cl(\{y\}) \subset (X \setminus cl(\{x\})$ de donde $x \in (X \setminus cl(\{x\})$ que es una contradicción.

Por lo tanto, (X, τ) es simétrico. $\square$

Del Teorema 2.17 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *(X, τ) es un espacio topológico simétrico, si se satisface cualquiera de las siguientes afirmaciones*

(1) (X, τ) es R_0.
(2) $ker(F) = F$ para todo $F \subset X$ tal que $F = cl(F)$.

(3) $cl(\{x\}) \subset ker(\{x\})$ *para todo* $x \in X$.
(4) $cl(\{x\}) = ker(\{x\})$ *para todo* $x \in X$.
(5) $I(x) = cl(\{x\})$ *para todo* $x \in X$.
(6) $I(x) = ker(\{x\})$ *para todo* $x \in X$.
(7) *Para todo* $x, y \in X$ *tales que* $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) \neq \emptyset$ *implica* $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$.
(8) *Para todo* $x, y \in X$ *tales que* $ker(\{x\}) \cap ker(\{y\}) \neq \emptyset$ *implica* $ker(\{x\}) = ker(\{y\})$.

Las siguientes definiciones que aparecen en **[3]** y **[8]** nos dan dos condiciones que nos permite asegurar cuando un conjunto $A \subset X$ es g-cerrado.

Definición 3.9. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subset X$ *definimos*

(1) *La* θ *cerradura de* A *la cual denotaremos por* $cl_\theta(A)$ *como el conjunto*
$$cl_\theta(A) = \{x \in X : cl(U) \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } U \in \tau \text{ tal que } x \in U\}.$$
(2) A *es un conjunto* g-θ *cerrado si*
$$cl_\theta(A) \subset U \text{ para cada } U \in \tau \text{ tal que } A \subset U.$$
(3) A *es un conjunto* θ *cerrado si* $A = cl_\theta(A)$.

Definición 3.10. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subset X$ *definimos*

(1) *La* T *cerradura de* A *la cual denotaremos por* $cl_T(A)$ *como el conjunto*
$$cl_T(A) = \{x \in X : cl_g(U) \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } U \in \tau \text{ tal que } x \in U\}.$$
(2) A *es un conjunto* g-T *cerrado si*
$$cl_T(A) \subset U \text{ para cada } U \in \tau \text{ tal que } A \subset U.$$
(3) A *es un conjunto* T*-cerrado si* $A = cl_T(A)$.

Observación 2

(1) $A \subset cl_g(A) \subset cl(A) \subset cl_\theta(A)$.
(2) $A \subset cl_g(A) \subset cl(A) \subset cl_T(A)$.

De la Observación 2 tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.11. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subset X$, *entonces* A *es un conjunto* g*-cerrado si satisface alguna de las siguientes condiciones*

(1) A *es un conjunto* g-θ *cerrado.*
(2) A *es un conjunto* g-T *cerrado.*

Finalizaremos esta sección dando algunos resultados que muestran cómo se comportan los conjuntos g-cerrados bajo funciones que satisfacen alguna propiedad.

Teorema 3.12. *Sean* (X, τ), (Y, τ_1) *espacios topológicos,* $f : X \to Y$ *continua y cerrada y* $A \subset X$ *un conjunto* g*-cerrado, entonces* $f(A)$ *es un conjunto* g*-cerrado.*

Demostración: Sea $O \in \tau_1$ tal que $f(A) \subset O$, entonces $A \subset f^{-1}(O)$ y dado que A es un conjunto g-cerrado y $f^{-1}(O) \in \tau$ se sigue que $cl(A) \subset f^{-1}(O)$ y como
$$cl(f(A)) \subset cl(f[cl(A)]) = f[cl(A)] \subset O$$
implica que $cl(f(A)) \subset O$.

Por lo tanto
$$f(A) \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado.}$$
$\square$

Teorema 3.13. *Sean (X, τ), (Y, τ_1) espacios topológicos, $f : X \to Y$ continua, cerrada y $B \subset Y$ un conjunto g-cerrado, entonces $f^{-1}(B)$ es un conjunto g-cerrado.*

Demostración: Sea $B \subset Y$ un conjunto g-cerrado y $O \in \tau$ tal que $f^{-1}(B) \subset O$. Es claro que $cl(f^{-}(B)) \cap (X \setminus O)$ es un conjunto cerrado, entonces $f[cl(f^{-1}(B)) \cap (X \setminus O)]$ es un conjunto cerrado.

Afirmamos que $f[cl(f^{-1}(B)) \cap (X \setminus O)] \subset cl(B) \setminus B$. Sea $y \in f[cl(f^{-1}(B)) \cap (X \setminus O)]$, entonces existe $x \in cl(f^{-1}(B)) \cap (X \setminus O)$ tal que $f(x) = y$ de donde $x \in cl(f^{-1}(B))$ y $x \in (X \setminus O)$.

Dado que f es continua y $f^{-1}(B) \subset O$ se tiene que $x \in f^{-1}(cl(B))$ y $x \notin f^{-1}(B)$ lo cual implica que $y = f(x) \in cl(B) \setminus B$. Por lo tanto aplicando el Teorema 3.5 $f[cl(f^{-1}(B)) \cap (X \setminus O)] = \emptyset$ lo cual implica que $cl(f^{-1}(B)) \cap (X \setminus O) = \emptyset$ es decir $cl(f^{-1}(B)) \subset O$.

Por lo tanto

$$f^{-1}(B) \text{ es un conjunto } g\text{-cerrado.}$$

$\square$

De los Teoremas 3.12 y 3.13 tenemos el sigiente resultado.

Corolario 3.14. *Sean (X, τ), (Y, τ_1) espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo, entonces*

(1) $f(A)$ es un conjunto g-cerrado para todo conjunto g-cerrado $A \subset X$.
(2) $f(B)^{-1}$ es un conjunto g-cerrado para todo conjunto g-cerrado $B \subset Y$.

4. Espacios $T_{\frac{1}{2}}$

Recordemos que dado un espacio topológico (X, τ) y un conjunto $A \subset X$, si A es un conjunto cerrado, entonces A es un conjunto g-cerrado, sin embargo si A es un conjunto g-cerrado, A no necesariamente es un conjunto cerrado como lo vimos en la **Observación 1**, lo cual nos lleva a la siguiente definición que da título a este trabajo.

Definición 4.1. *(X, τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si todo conjunto g-cerrado $A \subset X$ es un conjunto cerrado.*

Teorema 4.2. *(X, τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si todo conjunto g-cerrado $A \subset X$ es un conjunto localmente cerrado.*

Demostración: Sea $A \subset X$ un conjunto g-cerrado localmente cerrado. Aplicando la Definición 2.8 existe un conjunto $O \in \tau$ tal que $A = O \cap cl(A)$, se sigue $A \subset O$ y como A es un conjunto g-cerrado, se tiene que $cl(A) \subset O$, entonces $A = O \cap cl(A) = cl(A)$ lo cual implica que $A = cl(A)$.

Por lo tanto

$$(X, \tau) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

De los Teoremas 2.11 y 4.2 tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 4.3. *(X, τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si para todo conjunto g-cerrado $A \subset X$, existe $U \in \tau$ tal que $A = U \cap cl(A)$.*

Corolario 4.4. *(X,τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si para todo conjunto g-cerrado, $cl(A)\setminus A$ es un conjunto cerrado en X.*

Corolario 4.5. *(X,τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si para todo conjunto g-cerrado $A\subset X$, $A\cup(X\setminus cl(A))$ es un conjunto abierto.*

Corolario 4.6. *(X,τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si para todo conjunto g-cerrado $A\subset X$, $A\subset int(A\cup[X\setminus cl(A)])$.*

Del Teorema 2.13 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.7. *(X,τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si (X,τ) es un espacio topológico submaximal.*

De los Teoremas 3.5 y 4.2 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.8. *(X,τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si para todo conjunto localmente cerrado $A\subset X$ y para cada $x\in cl(A)$, $cl(\{x\})\cap A\neq\emptyset$.*

Corolario 4.9. *(X,τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si para todo conjunto localmente cerrado $A\subset X$, $cl(A)\setminus A$ no contiene conjuntos cerrados no vacíos.*

De los Teoremas 3.6 y 4.2 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.10. *(X,τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, si para todo conjunto $A\subset X$ tal que $cl(A)\subset ker(A)$, $A\subset X$ es un conjunto localmente cerrado.*

5. Condiciones equivalentes a $T_{\frac{1}{2}}$

En esta sección presentamos algunas condiciones bajo las cuales un espacio topológico (X,τ) es $T_{\frac{1}{2}}$. También presentamos la relación entre la clase de los espacios (X,τ) $T_{\frac{1}{2}}$ con otras clases de espacios topológicos.

Teorema 5.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X,τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) $\{x\}\in\tau$ o $\{x\}=cl(\{x\})$ para todo $x\in X$.

Demostración: 1) implica 2) Sean (X,τ) un $T_{\frac{1}{2}}$ y $x\in X$.

Si $\{x\}$ no es un conjunto cerrado, entonces $X\setminus\{x\}$ no es un conjunto abierto y como X es el único conjunto abierto tal que $X\setminus\{x\}\subset X$, entonces $cl(X\setminus\{x\})\subset X$. Así $X\setminus\{x\}$ es un conjunto g- cerrado y como (X,τ) es $T_{\frac{1}{2}}$ de la Definición tenemos que $X\setminus\{x\}$ es un conjunto cerrado es decir $\{x\}$ es un conjunto abierto.

Con lo que concluimos que para todo $x\in X$

$\{x\}$ es un conjunto abierto o $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

2) implica 1) Supongamos que $\{x\}$ es un conjunto abierto o un conjunto cerrado para todo $x\in X$.

Sean $A\subset X$ es un conjunto g-cerrado y $x\in cl(A)$. Como $\{x\}$ es un conjunto abierto o un conjunto cerrado, entonces tenemos los siguientes casos.

Si $\{x\}$ es un conjunto abierto y $x\in cl(A)$, entonces $\{x\}\cap A\neq\emptyset$ lo cual implica que $x\in A$.

Si $\{x\}$ es un conjunto cerrado, entonces $cl(\{x\})=\{x\}$ y como $x\in cl(A)$ del Teorema 3.5 se tiene que $cl(\{x\})\cap A\neq\emptyset$ es decir $\{x\}\cap A\neq\emptyset$ lo cual implica que $x\in A$.

En cualquiera de los casos tenemos que $x \in cl(A)$ implica que $x \in A$. Por lo tanto $A = cl(A)$.

Concluimos que,

$$(X, \tau) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

□

El siguiente resultado es mencionado en [**2**].

Teorema 5.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) Para todo conjunto finito $A \subset X$, $X \setminus A$ es localmente cerrado.

Demostración: 1) implica 2) Sea (X, τ) $T_{\frac{1}{2}}$ y $A \subset X$ un conjunto finito.

Sea $A = \{x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_n\}$ aplicando el Teorema 5.1 sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{x_j\} \in \tau$ para $j = 1, ..., i$ y $\{x_j\} = cl(\{x_j\})$ para $j = i + 1, ..., n$.

Sean $B = \{x_1, ..., x_i\}$ y $C = \{x_{i+1}, ..., x_n\}$ es claro que $A = B \cup C$, $B \in \tau$, $C = cl(C)$ de donde $X \setminus C \in \tau$, $X \setminus B = cl(X \setminus B)$ y $X \setminus A = (X \setminus B) \cap (X \setminus C)$.

Por lo tanto $X \setminus A$ es localmente cerrado.

2) implica 1) Supongamos que para todo conjunto finito $A \subset X$, $X \setminus A$ es localmente cerrado y $x \in X$.

Sea $A = \{x\}$, entonces $X \setminus A = X \setminus \{x\}$ es localmente cerrado de donde aplicando el Teorema 2.11 existe $U \in \tau$ tal que $X \setminus A = U \cap cl(X \setminus A)$.

Observemos que $cl(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{x\}$ o $cl(X \setminus \{x\}) = X$.

Si $cl(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{x\}$, entonces $\{x\} \in \tau$.

Si $cl(X \setminus \{x\}) = X$, entonces $X \setminus \{x\} = U$, lo cual implica que $cl(\{x\}) = \{x\}$.

Por lo tanto aplicando el Teorema 5.1

$$(X, \tau) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

□

De los Teoremas 5.1 y 5.2 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.3. *(X, τ) es un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) Para todo $x \in X$, $\{x\} \in \tau$ o $cl(\{x\}) = \{x\}$.
(3) Para todo conjunto finito $A \subset X$, $X \setminus A$ es localmente cerrado.

De la Definición 2.8 y Teorema 5.1 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.4. *(X, τ) es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$ si y sólo si (X, τ) es T_D y se satisface alguna de las siguiente condiciones*

(1) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado.
(2) (X, τ) es un espacio topológico R_0.
(3) $ker(F) = F$ para todo $F \subset X$ tal que $F = cl(F)$.
(4) $cl(\{x\}) \subset ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.
(5) $cl(\{x\}) = ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.
(6) $I(x) = cl(\{x\})$ para todo $x \in X$.

(7) *$I(x) = ker(\{x\})$ para todo $x \in X$.*
(8) *Para todo $x, y \in X$ tales que $cl(\{x\}) \cap cl(\{y\}) \neq \emptyset$ implica $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$.*
(9) *Para todo $x, y \in X$ tales que $ker(\{x\}) \cap ker(\{y\}) \neq \emptyset$ implica $ker(\{x\}) = ker(\{y\})$.*

De la Definición 2.5 y Teorema 5.1 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.5. *Si (X, τ) es un espacio topológico puerta, entonces (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.*

La siguiente definición que aparece en [**1**] nos permite dar una equivalencia más a ser un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$.

Definición 5.6. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces*
(1) *A es un Λ conjunto si $A = ker(A)$.*
(2) *A es un conjunto λ cerrado si existen un Λ conjunto $L \subset X$ y un conjunto cerrado $F \subset X$ tales que*
$$A = L \cap F.$$

Lema 5.7. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*
(1) *A es un conjunto λ cerrado.*
(2) *$A = ker(A) \cap cl(A)$.*

Teorema 5.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*
(1) *(X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.*
(2) *Todo conjunto $A \subset X$ es un conjunto λ cerrado.*

Demostración: 1) implica 2) Sean (X, τ) un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$ y $A \subset X$.

Como (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$, entonces del Teorema 5.1 $\{x\}$ es un conjunto abierto o cerrado para todo $x \in X$, de donde $X \setminus \{x\}$ es un conjunto abierto o cerrado para todo $x \in X$.

Definiendo
$$L = \cap\{X \setminus \{x\} : \{x\} = cl(\{x\}) \text{ y } x \notin A\} \text{ y } F = \cap\{X \setminus \{x\} : \{x\} \in \tau \text{ y } x \notin A\}$$
es claro que L es un Λ-conjunto, F es un conjunto cerrado y $A = \lambda \cap F$.

Por lo tanto A es un λ conjunto cerrado.

2) implica 1) Sea $x \in X$. Si $\{x\}$ no es un conjunto abierto, entonces $X \setminus \{x\}$ no es un conjunto cerrado, entonces $X \setminus \{x\}$ es un conjunto Λ y como X es el único conjunto abierto que contiene a $X \setminus \{x\}$ se sigue que $X \setminus \{x\}$ es un conjunto abierto lo cual implica que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

Por lo tanto
$$(X, \tau) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

□

Corolario 5.9. *Sea (X, τ) es un espacio topológico, entonces. Las siguientes condiciones son equivalentes*
(1) *(X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.*
(2) *Todo conjunto g- cerrado $A \subset X$ es un conjunto localmente cerrado.*

La siguiente definición que aparece en [**11**] nos permite dar una equivalencia más a ser un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$.

Definición 5.10. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces*

(1) $A^{\nu} = \cup\{F \subset A : F = cl(F)\}$.
(2) A es un ν conjunto si $A = A^{\nu}$.
(3) A es un g-ν conjunto si $ker(X \setminus A) \subset F$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $(X \setminus A) \subset F$.

Lema 5.11. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$, entonces*

$$\{x\} \in \tau \text{ o } \{x\} \text{ es un g-}\nu \text{ conjunto.}$$

Teorema 5.12. *Sea (X,τ) un espacio topológico las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X,τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) Todo g-ν conjunto $A \subset X$ es un ν conjunto.

Demostración: 1) implica 2) Sea (X,τ) $T_{\frac{1}{2}}$ y supongamos que existe un g-ν conjunto $B \subset X$ tal que B no es un ν conjunto.

Como B no es un ν conjunto, entonces existe $x \in B \setminus B^{\nu}$ lo cual implica que $x \notin B^{\nu}$ de donde se sigue que $\{x\}$ no es un conjunto cerrado y como B es g-ν conjunto y $x \notin B^{\nu}$, entonces $\{x\}$ no es un conjunto abierto.

Por lo tanto existe $x \in X$ tal que $\{x\}$ no es un conjunto cerrado ni abierto de donde aplicando el Teorema 5.1 se tiene que (X,τ) no es un $T_{\frac{1}{2}}$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto

$$\text{todo g-}\nu \text{ conjunto } A \subset X \text{ es un } \nu \text{ conjunto.}$$

2) implica 1) Supongamos que todo g-ν conjunto $A \subset X$ es un ν conjunto y que (X,τ) no es un $T_{\frac{1}{2}}$.

Como (X,τ) no es un $T_{\frac{1}{2}}$, entonces por el Teorema 5.1 existe $x \in X$ tal que $\{x\}$ no es un conjunto abierto ni cerrado.

Como $\{x\}$ no es un conjunto abierto Del Lema 5.11 se sigue que $\{x\}$ es un g-ν conjunto. De donde por hipótesis $\{x\}$ es un ν conjunto pero como $\{x\}$ no es un conjunto cerrado, entonces $\{x\}^{\nu} = \emptyset$. De donde se sigue que $\{x\}$ no es un ν conjunto lo cual es una contradicción.

Por lo tanto

$$(X,\tau) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

□

Teorema 5.13. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X,τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) Todo conjunto θ-g cerrado $A \subset X$ es un conjunto cerrado.

Demostración: 1) implica 2) Sean (X,τ) $T_{\frac{1}{2}}$ y $A \subset X$ un conjunto θ- g cerrado.

Como A es un conjunto θ-g cerrado, del Lema 3.11 A es un conjunto g-cerrado y como (X,τ) es $T_{\frac{1}{2}}$ de la Definición 4.1 se sigue que A es un conjunto cerrado.

2) implica 1) Sea $x \in X$. Si $\{x\}$ no es un conjunto cerrado, entonces $B = X \setminus \{x\}$ no es un conjunto abierto y dado que X es el único conjunto abierto que contiene a B se sigue que B es un conjunto θ- g cerrado lo cual implica que B es un conjunto cerrado, de donde $\{x\}$ es un conjunto abierto.

Por lo tanto

$$(X, \tau) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

□

Del Lema 2.7 y el Teorema 5.1 tenemos los siguientes 2 resultados.

Teorema 5.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico de $Alexandroff$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) $X = M \cup m$.

Corolario 5.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico de $Alexandroff$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) (X, τ) es submaximal.

Demostración: Es inmediato de los Teoremas 2.14 y 5.14 . □

La cl_g que aparece en [**6**] nos permite dar una equivalencia más a ser un espacio $T_{\frac{1}{2}}$.

Como vimos en la **Observación 1**, dado (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, si A es un conjunto cerrado, entonces

$$cl_g(A) = A$$

de donde se sigue que si $O \in \tau$, entonces O^c es un conjunto cerrado lo cual implica que $cl_g(O^c) = O^c$.

Por lo tanto si consideramos la familia

$$\tau^* = \{U \subset X : cl_g(U^c) = U^c\}$$

entonces para todo $O \in \tau$ se tiene que $O \in \tau^*$.

Con lo cual tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces*

$$\tau \subset \tau^*.$$

Teorema 5.17. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) $\tau = \tau^*$.

Demostración: 1) implica 2) Sea (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.

Del Lema 5.16 se tiene que $\tau \subset \tau^*$ y de la hipótesis se tiene que todo conjunto g-cerrado es cerrado de donde se sigue que $\tau^* \subset \tau$.

Por lo tanto

$$\tau = \tau^*.$$

2) implica 1) Sean $\tau = \tau^*$ y $A \subset X$ un conjunto g-cerrado.

Como $A \subset X$ es un conjunto g-cerrado, entonces de la Definición 3.1 $cl_g(A) = A$ y de la hipótesis se sigue que $cl(A) = A$ lo cual implica A es un conjunto cerrado.

Por lo tanto

$$(X, \tau) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

□

Teorema 5.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.

(2) Todo conjunto g-T cerrado $A \subset X$ es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACIÓN: 1) implica 2) Sean (X, τ) $T_{\frac{1}{2}}$ y $A \subset X$ un conjunto g- T cerrado.

Como A es un conjunto g-T- cerrado, del Lema 3.11 A es un conjunto g-cerrado y como (X, τ) $T_{\frac{1}{2}}$ se sigue que A es un conjunto cerrado.

2) implica 1) Sea $x \in X$. Si $\{x\}$ no es un conjunto cerrado, entonces $B = X \setminus \{x\}$ no es un conjunto abierto y dado que X es el único conjunto abierto que contiene a B se sigue que B es un conjunto g-T cerrado. Implica que B es un conjunto cerrado, de donde $\{x\}$ es un conjunto abierto.

Por lo tanto

$$(X, \tau) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

□

Teorema 5.19. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces*

(1) Si (X, τ) es T_1, entonces (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$.

(2) Si (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$, entonces (X, τ) es T_D.

DEMOSTRACIÓN: 1) Sean (X, τ) es T_1 y $x \in X$.

Como (X, τ) es T_1 y $x \in X$, entonces $cl(\{x\}) = \{x\}$.

Por lo tanto

$$(X, \tau) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

2) Como (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$, entonces del Teorema 5.1 $\{x\}$ es un conjunto abierto o un conjunto cerrado, entonces

$$\{x\} = \{x\} \cap X \text{ o } \{x\} = cl(\{x\}) \cap X.$$

Por lo tanto

$$(X, \tau) \text{ es } T_D.$$

□

De los Teoremas 2.9 y 5.19 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.20. *Sea (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$. Entonces (X, τ) es T_0.*

Pero si (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$ no necesariamente (X, τ) es T_1 y si (X, τ) es T_D no necesariamente es (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$ como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5. Sea

$$X = \{a, b, c, d\} \text{ y } \tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}.$$

Entonces (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$ pero no T_1 dado que $\{a\}$ no es conjunto cerrado.

Sea

$$X = \{a, b, c\} \text{ y } \tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}.$$

Entonces (X, τ) no es $T_{\frac{1}{2}}$ ya que $\{b\}$ no es un conjunto abierto ni cerrado pero (X, τ) es T_D y por lo tanto también es un espacio T_0.

Sin embargo, si (X, τ) es simétrico tenemos que estas afirmaciones son equivalentes como nos lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 5.21. *Sea (X, τ) un espacio topológico simétrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) *es* T_1.
(2) (X, τ) *es* $T_{\frac{1}{2}}$.
(3) (X, τ) *es* T_D.
(4) (X, τ) *es* T_0.

Demostración: 1) implica 2) y 2) implica 3) se sigue del Teorema 5.19.

3) implica 4) Se sigue del Corolario 5.20.

4) implica 1) Sea $x, y \in X$ con $x \neq y$.

Como (X, τ) es un espacio topológico T_0 y $x, y \in X$ con $x \neq y$ sin perdida de generalidad podemos suponer que existe $O \in \tau$ tal que $x \in O$ y $y \notin O$ lo cual implica que $x \notin cl(\{y\})$ y dado que (X, τ) es simétrico, entonces de la Definición 2.5 $y \notin cl(\{x\})$ lo cual implica que existe $O_1 \in \tau$ tal que $y \in O_1$ y $x \notin O_1$.

Por lo tanto

$$(X, \tau) \text{ es } T_1.$$

□

Los siguientes resultados se siguen de los Teoremas 2.9, 3.7 y 5.21.

Corolario 5.22. *Sea (X, τ) un espacio topológico tal que $\{x\}$ es un conjunto g-cerrado para todo $x \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) *es* T_1.
(2) (X, τ) *es* $T_{\frac{1}{2}}$.
(3) (X, τ) *es* T_D.
(4) (X, τ) *es* T_0.

Corolario 5.23. *Sea (X, τ) un espacio topológico tal que $U = \cup\{F \subset U : F = cl(F)\}$ para todo $U \in \tau$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) *es* T_1.
(2) (X, τ) *es* $T_{\frac{1}{2}}$.
(3) (X, τ) *es* T_D.
(4) (X, τ) *es* T_0.

Corolario 5.24. *Sea (X, τ) un espacio topológico tal que $ker(F) = F$ para todo $F \subset X$ tal que $F = cl(F)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) *es* T_1.
(2) (X, τ) *es* $T_{\frac{1}{2}}$.
(3) (X, τ) *es* T_D.
(4) (X, τ) *es* T_0.

De los teoremas 3.2, 5.19 y Corolario 5.20 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.25. *Sea (X, τ) localmente indiscreto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) *es* T_2.
(2) (X, τ) *es* T_1.
(3) (X, τ) *es* $T_{\frac{1}{2}}$.
(4) (X, τ) *es* T_D.
(5) (X, τ) *es* T_0.

DEMOSTRACIÓN: 5) implica 1) Sea $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como (X, τ) es T_0 sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $O \in \tau$ tal que $x \in O$ y $y \notin O$ y dado que (X, τ) es localmente indiscreto, entonces de la Definición 2.5 se sigue que $O = cl(O)$ de donde $X \setminus O = X \setminus cl(O)$ y $X \setminus O \in \tau$.

Es claro que $x \notin X \setminus O$ y $y \in X \setminus O$ y $O \cap (X \setminus O) = \emptyset$.

Por lo tanto

$$(X, \tau) \text{ es } T_2.$$

□

6. Propiedades de espacios $T_{\frac{1}{2}}$

En esta sección presentamos algunas propiedades que satisfacen los espacios topológicos $T_{\frac{1}{2}}$. Los resultados aquí presentados aparecen en general en [**5**].

Teorema 6.1. *Sea (X, τ) $T_{\frac{1}{2}}$ y $Y \subset X$. Entonces (Y, τ_Y) es $T_{\frac{1}{2}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in Y$ como $Y \subset X$, entonces $x \in X$ y como (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$ del Teorema 5.1 se tiene que

$$\{x\} \in \tau \text{ o } cl(\{x\}) = \{x\}.$$

Si $\{x\} \in \tau$, entonces $\{x\} \cap Y \in \tau_Y$ y como $\{x\} = \{x\} \cap Y$, entonces $\{x\} \in \tau_Y$.

Si $cl(\{x\}) = \{x\}$, entonces $cl(\{x\}) \cap Y = \{x\} \cap Y = \{x\}$.

Por lo tanto

(Y, τ_Y) es $T_{\frac{1}{2}}$. □

Teorema 6.2. *Sean (X, τ) y (Y, τ_1) espacios topológicos y $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ un homeomorfismo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) (X, τ) *es* $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) (Y, τ_1) *es* $T_{\frac{1}{2}}$.

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del Corolario 3.14 y de que f es homeomorfismo. □

En los siguientes resultados se considera el Producto Tychonoff con cardinalidad de I mayor o igual a ω.

Teorema 6.3. *Sea $X = \times\{X_i : i \in I\}$ tal que X es $T_{\frac{1}{2}}$, entonces X_i es $T_{\frac{1}{2}}$ para todo $i \in I$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $i \in I$ existe un subespacio Y_i de X tal que Y_i es homeomorfo a X_i. De donde aplicando los Teoremas 3.12 y 2.14 tenemos el resultado deseado. □

Sin embargo el producto de espacios $T_{\frac{1}{2}}$ no necesariamente es un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Sean

$$X = \{a, b\} \text{ y } \tau = \{\emptyset, \{a\}, X\},$$

entonces (X, τ) es $T_{\frac{1}{2}}$ pero $X \times X$ no es $T_{\frac{1}{2}}$ ya que el punto (a, b) no es un conjunto abierto ni cerrado en $X \times X$.

Si $X = \times\{X_i : i \in I\}$, para cada $x \in X$ existen $x_i \in X_i$ tal que, $x = \times\{x_i : i \in I\}$.

Lema 6.4. *Sea $X = \times\{X_i : i \in I\}$ un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) X es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) X es T_1.

Demostración: 1) implica 2) Sea $x \in X$. Del párrafo anterior se sigue el conjunto singular $\{x\} \subset X$ no es un conjunto abierto en la topología del producto Tychonoff y como(X, τ), es $T_{\frac{1}{2}}$ se sigue que, $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

Por lo tanto X es T_1.

$$X \text{ es } T_1.$$

2) implica 1) Es inmediato. □

Teorema 6.5. *Sea $X = \times\{X_i : i \in I\}$ un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) X es $T_{\frac{1}{2}}$.
(2) X_i es T_1 para todo $i \in I$.

Demostración: Se sigue del Teorema 6.3 y Lema 6.4. □

Teorema 6.6. *Sea (X, τ) $T_{\frac{1}{2}}$ y $\tau \subset \mu$, donde μ es otra topología sobre X, entonces (X, μ) es $T_{\frac{1}{2}}$.*

Demostración: Sea $x \in X$, entonces $\{x\} \in \tau$ o $X \setminus \{x\} \in \tau$ de donde se sigue que $\{x\} \in \mu$ o $X \setminus \{x\} \in \mu$.

Por lo tanto

$$(X, \mu) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

□

Teorema 6.7. *Sea (X_i, τ_i) $T_{\frac{1}{2}}$ para todo $i \in I$ tal que $\{\tau_i : i \in I\}$ es una familia totalmente ordenada con respecto a la inclusión, entonces $(X, \cap\{\tau_i : i \in I\})$ es $T_{\frac{1}{2}}$.*

Demostración: Sea $x \in X$ y supongamos que $\{x\} \notin \cap\{\tau_i : i \in I\}$, entonces existe $j \in I$ tal que $\{x\} \notin \tau_j$ de donde se sigue que $X \setminus \{x\} \in \tau_j$. Afirmamos que $X \setminus \{x\} \in \tau_i$ para todo $i \in I$.

Sea $i \in I$ con $i \neq j$, entonces $\tau_i \subset \tau_j$ o $\tau_j \subset \tau_i$.

Si $\tau_j \subset \tau_i$, entonces $X \setminus \{x\} \in \tau_i$.

Si $\tau_i \subset \tau_j$ y $X \setminus \{x\} \notin \tau_i$, entonces $\{x\} \in \tau_i$ de donde se sigue que $\{x\} \in \tau_j$ lo cual es una contradicción lo por lo tanto $X \setminus \{x\} \in \tau_i$.

Con lo cual concluimos que

$$(X, \cap\{\tau_i : i \in I\}) \text{ es } T_{\frac{1}{2}}.$$

□

Corolario 6.8. *Sea (X, τ) es un espacio topológico, entonces existe una topología μ en X tal que*

(1) $\tau \subset \mu$.
(2) (X, μ) es $T_{\frac{1}{2}}$.
(3) Si (X, ν) es un $T_{\frac{1}{2}}$ tal que $\tau \subset \nu \subset \mu$, entonces $\nu = \mu$.

Demostración: Sea $\mathcal{A} = \{\tau_i : i \in I\}$ la familia de todas las topologias $T_{\frac{1}{2}}$ de X más finas que τ. Dado que la topología discreta es $T_{\frac{1}{2}}$, entonces $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{B} = \{\tau_i : i \in I^*\}$ con $I^* \subset I$ un subconjunto totalmente ordenado con respecto a la inclusión. Entonces $\tau* = \cap\{\tau_i : i \in I^*\}$ es una topología de X tal que $(X, \tau*)$ es un espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$ con $\tau \subset \tau*$ lo cual implica que $\tau* \in \mathcal{A}$. Aplicando el Lema de Zorn, $\mathcal{A}$ tiene un elemento minimal μ que satisface las condiciones enunciadas. □

Agradecimientos

Agradezco encarecidamente a los árbitros su revisón exhaustiva del trabajo. Sus sugerencias y comentarios permitieron mejorar sustancialmente una primera versión del mismo.

Bibliografía

[1] Francisco G. Arenas, Julian Dontchev and Maximilian Ganster On, *On λ-sets and the dual of generalized* Topology Atlas Preprint 185 (1996) 1-9.
[2] J: Dontchev, *On Submaximal Spaces* Tamkang Journal of Mathematics Vol. 26, No 3, Autumn 1995 243-250.
[3] J. Dontchev-H. Maki *On θ-Generalizad Closed Sets* Internat. J. Math and Math. Sci. Vol.22 (1999) 239-249.
[4] W. Dunham, *Weakly Hausdorff space*, Kyungpook Math. J. Vol 15. (1975) 41-50.
[5] W. Dunham, *$T_{\frac{1}{2}}$-spaces*, Kyungpook Math. J. Vol 17. Num 2, (1977) 161-169.
[6] W. Dunham and N. Levine, *Further results on generalized closed sets in topology*, Kyungpook Math. J. Vol 20. Num 2, (1980) 169-175.
[7] W. Dunham, *A new closure operator for non T_1 topologies*, Kyungpook Math. J. Vol 22. Num 1, (1982) 55-60.
[8] Y. Gh. Gouda, M. M. El-Sharkasy, S. M. El-Sayed, New types of generalizations of θ closed sets, Journal of Progressive Research in Mathematics Vol 8 (2016) 1248-1257.
[9] M. Ibarra Contreras y A. Martínez García, *Espacios de Alexandroff*, Matemáticas y sus aplicaciones 17 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2021) 5-38.
[10] N. Levine *Generalized closed sets in topology*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 19 (1970) 89-96
[11] H. Maki, J. Umehara and K. Yamamura, *Characterizations of $T_{\frac{1}{2}}$ spaces using generalized ν-sets*, Indian J. pure appl. Math., 19(7) 634-640, July 1988.
[12] A. Martínez García, *Axiomas de separación*, Matemáticas y sus aplicaciones 20 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2023) 99-125.
[13] A. Martínez García y M. Ibarra Contreras, *Conjuntos preabiertos y algunos conceptos relacionados*, Topología y sus aplicaciones 9 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2023) 3-20.
[14] D. Rose, G. Scible and D. Walsh, *Alexandroff Spaces*, Journal of Advanced Studies in Topology, Vol. 3, No. 1, 2012, 31-43.

Correos electrónicos:
maga@fcfm.buap.mx (Armando Martínez García)

CAPÍTULO 4

Espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$

Fidel Casarrubias Segura
Universidad Nacional Autónoma de México, México

1. Introducción

La línea de Sorgenfrey es el ejemplo clásico que muestra que la propiedad de Lindelöf no siempre se preserva en productos finitos. Una pregunta natural es saber qué propiedades se le pueden adicionar a la propiedad de Lindelöf para que la combinación sea finito productiva. Una propiedad con estas características es la propiedad Σ de Nagami. La combinación de las propiedades de Lindelöf y de Nagami genera la noción de espacio Lindelöf Σ.

La clase de los espacios Lindelöf Σ es la clase más pequeña de espacios topológicos T_3 que contiene a todos los espacios compactos Hausdorff, a todos los espacios Tychonoff segundo-numerables y que es cerrada bajo imágenes continuas, subespacios cerrados y productos finitos. Esta clase de espacios contiene por ejemplo a todos los espacios σ-compactos y a todos los espacios metrizables separables (de hecho contiene a todos los espacios cósmicos), y es una clase de espacios sumamente importante en topología general, en análisis funcional y en teoría descriptiva de conjuntos.

En el artículo «Remainders of metrizable spaces and a generalization of Lindelöf Σ-spaces» ([**1**]) Arkhangel'skii demostró que para todo espacio metrizable X y toda compactación Hausdorff bX de X existe un subespacio Lindelöf Σ K del residuo $bX \setminus X$ que tiene la siguiente propiedad: para todo abierto U de $bX \setminus X$ tal que $K \subseteq U$ el complemento $(bX \setminus X) \setminus U$ es Lindelöf Σ. Arkhangel'skii les dió los nombres de espacios Charming y espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ a todos los espacios con la anterior propiedad. Para ser más precisos, un espacio X *es un espacio con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$ si posee un subespacio Lindelöf Σ para el cual el complemento de cualquier abierto que lo contiene tiene la propiedad Lindelöf Σ.

La noción de espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ es una generalización de la noción de espacio Lindelöf Σ, sin embargo, son nociones diferentes. Precisamente por esta razón es natural preguntar cuáles de las propiedades de los espacios Lindelöf Σ se preservan en los espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. En esta nota presentamos algunas de las propiedades de esta clase de espacios topológicos que fueron demostradas en [**3**]. Por ejemplo, demostramos que la clase de espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ es cerrada bajo uniones numerables, subespacios cerrados, imágenes continuas, preimágenes perfectas y que tiene propiedades de levantamiento.

Notación y terminología. Todos los espacios topológicos en esta nota se suponen espacios Tychonoff no vacíos, a menos que se diga explícitamente lo contario. Recuerde que un espacio es Tychonoff si es completamente regular y T_0.

Si X es un espacio topológico, $\tau(X)$ denota a su topología y si $A \subseteq X$, entonces $\tau(A, X) = \{U \in \tau(X) : A \subseteq U\}$. Para los elementos de X escribimos $\tau(x, X)$ en lugar de $\tau(\{x\}, X)$. El espacio $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales con su topología usual y $\mathbb{N} = \omega = \{0, 1, \ldots\}$ denota al conjunto de los números naturales y $\mathbb{N}^+ = \omega \setminus \{0\}$. Ambos conjuntos se piensan con la topología de subespacio respecto de $\mathbb{R}$. Por otro lado, como es usual ω_1 denota al primer ordinal (cardinal) no numerable.

Para cualquier espacio X denotamos por $C_p(X)$ al conjunto de todas las funciones continuas de valores reales definidas en X, dotado de la topología de subespacio respecto del producto $\mathbb{R}^X$. Por otro lado, el *peso* de X es el número cardinal $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base de } X\}$.

Todas las nociones de Topología General que no sean definidas en esta nota pueden encontrarse en [**5**]. Es valioso comentar que aquí, a diferencia de lo que ocurre en [**5**], los espacios normales y los espacios regulares no se suponen espacios T_1, los espacios compactos no se suponen Hausdorff ni los espacios Lindelöf se suponen espacios T_3. Para los hechos sobre los espacios de funciones $C_p(X)$ el lector puede consultar los libros [**1**] y [**3**].

2. Propiedades básicas de los espacios Lindelöf Σ

Definición 2.1. *Si $\mathcal{C}$ es una cubierta de un espacio topológico X, entonces* una red respecto de la cubierta $\mathcal{C}$*, o una* red módulo $\mathcal{C}$*, es una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tal que para cada $C \in \mathcal{C}$ y cada $U \in \tau(C, X)$ existe $N \in \mathcal{N}$ de modo que $C \subseteq N \subseteq U$.*

En la siguiente definición la frase «$\mathcal{C}$ es una cubierta compacta» significa que $\mathcal{C}$ es una cubierta de un espacio que está formada por subconjuntos compactos.

Definición 2.2. *Un espacio X es llamado* Lindelöf Σ *si existen una cubierta compacta $\mathcal{C}$ para X y una red numerable módulo $\mathcal{C}$.*

Para espacios Tychonoff nuestra definición de espacio Lindelöf Σ es equivalente a la forma usual de definirlos: espacios Σ en el sentido de Ju Nagami que tienen la propiedad de Lindelöf (vea [**4**]). Por consiguiente cualquier espacio Lindelöf Σ es un espacio Lindelöf.

Una red de subconjuntos de un espacio X es una colección $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que para cada abierto U de X y cada elemento $x \in U$ existe un elemento $N \in \mathcal{N}$ con la propiedad de que $x \in N \subseteq U$.

Es fácil darse cuenta que cualquier red $\mathcal{N}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es una red módulo la cubierta compacta $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}$. Por esta razón, todo espacio con una red numerable de subconjuntos es un espacio Lindelöf Σ. Por ejemplo, cualquier espacio numerable o cualquier espacio segundo-numerable es un espacio Lindelöf Σ. El *peso de red* o *peso red* del espacio X es el número cardinal $nw(X) = \min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N}$ es red de subconjuntos de $X\}$.

Todos los espacios σ-compactos también son espacios Lindelöf Σ ya que si $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, donde cada K_n es un subespacio compacto de X, entonces la colección $\mathcal{N} = \{K_n : n \in \omega\}$ es una red numerable módulo la cubierta compacta $\mathcal{C} = \{K_n : n \in \omega\}$. En particular, cualquier espacio compacto es un espacio Lindelöf Σ.

La siguiente propiedad de los espacios Lindelöf Σ la usaremos un poco más adelante.

Proposición 2.3. *Si todos los subespacios compactos de un espacio Lindelöf Σ X son conjuntos finitos, entonces el espacio X es numerable.*

Demostración: Sea $\mathcal{C}$ una cubierta compacta para X y $\mathcal{N}$ una red numerable módulo $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{N} \subseteq \{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \in [\mathcal{N}]^{<\omega}\}$ y la familia $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \in [\mathcal{N}]^{<\omega}\}$ es numerable, podemos suponer que $\mathcal{N}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Sea $\mathcal{M} = \{N \in \mathcal{N} : N$ es un conjunto finito$\}$. Para probar que X es numerable, bastará probar que $X = \bigcup_{N \in \mathcal{M}} N$.

Supongamos por el contrario que $X \neq \bigcup_{N \in \mathcal{M}} N$. Fijemos un elemento $x_0 \in X \setminus \bigcup_{N \in \mathcal{M}} N$. Como $\mathcal{C}$ es una cubierta de X, podemos fijar $C_0 \in \mathcal{C}$ de modo que $x_0 \in C_0$. Sea $\mathcal{N}_0 = \{N \in \mathcal{N} : C_0 \subseteq N\}$ y $\{N_n : n \in \omega\}$ una enumeración de $\mathcal{N}_0$. Definamos $\mathcal{N}_1 = \{\bigcap_{i=0}^{n} N_i : n \in \omega\}$. Como $\mathcal{N}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$. Además, para cada $U \in \tau(C_0, X)$ existe $N \in \mathcal{N}_1$ tal que $C_0 \subseteq N \subseteq U$.

Debido a que $x_0 \in C_0$, todos los elementos de $\mathcal{N}_1$ son conjuntos infinitos. Como C_0 es un conjunto finito, para cada $n \in \omega$, podemos seleccionar $x_n \in (\bigcap_{i=0}^{n} N_i) \setminus C_0$ de modo tal que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. Defina $K = \{x_n : n \in \omega\}$. Si $U \in \tau(C_0, X)$ es arbitrario, entonces existe $n \in \omega$ tal que $C_0 \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} N_i \subseteq U$. Entonces $K \setminus U \subseteq \{x_0, \ldots, x_n\}$. Por tanto $K \setminus U$ es un conjunto finito para cada $U \in \tau(C_0, X)$. Por consiguiente, $C_0 \cup K$ es un subconjunto compacto infinito de X, lo que es una contradicción. $\square$

3. Espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$

Definición 3.1 (Arkhangel'skii [**1**]). *Un espacio topológico X es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ si existe un subespacio Lindelöf Σ A con la propiedad de que para cada abierto $U \in \tau(A, X)$, el complemento $X \setminus U$ es también un subespacio Lindelöf Σ. Se dice que el subespacio A es un núcleo Lindelöf Σ o núcleo $L\Sigma$ de X.*

Cualquier espacio Lindelöf Σ es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ porque cualquier subespacio compacto de él es un núcleo $L\Sigma$. Así, la clase de espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ contiene a la clase $L\Sigma$ de espacios Lindelöf Σ. Sin embargo, estas dos clases no son iguales como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. *Dado un cardinal $\kappa \geqslant \omega_1$, L_κ es el conjunto $D_\kappa \cup \{\infty\}$ dotado de la siguiente topología (D_κ denota al espacio discreto de cardinalidad κ y $\infty \notin D_\kappa$):*

$$\tau = \mathcal{P}(D_k) \cup \{U \subseteq D_\kappa \cup \{\infty\} : \infty \in U \wedge |D_\kappa \setminus U| \leqslant \omega\}.$$

La pareja (L_k, τ) es un espacio Lindelöf. En este espacio todos los elementos de D_κ son puntos aislados y todos los subconjuntos numerables son cerrados. L_κ es *conocido con el nombre de extensión Lindelöf uno-puntual del espacio discreto de cardinalidad* κ*.*

Todos los espacios L_k *son espacios con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$ *porque* $A = \{\infty\}$ *es compacto y cualquier complemento* $L_k \setminus U$*, donde* $U \in \tau(\infty, L_K)$*, es numerable; por lo que todos estos complementos tiene la propiedad Lindelöf* Σ*.*

Sin embargo, ningún espacio L_k *es un espacio Lindelöf* Σ*. Para ver esto necesitamos probar una interesante propiedad de la extensión Lindelöf uno-puntual: Todos los subconjuntos compactos de* L_k *son conjuntos finitos. Efectivamente, supongamos para generar una contradicción que existe en* L_κ *un subconjunto compacto infinito* K*. Fije un conjunto infinito numerable* K_0 *contenido en* K*. Como* $K_0 \setminus \{\infty\}$ *es numerable es cerrado en* L_κ*. Por consiguiente es un subconjunto compacto del espacio discreto* D_κ*. Lo que implica que es finito, contradiciendo que* $K_0 \setminus \{\infty\}$ *es infinito numerable.*

Por lo anterior el espacio L_k *no es un espacio Lindelöf* Σ *porque todos sus subconjuntos compactos son finitos y no es numerable (vea 2.3).*

Observación 3.3. *Un espacio topológico* X *es simple si tiene a lo más un punto no aislado. El argumento usado para mostrar que* L_k *es un espacio con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$ *sirve para mostrar que cualquier espacio Lindelöf simple es un espacio con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$*.*

Aunque la clase de espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ no es igual a la clase de los espacios Lindelöf Σ conserva varias de las buenas propiedades de esta clase de espacios topológicos.

Proposición 3.4. *La clase de espacios con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$ *es cerrada bajo imágenes continuas, subespacios cerrados. Además, cualquier espacio con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$ *es un espacio Lindelöf.*

Demostración: Suponga que $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, donde X es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. Fije un núcleo Lindelöf Σ K para X. Siendo la imagen continua de un espacio Lindelöf Σ, $f[K]$ es Lindelöf Σ. Resulta que es un núcleo $L\Sigma$ para Y. Para verificarlo, suponga que V es un abierto arbitrario de Y tal que $f[K] \subseteq V$. Entonces $K \subseteq f^{\leftarrow}[V]$. Como K es un núcleo $L\Sigma$ de X, $X \setminus f^{\leftarrow}[V] = f^{\leftarrow}[Y \setminus V]$ es un espacio Lindelöf Σ. Por consiguiente, $Y \setminus V$ tiene la propiedad Lindelöf Σ. Por lo tanto, Y es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.

Sean X un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ y F un subconjunto cerrado de X. Fije un núcleo $L\Sigma$ K de X.

Si $K \cap F = \emptyset$, entonces $K \subseteq X \setminus F$ y $X \setminus F$ es un abierto de X. Como K es núcleo $L\Sigma$ de X, $F = X \setminus (X \setminus F)$ es un espacio Lindelöf Σ, por lo cual, F es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.

Si $K_1 = K \cap F \neq \emptyset$, entonces K_1 es un espacio Lindelöf Σ. Además, si V es un abierto de F tal que $K_1 \subseteq V$, entonces podemos fijar un abiertio W de X de modo que $V = F \cap W$. Entonces $K \subseteq W \cup (X \setminus F)$. Como K es núcleo $L\Sigma$ de X, $(X \setminus W) \cap F$ es un espacio Lindelöf Σ de X. $F \setminus V = (X \setminus W) \cap F$. Por lo tanto, $F \setminus V$ tiene la propiedad Lindelöf Σ. Por todo esto, podemos concluir que F es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.

Suponga ahora que X es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ y que $\mathcal{U}$ una cubierta abierta cualquiera de X. Fije un núcleo $L\Sigma$ K de X. Como K es Lindelöf, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ subcolección numerable tal que $K \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Debido a que K es un núcleo Lindelöf Σ, $X \setminus \bigcup \mathcal{V}$ es un espacio Lindelöf Σ, en particular es Lindelöf. Consecuentemente, existe $\mathcal{W}$ subcolección numerable de $\mathcal{U}$ tal que $X \setminus \bigcup \mathcal{V} \subseteq \bigcup \mathcal{W}$. Entonces $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$ para X. Por lo tanto, X es un espacio Lindelöf. □

Desafortunadamente el producto de espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ no conserva esta propiedad. Necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.5. *Todo subespacio Lindelöf Σ de L_κ es numerable.*

Demostración: Como todos los subconjuntos compactos de L_κ son finitos, si Y es un subespacio Lindelöf Σ de L_κ, entonces todos los subespacios compactos de Y también son finitos. Por 2.3, Y es numerable. □

Ejemplo 3.6. *Sea κ un cardinal $\geqslant \omega_1$. El producto $Y = L_\kappa \times L_\kappa$ no es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.*

Suponga para generar una contradicción que sí existe un núcleo $L\Sigma$ en Y, digamos K. Sea $\pi_1 : L_\kappa \times L_\kappa \to L_\kappa$ la proyección de Y al primer factor. Como la imagen continua de espacios Lindelöf Σ es un espacio Lindelöf Σ, $\pi_1[K]$ es un subespacio Lindelöf Σ de L_κ. Por consiguiente es numerable. Fije $y \in L_\kappa \setminus \pi_1[K]$ y defina $U = Y \setminus (\{y\} \times L_\kappa)$. Claramente, $K \subseteq U$ y U es abierto en Y. Note ahora que el complemento $Y \setminus U$ de U es el espacio $\{y\} \times L_\kappa$ el cual es homeomorfo a L_κ. Por lo tanto, $Y \setminus U$ no es un espacio Lindelöf Σ, lo que contradice que K es un núcleo Lindelöf Σ de Y.

Aunque el cuadrado de L_κ no es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ (cuando $\kappa \geqslant \omega_1$), si multiplicamos a L_κ por un espacio Lindelöf Σ X, entonces sí podemos garantizar que la estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ prevalece.

Proposición 3.7. *Para cada $\kappa \geqslant \omega_1$ y cada espacio X Lindelöf Σ, $L_\kappa \times X$ es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.*

Demostración: El subespacio $Z = \{\infty\} \times X$ de $L_\kappa \times X$ es homeomorfo a X y por ello es Lindelöf Σ. Resulta que Z es un núcleo $L\Sigma$ de $L_\kappa \times X$. Para verificarlo considere cualquier abierto W de $L_\kappa \times X$ tal que $Z \subseteq W$. Como Z es Lindelöf, existe una colección numerable de abiertos básicos $\{U_n \times V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $L_\kappa \times X$ tal que $Z \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U_n \times V_n) \subseteq W$. Para cada n, U_n es un abierto de L_κ que contiene a ∞, entonces $|L_\kappa \setminus U_n| \leqslant \omega$ para cada n. Por consiguiente, $|L_\kappa \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n| \leqslant \omega$. Sea $U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Entonces $(L_\kappa \setminus U)$ es un subespacio discreto numerable de L_κ, de lo cual $(L_\kappa \setminus U) \times X$ Lindelöf Σ porque es la unión numerable de subespacios homeomorfos a X (el cual es Lindelöf Σ). Observe ahora que $(L_\kappa \times X) \setminus W$ es un subespacio cerrado de $(L_\kappa \setminus U) \times X$, de donde $(L_\kappa \times X) \setminus W$ es Lindelöf Σ. □

El resultado anterior sigue siendo válido si sustituimos a L_κ por cualquier espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ pidiendo que X sea σ-compacto. Primero demostraremos el resultado para espacios compactos.

Recuerde que un mapeo perfecto es una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ que es una función cerrada y para la cual $f^{\leftarrow}[\{y\}]$ es un subespacio compacto de X para toda $y \in Y$.

Lema 3.8. *Si $f : X \to Y$ es un mapeo perfecto, entonces X es homeomorfo a un subespacio cerrado K del producto $Y \times \beta X$. Más aún, si $\pi_Y : \beta X \times Y \to Y$ es la proyección al segundo factor, entonces $\pi_Y[K] = Y$.*

Demostración: Sea $i : X \to \beta X$ la inmersión de X en βX. Identificando a X con $i[X]$ podemos suponer que $X \subseteq \beta X$ y que $i : X \to \beta X$ es la función inclusión.

El producto diagonal $h = i\Delta f : X \to \beta X \times Y$ es una función continua e inyectiva porque $\{i, f\}$ separa los puntos de X ya que i es inyectiva. Resulta que $h : X \to h[X]$ es un homeomorfismo y además $h[X]$ es un subespacio cerrado de $\beta X \times Y$. Efectivamente, para ver que $h : X \to h[X]$ es un homeomorfismo basta ver que h mapea subconjuntos cerrados de X en cerrados de $h[X]$. Sea entonces F un cerrado en X. Existe un conjunto cerrado G en βX tal que $F = G \cap X$, lo que implica que $h[X] \setminus h[F] = ((\beta X \setminus G) \times Y) \cap h[X]$, de donde $h[X] \setminus h[F]$ es un abierto en $h[X]$ y por ello $h[F]$ es cerrado en $h[X]$. Por lo tanto, $h : X \to h[X]$ es un homeomorfismo.

Sea $K = h[X]$. Puesto que el mapeo f es suprayectivo, $\pi_Y[K] = Y$. Para concluir demostraremos que K es cerrado en $\beta X \times Y$. Para ello, sea $(z, y) \in (\beta X \times Y) \setminus K$ un elemento arbitrario. Entonces $z \notin f^{\leftarrow}[\{y\}]$. Puesto que $f^{\leftarrow}[\{y\}]$ es compacto, se sigue que es cerrado en βX. Debido a que βX es un espacio regular, existen abiertos U y V de βX ajenos entre sí tales que $z \in U$ y $f^{\leftarrow}[\{y\}] \subseteq V$. Puesto que f es una función cerrada, el subconjunto $f[X \setminus V] = f[X \setminus (X \cap V)]$ es cerrado en Y. Luego $Y \setminus f[X \setminus V]$ es un abierto de Y. Como $f^{\leftarrow}[\{y\}] \subseteq V$, tenemos que $y \notin f[X \setminus V]$. Por tanto, $y \in Y \setminus f[X \setminus V]$. Así, $U \times [Y \setminus f[X \setminus V]]$ es una vecindad abierta de (z, y) en $\beta X \times Y$. Verifiquemos que $U \times [Y \setminus f[X \setminus V]] \cap K = \emptyset$. Sea $(a, b) \in U \times [Y \setminus f[X \setminus V]]$ un elemento arbitrario. Si $a \in \beta X \setminus X$, entonces $(a, b) \notin K$. Si $a \in X$, entonces $f(a) \in f[U \cap X] \subseteq f[X \setminus V]$. Luego, $f(a) \neq b \in Y \setminus f[X \setminus V]$. Por lo que $(a, b) \notin K$. Por lo tanto, $U \times [Y \setminus f[X \setminus V]] \cap K = \emptyset$. $\square$

Proposición 3.9.

(1) Si X es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ y K es un espacio compacto, entonces $X \times K$ es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.

(2) La preimagen perfecta de un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ tiene la misma propiedad.

Demostración: (1) Considere un núcleo $L\Sigma$ K_1 de X. Como K es compacto, es Lindelöf Σ. Entonces $K_1 \times K$ es un subespacio Lindelöf Σ de $X \times K$. Verifiquemos que $K_1 \times K$ es un núcleo $L\Sigma$ para $X \times K$. Sea W un abierto arbitrario de $X \times K$ tal que $K_1 \times K \subseteq W$. Entonces $K_1 \subseteq \pi_X[W]$ y $\pi_X[W]$ es un abierto de X, donde $\pi_X : X \times K \to X$ es la proyección al primer factor. Como K_1 es un núcleo $L\Sigma$ de X, $X \setminus \pi_X[W]$ es un subespacio Lindelöf Σ. Entonces $(X \setminus \pi_X[W]) \times K$ es un subespacio Lindelöf Σ de $X \times K$. Note ahora que $(X \times K) \setminus W \subseteq [X \setminus \pi_X[W]] \times K$ y que $(X \times K) \setminus W$ es un subconjunto cerrado. Por lo tanto, $(X \times K) \setminus W$ es un subespacio Lindelöf Σ. Consecuentemente, $K_1 \times K$ es un núcleo $L\Sigma$ para $X \times K$.

(2) Sea $f : X \to Y$ una mapeo perfecto, donde Y es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. Por el lema anterior, X es homeomorfo a un subespacio cerrado K del producto $Y \times \beta X$. Por el inciso (1) $Y \times \beta X$ es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ y por 3.4 K es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. Por lo tanto, X también lo es. $\square$

Proposición 3.10. *Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. Entonces la suma topológica (ajena) $X = \bigoplus\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.*

DEMOSTRACIÓN: Como cada X_n es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$, podemos fijar un núcleo $L\Sigma$ Z_n de X_n. Defina $Z = \bigcup\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces Z es un espacio Lindelöf Σ. Considere ahora un abierto cualquiera U de X que contenga a Z. Note que $Z_n \subset U_n = X_n \cap U$ y que U_n es un abierto de X_n que contiene a Z_n. Como cada Z_n es un núcleo $L\Sigma$ de X_n se sigue que $X_n \setminus U_n$ es un subespacio $L\Sigma$ de X_n.

Ahora observe que $X \setminus U = \bigcup\{X_n \setminus U_n : n \in \mathbb{N}\}$, de donde $X \setminus U$ tiene la propiedad Lindelöf Σ. $\square$

Corolario 3.11. *La unión numerable de subespacios con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$ *de un espacio* X *es un subespacio con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subespacios de un espacio X. Suponga que cada subespacio X_n es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. Considere a la función $f : \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(X_n \times \{n\}) \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definida por $f(x,n) = x$. Esta función es continua y suprayectiva. Por 3.10 y 3.4, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un subespacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. $\square$

Corolario 3.12. *Cualquier subconjunto* F_σ *de un espacio con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$ *es un espacio con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$.

Proposición 3.13. *Si* X *es un espacio con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$ *y* Z *es un espacio* σ*-compacto, entonces* $X \times Z$ *es un espacio con estructura* $(L\Sigma, L\Sigma)$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos a βZ la compactación de Stone-Čech de Z. Entonces la proyección $\pi_1 : X \times \beta Z \to X$ al primer factor es una función perfecta. Por 3.4, se tiene que $X \times \beta Z$ un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$.

Como Z es σ-compacto, podemos escribir a Z en la forma $Z = \bigcup\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde cada K_n es un subespacio compacto de Z. Resulta que $X \times K_n$ es un subespacio cerrado de $X \times \beta Z$, por consiguiente $X \times K_n$ es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ para cada n.

Para finalizar, dése cuenta que como $X \times Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \times K_n$, por 3.11 este espacio es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. $\square$

Una importante propiedad de los espacios Lindelöf Σ es que son espacios estables. Nuestro propósito ahora es probar que los espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ que tienen un núcleo compacto son espacios estables. Para esto necesitamos un lema previo y unas definiciones.

Definición 3.14. *Sean* X *un espacio topológico y* $Z \subseteq X$.

(1) *Diremos que una colección* $\mathcal{U} \subseteq \tau(Z, X)$ *es una base de* Z *en* X *si para cualquier* $W \in \tau(Z, X)$ *existe* $U \in \mathcal{U}$ *tal que* $Z \subseteq U \subseteq W$.
(2) *El carácter de* Z *en* X *es el número cardinal*

$$\chi(Z, X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \tau(Z, X) \text{ es una base de } Z \text{ en } X\}.$$

Lema 3.15. *Sean* $\kappa \geqslant \omega$ *y* X *un espacio topológico con* $w(X) \leqslant \kappa$. *Si* $K \subset X$ *es compacto, entonces* $\chi(K, X) \leqslant \kappa$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una base para X de cardinalidad $\leqslant \kappa$. Sea $\mathcal{B}_K$ la familia de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ que cubren a K. Es claro que $|\mathcal{B}_K| \leqslant |[\mathcal{B}]^\omega| = |\mathcal{B}| \leqslant \kappa$. Entonces $|\mathcal{B}_K| \leqslant \kappa$.

Veamos que la familia $\mathcal{B}_K$ es una base de K en X. En efecto, sea $U \in \tau(K,X)$ un elemento cualquiera. Para cada $x \in K$ sea U_x un elemento de $\mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subset U$. Defina $V_K = \bigcup\{U_x : x \in K\}$. Entonces $V_K \subset U$ y existe $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \subset V_K$. Claramente $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \in \mathcal{B}_K$, lo que muestra que $\mathcal{B}_K$ es una base de K en X. Por lo tanto, $\chi(K,X) \leqslant \kappa$. $\square$

Una *condensación* es cualquier función continua biyectiva $f : X \to Y$. El *i-peso* de un espacio topológico X es el número cardinal

$$iw(X) = \text{mín}\{w(Z) : \text{ existe una condensación } f : X \to Z\}.$$

Como $\mathrm{id}_X : (X,\tau) \to (X,\tau)$ es una condensación, siempre se tiene que $iw(X) \leqslant w(X)$. Cuando X es un espacio compacto, $iw(X) = w(X)$ porque toda condensación con dominio compacto es un homeomorfismo (recuerde que estamos suponiendo que todos los espacios son Tychonoff). De hecho se sabe que $iw(X) \leqslant nw(X)$ para todo espacio Tychonoff X.

Dado un cardinal infinito κ, diremos que un espacio topológico X es κ-estable si para cualquier imagen continua Y de X, si $iw(Y) \leqslant \kappa$, entonces $nw(Y) \leqslant \kappa$. Un espacio X es *estable* si y sólo si X es un espacio κ-estable para cualquier cardinal infinito κ.

Es sencillo probar que un espacio Tychonoff X es estable si y sólo si $iw(Y) = nw(Y)$ para cualquier imagen (Tychonoff) de X. En particular, si X es un espacio estable, entonces $iw(X) = nw(X)$.

Proposición 3.16. *Sea X un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. Si X tiene un núcleo $L\Sigma$ compacto, entonces X es un espacio estable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea K un núcleo compacto de X. Sean $f : X \to Y$ una función continua suprayectiva y $g : Y \to Z$ una condensación donde $w(Z) \leqslant \kappa$. Como Y es imagen continua de X, Y es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$. Más aún$f[K]$ es un núcleo $L\Sigma$ que es compacto.

Es claro que $K^* = g(f(K)) \subset Z$ es un subconjunto compacto y por el lema 3.15, $\chi(K^*, Z) \leqslant \kappa$. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \leqslant \kappa\}$ una base de K^* en Z. Defina $V_\alpha = g^{-1}(U_\alpha)$ y considere la familia $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \leqslant \kappa\}$, entonces $\cap\mathcal{V} = f(K)$. Si definimos a los subespacios $Y_\alpha = Y \setminus V_\alpha$, entonces: $Y = \bigcup_{\alpha \leqslant \kappa}(Y_\alpha \cup f(K))$. Observe que todo Y_α es un espacio Lindelöf Σ, y como $f(K)$ es compacto, cada Y_α y $f(K)$ tiene i-peso $\leqslant \kappa$. De esta forma $nw(Y) \leqslant \kappa$ y por ello X es κ-estable. Como κ es arbitrario, se sigue que X es estable. $\square$

Como ya hemos comentado, si X es un espacio estable, entonces $iw(X) = nw(X)$. Tenemos entonces el siguiente:

Corolario 3.17. *Si X es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ y con núcleo $L\Sigma$ compacto, entonces $iw(X) = nw(X)$.*

En particular, para todo espacio Lindelöf Σ X se tiene que $iw(X) = nw(X)$.

Corolario 3.18. *Para todo cardinal infinito κ, L_κ es un espacio estable.*

Sea κ un cardinal infinito. Un espacio topológico X es llamado *κ-monolítico* si $nw(\overline{A}) \leqslant \kappa$ para cada $A \subseteq X$ con $|A| \leqslant \kappa$. El espacio X es llamado *monolítico* si X es κ-monolítico para cualquier κ. Arhangel'skii probó que $C_p(X)$ es monolítico si y sólo si X es un espacio estable. Como los espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ con núcleo compacto son espacios estables, llegamos al siguiente interesante resultado.

Corolario 3.19. *Si X es un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ que tiene núcleo compacto, entonces $C_p(X)$ es un espacio monolítico.*

Corolario 3.20. *Para todo cardinal infinito κ, $C_p(L_\kappa)$ es un espacio monolítico.*

Si X es compacto y Y un espacio de Hausdorff, entonces cualquier condensación $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, por lo que X y Y tienen las mismas propiedades topológicas. Pero, ¿sucederá lo mismo si X no es compacto? Se intuye que la respuesta es negativa. Por ejemplo cualquier espacio topológico X es imagen bajo una condesación (la función identidad) del espacio discreto $(X, \mathcal{P}(X))$. El espacio original X y $(X, \mathcal{P}(X))$ pueden no tener las mismas propiedades. Por ejemplo, X puede ser un espacio compacto infinito y $(X, \mathcal{P}(X))$ al ser un discreto infinito no es un espacio compacto. Otro ejemplo es el siguiente: la recta real $\mathbb{R}$ es imagen continua bajo la función identidad de la línea de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$; sabemos que $\mathbb{R}$ es conexo pero $\mathbb{R}_S$ no lo es.

En estos dos ejemplos la topología del espacio contradominio está contenida en la topología del espacio dominio, podemos entonces pensar que ni la conexidad de $\mathbb{R}$ ni la compacidad de X «son levantadas» de la topología «pequeña» a la topología «grande».

En general, se dice que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es levantada por condensaciones si cada vez que $f : X \to Y$ sea un condensación y Y sea un espacio que tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces el espacio X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Como hemos observado, si el dominio X de una condensación f es compacto y el contradominio Y es Hausdorff, entonces cualquier propiedad topológica que posea Y se puede levantar a X (porque f es un homeomorfismo). Resulta entonces muy natural poner en X una propiedad que sea cercana a la compacidad y preguntarnos cuáles propiedades son levantadas por condensaciones con dominio X. Una propiedad cercana a la compacidad es la propiedad de Lindelöf Σ.

Tkachuk probó en [**6**, proposicion 2.1] que si un espacio Lindelöf Σ X se condensa sobre un espacio κ-monolítico, entonces X mismo es un espacio κ-monolítico. En el caso de espacios con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ tenemos el siguiente resultado el cual es una ligera generalización del resultado de Tkachuk.

Proposición 3.21. *Sean κ un cardinal infinito y X un espacio con estructura $(L\Sigma, L\Sigma)$ con núcleo compacto. Si X se condensa sobre un espacio κ-monolítico, entonces X también es κ-monolítico.*

Demostración: Sea $f : X \to Y$ una condensación de X sobre un espacio κ-monolítico Y. Sea $A \subseteq X$ tal que $|A| \leqslant \kappa$. No es difícil probar que $\overline{A}$ es un espacio con estrutura $(L\Sigma, L\Sigma)$ y con núcleo compacto. Además al restringir f a $\overline{A}$, tenemos que $\overline{A}$ se condensa sobre $Z = f[\overline{A}]$. Por la continuidad de f, $Z \subseteq \overline{f[A]}$. Pero $|f[A]| \leqslant \kappa$ y Y es κ-monolítico. Entonces $nw(Z) \leqslant nw(\overline{f[A]}) \leqslant \kappa$.

Aplicando el hecho de que $\overline{A}$ es estable (vea 3.16), podemos concluir que $nw(\overline{A}) \leqslant \kappa$. Por lo tanto, X es κ-monolítico. $\square$

Bibliografía

[1] A.V. Arhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[2] A. V. Arhangel'skii, *Remainders of metrizable spaces and a generalization of Lindelöf Σ-spaces*, Fund. Math., 215 (2011), 87–100.

[3] F. Casarrubias-Segura, C. G. Paniagua-Ramírez, *On Charming spaces and some related subclasses*. Topology proceedings. 47. (2016). 101-114.

[4] F. Casarrubias-Segura, *Espacios $C_p(X)$ en el contexto de la clase $L\Sigma(\leqslant \omega)$*. Sociedad Matemática Mexicana, Memorias 17 (2022), 3–27.

[5] R. Engelking, *General Topology*, 2nd ed., Sigma Ser. Pure Math. , 6, Heldermann, Berlin, 1989.

[6] V. V. Tkachuk, *Lifting the Collins-Roscoe property by condensations*, Topology Proc., 42 (2013), 1–15.

[7] V. V. Tkachuk, *A C_p-Theory Problem Book. Topological and Function Spaces*, Springer, New York, 2011.

Correo electrónico:
`fcasarrubiass@ciencias.unam.mx` (Fidel Casarrubias Segura).

CAPÍTULO 5

Completez de los espacios admisibles

Martha Hernández-Castañeda, David Maya, Fernando Orozco-Zitli
Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, México

1. Introducción

La completez es una propiedad de los espacios métricos. Un espacio métrico X es *completo* si cada sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X. El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ dotado de la métrica estándar es un ejemplo clásico de espacio métrico completo, mientras que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ y el intervalo abierto $(0, 1)$ dotados de la métrica estándar no son espacios métricos completos. En vista de que no todo espacio métrico es completo, es necesario hallar criterios para asegurar esta propiedad. Uno de ellos lo proporciona el Teorema de intersección de Cantor que establece que un espacio métrico X es completo si y sólo si para cada sucesión decreciente $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \dots$ de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, con $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, tiene intersección no vacía.

Por otro lado, la noción de uniformidad se introdujo con la intención de emplear metodologías de los espacios métricos a espacios topológicos en ausencia de metrización. En [**1**], se prueba que los espacios uniformes y los espacios admisibles forman la misma clase de espacios topológicos. Este resultado caracteriza a los espacios completamente regulares como los espacios topológicos que admiten una familia de cubiertas abiertas admisibles. Sumado a esto, la familia de cubiertas abiertas admisible es una herramienta para estudiar aspectos de uniformidad y dinámica en espacios completamente regulares.

El objetivo de este escrito es mostrar la generalización de completez y la versión del Teorema de intersección de Cantor para espacios admisibles. Los resultados que se presentan están basados en [**2**]. Esta versión generalizada es citada en [**3**] con un interés especial a su aplicación a la dinámica topológica.

2. Preliminares y resultados auxiliares

El conjunto de números naturales es denotará por $\mathbb{N}$. El rango de una función f se denota por $\operatorname{ran}(f)$.

Dada una relación $\sim$ sobre un conjunto, la relación inversa $\sim^{-1}$ se define como $a \sim^{-1} b$ si y sólo si $b \sim a$. Una relación reflexiva y transitiva sobre un conjunto no vacío es llamada *preorden*. Al par ordenado $(\Lambda, \leqslant)$ le diremos *conjunto preordenado* si $\leqslant$ es un preorden sobre el conjunto Λ.

Observación 2.1. *Cada una de las siguientes proposiciones son ciertas.*

- *La relación inversa de un preorden es un preorden.*
- *El par ordenado* $(\Lambda, \leqslant)$ *es un conjunto preordenado si y sólo si* $(\Lambda, \leqslant^{-1})$ *es un conjunto preordenado.*

Dado un conjunto preordenado $(\Lambda, \leqslant)$, diremos que un subconjunto K de Λ:

- *no es acotado superiormente* si para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \leqslant \beta$.
- *no es acotado inferiormente* si para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in K$ tal que $\beta \leqslant \alpha$.

Una función entre conjuntos preordenado $\varphi : (M, \preceq) \to (\Lambda, \leqslant)$ es *creciente* si siempre que $\mu_1, \mu_2 \in M$ son tales que $\mu_1 \preceq \mu_2$, se tiene que $\varphi(\mu_1) \leqslant \varphi(\mu_2)$.

Un preorden $\ll$ para un conjunto Λ es una

- *dirección hacia arriba sobre* Λ si satisface que para cada $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \ll \lambda_3$ y $\lambda_2 \ll \lambda_3$.
- *dirección hacia abajo* sobre Λ si satisface que para cada $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_3 \ll \lambda_1$ y $\lambda_3 \ll \lambda_2$.

Observación 2.2. *Una preorden* $\trianglelefteq$ *de un conjunto* Λ *es una dirección hacia arriba sobre* Λ *si y sólo si la relación* $\trianglelefteq^{-1}$ *es una dirección hacia abajo sobre* Λ.

Un preorden $\ll$ es una *dirección* sobre un conjunto Λ si $\ll$ es una dirección hacia arriba sobre Λ o $\ll$ es una dirección hacia abajo sobre Λ. Al par ordenado $(\Lambda, \ll)$ le llamamos *conjunto dirigido* si $\ll$ es una dirección sobre el conjunto Λ.

Una función entre conjuntos dirigidos $\varphi : (M, \preceq) \to (\Lambda, \leqslant)$ es *cofinal* si algunas de las siguientes condiciones se cumple:

- $\leqslant$ es un orden hacia arriba sobre Λ y $\operatorname{ran}(\varphi)$ es un conjunto no acotado superiormente.
- $\leqslant$ es un orden hacia abajo sobre Λ y $\operatorname{ran}(\varphi)$ es un conjunto no acotado inferiormente.

Una *red* en un conjunto X es una función P definida sobre un conjunto dirigido $(\Lambda, \leqslant)$ hacia X. Para denotar a una red P cuyo dominio es el conjunto dirigido $(\Lambda, \leqslant)$, usaremos el símbolo $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ bajo el entendido que $P(\lambda) = x_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$.

Sea X un conjunto y sea $P : (\Lambda, \leqslant) \to X$ una red. Para una función creciente y cofinal φ definida sobre un conjunto dirigido $(M, \preceq)$ hacia $(\Lambda, \leqslant)$, diremos que $P \circ \varphi$ es una *subred* de P. Para $\mu \in M$, el punto $P \circ \varphi(\mu)$ lo denotamos como x_{λ_μ}, y decimos que $(x_{\lambda_\mu})_{\mu \in M}$ o $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu \in M}$ es una subred de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Sean $(\Lambda, \leqslant)$ un conjunto dirigido y $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red en un espacio topológico X. Diremos $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *converge* a $x \in X$, y escribimos $x_\lambda \to x$, siempre que una de las siguientes condiciones se cumpla:

- $\leqslant$ es una dirección hacia arriba y para cada subconjunto abierto U de X que contenga a x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para cada $\lambda \geqslant \lambda_0$.
- $\leqslant$ es una dirección hacia abajo y para cada subconjunto abierto U de X que contenga a x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para cada $\lambda \leqslant \lambda_0$.

Diremos que $y \in X$ es un *punto límite* de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ siempre que una de las siguientes condiciones se cumpla:

- $\leqslant$ es una dirección hacia arriba y, para cada subconjunto abierto U de X que contenga a y y para cada $\lambda_0 \in \Lambda$, existe $\lambda \geqslant \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$.
- $\leqslant$ es una dirección hacia abajo y, para cada subconjunto abierto U de X que contenga a y y para cada $\lambda_0 \in \Lambda$, existe $\lambda \leqslant \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$.

Teorema 2.3. [**4**, Theorem 11.5, p. 75] *Una red tiene a y como punto límite si y sólo si tiene una subred convergente a y.*

Teorema 2.4. [**4**, Theorem 17.4, p. 118] *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si cada red en X tiene un punto límite.*

El siguiente Teorema es consecuencia de Teorema 2.3 y Teorema 2.4.

Teorema 2.5. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si cada red en X tiene una subred convergente.*

3. Sobre cubiertas de un espacio topológico

Para cada cubierta $\mathcal{U}$ de un espacio topológico X y para cada subconjunto Y de X, *la estrella de Y con respecto a $\mathcal{U}$* es el conjunto

$$\mathrm{St}[Y,\mathcal{U}] = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : Y \cap U \neq \emptyset\}.$$

Si $Y = \{x\}$, escribiremos $\mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ en lugar de $\mathrm{St}[\{x\},\mathcal{U}]$.

Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ cubiertas de X. Escribimos

- $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$.
- $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$ si para cada $U, W \in \mathcal{U}$ tales que $U \cap W \neq \emptyset$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \cup W \subseteq V$.
- $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^2}\mathcal{V}$ si existe una cubierta $\mathcal{W}$ de X tal que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$.
- $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{V}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, empleando recursión, si existe una cubierta $\mathcal{W}$ de X tal que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

Observación 3.1. *Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubiertas de un espacio topológico tales que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.*

Sea $n \in \mathbb{N}$. Un subconjunto $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de una cubierta $\mathcal{U}$ de un espacio topológico es una *n-cadena* de $\mathcal{U}$ si $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots n, \}$.

Lema 3.2. *Sea X un espacio topológico. Entonces, para cubiertas $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ de X y para cada $n \in \mathbb{N}$, la condición $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{V}$ implica que para cada $(n+1)$-cadena $\mathcal{C}$ de $\mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $\bigcup\mathcal{C} \subseteq V$.*

Demostración: Probaremos por inducción sobre n que se cumple la condición. Para $n = 1$, de la definición se sigue que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$ si y sólo si para cada $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U_1 \cup U_2 \subseteq V$.

Supongamos que para cubiertas $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$ de X, la condición $\mathcal{Q} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{R}$ implica que para cada $(n+1)$-cadena $\mathcal{D}$ de $\mathcal{Q}$ existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $\bigcup\mathcal{D} \subseteq R$. Sean $\mathcal{W}, \mathcal{S}$ cubiertas de X tales que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\mathcal{S}$. Sea $\{W_1, \ldots, W_{n+2}\}$ una $(n+2)$-cadena de $\mathcal{W}$. Hacemos $\mathcal{G}_1 = \{W_1, \ldots, W_{n+1}\}$ y $\mathcal{G}_2 = \{W_2, \ldots, W_{n+2}\}$. Notemos que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son $(n+1)$-cadenas de $\mathcal{W}$. Ahora, por definición, existe una cubierta $\mathcal{F}$ de X tal que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{S}$. Del hecho que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{F}$, existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $\bigcup\mathcal{G}_1 \subseteq F_1$ y $\bigcup\mathcal{G}_2 \subseteq F_2$. De donde $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{S}$, existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $F_1 \cup F_2 \subseteq S$. Así $W_1 \cup \cdots \cup W_{n+2} \subseteq S$. Con esto se concluye la demostración. $\square$

4. Espacios admisibles

Una familia de cubiertas abiertas $\mathfrak{O}$ de un espacio topológico X se dice *admisible* si satisface las siguientes condiciones:

$(A1)$ Para cualesquiera $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

$(A2)$ Para cada $x \in X$, la colección $\{\mathrm{St}[x, \mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$ es una base local para la topología de X en el punto x.

El espacio topológico X se llama *admisible* si admite una familia de cubiertas abiertas admisible. A lo largo de este escrito, diremos que el par ordenado $(X, \mathfrak{O})$ es un espacio admisible si X es un espacio topológico que admite a la familia de cubiertas abiertas admisible $\mathfrak{O}$.

Observación 4.1. *La relación $\leqslant$ es una dirección hacia abajo para cada familia admisible de cubiertas abiertas de un espacio topológico.*

Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y para cada $\varepsilon > 0$, definimos $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$. Para $\varepsilon > 0$, sea $\mathcal{U}_\varepsilon = \{B_d(x, \varepsilon) : x \in X\}$.

Teorema 4.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. La familia $\mathfrak{O} = \{\mathcal{U}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ de cubiertas abiertas es admisible de (X, d).*

Demostración: Mostraremos que $\mathfrak{O}$ cumple $(A1)$. Afirmamos que si $0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $\mathcal{U}_\delta \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$.

Sean $a, b \in X$ tales que $B_d(a, \delta) \cap B_d(b, \delta) \neq \emptyset$. Entonces existe $z \in B_d(a, \delta) \cap B_d(b, \delta)$. Sea $p \in B_d(a, \delta) \cup B_d(b, \delta)$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in B_d(a, \delta)$. Entonces $d(p, z) \leqslant d(p, a) + d(a, z) < \delta + \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto $p \in B_d(z, \varepsilon)$. De lo anterior $B_d(a, \delta) \cup B_d(b, \delta) \subseteq B_d(z, \varepsilon)$. Se concluye que $\mathcal{U}_\delta \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$.

Para $\varepsilon, \beta > 0$, hacemos $\delta = \frac{\min\{\varepsilon, \beta\}}{2}$ para obtener que $\mathcal{U}_\delta \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$ y $\mathcal{U}_\delta \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_\beta$. Por lo tanto, $(A1)$ se cumple en $\mathfrak{O}$.

Falta mostrar que $\mathfrak{O}$ cumple $(A2)$. Sean $x \in X$ y V un abierto de X tal que $x \in V$. Como X es un espacio métrico, existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(x, \lambda) \subseteq V$. Sean $\varepsilon = \frac{\lambda}{2} > 0$ y $z \in \mathrm{St}\,[x, \mathcal{U}_\varepsilon]$. Entonces existe $y \in X$ tal que $z, x \in B_d(y, \varepsilon)$. De donde $d(y, z) < \varepsilon$ y $d(y, x) < \varepsilon$, así $d(z, x) \leqslant d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + \varepsilon = \lambda$. Por lo que $z \in B_d(x, \lambda)$, es decir, $z \in V$.

Por lo tanto $\mathfrak{O}$ es una familia de cubiertas admisible. $\square$

El objetivo de los siguientes resultados es mostrar que la familia de todas las cubiertas abiertas finitas de un espacio compacto de Hausdorff es admisible.

Lema 4.3. *Si $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ son cubiertas abiertas finitas de un espacio topológico X, entonces existe una cubierta abierta finita $\mathcal{W}$ de X tal que $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$.*

Demostración: Para cada $x \in X$, definimos

$$W_x = \bigcap\{U \in \mathcal{U} : x \in U\} \cap \bigcap\{V \in \mathcal{V} : x \in V\}.$$

Sea $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$. Notemos que $\mathcal{W}$ es cubierta abierta finita de X. Para mostrar que $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, sea $W_z \in \mathcal{W}$. Sean $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$ tales que $z \in U$ y $z \in V$. Entonces $W_z \subseteq U$ y $W_z \subseteq V$. Por lo tanto $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$. $\square$

En el siguiente resultado, usaremos la equivalencia que establece que, un espacio topológico X es normal, si y sólo si, para cada subconjunto abierto U de X y para cada subconjunto cerrado F de X contenido en U, existe un subconjunto abierto V de X tal que $F \subseteq V \subseteq \mathrm{Cl}(V) \subseteq U$.

Lema 4.4. *Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta finita de un espacio topológico normal X, entonces existe una cubierta abierta finita $\mathcal{V}$ de X que cumple que para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $Cl(V) \subseteq U$.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$. Definimos $F_1 = X - \bigcup_{j=2}^{k} U_j$. Entonces F_1 es un subconjunto cerrado de X y $F_1 \subseteq U_1$. Por la normalidad de X, existe un subconjunto abierto V_1 de X tal que $F_1 \subseteq V_1 \subseteq \mathrm{Cl}(V_1) \subseteq U_1$. De manera recursiva, definimos $F_r = X - [(\bigcup_{i=1}^{r-1} V_i) \cup (\bigcup_{j=r+1}^{k} U_j)]$. Entonces cada F_r es un subconjunto cerrado de X y $F_r \subseteq U_r$. De la normalidad de X se sigue que existe un subconjunto abierto V_r de X tal que $F_r \subseteq V_r \subseteq \mathrm{Cl}(V_r) \subseteq U_r$.

Mostraremos que $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_k\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $x \in X$. Sea $L = \{j \in \{1, \dots, k\} : x \in U_j\}$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, L es un conjunto no vacío y finito. Definimos $J = \max L$. Entonces $x \notin U_n$ para cada $n > J$, o equivalentemente $x \in \bigcap_{n=J+1}^{k} (X - U_n)$. Esto y el hecho que cada V_r es un subconjunto de U_r juntos implican que $x \notin V_s$ para cada $s > J$. Supongamos que $x \in \bigcap_{n=1}^{J-1} (X - V_n)$. Entonces $x \in (\bigcap_{n=1}^{J-1} (X - V_n)) \cap (\bigcap_{n=J+1}^{k} (X - U_n))$, de donde $x \in X - [(\bigcup_{n=1}^{J-1} V_n) \cup (\bigcup_{n=J+1}^{k} U_n)]$, es decir, $x \in F_J$. Por lo que $x \in V_J$. En el caso contrario, existe $i < J$ tal que $x \in V_i$. De lo anterior, concluimos que $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X. □

Teorema 4.5. *La familia de todas las cubiertas abiertas finitas de un espacio compacto de Hausdorff es admisible.*

Demostración: Sea X un espacio compacto de Hausdorff y sea $\mathfrak{O}$ la familia de todas las cubiertas abiertas finitas de X. Entonces X es un espacio normal.

Sean $\mathcal{P}, \mathcal{R} \in \mathfrak{O}$. Usamos Lema 4.3, para garantizar que existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{P}$ y $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{R}$. Aplicamos Lema 4.4 para encontrar $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\mathrm{Cl}(V) \subseteq U$.

Sea $x \in X$. Definimos el subconjunto abierto

$$A_x = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : \text{existe } V \in \mathcal{V} \text{ tal que } x \in \mathrm{Cl}(V) \subseteq U\}$$

de X y el subconjunto cerrado

$$B_x = \bigcup \{\mathrm{Cl}(V) : V \in \mathcal{V} \text{ es tal que } x \notin \mathrm{Cl}(V)\}$$

de X. Hacemos $W_x = A_x - B_x$ para cada $x \in X$ y sea $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$. Notemos que $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$. Mostraremos que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$.

Sea $W_x, W_y \in \mathcal{W}$ tales que $W_x \cap W_y \neq \emptyset$. Sea $z \in W_x \cap W_y$. Elegimos $V \in \mathcal{V}$ tal que $z \in V$. De donde $z \in \mathrm{Cl}(V)$. Así $y, x \in \mathrm{Cl}(V)$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $\mathrm{Cl}(V) \subseteq U$. Del hecho que $x \in \mathrm{Cl}(V)$, obtenemos que $A_x \subseteq U$. Por lo que $W_x \subseteq U$. De manera similar, tenemos que $W_y \subseteq U$. Por lo que $W_x \cup W_y \subseteq U$. Por lo tanto $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$.

Las condiciones $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{P}$ implican que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{P}$. De la misma manera $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{R}$. Por lo tanto, $\mathfrak{O}$ cumple $(A1)$.

Probaremos que $\mathfrak{O}$ cumple $(A2)$. Sean $x \in X$ y Z un subconjunto abierto de X tal que $x \in Z$. Dado que X es normal, existe un subconjunto abierto T de X tal que $x \in T \subseteq \mathrm{Cl}(T) \subseteq Z$. Sea $\mathcal{Y} = \{Z, X - \mathrm{Cl}(T)\}$. Se tiene que $\mathcal{Y} \in \mathfrak{O}$. Ahora, sea $z \in \mathrm{St}[x, \mathcal{Y}]$. Entonces existe $Y \in \mathcal{Y}$ tal que $z, x \in Y$. De esto se sigue que $Y = Z$ y que $z \in Z$. Concluimos que $\mathrm{St}[x, \mathcal{Y}] \subseteq Z$.

Por lo tanto $\mathfrak{O}$ es una familia de cubiertas admisible. □

La familia de cubiertas abiertas admisibles $\mathfrak{O}$ de un espacio topológico X permite definir una función sobre $X \times X$ hacia la familia de subconjuntos de $\mathfrak{O}$ cuyo comportamiento se asemeja al de una métrica. Para su construcción, es necesario proporcionar dos resultados que serán útiles para las siguientes demostraciones.

Sean $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible y $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ el conjunto potencia de $\mathfrak{O}$. Definimos la relación $\preceq$ en $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ como sigue: $\mathfrak{E} \preceq \mathfrak{F}$ si y sólo si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$. Del hecho que la relación $\subseteq$ es una dirección hacia abajo sobre $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$, se sigue que $\preceq$ es una dirección hacia arriba sobre $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$. Para todo $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}(\mathfrak{O})$, se tiene que $\mathfrak{O} \preceq \mathfrak{E} \preceq \emptyset$. Intuitivamente, $\mathfrak{O}$ es *cero* y $\emptyset$ es *infinito* en este orden parcial.

Para cada $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$n \cdot \mathfrak{E} = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{O} : \text{existe } \mathcal{V} \in \mathfrak{E} \text{ tal que } \mathcal{V} \leqslant \tfrac{1}{2^n}\mathcal{U}\}.$$

Proposición 4.6. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible.*
(4.6.1) *Si $\mathfrak{E}, \mathfrak{F} \in \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ tales que $\mathfrak{E} \preceq \mathfrak{F}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \cdot \mathfrak{E} \preceq n \cdot \mathfrak{F}$.*
(4.6.2) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$.*
(4.6.3) *Si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^k}\mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{U} \in k \cdot \{\mathcal{V}\}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} \in n \cdot \mathfrak{F}$. Entonces existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Puesto que $\mathfrak{E} \preceq \mathfrak{F}$, se tiene que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$. Por lo que $\mathcal{V} \in \mathfrak{E}$ y $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. De donde $\mathcal{U} \in n \cdot \mathfrak{E}$. Por lo tanto $n \cdot \mathfrak{E} \preceq n \cdot \mathfrak{F}$. Esto termina la prueba de (4.6.1).

Probaremos por inducción sobre n que se cumple (4.6.2).

Por $(A1)$ para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Con lo cual $1 \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$.

Supongamos que $n \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Entonces $\mathcal{U} \in 1 \cdot \mathfrak{O}$, es decir, existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $\mathcal{W} \in \mathfrak{O}$ y $n \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{W}$. Así $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\mathcal{U}$. De donde $\mathcal{U} \in (n+1) \cdot \mathfrak{O}$.

Por lo tanto $n \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que $\mathcal{U} \in k \cdot \{\mathcal{V}\}$ si y sólo si existe $\mathcal{W} \in \{\mathcal{V}\}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^k}\mathcal{U}$, lo que es equivalente a $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^k}\mathcal{U}$. Por lo tanto (4.6.3) se cumple. □

Dada un espacio admisible $(X, \mathfrak{O})$, definimos una función $\rho : X \times X \to \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ como

$$\rho(x, y) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{O} : y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]\ \}.$$

Proposición 4.7. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible T_1. La función*

$$\rho : X \times X \to \mathcal{P}(\mathfrak{O})$$

cumple las siguientes condiciones:
$(\rho.1)$ *Para todo $x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.*
$(\rho.2)$ *Para todo $x, y \in X$, $\rho(x, y) = \mathfrak{O}$ si y sólo si $x = y$.*
$(\rho.3)$ *Para todo $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$,*

$$\rho(x, y) \preceq n \cdot (\rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \cdots \cap \rho(x_n, y)).$$

Demostración: Iniciamos mostrando que $(\rho.1)$ se cumple. Sean $x, y \in X$ y sea $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. Esto significa que $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x, y \in U$. De aquí que $x \in \mathrm{St}[y, \mathcal{U}]$. Se concluye que $\mathcal{U} \in \rho(y, x)$. De lo anterior, $\rho(x, y)$ es un subconjunto de $\rho(y, x)$. De manera similar se prueba que $\rho(y, x) \subseteq \rho(x, y)$. Por lo tanto, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Sea $x \in X$. Del hecho que $x \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, se tiene que $\mathfrak{O} = \rho(x, x)$. Para concluir que $(\rho.2)$ es cierto, supongamos que $x, y \in X$ son tales que $\rho(x, y) = \mathfrak{O}$. Probaremos que $y \in \mathrm{Cl}(\{x\})$. Sea W un subconjunto abierto de X que contiene a y. Entonces existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathrm{St}[y, \mathcal{U}] \subseteq W$. Dado que $\rho(x, y) = \mathfrak{O}$, se sigue que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. Esto implica que $x \in \mathrm{St}[y, \mathcal{U}]$. Por lo que $W \cap \{x\} \neq \emptyset$. Así, $y \in \mathrm{Cl}(\{x\})$. Usamos la condición X es T_1 para inferir que $y = x$.

Sean $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y sea $\mathcal{U} \in n \cdot (\rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \cdots \cap \rho(x_n, y))$. Elegimos $\mathcal{V} \in \rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \cdots \cap \rho(x_n, y)$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Así, existen $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1} \in \mathcal{V}$ tales que $x, x_1 \in V_1$, $x_1, x_2 \in V_2$, $\ldots$, $x_n, y \in V_{n+1}$. De modo que $\{V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}\}$ es una n-cadena de $\mathcal{V}$ y $x, y \in V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{n+1}$. Por Lema 3.2, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{n+1} \subseteq U$. Por lo que $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$. Por lo tanto, $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. Esto demuestra $(\rho.3)$. □

Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible. Un elemento $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{O}$ es *una cota* de un subconjunto Y de X si $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ para todo $x, y \in Y$. Un subconjunto Y de X es *acotado* si existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{U}$ es una cota de Y. El *diámetro* de un subconjunto Y de X es el conjunto $D(Y) \in \mathcal{P}(\mathfrak{O})$ definido como $D(Y) = \bigcap\{\rho(x, y) : x, y \in Y\}$.

Lema 4.8. *Sean $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible, Y un subconjunto de X y $\mathbb{W}$ una familia de conjuntos abiertos de X tales que $Y \subseteq \bigcup \mathbb{W}$. Si Y es compacto, entonces existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ que cumple que para cada subconjunto A de X tal que $\mathcal{U} \in D(A)$ y $A \cap Y \neq \emptyset$, existe $W \in \mathbb{W}$ tal que $A \subseteq W$.*

Demostración: Procederemos por contradicción, supondremos que para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existe un subconjunto $A_{\mathcal{U}}$ de X tal que $\mathcal{U} \in D(A_{\mathcal{U}})$, $A_{\mathcal{U}} \cap Y \neq \emptyset$ y $A_{\mathcal{U}} \cap (X - W) \neq \emptyset$ para todo $W \in \mathbb{W}$. Dado $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, elegimos $y_{\mathcal{U}} \in A_{\mathcal{U}} \cap Y$. Por Observación 4.1, $\leqslant$ es una dirección hacia abajo sobre $\mathfrak{O}$. Así $(y_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \in \mathfrak{O}}$ es una red. Por Teorema 2.5, existe un conjunto M, una dirección hacia abajo $\leqslant_M$ sobre M y una función creciente y cofinal $\varphi : (M, \leqslant_M) \to (\mathfrak{O}, \leqslant)$ tal que $(y_{\varphi(m)})_{m \in M}$ es una subred convergente. Sea $y \in Y$ tal que $y_{\varphi(m)} \to y$. Dado que $Y \subseteq \bigcup \mathbb{W}$, existe $W_0 \in \mathbb{W}$ tal que $y \in W_0$. Por $(A2)$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathrm{St}[y, \mathcal{V}] \subseteq W_0$. De $(A1)$, existe $\mathcal{E} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{E} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$. Para cada $z \in \mathrm{St}[y, \mathcal{E}]$, existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $z, y \in E$, y del hecho que $\mathcal{E} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $E \subseteq V$, de donde $z, y \in V$. Por lo que $\mathrm{St}[y, \mathcal{E}] \subseteq \mathrm{St}[y, \mathcal{V}] \subseteq W_0$. Existe $L \in M$ tal que $y_{\varphi(l)} \in \mathrm{St}[y, \mathcal{E}]$ para todo $l \leqslant_M L$. Existe $j \in M$ tal que $j \leqslant_M L$ y $\varphi(j) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{E}$. Mostraremos que $A_{\varphi(j)} \subseteq W_0$. Sea $x \in A_{\varphi(j)}$. Entonces $\varphi(j) \in \rho(x, y_{\varphi(j)})$, de donde $\mathcal{E} \in \rho(x, y_{\varphi(j)})$ y $\mathcal{E} \in \rho(y, y_{\varphi(j)})$. Por lo que $\mathcal{V} \in \rho(x, y)$, es decir, $x \in \mathrm{St}[y, \mathcal{V}] \subseteq W_0$. De donde $A_{\varphi(j)} \subseteq W_0$. Entonces $A_{\varphi(j)} \cap (X - W_0) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. □

La cubierta $\mathcal{U}$ en el lema anterior llamaremos una *cubierta de Lebesgue* para la colección $\mathbb{W}$.

Un espacio admisible $(X, \mathfrak{O})$ es *totalmente acotado con respecto a* $\mathfrak{O}$ si para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existen subconjuntos $X_1, \ldots, X_n$ de X tales que $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$ y $\mathcal{U} \in D(X_k)$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposición 4.9. *Un espacio admisible* $(X, \mathfrak{O})$ *es totalmente acotado si y sólo si para cada* $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ *existen* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *tales que* $X = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{St}[x_k, \mathcal{U}]$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es totalmente acotado. Entonces para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existen subconjuntos $X_1, \ldots, X_n$ de X tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$ y $\mathcal{U} \in D(X_k)$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sea $x_j \in X_j$. Del hecho que $\mathcal{U} \in D(X_j)$, se tiene que $\mathcal{U} \in \rho(x_j, x)$, es decir, $x \in \mathrm{St}[x_j, \mathcal{U}]$ para cada $x \in X_j$. Por lo que $X_j \subseteq \mathrm{St}[x_j, \mathcal{U}]$. Por lo tanto $X = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{St}[x_k, \mathcal{U}]$. Esto demuestra la primera parte.

Para probar que X es totalmente acotado, sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Por $(A1)$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{St}[x_k, \mathcal{V}]$. Definimos $X_i = \mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notemos que $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$. Veamos que $\mathcal{U} \in D(X_k)$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Sean $x, y \in \mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]$. Entonces existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que $x, x_i \in V_1$ y $y, x_i \in V_2$. Así $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Como $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \cup V_2 \subseteq U$. Por lo que $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$. Esto implica que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. Se concluye que $\mathcal{U} \in D(X_i)$. Por lo tanto X es totalmente acotado. □

5. Espacios admisibles completos

En esta última sección estudiamos el concepto de completez mediante el uso de la estructura admisible, extendemos algunos teoremas clásicos, y presentamos una versión más general del Teorema de Intersección de Cantor.

La siguiente definición se aproxima a la noción de red convergente al *cero* $\mathfrak{O}$ de $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ para la familia $\mathfrak{O}$ de cubiertas abiertas admisibles de un espacio topológico.

Sean $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible y $(\Lambda, \leqslant)$ un conjunto dirigido con dirección hacia arriba. Una red $(\mathfrak{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ *converge a* $\mathfrak{O}$, y escribimos $\mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$, si para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \mathfrak{E}_\lambda$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Proposición 5.1. *Sean* Λ *un conjunto dotado de una dirección hacia arriba* $\leqslant$, $(\mathfrak{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(\mathfrak{D}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *redes en* $\mathcal{P}(\mathfrak{O})$ *y* $k \in \mathbb{N}$. *Se cumplen las siguientes condiciones:*
(5.1.1) *Si* $\mathfrak{D}_\lambda \preceq \mathfrak{E}_\lambda$ *para cada* $\lambda \in \Lambda$ *y* $\mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$, *entonces* $\mathfrak{D}_\lambda \to \mathfrak{O}$.
(5.1.2) *Si* $\mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$, *entonces* $k \cdot \mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \mathfrak{E}_\lambda$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$. Como $\mathfrak{D}_\lambda \preceq \mathfrak{E}_\lambda$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}_\lambda$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$. De lo anterior, $\mathfrak{D}_\lambda \to \mathfrak{O}$. Esto termina la prueba de (5.1.1).

Para probar (5.1.2), sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Por (4.6.2) de la Proposición 4.6, $\mathcal{U} \in k \cdot \mathfrak{O}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^k}\mathcal{U}$. Por (4.6.3) de la Proposicón 4.6, $\mathcal{U} \in k \cdot \{\mathcal{V}\}$. Así, $k \cdot \{\mathcal{V}\} \preceq \{\mathcal{U}\}$. Como $\mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{V} \in \mathfrak{E}_\lambda$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$. De modo que $\mathfrak{E}_\lambda \preceq \{\mathcal{V}\}$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$. Por (4.6.3) de la Proposición 4.6, $k \cdot \mathfrak{E}_\lambda \preceq k \cdot \{\mathcal{V}\}$. Esto implica que $\mathcal{U} \in k \cdot \mathfrak{E}_\lambda$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$. Por lo tanto $k \cdot \mathfrak{E}_\lambda \to \mathfrak{O}$. □

Proposición 5.2. *Sean* $(X, \mathfrak{O})$ *espacio admisible,* Λ *un conjunto con una dirección hacia arriba* $\leqslant$, *y* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *una red en* X. *Entonces* $x_\lambda \to x$ *si y sólo si* $\rho(x_\lambda, x) \to \mathfrak{O}$.

Demostración: Mostraremos primero que la condición $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x implica $\rho(x_\lambda, x) \to \mathfrak{O}$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$. De donde $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, x)$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$. Por lo tanto $\rho(x_\lambda, x) \to \mathfrak{O}$.

Supongamos ahora que $\rho(x_\lambda, x)$ converge a $\mathfrak{O}$. Entonces para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, x)$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$. De lo anterior $x_\lambda \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$. Por lo tanto $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x. □

Intuitivamente, los espacios métricos completos son aquellos espacios que no tiene huecos. Una forma natural para describir estos espacios es vía redes de Cauchy. La siguiente definición nos ayuda a describir a los espacios admisibles completos mediante redes $\mathfrak{O}$-Cauchy.

Sean $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible, Λ un conjunto y $\leqslant$ una dirección hacia arriba sobre Λ. Una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en X es *$\mathfrak{O}$-Cauchy* si para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para cada $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tales que $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$, se cumple que $x_{\lambda_1} \in \mathrm{St}[x_{\lambda_2}, \mathcal{U}]$.

Lema 5.3. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible y sea $(\Lambda, \leqslant)$ un conjunto dirigido con dirección hacia arriba $\leqslant$. Una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en X es $\mathfrak{O}$-Cauchy si y sólo si para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$ siempre que $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$.*

Demostración: Supongamos que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es $\mathfrak{O}$-Cauchy. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$, entonces $x_{\lambda_1} \in \mathrm{St}[x_{\lambda_2}, \mathcal{U}]$. De donde $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$ siempre que $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$.

Ahora bien, sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$ siempre que $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$. Del hecho que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$, se sigue que $x_{\lambda_1} \in \mathrm{St}[x_{\lambda_2}, \mathcal{U}]$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$. De lo anterior anterior $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{O}$-Cauchy. □

Proposición 5.4. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio admisible. Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{O}$-Cauchy tal que $\leqslant$ es una dirección hacia arriba sobre el conjunto Λ y $(x_{\lambda_k})_{k\in M}$ es una subred convergente a $x \in X$, entonces $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge y $x_\lambda \to x$.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Por $(A1)$, existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. De la Proposición 5.2, se tiene que $\rho(x_{\lambda_k}, x) \to \mathfrak{O}$, es decir, existe $\beta_0 \in M$ tal que $\beta \geqslant_M \beta_0$ implica que $\mathcal{V} \in \rho(x_{\lambda_\beta}, x)$. Del hecho que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es $\mathfrak{O}$-Cauchy, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{V} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$ con $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$. Sea $k \geqslant \beta_0$ tal que $\lambda_k \geqslant \lambda_0$. Sea $\gamma \geqslant \lambda_0$. Entonces $x_{\lambda_k} \in \mathrm{St}[x, \mathcal{V}] \cap \mathrm{St}[x_\gamma, \mathcal{V}]$, de donde $\mathcal{V} \in \rho(x, x_{\lambda_k}) \cap \rho(x_{\lambda_k}, x_\gamma)$. Por $(\rho.3)$ de la Proposición 4.7, $\mathcal{U} \in \rho(x, x_\gamma)$. Así, $x_\gamma \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$, es decir, $(x_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ conerverge a x. □

Un espacio admisible $(X, \mathfrak{O})$ es *completo* si toda red $\mathfrak{O}$-Cauchy en X converge.

Sea X un conjunto y $(\Lambda, \leqslant)$ un conjunto dirigido con dirección hacia arriba. Decimos que una red de subconjuntos $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de X es *decreciente* si para cada $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tales que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ se tiene que $F_{\lambda_2} \subseteq F_{\lambda_1}$.

El siguiente resultado generaliza el Teorema de Intersección de Cantor.

Teorema 5.5. *Un espacio admisible $(X, \mathfrak{O})$ es completo si y sólo si para cada red decreciente $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X con $D(F_\lambda) \to \mathfrak{O}$ se tiene que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.*

Demostración: Supongamos que X es completo. Sea $(\Lambda, \leqslant)$ un conjunto dirigido con dirección hacia arriba y sea $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red de subconjuntos cerrados decreciente de X tal que $D(F_\lambda) \to \mathfrak{O}$.

Sea $x_\lambda \in F_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Veamos que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{O}$-Cauchy. Dado que $D(F_\lambda) \to \mathfrak{O}$, existe λ_0 tal que si $\lambda \geqslant \lambda_0$ se tiene que $\mathcal{U} \in D(F_\lambda)$. Para $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$, tenemos que $F_{\lambda_1} \cup F_{\lambda_2} \subseteq F_{\lambda_0}$ y así $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} \in F_{\lambda_0}$. Del hecho que $\mathcal{U} \in D(F_{\lambda_0})$, se sigue que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$.

La completez de $(X, \mathfrak{O})$ se sigue que la red $\mathfrak{O}$-Cauchy $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en X converge. Sea $x \in X$ tal que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x.

Sea $\gamma \in \Lambda$. Sea V un subconjunto abierto de X que contiene a x. Entonces existe $\beta \in \Lambda$ tal que $x_\delta \in V$ para cada $\delta \geqslant \beta$. Elegimos $\mu \in \Lambda$ tal que $\mu \geqslant \gamma$ y $\mu \geqslant \beta$. Se tiene que $x_\mu \in F_\mu \subseteq F_\gamma$ y $x_\mu \in V$. Por lo que $V \cap F_\gamma \neq \emptyset$. Esto muestra que $x \in \mathrm{Cl}(F_\gamma)$. Usando el hecho que F_γ es un subconjunto cerrado de X concluimos que $x \in F_\gamma$. Por lo tanto $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$.

Supongamos ahora que cada red $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ decreciente de subconjuntos cerrados de X con $D(F_\lambda) \to \mathfrak{O}$ tiene intersección no vacía. Sea $(\Lambda, \leqslant)$ un conjunto dirigido con dirección hacia arriba y $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red $\mathfrak{O}$-Cauchy. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sean $G_\alpha = \{x_\kappa : \kappa \geqslant \alpha\}$ y $F_\alpha = \mathrm{Cl}(G_\alpha)$. Notemos que $(F_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X.

Veamos que $D(F_\alpha) \to \mathfrak{O}$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Existe λ_0 tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$ siempre que $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$. Por lo que $\mathcal{U} \in D(G_{\lambda_0})$, así $D(G_\alpha) \to \mathfrak{O}$. Por (5.1.2) de la Proposición 5.1, $2 \cdot D(G_\alpha) \to \mathfrak{O}$. Probaremos que $D(F_\alpha) \preceq 2 \cdot D(G_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Sean $\alpha \in \Lambda$, $\mathcal{U} \in 2 \cdot D(G_\alpha)$ y $a, b \in F_\alpha$. Elegimos $\mathcal{V} \in D(G_\alpha)$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^2}\mathcal{U}$. Por $(A2)$, existen $x, y \in G_\alpha$ tales que $x \in \mathrm{St}[a, \mathcal{V}]$ y $y \in \mathrm{St}[b, \mathcal{V}]$. Por lo que $\mathcal{V} \in (\rho(a, x) \cap \rho(b, y) \cap \rho(x, y))$. Entonces $\mathcal{U} \in 2 \cdot (\rho(a, x) \cap \rho(b, y) \cap \rho(x, y))$. Por $(\rho.3)$ de la Proposición 4.7, $\mathcal{U} \in \rho(a, b)$. Esto prueba que $2 \cdot D(G_\alpha) \subseteq D(F_\alpha)$. Por lo tanto $D(F_\alpha) \preceq 2 \cdot D(G_\alpha)$. Ahora, por (5.1.1) de la Proposición 5.1, se concluye que $D(F_\alpha) \to \mathfrak{O}$.

Dado que $(F_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red decreciente de subconjuntos de X y $D(F_\alpha) \to \mathfrak{O}$, se tiene que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \emptyset$. Sea $x \in X$ tal que $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$. Mostraremos que $x_\lambda \to x$. Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Dado que $D(F_\lambda) \to \mathfrak{O}$, existe λ_0 tal que si $\lambda \geqslant \lambda_0$, entonces $\mathcal{U} \in D(F_\lambda)$. Como $x_\lambda, x \in F_\lambda$, $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, x)$. Por lo tanto $\rho(x_\lambda, x) \to \mathfrak{O}$. Por Proposición 5.2, toda red $\mathfrak{O}$-Cauchy en X converge. Por lo tanto, X es un espacio admisible completo. $\square$

Corolario 5.6. *Sea $(X, \mathfrak{O})$ un espacio de Hausdorff admisible completo. Si $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $D(F_\lambda) \to \mathfrak{O}$, entonces la intersección $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ consta de un sólo punto.*

Demostración: Sean $x, y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ y $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Del hecho que $D(F_\lambda) \to \mathfrak{O}$, se tiene que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$. Esto implica que $\rho(x, y) = \mathfrak{O}$. Por $(\rho.2)$ de la Proposición 4.7, $x = y$. Por lo tanto, la intersección $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ es un sólo punto. $\square$

Proposición 5.7. *Un espacio admisible $(X, \mathfrak{O})$ es totalmente acotado si y sólo si para cada red de puntos de X existe una subred $\mathfrak{O}$-Cauchy.*

Demostración: Supongamos que $(X, \mathfrak{O})$ es totalmente acotado y sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red de elementos de X. Probaremos que para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$, existe un subconjunto $X_{\mathcal{U}}$ de X tal que $\mathcal{U} \in D(X_{\mathcal{U}})$ y $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_{\mathcal{U}}\}$ es cofinal.

Sea $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$. Dado que X es totalmente acotado, existen subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de X tales que $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_i$ y $\mathcal{U} \in D(A_j)$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $L_j = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in A_j\}$. Supongamos que cada L_j no es cofinal. Entonces existe $\theta_j \in \Lambda$ tal que si $\gamma \in L_j$, entonces $\gamma \leqslant \theta_j$. Existe $\beta \in \Lambda$ tal que $\beta \geqslant \theta_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_\beta \in A_k$. De donde $\beta \in L_k$, es decir $\beta \leqslant \theta_k$. Lo cual es una contradicción. Por lo que existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que L_k es cofinal. Hacemos $X_{\mathcal{U}} = A_k$. Entonces $X_{\mathcal{U}}$ es un subconjunto de X tal que $\mathcal{U} \in D(X_{\mathcal{U}})$ y $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \in X_{\mathcal{U}}\}$ es cofinal.

Ahora, sea $\Gamma = \{(\lambda, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}, x_\lambda \in X_{\mathcal{U}}\}$. Definimos la relación $(\lambda, \mathcal{U}) \leqslant (\gamma, \mathcal{V})$ si y sólo si $\lambda \leqslant \gamma$ y $X_{\mathcal{V}} \subseteq X_{\mathcal{U}}$. Tenemos que $(\Gamma, \leqslant)$ es un conjunto dirigido. Sea $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ definida por $\varphi(\lambda, \mathcal{U}) = \lambda$. Entonces $(x_{\varphi(\lambda,\mathcal{U})})_{(\lambda,\mathcal{U})\in\Gamma}$ es una subred de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Sean $\mathcal{V} \in \mathfrak{O}$ y $\beta \in \Lambda$ tal que $(\beta, \mathcal{V}) \in \Gamma$. Sean $(\eta, \mathcal{W}), (\gamma, \mathcal{F}) \in \Gamma$ tales que $(\eta, \mathcal{W}), (\gamma, \mathcal{F}) \geqslant (\beta, \mathcal{V})$. Entonces $\eta, \gamma \geqslant \beta$ y $X_{\mathcal{F}}, X_{\mathcal{W}} \subseteq X_{\mathcal{V}}$. Así $x_\eta, x_\gamma \in X_{\mathcal{V}}$. De donde $\mathcal{V} \in \rho(x_\eta, x_\gamma)$ para todo $\eta, \gamma \geqslant \beta$. Por lo tanto $(x_{\varphi(\lambda,\mathcal{U})})_{(\lambda,\mathcal{U})\in\Gamma}$ es una subred $\mathfrak{O}$-Cauchy.

Ahora, supongamos que cada red de puntos de X tiene una subred $\mathfrak{O}$-Cauchy. Para obtener una contradicción, supondremos que X no es totalmente acotado. Por Proposición 4.9, existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ tal que $\{\mathrm{St}[x, \mathcal{U}] : x \in X\}$ no tiene subcubiertas finitas de X. Sea $\mathtt{F} = \{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}$. Entonces $(\mathtt{F}, \subseteq)$ es un conjunto dirigido. Para cada $F \in \mathtt{F}$, sea $x_F \in X - \bigcup_{y\in\mathtt{F}} \mathrm{St}[y, \mathcal{U}]$. Obtenemos que $(x_F)_{F\in\mathtt{F}}$ es una red de elementos de X. Por lo tanto, existe una función creciente y cofinal $\varphi : \Lambda \to \mathtt{F}$ tal que $(x_{\varphi(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ es un subred $\mathfrak{O}$-Cauchy de $(x_F)_{F\in\mathtt{F}}$. Entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\varphi(\gamma)}, x_{\varphi(\delta)})$ para cada $\gamma, \delta \geqslant \lambda_0$. Existe $\theta \in \Lambda$ tal que $F_{\lambda_0} \cup \{x_{F_{\lambda_0}}\} \subseteq F_\theta$. Entonces existe $\pi \in \Lambda$ tal que $\lambda_0 \leqslant \pi$ y $\theta \leqslant \pi$. Así $F_{\lambda_0} \subseteq F_\pi$ y $F_\theta \subseteq F_\pi$, además $\mathcal{U} \in \rho(x_{\varphi(\lambda_0)}, x_{\varphi(\pi)})$. De donde $x_{\varphi(\pi)} \in X - \bigcup\{\mathrm{St}[y, \mathcal{U}] : y \in F_\pi\}$. Esto es una contradicción. Concluimos que X es totalmente acotado. $\square$

Teorema 5.8. *Un espacio de Hausdorff admisible $(X, \mathfrak{O})$ es compacto si y sólo si $(X, \mathfrak{O})$ es completo y totalmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es compacto. Entonces para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{O}$ la cubierta abierta $\{\mathrm{Int}\,\mathrm{St}[x, \mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathfrak{O}\}$ tiene una subcubierta finita. Por Proposición 4.9, X es totalmente acotado.

Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red $\mathfrak{O}$-Cauchy en X, entonces $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tiene una subred convergente en X. Por Proposición 5.4, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge en X. Se concluye que X es completo.

Supongamos que X es completo y totalmente acotado. Por Proposición 5.7, para cada red de puntos de X existe una subred $\mathfrak{O}$-Cauchy. Del hecho que X es completo, cada red $\mathfrak{O}$-Cauchy de puntos de X es convergente en X. Por Teorema 2.5, X es compacto. $\square$

Agradecimientos. Los autores agradecen al referí por sus invaluables sugerencias que mejoraron la redacción de este trabajo.

Bibliografía

[1] R. W. M. Alves, V. H. L. Rocha, and J. A. Souza, *A characterization of completely regular spaces*, Int. J. Math. **26** (2015), no. 3, 4, Id/No 1550032.

[2] R. W. M. Alves and J. A. Souza, *Cantor-Kuratowski theorem in admissible spaces*, Topology Appl. **252** (2019), 158–168.
[3] R. W. M. Alves and J. A. Souza, *Hyperconvergence in topological dynamics*, Monatsh. Math. **196** (2021), no. 2, 357–387.
[4] S. Willard, *General topology*, Dover, 2004.

Correos electrónicos:
math290705@gmail.com (Martha Hernández-Castañeda)
dmayae@uaemex.mx, dmayae@outlook.com (David Maya)
forozco@uaemex.mx (Fernando Orozco-Zitli)

CAPÍTULO 6

Dimensión del hiperespacio de subconjuntos compactos

Alfredo Zaragoza-Cordero[1]
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

1. Introducción

En teoría de la dimensión, es conocido que el hiperespacio de subconjuntos compactos de un espacio cero-dimensional es cero-dimensional con la topología de Vietoris. Pero en general, si tenemos un espacio de dimensión positiva, entonces la dimensión de su hiperespacio de subconjuntos compactos con la topología de Vietoris es superior a la del espacio original. Por ejemplo, el hiperespacio de subconjuntos compactos de $[0,1]$ con la topología de Vietoris no tiene dimensión finita (ver Teorema 2.21). Una pregunta natural que surge de lo anterior es la siguiente : ¿Existe una clase de espacios $\mathcal{C}$ tal que para cada $X \in \mathcal{C}$, X no es cero-dimensional y la dimensión de X y la dimensión de su hiperespacio de subconjuntos compactos con la topología de Vietoris es la misma?

El objetivo de este trabajo es presentar algunos ejemplos de espacios de dimensión 1 tales que su hiperespacio de subconjuntos compactos con la topología de Vietoris tiene dimensión 1. El trabajo se encuentra dividido de la siguiente manera: primero damos algunas notaciones y definiciones que utilizaremos a lo largo de este trabajo, posteriormente estudiaremos los espacios casi cero-dimensionales y sus propiedades básicas, y en la última parte daremos los ejemplos principales de este trabajo.

2. Preliminares

En la presente sección introducimos la notación, definiciones y resultados sobre teoría de la dimensión e hiperespacios que usaremos durante este trabajo. Se asumirá que todos los espacios son separables y metrizables, es decir, todos los espacios X tienen un subconjunto denso numerable y existe una métrica en X que

[1]El autor contó con apoyo de la beca Estancias Posdoctorales por México del CONAHCyT con el número 696239.

genera la topología de X. Escribimos $X \approx Y$ para denotar el hecho de que X es homeomorfo al espacio Y. Por ω denotamos al conjunto de números naturales incluido el cero, $\mathbb{N}$ es el conjunto $\omega \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}$ es el conjunto de números racionales, $\mathbb{P}$ es el conjunto de números irracionales, 2^ω es el conjunto de Cantor y $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales.

Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Escribiremos $int_X(A)$, $cl_X(A)$ y $bd_X(A)$ para referirnos al interior, a la cerradura, y a la frontera de A en X, respectivamente.

Un espacio X es **cero-dimensional** si tiene una base de conjuntos cerrado-abiertos, y X es un espacio **totalmente-disconexo** si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un subconjunto cerrado-abierto U de X tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Notemos que si X es cero-dimensional, entonces X es totalmente-disconexo.

Un espacio X es de dimensión 1 si no es cero-dimensional y tiene una base de vecindades β tal que $bd_X(U)$ cero-dimensional, para cualquier $U \in \beta$. Si X es de dimensión 1, entonces escribimos $dim(X) = 1$. En general, podemos definir la dimensión de un espacio X para cualquier $n \in \mathbb{N}$ (ver [**9**]), pero en este trabajo solo usaremos la definición de dimensión 0 y 1. A continuación damos algunos ejemplos de espacios cero-dimensionales.

Proposición 2.1. *Cualquier espacio finito X es cero-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dado que X es métrico podemos encontrar subconjuntos abiertos de X, $U_1, \ldots, U_n$ tales que $x_i \in U_i$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ para $i, j \leqslant n$. Notemos que para cualquier $i \leqslant n$ se tiene que $X \cap U_i = \{x_i\}$. Esto implica que X es discreto. Por lo tanto, $\{x_i\}$ es un subconjunto cerrado-abierto de X. Sea $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$, entonces β es una base de cerrado-abiertos de X. Por lo tanto, X es cero-dimensional. $\square$

De la Proposición anterior se deduce que, si A es un subconjunto finito de un espacio X, entonces A es cero-dimensional. Antes de dar ejemplos más interesantes de espacios cero-dimensionales, presentamos una equivalencia del concepto de cero-dimensionalidad.

Proposición 2.2. *Un espacio X es cero-dimensional si y solo si tiene una base β tal que para cada $U \in \beta$ se tiene que $bd_X(U) = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Si X tiene una base β de cerrado-abiertos, entonces claramente $bd_X(U) = \emptyset$ para cada $U \in \beta$. Por otro lado, si X tiene una base β tal que para cada $U \in \beta$, se cumple que $bd_X(U) = \emptyset$. Entonces $cl_X(U) \cap cl_X(X \setminus U) = \emptyset$. Vamos a demostrar que $cl_X(U) \subset U$. Como $cl_X(U) \cap cl_X(X \setminus U) = \emptyset$, se tiene que $cl_X(U) \cap X \setminus U = \emptyset$. Esto implica $cl_X(U) \subset U$. Por lo tanto $cl_X(U) \subset U$, es decir, U es un subconjunto cerrado-abierto de X. $\square$

Proposición 2.3. *El espacio $\mathbb{Q}$ es cero-dimensional, con la topología heredada de $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 2.2, vamos a demostrar que $\mathbb{Q}$ tiene una base formada por conjuntos con frontera vacía. Sea $p \in \mathbb{Q}$ y $U = (p - \epsilon, p + \epsilon)$ un abierto básico de p en $\mathbb{R}$, con $\epsilon > 0$. Dado que $\mathbb{P}$ es un subconjunto denso en $\mathbb{R}$, podemos encontrar un $r < \epsilon$ tal que la vecindad $V := (p - r, p + r) \subset U$ y $p - r, p + r \notin \mathbb{Q}$. Notemos que $V \cap \mathbb{Q}$ es una vecindad de p en $\mathbb{Q}$ y $bd_{\mathbb{Q}}(V) = \emptyset$. Esto implica que $\mathbb{Q}$ es cero-dimensional. $\square$

Utilizando un argumento similar al de la Proposición 2.3 se puede demostrar que $\mathbb{P}$ es cero-dimensional con la topología heredada de $\mathbb{R}$. La siguiente Proposición es una generalización de la Proposición 2.3.

Proposición 2.4. *Cualquier espacio numerable X es cero-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN:
Sean $p \in X$, $\epsilon > 0$, $B(p,\epsilon) = \{x \in X : d(x,p) < \epsilon\}$ y $\mathcal{A} = \{d(x,p) : x \in X\}$. Notemos que $\mathcal{A}$ es numerable ya que X lo es. Dado que $(0,\epsilon)$ no es numerable, podemos encontrar un número $\delta \in (0,\epsilon)\setminus\mathcal{A}$. Consideremos el conjunto $B(p,\delta)$, entonces $B(p,\delta) \subset B(p,\epsilon)$, y por la elección del número δ se tiene que $bd_X(B(p,\delta)) = \emptyset$. Por lo tanto, X es cero-dimensional. □

Se deduce de la Proposición 2.4 que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ los espacios $\mathbb{N}^n$ y $\mathbb{Q}^n$ son cero-dimensionales.

Proposición 2.5. *Sean $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios cero-dimensionales, entonces $X = \prod\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es cero-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ y U un subconjunto abierto básico X tal que $x \in U$, entonces existen $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de $X_1, \ldots, X_n$, respectivamente, tales que $U = \bigcap_{k\leqslant n} \pi_k^{\leftarrow}[U_k]$ (donde $\pi_k : X \to X_k$ es la proyección). Para cada $k \leqslant n$, dado que $x \in U$ se tiene que $x_k \in U_k$ y como X_k es un espacio cero-dimensional, entonces existe un subconjunto cerrado-abierto V_k de X_k, tal que $x_k \in V_k \subset U_k$. Sea $V = \bigcap_{k\leqslant n} \pi_k^{\leftarrow}[V_k]$, entonces $x \in V \subset U$. Más aún dado que V_k es un subconjunto cerrado-abierto de X_k para cualquier $k \leqslant n$, entonces V es un subconjunto cerrado-abierto de X. Por lo tanto X es un espacio cero-dimensional. □

De la Proposición 2.5 se sigue que $\mathbb{Q}^\omega$, 2^ω y $\mathbb{P}^\omega$ son espacios cero-dimensionales. El resultado anterior no es válido en general para espacios de dimensión 1, es decir, el producto numerable de espacios de dimensión 1 no necesariamente es de dimensión 1. Por ejemplo, si consideramos al espacio $X = [0,1]$, se sabe que la dimensión de X^ω no es 1. Pero si es posible que el producto numerable de cierta clase de espacios de dimensión 1 tenga dimensión 1. En la siguiente sección veremos una de esta clase de espacios. Ahora daremos algunos ejemplos de espacios de dimensión 1.

Proposición 2.6. $dim(\mathbb{R}) = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la base $\beta = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$ de $\mathbb{R}$. Notemos que para cada $U \in \beta$ se tiene que $bd_{\mathbb{R}}((a,b)) = \{a,b\}$. Dado que cualquier subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es cero-dimensional, entonces para cualquier $U \in \beta$ se tiene que $bd_{\mathbb{R}}(U)$ es cero-dimensional. Por otro lado, $\mathbb{R}$ no es cero-dimensional ya que es un espacio conexo. Por lo tanto $dim(\mathbb{R}) = 1$. □

De manera análoga a la demostración de la Proposición 2.6 tenemos que si U es un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces $dim(U) = 1$.

Proposición 2.7. *Si X y Y son homeomorfos y $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $h[bd_X(A)] = bd_Y(h[A])$ para cualquier subconjunto A de X.*

DEMOSTRACIÓN: Dado que h es un homeomorfismo, para cualquier $A \subset X$ se tiene que $h[cl_X(A)] = cl_Y(h[A])$. Como h es homeomorfismo, y en particular h

es biyectiva; así para cualesquiera $A, B \subset X$ se cumple $h[A \setminus B] = h[A] \setminus h[B]$ y $h[A \cap B] = h[A] \cap h[B]$. Por lo tanto, se tiene que

$$h[bd_X(A)] = h[cl_X(A) \cap cl_X(X \setminus A)] = h[cl_X(A)] \cap h[cl_X(X \setminus A)] =$$
$$cl_Y(h[A]) \cap cl_Y(h[X \setminus A]) = cl_Y(h[A]) \cap cl_Y(h[X] \setminus h[A]) =$$
$$cl_Y(h[A]) \cap cl_Y(Y \setminus h[A]) = bd_Y(h[A]).$$

□

El siguiente teorema muestra que la propiedad de ser cero-dimensional o de dimensión 1 es un invariante topológico.

Teorema 2.8. *Si $X \approx Y$, entonces $dim(X) = dim(Y)$.*

Demostración: Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo y para cada base β_X de X consideramos la base $\beta_h = \{h[U] : U \in \beta_X\}$ de Y.

Si X es un espacio cero-dimensional, entonces por la Proposición 2.2 existe una base β_X de X tal que para cualquier $U \in \beta$ se tiene que $bd_X(U) = \emptyset$. Por otro lado, dado que h es un homeomorfismo y por la Proposición 2.7, para cada $h[U] \in \beta_h$ tenemos que $h[bd_X(U)] = bd_Y(h[U])$, esto implica que $bd_Y(h[U]) = \emptyset$. Por la Proposición 2.2 concluimos que Y es cero-dimensional.

Ahora supongamos que X es de dimensión 1 y β_X es una base de vecindades tal que para $U \in \beta_X$ tenemos que $dim(bd_X(U)) = 0$. Vamos a demostrar que para $h[U] \in \beta_h$ se tiene que $dim(bd_h(U)) = 0$. Por la Proposición 2.7 para $h[U] \in \beta_h$ se tiene que $h[bd_X(U)] = bd_Y(h[U])$. Usando el caso cero-dimensional tenemos que $bd_Y(h[U])$ es cero-dimensional dado que, $bd_X(U)$ es cero-dimensional. Como X no es cero-dimensional, usando nuevamente el caso cero-dimensional, tenemos que Y no es cero-dimensional. Concluimos que $dim(Y) = 1$ □

Con el Teorema anterior podemos dar una demostración del siguiente Corolario.

Corolario 2.9. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, entonces $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ es de dimensión 1.*

Demostración: Sean $\varphi : \mathbb{R} \to G_f$, definida por $\varphi(x) = (x, f(x))$, $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las proyecciones a la primera y segunda coordenada, respectivamente. Claramente la función φ es biyectiva. Además, dado que x y f son funciones continuas, tenemos que $x = \pi_1 \circ \varphi$ y $f = \pi_2 \circ \varphi$ son funciones continuas. Esto implica que φ es una función continua. Por otro lado, notemos que $\pi_1 \upharpoonright G_f$ es la inversa de φ. Por lo tanto φ es un homeomorfismo, es decir, $\mathbb{R}$ y G_f son homeomorfos. De la Proposición 2.6 y el Teorema 2.8 concluimos que $dim(G_f) = 1$. □

El siguiente lema relaciona la dimensión de un subespacio con respecto al espacio que lo contiene.

Lema 2.10. *Sea X un espacio. Si A es un subconjunto de X, entonces $dim(A) \leqslant dim(X)$.*

Demostración: Si A es un subconjunto de X, entonces para cada B subconjunto de X, se tiene que

$$bd_A(A \cap B) \subset bd_X(B),$$

ya que $cl_A(A \cap B) \subset cl_X(B)$ y $cl_A(A \setminus B) \subset cl_X(X \setminus B)$. Ahora probaremos el resultado. Para el caso en el que X es un espacio cero-dimensional tenemos que si U es un cerrado-abierto de X, entonces $A \cap U$ es cerrado-abierto en A, esto implica que si β es una base de cerrado-abiertos de X, entonces $\{A \cap U : U \in \beta\}$ es una base de cerrado-abiertos de A. Esto implica que A es cero-dimensional. Ahora supongamos que $dim(X) = 1$ y sea β una base tal que para cualquier $U \in \beta$, $dim(bd_X(U)) = 0$. Como $\{A \cap U : U \in \beta\}$ es una base para A, se tiene que $bd_A(A \cap U) \subset bd_X(U)$, y $dim(bd_X(U)) = 0$. Así por el caso cero-dimensional, se tiene que $bd_A(A \cap U) = \emptyset$ o $dim(bd_A(A \cap U)) = 0$, es decir A tiene dimensión 0 o 1. Por lo tanto $dim(A) \leqslant dim(X)$. □

Observemos que por el Lema 2.10 tenemos que cualquier subespacio no vacío de un espacio cero-dimensional es cero-dimensional. Y cualquier subespacio no vacío de un espacio de dimensión 1 es cero-dimensional o de dimensión 1.

Definición 2.11. *Sean A y B dos subconjuntos de un espacio X. Decimos que A y B están **separados** en X si existen subconjuntos cerrado-abiertos ajenos E y F de X tales que $A \subset E$, $B \subset F$ y $X = E \cup F$.*

Utilizando la definición anterior podemos enunciar la siguiente equivalencia del concepto espacio cero-dimensional.

Teorema 2.12. *Para un espacio X los siguientes enunciados son equivalentes:*
- *(a) X es cero-dimensional.*
- *(b) Cada $p \in X$ y cada subconjunto cerrado C en X con $p \notin C$ se pueden separar en X.*
- *(c) Cualesquiera dos subconjuntos cerrados ajenos C y D de X se pueden separar en X.*

Demostración: La implicación $(c) \Rightarrow (b)$ es clara. Ahora vamos a probar la implicación $(b) \Rightarrow (a)$. Sean $p \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Por hipótesis p y $X \setminus U$ se pueden separar en X, es decir existen subconjuntos cerrado-abiertos ajenos E y F tales que $p \in E$, $X \setminus U \subset F$ y $X = E \cup F$, esto implica que $p \in E \subset U$. Por lo tanto X es cero-dimensional.
$(a) \Rightarrow (c)$ Sean C y D dos subconjuntos cerrados y ajenos de X. Como X es cero-dimensional, para cada $x \in X$ existe un subconjunto cerrado-abierto U_x tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap C = \emptyset$ o $U_x \cap D = \emptyset$. Además, como X es separable, existe una base numerable de cerrado-abiertos β tal que para cada $U \in \beta$ se tiene $U \cap C = \emptyset$ o $U \cap D = \emptyset$. Supongamos que $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ y definimos $V_1 = U_1$ y $V_n = U_n \setminus \bigcup_{j<n-1} U_j$ para $n \geqslant 2$. Por la construcción de los conjuntos $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ se cumplen las siguientes propiedades:
1. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$.
2. $V_n \cap V_j = \emptyset$ para cualesquiera $j, n \in \mathbb{N}$.
3. V_n es un subconjunto cerrado-abierto de X para cada $n \in \mathbb{N}$.
4. $V_n \cap C = \emptyset$ o $V_n \cap D = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sean
$$E = \bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N} \text{ y } V_n \cap D = \emptyset\} \text{ y } F = \bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N} \text{ y } V_n \cap D \neq \emptyset\}.$$
Vamos a demostrar que E y F separan a C y D en X. Notemos que 1 implica que $X = E \cup F$, 2 implica que $E \cap F = \emptyset$, 3 implica que E y F son subconjuntos abiertos de X, y 1 y 4 implican $C \subset E$ y $D \subset F$. □

Teorema 2.13. *Un espacio X que es unión numerable de subespacios cerrados cero-dimensionales es cero-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ donde C_n es un subconjunto cerrado de X y $dim(C_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean A y B dos subconjuntos cerrados y ajenos de X. Vamos a demostrar que A y B pueden ser separados en X. Para eso vamos a construir por recursión subconjuntos abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X con las siguientes propiedades:

(1) $C_n \subset U_n \cup V_n$,
(2) para $n \geqslant 2$, $U_{n-1} \subset U_n$, $V_{n-1} \subset V_n$ y $cl_X(U_n) \cap cl_X(V_n) = \emptyset$,
(3) $A \subset U_1$ y $B \subset V_1$.

Dado que $A \cap C_1$ y $B \cap C_1$ son dos subconjuntos cerrados ajenos en C_1 y C_1 es cero-dimensional por el Teorema 2.12 existen subconjuntos cerrados-abiertos E_1 y F_1 de C_1 tales que $E_1 \cup F_1 = C_1$, $E_1 \cap F_1 = \emptyset$ y

$$A \cap C_1 \subset E_1 \text{ y } B \cap C_1 \subset F_1.$$

Por otro lado como C_1 es un subconjunto cerrado en X, se tiene que E_1 y F_1 son subconjuntos cerrados en X. Por lo tanto $E_1 \cup A$ y $F_1 \cup B$ son subconjuntos cerrados y ajenos de X. Por la normalidad de X existen conjuntos abiertos U_1 y V_1 de X tales que $cl_X(U_1) \cap cl_X(V_1) = \emptyset$ y,

$$A \cup E_1 \subset U_1 \text{ y } B \cup F_1 \subset V_1.$$

Como $E_1 \cup F_1 = C_1$, $A \cup E_1 \subset U_1$ y $B \cup F_1 \subset V_1$, tenemos que $C_1 \subset U_1 \cup V_1$. Esto completa el primer paso. Supongamos que hemos construido los conjuntos U_n y V_n con las propiedades requeridas. Consideremos los conjuntos $A_n = cl_X(U_n) \cap C_{n+1}$ y $B_n = cl_X(V_n) \cap C_{n+1}$, notemos que $A_n \cap B_n = \emptyset$. Como C_{n+1} es cero-dimensional y A_n y B_n son dos subconjuntos cerrados ajenos de C_{n+1} por el Teorema 2.12 existen subconjuntos cerrado-abiertos E_{n+1} y F_{n+1} de C_{n+1} tales que $E_{n+1} \cup F_{n+1} = C_{n+1}$, $E_{n+1} \cap F_{n+1} = \emptyset$ y

$$A_n \cap C_{n+1} \subset E_{n+1} \text{ y } B_n \cap C_{n+1} \subset F_{n+1}.$$

Dado que C_{n+1} es un subconjunto cerrado en X, se tiene que E_{n+1} y F_{n+1} son subconjuntos cerrados en X. Por lo tanto $E_{n+1} \cup cl_X(U_n)$ y $F_{n+1} \cup cl_X(V_n)$ son subconjuntos cerrados ajenos de X. Por la normalidad de X existen conjuntos abiertos U_{n+1} y V_{n+1} de X tales que $cl_X(U_{n+1}) \cap cl_X(V_{n+1}) = \emptyset$,

$$A_n \cup E_{n+1} \subset U_{n+1} \text{ y } B_n \cup F_{n+1} \subset V_{n+1}.$$

Como $E_{n+1} \cup F_{n+1} = C_{n+1}$, $A_n \cup E_{n+1} \subset U_{n+1}$ y $B_n \cup F_{n+1} \subset V_{n+1}$, tenemos que $C_{n+1} \subset U_{n+1} \cup V_{n+1}$ y $cl_X(U_n) \subset cl_X(U_{n+1})$ $cl_X(V_n) \subset cl_X(V_{n+1})$. Esto completa la recursión.

Consideremos los conjuntos abiertos $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, veamos que U y V separan a A y B en X. De la condición 1 se sigue que $X = U \cup V$, dado que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$; la condición 2 implica que si $n, k \in \mathbb{N}$ y $m = max\{n, k\}$, entonces $U_n \cap V_k \subset U_m \cap V_m = \emptyset$, es decir $U \cap V = \emptyset$; y la condición 3 implica que $A \subset U$ y $B \subset V$. Por lo tanto, U y V separan a A y B en X. Por el Teorema 2.12 concluimos que X es un espacio cero-dimensional. $\square$

El Teorema 2.13 no es válido si se omite la hipótesis de que los subconjuntos C_n sean cerrados en X. Por ejemplo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{P}$, y $dim(\mathbb{Q}) = dim(\mathbb{P}) = 0$, pero $dim(\mathbb{R}) = 1$.

Corolario 2.14. *Un espacio X que es unión numerable de subespacios F_σ cero-dimensionales es cero-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y que cada F_n es un subconjunto F_σ y cero-dimensional de X. Como F_n es un subconjunto F_σ de X, existe una familia de cerrados $\{F_n^m : m \in \mathbb{N}\}$ tal que $F_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_n^m$, más aún, dado que $F_n^m \subset F_n$, por el Lema 2.10 se tiene que F_n^m es cero-dimensional. Se sigue que $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^m$ es unión numerable de subespacios cerrados de dimensión cero. Por el Teorema 2.13 se concluye que X es cero-dimensional. □

Proposición 2.15. *Sea X un espacio y $A, B \subset X$ no vacíos, entonces*

$$dim(A \cup B) \leqslant dim(A) + dim(B) + 1.$$

DEMOSTRACIÓN:

Dado que $A, B \subset X$, del Lema 2.10, se deduce que $dim(A\cup B) \leqslant dim(X) \leqslant 1$. Esto implica que

$$dim(A \cup B) \leqslant dim(X) \leqslant 1 \leqslant dim(A) + dim(B) + 1.$$

□

Proposición 2.16. *Un espacio X de dimensión uno se puede escribir como unión de dos subespacios cero-dimensionales.*

DEMOSTRACIÓN: Sea β una base numerable de X tal que para cada $U \in \beta$ se tiene que $dim(bd_X(U)) = 0$ o $bd_X(U) = \emptyset$. Sea $A = \bigcup_{U\in\beta} bd_X(U)$, dado que $bd_X(U)$ es un subconjunto cerrado de X, por el Teorema 2.13 tenemos que A es cero-dimensional. Ahora vamos a demostrar que $B = X \setminus A$ es cero-dimensional. Observemos que el conjunto $\{U \cap B : U \in \beta\}$ es una base para B. Por otro lado, para cada $U \in \beta$, se cumple que $bd_B(U \cap B) \subset bd_X(U) \subset A$ y $bd_B(U \cap B) \subset B$. Dado que $A \cap B = \emptyset$, cada elemento de β tiene frontera vacía. Por lo tanto B es cero dimensional. □

Teorema 2.17. *Si X es la unión numerable de subespacios F_σ de dimensión 1, entonces la dimensión de X es 1.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ donde cada X_n es un subconjunto F_σ de dimensión 1 de X. Dado que X_n es unión numerable de subconjuntos cerrados de X, podemos escribir a $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ donde C_n es un subconjunto cerrado de X y $dim(C_n) \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $K_1 = C_1$ y sea $K_n = C_n \setminus \bigcup_{k\leqslant n-1} C_k$ para $k \geqslant 2$. Notemos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ y $K_n \cap K_k = \emptyset$. Dado que K_1 es un subconjunto cerrado en X, K_1 es un subconjunto F_σ de X. Para $n \geqslant 2$ note que K_n es intersección del cerrado C_n y el abierto $X \setminus \bigcap_{k\leqslant n-1} C_k$ de X; por lo tanto K_n es un subconjunto F_σ de X, pues $X \setminus \bigcap_{k\leqslant n-1} C_k$ es un subconjunto F_σ de X. Además como $K_n \subset C_n$ por el Lema 2.10 se tiene $dim(K_n) \leqslant 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, usando las Proposiciones 2.16 y 2.15, tenemos que existen subespacios Y_n y Z_n de K_n tales que $K_n = Y_n \cup Z_n$, y $dim(Y_n) = dim(Z_n) = 0$. Sean

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \text{ y } Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n.$$

Notemos que $X = Y \cup Z$. Para terminar vamos a demostrar que $dim(Y) = dim(Z) = 0$. Por el Teorema 2.13 es suficiente ver que cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos Y_n y Z_n son subconjuntos F_σ de Y y Z respectivamente. Para $k \neq n$, dado que $Y_k \subset K_k$, se cumple que $Y_k \cap K_n \subset K_k \cap K_n = \emptyset$. Esto implica que $Y_n = Y \cap K_n$. Como K_n es un conjunto F_σ de X, tenemos que Y_n es un subconjunto F_σ de Y. Un argumento similar se usa para demostrar que Z_n es un subconjunto F_σ de Z. Por el Teorema 2.13 los espacios Y y Z son cero-dimensionales.

Por la Proposición 2.16 tenemos que

$$1 = dim(X_i) \leqslant dim(X) = dim(Y \cup Z) \leqslant 1 + dim(Y) + dim(Z) = 1.$$

Por lo tanto $dim(X) = 1$. □

A continuación presentamos los conceptos y resultados de hiperespacios que usaremos en la sección 4. Sea X un espacio, definimos a $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ como el conjunto de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X. Para $n \in \mathbb{N}$ y subconjuntos $U_1, \ldots, U_n$ de un espacio X, denotamos por $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ a la colección $\{F \in \mathcal{K}(X) : F \subset \bigcup_{k \leqslant n} U_k, F \cap U_k \neq \emptyset, k \leqslant n\}$. Vamos a dotar a $\mathcal{K}(X)$ con la Topología de Vietoris cuya base canónica son todos los conjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ donde U_k es un subconjunto abierto no vacío de X para cada $k \leqslant n$.

El siguiente resultado expone algunas de las propiedades de los conjuntos definidos anteriormente.

Proposición 2.18. *Sean X un espacio y $U, U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos de X.*

(a) Si U es un subconjunto cerrado de X, entonces $\langle U \rangle$ y $\langle U, X \rangle$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{K}(X)$.
(b) $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \langle \bigcup_{k \leqslant n} U_k \rangle \cap \langle U_1, X \rangle \cap \cdots \cap \langle U_n, X \rangle$.
(c) $\langle cl_X(U_1), \ldots, cl_X(U_n) \rangle$ es un subconjunto cerrado en $\mathcal{K}(X)$.

Demostración: (a) Sea U un subconjunto cerrado de X. Entonces $\mathcal{K}(X) \setminus \langle U \rangle = \langle X \setminus U, X \rangle$ y $\mathcal{K}(X) \setminus \langle U, X \rangle = \langle X \setminus U \rangle$. Como $\langle X \setminus U, X \rangle$ y $\langle X \setminus U \rangle$ son subconjuntos abiertos en $\mathcal{K}(X)$, se tiene que $\langle U \rangle$ y $\langle U, X \rangle$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{K}(X)$.
(b) Se sigue por definición.
(c) Esta afirmación se sigue del hecho de que

$$\langle cl_X(U_1), \ldots, cl_X(U_n) \rangle = \langle \bigcup_{k \leqslant n} cl_X(U_k) \rangle \cap \langle cl_X(U_1), X \rangle \cap \cdots \cap \langle cl_X(U_n), X \rangle$$

y de que $\langle \bigcup_{k \leqslant n} cl_X(U_k) \rangle, \langle cl_X(U_1), X \rangle, \ldots, \langle cl_X(U_n), X \rangle$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{K}(X)$. □

Un hecho que no es difícil ver, es que X se puede encajar en $\mathcal{K}(X)$ para cualquier espacio X. Ya que la función, $f : X \to \mathcal{K}(X)$ definida por $f(x) = \{x\}$ es un encaje. En efecto, si $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es una vecindad de $f(x)$ en $\mathcal{K}(X)$, entonces tenemos que $x \in \bigcap_{k \leqslant n} U_k$. Así $V = \bigcap_{k \leqslant n} U_k$ es una vecindad de x en X que cumple que $f(V) \subset \mathcal{U}$, es decir f es continua. Además f es una función abierta ya que para cada subconjunto abierto U de X se tiene que $f[U] = \langle U \rangle$. Por lo tanto f es un encaje.

Proposición 2.19. *Sea X un espacio, entonces se cumple lo siguiente:*

(a) Si A es un subconjunto abierto de X, entonces $\mathcal{K}(A)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(X)$.

(b) *Si $p \in X$, entonces $\mathcal{C} = \{F \in \mathcal{K}(X) : p \in F\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{K}(X)$*

DEMOSTRACIÓN: (a) Sea $F \in \mathcal{K}(A)$, entonces $F \subset A$, como A es métrico, existe un subconjunto abierto U de X tal que $F \subset U \subset cl_X(U) \subset A$. Sea $\mathcal{U} = \langle U \rangle$, notemos que $F \in \mathcal{U} \subset \mathcal{K}(A)$. Es decir $\mathcal{K}(A)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(X)$.

(b) Para ver que $\mathcal{C}$ es cerrado veremos que el complemento de $\mathcal{C}$ es abierto. Sea $F \in \mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{C}$, entonces $p \notin F$. Dado que X es métrico tenemos que existe un subconjunto abierto U de X tal que $F \subset U$ y $p \notin U$. Sea $\mathcal{U} = \langle U \rangle$, notemos que $F \in \mathcal{U}$. Dado que $p \notin U$ se sigue que $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{C}$. Es decir $\mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{C}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(X)$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es cerrado en $\mathcal{K}(X)$. $\square$

Dado que en los espacios métricos los subconjuntos cerrados y los subconjuntos abiertos son F_σ, se tiene que $\mathcal{K}(X) \setminus \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ son subconjuntos F_σ en $\mathcal{K}(X)$. El siguiente resultado es de utilidad para demostrar la Proposición 4.1.

Teorema 2.20. *Un espacio X es cero-dimensional si y solo si $\mathcal{K}(X)$ es un espacio es cero-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathcal{K}(X)$ es un espacio cero-dimensional. Dado que hay una copia homeomorfa de X en $\mathcal{K}(X)$ y del hecho de que la propiedad de ser un espacio cero-dimensional es hereditaria, se tiene que X es cero-dimensional. Si X es un espacio cero-dimensional, entonces existe una base β de cerrado-abiertos de X. Sea

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \ldots, U_n \in \beta \rangle\}.$$

Dado que los elementos de β son subconjuntos cerrado-abiertos de X y por la Proposición 2.18, cada $U \in \mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado-abierto de $\mathcal{K}(X)$. Vamos a demostrar que $\mathcal{B}$ es base para $\mathcal{K}(X)$.

Sean $F \in \mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle$ un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(X)$ tal que $F \in \mathcal{U}$. Para cualquier $x \in F$ hay un abierto $V_x \in \beta$ tal que $x \in V_x \subset \bigcap\{U_k : x \in U_k\}$. Entonces $\{V_x : x \in F\}$ es una cubierta abierta de F en X. Como F es un subconjunto compacto de X, existen $x_1, \ldots, x_n \in F$ tales que $F \subset \bigcup_{k \leqslant n} V_{x_k}$. Para cada $k \leqslant m$, sea $y_k \in F \cap U_k$. Notemos que $F \in \langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}, V_{y_1}, \ldots, V_{y_m} \rangle$. Veamos que $\mathcal{V} := \langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}, V_{y_1}, \ldots, V_{y_m} \rangle \subset \mathcal{U}$. Sea $H \in \mathcal{V}$, dada la elección de los V_{x_k} y los V_{y_k}, tenemos que $H \subset \bigcup_{k \leqslant n} V_{x_k} \cup \bigcup_{k \leqslant m} V_{y_k} \subset \bigcup_{k \leqslant m} U_k$. Dado $k \leqslant m$ se tiene que $\emptyset \neq H \cap V_{y_k} \subset H \cap U_k$. Así $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, y además $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, la colección $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{K}(X)$. Entonces $\mathcal{K}(X)$ es un espacio cero-dimensional. $\square$

Del resultado anterior tenemos que $\mathcal{K}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{K}(2^\omega)$ y $\mathcal{K}(\mathbb{P})$ son espacios cero-dimensionales. Recordemos que un espacio X es un **continuo** si X es compacto y conexo. La demostración del siguiente Teorema lo pueden consultar en [**2**].

Teorema 2.21 ([**2**, Teorema 14.12])**.** *Si X es un continuo con más de un punto, entonces $[0,1]^\omega$ se encaja en $\mathcal{K}(X)$.*

Proposición 2.22. *Sea X un espacio compacto de dimensión 1, entonces la dimensión de $\mathcal{K}(X)$ es infinita.*

DEMOSTRACIÓN: Como X es compacto y de dimensión 1, entonces existe una componente conexa C de X con más de un punto. Por el Teorema 2.21, $\mathcal{K}(C)$ tiene una copia de $[0,1]^\omega$. Esto implica que $\mathcal{K}(X)$ tiene una copia de $[0,1]^\omega$. $\square$

Observe que la Proposición 2.22 dice que si X es cualquier espacio tal que $dim(X) = 1$ y existe un subconjunto compacto A de X con $dim(A) = 1$, entonces la dimensión de $\mathcal{K}(X)$ es infinita. Esto nos dice que si X no es compacto y todos sus subconjuntos compactos tienen dimensión 0, $\mathcal{K}(X)$ puede tener dimensión finita. En la siguiente sección estudiamos una clase de espacios que cumplen esta propiedad.

3. Espacios casi cero-dimensionales

En esta sección vamos a estudiar la clase de los espacios casi cero-dimensiónales. El concepto de espacio casi cero-dimensional fue introducido por L. G. Oversteegen en 1994 para dar más ejemplos de espacios totalmente disconexos y no cero-dimensionales. La definición de espacio casi cero-dimensional que usaremos aquí es una equivalencia dada por Dijstra, van Mill y Steprans en [**1**].

Definición 3.1. *Un espacio (X, τ) es **casi cero-dimensional** si hay un conjunto Z que contiene a X y una topología $\mathcal{W}$ en Z tal que $(Z, \mathcal{W})$ es un espacio de cero-dimensional, $O \cap X$ es un subconjunto abierto en X para cada $O \in \mathcal{W}$, y cada punto de X tiene una base de vecindades en X que consta de conjuntos que son cerrados en $(Z, \mathcal{W})$.*

La topología $\mathcal{W}$ de la Definición 3.1 diremos que es **testigo** de la casi cero-dimensionalidad de X. De la Definición 3.1 lo siguiente es inmediato.

Observación 3.2. *Si el espacio X es casi cero-dimensional, existe un conjunto Z que contiene a X y una topología $\mathcal{W}$ en Z tal que $(Z, \mathcal{W})$ cumple las condiciones de la Definición 3.1. No es difícil ver que $(X, \mathcal{W})$ cumple las condiciones de la Definición 3.1. Por otro lado, si existe una topología $\mathcal{W}$ en X que cumple las condiciones de la Definición 3.1, entonces X es casi cero-dimensional. En conclusión, un espacio X es casi-cero dimensional si y solo si X tiene una topología más gruesa $\mathcal{W}$ tal que $(X, \mathcal{W})$ es cero-dimensional y cada $x \in X$ tiene una base de vecindades que son cerradas en $(X, \mathcal{W})$.*

De la observaci ón anterior se sigue que todo espacio cero-dimensional es casi cero-dimensional. Por lo tanto 2^ω, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^\omega$ y $\mathbb{P}^\omega$ son ejemplos de espacios casi cero-dimensionales. Antes de dar ejemplos de espacios casi cero-dimensionales no cero-dimensionales recordemos el siguiente espacio:

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{R}^\omega : \sum_{n\in\omega} x_n^2 < \infty \right\}.$$

Donde la topología de ℓ^2 es generada por la norma $\|z\| = (\sum_{n=0}^{\infty} z_n^2)^{1/2}$ donde $z \in \ell^2$.

El espacio de Erdös está definido como

$$\mathfrak{E} = \{(x_n)_{n\in\omega} \in \ell^2 : \forall n \in \omega, x_n \in \mathbb{Q}\},$$

y el espacio de Erdös completo como

$$\mathfrak{E}_c = \{(x_n)_{n\in\omega} \in \ell^2 : \forall n \in \omega, x_n \in \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}\}.$$

Estos dos espacios fueron introducidos por Erdös en 1940 en [**3**] como ejemplos de espacios totalmente disconexos y no cero-dimensionales.

Notemos que $\mathfrak{E}_c$ es un subespacio cerrado de ℓ^2. En efecto, para cualquier $z \in \ell^2 \setminus \mathfrak{E}_c$, existe $n \in \omega$ tal que $z_n \notin \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Así hay un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}$ tal que $z_n \in U$ y $U \cap (\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}) = \emptyset$. Entonces $W = \{x \in \ell^2 : x_n \in U\}$ es un subconjunto abierto de ℓ^2 tal que $z \in W \subset \ell^2 \setminus \mathfrak{E}_c$. Por lo tanto $\mathfrak{E}_c$ es un subconjunto cerrado de ℓ^2, es decir $\mathfrak{E}_c$ es completo. Esta es una propiedad que distingue a $\mathfrak{E}_c$ de $\mathfrak{E}$. A continuación vamos a demostrar que tanto $\mathfrak{E}_c$ y $\mathfrak{E}$ son espacios casi cero-dimensionales. Vamos a probar que la topología de $\mathbb{Q}^\omega$ es testigo de $\mathfrak{E}$ y que la topología de $(\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\})^\omega$ es testigo de $\mathfrak{E}_c$. Para eso demostraremos los siguientes lemas.

Lema 3.3. *Si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{Q}^\omega$, entonces $U \cap \mathfrak{E}$ es un subconjunto abierto de $\mathfrak{E}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{Q}^\omega$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U = \bigcap_{n \in F} \pi_n^{\leftarrow}[U_n]$ donde F es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y para cada $n \in F$, U_n es un subconjunto abierto de $\mathbb{Q}$. Sea $x \in U \cap \mathfrak{E}$, entonces $x_n \in U_n$. Por lo tanto para $n \in F$ existe $\epsilon_n > 0$ tal que $(x_n - \epsilon_n, x_n + \epsilon_n) \subset U_n$. Sean $\epsilon = min\{\epsilon_n : n \in F\}$ y $V = \{y \in \mathfrak{E} : \|x - y\| < \epsilon\}$, entonces V es un subconjunto abierto de $\mathfrak{E}$ tal que $x \in V$, además dado que para cada $y \in V$ y $n \in F$ se tiene que

$$|x_n - y_n| \leqslant \|x - y\| < \epsilon \leqslant \epsilon_n.$$

Esto implica que $V \subset U \cap \mathfrak{E}$. Por lo tanto $U \cap \mathfrak{E}$ es un subconjunto abierto de $\mathfrak{E}$. $\square$

De manera análoga al lema anterior se tiene que Si U es un subconjunto abierto de $(\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\})^\omega$, entonces $U \cap \mathfrak{E}_c$ es un subconjunto abierto de $\mathfrak{E}_c$.

Lema 3.4. *Para $t > 0$, el conjunto $\{x \in \ell^2 : \|x\| \leqslant t\}$ de ℓ^2 es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^\omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a demostrar que $\mathbb{R}^\omega \setminus \{x \in \ell^2 : \|x\| \leqslant t\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^\omega$. Sea $t > 0$ y supongamos que $x \in \mathbb{R}^\omega$ es tal que $\|x\| > t$. Entonces podemos encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i \leqslant m} |x_i| > t^2$. Dado que la suma es una función continua en el vector $(x_0, \ldots, x_m)$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $\sum_{i \leqslant m} |y_i| > t^2$ siempre que $|x_i - y_i| < \delta$ para $0 \leqslant i \leqslant m$. Consideremos la vecindad abierta básica U de x con respecto a la topología del producto en $\mathbb{R}^\omega$ dada por

$$U = \{y \in \mathbb{R}^\omega : |x_i - y_i| < \delta \text{ para } 0 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Notemos que $\|y\| > t$ para todo $y \in U$. $\square$

Ahora veamos que $\mathfrak{E}$ es casi cero-dimensional. Por el Lema 3 $U \cap \mathfrak{E}$ es un subconjunto abierto en $\mathfrak{E}$ para cada U subconjunto abierto de $\mathbb{Q}^\omega$. Del Lema 3.4 se tiene que para todo $\epsilon > 0$ y $x \in \mathfrak{E}$ el conjunto $\{y \in \mathfrak{E} : \|x - y\| \leqslant \epsilon\}$ es una vecindad cerrada de x en $\mathfrak{E}$ que también es un subconjunto cerrado en $\mathbb{Q}^\omega$. Esto significa que cada punto en $\mathfrak{E}$ tiene vecindades que son conjuntos cerradas en $\mathbb{Q}^\omega$. Con argumentos similares se demuestra que $\mathfrak{E}_c$ es casi cero-dimensional.

Lo anterior nos dice que los espacios $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}_c$ son espacios casi cero-dimensionales y que $\mathbb{Q}^\omega$ es testigo de la casi cero-dimensionalidad de $\mathfrak{E}$ y el espacio $(\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\})^\omega$ es testigo de la casi cero-dimensionalidad de $\mathfrak{E}_c$. Para terminar demostramos que $dim(\mathfrak{E}) = 1$. Recordemos que un subconjunto A de ℓ^2 se llama **acotado** si está acotado en norma, es decir, si hay un $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|a\| \leqslant M$ para todo $a \in A$. Si

A no está acotado, lo llamamos no acotado. Dados dos subconjuntos de un espacio X con métrica d, definimos $dis(A, B)$ como el conjunto:

$$\inf\{d(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Teorema 3.5. *$dim(\mathfrak{E}) = 1$.*

Demostración: Primero vamos a demostrar que $\mathfrak{E}$ es homogéneo es decir, que para cualesquiera $x', y' \in \mathfrak{E}$ existe un homeomorfismo $h : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ tal que $h(x') = y'$. Sea $h : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ definida por $h(x) = x + (y' - x')$, donde la suma y resta se hace en cada coordenada. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $h(x) \in \mathfrak{E}$ es decir h está bien definida, no es difícil ver que h es un homeomorfismo.

Ahora veremos que para cualquier vecindad abierta y acotada U del vector $o := (0, 0, 0, \ldots)$ en $\mathfrak{E}$, $bd_{\mathfrak{E}}(U) \neq \emptyset$. Sea $L_1 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : x_n = 0 \text{ para todo } n \geqslant 2\}$, notemos que $o \in U \cap L_1$. Dado que $U \cap L_1$ es un subconjunto abierto y acotado de L_1 existe un $a_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $q_1 = (a_1, 0, 0, \ldots)$ satisface lo siguiente:

$$q_1 \in U \cap L_1 \text{ y } dis(q_1, L_1 \setminus U) < 1.$$

Ahora consideremos $L_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : x_1 = a_1, x_n = 0 \text{ para todo } n \geqslant 3\}$, tenemos que $q_1 \in U \cap L_2$. Dado que $U \cap L_2$ es un subconjunto abierto y acotado de L_2 existe un $a_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $q_2 = (a_1, a_2, 0, 0, \ldots)$ y satisface lo siguiente:

$$q_2 \in U \cap L_2 \text{ y } dis(q_2, L_2 \setminus U) < 1/2.$$

Continuando con este proceso, encontramos una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

(1) $q_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0 \ldots) \in U \cap \mathbb{Q}^\omega$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$,
(2) $dis(q_n, \mathfrak{E} \setminus U) < 1/n$.

Afirmamos que $q = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in bd_{\mathfrak{E}}(U)$. Primero veamos que $q \in \ell^2$. Dado que $q_n \in U$, entonces $\|q_n\| < diam(U)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_{j\leqslant n} a_j^2 < dim(U)^2$, por lo tanto $\|q\|$ es finito, es decir $q \in \ell^2$. Así $q \in \mathfrak{E}$. Por otro lado, notemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\|q - q_n\| = \Sigma_{j\geqslant n+1} a_j^2$; por tanto $q_n \to q$. Dado que $q_n \in U$, se tiene que $q \in cl_{\mathfrak{E}}(U)$. Además como $dis(q_n, \mathfrak{E} \setminus U) < 1/n$, $q_n \to q$, el hecho de que la función dis es continua, tenemos que $dis(q, X \setminus U) = 0$. Por otro lado dado que U es un subconjunto abierto de $\mathfrak{E}$, se sigue que $q \in \mathfrak{E} \setminus U$. Esto implica que $q \in bd_{\mathfrak{E}}(U)$. Esta propiedad nos dice que $\mathfrak{E}$ no es cero-dimensional.

Para terminar, veamos que cada $x \in \mathfrak{E}$ tiene una base de vecindades β tal que cada $U \in \beta$, $dim(bd_{\mathfrak{E}}(U)) = 0$. Por la homogeneidad de $\mathfrak{E}$, es suficiente encontrar una base β del vector o tal que cada $U \in \beta$ se tiene que $dim(bd_{\mathfrak{E}}(U)) = 0$. Consideremos a $\beta = \{\{x \in \mathfrak{E} : \|x\| < 1/n\} : n \in \mathbb{N}\}$, notemos que para cada $U \in \beta$, $bd_{\mathfrak{E}}(U) = \{x \in \mathfrak{E} : \|x\| = 1/n\}$. Para demostrar que $dim(bd_{\mathfrak{E}}(U)) = 0$, consideremos la siguiente función:

$$f : bd_{\mathfrak{E}}(U) \to \textstyle\prod_{n\in\mathbb{N}}[-1/n, 1/n],$$

definida como se sigue: $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Claramente la función es inyectiva. Por el Lema 2.1 de **[9]** y el hecho de la convergencia en $\prod_{n\in\mathbb{N}}[-1/n, 1/n]$ es coordenada a coordenada tenemos que f es una función continua y cerrada, es decir f es un encaje. Por otro lado notemos que $f(bd_{\mathfrak{E}}(U))$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}^\omega$, por lo tanto $f(bd_{\mathfrak{E}}(U))$ es cero-dimensional. Esto implica que $dim(bd_{\mathfrak{E}}(U)) = 0$. Por lo tanto $dim(\mathfrak{E}) = 1$. $\square$

Para ver que el espacio $\mathfrak{E}_c$ es de dimensión 1, definiremos la dimensión local para espacios cero-dimensionales.

Definición 3.6. *Un espacio X es cero-dimensional en el punto $p \in X$ si existe una base local del punto p tal que cada elemento de la base es cerrado-abierto. Si X es cero-dimensional en el punto $p \in X$ escribimos $dim_p(X) = 0$.*

Notemos que si $dim(X) \leqslant 1$ y la dimensión en algún punto de $x \in X$ no es cero, entonces $dim(X) = 1$.

Corolario 3.7. $dim(\mathfrak{E}_c) = 1$.

Demostración: Notemos que $\mathfrak{E}_c \subset \mathfrak{E}$, por el Lema 2.10 $dim(\mathfrak{E}_c) \leqslant dim(\mathfrak{E}) = 1$. Usando un argumento similar como en la primera parte del teorema anterior podemos ver, que para cualquier vecindad abierta y acotada U del vector o en $\mathfrak{E}_c$, $bd_{\mathfrak{E}_c}(U) \neq \emptyset$ para mas detalles ver [**3**]. Por lo tanto la dimensión de $\mathfrak{E}_c$ en o no es cero. Por lo tanto $dim(\mathfrak{E}_c) > 0$. Y como $\mathfrak{E}_c \subset \mathfrak{E}$, concluimos que $dim(\mathfrak{E}_c) = 1$. □

Los resultados anteriores se le atribuyen a Erdös que en [**3**] demostró que tanto $\mathfrak{E}$ como $\mathfrak{E}_c$ son 1-dimensionales. Este resultado hace que estos espacios sean ejemplos importantes en teoría de la dimensión.

A continuación veremos algunas propiedades básicas de los espacios casi cero-dimensionales.

Proposición 3.8.
(a) Todos los espacios cero-dimensionales son casi cero-dimensionales.
(b) Cualquier subconjunto de un espacio casi cero-dimensional es casi cero-dimensional.
(c) El producto numerable de espacios casi cero-dimensionales es casi cero-dimensional.
(d) Todos los espacios casi cero-dimensionales son totalmente disconexos.

Demostración: (a) Sea $(X, \mathcal{W})$ un espacio casi cero-dimensional. Por la observación 3.2 es claro que $\mathcal{W}$ es testigo de la casi cero-dimensionalidad de X. Por lo tanto X es un espacio casi cero-dimensional.
(b) Sea X un espacio casi cero-dimensional y A un subconjunto de X. Por la observación 3.2 existe una topología $\mathcal{W}$ que es testigo de la casi cero-dimensión de X. Sea $\mathcal{W} \restriction A = \{U \cap A : U \in \mathcal{W}\}$, notemos que $\mathcal{W} \restriction A$ es una topología testigo de la casi cero-dimensión de A. Por lo tanto A es un espacio casi cero-dimensional.
(c) Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios casi cero-dimensional y $X = \prod\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por la observación 3.2 para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una topología $\mathcal{W}_n$ que es testigo de la casi cero-dimensionalidad de X_n. Sea $\mathcal{W}$ la topología producto de $\prod\{(X_n, \mathcal{W}_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que $\mathcal{W}$ es una topología testigo de la casi cero-dimensionalidad de X. Es claro que $(X, \mathcal{W})$ es un espacio cero-dimensional. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ y U un subconjunto abierto básico X tal que $x \in U$, entonces existen $U_1, \ldots, U_m$ subconjuntos abiertos de $X_1, \ldots, X_m$, respectivamente, tales que $U = \bigcap_{k\leqslant m} \pi_k^{\leftarrow}[U_k]$ (donde $\pi_k : X \to X_k$ es la proyección). Tomemos $x \in U$. Dada $k \leqslant m$ tenemos que $x_k \in U_k$, y como $\mathcal{W}_k$ es testigo de la casi cero-dimensionalidad de X_k, existe una vecindad V_k de x_k en X_k que es cerrada en $\mathcal{W}_k$ y tal que $V_k \subset U_k$. Sea $V = \bigcap_{k\leqslant m} \pi_k^{\leftarrow}[V_k]$, entonces $x \in V \subset U$. Más aun dado que V_k es un subconjunto cerrado de $(X, \mathcal{W}_k)$ para cualquier $k \leqslant m$, entonces V es un subconjunto

cerrado de $(X, \mathcal{W})$. Como $V_1, \dots, V_m$ son vecindades de $x_1, \dots, x_m$, respectivamente, entonces V es una vecindad de x en X. Por lo tanto X es un espacio casi cero-dimensional.
(d) Sea X un espacio casi cero-dimensional. Por la Observación 3.2 existe una topología $\mathcal{W}$ que es testigo de la casi cero-dimensionalidad de X. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, como $(X, \mathcal{W})$ es un espacio casi cero-dimensional existe un subconjunto cerrado-abierto U de $(X, \mathcal{W})$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Como $\mathcal{W}$ es una topología más gruesa que la topología de X tenemos que U es un cerrado-abierto en la topología de X. Por lo tanto X es totalmente disconexo. $\square$

Notemos que, si X es un espacio casi cero-dimensional y $\mathcal{W}$ es una topología testigo de X, entonces la función $id : X \to (X, \mathcal{W})$ es continua. Más aún si A es un subconjunto compacto de X, entonces $id \restriction A$ es un homeomorfismo. Como A es cero-dimensional en $(X, \mathcal{W})$, enotonces A es cero-dimensional en X. Por lo anterior y el punto (d) de la Proposición 3.8, tenemos que si X es un espacio localmente compacto y casi cero-dimensional, entonces X es cero-dimensional. Por lo tanto un espacio casi cero-dimensional que no sea cero-dimensional no es localmente compacto. De esto se sigue que si X es un espacio casi cero-dimensional, entonces todos sus subconjuntos compactos son cero-dimensionales. En la siguiente sección veremos que si X es un espacio casi cero-dimensional de dimensión 1, entonces se cumple que $dim(X) = dim(\mathcal{K}(X)) = 1$.

Para terminar esta sección damos una caracterización de los espacios casi cero-dimensionales con la noción de C-conjunto. Recordemos que un subconjunto A de un espacio X es un **C-conjunto** si existe una familia $\mathcal{A}$ de cerrado-abiertos de X tal que $\bigcap \mathcal{A} = A$. En este caso, como estamos suponiendo que todos nuestros espacios son métricos separables, podemos suponer que la familia $\mathcal{A}$ es numerable.

Teorema 3.9. *Un espacio X es casi cero-dimensional si y solo si X tiene una base de C-conjuntos.*

Demostración: Supongamos que X es un espacio casi cero-dimensional, y sean $\mathcal{W}$ una topología testigo de la casi cero-dimensionalidad de X y β una base de vecindades tales que para cualquier $B \in \beta$, B es un subconjunto cerrado de $(X, \mathcal{W})$. Como $(X, \mathcal{W})$ es cero-dimensional, entonces cada $B \in \beta$ es un C-conjunto en $(X, \mathcal{W})$. Además dado que la función identidad $id : X \to (X, \mathcal{W})$ es continua, entonces cada $B \in \beta$ es un C-conjunto de X.

Supongamos ahora que X tiene una base β de C-conjuntos. Para cada $B \in \beta$ existe una familia numerable $\mathcal{F}_B$ de subconjuntos es cerrado-abiertos en X tal que $B = \bigcap \mathcal{F}_B$. Sea

$$\mathcal{C} = \{C, X \setminus C : C \in \mathcal{F}_B, B \in \beta\}.$$

Consideremos la topología $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ que tiene como subbase a $\mathcal{C}$. Notemos que $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{C}})$ es cero-dimensional, pues cada $U \in \mathcal{C}$ es cerrado-abierto en $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{C}})$. Por otro lado como $\mathcal{C}$ es numerable, entonces $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{C}})$ es segundo numerable, esto implica que $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{C}})$ es regular. Por lo tanto $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{C}})$ es metrizable y separable. Para terminar veamos que $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{C}})$ es testigo de la casi cero-dimensionalidad de X. Notemos que cada $B \in \beta$ es un subconjunto cerrado de $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{C}})$. Esto implica que cada $x \in X$ tiene una base de vecindades cerradas en $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{C}})$, es decir $(X, \mathcal{W}_{\mathcal{C}})$ es testigo de la casi cero-dimensionalidad de X. $\square$

4. Hiperespacios de dimensión 1

En esta sección daremos los ejemplos principales del trabajo. La siguiente Proposición muestra que el hiperespacio de subconjuntos compactos de un espacio casi cero-dimensional es casi cero-dimensional.

Proposición 4.1. [**10**, Proposition 2.2]

Para un espacio topológico X los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) X es un espacio casi cero-dimensional.

(b) $\mathcal{K}(X)$ es un espacio casi cero-dimensional.

(c) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(X)$, entonces $\mathcal{A}$ es un espacio casi cero-dimensional.

DEMOSTRACIÓN:

La implicación $(b) \Rightarrow (c)$ se sigue de la Proposición 3.8, y $(c) \Rightarrow (a)$ del hecho de que X tiene una copia homeomorfa en $\mathcal{K}(X)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Vamos a demostrar que $\mathcal{K}(X)$ cumple las condiciones de la definición de espacio casi cero-dimensional. Sea $\mathcal{W}$ una topología testigo de la casi cero-dimensionalidad de X. Consideremos el espacio $Y = (X, \mathcal{W})$. Dado que $\mathcal{W}$ es una topología más gruesa que la topología de X, entonces $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{K}(Y)$. Sea $(Z, \mathcal{W}_0)$ el espacio $\mathcal{K}(X)$ con la topología que heredada del espacio $\mathcal{K}(Y)$. Como $\langle V_1, \ldots, V_n\rangle \cap Z$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(X)$, donde $V_1, \ldots, V_n$ son elementos de $\mathcal{W}$, entonces tenemos que la topología $\mathcal{W}_0$ de Z es más gruesa que la topología de $\mathcal{K}(X)$. Más aún, por la Proposición 2.20, $(Z, \mathcal{W}_0)$ es cero-dimensional. Ahora demostraremos que cada elemento en $\mathcal{K}(X)$ tiene una base de vecindades que consiste de subconjuntos que son cerrados en $(Z, \mathcal{W}_0)$. Sean $F \in \mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(X)$ tal que $F \in \mathcal{U}$. Para cualquier $x \in F$ hay una vecindad V_x de x en X tal que $x \in V_x \subset \bigcap\{U_k : x \in U_k\}$ y V_x es un subconjunto cerrado en Y. Entonces $\{int_X(V_x) : x \in F\}$ es una cubierta abierta de F en X. Como F es un subconjunto compacto X, existen $x_1, \ldots, x_m \in F$ tales que $F \subset \bigcup_{k \leqslant m} V_{x_k}$. Para cada $k \leqslant n$, sea $y_k \in F \cap U_k$. Notemos que $F \in \langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}, V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\rangle$. Veamos que $\mathcal{V}_\mathcal{U} := \langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}, V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\rangle \cap \mathcal{K}(X) \subset \mathcal{U}$. Sea $H \in \mathcal{V}_\mathcal{U}$. Sea $H \in \mathcal{V}_\mathcal{U}$, dada la elección de los V_{x_k} y los V_{y_k}, tenemos que $H \subset \bigcup_{k \leqslant n} V_{x_k} \cup \bigcup_{k \leqslant m} V_{y_k} \subset \bigcup_{k \leqslant m} U_k$. Dado $k \leqslant m$ se tiene que $\emptyset \neq H \cap V_{y_k} \subset H \cap U_k$. Así, $\mathcal{V}_\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, más aún, $\langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}, V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\rangle$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{K}(Y)$ por la Proposición 2.18. Por lo tanto $\langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}, V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\rangle \cap Z$ es un subconjunto cerrado de Z. Así, la colección de todos los conjuntos $\mathcal{V}_\mathcal{U}$ donde $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(X)$ que contiene a F, son una base local de vecindades de F que consiste de subconjuntos cerrados en $(Z, \mathcal{W}_0)$. Entonces $\mathcal{K}(X)$ es un espacio casi cero-dimensional. □

El siguiente corolario se deriva de las Proposiciones 2.20 y 4.1.

Corolario 4.2. *Sea X un espacio casi cero-dimensional, entonces $dim(\mathcal{K}(X)) \leqslant 1$ y $dim(\mathcal{K}(X)) = 1$ si y solo si $dim(X) = 1$.*

Con el corolario anterior tenemos nuestros primeros ejemplos de espacios X de dimensión 1 tales que $dim(\mathcal{K}(X)) = 1$. En particular tenemos que $dim(\mathcal{K}(\mathfrak{E})) = dim(\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)) = 1$. El siguiente paso es ver que sucede si omitimos la hipótesis de casi cero-dimensionalidad en X en el corolario anterior, es decir:

PROBLEMA 4.3. *¿Existe un espacio X que no sea casi cero-dimensional tal que $dim(X) = dim(\mathcal{K}(X)) = 1$?*

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, para dar ejemplos de ese tipo de espacios primero daremos algunas definiciones y resultados.

Erdös demostró que cualquier cerrado-abierto de $\mathfrak{E}$ y de $\mathfrak{E}_c$ no es acotado. Esta propiedad fue formalizada por J. Dijstra y van Mill en [**1**] como veremos a continuación.

Definición 4.4 ([**1**, Definición 5.1]). *Un espacio X se llama **cohesivo** si cada punto del espacio tiene una vecindad que no contiene subconjuntos cerrado-abiertos no vacíos de X.*

Note que todos los espacios conexos son cohesivos y que la dimensión de un espacio cohesivo es mayor o igual a uno. A continuación veremos que los espacios $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}_c$ son cohesivos.

Proposición 4.5. *$\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}_c$ son espacios cohesivos.*

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 3.5 tenemos que cualquier subconjunto acotado de $\mathfrak{E}$ tiene frontera no vacía. Se sigue que cualquier subconjunto cerrado-abierto de $\mathfrak{E}$ es no acotado. Por lo tanto dada una vecindad acotada de $\mathfrak{E}$ no contiene subconjuntos cerrado-abiertos no vacíos de $\mathfrak{E}$. Es decir $\mathfrak{E}$ es espacio cohesivo. Un argumento similar prueba que $\mathfrak{E}_c$ es un espacio cohesivo. $\square$

La propiedad de cohesión es importante en el estudio de los espacios $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}_c$. Para conocer más sobre este tema puede consultar [**1**]. El siguiente resultado muestra algunas propiedades básicas de los espacios cohesivos.

Proposición 4.6. *Para un espacio X se cumple lo siguiente.*

(a) Si X es un espacio cohesivo y Y es cualquier espacio no vacío entonces $X \times Y$ es cohesivo.

(b) Si X es un espacio cohesivo y O es un subconjunto abierto de X, entonces O es cohesivo.

DEMOSTRACIÓN: (a) Sean $(x, y) \in X \times Y$ y U una vecindad de $x \in X$ que no contenga cerrado-abiertos de X. Afirmamos que $U \times Y$ no contiene cerrado-abiertos de $X \times Y$. Supongamos que existe un cerrado-abierto C de $X \times Y$ tal que $C \subset U \times Y$, sea $(a, b) \in C$, entonces $C \cap (X \times \{b\})$ es un subconjunto cerrado-abierto de $X \times \{b\}$ tal que $C \cap (X \times \{b\}) \subset U \times \{b\}$, esto contradice la propiedad de U.
(b) Sean O un subconjunto abierto de X y $x \in O$. Como X es cohesivo existe un subconjunto abierto V de $x \in X$ tal que V no contiene cerrado-abiertos de X. Dado que $W = O \cap V$ es un subconjunto abierto de X y $x \in O \cap V$ existe una vecindad cerrada U de x en X tal que $U \subset W$. Afirmamos que U no contiene cerrado-abiertos de O. Supongamos por contradicción que C es un cerrado-abierto de O tal que $C \subset U$. Como U es un subconjunto cerrado en X, entonces $cl_X(C) \subset U$ esto implica que C es cerrado en X. Por otro lado dado que O es un subconjunto abierto en X y C es un subconjunto abierto en O, entonces C es un subconjunto abierto de X. Por lo tanto C es un subconjunto cerrado-abierto de X y $C \subset U \subset V$ esto contradice la propiedad del subconjunto V. $\square$

El siguiente concepto es una propiedad que implica la cohesión de un espacio X y también relaciona las propiedades de cohesión y casi cero-dimensionalidad.

Definición 4.7. *Una **extensión conexa por un punto** de un espacio X es un espacio Y tal que Y es un espacio conexo, X es un subconjunto denso en Y y $Y \setminus X$ es un punto.*

A continuación damos un ejemplo de una extinción conexa por un punto de $\mathfrak{E}_c$.

Proposición 4.8. *Sea p un punto fuera de $\mathfrak{E}_c$, consideramos $\mathfrak{E}_c^+ = \mathfrak{E}_c \cup \{p\}$ donde $\mathfrak{E}_c$ es abierto en $\mathfrak{E}_c^+$ y una base de vecindades para $\{p\}$ consiste en los complementos de conjuntos cerrados y acotados de $\mathfrak{E}_c$. Entonces $\mathfrak{E}_c^+$ es un espacio métrico separable y conexo.*

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos que $\mathfrak{E}_c^+$ es un espacio métrico. Es suficiente probar que $\mathfrak{E}_c^+$ es segundo numerable y regular. Considere los siguientes conjuntos $B_m = \{x \in \mathfrak{E}_c : \|x\| \leqslant m\}$, entonces B_m es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathfrak{E}_c$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si U es un subconjunto abierto de $\mathfrak{E}_c^+$ tal que $p \in U$, entonces existe un subconjunto B que es cerrado y acotado tal que $U = (\mathfrak{E}_c \setminus B) \cup \{p\}$. Dado que B está acotado, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset B_m$, esto implica que $(\mathfrak{E}_c \setminus B_m) \cup \{p\} \subset U$. Por lo tanto, $\beta_0 = \{(\mathfrak{E}_c \setminus B_n) \cup \{p\} : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable de p. Sean $\beta_1 = \{B(x, 1/n) : x \in \mathfrak{E}_c, n \in \mathbb{N}\}$ donde $B(x, 1/n) = \{p \in \mathfrak{E}_c : d(x,p) < 1/n\}$ y β_1 una base numerable de $\mathfrak{E}_c$, entonces $\beta = \beta_0 \cup \beta_1$ es una base numerable de $\mathfrak{E}_c^+$. Probaremos ahora que X es un espacio regular. Sean $x \in \mathfrak{E}_c^+$, y U un subconjunto abierto de $\mathfrak{E}_c^+$ tal que $x \in U$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U \in \beta$. Si $x \in \mathfrak{E}_c$, entonces existe un subconjunto abierto W de $\mathfrak{E}_c^+$ tal que $x \in W \subset cl_{\mathfrak{E}_c^+}(W) \subset U$. Si $x = p$, entonces $U = (\mathfrak{E}_c \setminus B_n) \cup \{p\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $B_n \subset \{x \in \mathfrak{E}_c : \|x\| < n+1\} \subset B_{n+1}$, luego

$$(\mathfrak{E}_c \setminus B_{n+1}) \cup \{p\} \subset (\mathfrak{E}_c \setminus \{x \in \mathfrak{E}_c : \|x\| < n+1\}) \cup \{p\} \subset (\mathfrak{E}_c \setminus B_n) \cup \{p\}.$$

Observe que $(\mathfrak{E}_c \setminus \{x \in \mathfrak{E}_c : \|x\| < n+1\}) \cup \{p\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{E}_c^+$. Por lo tanto $cl_{\mathfrak{E}_c^+}(\mathfrak{E}_c \setminus B_{n+1}) \cup \{p\} \subset (\mathfrak{E}_c \setminus \{x \in \mathfrak{E}_c : \|x\| < n+1\}) \cup \{p\}$. Así $\mathfrak{E}_c^+$ es un espacio segundo numerable y regular.

Finalmente, mostraremos que $\mathfrak{E}_c^+$ es conexo. Sea U un subconjunto cerrado-abierto de $\mathfrak{E}_c^+$, entonces $V = \mathfrak{E}_c^+ \setminus U$ es un subconjunto cerrado-abierto de $\mathfrak{E}_c^+$. Como $\mathfrak{E}_c^+ = U \cup V$, entonces $p \in U$ o $p \in V$. Supongamos que $p \in U$, como V es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{E}_c$, por la Proposición 4.5 se tiene que V es un subconjunto no acotado de $\mathfrak{E}_c$. Por otro lado, dado que $p \in U$, entonces existe un subconjunto cerrado y acotado W tal que $p \in (X \setminus W) \cup \{p\} \subset U$. Esto implica que $V \subset W$. Por lo tanto, V es un subconjunto acotado de $\mathfrak{E}_c$, lo cual es una contradicción. □

Una construcción similar a la anterior se puede hacer para dar una extinción conexa por un punto de $\mathfrak{E}$. La siguiente proposición nos dice que condiciones debe tener un espacio para tener una extinción conexa por un punto.

Proposición 4.9. *Para un espacio X se tiene que:*

(a) Si X es casi cero-dimensional y cohesivo, entonces tiene una extensión conexa por un punto.

(b) Si X tiene una extensión conexa por un punto, entonces X es cohesivo.

DEMOSTRACIÓN:

(a) Sea X un espacio casi cero-dimensional y cohesivo. Entonces podemos construir una colección numerable de subconjuntos $\mathcal{B}$ de X tal que si $B \in \mathcal{B}$ tenemos que:

(1) Para cualquier $x \in X$ y cualquier vecindad U de x existe $B \in \beta$ tal que $x \in int_X(B) \subset B \subset U$.

(2) Cualquier $B \in \beta$ es un C-conjunto.

(3) Cualquier $B \in \beta$ no contiene cerrado-abiertos de X

Vamos a ver que las propiedades (2) y (3) se preservan bajo uniones finitas: Sea B_1, B_2 que satisfacen (2) y (3). Note que $B_1 \cup B_2 = \bigcap\{C_1 \cup C_2 : C_1, C_2$ son cerrado-abiertos de X y $B_1 \subset C_1, B_2 \subset C_2\}$, por lo tanto $B_1 \cup B_2$ cumple (2). Sea C un cerrado-abierto no vacío tal que $C \subset B_1 \cup B_2$, si C no está contenido en B_1 y elegimos $x \in C \setminus B_1$. Sea D un subconjunto cerrado-abierto de X tal que $x \notin D$ y $B_1 \subset D$. Entonces $C \setminus D$ es un conjunto cerrado-abierto no vacío de X que está contenido en B_2, lo cual es una contradicción.

Sea $\mathcal{D} = \{(B_1, B_2) \in \beta^2 : B_1 \subset int_X(B_2)\}$ y para cada $D = (B_1, B_2) \in \mathcal{D}$ sea $f_D : X \to [0,1]$ una función continua tal que $f_D(B_1) \subset \{1\}$ y $f_D(X \setminus B_2) \subset \{0\}$. Sea $h : X \to [0,1]^{\mathcal{D}}$ la función dada por $h(x)_D = f_D(x)$, Por el Teorema de encaje de Tychonoff (ver [**4**]), se tiene que h es un encaje de X en $[0,1]^{\mathcal{D}}$. Sea $Y = h(X) \cup \{\hat{0}\}$, donde $\hat{0}$ representa al elemento de $[0,1]^{\mathcal{D}}$ cuyas coordenadas son todas cero. Sea C un cerrado-abierto de Y tal que $\hat{0} \notin C$. Como C es un subconjunto cerrado de Y y $\hat{0} \in Y \setminus C$, entonces existen $\{D_1, \ldots, D_n\} \subset \mathcal{D}$ tal que $\hat{0} \in \bigcap_{k \leqslant n}(\pi_{D_k}^{\leftarrow}[[0, t_k)] \cap Y) \subset Y \setminus C$, por lo tanto $C \subset \bigcup_{k \leqslant n} Y \setminus (\pi_{D_k}^{\leftarrow}[[0, t_k)] \cap Y)$. Esto implica que $C \subset \bigcup_{k \leqslant n} \pi_{D_k}^{\leftarrow}[(0,1]] \cap Y$, de esto se sigue que $h^{\leftarrow}(C)$ está contenido en $\bigcup_{k \leqslant n} f_{D_k}^{\leftarrow}((0,1])$. Por lo tanto $h^{\leftarrow}(C)$ está contenido en n elementos de β, esto implica que $h^{\leftarrow}(C)$ es vacío. Así, Y es conexo.

(b) Sea Y una extensión conexa por un punto de X, entonces $Y \setminus X = \{a\}$. Sea $x \in X$, y U una vecindad cerrada de x en Y tal que $a \notin U$. Si C un subconjunto cerrado-abierto de X tal que $C \subset U$, entonces C es un subconjunto cerrado-abierto de Y y $a \notin C$. Por lo tanto, $C = \emptyset$. $\square$

Observación 4.10. *Sea X un espacio casi cero-dimensional y cohesivo (por ejemplo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_c$), por 1 de la Proposición 4.9 se sigue que X tiene una extensión conexa por un punto. Sea $Y = \{p\} \cup X$ donde $p \notin X$ una extensión conexa por un punto de X. Como Y es conexo, no es un espacio casi cero-dimensional.*

Consideremos ahora el espacio $\mathfrak{E}_c^+$ de la Proposición 4.8 y $N = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea

$$P = [\mathfrak{E}_c \times \{1/n : n \in \mathbb{N}\}] \cup \{(p, 0)\}$$

con la topología de subespacio de $\mathfrak{E}_c^+ \times N$. En la siguiente proposición mostramos que P no es casi cero-dimensional.

Proposición 4.11. *P es un espacio totalmente disconexo y no casi cero-dimensional.*

Demostración: Vamos a probar que P es totalmente disconexo. Sean $x, y \in P$ tal que $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad $y = (z, 1/n)$ con $z \in \mathfrak{E}_c$. Si $x \notin \mathfrak{E}_c \times \{1/n\}$ sea $U = \mathfrak{E}_c \times \{1/n\}$. Si $x \in \mathfrak{E}_c \times \{1/n\}$, como $\mathfrak{E}_c$ es casi cero-dimensional, existe un subconjunto cerrado-abierto V de $\mathfrak{E}_c$ tal que $y \in V \times \{1/n\}$ y $x \notin V \times \{1/n\}$, en este caso tomemos $U = V \times \{1/n\}$. Note que U es un subconjunto cerrado-abierto de P que cumple que $y \in U$ y $x \notin U$. Por lo tanto P es totalmente disconexo. Ahora veremos que P no es un espacio casi cero-dimensional. Para eso veremos que en el punto $(p, 0)$ no tiene una base de C-conjuntos en P. Supongamos lo contrario, es decir que existe una base β de C-conjuntos de $(p, 0)$ en P. Sea $a \in \mathfrak{E}_c$ y $U \in \beta$ tal que $U \cap \{(a, 1/n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Como $p \in U$ existe una vecindad V de p en $\mathfrak{E}_c^+$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $V \times \{1/k : k \geqslant n\} \subset U$. Fijemos $k \geqslant n$, entonces $(a, 1/k) \notin U$, esto implica que existe un cerrado-abierto C tal que $(a, 1/k) \in C \subset P \setminus U$. Notemos que

$E = \{x \in \mathfrak{E}_c : (x, 1/k) \in C\}$ es un cerrado-abierto no vacío de $\mathfrak{E}_c$ y ajeno a V, por lo tanto $\mathfrak{E}$ es acotado, y por la Proposición 4.5 tenemos una contradicción. □

Sea $\mathcal{Z} = \{P, Y\}$ donde Y es una extensión conexa por un punto de un espacio casi cero-dimensional y cohesivo y P es el espacio de la Proposición 4.11. Vamos a mostrar que si $Z \in \mathcal{Z}$, entonces $dim(Z) = dim(\mathcal{K}(Z)) = 1$.

Proposición 4.12. *Si $Z \in \mathcal{Z}$, entonces $dim(Z) = 1$.*

Demostración: Sea $Z \in \mathcal{Z}$, por las Proposiciones 4.11 y 4.9 tenemos que $Z = \{q\} \cup X$, donde X es un espacio casi cero-dimensional y cohesivo. Esto implica que X es un subconjunto abierto de Z de dimensión 1. Por lo tanto X es un subconjunto F_σ de Z, y así Z es la unión de dos subconjuntos F_σ. Por el Teorema 2.17 tenemos que $dim(Z) \leqslant 1$. Dado que $X \subset Z$, por el Lema 2.10 tenemos que $1 = dim(X) \leqslant dim(Z)$. Con esto concluimos que $dim(Z) = 1$. □

Para demostrar que $dim(\mathcal{K}(Z)) = 1$. Notemos que $\mathcal{K}(Z) = \mathcal{K}(X) \cup \mathcal{S}$, donde $\mathcal{S} = \{H \in \mathcal{K}(Z) : q \in H\}$. Como X es casi cero dimensional y cohesivo, por las Proposiciones 4.1 y 2.19 tenemos que $\mathcal{K}(X)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(Z)$ tal que $dim(\mathcal{K}(X)) = 1$. Por otro lado por la Proposición 2.19 se tiene que $\mathcal{S}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{K}(Z)$. Esto implica que $\mathcal{K}(Z)$ es la unión de dos espacios F_σ. Por lo tanto para ver que $dim(\mathcal{K}(Z)) = 1$, por el Teorema 2.17 es suficiente demostrar que $dim(\mathcal{S}) = 1$. A continuación daremos las herramientas necesarias para demostrar que $dim(\mathcal{S}) = 1$.

Sea d una métrica para Z. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos $B_n = \{z \in Z : d(z, q) < 1/n\}$ y $E_n = Z \setminus B_n$. Notemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, E_n es un espacio casi cero-dimensional y por la Proposición 4.1, se tiene que $\mathcal{K}(E_n)$ es un espacio casi cero-dimensional. Sea $\mathcal{N} = \prod_{n\in\mathbb{N}}[\mathcal{K}(E_n) \cup \{\emptyset\}]$, entonces $\mathcal{N}$ es un espacio casi cero-dimensional, donde consideremos al conjunto vacío $\{\emptyset\}$ como un punto aislado de $\mathcal{K}(E_n) \cup \{\emptyset\}$.

Sea

$$\mathcal{L} = \{(K_1, K_2, \ldots) \in \mathcal{N} : \text{ para } m \geqslant n, K_m \cap E_n = K_n\}.$$

Consideremos las siguientes funciones $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{S}$ y $\mathcal{G}_n : \mathcal{S} \to \mathcal{K}(E_n)$ dadas por

$$\mathcal{G}(K_1, K_2, \ldots) = \{q\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n, y$$

$$\mathcal{G}_n(H) = H \cap E_n.$$

Lema 4.13. *La función $\mathcal{G}$ está bien definida y es un homeomorfismo.*

Demostración: Vamos a probar que la función $\mathcal{G}$ está bien definida. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de abiertos básicos de $\{q\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ en Z. Dado que $q \in \{q\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Sea $B_m \in \mathcal{U}$ tal que $q \in B_m$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Notemos que $(\{q\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n) \setminus K_m \subset B_m$, ya que $Z \setminus K_m \subset B_m$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de K_m y K_m, entonces existe $U_1, \ldots, U_k$, tal que $K_m \subset \bigcup_{i\leqslant k} U_i$. Por lo tanto $\{B_m, U_1, \ldots, U_k\}$ es una subcubierta finta de $\mathcal{U}$, es decir $\{q\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es un subconjunto compacto de Z. Por lo tanto la función $\mathcal{G}$ está bien definida.

Probemos que $\mathcal{G}$ es inyectiva, sea $K = (K_1, K_2, \ldots), F = (F_1, F_2, \ldots) \in \mathcal{L}$ tal que $F \neq K$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \neq K_n$. Sin pérdida de generalidad existe $x \in F_n \setminus K_n$, el cual también cumple que $x \in \mathcal{G}(F)$ y $x \notin \mathcal{G}(K)$. Esto prueba que $\mathcal{G}$ es inyectiva. Ahora veamos que $\mathcal{G}$ es sobreyectiva, sea $H \in \mathcal{S}$. Definimos $K_n = H \cap E_n$, ya que E_n es un subconjunto cerrado en Z, entonces K_n es vacío o es un subconjunto compacto de E_n. Entonces $K_n \in \mathcal{K}(E_n) \cup \{\emptyset\}$ por cada $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $(K \cap E_1, \ldots) \in \mathcal{L}$ y $\mathcal{G}((K \cap E_1, \ldots)) = K$. Es decir, $\mathcal{G}$ es sobreyectiva.

Antes de probar que $\mathcal{G}$ es un homeomorfismo, mostremos que si $H = \{q\}$, una base local $\mathcal{B}_H$ de H en $\mathcal{S}$ es $\{\langle B_n \rangle \cap \mathcal{S} : n \in \mathbb{N}\}$ y si $H = \{q\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, donde $K_m \neq \emptyset$ para algún $m \in \mathbb{N}$, una base local $\mathcal{B}_H$ de H en $\mathcal{S}$ es:

$$\mathcal{B}_H = \{\langle U_1, \ldots, U_k, B_n \rangle \cap \mathcal{S} : n, k \in \mathbb{N}, K_n \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle\}.$$

Donde $U_1, \ldots, U_k$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $Z \setminus \{p\}$. Vamos a demostrar que $\mathcal{B}_H$ es una base local de H. Sean $H \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{W} = \langle W_1, \ldots, W_k \rangle$ un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(Z)$ tal que $H \in \mathcal{W}$. Naturalmente consideramos dos casos. Primero supongamos que $H_m \neq \emptyset$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Como $q \in H \in \mathcal{W}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q \in B_n \subset \bigcap\{W_j : j \leqslant k, q \in W_j\}$ y $K_n = H \setminus B_n \neq \emptyset$. Para cualquier $x \in K_n$ existe U_x tal que $x \in U_x \subset \bigcap\{W_j : j \leqslant k, x \in W_j\}$. Como K_n es compacto y $\{U_x : x \in K \setminus B_n\}$ es una cubierta abierta de K_n, existen $x_1, \ldots, x_l \in H_n \setminus B_n$ tal que $K_n \in \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_l} \rangle$. Sea $\mathcal{V} = \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_l}, B_n \rangle \cap \mathcal{S}$, notemos que $H \in \mathcal{V}$, y $\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{S}$. En segundo lugar consideremos el caso $H = \{q\}$, en este caso existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q \in B_n \subset \bigcap\{W_j : j \leqslant k, q \in W_j\}$ esto implica que $H \in \langle B_n \rangle \subset \mathcal{W}$. Por lo tanto $\mathcal{B}_H$ es una base local de H en $\mathcal{S}$.

Vamos a probar primero que $\mathcal{G}$ es continua. Sean $K = (K_1, \ldots, K_n, \ldots) \in \mathcal{L}$, $H = \mathcal{G}(K)$ y $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_H$. Si $H = \{q\}$, entonces $\mathcal{U} = \langle B_n \rangle$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$W = \{(F_1, F_2, \ldots) \in \mathcal{L} : F_k = \emptyset \text{ para cada } k \leqslant n\}.$$

Notemos que $H \in W$ y $\mathcal{G}[W] \subset \mathcal{U}$. Si $K_n \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_k, B_n \rangle$ con $n, k \in \mathbb{N}$ y $K_n \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$. Sea

$$W = \{(F_1, F_2, \ldots) \in \mathcal{L} : F_n \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle\}.$$

Notemos que $H \in W$, además si $F = (F_1, F_2, \ldots) \in W$, entonces $\mathcal{G}(F) \setminus F_n \subset B_n$, así $\mathcal{G}(F) \in \mathcal{U}$. Esto implica que $\mathcal{G}$ es una función continua.
Finalmente probaremos que $\mathcal{G}^{-1}$ es una función continua. Note que si U es subconjunto abierto básico de $\mathcal{L}$, entonces $U = (\bigcap_{j \in F} \pi_j^{\leftarrow}[W_j]) \cap \mathcal{L}$, donde W_j es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(E_j) \cup \{\emptyset\}$ y F es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Note que

$$(\mathcal{G}^{-1})^{\leftarrow}[U] = \bigcap_{j \in F} (\mathcal{G}^{-1})^{\leftarrow}[\pi_j^{\leftarrow}[W_j]] \cap \mathcal{S} = \bigcap_{j \in F} \mathcal{G}_n^{\leftarrow}[W_j].$$

Así es suficiente demostrar la continuidad de las funciones $\mathcal{G}_n$ para cualquier n. Para probar que $\mathcal{G}_n$ es una función continua, probaremos que $\mathcal{G}_n^{\leftarrow}[\langle U_1, \ldots U_k \rangle \cap \mathcal{K}(E_n)]$ y $\mathcal{G}_n^{\leftarrow}[\{\emptyset\}]$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{S}$, donde $U_1, \ldots, U_k$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $Z \setminus \{q\}$ tal que $E_n \cap U_j \neq \emptyset$ para cualquier $j \leqslant k$. Vamos a probar que

$$\mathcal{G}_n^{\leftarrow}[\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \cap \mathcal{K}(E_n)] = \mathcal{S} \cap \langle U_1, \ldots U_k, B_n \rangle$$

$$\text{y que } \mathcal{G}_n^{\leftarrow}[\{\emptyset\}] = \mathcal{S} \cap \langle B_n \rangle.$$

Primero vamos a demostrar que $\mathcal{G}_n^{\leftarrow}[\langle U_1, \ldots U_k \rangle \cap \mathcal{K}(E_n)] = \mathcal{S} \cap \langle U_1, \ldots U_k, B_n \rangle$. Notemos que $H \in \mathcal{S} \cap \langle U_1, \ldots U_k, B_n \rangle$ si y solo si $H \cap E_n \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle \cap \mathcal{K}(E_n)$ y $q \in H$, si y solo si $H \in \mathcal{G}_n^{\leftarrow}[\langle U_1, \ldots U_k \rangle \cap \mathcal{K}(E_n)]$. Ahora mostraremos que $\mathcal{G}_n^{\leftarrow}[\{\emptyset\}] = \mathcal{S} \cap \langle B_n \rangle$. Notemos que $H \in \mathcal{S} \cap \langle B_n \rangle$, si y solo si $H \cap E_n = \emptyset$ y $q \in H$, si y solo si $H \in \mathcal{G}_n^{\leftarrow}[\{\emptyset\}]$. Esto implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{G}_n$ es una función continua, así $\mathcal{G}^{-1}$ es continua. Por lo tanto $\mathcal{G}$ es un homeomorfismo. $\square$

Teorema 4.14. *$dim(Z) = dim(\mathcal{K}(Z)) = 1$.*

Demostración: Notemos que $\mathcal{K}(Z) = \mathcal{K}(Z \setminus \{q\}) \cup \mathcal{S}$. Además tenemos que $\mathcal{S}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{K}(Z)$ y $\mathcal{K}(Z \setminus \{q\})$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(Z)$. Dado que $\mathcal{K}(Z)$ es un espacio métrico, entonces $\mathcal{K}(Z \setminus \{q\})$ y $\mathcal{S}$ son subconjuntos F_σ de $\mathcal{K}(Z)$. Por otro lado tenemos que $\mathcal{K}(Z \setminus \{q\})$ es un espacio casi cero-dimensional y cohesivo, entonces $dim(\mathcal{K}(Z \setminus \{q\})) = 1$. Por el Teorema 4.13, S es homeomorfo a $\mathcal{L}$ y $dim(\mathcal{L}) = 1$ pues $\mathcal{L}$ es un espacio casi cero-dimensional, además $\mathcal{L}$ no es cero-dimensional. Esto implica que $dim(\mathcal{S}) = 1$. Por el Teorema 2.17 se tiene que $dim(\mathcal{K}(Z)) = 1$. $\square$

Observemos que Z es unión de espacios casi cero-dimensionales. Así, una pregunta natural es la siguiente: Sea Z un espacio de dimensión 1 que no es un espacio casi cero-dimensional y es unión finita de espacios casi cero-dimensionales. ¿Es $dim(\mathcal{K}(Z)) = 1$?
La respuesta a la pregunta es negativa, ya que $[0,1]$ no es un espacio casi cero-dimensional, pero es unión de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $\mathbb{P} \cap [0,1]$ los cuales son espacios casi cero-dimensionales, pero $dim(\mathcal{K}([0,1]))$ no es 1. Por otro lado note que los ejemplos que hemos dado cumplen con la condición que cualquier $A \in \mathcal{K}(X)$ se tiene que A es cero-dimensional. Esto nos hace preguntarnos lo siguiente:

Problema 4.15. *Si X es un espacio de dimensión 1 tal que cualquier $A \in \mathcal{K}(X)$ se tiene que A es cero-dimensional. ¿Es cierto que $dim(\mathcal{K}(X)) = 1$?*

La respuesta a la pregunta 6.2 es también negativa, con el siguiente Teorema vamos a dar un ejemplo de un espacio que cumple las condiciones de la pregunta 6.2 pero la dimensión de su hiperespacio de subconjuntos compactos no es 1.

Teorema 4.16. [**7**, Theorem 4.1] *Existe un espacio X de dimensión 1 tal que cualquier subconjunto compacto de X tiene dimensión cero y $dim(X^2) > 1$.*

Ejemplo 4.17. *Sea $Y = X \times \{0,1\}$, donde X es el espacio del Teorema 4.16. Vamos a demostrar que $dim(Y) = 1$. Dado que $dim(X) = 1$, para cada $y = (x,i) \in Y$, con $i \in \{1,0\}$ existe una base de vecindades β_y del punto y en Y, que son de la forma $V \times \{i\}$ donde V es un subconjunto abierto de X tal que $bd_X(V)$ es cero dimensional. Además para cada $W \in \beta_y$, se tiene que $bd_Y(W) = bd_X(V) \times \{i\}$. Notemos que $bd_X(V) \times \{i\}$ es homeomorfo a $bd_X(V)$, por el Teorema 2.8 se tiene que $bd_Y(W)$ es cero-dimensional. Esto implica que $dim(Y) \leqslant 1$, además dado que Y tiene una copia de X, se tiene que $1 \leqslant dim(Y)$. Por otro lado, por el Teorema 4.16 se tiene que cualquier subconjunto compacto F de Y, cumple que $dim(F) = 0$. Sea $f : X^2 \to \mathcal{K}(Y)$ dada por $f(x,y) = \{(x,0),(y,1)\}$. Vamos a demostrar que f es un encaje. No es difícil ver que f es inyectiva. Dado que $f : X \to f[X]$ es biyectiva, entonces para cualesquiera U, V subconjuntos abiertos de X tenemos que $f[U \times V] = \langle U \times \{0\}, V \times \{1\} \rangle$. Esta igualdad dice que la función es continua y abierta sobre su imagen. Por lo tanto f es un encaje. Esto implica que $dim(\mathcal{K}(Y)) > 1$.*

El ejemplo anterior dice que no es suficiente pedir que un espacio X sea de dimensión 1 y cualquier subconjunto compacto de X sea cero-dimensional, para que $\mathcal{K}(X)$ tenga dimensión 1. Esto nos hace plantear la siguiente pregunta:

Problema 4.18. *Sea X un espacio no compacto de dimensión 1, tal que $dim(X^\omega) = 1$ y para cualquier $A \in \mathcal{K}(X)$, $dim(A) = 0$. ¿Es cierto que $\mathcal{K}(X)$ es de dimensión 1?*

Esta pregunta sigue sin resolverse. Para ver ejemplos de espacios X que no sean casi cero-dimensionales y que cumplan con las condiciones de la Pregunta 4.18 puede consultar [**7**].

5. Agradecimientos

El autor agradece a el Dr. R. Rojas-Hernández, por su apoyo y la dirección de este trabajo y le agradece al árbitro sus comentarios que mejoraron este trabajo.

Bibliografía

[1] J. J. Dijkstra and J. van Mill, *Erdös space and homeomorphism groups of manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 208 (2010), no. 979.

[2] Nadler Sam B. Jr, *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y., 1978.

[3] P. Erdös, *The dimension of the rational points in Hilbert space*, Ann. of Math. (2) 41 (1940), 734–736.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Heldermann Verlag, 1989.

[5] K. Kawamura, L. Oversteegen and E. D. Tymchatyn, *On homogeneous totally disconnected 1-dimensional spaces*. Fund. Math. 150 (1996), no. 2, 97–112.

[6] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.

[7] van Mill and Pol, *On spaces without non-trivial subcontinua and the dimension of their producs*, Topology and Applications 142 (2004),31-48.

[8] van Mill, *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*. North-Holland Mathematical Library, 64. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001. xii+630 pp. ISBN: 0-444-50557-1

[9] Nadler Sam B. Jr,*Dimension theory: an introduction with exercises*. Sociedad Matemática Mexicana. México 2002.

[10] A. Zaragoza, *Symmetric products of Erdös space and complete Erdös space*. Topology Appl. 284 (2020), 107355, 10 pp.

Correos electrónicos:
`soad151192@icloud.com` (Alfredo Zaragoza Cordero).

CAPÍTULO 7

Espacios pseudocompletos

Fidel Casarrubias Segura, Diego David Rafael Rivera Osorio
Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX., México

1. Introducción

Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire, es decir, la intersección de cualquier colección numerable de subconjuntos densos y abiertos es un subconjunto denso. Existen una gran cantidad de espacios que son espacios de Baire y que no son espacios métricos. Y para muchos de ellos el método de prueba para demostrar que son efectivamente espacios de Baire es el mismo. Esencialmente se demuestra que son espacios pseudocompletos.

La idea detrás de los espacios pseudocompletos fue abstraer las herramientas del método de prueba del teorema de categoría de Baire para espacios métricos completos. Se puede pensar que los espacios pseudocompletos son definidos abstrayendo «las herramientas» con las que «podemos probar el teorema de categoría de Baire».

En este texto exponemos y demostramos varias propiedades de los espacios pseudocompletos. Exponemos dos resultados particularmente importantes relacionados a las imágenes continuas y abiertas de espacios pseudocompletos. Mostramos que las imágenes continuas, casi-abiertas (en particular abiertas) y metrizables de espacios pseudocompletos son espacios pseudocompletos y que un espacio de funciones $C_p(X)$ es pseudocompleto cuando es imagen continua y abierta de un espacio pseudocompleto. También damos la caracterización de la pseudocompletitud del espacio de funciones $C_p(X)$. Es importante mencionar que los primeros dos resultados de estos últimos tres mencionados son contribuciones parciales al problema abierto de saber cuándo una imagen continua y abierta de un espacio pseudocompleto es un espacio pseudocompleto. El tercero de ellos es un resultado clave para demostrar que la discretitud de un espacio topológico es una propiedad t-invariante, un relevante resultado en el seno de la C_p-teoría.

La mayoría del material del presente texto está basado en el artículo [**3**] y en el libro [**4**].

2. Algunos resultados preliminares

Todos los espacios topológicos considerados en este texto se suponen no vacíos.

Un conjunto A es numerable si existe una función inyectiva $f : A \to \omega$, donde $\omega = \{0, 1, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales. ω_1 es el primer ordinal no numerable. $(\mathbb{R}, \tau(\mathbb{R}))$ es el conjunto de los números reales con la topología euclidiana.

Dado un espacio topológico X denotaremos con $\tau(X)$ a la topología de X. Si A es un subconjunto de X, entonces $\overline{A}$ denotará a la cerradura de A en X (cuando sea necesario especificar el espacio en el cual se está considerando a la cerradura usaremos la notación $\mathrm{cl}_X(A)$).

Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $\tau_d(X)$ es la topología en X inducida por la métrica d.

En relación a otras definiciones y nociones de Topología General que no son listadas aquí debemos comentar que seguimos el muy conocido texto de Engelking **[2]**, excepto en los conceptos que enseguida listamos.

A diferencia de **[2]** en el presente texto un espacio topológico X es *regular* si para cualquier subconjunto cerrado F de X y cualquier elemento $x \in X \setminus F$ existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$, es *completamente regular* si para cualquier cerrado F y cada $x \in X \setminus F$ existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$ y es *normal* si cualesquiera dos cerrados ajenos F y G de X se pueden separar por medio de abiertos ajenos. Para nosotros, los espacios T_3 son espacios regulares T_1 (es decir, todos los subconjuntos de cardinalidad uno son subconjuntos cerrados). Por otro lado, los espacios Tychonoff (o de Tychonoff) son espacios completamente regulares que además son espacios T_1 y los espacios T_4 son espacios normales T_1.

En este texto los espacios compactos no se suponen espacios Hausdorff. Tampoco se suponen Hausdorff los espacios numerablemente compactos ni los espacios localmente compactos.

Un subconjunto de un espacio topológico es un subconjunto de tipo G_δ (o simplemente un conjunto G_δ) si es igual a la intersección de una cantidad numerable de subconjuntos abiertos del espacio. En particular, cualquier subconjunto abierto es un conjunto G_δ.

Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces una *base de vecindades abiertas* (o una *base local*) para A en X es una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau(X)$ tal que $A \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ y tal que para cada abierto V de X con $A \subseteq V$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B \subseteq V$. Se define al *carácter de A en X* como el número cardinal $\chi(A, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es una base de vecindades abiertas de A en $X\}$.

El siguiente lema será usado en la proposición 5.1.

Lema 2.1. *Si X es un espacio regular y Y es un subespacio denso de X, entonces $\chi(K, Y) = \chi(K, X)$ para todo subconjunto compacto $K \subseteq Y$.*

Demostración: Si $\mathcal{B}$ es una base de vecindades abiertas de K en X, entonces la colección $\mathcal{C} = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades abiertas de K en Y. De esto se sigue fácilmente que $\chi(K, Y) \leqslant \chi(K, X)$.

Para probar la desigualdad contraria, fijemos una base de vecindades abiertas $\mathcal{U}$ de K en Y tal que $|\mathcal{U}| = \chi(K, Y)$. Para cada elemento $U \in \mathcal{U}$ fijemos un único abierto $B(U)$ de X de modo que $B(U) \cap Y = U$. Definamos $\mathcal{E} = \{B(U) : U \in \mathcal{U}\}$. Claramente $|\mathcal{E}| \leqslant |\mathcal{U}|$. Más aún, la colección $\mathcal{E}$ es una base de vecindades de K en X.

Efectivamente, es claro que $K \subseteq B(U) \in \tau(X)$ para cada $B(U) \in \mathcal{E}$. Supongamos ahora que $W \in \tau(X)$ es tal que $K \subseteq W$. Para cada $k \in K$, por la regularidad de X, podemos fijar un abierto V_k de X de modo que $k \in V_k \subseteq \overline{V_k} \subseteq W$. Como K es compacto, podemos fijar una cantidad finita de elementos $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que $K \subseteq V_{k_1} \cup \cdots \cup V_{k_n}$. Entonces

$$K \subseteq V_{k_1} \cup \cdots \cup V_{k_n} \subseteq \overline{V_{k_1} \cup \cdots \cup V_{k_n}} = \overline{V_{k_1}} \cup \cdots \cup \overline{V_{k_n}} \subseteq W.$$

Sea $V = V_{k_1} \cup \cdots \cup V_{k_n}$. Como $\mathcal{U}$ es una base de vecindades abiertas de K en Y, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $K \subseteq U \subseteq V \cap Y$. Consideremos al abierto $B(U)$. Sucede que $\overline{B(U) \cap Y} = \overline{B(U)}$ porque Y es denso en X. Luego, $K \subseteq U \subseteq B(U) \subseteq \overline{B(U)} = \overline{U} \subseteq \overline{V} \subseteq W$.

Por lo tanto, la familia $\mathcal{E}$ es base de vecindades abiertas de K en X. Consecuentemente $\chi(K, X) \leqslant |\mathcal{E}| \leqslant \chi(K, Y)$. □

Un espacio Tychonoff X es *Čech-completo* si es un subconjunto de tipo G_δ de su compactación de Stone-Čech βX, o equivalentemente, si es un subconjunto de tipo G_δ en cualquiera de sus compactaciones Hausdorff (vea [**2**, 3.9]).

Las dos propiedades de espacios Čech-completos que son enunciadas en el siguiente lema las usaremos en la sección 4.

Lema 2.2. *Sea X un espacio Tychonoff.*

(1) Si X es Čech-completo, entonces para cualquier subespacio compacto $K \subseteq X$, existe un subespacio compacto C de X tal que $K \subseteq C$ y $\chi(C, X) \leqslant \omega$. En particular, cualquier elemento $x \in X$ está contenido en un subconjunto compacto de carácter numerable.

(2) Si Y y Z son subespacios densos Čech-completos de X, entonces $Y \cap Z \neq \emptyset$.

Demostración: (1) Como X es de tipo G_δ en βX, existe una colección numerable $\{U_n : n \in \omega\}$ de abiertos de βX tales que $X = \bigcap_{n \in \omega} U_n$. Usando el hecho de que cualquier compacto Hausdorff es un espacio normal, es muy sencillo construir, usando el método de recursión, una sucesión de abiertos no vacíos $\{W_n : n \in \omega\}$ con las siguientes dos propiedades:

- $K \subseteq W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$ (la cerradura es tomada en βX).
- $\overline{W_{n+1}} \subseteq W_n$ para cada $n \in \omega$.

Defina $C = \bigcap_{n \in \omega} \overline{W_n}$. Es claro que C es un subconjunto compacto de βX y que $K \subseteq C$. Además, como $\overline{W_n} \subseteq U_n$ para cada n, tenemos que $C \subseteq X$.

Para verificar que $\chi(C, X) \leqslant \omega$ probaremos que la familia $\{W_n : n \in \omega\}$ es una base de vecindades abiertas de C en βX. Al probar esto automáticamente obtendremos que la familia $\{W_n \cap X : n \in \omega\}$ es una base de vecindades abiertas de C en X con lo que podremos concluir que $\chi(C, X) \leqslant \omega$.

Sea $U \in \tau(\beta X)$ un abierto arbitrario tal que $C \subseteq U$. Es claro que $F = \beta X \setminus U$ es un subconjunto cerrado y por tanto compacto de βX. Definamos $F_n = F \cap \overline{W_n}$ para cada n. Es evidente que F_n es un subconjunto compacto para cada n. Además, $F_{n+1} \subseteq F_n$ para cada $n \in \omega$ y $\bigcap_{n \in \omega} F_n = F \cap \bigcap_{n \in \omega} \overline{W_n} = (\beta X \setminus U) \cap \bigcap_{n \in \omega} \overline{W_n} = (\beta X \setminus U) \cap C = \emptyset$. Como la familia $\{F_n : n \in \omega\}$ es decreciente, necesariamente existe $n \in \omega$ tal que $\overline{W_n} \cap F = F_n = \emptyset$. Entonces $C \subseteq W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq \beta \setminus F = U$. Como la familia $\{W_n : n \in \omega\}$ claramente está formada de abiertos que contienen a C, podemos concluir que $\{W_n : n \in \omega\}$ es una base de vecindades abiertas de C en βX. Por lo tanto, $\chi(C, X) \leqslant |\{W_n \cap X : n \in \omega\}| \leqslant \omega$.

(2) Supongamos por el contrario que $Y \cap Z = \emptyset$. Como X es denso en βX y Y y Z lo son en X, tenemos que Y y Z son subespacios densos de βX. Así, βX es una compactación Hausdorff de Y y de Z. Como Y y Z son Čech-completos, ellos son subconjuntos de tipo G_δ de βX. Fijemos colecciones numerables $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de abiertos de βX tales que $Y = \bigcap \mathcal{B}$ y $Z = \bigcap \mathcal{C}$. Definamos $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{D}$ es una colección numerable de abiertos de βX tal que $\bigcap \mathcal{D} = \bigcap \mathcal{B} \cap \bigcap \mathcal{C} = \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{D} = \{O_n : n \in \omega\}$. Construiremos una sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ de abiertos no vacíos de βX con las siguientes propiedades:

- $\overline{U_n} \subseteq O_n$ para cada $n \in \omega$,
- $\overline{U_{n+1}} \subseteq \overline{U_n}$ para cada $n \in \omega$.

Sea $x \in O_0$. Como βX es un espacio regular, podemos fijar un abierto U_0 de βX tal que $x \in U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq O_0$. Supongamos que $n \in \omega$ y que tenemos construidos abiertos no vacíos $U_0, U_1, \ldots, U_n$ con las propiedades deseadas. Como $O_{n+1} \in \mathcal{B}$ o $O_{n+1} \in \mathcal{C}$, tenemos que $Y \subseteq O_{n+1}$ o $Z \subseteq O_{n+1}$, lo que implica que O_{n+1} es un subconjunto denso de βX. Debido a que U_n es un abierto no vacío, $U_n \cap O_{n+1}$ es un abierto no vacío. Como βX es un espacio regular podemos fijar un abierto no vacío U_{n+1} de βX de modo que $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n \cap O_{n+1}$. Esto termina la construcción del abierto U_{n+1}. Por el método de recursión, tenemos construida la sucesión deseada.

Debido a que la familia de cerrados no vacíos $\{\overline{U_n} : n \in \omega\}$ es decreciente, ella tiene la propiedad de la intersección finita. Entonces al ser βX compacto, $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \neq \emptyset$. Pero como $\overline{U_n} \subseteq O_n$ para cada $n \in \omega$, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} O_n$; hecho que contradice que $\bigcap_{n\in\omega} O_n = \bigcap \mathcal{D} = \emptyset$. Por lo tanto, $Y \cap Z \neq \emptyset$. $\square$

En la prueba de la proposición 3.15 usaremos la siguiente caracterización de los espacios Čech-completos (el lector puede encontrar una prueba de esta caracterización en [**2**, 3.9.2]).

Lema 2.3. *Un espacio Tychonoff Y es Čech-completo si y sólo si existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{A}_n : n \in \omega\}$ de Y que tiene la siguiente propiedad: para cualquier familia $\mathcal{F}$ de cerrados de Y con la propiedad de la intersección finita tal que, para cada $n \in \omega$, existe $F \in \mathcal{F}$ con $F \subseteq B$ para algún $B \in \mathcal{A}_n$, se tiene que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

3. Espacios pseudocompletos

En toda esta sección los espacios topológicos se suponen espacios cuasi-regulares.

Definición 3.1. *Un espacio topológico X es cuasi-regular si para todo abierto no vacío $U \subseteq X$ existe un abierto no vacío V tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

Es evidente que *todo espacio regular es un espacio cuasi-regular*. Además, *la propiedad de cuasi-regularidad se transmite a subespacios densos*. En efecto, sean X un espacio topológico cuasi-regular y Y un subespacio denso de X. Consideremos un abierto no vacío $V \in \tau(Y)$. Existe $W \in \tau(X)$ tal que $V = W \cap Y$. Dado que X es cuasi-regular, podemos elegir $U \in \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$ de tal manera que $\overline{U} \subseteq W$. Entonces $\mathrm{cl}_Y(U \cap Y) = \overline{U \cap Y} \cap Y = \overline{U} \cap Y \subseteq W \cap Y = V$. Por lo tanto, el subespacio Y es cuasi-regular.

Para poder introducir la noción de espacio pseudocompleto necesitamos recordar la noción de π-base.

Definición 3.2. *Una π-base de un espacio topológico X es una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$ con la propiedad de que para cada subconjunto abierto no vacío V del espacio X es posible hallar un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V$.*

Una familia $\{U_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de un espacio X es un *remolino* (en X) si $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$.

Definición 3.3. *Un espacio topológico X es pseudocompleto si es cuasi-regular y si existe una sucesión $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases tal que para cualquier remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ con $U_n \in \mathcal{B}_n$ se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$.*

La sucesión $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es llamada sucesión pseudocompleta para el espacio X.

Más adelante demostraremos que cualquier espacio pseudocompleto tiene la propiedad de Baire. Por otro lado, es bien conocido que cualquier espacio completamente metrizable es un espacio de Baire; como comprobaremos a continuación la razón es porque todo espacio completamente metrizable es un espacio pseudocompleto. Recuerde que *un espacio topológico X es completamente metrizable* si existe en X una métrica completa ρ tal que $\tau(X)$ es igual a la topología $\tau_\rho(X)$ inducida por la métrica ρ.

Proposición 3.4. *Si X es un espacio completamente metrizable, entonces $(X, \tau_\rho(X))$ es un espacio pseudocompleto.*

Demostración: Para cada $n \in \omega$, definamos $\mathcal{B}_n = \{B_\rho(x,r) : 0 < r < \frac{1}{n+1} \wedge x \in X\}$, donde $B_\rho(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$ es la bola abierta de centro x y radio r. No es difícil verificar que cada una de las familias $\mathcal{B}_n$ es una π-base de X. Comprobaremos que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para X. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ un remolino tal que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Para toda $n \in \omega$, existen $r_n \in (0, \frac{1}{n+1})$ y $x_n \in X$ tales que $U_n = B_\rho(x_n, r_n)$. Dado que $\{U_n : n \in \omega\}$ es decreciente, la familia $\{\overline{U_n} : n \in \omega\}$ es una sucesión decreciente de cerrados tal que $0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \text{diám}_\rho(\overline{U_n}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ (donde $\text{diám}_\rho(\overline{U_n})$ denota al diámetro del conjunto $\overline{U_n}$ en el espacio métrico (X,ρ)). Como X es un espacio completamente metrizable, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \neq \emptyset$. Dado que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n$, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. $\square$

Los espacios completamente metrizables son de hecho espacios Čech-completos (c.f. [**2**, 4.3.26]). Con el resultado que damos enseguida será posible probar que la clase de espacios Čech-completos está también contenida en la clase de los espacios pseudocompletos.

Proposición 3.5. *Sea X un espacio cuasi-regular. Supóngase que existe una π-base $\mathcal{B}$ en X tal que para cada $U \in \mathcal{B}$ la clausura $\overline{U}$ es un subespacio numerablemente compacto, entonces todo subconjunto denso y de tipo G_δ de X es un subespacio pseudocompleto.*

Demostración: Supongamos que Y es un subespacio denso de tipo G_δ de X. Dado que Y es un subespacio denso de X y X es cuasi-regular, Y también es cuasi-regular.

Supongamos que $\{G_n : n \in \omega\} \subseteq \tau(X)$ es tal que $Y = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Para cada $n \in \omega$, definamos $\mathcal{B}_n = \{H \cap Y : H \in \mathcal{B} \wedge \overline{H} \subseteq G_n\}$. Claramente $\mathcal{B}_n \subseteq \tau(Y)$. Mostraremos que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para Y. Para este propósito, demostremos primeramente que cada una de las familias $\mathcal{B}_n$ es una π-base del espacio Y. Fijemos un índice $n \in \omega$ y consideremos un abierto no vacío $V \in \tau(Y)$. Sea $W \in \tau(X)$ tal que $V = W \cap Y$. Dado que X es cuasi-regular y $\mathcal{B}$ es una π-base, existe $H \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{H} \subseteq W \cap G_n$. Entonces $H \cap Y \subseteq W \cap Y = V$ y $H \cap Y \in \mathcal{B}_n$. Por lo tanto, la familia $\mathcal{B}_n$ es una π-base de Y.

Consideremos ahora un remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ en Y con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Como $U_n \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \omega$, existen abiertos $H_n \in \mathcal{B}$ tales que $U_n = H_n \cap Y$ y $\overline{H_n} \subseteq G_n$ (la cerradura es considera en X). Observe ahora que debido a que $U_{n+1} \subseteq U_n$ para todo índice n, la familia $\{\overline{U_n} : n \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita (las cerraduras se consideran en X). Como $\overline{U_0}$ es un espacio numerablemente compacto y $\{\overline{U_n} : n \in \omega\}$ está constituida por subespacios cerrados de $\overline{U_0}$, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \neq \emptyset$. Ahora bien, dado que $\overline{H_n} \subseteq G_n$ para toda n, obtenemos que $\overline{U_n} \subseteq G_n$ para cada índice n, de donde $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} G_n = Y$. Entonces

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_{n+1}} &= \Big(\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_{n+1}}\Big) \cap Y = \bigcap_{n\in\omega} \big(\overline{U_{n+1}} \cap Y\big) \\ &= \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_Y(U_{n+1}) \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n.\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, la familia $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para Y. $\square$

Corolario 3.6. *Todo subconjunto denso de tipo G_δ de un espacio numerablemente compacto cuasi-regular es un espacio pseudocompleto.*

Demostración: Supongamos que X es un espacio cuasi-regular numerablemente compacto y que $Y \subseteq X$ es denso de tipo G_δ. Como Y es denso, Y es cuasi-regular. Por otro lado, la familia $\tau(X) \setminus \{\emptyset\}$ es una π-base para X para la cual sucede que $\overline{U}$ es numerablemente compacto para toda $U \in \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$. Aplicando la proposición 3.5 concluimos que Y es pseudocompleto. $\square$

Debido a que todos los espacios Tychonoff son subespacios densos de su compactación de Stone-Čech y a que todos los espacios compactos Hausdorff son numerablemente compactos y cuasi-regulares, del corolario 3.6 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.7. *Todo espacio Čech-completo es un espacio pseudocompleto.*

De hecho los espacios Čech-completos son espacios fuertemente pseudocompletos (una propiedad que implica la pseudocompletitud). La definición precisa de estos espacios es la siguiente.

Definición 3.8. *Un espacio cuasi-regular X es fuertemente pseudocompleto si existe una sucesión $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de bases de X tal que para cualquier remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ con $U_n \in \mathcal{B}_n$ se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$.*

Como los elementos no vacíos de cualquier base forman una π-base, cualquier espacio fuertemente pseudocompleto es un espacio pseudocompleto. Enseguida verificamos que cualquier espacio Čech-completo es un espacio fuertemente pseudocompleto.

Proposición 3.9. *Si X es un espacio Čech-completo, entonces X es fuertemente pseudocompleto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{G_n : n \in \omega\} \subseteq \tau(\beta X)$ tal que $X = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Defina para cada $n \in \omega$ al conjunto $\mathcal{B}_n = \{U \in \tau(X) \setminus \{\emptyset\} : \mathrm{cl}_{\beta X}(U) \subseteq G_n\}$. Cada conjunto $\mathcal{B}_n$ es una base de X. Efectivamente, suponga que $W \in \tau(X)$ y que $x \in W$ son elementos arbitrarios. Fije un abierto V de βX tal que $W = V \cap X$. Entonces $x \in V \cap G_n$ y $V \cap G_n$ es un abierto de βX. Por la regularidad de βX, existe un abierto U de βX tal que $x \in \mathrm{cl}_{\beta X}(U) \subseteq V \cap G_n$. Entonces $U \cap X \in \mathcal{B}_n$ y además $x \in U \cap X \subseteq V \cap X = W$. De esta forma hemos probado que $\mathcal{B}_n$ es una base para cada $n \in \omega$. Probemos ahora que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para X. Consideremos para ello un remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ en X tal que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada n. Como $\{\mathrm{cl}_{\beta X}(U_n) : n \in \omega\}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita (pues $U_{n+1} \subseteq U_n$ para cada n), la compacidad de βX implica que $\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_{\beta X}(U_n) \neq \emptyset$. Fijemos un elemento $x \in \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_{\beta X}(U_n)$. Como $\mathrm{cl}_{\beta X}(U_n) \subseteq G_n$ para cada n (ya que $U_n \in \mathcal{B}_n$), $x \in \bigcap_{n\in\omega} G_n = X$. Entonces $x \in \mathrm{cl}_{\beta X}(U_n) \cap X = \mathrm{cl}_X(U_n)$ para cada $n \in \omega$. Consecuentemente, $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Lo que termina la prueba de que X es un espacio fuertemente pseudocompleto. $\square$

Todos los espacios localmente compactos Hausdorff son espacios Čech-completos porque son subespacios abiertos de su compactación de Stone-Čech. Por esta razón son espacios Čech-completos (y ello, espacios pseudocompletos): los compactos Hausdorff, los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$, los espacios de Mrowka, las n-variedades topológicas[1] y el espacio $[0, \omega_1)$.

Se puede probar que la Čech-completitud se hereda a subespacios cerrados y a subespacios de tipo G_δ (vea [**2**, 3.9.6]). Como el conjunto de los números irracionales $\mathbb{P}$ es un subconjunto de tipo G_δ de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}$ es un espacio Čech-completo que no es localmente compacto. Otro ejemplo de un espacio Čech-completo que no es localmente compacto es el espacio de Banach $\ell_2 = \{x \in \mathbb{R}^\omega : \sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 < \infty\}$.

Finalizamos la sección con algunas de las más importantes propiedades de la clase de los espacios pseudocompletos.

Proposición 3.10.

(1) *El producto de cualquier cantidad de espacios pseudocompletos es un espacio pseudocompleto.*
(2) *Sean X cuasi-regular y $Y \subseteq X = \overline{Y}$. Si Y es un espacio pseudocompleto, entonces X es pseudocompleto.*
(3) *Todo subespacio abierto no vacío de un espacio pseudocompleto es un espacio pseudocompleto.*
(4) *Todo espacio pseudocompleto es un espacio de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: (1) Sean $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios pseudocompletos y $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el producto de Tychonoff de los espacios X_α. Demostraremos primeramente que X es un espacio cuasi-regular. Para este fin, elijamos un abierto canónico no vacío $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ del espacio X (la función $\pi_{\alpha_i} : X \to X_{\alpha_i}$ es la α_i-ésima proyección natural asociada al producto $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$). Dado que cada espacio X_{α_i} es cuasi-regular, existen abiertos $V_{\alpha_i} \in \tau(X_{\alpha_i})$ tales que $\mathrm{cl}_{X_{\alpha_i}}(V_{\alpha_i} \subseteq U_{\alpha_i}$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces $W = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$ es un abierto no vacío de X tal que $\mathrm{cl}_X(W) \subseteq U$. De esta forma, el espacio X es cuasi-regular.

[1]Una n-variedad topológica es un espacio Haudorff X tal que para cada $x \in X$ existe un homeomorfismo $f : U \to V$ entre un abierto U de X que contiene a x y un abierto V de $\mathbb{R}^n$.

Supongamos ahora que $\{\mathcal{B}_n^\alpha : n \in \omega\}$ una sucesión pseudocompleta de π-bases de X_α para cada $\alpha \in A$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X_\alpha \in \mathcal{B}_n^\alpha$ para cada n y para cada α. Para cada índice $n \in \omega$, definimos

$$\mathcal{B}_n = \big\{ \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}(U_{n,\alpha}) : F \subseteq A,\ F \text{ es finito } \wedge U_{n,\alpha} \in \mathcal{B}_n^\alpha \text{ para cada } \alpha \in F \big\}.$$

Afirmamos que la familia $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X. En efecto, no es difícil demostrar que cada familia $\mathcal{B}_n$ es una π-base de X. Consideremos un remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Supongamos que $U_n = \bigcap_{\alpha \in F_n} \pi_\alpha^{-1}(U_{n,\alpha})$ donde $F_n \subseteq A$ es finito. Definamos a $U_{\beta,n} = X_\beta$ en el caso cuando $\beta \in A \setminus F_n$ (para cada $n \in \omega$). Entonces la familia $\{U_{n,\alpha} : n \in \omega\}$ es un remolino en X_α tal que $U_{n,\alpha} \in \mathcal{B}_n^\alpha$ para cada $n \in \omega$. Como la sucesión $\{\mathcal{B}_n^\alpha : n \in \omega\}$ es pseudocompleta, existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \in \bigcap\{U_{n,\alpha} : n \in \omega\}$. Entonces $x = \{x_\alpha\} \in X$ y además $x \in \bigcap\{U_n : n \in \omega\}$. Por lo tanto, la familia $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para X. Consecuentemente, X es pseudocompleto.

(2) Como Y es pseudocompleto podemos considerar una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases de X. Para cada $n \in \omega$ y para cada $U \in \mathcal{B}_n$, existen abiertos $W(U) \in \tau(X)$ tales que $U = W(U) \cap Y$. No es difícil probar que la familia $\mathcal{C}_n = \{W(U) : U \in \mathcal{B}_n\}$ es una π-base de X para cada $n \in \omega$.

Verifiquemos que la familia $\{\mathcal{C}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X. Sea $\{V_n : n \in \omega\}$ un remolino tal que $V_n \in \mathcal{C}_n$ para cada índice n. Por la definición de las familias $\mathcal{C}_n$, existen $U_n \in \mathcal{B}_n$ tales que $V_n = W(U_n)$ para cada n. Entonces $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en Y con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \omega$ (note que $\mathrm{cl}_Y(U_{n+1}) = \overline{U_{n+1}} \cap Y = \overline{W(U_{n+1}) \cap Y} \cap Y = \overline{W(U_{n+1})} \cap Y \subseteq W(U_n) \cap Y = U_n$). Aplicando ahora el hecho de que Y es pseudocompleto, podemos ver que $\bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset$. Como $\bigcap_{n \in \omega} U_n \subseteq \bigcap_{n \in \omega} W(U_n)$, se tiene que $\bigcap_{n \in \omega} V_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, podemos concluir que X es pseudocompleto.

(3) Sean X pseudocompleto y $V \in \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$. Probemos primeramente que V es cuasi-regular. Si $W \in \tau(V)$ entonces $W \in \tau(X)$, de donde existe $U \in \tau(X)$ tal que $\overline{U} \subseteq W$. Como $\mathrm{cl}_V(U) = \overline{U} \cap V \subseteq W \cap V = W$, se sigue que V es cuasi-regular.

Ahora consideremos una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases del espacio X. Para cada $n \in \omega$, definamos $\mathcal{C}_n = \{B \in \mathcal{B}_n : \overline{B} \subseteq V\}$. Entonces $\{\mathcal{C}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para V. En efecto, elijamos $W \in \tau(V)$. Entonces $W \in \tau(X)$. Como $\mathcal{B}_n$ es π-base de X y X es cuasi-regular, existe $B \in \mathcal{B}_n$ tal que $B \subseteq \overline{B} \subseteq W$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{C}_n$ y $B \subseteq W$. Esto demuestra que cada familia $\mathcal{C}_n$ es una π-base de X.

Por otro lado, si $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en V tal que $U_n \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \in \omega$. Entonces $U_n \in \mathcal{B}_n$ y $\overline{U_n} \subseteq V$ para toda n, de esta forma la familia $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en X con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Como X es pseudocompleto, tenemos que $\bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset$.

(4) Supongamos que X es un espacio pseudocompleto y que $\{G_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de subespacios abiertos densos de X. Consideremos un abierto no vacío $G \in \tau(X)$ cualquiera. Fijemos una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ de π-bases que constate la propiedad de pseudocompletitud para el espacio X.

Debido a que el conjunto G_0 es un subespacio abierto denso de X, el conjunto $G_0 \cap G \in \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$. Como X es cuasi-regular y $\mathcal{B}_0$ es una π-base de X, existe $U_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $\overline{U_0} \subseteq G_0 \cap G$. De igual manera, como el subespacio G_1 es abierto y su cerradura cubre a todo X, tenemos que $U_0 \cap G_1 \in \tau(X)\setminus\{\emptyset\}$. Aplicando de nuevo el hecho de que X es cuasi-regular y $\mathcal{B}_1$ es π-base de X, podemos elegir $U_1 \in \mathcal{B}_1$ de tal forma que $\overline{U_1} \subseteq U_0 \cap G_1$. Supongamos ahora que tenemos construidos a los conjuntos abiertos no vacíos $U_0, \ldots, U_k$ de tal manera que $\overline{U_0} \subseteq G_0 \cap G$, $U_j \in \mathcal{B}_j$ y $\overline{U_j} \subseteq U_{j-1} \cap G_j$, para cada $j = 1, \ldots, k$. Como G_{k+1} es un subconjunto abierto denso de X y U_k es un abierto no vacío, se tiene que $G_{k+1} \cap U_k \in \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$. Debido a que X es un espacio cuasi-regular y $\mathcal{B}_{k+1}$ es una π-base de X, podemos seleccionar un elemento $U_{k+1} \in \mathcal{B}_{k+1}$ de tal forma que $\overline{U_{k+1}} \subseteq U_k \cap G_{k+1}$.

Notemos ahora que por la forma de haber construido a los conjuntos U_i, la familia $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en X tal que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Aplicando el hecho de que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X, podemos concluir que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. Pero $U_n \subseteq G \cap G_n$ (para cada $n \in \omega$), entonces $G \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} G_n\right) \neq \emptyset$. De esta forma hemos probado que X posee la propiedad de Baire. □

Corolario 3.11. *Todo espacio Čech-completo es un espacio de Baire.*

La línea de Sorgenfrey es un ejemplo de un espacio de Baire que no es Čech-completo (vea el problema 272 de [**4**]).

Corolario 3.12. *Si un espacio cuasi-regular X tiene un subespacio denso Čech-completo, entonces X es un espacio pseudocompleto.*

Corolario 3.13. *El producto de cualquier cantidad de espacios Čech-completos es un espacio pseudocompleto y por ello un espacio de Baire.*

Corolario 3.14. *El producto de cualquier cantidad de espacios completamente metrizables es un espacio pseudocompleto y por ello un espacio de Baire. En particular, el espacio $\mathbb{R}^\kappa$ es un espacio pseudocompleto, y por tanto un espacio de Baire, para cualquier cardinal finito o infinito κ.*

El siguiente corolario es interesante por sí solo y será de gran importancia para demostrar un resultado en el contexto de la C_p-teoría (vea la proposición 5.5).

Corolario 3.15. *Un espacio metrizable X es pseudocompleto si y sólo si X tiene un subespacio denso Čech-completo.*

Demostración: $\Rightarrow]$ Sea d una métrica en X tal que $\tau(X) = \tau_d(X)$. Primero probaremos la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Existe una colección numerable $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de familias de subconjuntos abiertos no vacíos de X que tienen las siguientes propiedades:

(1) $\mathcal{U}_n$ es una familia ajena, es decir, si $U, V \in \mathcal{U}_n$ y $U \neq V$, entonces $U \cap V = \emptyset$,
(2) $\bigcup \mathcal{U}_n$ es un subconjunto denso de X,
(3) $\text{diám}(U) \leqslant \frac{1}{n+1}$ para cada $U \in \mathcal{U}_n$,
(4) para cada $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ existe $V \in \mathcal{U}_n$ tal que $\overline{U} \subseteq V$,
(5) la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta, es decir, para cada remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ con $U_n \in \mathcal{U}_n$ se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$.

Demostración de la afirmación: Como el espacio métrico (X, d) es pseudocompleto, existe una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{C}_n : n \in \omega\}$ de π-bases. Para cada $n \in \omega$ defina $\mathcal{B}_n = \{U \in \mathcal{C}_n : \text{diám}(U) < \frac{1}{n+1}\}$. Como $\mathcal{C}_n$ es una π-base, si

V es un subconjunto abierto no vacío y $x \in V$, entonces existe $C \in \mathcal{C}_n$ tal que $C \subseteq B(x, \frac{1}{4(n+1)}) \cap V$ es un elemento fijo. Entonces $C \in \mathcal{B}_n$ y $C \subseteq V$. Esto muestra que cada $\mathcal{B}_n$ es una π-base para X. Además, debido a que $\{\mathcal{C}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta, $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ también lo es.

Sea $\mathcal{U}_0$ una subfamilia de $\mathcal{B}_0$ que es ajena maximal. Resulta que $\overline{\bigcup \mathcal{U}_0} = X$. Supongamos que tenemos construidas las familias $\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n$ con las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{U}_i$ es ajena y $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{B}_i$ para cada $i = 0, \ldots, n$,
(b) para cada $i < n$ y cada $U \in \mathcal{U}_{i+1}$, existe $V \in \mathcal{U}_i$ tal que $\overline{U} \subseteq V$,
(c) $\bigcup \mathcal{U}_i$ es un subconjunto denso de X para cada $i \leqslant n$.

Para construir a la familia $\mathcal{U}_{n+1}$ procedemos de la siguiente manera: Para cada $U \in \mathcal{U}_n$ fijemos una familia ajena maximal (respecto de contención) $\mathcal{U}^U_{n+1} \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$ tal que para cada $V \in \mathcal{U}^U_{n+1}$ se tiene que $\overline{V} \subseteq U$[2]. Es muy sencillo demostrar (usando la maximalidad) que $\mathrm{cl}_U(\bigcup \mathcal{U}^U_{n+1}) = U$. Definamos $\mathcal{U}_{n+1} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \mathcal{U}^U_{n+1}$. Esto termina la construcción de la familia $\mathcal{U}_{n+1}$. No es difícil verificar que las familias $\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{U}_{n+1}$ tiene las propiedades (a), (b) y (c). Por el método de resursión podemos concluir que tenemos definida una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de familias de subconjuntos abiertos no vacíos de X que tienen las propiedades (1)-(5) (dejamos al lector verificarlo). ⊠

Afirmación 2. $Y = \bigcap_{n \in \omega} (\bigcup \mathcal{U}_n)$ es un subespacio denso de X que es Čech-completo.

Demostración de la afirmación: Como X es un espacio de Baire y cada elemento de la colección $\{\bigcup \mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto abierto denso de X, Y es denso en X.

Y es un espacio Čech-completo. Defina, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{A}_n = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}_n\}$. Como $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_n$, $Y = \bigcup \mathcal{A}_n$. Así, cada $\mathcal{A}_n$ es una cubierta abierta de Y. Sea $\mathcal{F}$ una familia arbitraria de cerrados de Y con la propiedad de la intersección finita tal que para cada $n \in \omega$ existe $F_n \in \mathcal{F}$ con $F_n \subseteq A_n$ para algún $A_n \in \mathcal{A}_n$. Fijemos, para cada $n \in \omega$ elementos $F_n \in \mathcal{F}$ y $A_n \in \mathcal{A}_n$ con $F_n \subseteq A_n$. Fijemos también, para cada $n \in \omega$, $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $U_n \cap Y = A_n$. Entonces $\emptyset \neq F_n \cap F_{n+1} \subseteq A_n \cap A_{n+1} \subseteq U_{n+1} \cap U_n$. Consecuentemente, por las propiedades (1) y (4), $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$. Entonces la familia $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino. Por (5) podemos fijar $x \in \bigcap \{U_n : n \in \omega\}$. Resulta que $x \in \bigcap \mathcal{F}$ (es sencillo notar que $x \in Y$). Efectivamente, supongamos por el contrario que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin F$. Fije un cerrado G de X de modo que $F = G \cap Y$. Entonces $x \notin G$. Luego existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap G = \emptyset$. Fijemos $m \in \omega \setminus \{0\}$ de modo que $\frac{1}{m} < r$. Consideremos al abierto U_m. Si $y \in U_m$ es arbitrario, entonces como $x \in U_m$ tenemos que $d(x, y) \leqslant \text{diám}(U_m) \leqslant \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} < r$. Así, $U_m \subseteq B(x, r)$. Por lo que $U_m \cap G = \emptyset$. Entonces $U_m \cap G \cap Y = \emptyset$, es decir, $A_m \cap F = \emptyset$. Ahora recuerde que para el natural m los elementos $F_m \in \mathcal{F}$ y $A_m \in \mathcal{A}_m$ fueron seleccionados de modo que $F_m \subseteq A_m$. De esto se deduce que $F \cap F_m = \emptyset$, lo que contradice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por lo tanto, $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Consecuentemente, por el lema 2.3, Y es un espacio Čech-completo.

---

[2]Como U es no vacío y X es regular, existe W abierto no vacío tal que $\overline{W} \subseteq U$. Debido a que $\mathcal{B}_{n+1}$ es una π-base, existe $V \in \mathcal{B}_{n+1}$ tal que $V \subseteq W$. Entonces $\mathcal{D} = \{V\} \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$ es tal que para cada $V \in \mathcal{D}$ sucede que $\overline{V} \subseteq U$. De esta manera, la colección $\mathcal{E} = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_{n+1} : (\forall\, V \in \mathcal{C})\ (\overline{V} \subseteq U)\}$ es no vacía. Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal $\mathcal{U}^U_{n+1} \in \mathcal{E}$.

$\Leftarrow$] Por el corolario 3.7 y el inciso (2) de la proposición 3.10, X es un espacio pseudocompleto. $\square$

4. Imágenes continuas de espacios pseudocompletos

La clase de espacios pseudocompletos es una clase cerrada cuando se toman productos topológicos. Sin embargo, esta clase no siempre es cerrada bajo imágenes continuas. Por ejemplo, como subespacio del espacio $(\mathbb{R}, \tau(\mathbb{R}))$ el conjunto $X = [0,1] \cup (\mathbb{Q} \cap [2,3])$ no es un espacio pseudocompleto porque no tiene la propiedad de Baire, pero es imagen continua bajo la función identidad id_X del espacio discreto $(X, \mathcal{P}(X))$, el cual es un espacio pseudocompleto por ser completamente metrizable. Para el caso de imágenes continuas y abiertas no se sabe si la clase de espacios pseudocompletos es una clase cerrada.

PROBLEMA 4.1. *Supóngase que X es pseudocompleto y que $f : X \to Z$ es una función continua, abierta y suprayectiva, ¿es Z un espacio pseudocompleto?*

Sin embargo, algunos casos particulares del anterior problema abierto sí tienen una respuesta positiva. Un poco más adelante presentamos un resultado de Tkachuk que nos trae como una consecuencia que el espacio Z en el problema 4.1 es pseudocompleto en el caso en que sea metrizable. Necesitamos la noción de función débilmente abierta.

Definición 4.2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos.*

(1) Diremos que f es una función casi-abierta si para cada abierto no vacío U de X existe un abierto no vacío V del espacio Y tal que $f(U) \subseteq V \subseteq \overline{f(U)}$.
(2) Se dice f es una función débilmente abierta si para cada abierto no vacío U de X existe un abierto no vacío V del espacio Y tal que $\overline{V} = \overline{f(U)}$.

Es evidente que cualquier función abierta es una función casi-abierta y que cualquier función casi-abierta es una función débilmente abierta. Un hecho que usaremos posteriormente y que es muy sencillo de probar es el siguiente:

Lema 4.3. *La composición de funciones casi-abiertas es de nuevo una función casi-abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones casi-abiertas. Sea U un subconjunto abierto no vacío arbitrario de X. Como f es casi-abierta, existe V subconjunto abierto no vacío de Y tal que $f(U) \subseteq V \subseteq \overline{f(U)}$. Aplicando ahora el hecho de que g es casi-abierta al abierto no vacío V, podemos garantizar la existencia de un subconjunto abierto W de Z tal que $g(V) \subseteq W \subseteq \overline{g(V)}$. Entonces $\overline{g(V)} = \overline{W}$.

Por otro lado, como $g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq g(\overline{f(U)}) \subseteq \overline{g(f(U))}$, $\overline{g(V)} = \overline{g(f(U))}$. Entonces $\overline{W} = \overline{g(f(U))}$. Por lo tanto, $g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W \subseteq \overline{W} = \overline{g(f(U))}$. Lo que muestra que $g \circ f$ es una función casi-abierta. $\square$

El siguiente resultado de Tkachuk genera dos respuestas positivas parciales al problema 4.1 (vea el corolario 4.5 y la proposición 5.5).

Lema 4.4 (Tkachuk **[3]**, **[4]**)**.** *Supóngase que X es un espacio pseudocompleto y que $f : X \to Y$ es una función continua, suprayectiva y débilmente abierta. Si Y es un espacio metrizable, entonces Y contiene un subespacio denso Čech-completo.*

Demostración: Note que si U es cualquier abierto no vacío de X, entonces al ser f débilmente abierta, existe un abierto no vacío V de Y tal que $\overline{V} = \overline{f(U)}$. Entonces $V \subseteq \operatorname{int}(\overline{f(U)})$. Consecuentemente, $\overline{f(U)} = \overline{\operatorname{int}(\overline{f(U)})}$.

Como X es un espacio pseudocompleto podemos fijar una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases para X. Defina para cada $n \in \omega$ a la familia $\mathcal{C}_n = \{\operatorname{int}(\overline{f(U)}) : U \in \mathcal{B}_n\}$. Es sencillo verificar que la familia $\mathcal{C}_n$ es una π-base para Y (para cada $n \in \omega$).

Construiremos una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de familias de subconjuntos abiertos no vacíos de Y que satisfagan las propiedades (1)-(5) de la afirmación 1 de la prueba del corolario 3.15, para después poder concluir (como se prueba en la afirmación 2 en ese mismo corolario) que el subespacio $D = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup \mathcal{U}_n$ es un subespacio denso Čech-completo (en este caso de Y).

Para probar la existencia de la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ probaremos la siguiente afirmación:

Afirmación 1. Existe una colección numerable $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de familias de subconjuntos abiertos no vacíos de Y que tienen las siguientes propiedades:

(1) $\mathcal{U}_n$ es una familia fuertemente ajena, es decir, si $U, V \in \mathcal{U}_n$ y $U \neq V$, entonces $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$,
(2) $\bigcup \mathcal{U}_n$ es un subconjunto denso de Y,
(3) $\operatorname{diám}(U) \leqslant \frac{1}{n+1}$ para cada $U \in \mathcal{U}_n$,
(4) para cada $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ existe $V \in \mathcal{U}_n$ tal que $\overline{U} \subseteq V$,
(5) la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta, es decir, para cada remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ con $U_n \in \mathcal{U}_n$ se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$.

Demostración de la afirmación: Consideremos a la familia $\mathcal{F} = \{V \in \mathcal{C}_0 : \operatorname{diám}(V) < 1\}$. Sea $\mathcal{U}_0$ una subfamilia de $\mathcal{F}$ fuertemente ajena maximal. Para cada $V \in \mathcal{U}_0$ fijemos un único $U \in \mathcal{B}_0$ tal que $\operatorname{int}(\overline{f(U)}) = V$. Defina $q_0(V) = U$. Debido a que para cada $V \in \mathcal{U}_0$, $q_0[V] = U \subseteq f^{-1}(\overline{V})$. La familia $\mathcal{D}_0 = \{q_0(V) : V \in \mathcal{U}_0\}$ es fuertemente ajena. Por otro lado, $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en Y y la función $q_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{D}_0$ es una biyección.

Suponga que tenemos construidas familias fuertemente ajenas $\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n$, $\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_n$ y funciones biyectivas $q_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{D}_i$ para $i = 0, \ldots, n$ tales que:

(a) $\mathcal{U}_i$ está formada de abiertos no vacíos del espacio Y, es una familia fuertemente ajena y además el subconjunto $\bigcup \mathcal{U}_i$ es denso en Y, para cada $i = 0, \ldots, n$,
(b) para toda $i = 0, \ldots, n$, $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{B}_i$ y $\operatorname{int}(\overline{f(q_i(V))}) = V$ para toda $V \in \mathcal{U}_i$,
(c) para toda $i = 0, \ldots, n$ y toda $V \in \mathcal{U}_i$, $\operatorname{diám}(V) < \frac{1}{i+1}$,
(d) para toda $i = 1, \ldots, n$ y toda $W \in \mathcal{U}_i$, existe $V \in \mathcal{U}_{i-1}$ tal que $\overline{W} \subseteq V$,
(e) para toda $i < n$, si $V \in \mathcal{U}_i$, $W \in \mathcal{U}_{i+1}$ y $W \subseteq V$, entonces $\overline{q_{i+1}(W)} \subseteq q_i(V)$.

Para construir a las colecciones $\mathcal{U}_{n+1}$, $\mathcal{D}_{n+1}$ y a la biyección q_{n+1} procedemos de la siguiente manera. Para cada elemento $V \in \mathcal{U}_n$ considemos a la familia

$$\mathcal{B}_{n+1}(V) = \{U \in \mathcal{B}_{n+1} : \overline{U} \subseteq q_n(V)\}.$$

Como $q_n(V)$ es un abierto no vacío de X y $\mathcal{B}_{n+1}$ es una π-base de X, la familia $\mathcal{B}_{n+1}(V)$ es no vacía y esta formada de abiertos de X contenidos en $q_n(V)$. Entonces

$\mathcal{B}_{n+1}(V)$ es una π-base para $q_n(V)$ (constituida de abiertos de X). Para cada elemento $V \in \mathcal{U}_n$, defina

$$\mathcal{D}(V) = \{\mathrm{int}(\overline{f(U)}) : U \in \mathcal{B}_{n+1}(V)\}$$

y consideremos a la colección $\mathcal{E}(V) = \{W \in \mathcal{D}(V) : \overline{W} \subseteq V \wedge \mathrm{diám}(W) < \frac{1}{n+2}\}$. Sea $\mathcal{U}_{n+1}(V)$ una subcolección de $\mathcal{E}(V)$ que sea fuertemente ajena maximal. Dejamos al lector verificar que el conjunto $\bigcup \mathcal{U}_{n+1}(V)$ es denso en V. Definamos $\mathcal{U}_{n+1} = \bigcup_{V \in \mathcal{U}_n} \mathcal{U}_{n+1}(V)$. Entonces $\mathcal{U}_{n+1}$ es una familia de abiertos no vacíos de Y fuertemente ajena y $\bigcup \mathcal{U}_{n+1}$ es un subconjunto denso de Y.

Para cada $W \in \mathcal{U}_{n+1}(V)$ fije un elemento $U(W) \in \mathcal{B}_{n+1}(V)$ de modo que $W = \mathrm{int}(\overline{f(U(W))})$. Defina $q_{n+1}(W) = U(W)$ y $\mathcal{D}_{n+1} = \bigcup_{V \in \mathcal{U}_n} \{U(W) : W \in \mathcal{U}_{n+1}(V)\}$. Es fácil probar que la familia $\mathcal{D}_{n+1}$ también es fuertemente ajena y que $q_{n+1} : \mathcal{U}_{n+1} \to \mathcal{D}_{n+1}$ es una biyección. Por la forma en que hemos construido a las familias $\mathcal{U}_{n+1}$ y $\mathcal{D}_{n+1}$ y a la biyección q_{n+1}, las colecciones y biyecciones: $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_{n+1}, \mathcal{D}_0, \dots, \mathcal{D}_{n+1}, q_0, \dots, q_{n+1}$ tienen las propiedades (a)-(d). Verificaremos que también tienen la propiedad (e). Obviamente sólo falta probar (e) para el caso en que $i = n$ (para $i < n$ ya es cierta la propiedad (e) por hipótesis de recursión). Supongamos entonces que $V \in \mathcal{U}_n$, $W \in \mathcal{U}_{n+1}$ y $W \subseteq V$. Entonces por la definición de $\mathcal{U}_{n+1}$ y al ser esta familia fuertemente ajena, $W \subseteq V$ implica que $W \in \mathcal{U}_{n+1}(V)$. Pero para W se fijo al elemento $U(W) \in \mathcal{B}_{n+1}(V)$ de modo que $W = \mathrm{int}(\overline{f(U(W))})$ y se definió $q_{n+1}(W) = U(W)$. Pero al ser $U(W)$ un elemento de $\mathcal{B}_{n+1}(V)$ por la definición de este último conjunto se tiene que $\overline{U(W)} \subseteq q_n(V)$, por lo cual, $\overline{q_{n+1}(W)} \subseteq q_n(V)$ lo que termina la prueba de que se tiene la propiedad (e).

Por el método de recursión tenemos definidas a las sucesiones $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n, \dots, \mathcal{D}_0, \dots, \mathcal{D}_n, \dots, q_0, \dots, q_n, \dots$ que tienen las anteriores propiedades (a)-(e) para cada $n \in \omega$.

Consecuentemente, la sucesión $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n, \dots$ tiene las propiedades (1)-(4). Así que para terminar la prueba de la afirmación 1 bastará probar que también tiene la propiedad (5): supongamos que $\{V_n : n \in \omega\}$ es una colección de abiertos no vacíos de Y tal que $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$ para cada $n \in \omega$. Si $U_i = q_i(V_i) \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in \omega$, entonces se sigue de (e) que $\overline{U_{i+1}} = \overline{q_{i+1}(V_i)} \subseteq q_i(V) = U_i$, es decir, $\overline{U_{i+1}} \subseteq U_i$ para cada $i \in \omega$. Como la sucesión $\{\mathcal{B}_i : i \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta de π-bases de X y X es pseudocompleto, existe $x \in \bigcap_{i \in \omega} U_i$. Como $f(U_i) \subseteq \overline{V_i}$ para cada i, tenemos que $f(x) \in \bigcap_{i \in \omega} \overline{V_{i+1}} \subseteq \bigcap_{i \in \omega} V_i$. Por lo tanto, $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n, \dots$ tiene la propiedad (5), lo que termina la prueba de la afirmación 1. ⊠

El enunciado de la afirmación 1 que acabamos de probar es muy parecido al de la afirmación 1 de la prueba del corolario 3.15 (tomando a X como Y). En dicho corolario se usa la afirmación 1 para probar la afirmación 2 en la que se muestra que el subespacio $\bigcap_{n \in \omega} \bigcup \mathcal{U}_n$ es un subespacio denso Čech-completo del espacio X. En dicha prueba se usa que X es un espacio de Baire al ser pseudocompleto. En nuestro caso para poder probar que el subespacio $\bigcap_{n \in \omega} \bigcup \mathcal{U}_n$ es denso en Y procedemos de la siguiente forma:

Suponga que A es un subconjunto abierto no vacío de Y. Fijemos $x \in A$ y $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Fijemos también $n \in \omega \setminus \{0\}$ de tal modo que $\frac{2}{n} < r$. Debido a que la colección $\bigcup \mathcal{U}_n$ es un subconjunto denso de Y, existe $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $U \cap B(x, r) \neq \emptyset$. Resulta que $U \subseteq B(x, \frac{2}{n}) \subseteq B(x, r) \subseteq A$. Efectivamente, fije $z \in U \cap B(x,r)$ y considere $y \in U$ un elemento cualquiera, entonces $d(y,x) \leqslant d(y,z) + d(z,x) \leqslant \text{diám}(U) + d(z,x) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$. Entonces $y \in B(x, \frac{2}{n})$. Denotemos ahora $U_n = U$. Aplicando la propiedad (4) de la afirmación 1 podemos garantizar la existencia de elementos $U_0 \in \mathcal{U}_0, U_1 \in \mathcal{U}_1, \ldots, U_{n-1} \in \mathcal{U}_{n-1}, U_n = U \in \mathcal{U}_n$ tales que

$$U_n \subseteq \overline{U_n} \subseteq U_{n-1} \subseteq \overline{U_{n-1}} \subseteq U_{n-2} \subseteq \cdots \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_0.$$

Ahora bien, debido a que $\bigcup \mathcal{U}_{n+1}$ es un subconjunto denso de Y, existe $U_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ tal que $U_{n+1} \cap U_n \neq \emptyset$. De nuevo, por la propiedad (4) de la afirmación 1, existe $V \in \mathcal{U}_n$ tal que $\overline{U_{n+1}} \subseteq V$. Pero por la propiedad (1) de la misma afirmación 1, si $U_n \neq V$, entonces necesariamente $U_n \cap V = \emptyset$, lo que contradice que $U_{n+1} \cap U_n \neq \emptyset$. Consecuentemente, $V = U_n$ y por ello $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$.

Siguiendo de esta manera, por recursión, tenemos construido un remolino $\{U_k : k \in \omega\}$ tal que $U_k \in \mathcal{U}_k$ para cada k. Por la propiedad (5) de la afirmación 1, podemos fijar $x \in \bigcap_{k\in\omega} U_k$. Claramente $x \in \big(\bigcap_{n\in\omega} \bigcup \mathcal{U}_n\big) \cap U \subseteq \big(\bigcap_{n\in\omega} \bigcup \mathcal{U}_n\big) \cap A$. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\omega} \bigcup \mathcal{U}_n$ es denso en Y.

Repitiendo ahora la prueba de la segunda parte de la afirmación 2 del corolario 3.15 podemos concluir que el subespacio $\bigcap_{n\in\omega} \bigcup \mathcal{U}_n$ es un subespacio denso Čech-completo del espacio Y. □

El siguiente corolario da una respuesta positiva parcial al problema abierto 4.1.

Corolario 4.5. *Toda imagen continua, metrizable y débilmente abierta de un espacio pseudocompleto es un espacio pseudocompleto.*

En particular, las imágenes continuas, metrizables y abiertas (o casi-abiertas) de espacios pseucompletos son espacios pseudocompletos.

5. Los espacios $C_p(X)$

En esta sección presentamos otro resultado de Tkachuk que da una respuesta parcial positiva al problema 4.1. Para presentar adecuadamente este resultado es necesario introducir a los espacios de funciones $C_p(X)$ y demostrar varias propiedades «básicas» de estos espacios topológicos. El lector interesado en profundizar en el estudios de las propiedades de los espacios $C_p(X)$ puede consultar los libros [**1**], [**4**], [**5**], [**6**] y [**7**].

En esta parte todos los espacios se suponen espacios Tychonoff.

Si X es un espacio topológico, entonces el espacio topológico $C_p(X)$ es el conjunto $C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es continua en } X\}$ equipado con la topología de subespacio respecto del producto topológico $\mathbb{R}^X$. La topología del espacio $C_p(X)$ es llamada *topología de la convergencia puntual.*

Como es bien sabido, la topología producto de $\mathbb{R}^X$ tiene como una subbase a la colección $S = \bigcup_{x\in X}\{\pi_x^{-1}[U] : U \text{ es un abierto de } \mathbb{R}\}$ donde $\pi_x : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ es la función proyección cuya regla de asociación esta dada por $\pi_x(f) = f(x)$ (como S es una subbase de la topología producto, cada función π_x es continua). Consecuentemente, la familia de todos los subconjuntos de $C_p(X)$ de tipo:

$$[x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n] = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}[U_i]\Big) \cap C_p(X) \tag{7.1}$$

donde $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $U_1, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, es una base de la topología de $C_p(X)$. Es muy sencillo darse cuenta que

$$[x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n] = \{f \in C_p(X) : \big(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\big)\ \big(f(x_i) \in U_i\big)\}.$$

Si $f \in C_p(X)$ es un elemento cualquiera, entonces una base local para f en el espacio $C_p(X)$ es la colección de todos los conjuntos de la forma:

$$[f; x_1, \ldots, x_n; \epsilon] = [x_1, \ldots, x_n; (f(x_1) - \epsilon, f(x_1) + \epsilon), \ldots, (f(x_n) - \epsilon, f(x_n) + \epsilon)],$$

aquí $(f(x_i)-\epsilon, f(x_i)+\epsilon)$ es el intervalo abierto de $\mathbb{R}$ de extremos $f(x_i)-\epsilon < f(x_i)+\epsilon$ donde $\epsilon > 0$. Note que

$$[f; x_1, \ldots, x_n; \epsilon] = \{g \in C_p(X) : \big(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\big)\ \big(|f(x_i) - g(x_i| < \epsilon\big)\}.$$

La siguiente proposición reune cuatro propiedades de los espacios de funciones $C_p(X)$ que usaremos más adelante.

Proposición 5.1. *Sea X un espacio Tychonoff.*

(1) $C_p(X)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^X$.
(2) $C_p(X) = \mathbb{R}^X$ si y sólo si X es un espacio discreto.
(3) Si existe un subespacio compacto K de $C_p(X)$ con $\chi(K, C_p(X)) \leqslant \omega$, entonces X es un espacio numerable.
(4) Si $C_p(X)$ tiene un subespacio denso que es Čech-completo, entonces X es discreto y numerable.

Demostración: (1) Considere un abierto básico no vacío $\bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}[U_i]$ de $\mathbb{R}^X$. Fije un elemento $g \in \bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}[U_i]$. Entonces $g(x_i) \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como X es un espacio Tychonoff, existe $f : X \to \mathbb{R}$ función continua tal que $f(x_i) = g(x_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $f \in C_p(X) \cap \big(\bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}[U_i]\big)$. Esto muestra que $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$.

(2) $\Rightarrow$] Debemos probar que cualquier subconjunto de X es abierto. Sea A un subconjunto cualquiera de X. Consideremos a la función $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Como $\chi_A \in \mathbb{R}^X$, $\chi_A \in C_p(X)$ por lo que es continua. Entonces $A = \chi_A^{-1}((0, 2))$ es un abierto de X.

$\Leftarrow$] Sea $f \in \mathbb{R}^X$ un elemento cualquiera. Como X es discreto, f es una función continua. Entonces $f \in C(X)$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^X = C_p(X)$.

(3) Para cada abierto básico $U = [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$ definimos al *soporte de U* como el conjunto $\mathrm{sop}(U) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Fijemos una base de vecindades abiertas $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ de K en $C_p(X)$. Sea $n \in \omega$ un elemento arbitrario. Para cada $f \in K$ existe un abierto básico U_f de $C_p(X)$ tal que $f \in U_f \subseteq B_n$. Como la colección $\{U_f : f \in K\}$ es una cubierta abierta de K y K es compacto, existe una colección finita $f_{t_1}, \ldots, f_{t_{m_n}} \in K$ tal que $K \subseteq V_n = U_{f_{t_1}} \cup \cdots \cup U_{f_{t_{m_n}}}$. Observe que $K \subseteq V_n \subseteq B_n$. Defina $A_n = \mathrm{sop}(U_{f_{t_1}}) \cup \cdots \cup \mathrm{sop}(U_{f_{t_{m_n}}})$. Es claro que A_n es un conjunto finito.

Defina ahora $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Claramente A es un subconjunto numerable de X. Para terminar la prueba mostraremos que $A = X$. Suponga por el contrario que existe $x \in X \setminus A$. Defina $e_x = \pi_x \restriction C_p(X)$. Entonces $e_x : C_p(X) \to \mathbb{R}$ es una función continua. Como K es compacto, $e_x(K)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y por ello acotado. Entonces existe $r > 0$ tal que $e_x(K) \subseteq (-r, r)$. Resulta entonces que $W = [x; (-r, r)]$ es un abierto básico de $C_p(X)$ que contiene a K (si $g \in K$ es arbitraria, entonces $g(x) = \pi_x(g) = e_x(g) \in (-r, r)$). Luego, debe existir $n \in \omega$ tal que $K \subseteq B_n \subseteq W$. Entonces $V_n \subseteq W$. Supongamos que $U_{f_{t_1}} = [x_1, \ldots, x_k; O_1, \ldots, O_k]$. Entonces $U_{f_{t_1}} \subseteq W$ y $\{x_1, \ldots, x_k\} = \mathrm{sop}(U_{f_{t_1}}) \subseteq A$. Como X es un espacio Tychonoff y $x \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$, existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g(x_i) = f_{t_1}(x_i) \in O_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$ y $g(x) = r$. Entonces $g \in B_n \setminus W$ lo que contradice que $\mathcal{B}$ es una base de vecindades abiertas de K en $C_p(X)$. Esta contradicción muestra que $X = A$. Por lo tanto, X es un conjunto numerable.

(4) Sea D un subespacio denso Čech-completo de $C_p(X)$. Como $C_p(X)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^X$, D es un subespacio denso Čech-completo de $\mathbb{R}^X$.

Si X no es un espacio discreto, entonces $\mathbb{R}^X \neq C_p(X)$. Sea $f \in \mathbb{R}^X \setminus C_p(X)$. La función $T_f : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$ dada por $T_f(g) = g + f$ es un homeomorfismo. Entonces $T_f(D)$ y D son subespacios densos Čech-completos de $\mathbb{R}^X$. Pero $T_f(D) \cap D = \emptyset$[3], lo que contradice el inciso (2) del lema 2.2. Por lo tanto, X es un espacio discreto.

Veamos ahora que X es numerable. Considere un elemento cualquiera $f \in D$. Por el inciso (1) del lema 2.2, existe un subespacio compacto K de D tal que $\chi(K, D) \leqslant \omega$. Como D es denso en $C_p(X)$ y K es compacto, por 2.1, $\chi(K, C_p(X)) = \chi(K, D) \leqslant \omega$. Por el inciso (3) de esta proposición, X es numerable. $\square$

Definición 5.2. *Si Y es un subespacio topológico de X, entonces se define a la función $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$ por medio de la regla: $\pi_Y(f) = f \restriction Y$. La función π_Y es llamada función restricción al subespacio Y.*

A continuación enunciamos y probamos cuatro propiedades de las funciones restricción. Recuerde que Y es *C-encajado* en X si para toda función continua $f : Y \to \mathbb{R}$ existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g \restriction Y = f$. Es fácil darse cuenta que el hecho de que Y *sea un subespacio C-encajado en X es equivalente a decir que la función restricción $\pi_Y : C(X) \to C(Y)$ es suprayectiva*, sin necesidad de considerar alguna topología en los conjuntos $C(X)$ y $C(Y)$.

Proposición 5.3. *Sean X un espacio topológico arbitrario y Y un subespacio cualquiera de X.*

(1) $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$ es una función continua y $\pi_Y(C_p(X))$ es un subespacio denso de $C_p(Y)$.
(2) $\pi_Y : C_p(X) \to \pi_Y(C_p(X))$ es una función casi-abierta.

Demostración: (1). Sea $p_Y : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^Y$ la proyección. Como $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$, el espacio $\pi_Y(C_p(X)) = p_Y(C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^Y$ y por lo tanto en $C_p(Y)$.

(2). Distinguiremos a los abiertos básicos de $C_p(Y)$ usando a Y como subíndice.

Afirmación. Si $U = [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$ es un abierto básico (no vacío) de $C_p(X)$, entonces existe un abierto V de $\pi_Y(C_p(X))$ tal que $\pi_Y(U) \subseteq V \subseteq \overline{\pi_Y(U)}$, donde la cerradura es tomada en el subespacio $\pi_Y(C_p(X))$ de $C_p(Y)$

[3]Si existiera $h \in D \cap T_f(D)$, entonces podriamos fijar una función $g \in D$ de modo que $h = T_f(g) = f + g$. Como $h, g \in D \subseteq C_p(X)$, tenemos que $f = h - g \in C_p(X)$ lo que contradice la elección de f.

Demostración de la afirmación: Tenemos los siguientes casos para el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Caso (A). *Existe $l \in \mathbb{N}$, con $1 \leqslant l < n$, tal que $\{x_1, \ldots, x_l\} \subseteq Y$ y $\{x_{l+1}, \ldots, x_n\} \subseteq X \setminus Y$.*

Definamos $V = [x_1, \ldots, x_l; U_1, \ldots, U_l]_Y \cap \pi_Y(C_p(X))$. El conjunto V es un abierto del subespacio $\pi_Y(C_p(X))$. Además, $\pi_Y(U) \subseteq V$. Veamos que $V \subseteq \overline{\pi_Y(U)}$.

Supongamos que $f \in V$ es un elemento arbitrario y supongamos que W es un abierto cualquiera de $\pi_Y(C_p(X))$ que contiene a f. Fijemos un abierto básico $[y_1, \ldots, y_m; W_1, \ldots, W_m]_Y$ de $C_p(Y)$ de modo que

$$f \in [y_1, \ldots, y_m; W_1, \ldots, W_m]_Y \cap \pi_Y(C_p(X)) \subseteq W.$$

Sabemos que $f(x_i) \in U_i$ para cada $i = 1, \ldots, l$ y que $f(y_j) \in W_j$ para toda $j = 1, \ldots, m$. Fijemos elementos $r_t \in U_t$ para cada $t = l+1, \ldots, n$. Como X es un espacio de Tychonoff, existe una función $g \in C_p(X)$ tal que:

- $g(x_i) = f(x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, l$,
- $g(y_j) = f(y_j)$ para cada $j = 1, \ldots, m$,
- $g(x_t) = r_t$ para cada $t = l+1, \ldots, n$.

Entonces $g \in U$ y $\pi_Y(g) \in \big([y_1, \ldots, y_m; W_1, \ldots, W_m]_Y \cap \pi_Y(C_p(X))\big) \cap V$. Consecuentemente, $W \cap \pi_Y(U) \neq \emptyset$. Como W es un abierto arbitrario de $\pi_Y(C_p(X))$ que contiene a f, tenemos que $f \in \overline{\pi_Y(U)}$. Lo que muestra que $V \subseteq \overline{\pi_Y(U)}$.

Caso (B). $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq Y$.

Definamos $V = [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]_Y \cap \pi_Y(C_p(X))$. El conjunto V es un abierto del subespacio $\pi_Y(C_p(X))$. Además, $\pi_Y(U) \subseteq V$. Veamos que $V \subseteq \overline{\pi_Y(U)}$.

Supongamos que $f \in V$ es un elemento arbitrario y supongamos que W es un abierto cualquiera de $\pi_Y(C_p(X))$ que contiene a f. Fijemos un abierto básico $[y_1, \ldots, y_m; W_1, \ldots, W_m]_Y$ de $C_p(Y)$ de modo que

$$f \in [y_1, \ldots, y_m; W_1, \ldots, W_m]_Y \cap \pi_Y(C_p(X)) \subseteq W.$$

Sabemos que $f(x_i) \in U_i$ para cada $i = 1, \ldots, l$ y que $f(y_j) \in W_j$ para toda $j = 1, \ldots, m$. Como X es un espacio de Tychonoff, existe una función $g \in C_p(X)$ tal que:

- $g(x_i) = f(x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, l$,
- $g(y_j) = f(y_j)$ para cada $j = 1, \ldots, m$,

Entonces $g \in U$ y $\pi_Y(g) \in \big([y_1, \ldots, y_m; W_1, \ldots, W_m]_Y \cap \pi_Y(C_p(X))\big) \cap V$. Consecuentemente, $W \cap \pi_Y(U) \neq \emptyset$. Como W es un abierto arbitrario de $\pi_Y(C_p(X))$ que contiene a f, tenemos que $f \in \overline{\pi_Y(U)}$. Lo que muestra que $V \subseteq \overline{\pi_Y(U)}$. ⊠

En resumen, por la afirmación anterior, para cualquier abierto básico no vacío U de $C_p(X)$ existe un abierto $V(U)$ de $\pi_Y(C_p(X))$ tal que

$$\pi_Y(U) \subseteq V(U) \subseteq \overline{\pi_Y(U)}.$$

Para finalizar la prueba del inciso (2) consideremos un abierto no vacío arbitrario W de $C_p(X)$. Como los abiertos de tipo (7.1) forman una base de $C_p(X)$, existe una familia $\mathcal{U}$ de abiertos de tipo (7.1) tal que $W = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Por la afirmación anterior podemos fijar para cada $U \in \mathcal{U}$ un abierto $V(U)$ de $\pi_Y(C_p(X))$ tal que $\pi_Y(U) \subseteq V(U) \subseteq \overline{\pi_Y(U)}$. Defina $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} V(U)$. Entonces $\pi_Y(W) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \pi_Y(U) \subseteq V \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{\pi_Y(U)} \subseteq \overline{\pi_Y(W)}$. Por lo tanto, π_Y es una función casi-abierta. □

El siguiente lema es fundamental para demostrar dos de los principales resultados de esta sección.

Lema 5.4. *Si todo subconjunto numerable de un espacio X es cerrado y C-encajado, entonces el espacio de funciones $C_p(X)$ es pseudocompleto.*

DEMOSTRACIÓN: Primero demostremos la siguiente afirmación.

Afirmación. Existe una sucesión $\{\mathcal{Q}_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos densos numerables ajenos dos a dos de $\mathbb{R}$.

Demostración de la afirmación: Defina $\mathcal{Q}_0 = \mathbb{Q}$. Supongamos que tenemos construidos a $\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_n$ subconjuntos densos numerables de $\mathbb{R}$ que son ajenos dos a dos. Definamos $D = \mathcal{Q}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{Q}_n$. El conjunto D es numerable. Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo, $\mathbb{R} \setminus D$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Pero siendo $\mathbb{R}$ segundo-numerable, $\mathbb{R} \setminus D$ también lo es. Por lo que $\mathbb{R} \setminus D$ es separable. Fijemos un subconjunto denso numerable $\mathcal{Q}_{n+1}$ del subespacio $\mathbb{R} \setminus D$. Como $\mathcal{Q}_{n+1}$ es denso en $\mathbb{R} \setminus D$ y $\mathbb{R} \setminus D$ es denso en $\mathbb{R}$, tenemos que $\mathcal{Q}_{n+1}$ es un subconjunto denso numerable de $\mathbb{R}$ que es ajeno de cada conjunto $\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_n$. Esto termina la construcción del conjunto $\mathcal{Q}_{n+1}$. Por el método de recursión tenemos construida a la sucesión deseada. ⊠

Defina $A_n = \{(a, b) : a, b \in \mathcal{Q}_n \wedge a < b < a + \frac{1}{n+1}\}$ para cada $n \in \omega$ ((a, b) denota al intervalo abierto de $\mathbb{R}$ de extremos a y b).

Para cada $n \in \omega$, cada subconjunto finito K de X y cada función $u : K \to A_n$, defina $[u, K] = \{f \in C_p(X) : \big(\forall\, x \in K\big)\, \big(f(x) \in u(x)\big)\}$. Resulta que cada familia

$$\mathcal{B}_n = \{[u, K] : K \subseteq X \text{ es finito no vacío} \wedge\ u : K \to A_n \text{ es una función}\}$$

es una π-base para $C_p(X)$. Efectivamente, es fácil probar que los elementos de $\mathcal{B}_n$ son abiertos no vacíos de $C_p(X)$ (de hecho son conjuntos de tipo (7.1)). Considere ahora un abierto básico no vacío $U = [x_1, \dots, x_k; U_1, \dots, U_k]$ de $C_p(X)$ y sea $f \in U$ un elemento arbitrario. Existe $\epsilon > 0$ tal que $(f(x_i) - \epsilon, f(x_i) + \epsilon) \subseteq U_i$ para cada $i = 1, \dots, k$. Fije $m \in \omega$ con $m > n$ y $\frac{1}{m} < \epsilon$. Como $\mathcal{Q}_n$ es denso, existe $a_i \in \mathcal{Q}_n \cap (f(x_i) - \frac{1}{m+1}, f(x_i))$ para cada i. Usando de nuevo la densidad de $\mathcal{Q}_n$ fije un elemento $b_i \in \mathcal{Q}_n \cap (f(x_i), a_i + \frac{1}{m+1})$ para cada i. Defina $K = \{x_1, \dots, x_k\}$ y $u : K \to A_n$ por medio de la regla: $u(x_i) = (a_i, b_i)$. Entonces $f \in [u, K] \in \mathcal{B}_n$ y $[u, K] \subseteq U$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_n$ es una π-base de $C_p(X)$ (note que de hecho se probó que $\mathcal{B}_n$ es una base).

Demostraremos ahora que la sucesión $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta de π-bases para $C_p(X)$, lo que terminará la prueba de que $C_p(X)$ es un espacio pseudocompleto. Para esto necesitamos la siguiente afirmación.

Afirmación 2. Si $n \neq m$, $[u, K] \in \mathcal{B}_n$, $[v, L] \in \mathcal{B}_m$ y $[u, K] \subseteq [v, L]$, entonces $L \subseteq K$ y $\overline{u(z)} \subseteq v(z)$ para cada $z \in L$.

Demostración de la afirmación: Supongamos por el contrario que $L \not\subseteq K$. Fijemos $z \in L \setminus K$. Fije un elemento $r_x \in u(x)$ para cada $x \in K$ y fije también un elemento $r \in \mathbb{R} \setminus v(z)$. Como X es un espacio Tychonoff, existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = r_x$ para cada $x \in K$ y $g(z) = r$. Entonces $g \in [u, K] \setminus [v, L]$, lo que contradice que $[u, K] \subseteq [v, L]$. Por lo tanto, $L \subseteq K$.

Primero veamos que $u(z) \subseteq v(z)$ para cada $z \in L$. Si ocurriera que existe $z \in L$ de modo que $u(z) \not\subseteq v(z)$, entonces existe $r \in u(z) \setminus v(z)$. Fije para cada $x \in K \setminus \{z\}$ un elemento $r_x \in u(x)$. Como X es Tychonoff, existe una función continua $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = r_x$ para cada $x \in K \setminus \{z\}$ y $h(z) = r$. Entonces $h \in [u, K] \setminus [v, L]$, lo que contradice que $[u, K] \subseteq [v, L]$. Así, $u(z) \subseteq v(z)$ para cada $z \in L$. Considere ahora un elemento cualquiera $z \in L$. Por lo antes probado, $u(z) \subseteq v(z)$. Debido a que $u(z) = (a, b)$ para algunos $a, b \in \mathcal{Q}_n$, a que $v(z) = (c, d)$ para algunos $c, d \in \mathcal{Q}_m$ y a que $\mathcal{Q}_n \cap \mathcal{Q}_m = \emptyset$, tenemos que $a, b \notin \mathcal{Q}_m$. Así, $(a, b) = u(z) \subseteq v(z) = (c, d)$ implica que $\overline{(a, b)} = [a, b] \subseteq (c, d)$, es decir, $\overline{u(z)} \subseteq v(z)$. ⊠

Probemos ahora sí que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para $C_p(X)$. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de abiertos no vacíos tales que $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$ y $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Supongamos que $U_n = [u_n, K_n]$ para cada n. Por la afirmación anterior, $K_n \subseteq K_{n+1}$.

Consideremos un elemento cualquiera $z \in \bigcup_{n\in\omega} K_n$. Sea $m = \text{mín}\{n \in \omega : z \in K_n\}$. Entonces $z \in K_n$ para toda $n \geqslant m$. Por la afirmación 2 podemos concluir que $\{u_n(z) : n \geqslant m\}$ es una familia de intervalos abiertos acotados de $\mathbb{R}$ tal que:

- $U_{n+1}(z) \subseteq \overline{u_{n+1}(z)} \subseteq U_n(z)$ para cada $n \geqslant m$,
- $\lim_{n\to\infty} \text{diám}(\overline{u_{n+1}(z)}) = 0$

Como $\mathbb{R}$ es métrico completo, tenemos que $\bigcap_{n\geqslant m} \overline{U_{n+1}(z)} \neq \emptyset$. Entonces existe $e_z \in \bigcap_{n\geqslant m} \overline{U_{n+1}(z)} \subseteq \bigcap_{n\geqslant m} U_n(z)$.

Note ahora que para cualquier subconjunto numerable A de X, cualquier subconjunto B de A es numerable y por ello es cerrado en X. Entonces todos los subconjuntos de A son subconjuntos cerrados de X y por ello son cerrados en A con la topología de subespacio respecto de X. Consecuentemente, como subespacio de X, cualquier subconjunto numerable de X es cerrado y discreto.

En particular, el conjunto $E = \bigcup_{n\in\omega} K_n$ es un subconjunto cerrado y discreto de X. Definamos $h : E \to \mathbb{R}$ por medio de $h(z) = e_z$ para todo $z \in E$. Como E es discreto, la función h es continua. Y como E es numerable, entonces E es C-encajado en X, luego existe $g : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $g \restriction E = h$. Note ahora que para cualquier $n \in \omega$ y cualquier $z \in K_n$, $g(z) = h(z) = e_z \in u_n(z)$. Entonces $g \in [u_n, K_n] = U_n$. Consecuentemente, $g \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Lo que termina la prueba de que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para $C_p(X)$. □

El siguiente resultado debido a Tkachuk es una respuesta parcial positiva al problema 4.1.

Proposición 5.5. *Si Y es un espacio pseudocompleto y $\phi : Y \to C_p(X)$ es una función continua, abierta y suprayectiva, entonces $C_p(X)$ es un espacio pseudocompleto.*

Demostración: Usaremos el lema 5.4, así que debemos probar que cualquier subconjunto numerable de X es cerrado y C-encajado en X.

Primero probaremos que los subconjuntos numerables son discretos, resultado que nos ayudará a demostrar que son cerrados.

Sea A cualquier subconjunto numerable de X. Por el inciso (2) de la proposición 5.3 la función $\pi_A : C_p(X) \to \pi_A(C_p(X))$ es una función casi-abierta. Entonces la composición $\pi_A \circ \phi : Z \to \pi_A(C_p(X))$ también es una función casi-abierta (por el lema 4.3). Como A es numerable, $\mathbb{R}^A$ es un espacio metrizable. Entonces $\pi_A(C_p(X))$ también es un espacio metrizable. Aplicando el lema 4.4 podemos concluir que $\pi_A(C_p(X))$ es un espacio metrizable pseudocompleto. Por el corolario 3.15, $\pi_A(C_p(X))$ tiene un subespacio D denso Čech completo. Debido a que

$\pi_A(C_p(X))$ es denso en $C_p(A)$, concluimos que $C_p(A)$ tiene un subespacio denso Čech-completo. Consecuentemente, por el inciso (4) de la proposición 5.1, A es discreto (y numerable).

Demostremos ahora sí que todo subconjunto numerable es cerrado.

Suponga que $A \subseteq X$ es un conjunto numerable arbitrario, si A no fuese un conjunto cerrado, entonces podemos fijar un elemento $x \in \overline{A} \setminus A$. Como $A \cup \{x\}$ es un conjunto numerable, por lo antes demostrado podemos concluir que $A \cup \{x\}$ es un subespacio discreto de X, pero esto contradice que $x \in \overline{A}$. Por lo tanto, A es cerrado en X.

Para finalizar demostraremos que cualquier subconjunto numerable de X es C-encajado en X.

Note que si A un subconjunto numerable de X, para probar que A es C-encajado en X bastará demostrar que $\pi_A(C_p(X)) = C_p(A)$. Pero ya hemos demostrado que los subconjuntos numerable de X son discretos, entonces $C_p(A) = \mathbb{R}^A$. Así que bastará probar que $\pi_A(C_p(X)) = \mathbb{R}^A$ para cualquier subconjunto numerable A.

Suponga que existe un conjunto numerable A para el cual no es cierto que $\pi_A(C_p(X)) = \mathbb{R}^A$. Fijemos $h \in \mathbb{R}^A \setminus \pi_A(C_p(X))$. Entonces la función traslación $T_h : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^A$ dada por $t_h(f) = f + h$ es un homeomorfismo. Consecuentemente $T_h(\pi_A(C_p(X)))$ es homeomorfo a $\pi_A(C_p(X))$. Además $T_h(\pi_A(C_p(X))) \cap \pi_A(C_p(X)) = \emptyset$ porque si existiera $g \in T_h(\pi_A(C_p(X))) \cap \pi_A(C_p(X))$, entonces existe $f \in \pi_A(C_p(X))$ tal que $g = t_h(f) = f + h$. Entonces $h = f - g$ y es fácil comprobar $g - f \in \pi_A(C_p(X))$. Por lo que $h = g - f \in \pi_A(C_p(X))$ lo que contradice la elección de h. Ahora bien, por lo que probamos líneas arriba, el espacio $\pi_A(C_p(X))$ tiene un subespacio denso D que es Čech-completo y además es denso en $C_p(A) = \mathbb{R}^A$. Entonces $\mathbb{R}^A$ tiene dos subespacios densos Čech-completos ajenos, a saber, D y $T_h(D)$, lo que contradice el inciso (2) del lema 2.2. Por lo tanto, $\pi_A(C_p(X)) = \mathbb{R}^A$. Es decir, A es C-encajado en X.

Como todo subconjunto numerable de X es cerrado y C-encajado, por el lema 5.4 el espacio $C_p(X)$ es pseudocompleto. □

El lema 5.4 muestra que la propiedad «todos los subconjuntos numerables de un espacio X son cerrados y C-encajados» implica la pseudocompletitud del espacio de funciones $C_p(X)$. Lo interesante es que esta propiedad de hecho la caracteriza. Efectivamente, si $C_p(X)$ es pseudocompleto y A es cualquier subconjunto numerable de X, entonces por inciso (2) de la proposición 5.3 la función $\pi_A : C_p(X) \to \pi_A(C_p(X))$ es una función casi-abierta. Con esto tenemos que $\pi_A(C_p(X))$ es un espacio metrizable pseudocompleto. Ahora usamos el mismo argumento que se usó en la demostración de la proposición 5.5 para concluir que A es cerrado y C-encajado. De esta manera, llegamos al siguiente resultado.

Proposición 5.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio Tychonoff.*

(1) $C_p(X)$ es un espacio pseudocompleto.
(2) Todo subconjunto numerable de X es cerrado y C-encajado.

Agradecimientos: Los autores deseamos agradecer al revisor del capítulo por el tiempo dedicado a la lectura del mismo. Sus valiosas correcciones y sugerencias mejoraron en gran medida este trabajo.

Bibliografía

[1] A. V. Arkhangel'skii, *Topological Spaces Functions*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
[2] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Berlin:Helderman, 1989.
[3] V. V. Tkachuk , *Methods of the theory of cardinal invariants and the theory of mappings as applied to spaces functions*, Siberian Math. Journal 32 (1) 1991, 93—107.
[4] V. V. Tkachuk , *A C_p-Theory problema Book. Topological and Function Spaces*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, ISBN 978-1-4419-7441-9. Springer, 2011.
[5] V. V. Tkachuk , *A C_p-Theory problema Book. Special Features of functions spaces*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, ISBN 978-3-319-04746-1. Springer, 2014.
[6] V. V. Tkachuk , *A C_p-Theory problema Book. Compactness in functions spaces*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, ISBN 978-3-319-16091-7. Springer, 2015.
[7] V. V. Tkachuk , *A C_p-Theory problema Book. Functional equivalencies*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, ISBN 978-3-319-24383-2. Springer, 2016.

Correos electrónicos:
`fcasarrubiass@ciencias.unam.mx` (Fidel Casarrubias Segura)
`diego.rivera@ciencias.unam.mx` (Diego David Rafael Rivera Osorio)

CAPÍTULO 8

Relaciones entre la propiedad de Kelley, la propiedad de Kelley por arcos y la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ

Mauricio E. Chacón Tirado, María de Jesús López Toriz y José Luis Suárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un hiperespacio de un continuo es una familia de subconjuntos cerrados del continuo con una propiedad en común. Dado un continuo X, existe una gama amplia de estudios sobre el hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de X y del hiperespacio de subcontinuos de X, estos hiperespacios son denotados por 2^X y $C(X)$, respectivamente. En 1942, J. L. Kelley introduce la *propiedad de Kelley* en continuos como la propiedad 3.2 en [**9**, pág. 26], usa esta propiedad para estudiar la contractibilidad de hiperespacios (véase [**16**, Capítulo XVI] y [**8**, págs. 167–172]). Esta propiedad ha resultado de gran interés, incluso posee aplicaciones fuera de la Teoría de los hiperespacios. En 1977, R. W. Wardle realiza un estudio sistemático de la propiedad de Kelley y presentó en [**24**] una serie de resultados importantes los cuales, desde entonces, han sido objeto de estudio en busca de generalizaciones de los mismos. En 1999, W. Makuchowski usa la propiedad de Kelley para mostrar que varias definiciones de conexidad local son equivalentes en el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X que tienen la propiedad de Kelley. En 2006, G. Acosta recopila algunos resultados acerca de la propiedad de Kelley y la contractibilidad de hiperespacios en [**1**].

Por otro lado, en 1978, Sam B. Nadler, Jr. [**16**, pág. 601] propone estudiar la familia de subconjuntos de un continuo X que son arcos, este hiperespacio se define y se denota por $\mathcal{A}(X) = \{A \subset X : A \text{ es un arco en } X\}$. En 1999, Adrián Soto [**20**] retoma este tema y considera el hiperespacio de arcos y singulares de un continuo X, el cual se define y se denota por $\mathcal{M}(X) = \mathcal{A}(X) \cup \{\{x\} : x \in X\}$. En ese trabajo se obtienen propiedades de $\mathcal{M}(X)$ cuando el continuo X es un dendroide. En 2002, Alejandro Illanes [**5**] da una caracterización de las dendritas en términos del hiperespacio de arcos y singulares.

En 2016, Iván Serapio, en su tesis de maestría [**19**, Definición 2.68], aporta el concepto de punto medio para cada elemento del hiperespacio $\mathcal{M}(X)$ y, con esto, se define la función *punto medio* [**19**, Definición 2.71], denotada por P_μ donde μ es una función de Whitney, que asigna a cada elemento A de $\mathcal{M}(X)$ su único punto medio $P_\mu(A) \in X$ con respecto de μ. En paralelo, también estudia la función de *puntos extremos* [**19**, Definición 2.19], la cual asigna a cada elemento A de $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de puntos extremos de A. Entre 2016 y 2019, María de Jesús López, Patricia Pellicer Covarrubias e Iván Serapio [**10, 11, 12**] obtienen numerosos resultados que se desprenden de [**19**].

En 2018, José Luis Suárez López, presenta en su tesis de maestría [**22**] un estudio sobre cuándo la función punto medio y la función de puntos extremos en continuos son funciones casi monótonas, atómicas, fuertemente monótonas, libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles. Como consecuencia, se obtienen dos caracterizaciones: una para los continuos libres de arcos y otra para las dendritas (esta parte se encuentra publicada en [**13**]). Además, Suárez López demuestra que existe una función continua, suprayectiva y fuertemente localmente inyectiva entre $[0, 1]$ y una gráfica finita X, la cual se utiliza para probar que existe una compactación métrica del intervalo $(0, 1]$, digamos Y, cuyo residuo es homeomorfo a X tal que cualquier función punto medio es continua en el hiperespacio de arcos y singulares $\mathcal{M}(Y)$.

En 2020, José Luis Suárez López, propone estudiar las familias siguientes: Dados un continuo X y un punto $p \in X$, consideramos los elementos $A \in \mathcal{M}(X)$ que tienen al punto p, esta colección es denotada por $Arcos(p, X)$, y es llamado *hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p*. Por otro lado, dada una función de Whitney μ, para cada punto $p \in X$, consideramos los elementos $A \in \mathcal{M}(X)$ para los cuales $P_\mu(A) = p$, denotamos este conjunto por $Medio_\mu(p, X)$, llamado el *hiperespacio de arcos en X con punto medio p*. En 2023, Mauricio Chacón Tirado, María de Jesús López y José Luis Suárez López, muestran en [**2**], los modelos geométricos de $Arcos(p, X)$ y los modelos geométricos de $Medio_\mu(p, X)$, para X arco, X curva cerrada simple, y X triodo simple.

Inspirado naturalmente en la propiedad de Kelley y las familias $Arcos(p, X)$ y $Medio_\mu(p, X)$, José Luis Suárez López, propone en su proyecto de tesis doctoral [**23**], estudiar las siguientes propiedades: Dados un continuo X y $p \in X$, diremos que X tiene la *propiedad de Kelley por arcos*, si para cada punto $p \in X$, para cada sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p y para cada $A \in Arcos(p, X)$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, dada una función de Whitney μ para $C(X)$, diremos que X tiene la *propiedad de Kelley por medios respecto de μ*, si para cada punto $p \in X$, para cada $A \in Medio_\mu(p, X)$ y para cada sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Además de esta introducción, este capítulo consta de 4 secciones. En la sección 2 recopilamos los conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo. En la sección 3, mostramos resultados acerca de la propiedad de Kelley por arcos, mostramos que los arcos y las curvas cerradas simples tienen la propiedad de Kelley por arcos

(Teoremas 3.7 y 3.8, respectivamente), mientras que los continuos que contienen un n-odo simple libre no la tienen (Teorema 3.12), con estos resultados caracterizamos al arco y a la curva cerrada simple dentro de la clase de las gráficas finitas (Teorema 3.14). Por último, caracterizamos al arco dentro de la clase de las dendritas (Teorema 3.15). En la sección 4, mostramos resultados acerca de la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, mostramos que los arcos y las curvas cerradas simples tienen la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ (Teoremas 4.8 y 4.10, respectivamente), mientras que los continuos que contienen un n-odo simple libre no tiene dicha propiedad (Proposición 4.11); usamos estos resultados para caracterizar al arco y la curva cerrada simple dentro de la clase de las gráficas finitas (Teorema 4.13). Finalizamos la sección mostrando que el arco es la única dendrita que tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ (Teorema 4.14). En la sección 5, mostramos las relaciones que existen entre los conceptos de: propiedad de Kelley, propiedad de Kelley por arcos y propiedad de Kelley por medios con respecto de μ. Más precisamente, mostramos que la propiedad de Kelley no implica la propiedad de Kelley por arcos (Ejemplo 5.1); la propiedad de Kelley por arcos no implica la propiedad de Kelley (Ejemplo 5.2); la propiedad de Kelley no implica la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ; la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ no implica la propiedad de Kelley por arcos y tampoco implica la propiedad de Kelley (Ejemplo 5.5). Por último, concluimos este trabajo citando de manera natural la siguiente pregunta.

Dado un continuo X ¿Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios?

2. Preliminares

Nuestro trabajo se desarrolla en la teoría de continuos y sus hiperespacios. Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Como primeros ejemplos de continuos tenemos:

(1) un **arco** el cual es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$;

(2) una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1 en el plano Euclidiano;

(3) un **triodo simple** es un espacio homeomorfo a $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,1]\}\cup\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,1]\}$, al punto $(0,0)$ lo llamaremos **vértice** del triodo simple.

Sean X un espacio topológico, $A\subseteq X$ y β un número cardinal. Diremos que el punto p tiene **orden menor o igual** que β en X, lo cual se denotará por $ord(p,X)\leqslant\beta$, si para cada subconjunto abierto U de X con $p\in U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p\in V\subseteq U$ y $|fr_X(V)|\leqslant\beta$, donde $fr_X(V)$ es la frontera de V en X. El punto p es de **orden** β en X, lo cual denotaremos por $ord(p,X)=\beta$, si $ord(p,X)\leqslant\beta$ y $ord(p,X)\nleqslant\alpha$ para cualquier $\alpha<\beta$. Ahora, diremos que:

(i) El punto p es un **punto extremo** de X, si $ord(p,X)=1$. El conjunto de puntos extremos de X lo denotamos por $E(X)$.

(ii) El punto p es un **punto ordinario** de X, si $ord(p,X)=2$. El conjunto de puntos ordinarios de X lo denotamos por $O(X)$.

(iii) El punto p es un **punto de ramificación** de X, si $ord(p,X)\geqslant 3$. El conjunto de puntos de ramificación lo denotamos por $R(X)$.

Un espacio topológico X es **localmente conexo en un punto** $p \in X$, si para cada abierto U de X que contiene a p, existe un abierto y conexo de X, V, tal que $p \in V \subset U$. Diremos que X es **localmente conexo** si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

Una **gráfica finita** es un continuo que se puede representar como la unión de un número finito de arcos tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan en alguno de sus puntos extremos.

Los hiperespacios de un continuo X son colecciones de subconjuntos de X que satisfacen una propiedad dada. Los más conocidos son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}$$

y

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

estos son conocidos como el hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de X y el hiperespacio de subcontinuos de X, respectivamente. A la colección 2^X se le dota de la **métrica de Hausdorff**, que a continuación definimos: sean d la métrica del continuo X, $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, se define la **nube** de radio ε alrededor de A, la cual denotamos por $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x,a) < \varepsilon\}$. Ahora, se define la función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como

$$H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\},$$

para cada $A, B \in 2^X$. En [**8**, Teorema 2.2] se prueba que H es una métrica para 2^X. Luego, $C(X)$ es considerado como subespacio de 2^X. También se ha considerado el hiperespacio

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, conocido como el n-ésimo producto simétrico del continuo X, así $F_n(X)$ también es considerado como subespacio de 2^X.

En [**8**] y [**16**] se cuenta con un amplio estudio de las propiedades básicas de los hiperespacios 2^X, $C(X)$ y $F_n(X)$, de un continuo X. Por ejemplo, en [**16**, Teorema (1.13)] se demuestra que si X es un continuo, entonces 2^X también es un continuo.

Una de las herramientas más usadas en la teoría de los hiperespacios de continuos son las funciones de Whitney. Estas funciones son parte esencial para definir uno de nuestros hiperespacios, ente importante de nuestro trabajo: el hiperespacio de arcos contenidos en el continuo X que tienen como punto medio a p.

Dado un continuo X, una **función de Whitney** para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ que satisface dos condiciones:

(1) para cada $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$,

(2) si $A, B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

En [**8**, Teorema 13.4] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Si X es un continuo, entonces existe una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$.*

Para X y Y continuos y una función continua $h : X \to Y$, se define la función inducida $C(h) : C(X) \to C(Y)$ como sigue: $C(h)(A) = h(A)$, para cada $A \in C(X)$. Si h es un homeomorfismo, entonces la función inducida $C(h)$ es un homeomorfismo, [**21**, Lema 2.3].

Lema 2.2. *Sean X y Y continuos. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo y $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney, entonces $\mu \circ C(h)^{-1} : C(Y) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney.*

Demostración: Como h es un homeomorfismo, sabemos que $C(h)^{-1} : C(Y) \to C(X)$ es un homeomorfismo, así $\mu \circ C(h)^{-1} : C(Y) \to [0, \infty)$ es una función continua. Basta probar que se cumplen las condiciones (1) y (2) de la definición de función de Whitney.

(1) Probaremos que $\mu \circ C(h)^{-1}(\{y\}) = 0$, para cada $y \in Y$. Sea $y \in Y$, note que $C(h)^{-1}(\{y\}) = \{h^{-1}(y)\}$, luego $\mu(\{h^{-1}(y)\}) = 0$, ya que μ es una función de Whitney. Se sigue que $\mu \circ C(h)^{-1}(\{y\}) = 0$.

(2) Sean $A, B \in C(Y)$ tales que $A \subsetneq B$. Como $C(h)^{-1}$ es un homeomorfismo tenemos que $C(h)^{-1}(A) \subsetneq C(h)^{-1}(B)$ y como μ es una función de Whitney para $C(X)$, tenemos que $\mu \circ C(h)^{-1}(A) = \mu(C(h)^{-1}(A)) < \mu(C(h)^{-1}(B)) = \mu \circ C(h)^{-1}(B)$.

Por lo tanto, $\mu \circ C(h)^{-1}$ es una función de Whitney para $C(Y)$. □

En 2003, P. Pellicer Covarrubias introdujo en [**18**] los hiperespacios anclados en un conjunto. Dados un continuo X y un subcontinuo A de X, se define y se denota el hiperespacio de los subcontinuos de X anclados en un continuo A como el subespacio $C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. En particular, cuando $A = \{p\}$, para un punto dado $p \in X$, lo denotamos por $C(p, X) = \{B \in C(X) : p \in B\}$.

En 1999, Adrián Ulises Soto, estudia en [**20**] acerca del hiperespacio de arcos y singulares, el cual definimos a continuación:

Definición 2.3. *Para todo continuo X se definen los siguientes subespacios de $C(X)$:*

$$\mathcal{A}(X) = \{A \in C(X) : A \text{ es un arco}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{A}(X) \cup F_1(X).$$

Estos espacios son el **hiperespacio de arcos** *de X y el* **hiperespacio de arcos y singulares** *de X, respectivamente.*

En 2016, Iván Serapio define la función de puntos extremos usando la siguiente definición de puntos extremos para cada elemento de $\mathcal{M}(X)$.

Definición 2.4. [**10**, Definición 3.7] *Dados un continuo X y $L \in \mathcal{M}(X)$ se define el* **conjunto de puntos extremos** *de L como:*

$$E(L) = \begin{cases} \{p \in L : p \text{ es un punto extremo de } L\}, & \text{si } L \in \mathcal{A}(X), \\ L, & \text{si } L \in F_1(X). \end{cases}$$

Observemos que $E(L)$ es un conjunto de uno o dos puntos, es decir, $E(L) \in F_2(X)$. Consideremos la función $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ que a cada elemento del hiperespacio de arcos y singulares le asigna el conjunto de sus puntos extremos. A esta función se le nombrará **función de puntos extremos** *de X.*

Para una prueba del Teorema 2.5 puede ver [**11**, Teorema 5.3] o bien [**19**, Teorema 3.41].

Teorema 2.5. *Un continuo es una dendrita si y sólo si su función de puntos extremos es un homeomorfismo.*

También, en 2016 Iván Serapio introduce la función punto medio usando el concepto de punto medio que citamos a continuación.

Definición 2.6. [**10**, Definición 4.1] *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y A un arco en X. Diremos que $p \in X$ es un* **punto medio** *de A respecto de μ, si existen K y L subcontinuos de A tales que $A = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. En el caso en que $A = \{p\}$, diremos que p es el punto medio de A.*

Teorema 2.7. [**10**, Teorema 4.6] *Si A es un arco y μ es una función de Whitney definida en $C(A)$, entonces A admite un único punto medio respecto de μ.*

Más aún, el punto medio de A respecto de μ no es punto extremo de A.

Definición 2.8. [**10**, Definición 4.8] *Dados un continuo X y una función de Whitney μ para $C(X)$ consideramos la función $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ que asigna a cada elemento de $\mathcal{M}(X)$ su único punto medio respecto de μ tal y como lo asegura el Teorema 2.7. A esta función la llamaremos* **función punto medio** *de X respecto de μ.*

Siguiendo con esta temática y el estudio del hiperespacio de arcos y singulares, recientemente en 2024, José Luis Suárez López en su tesis de doctorado [**23**] introduce los siguientes hiperespacios.

Definición 2.9. [**23**, Definición 2.1] *Sean X un continuo y un punto $p \in X$, definimos y denotamos el* **hiperespacio de arcos en X anclados en el punto** *p como el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{M}(X)$ que tienen al punto p, es decir,*

$$Arcos(p, X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : p \in A\}.$$

Definición 2.10. [**23**, Definición 3.1] *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$. Para cada punto $p \in X$, definimos y denotamos el* **hiperespacio de arcos en X con punto medio p respecto de** *μ, esto es,*

$$Medio_\mu(p, X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : P_\mu(A) = p\},$$

donde $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ es la función punto medio de X con respecto de μ.

Estos hiperespacios son considerados como subespacios de $C(X)$. En [**2**] se dan modelos geométricos de estos hiperespacios para el arco, la curva cerrada simple y el triodo simple. En [**23**] se muestran algunas propiedades generales de ambos hiperespacios.

3. La propiedad de Kelley por arcos

Existen propiedades interesantes que satisfacen los continuos y así, conocer sus propiedades topológicas. Una de estas propiedades interesantes es la Propiedad de Kelley introducida por J. L. Kelley como la *Propiedad 3.2* en [**9**, pág. 9]. En esta sección, se introduce la definición de Kelley por arcos y mostramos que los continuos arco y curva cerrada simple satisfacen dicha propiedad, por otro lado el triodo simple no tiene la propiedad de Kelley por arcos. También vamos a probar algunos aspectos generales de la propiedad de Kelley por arcos.

Definición 3.1. *Sea X un continuo con métrica d. Diremos que X tiene la* **propiedad de Kelley**, *si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que depende de ε, tal que para cualesquiera dos puntos p y q de X con $d(p,q) < \delta$ y, para cada subcontinuo A de X que contiene al punto p, existe un subcontinuo B de X que contiene a q y $H(A,B) < \varepsilon$.*

Las pruebas del Teorema 3.2 y el Teorema 3.3 pueden ser consultadas en [**1**, Teorema 2.7] y [**1**, Teorema 4.1], respectivamente.

Teorema 3.2. *Sea X un continuo. Si $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X tiene la propiedad de Kelley en p.

(2) Para todo $A \in C(p,X)$ y para toda sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in C(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.3. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Inspirados en la propiedad de Kelley y el estudio del hiperespacio de arcos en X que contienen a un punto dado, José Luis Suárez López en su tesis de doctorado introduce la siguiente definición [**23**, Definición 4.4]:

Definición 3.4. [**23**, Definición 4.4] *Sean X un continuo y $p \in X$. Diremos que X tiene la* **propiedad de Kelley por arcos**, *si para cada punto $p \in X$, para cada sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p y para cada $A \in Arcos(p,X)$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 3.5. *Si X es un continuo que no contiene arcos, entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración: Sea X un continuo que no contiene arcos. Note que el hiperespacio $Arcos(p,X) = \{\{p\}\}$, para cada $p \in X$. Sean $p \in X$, $A \in Arcos(p,X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Observemos que $A = \{p\}$, basta considerar la sucesión $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Un continuo es **descomponible** si puede ser escrito como unión de dos de sus subcontinuos propios, en otro caso diremos que el continuo es **indescomponible**; además, diremos que un continuo es **hereditariamente indescomponible** si todo sus subcontinuos no degenerados son indescomponibles.

El pseudoarco está definido en [**15**, Ejercicio 1.23]. El pseudoarco es un continuo hereditariamente indescomponible y sus subcontinuos propios y no degenerados son homeomorfos a él.

Corolario 3.6. *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Se sigue del Corolario 3.6 que el pseudoarco tiene la propiedad de Kelley por arcos.

Teorema 3.7. *Si X es un arco, entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración: Sean X un arco y $p \in X$. Sean $A \in Arcos(p,X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p. Como X es un arco, en particular es un espacio localmente conexo, por el Teorema 3.3, X tiene la propiedad de Kelley. Por el

Teorema 3.2, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in C(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como los subcontinuos de X son arcos o singulares, $C(p_n, X) = Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego, $A_n \in Arcos(p_n, X)$. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Teorema 3.8. *Si X es una curva cerrada simple, entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X una curva cerrada simple, $p \in X$, $A \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p en X. Como X es localmente conexo, por el Teorema 3.3, X tiene la propiedad de Kelley. Por el Teorema 3.2, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in C(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que, A_n es un arco de X, para toda $n \in \mathbb{N}$ salvo una cantidad finita de índices. Para los índices donde $A_n = X$, basta considerar un $B_n \in Arcos(p_n, X)$, así, existe una sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $C_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Proposición 3.9. *La propiedad de Kelley por arcos es una propiedad topológica.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X y Y continuos tales que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Probaremos que Y tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sean $y \in Y$, $B \in Arcos(y, Y)$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y convergente a y. Notemos que $h^{-1}(B) \in Arcos(h^{-1}(y), X)$. Por otro lado, como h^{-1} es una función continua y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y, $\{h^{-1}(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h^{-1}(y)$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $h^{-1}(B)$ tal que $A_n \in Arcos(h^{-1}(y_n), X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\{h(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h(h^{-1}(B)) = B$, note que $h(A_n) \in Arcos(y_n, Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que Y tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Recordemos las siguientes definiciones.

Definición 3.10. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 3$. Un n-**odo simple** es un continuo X que es la unión de n arcos que se intersectan dos a dos solo en un punto $p \in X$, donde p es un punto extremo de cada uno de esos n arcos.*

Definición 3.11. *Sean X un continuo y Y un subcontinuo de X. Diremos que Y es un n-**odo simple libre** si Y es n-odo simple y $Y \setminus E(Y)$ es un conjunto abierto en X.*

Teorema 3.12. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 3$. Si X contiene un n-odo simple libre, entonces X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sean Y el n-odo simple libre contenido en X y p el vértice de Y. Sean $A_1, \ldots, A_n$ los arcos en X tales que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_n \text{ y } A_i \cap A_j = \{p\}, \text{ para cualesquiera } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea y_i el punto extremo de A_i, distinto de p. Sea $\mathcal{U} = Y \setminus E(Y)$. Sean $x_1 \in A_1 \setminus \{p, y_1\}$ y $x_2 \in A_2 \setminus \{p, y_2\}$, consideramos los arcos $B_1 = px_1$ y $B_2 = px_2$ contenidos propiamente en A_1 y A_2, respectivamente. Sea $M = B_1 \cup B_2$. Note que M es un arco que contiene a p contenido en $\mathcal{U}$. Sea

$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p tal que $p_n \in A_3 \setminus \{p, y_3\}$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a M tal que $M_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\mathcal{U}$, $A_1 \setminus \{p, y_1\}$, $A_2 \setminus \{p, y_2\}$ y $A_3 \setminus \{p, y_3\}$ son abiertos en X, como consecuencia existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_N \subset \mathcal{U}$, $M_N \cap (A_1 \setminus \{p, y_1\}) \neq \emptyset$, $M_N \cap (A_2 \setminus \{p, y_2\}) \neq \emptyset$ y $M_N \cap (A_3 \setminus \{p, y_3\}) \neq \emptyset$. Más aún, $A_1 \setminus \{p, y_1\}$, $A_2 \setminus \{p, y_2\}$ y $A_3 \setminus \{p, y_3\}$ son arco componentes de $\mathcal{U} \setminus \{p\}$, así $p \in M_N$. Se sigue que p es un punto de ramificación de M_N, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X no tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Proposición 3.13. *Si X es una gráfica finita con al menos un punto de ramificación, entonces X contiene un n-odo simple libre, para algún $n \in \mathbb{N}$, con $n \geqslant 3$.*

Demostración: Sea $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, donde A_i es un arco, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, y cualquiera par de ellos se intersecta en uno o ambos puntos extremos. Sea p un punto de ramificación de X y $n = ord(p, X) \geqslant 3$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in A_j$ si y sólo si $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $x_j \in A_j$ tal que x_j no es un punto extremo de A_j, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $Y = \bigcup_{j=1}^{n} px_j$, donde px_j es el arco en A_j con puntos finales p y x_j, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Notemos que Y es un n-odo simple libre. □

Teorema 3.14. *Sea X una gráfica finita. Entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración: Para la necesidad, supongamos que X no es un arco ni una curva cerrada simple, por la [**15**, Proposición 9.5], existe $p \in X$ tal que $ord(p, X) \geqslant 3$, luego por la Proposición 3.13, X contiene un n-odo simple libre. Así, por el Teorema 3.12, X no tiene la propiedad de Kelley por arcos, lo cual es una contradicción. Concluimos que X es un arco o una curva cerrada simple.

La suficiencia se sigue del Teorema 3.7 y el Teorema 3.8. □

Teorema 3.15. *Sea X una dendrita. Entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos si y sólo si X es un arco.*

Demostración: Para probar la necesidad. Por [**15**, Teorema 4], sea d una métrica convexa para X. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos y que X no es un arco. Existe un punto p en X tal que $ord(p, X) \geqslant 3$, luego existen arcos en X, A_1, A_2 y A_3, tales que p es punto extremo de cada A_i y $A_i \cap A_j = \{p\}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distintos. Sean $a_i \in A_i$ el punto extremo de A_i distinto de p, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Sea $M = A_1 \cup A_2$, note que a_1 y a_2 son los puntos extremos de M. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A_3 \setminus \{p, a_3\}$ convergente a p. Por otro lado, como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a M tal que $M_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sean x_n y y_n los puntos extremos de M_n. Sea $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ la función de puntos extremos para X. Como X es dendrita por el Teorema 2.5, la función E es continua. Como $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, se sigue que $\{E(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $E(M)$, es decir, la sucesión $\{\{x_n, y_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{a_1, a_2\}$, sin perder generalidad, supongamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a_1 y la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a_2. Sea $\varepsilon = \min\{d(a_1, A_3), d(a_2, A_3), d(a_1, a_2)\}$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant N$, $x_n \in B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$ y $y_n \in B(a_2, \frac{\varepsilon}{2})$. Como d es una métrica convexa, se tiene que $B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B(a_2, \frac{\varepsilon}{2})$ son conexos, así para cada $n \geqslant N$, existen $A_n = x_n a_1$ y $B_n = y_n a_2$ arcos en X tales que $A_n \subseteq B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B_n \subseteq B(a_2, \frac{\varepsilon}{2})$. Probemos la siguiente afirmación:

Afirmación 3.16. *Para cada $n \geqslant N$, $p \in M_n$.*

Prueba de la Afirmación. Supongamos lo contrario, es decir, existe $k \geqslant N$ tal que $p \notin M_k$, se tiene que $A_k \cup B_k \cup M_k$ es un conjunto conexo en $X \setminus \{p\}$ que contiene tanto a a_1 como a a_2, lo cual es una contradicción, ya que p separa a a_1 de a_2, es decir $X \setminus \{p\}$ es disconexo. Se sigue que $p \in M_n$, para cada $n \geqslant N$, así queda demostrada la Afirmación 3.16.

Sean U_{a_1}, U_{a_2} y U_{a_3} las componentes de los puntos a_1, a_2 y a_3, respectivamente. Observemos que, como $x_n \in B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$, para cada $n \geqslant N$ y $B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$ es un conjunto conexo, se sigue que $x_n \in U_{a_1}$, para cada $n \geqslant N$. De forma similiar se prueba que $y_n \in U_{a_2}$, para cada $n \geqslant N$. Por otro lado, notemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in A_3 \setminus \{p\}$, de tal forma que para toda $n \geqslant N$, existe un arco $C_n = p_n a_3 \subseteq A_3 \setminus \{p\}$, de modo que $p_n \in U_{a_3}$, para cada $n \geqslant N$. Se sigue que M_n es un arco contiene a p tal que $M_n \cap U_{a_1} \neq \emptyset$, $M_n \cap U_{a_2} \neq \emptyset$ y $M_n \cap U_{a_3} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es un arco.

La suficiencia se sigue del Teorema 3.7. □

4. La propiedad de Kelley por medios con respecto de μ

De manera natural, inspirados en el concepto de propiedad de Kelley por arcos y el hiperespacio de arcos en un continuo con punto medio dado, José Luis Suárez López en su tesis de doctorado [**23**] introduce la propiedad de Kelley por medios:

Definición 4.1. [**23**, Definición 7.1] *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Diremos que X tiene la* **propiedad de Kelley por medios respecto de** μ*, si para cada punto $p \in X$, para cada $A \in Medio_\mu(p, X)$ y para cada sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 4.2. *Si X es un continuo que no contiene arcos y μ una función de Whitney para $C(X)$, entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.*

Demostración: Sea X un continuo que no contiene arcos y μ una función de Whitney para $C(X)$. Notemos que el hiperespacio $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$, para cada $p \in X$. Sean $p \in X$, $A \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Notemos que $A = \{p\}$, así basta considerar la sucesión $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a $\{p\}$. De donde X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ. □

Como una consecuencia de la Proposición 4.2, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.3. *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible y μ una función de Whitney para $C(X)$, entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.*

Se obtiene del Corolario 4.3 que el pseudoarco tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.

Teorema 4.4. *Sean X y Y continuos homeomorfos, $h : X \to Y$ un homeomorfismo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, entonces Y tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de $\mu \circ C(h)^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ. Sea $\gamma = \mu \circ C(h)^{-1}$. Por el Lema 2.2, γ es una función de Whitney para $C(Y)$. Probaremos que Y tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de γ. Consideremos $y \in Y$, $B \in Medio_\gamma(p, Y)$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y convergente a y. Como h es un homeomorfismo, tenemos que $h^{-1}(y) \in X$ y $h^{-1}(B) \in Arcos(h^{-1}(y), X)$.

Afirmación 4.5. *$h^{-1}(y)$ es punto medio de $h^{-1}(B)$ con respecto de μ.*

Prueba de la Afirmación. Como $B \in Medio_\gamma(p, Y)$, sean K y L arcos en B tales que $B = K \cup L$, $K \cap L = \{y\}$ y $\gamma(K) = \gamma(L)$. Observemos que $h^{-1}(B) = h^{-1}(K \cup L) = h^{-1}(K) \cup h^{-1}(L)$, además $h^{-1}(K) \cap h^{-1}(L) = h^{-1}(K \cap L) = h^{-1}(\{y\}) = \{h^{-1}(y)\}$. Como h es un homeomorfismo, $h^{-1}(K)$ y $h^{-1}(L)$ son arcos. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{gathered}\mu(h^{-1}(K)) = \gamma(C(h)(h^{-1}(K))) = \gamma(h(h^{-1}(K))) = \gamma(K) = \gamma(L) = \\ \gamma(h(h^{-1}(L))) = \gamma(C(h)(h^{-1}(L))) = \mu(h^{-1}(L)).\end{gathered}$$

Por lo tanto, $h^{-1}(y)$ es punto medio de $h^{-1}(B)$ respecto de μ. Así queda demostrada la Afirmación 4.5.

Se sigue de la Afirmación 4.5 que $h^{-1}(B) \in Medio_\mu(h^{-1}(y), X)$, como X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $h^{-1}(B)$ tal que $A_n \in Medio_\mu(h^{-1}(y_n), X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 4.6. *$h(A_n) \in Medio_\gamma(y_n, Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba de la Afirmación. Como $A_n \in Medio_\mu(h^{-1}(y_n), X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen K_n y L_n subcontinuos de A_n tales que $A_n = K_n \cup L_n$, $K_n \cap L_n = \{h^{-1}(y_n)\}$ y $\mu(K_n) = \mu(L_n)$. Notemos que $h(A_n) = h(K_n) \cup h(L_n)$, $h(K_n)$ y $h(L_n)$ son subcontinuos de $h(A_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\mu(K_n) = \mu(L_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\gamma(C(h)(K_n)) = \gamma(C(h)(L_n))$ y así, $\gamma(h(K_n)) = \gamma(h(L_n))$. Falta probar que $h(K_n) \cap h(L_n) = \{y_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $h(h^{-1}(y_n)) \in h(K_n) \cap h(L_n)$, así $y_n \in h(K_n) \cap h(L_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $q \in h(K_n) \cap h(L_n)$, se sigue que $h^{-1}(q) \in h^{-1}(h(K_n)) \cap h^{-1}(h(L_n))$, luego $h^{-1}(q) \in K_n \cap L_n$, luego $h^{-1}(q) = h^{-1}(y_n)$, finalmente como h^{-1} es inyectiva, se tiene que $q = y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $h(K_n) \cap h(L_n) = \{y_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, así $h(A_n) \in Medio_\gamma(y_n, Y)$. Esto prueba la Afirmación 4.6.

Por otro lado, como h es una función continua y la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $h^{-1}(B)$, se sigue que $\{h(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a B, por lo tanto, Y tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de γ. $\square$

Lema 4.7. *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $p \in X$. Si $Y \in Medio_\mu(p, X)$ es tal que para cada $A \in Medio_\mu(p, X)$ se tiene que $A \subseteq Y$, entonces $Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, Y)$.*

Demostración: Como $Y \subseteq X$ tenemos que $Medio_\mu(p, Y) \subseteq Medio_\mu(p, X)$. Para probar la otra contención, sea $A \in Medio_\mu(p, X)$, como $A \subseteq Y$, tenemos que $A \in Medio_\mu(p, Y)$. Concluimos que $Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, Y)$. □

Teorema 4.8. *Si X es un arco y μ es una función de Whitney para $C(X)$, entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.*

Demostración: Por el Teorema 4.4, basta considerar a $X = [0, 1]$. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Sean $p \in X$, $A \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. p es punto extremo de X.

En este caso, por el Teorema 2.7, $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$, luego $A = \{p\}$, entonces basta considerar $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A.

Caso 2. p no es punto extremo de X.

Notemos que $p \in X \setminus \{0, 1\}$. Sea $r = \min\{\mu([0, p]), \mu([p, 1])\}$, sin perder generalidad, supongamos que $r = \mu([0, p])$, existe $t \in (p, 1)$ tal que $r = \mu([p, t])$. Sea $R = [0, t]$, claramente $R \in Medio_\mu(p, X)$, más aún, por el Lema 4.7, $Medio_\mu(p, R) = Medio_\mu(p, X)$. Sea $A \in Medio_\mu(p, R)$ tal que $A = [a, b]$, observemos que $a \in [0, p]$ y $b \in [p, t]$. Sea $\varepsilon = \mu([a, p])$, como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in [a, b]$, para cada $n \geqslant N$. Para cada $n \geqslant N$, sea $r_n = \min\{\mu([a, p_n]), \mu([p_n, b])\}$.

Afirmación 4.9. *Si $p_{n_m} \in \{p_n\}_{n\geqslant N}$ tal que $r_{n_m} = \mu([a, p_{n_m}])$, entonces existe una sucesión $\{B_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $B_{n_m} \in Medio_\mu(p_{n_m}, X)$, para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Prueba de la Afirmación. Se tiene que existe $q_{n_m} \in [p_{n_m}, b]$ tal que $r_{n_m} = \mu([p_{n_m}, q_{n_m}])$. Sea $B_{n_m} = [a, q_{n_m}]$, claramente $B_{n_m} \in Medio_\mu(p_{n_m}, X)$. Probaremos que la sucesión $\{B_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a A. Como A es un arco, por el [**4**, Corolario 4], A es suave en cada uno de sus puntos, en particular en a, luego como la sucesión $\{p_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a p, la sucesión $\{[a, p_{n_m}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $[a, p]$. Por otro lado, existe $q \in [a, b]$ tal que la sucesión $\{q_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a q, luego, como A es suave en q, se tiene que la sucesión $\{[p_{n_m}, q_{n_m}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge al arco $[p, q]$. Además como μ es una función continua tenemos que $\{\mu([p_{n_m}, q_{n_m}])\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu([p, q])$, así, dado que $\mu([a, p_{n_m}]) = \mu([p_{n_m}, q_{n_m}])$, se sigue que $\mu([p, q]) = \mu([a, p]) = \mu([p, b])$ y $[p, q] \subseteq [p, b]$, se sigue que $[p, q] = [p, b]$. Luego la sucesión $\{B_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $[a, b] = A$. Así, queda demostrada la Afirmación 4.9.

Ahora, definimos la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue: para cada $n \in \{1, \ldots, N-1\}$, sea $A_n = B_{n_m}$ si $r_{n_m} = \mu([a, p_{n_m}])$ o $A_n = B_{n_k}$, si $r_{n_k} = \mu([p_{n_k}, b])$, para cada $n \geqslant N$. Luego, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A y $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 4.10. *Si X es una curva cerrada simple y μ es una función para $C(X)$, entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.*

Demostración: Por el Teorema 4.4, basta considerar $X = S^1$. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Sean $p \in X$, $A \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Observemos que si $A = \{p\}$, entonces basta considerar $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A. Supongamos que A es un arco con puntos extremos

a y b. Sean K y L arcos en A tales que $A = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. Sea $\varepsilon = \mu(K)$, sin perder generalidad, supongamos que $K = ap$ y $L = pb$ en A. Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in A$, para cada $n \geqslant N$. Sean $\{p_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $p_{n_k} \in K$. Para cada $n_k \in \mathbb{N}$, consideremos $q_{n_k} \in R_{n_k} = p_{n_k}b$ arco en A tal que la sucesión $\{q_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a b y $\mu(ap_{n_k}) = \mu(p_{n_k}q_{n_k})$. Por otro lado, por el Teorema 3.3, A tiene la propiedad de Kelley en a, así la sucesión de arcos en A, $\{aq_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, converge al arco A.

De forma similar, para la subsucesión $\{p_{n_l}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $p_{n_l} \in L$, existe una sucesión de arcos

$$\{t_{n_l}b\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente a } A \text{ tal que } t_{n_l}b \in Medio_\mu(p, X).$$

Así, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Proposición 4.11. *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 3$. Si X contiene un n-odo simple libre, entonces X no tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.*

Demostración: Supongamos lo contrario, es decir que X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ. Sean Y el n-odo simple libre contenido en X y p el vértice de Y. Sean $A_1, \ldots, A_n$ los arcos en X tales que $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$ y $A_i \cap A_j = \{p\}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $y_i \in A_i$ el punto extremo de A_i, distinto de p. Sean $x_1 \in A_1 \setminus \{p, y_1\}$ y $x_2 \in A_2 \setminus \{p, y_2\}$, consideramos los arcos px_1 y px_2 contenidos propiamente en A_1 y A_2, respectivamente, tales que $\mu(px_1) = \mu(px_2)$. Sea $M = px_1 \cup px_2$ se sigue que $M \in Medio_\mu(p, X)$, sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p tal que $p_n \in A_3 \setminus \{p, y_3\}$. Como X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, existe $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a M tal que $M_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como Y es un n-odo simple libre, tenemos que $Y \setminus E(Y)$ es un conjunto abierto en X. Sea $\mathcal{U} = \langle Y \setminus E(Y)\rangle$, observemos que $M \in \mathcal{U}$. Así, como $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_n \in \mathcal{U}$, para cada $n \geqslant N$. Se sigue que $M_n \subseteq Y \setminus E(Y)$, para cada $n \geqslant N$.

Afirmación 4.12. *Existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $p \in M_n$, para cada $n \geqslant l$.*

Prueba de la Afirmación. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_1, \varepsilon) \subseteq A_1 \setminus \{p, y_1\}$ y $B(x_2, \varepsilon) \subseteq A_2 \setminus \{p, y_2\}$, como $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$M_n \cap B(x_1, \varepsilon) \neq \emptyset \text{ y } M_n \cap B(x_2, \varepsilon) \neq \emptyset, \text{ para cada } n \geqslant N_1.$$

Luego

$$M_n \cap A_1 \neq \emptyset \text{ y } M_n \cap A_2 \neq \emptyset, \text{ para cada } n \geqslant N_1.$$

Observemos que $A_i \setminus \{p\}$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$, son las arcos componentes de $Y \setminus \{p\}$, como $B(x_1, \varepsilon) \subseteq A_1 \setminus \{p, y_1\}$ y $B(x_2, \varepsilon) \subseteq A_2 \setminus \{p, y_2\}$, se tiene que

$$M_n \cap (A_1 \setminus \{p\}) \neq \emptyset \text{ y } M_n \cap (A_2 \setminus \{p\}) \neq \emptyset, \text{ para cada } n \geqslant N_1.$$

Como $A_1 \setminus \{p\} \neq A_2 \setminus \{p\}$, se sigue que $p \in M_n$, para cada $n \geqslant N_1$. Sea $l = \max\{N, N_1\}$, de esta forma $p \in M_n$, para cada $n \geqslant l$. Con lo cual queda demostrada la Afirmación 4.12.

Finalmente, como $M_n \cap (A_1 \setminus \{p\}) \neq \emptyset$, $M_n \cap (A_2 \setminus \{p\}) \neq \emptyset$ y $p \in M_n$, para cada $n \geqslant l$, se sigue que $M_n \subseteq A_1 \cup A_2 \setminus \{y_1, y_2\}$, esto implica que $p_n \notin M_n$, para cada $n \geqslant l$, lo cual es una contradicción ya que p_n es punto medio de M_n, para cada $n \geqslant N$. Concluimos que X no tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ. □

El siguiente resultado proporciona una caracterización del arco y la curva cerrada simple en la clase de las gráficas finitas.

Teorema 4.13. *Sea X una gráfica finita y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración: Para la necesidad, supongamos que X no es arco ni curva cerrada simple y que X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, por la [**15**, Proposición 9.5], se tiene que existe $p \in X$ tal que $ord(p, X) \geqslant 3$. Luego, por la Proposición 3.13, X contiene un n-odo simple libre. Así, por la Proposición 4.11, X no tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, lo cual es una contradicción. Concluimos que X es un arco o una curva cerrada simple.

La suficiencia se sigue del Teorema 4.8 y Teorema 4.10. □

Teorema 4.14. *Sea X una dendrita y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces X es un arco si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.*

Demostración: La necesidad se sigue del Teorema 4.8.

Para probar la suficiencia. Por [**15**, Teorema 4], sea d una métrica convexa para X. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ y que X no es un arco. Por [**15**, 8.40 (a)], existe un punto p en X tal que $ord(p, X) \geqslant 3$, luego existen arcos en X, A_1, A_2 y A_3, tales que p es punto extremo de A_i y $A_i \cap A_j = \{p\}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distintos. Sean $a_i \in A_i$ el punto extremo de A_i distinto de p, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $\mu(A_1) < \mu(A_2)$, así existe $x \in A_2$ tal que $B_1 = px$ arco en A_2 y $\mu(A_1) = \mu(B_1)$.

Sea $M = A_1 \cup B_1$, note que a_1 y x son los puntos extremos de M. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A_3 \setminus \{p, a_3\}$ convergente a p. Como X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, existe $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a M tal que $M_n \in Medio(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sean x_n y y_n los puntos extremos de M_n. Consideramos la función de puntos extremos $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$. Como X es dendrita por el Teorema 2.5, la función E es continua. Luego la sucesión $\{E(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $E(M)$, es decir, la sucesión $\{\{x_n, y_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{x, a_1\}$. Sin perder generalidad, supongamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a_1. Sea $\varepsilon = \min\{d(a_1, A_3), d(x, A_3), d(a_1, x)\}$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant N$, $x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y $y_n \in B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$. Como d es una métrica convexa, se tiene que $B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ son conexos, de tal forma que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $A_n = x_n x$ y $B_n = y_n a_1$ arcos en X tales que $A_n \subseteq B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B_n \subseteq B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$. Probemos la siguiente afirmación:

Afirmación 4.15. *Para cada $n \geqslant N$, $p \in M_n$.*

Prueba de la Afirmación. Supongamos que existe $k \geqslant N$ tal que $p \notin M_k$. Tenemos que $A_k \cup B_k \cup M_k$ es un conjunto conexo en $X \setminus \{p\}$ que contiene tanto a a_1 como a x lo cual es una contradicción ya que p separa a a_1 de x, es decir, $X \setminus \{p\}$ es disconexo. Así queda demostrada la Afirmación 4.15.

Sean U_{a_1}, U_x y U_{a_3} las componentes en $X \setminus \{p\}$ de los puntos a_1, a_2 y a_3, respectivamente. Como $x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, para cada $n \geqslant N$ y $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ es un conexo, tenemos que $x_n \in U_x$, para cada $n \geqslant N$. De forma similar se prueba que $y_n \in U_{a_1}$, para cada $n \geqslant N$. Como $p_n \in A_3 \setminus \{p\}$, existe un arco $C_n = p_n a_3 \subseteq A_3 \setminus \{p\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así $p_n \in U_{a_3}$, para cada $n \geqslant N$. Se sigue que M_n es un arco contiene a p tal que $M_n \cap U_{a_1} \neq \emptyset$, $M_n \cap U_{a_2} \neq \emptyset$ y $M_n \cap U_{a_3} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es un arco. □

5. Relaciones entre la propiedad de Kelley, la propiedad de Kelley por arcos y la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ

En esta sección vamos a ver las relaciones que existen entre los conceptos de propiedad de Kelley, la propiedad de Kelley por arcos y la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.

El Ejemplo 5.1 muestra que la propiedad de Kelley no implica la propiedad de Kelley por arcos ni la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.

Ejemplo 5.1. *Sea X un triodo simple. Por el Teorema 3.3, X tiene la propiedad de Kelley. Por el Teorema 3.12, X no tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Por la Proposición 4.11, X no tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.*

Dados un continuo X y $p \in X$, la **composante** de p en X denotada por $\kappa(p)$ se define como la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen al punto p.

Por otro lado, el Ejemplo 5.2 muestra que la propiedad de Kelley por arcos no implica la propiedad de Kelley.

Ejemplo 5.2. *Sean P y Q dos pseudoarcos tales que $P \cap Q = \{q\}$ y sea $X = P \cup Q$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) X tiene la propiedad de Kelley por arcos.

(2) X no tiene la propiedad de Kelley.

Demostración: Primero probamos *(1)*. Notemos que X no contiene arcos. Como consecuencia del Teorema 3.5, se tiene que X tiene la propiedad de Kelley por arcos.

Ahora, probemos (2). Observamos que P es un subcontinuo de X tal que $q \in P$. Como Q es un continuo indescomponible, por [**15**, teoremas 11.15 y 11.17], Q tiene una cantidad no numerables composantes densas, así podemos considerar una sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X que converge a q tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $q_n \in Q$ y la composante de q_n en Q es diferente de la composante de q en Q.

Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley, en particular, X tiene la propiedad de Kelley en q. Así, existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a P tal que $q_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 5.3. *existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $q \in K_n$, para cada $n \geqslant N$.*

Prueba de la Afirmación. Sea $x \in P \setminus \{q\}$. Como $P \setminus \{q\}$ es un subconjunto abierto de X y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a P, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap (P \setminus \{q\}) \neq \emptyset$, y $K_n \cap (Q \setminus \{q\}) \neq \emptyset$, para cada $n \geqslant N$. Notemos que $\{q\}$ separa a $P \setminus \{q\}$ y $Q \setminus \{q\}$ en X, se sigue que $q \in K_n$, para cada $n \geqslant N$. Queda probada la *Afirmación 5.3.*

Afirmación 5.4. *$K_n \cap Q$ es conexo, para cada $n \geqslant N$.*

Prueba de la Afirmación. Sean $n \geqslant N$, $U = K_n \cap (P \setminus \{q\})$ y $V = K_n \cap (Q \setminus \{q\})$. Notemos que U y V son subconjuntos abiertos de $K_n \setminus \{q\}$, $K_n \setminus \{q\} = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$. Así, U y V están mutuamente separados en $K_n \setminus \{q\}$. Por [**15**, Proposición 6.3], $V \cup \{q\}$ es conexo. Observemos que $V \cup \{q\} = (K_n \cap (Q \setminus \{q\})) \cup \{q\} = K_n \cap Q$. Queda probada la *Afirmación 5.4.*

Finalmente, por la *Afirmación 5.4*, para cada $n \geqslant N$, $K_n \cap Q$ es un subcontinuo de Q. Como $q, q_n \in K_n \cap Q$ y los puntos q y q_n están en diferentes composantes de Q, se sigue que $K_n \cap Q = Q$. De donde $Q \subset \lim_{n\to\infty} K_n = P$, lo cual contradice que $P \cap Q = \{q\}$. Por lo tanto, X no tiene la propiedad de Kelley. $\square$

El Ejemplo 5.5 muestra que la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, donde μ es una función de Whitney, no implica la propiedad de Kelley por arcos ni la propiedad de Kelley.

Ejemplo 5.5. *Sea $X = P \cup Y$, donde P es un seudoarco, Y es un arco, y $P \cap Y = \{p\}$. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.

(2) X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.

(3) X no tiene la propiedad de Kelley.

Demostración: Probemos el inciso *(1)*. Notemos que $Y \in Arcos(p, X)$. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p tal que $p_n \in P \setminus \{p\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $Arcos(p_n, X) = \{\{p_n\}\}$. Se tiene que la única sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$ es la que tiene a cada elemento como un singular, es decir, $A_n = \{p_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\} \neq Y$, por lo tanto, X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.

Ahora, probemos el inciso *(2)*. Sea $q \in X$, tenemos los siguientes tres casos:

Caso 1. $q \in Y \setminus \{p\}$.

Notemos que $Medio_\mu(q, X) = Medio_\mu(q, Y)$, ya que $\{q\} \in Y$ y si A es un arco que tiene a q como punto medio, entonces $A \subseteq Y$. Sea $M \in Medio_\mu(q, X)$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a q. Sea $\varepsilon = d(p, q)$, como la sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a q, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(q, q_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $n \geqslant N$. Se tiene que $q_n \in Y$, para cada $n \geqslant N$. Consideremos la subsucesión $\{q_n\}_{n\geqslant N}$, la cual converge a q y está contenida en Y, como Y es un arco, en particular tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, luego existe una sucesión $\{M_n\}_{n\geqslant N}$ convergente a M tal que $M_n \in Medio_\mu(q_n, X)$, para cada $n \geqslant N$. Así, X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ en q.

Caso 2. $q \in P \setminus \{p\}$.

Observemos que $Medio_\mu(q, X) = \{\{q\}\}$. Así, si $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a a, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \in P$, para cada $n \geqslant N$. Luego, la subsucesión $\{q_n\}_{n\geqslant N}$ está contenida en P, luego, basta considerar la sucesión $\{\{q_n\}\}_{n\geqslant N}$ la cual converge a $\{q\}$. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ en cada punto de $P \setminus \{p\}$.

Caso 3. $q = p$.

Observemos que $Medio_\mu(q, X) = \{\{q\}\}$, luego, si $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X convergente a a, basta considerar la sucesión $\{\{q_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a $\{q\}$.

De los *Casos 1*, *2* y *3*, concluimos que X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ.

Finalmente, probemos el inciso *(3)*. Observamos que Y es un subcontinuo de X tal que $p \in Y$. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a p tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in P$ y la composante de p_n en P es diferente de la composante de p en P.

Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley, en particular, X tiene la propiedad de Kelley en p. Así, existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a Y tal que $p_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 5.6. *existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p \in K_n$, para cada $n \geqslant N$.*

Prueba de la Afirmación. Sea $x \in Y \setminus \{p\}$. Como $Y \setminus \{p\}$ es un subconjunto abierto de X que contiene a x y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Y, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap (Y \setminus \{p\}) \neq \emptyset$, y $K_n \cap (P \setminus \{p\}) \neq \emptyset$, para cada $n \geqslant N$. Notemos que $\{p\}$ separa a $Y \setminus \{p\}$ y $P \setminus \{p\}$ en X, se sigue que $p \in K_n$, para cada $n \geqslant N$. Queda probada la *Afirmación 5.6*.

Afirmación 5.7. *$K_n \cap P$ es conexo, para cada $n \geqslant N$.*

Prueba de la Afirmación. Sean $n \geqslant N$, $U = K_n \cap (Y \setminus \{p\})$ y $V = K_n \cap (P \setminus \{p\})$. Notemos que U y V son subconjuntos abiertos de $K_n \setminus \{p\}$, $K_n \setminus \{p\} = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$. Así, U y V están mutuamente separados en $K_n \setminus \{p\}$. Por [**15**, Proposición 6.3], $V \cup \{p\}$ es conexo. Observemos que $V \cup \{p\} = (K_n \cap (P \setminus \{p\})) \cup \{p\} = K_n \cap P$. Queda probada la *Afirmación 5.7*.

Finalmente, por la *Afirmación 5.7*, para cada $n \geqslant N$, $K_n \cap P$ es un subcontinuo de P. Como $p, p_n \in K_n \cap P$ y los puntos p y p_n están en diferentes composantes de P, se sigue que $K_n \cap P = P$. De donde $P \subset \lim\limits_{n\to\infty} K_n = Y$, lo cual contradice que $Y \cap P = \{p\}$. Por lo tanto, X no tiene la propiedad de Kelley. □

Denotemos a la propiedad de Kelley por **PK**, a la propiedad de Kelley por arcos por **PKA** y a la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ, donde μ es una función de Whitney, por **PKM**. El siguiente diagrama muestra las relaciones entre estos conceptos.

Concluimos este capítulo con la siguiente pregunta.

PROBLEMA 5.8. *Dado un continuo X y μ una función de Whitney para $C(X)$ ¿Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios con respecto de μ?*

Agradecimientos: Más allá de la formalidad de agradecer al árbitro(a), con toda sinceridad, los autores le agradecen al árbitro(a) sus comentarios, dedicación y sugerencias a este trabajo.

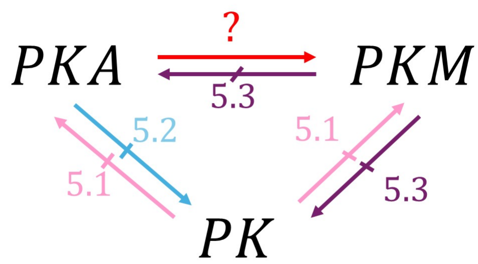


FIGURA 1. Relación entre **PK**, **PKA** y **PKM**

Bibliografía

[1] G. Acosta, *La propiedad de Kelley y la contractibilidad de los hiperespacios.* Aportaciones Matemáticas, 31, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006.

[2] M. Chacón Tirado, M. de J. López Toriz, J. L. Suárez López, *Modelos geométricos de hiperespacios de arcos anclados.* Capítulo 8 en Topología y sus aplicaciones 9. Editores: J. Juan Angoa Amador, Agustín Contreras, Raúl Escobedo Conde, M. de J. López Toriz. Dirección General de Publicaciones, Manuales y Textos, BUAP, 2023.

[3] M. Chacón Tirado, M. de J. López, J. L. Suárez López, *The midpoint hyperspace on continua.* (Pre-print)

[4] Charatonik, J. J. and Eberhart C. *On smooth dendroids.* Fundamenta Mathematicae, Vol. 67, 291–322, 1970.

[5] A. Illanes. *Hyperspaces of arcs and two-point sets in dendroids.* Topology and its Applications, 117 (3) (2002), 307–317.

[6] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos.* Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[7] A. Illanes. *Models of hyperspaces.* Topology Proc., Vol. 41 (2013), 1–26.

[8] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[9] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum.* Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22–36.

[10] M. de J. López, P. Pellicer-Covarrubias, I. Serapio Ramos. *Introducción a la función punto medio en continuos.* Rev. Integr. Temas Mat. Vol. 34, No. 1 (2016), 109–123.

[11] M. de J. López, P. Pellicer-Covarrubias; I. Serapio. *A midpoint function and an end point function in continua*, Topology and its Applications 235, (2018), 167–184.

[12] M. de J. López, P. Pellicer Covarrubias, Iván Serapio. *Caracterización de la conexidad local en continuos, en términos de la función de puntos extremos.* Capítulo 3 en Topología y sus aplicaciones 7. Editores: J. Juan Angoa, Raúl Escobedo, Manuel Ibarra, A. Contreras. Dirección General de Publicaciones, Manuales y textos, BUAP, 2019.

[13] M. de J. López, P. Pellicer Covarrubias, J. L. Suárez López. *Las funciones punto medio y de puntos extremos en relación con algunas funciones especiales entre continuos.* Capítulo 3 en Topología y sus aplicaciones 8. Editores: J. Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, Manuales y textos, BUAP, 2021.

[14] W. Makuchowski, *On local connectedness in hyperspaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math.47 (1999), No. 2, 119-126

[15] E. E. Moise, *Grille decomposition and convexification theorems for compact metric locally connected continua*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1111–1121.

[16] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets.* Mongraphs and Textbooks in Pure an Applied Mathematics, 49, Marcel Dekker, New York, 1978.

[17] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[18] P. Pellicer Covarrubias. *The hyperspaces $C(p, X)$*. Topology Proc. 27 (1) (2003), 259–285.

[19] I. Serapio Ramos, *Funciones punto medio en continuos*. Tesis de Maestría en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, Junio 2016.

[20] A. Soto Bañuelos, *El hiperespacio de arcos de un continuo*. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, septiembre de 1999 (http://132.248.9.195/pd2000/283734/Index.html).

[21] J. L. Suárez López, *Hiperespacios de continuos anclados en un punto*. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, 2015.

[22] J. L. Suárez López, *Propiedades e interrelaciones de las funciones punto medio y de puntos extremos en continuos*. Tesis de Maestría en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, diciembre 2018.

[23] J. L. Suárez López, *La propiedad de Kelley por arcos y la propiedad de Kelley por medios*. Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias Físico Metmáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, 2024.

[24] R. W. Wardle, *On a property of J. L. Kelley*, Houston J. Math. 3 (1977), 291–299.

Correos electrónicos:

maeschacon@fcfm.buap.mx (Mauricio E. Chacón Tirado),
mjlopez@fcfm.buap.mx (María de Jesús López Toriz),
louis.suarez.lopez@gmail.com (José Luis Suárez López).

CAPÍTULO 9

Propiedades dinámicas en productos II

Anahí Rojas, Aura L. Kantún-Montiel, José N. Méndez-Alcocer
Víctor M. Méndez-Salinas
Universidad del Papaloapan, Oaxaca, México

1. Introducción

Un *sistema dinámico* es una pareja formada por un espacio topológico X (espacio fase) y una función $f : X \to X$, y es denotado por (X, f). Además, si $X_1, \ldots, X_m$ son espacios topológicos, con $m \geqslant 2$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to X_i$ es una función, se puede definir la función $\prod_{i=1}^m f_i : \prod_{i=1}^m X_i \to \prod_{i=1}^m X_i$ dada por $\prod_{i=1}^m f_i((x_1, \ldots, x_m)) = (f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m))$, para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Esta función es llamada *función producto*. De este modo, podemos analizar las relaciones entre los sistemas dinámicos (1) $(\prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m f_i)$ y (2) (X_i, f_i), para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Sea $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: exacta, mezclante, transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, fuertemente transitiva, caótica en el sentido de Devaney, minimal, órbita-transitiva, estrictamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, suavemente mezclante, exactamente Devaney caótica, minimal inversa, totalmente minimal, dispersora, Touhey o un F-sistema. En [**11**], A. Rojas, F. Barragán y S. Macías, estudian relaciones entre las siguientes condiciones:

(1) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$ y
(2) $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$,

considerando espacios topológicos y funciones no necesariamente continuas.

Continuando con el estudio realizado en [**4, 11**], en este capítulo analizaremos relaciones entre las condiciones (1) y (2) mencionadas anteriormente, ahora considerando las siguientes clases de funciones: exacta en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, completamente exacta, fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar, muy fuertemente transitiva, exacta transitiva, fuertemente exacta transitiva y fuertemente producto transitiva.

Cabe mencionar que este capítulo está basado en las secciones tres y cuatro del artículo *Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products*

II [**10**]. El contenido se ha adaptado y reorganizado para hacerlo más accesible y comprensible para un público general.

2. Notación y conceptos básicos

En esta sección presentamos la notación y conceptos básicos necesarios para el desarrollo de este capítulo.

Dado un espacio topológico X y un subconjunto A de X, con $\text{int}(A)$ y $\text{cl}(A)$ denotaremos al interior y la clausura del conjunto A en X, respectivamente. También, nos referiremos a los conjuntos de números naturales y enteros no negativos como $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}_+$, respectivamente.

Por otra parte, si $f : X \to X$ es una función, para cada $k \in \mathbb{N}$, la $k-$ésima iteración de f la definimos como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k. Es decir, $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y se define $f^0 = id_X$ (la función identidad en X). Para un subconjunto A de X y k un entero, usaremos $f^k(A)$ para referirnos a la imagen de A bajo f^k cuando $k \geqslant 0$ y la preimagen bajo $f^{|k|}$ cuando $k < 0$.

En todo este capítulo, m denotará un entero mayor o igual que dos.

Definición 2.1. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea X_i un conjunto no vacío. Se define y denota su **producto cartesiano** como el conjunto:*

$$\prod_{i=1}^{m} X_i = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Cuando $X_1 = X_2 = \cdots = X_m$, al conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ se le denota con X^m.

Definición 2.2. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, τ_i) un espacio topológico. La **topología producto** $\mathcal{X}$ sobre el conjunto $\prod_{i=1}^{m} X_i$ es la topología que tiene como base la colección $\beta = \{U_1 \times \cdots \times U_m : U_i \in \tau_i, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}\}$. El espacio topológico $(\prod_{i=1}^{m} X_i, \mathcal{X})$ se llama **espacio producto** de la familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^{m}$ y se denota simplemente por $\prod_{i=1}^{m} X_i$.*

Definición 2.3. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sean X_i un conjunto no vacío y $f_i : X_i \to X_i$ una función. Se define la **función producto** $\prod_{i=1}^{m} f_i : \prod_{i=1}^{m} X_i \to \prod_{i=1}^{m} X_i$ como:*

$$\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)((x_1, \ldots, x_m)) = (f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)),$$

para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X_i$.

Cuando $f_1 = f_2 = \cdots = f_m$, a la función $\prod_{i=1}^{m} f_i$ se le denota con $f^{\times m}$.

Definición 2.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico. La **órbita de un punto $x \in X$ bajo f**, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, es el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$. Esto es:*

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Definición 2.5. *Sean (X, f) un sistema dinámico y A y B subconjuntos de X. Se define el siguiente conjunto:*

$$\boldsymbol{n_f(A, B) = \{k \in \mathbb{N} : A \cap f^{-k}(B) \neq \emptyset\}}.$$

Definición 2.6. *Sea (X, f) un sistema dinámico, y $x, y \in X$. Se tiene que x es un punto:*

- ***fijo de f*** *si* $f(x) = x$*;*
- ***transitivo de f*** *si la órbita* $\mathcal{O}(x, f)$ *es denso en* X*;*
- ***periódico de f*** *si existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(x) = x$*. El conjunto de puntos periódicos de* f *es denotado por* $\mathrm{Per}(f)$*;*
- ***recurrente de f*** *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$*, existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^l(x) \in U$*;*
- ***casi-periódico de f*** *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$*, existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^{kl}(x) \in U$ *para cada* $k \geqslant 0$*;*
- ***no errante de f*** *si para cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$ *existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^l(U) \cap U \neq \emptyset$*;*
- ***ω-limite de*** y ***bajo f*** *si para cualquier* $k \in \mathbb{N}$ *y cualquier subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$*, existe un entero positivo* $l \geqslant k$ *tal que* $f^l(y) \in U$*. El conjunto de todos los puntos* ω*-limite de* y *bajo* f*, es denotado por* $\omega(y, f)$ *y es llamado **conjunto*** ω***-límite*** *de* y*.*

En el diagrama de la Figura 1 se muestran contenciones entre las clases de puntos presentadas en la Definición 2.6 para el caso general, es decir, X espacio topológico y $f : X \to X$ una función no necesariamente continua.

$$\begin{tikzcd} & & & \text{Transitivo} \arrow[d] & \\ \text{Fijo} \arrow[r] & \text{Periódico} \arrow[r] & \text{Casi-periódico} \arrow[r] & \text{Recurrente} \arrow[r] & \text{No errante} \end{tikzcd}$$

FIGURA 1. Relaciones entre clases de puntos.

En [**9**], se puede encontrar un análisis detallado del diagrama de la Figura 1; además, mediante la construcción de contraejemplos, los autores establecen que estas contenciones entre clases de puntos son propias.

Las siguientes definiciones se pueden encontrar en [**1, 2, 8, 12**].

Definición 2.7. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Se dice que* f *es:*

- ***exacta****, si para cada subconjunto abierto no vacío* U *de* X*, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(U) = X$*;*
- ***mezclante****, si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos* U *y* V *de* X*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$*, para cada* $k \geqslant N$*;*
- ***transitiva****, si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos* U *y* V *de* X*, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$*;*
- ***débilmente mezclante****, si* $f^{\times 2}$ *es transitiva;*
- ***totalmente transitiva****, si* f^s *es transitiva, para todo* $s \in \mathbb{N}$*;*
- ***fuertemente transitiva****, si para cada subconjunto abierto no vacío* U *de* X*, existe* $s \in \mathbb{N}$ *tal que* $\bigcup_{k=0}^{s} f^k(U) = X$*;*
- ***caótica****, si es transitiva y* $\mathrm{Per}(f)$ *es denso en* X *(esta definición corresponde al caos en el sentido Devaney* [**3**]*);*
- ***órbita-transitiva****, si existe* $x \in X$ *tal que* $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(x, f)) = X$*;*
- ***estrictamente órbita-transitiva****, si existe* $x \in X$ *tal que* $\mathrm{cl}(\mathcal{O}(f(x), f)) = X$*;*
- ω***-transitiva****, si existe* $x \in X$ *tal que* $\omega(x, f) = X$*;*

- ***TT***$_{++}$, *si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, el conjunto $n_f(U,V)$ es infinito;*
- ***suavemente mezclante***, *si para cualquier función transitiva $f_1 : X_1 \to X_1$, la función $f \times f_1$ es transitiva;*
- ***exactamente Devaney caótica***, *si f es exacta y $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X;*
- ***dispersora***, *si para cualquier función minimal (esto es, si la órbita de cada punto de X es un conjunto denso en X), $f_1 : X_1 \to X_1$, la función $f \times f_1$ es transitiva;*
- ***Touhey***, *si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe un punto periódico $x \in U$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que $f^k(x) \in V$;*
- ***un*** F***-sistema***, *si f es totalmente transitiva y $\mathrm{Per}(f)$ es denso en X;*
- ***exacta en el sentido de Akin-Auslander-Nagar***, *si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap f^k(V) \neq \emptyset$;*
- ***completamente exacta***, *si para cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{int}(f^k(U) \cap f^k(V)) \neq \emptyset$;*
- ***fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar***, *si para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) = X$;*
- ***muy fuertemente transitiva***, *si para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{k=1}^{N} f^k(U) = X$;*
- ***exacta transitiva***, *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V))$ es denso en X;*
- ***fuertemente exacta transitiva***, *si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X, se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f^k(U) \cap f^k(V)) = X$;*
- ***fuertemente producto transitiva***, *si para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $f^{\times k}$ es fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar.*

Por conveniencia, de aquí en adelante nos referimos a las funciones exactas en el sentido de Akin-Auslander-Nagar y fuertemente transitiva en el sentido de Akin-Auslander-Nagar como AAN exactas y AAN fuertemente transitivas, respectivamente.

Además, ya que toda función exacta es sobreyectiva, se tiene que $f : X \to X$ es exacta si y sólo si, para todo subconjunto abierto no vacío U de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) = X$, para cada $k \geqslant N$. En lo que resta de este trabajo, utilizaremos esta equivalencia.

En el diagrama de la Figura 2 se muestran algunas contenciones entre las clases de funciones de la Definición 2.7. Los lectores interesados en la prueba de dichas contenciones pueden revisar, por ejemplo, [**1, 2, 5, 8, 9**].

Por otra parte, al agregar las condiciones adecuadas al espacio fase o a la función, se pueden obtener otras relaciones entre clases de funciones. En [**9**], se encuentra un análisis detallado de contenciones entre las siguientes clases de funciones: AAN exactas, completamente exactas, AAN fuertemente transitivas, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas y fuertemente producto transitivas.

3. Conjugación topológica

En esta sección presentamos los resultados preliminares necesarios para el desarrollo de la Sección 4.

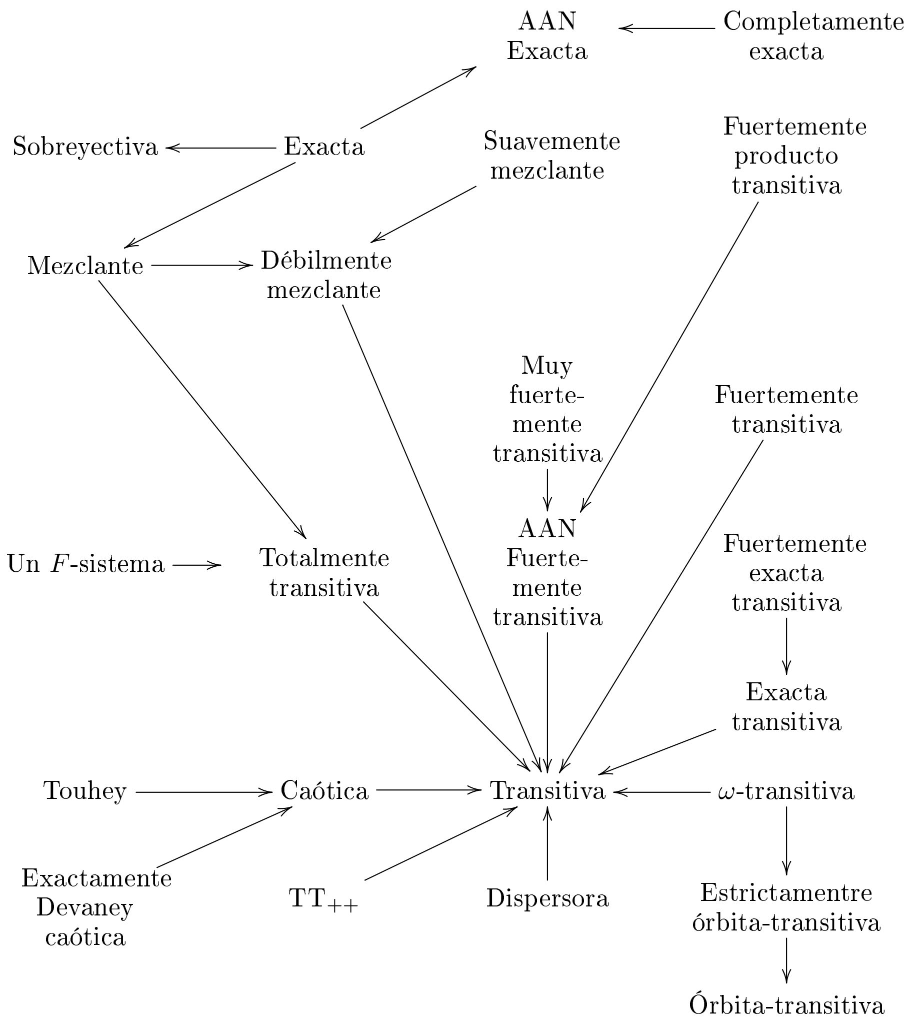


FIGURA 2. Relaciones entre clases de funciones.

Definición 3.1. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Se tiene que f y g son* ***topológicamente conjugadas*** *si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. El homeomorfismo h es llamado una* ***conjugación topológica entre f y g****.*

Bajo las condiciones de la Definición 3.1, diremos que f y g son topológicamente conjugadas ***vía*** h.

Observación 3.2. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos, $h : X \to Y$ un homeomorfismo y $k \in \mathbb{N}$. Si f y g son topológicamente conjugadas vía h, entonces:*

(1) g y f son topológicamente conjugadas vía h^{-1},
(2) $f^k = h^{-1} \circ g^k \circ h$ y $g^k = h \circ f^k \circ h^{-1}$.

El siguiente resultado se sigue de [**7**, Proposición 2.3.29] y [**6**, Lema 7, p. 51].

Teorema 3.3. *Sean $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_m$ espacios topológicos, y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i : X_i \to Y_i$ una función. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es un homeomorfismo si y sólo si $\prod_{i=1}^{m} f_i$ es un homeomorfismo.*

La prueba del Teorema 3.4 se sigue del Teorema 3.3. No obstante, para facilitar la comprensión de este capítulo y en consideración al lector, la hemos incluido.

Teorema 3.4. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos, $h : X \to Y$ un homeomorfismo y $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que f y g son topológicamente conjugadas vía h si y sólo si $f^{\times k}$ y $g^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía $h^{\times k}$.*

Demostración: Supongamos que f y g son topológicamente conjugadas vía h. Por el Teorema 3.3, $h^{\times k}$ es un homeomorfismo. Veamos que $h^{\times k} \circ f^{\times k} = g^{\times k} \circ h^{\times k}$. Sea $(x_1, \ldots, x_k) \in X^k$. De aquí,

$$\begin{aligned}
(h^{\times k} \circ f^{\times k})((x_1, \ldots, x_k)) &= h^{\times k}(f^{\times k}((x_1, \ldots, x_k))) \\
&= h^{\times k}(f(x_1), \ldots, f(x_k)) \\
&= (h(f(x_1)), \ldots, h(f(x_k))) \\
&= (g(h(x_1)), \ldots, g(h(x_k))) \\
&= g^{\times k}(h(x_1), \ldots, h(x_k)) \\
&= g^{\times k}(h^{\times k}((x_1, \ldots, x_k))) \\
&= (g^{\times k} \circ h^{\times k})((x_1, \ldots, x_k)).
\end{aligned}$$

Así, $f^{\times k}$ y $g^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía $h^{\times k}$.

Ahora supongamos que $f^{\times k}$ y $g^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía $h^{\times k}$. Sea $x \in X$. De aquí, $(x, \ldots, x) \in X^k$ y por hipótesis,

$$\begin{aligned}
(h^{\times k} \circ f^{\times k})((x, \ldots, x)) &= (g^{\times k} \circ h^{\times k})((x, \ldots, x)) \\
(h(f(x)), \ldots, h(f(x))) &= (g(h(x)), \ldots, g(h(x)))
\end{aligned}$$

Finalmente, $(h \circ f)(x) = (g \circ h)(x)$, para cualquier $x \in X$. Más aún, por el Teorema 3.3, h es un homeomorfismo. Por lo tanto, f y g son topológicamente conjugadas vía h. $\square$

Existen propiedades dinámicas que se preservan bajo conjugación topológica, como vemos a continuación.

Teorema 3.5. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos, $h : X \to Y$ una conjugación topológica entre f y g y $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: AAN exacta, completamente exacta, AAN fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, exacta transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva. Se cumple que $f \in \mathcal{M}$ si y sólo si $g \in \mathcal{M}$.*

Demostración: Sean U y V subconjuntos abiertos no vacíos de Y. De aquí, $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Supongamos que f es AAN exacta. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V)) \neq \emptyset$, esto es, $h^{-1}(g^k(U)) \cap h^{-1}(g^k(V)) = h^{-1}(g^k(U) \cap g^k(V)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $g^k(U) \cap g^k(V) \neq \emptyset$ y así, g es AAN exacta.

Supongamos que f es completamente exacta. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{int}(f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V))) \neq \emptyset.$$

Es decir, $\operatorname{int}(h^{-1}(g^k(U)) \cap h^{-1}(g^k(V))) = \operatorname{int}(h^{-1}(g^k(U) \cap g^k(V))) \neq \emptyset$. Sea $x \in \operatorname{int}(h^{-1}(g^k(U) \cap g^k(V)))$. Luego, existe un subconjunto abierto W de X tal que $x \in W \subseteq h^{-1}(g^k(U) \cap g^k(V))$. Finalmente, $h(x) \in h(W) \subseteq g^k(U) \cap g^k(V)$. Por lo tanto, $h(x) \in \operatorname{int}(g^k(U) \cap g^k(V))$ y así, g es completamente exacta.

Supongamos que f es AAN fuertemente transitiva. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{\infty} g^k(U) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (h \circ f^k \circ h^{-1})(U) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} h(f^k(h^{-1}(U))) \\ &= h\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(h^{-1}(U))\right).\end{aligned}$$

Ya que f es AAN fuertemente transitiva, $\bigcup_{k=1}^{\infty} g^k(U) = h(X) = Y$. Por lo tanto, g es AAN fuertemente transitiva.

La prueba para la clase de las funciones muy fuertemente transitivas es similar a la dada para la clase de las funciones AAN fuertemente transitivas.

Supongamos que f es exacta transitiva. De aquí,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V)))$$

es denso en X y, puesto que h es un homeomorfismo, se tiene que

$$h\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V)))\right)$$

es denso en Y. Además, utilizando la Observación 3.2, parte *(2)*:

$$\begin{aligned}h\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V)))\right) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} h(f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V))) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (g^k(U) \cap g^k(V)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, g es exacta transitiva.

Supongamos que f es fuertemente exacta transitiva. De aquí,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V))) = X,$$

lo cual implica que $h(\bigcup_{k=1}^{\infty} (f^k(h^{-1}(U)) \cap f^k(h^{-1}(V)))) = Y$. Finalmente,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (g^k(U) \cap g^k(V)) = Y.$$

Por lo tanto, g es fuertemente exacta transitiva.

Supongamos que f es fuertemente producto transitiva. De aquí, $f^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Por otro lado, por el Teorema 3.4, $f^{\times k}$ y $g^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía $h^{\times k}$. Finalmente, por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, $g^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, g es fuertemente producto transitiva.

La prueba del recíproco se sigue de la Observación 3.2, parte (1). $\square$

Concluimos esta sección estableciendo que las funciones $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k}$ y $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k}$ son topológicamente conjugadas. Antes tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, $k \in \mathbb{N}$, y $h : (\prod_{i=1}^m X_i)^k \to \prod_{i=1}^m X_i^k$ una función dada por:*

$$h(((x_1^1, \dots, x_m^1), \dots, (x_1^k, \dots, x_m^k))) = ((x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k), \dots, (x_m^1, x_m^2, \dots, x_m^k)).$$

Se tiene que h es un homeomorfismo.

Demostración: No es difícil verificar que h es una función biyectiva. Veamos que h es una función continua y abierta. Sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i^k$ y $\varphi \in h^{-1}(\mathcal{U})$. De aquí, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y todo $j \in \{1, \dots, k\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i^j de X_i tal que $h(\varphi) \in \prod_{i=1}^m (\prod_{j=1}^k U_i^j) \subseteq \mathcal{U}$, esto es, $\varphi \in h^{-1}\left(\prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^k U_i^j\right)\right) \subseteq h^{-1}(\mathcal{U})$. Más aún, ya que $h^{-1}\left(\prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^k U_i^j\right)\right) = \prod_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^m U_i^j\right)$, se tiene que $h^{-1}(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de $(\prod_{i=1}^m X_i)^k$. Por lo tanto, h es continua.

Ahora, sean $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $(\prod_{i=1}^m X_i)^k$ y $\varphi \in h(\mathcal{U})$. Se sigue que, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ y cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i^j de X_i tal que $h^{-1}(\varphi) \in \prod_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^m U_i^j\right) \subseteq \mathcal{U}$. Más aún, ya que $h(\prod_{j=1}^k (\prod_{i=1}^m U_i^j)) = \prod_{i=1}^m (\prod_{j=1}^k U_i^j)$, concluimos que $\varphi \in \prod_{i=1}^m (\prod_{j=1}^k U_i^j) \subseteq h(\mathcal{U})$. Por lo tanto, h es abierta y así, h es un homeomorfismo. $\square$

Como una consecuencia del Teorema 3.6, obtenemos lo siguiente.

Teorema 3.7. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, y sean $k \in \mathbb{N}$ y $h : (\prod_{i=1}^m X_i)^k \to \prod_{i=1}^m X_i^k$ como en el Teorema 3.6. Se tiene que las funciones $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k}$ y $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k}$ son topológicamente conjugadas vía el homeomorfismo h.*

De la Observación 3.2, parte (1), y los Teoremas 3.7 y 3.5, se desprende el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, y sean $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: AAN exacta, completamente exacta, AAN fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, exacta transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva. Se tiene que $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k} \in \mathcal{M}$ si y sólo si $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k} \in \mathcal{M}$.*

4. Propiedades dinámicas de funciones producto

En esta sección estudiamos las relaciones que existen entre las funciones $\prod_{i=1}^m f_i$ y f_i, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, cuando cualquiera de estas es AAN exacta, completamente exacta, AAN fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, exacta transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva.

En [**11**, Teorema 3.3], A. Rojas, F. Barragán y S. Macías estudiaron relaciones entre puntos transitivos, ω-limite, aislados y periódicos de las funciones $\prod_{i=1}^m f_i$ y

f_i, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Ahora, analizamos el mismo problema considerando puntos recurrentes, casi-periódicos y no errantes.

Teorema 4.1. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, y sea $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Si $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto recurrente, casi-periódico o no errante de $\prod_{i=1}^m f_i$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, x_i es un punto recurrente, casi-periódico o no errante de f_i, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto recurrente de $\prod_{i=1}^m f_i$. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y U_{i_0} un subconjunto abierto de X_{i_0} tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea $U_i = X_i$. De aquí, $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i$ es un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U}$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\prod_{i=1}^m f_i)^k((x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{U}$ esto es, $(\prod_{i=1}^m f_i^k)((x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $f_{i_0}^k(x_{i_0}) \in U_{i_0}$ y así, x_{i_0} es un punto recurrente de f_{i_0}.

La prueba para puntos casi-periódicos y no errantes es similar a la dada para puntos recurrentes. □

En el Teorema 4.2 se reemplaza la condición "X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i" de [**11**, Teorema 3.7] por "$x_i \in X_i$ es un punto fijo de f_i" para obtener un resultado análogo.

Teorema 4.2. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sean (X_i, f_i) un sistema dinámico y $x_i \in X_i$, y sea $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Se cumple lo siguiente:*

(1) Si $\omega(x_{i_0}, f_{i_0}) = X_{i_0}$ y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, x_i es un punto fijo de f_i, entonces $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.

(2) Si $\operatorname{cl}(\mathcal{O}(x_{i_0}, f_{i_0})) = X_{i_0}$ y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, x_i es un punto fijo de f_i, entonces $\operatorname{cl}(\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)) = \prod_{i=1}^m X_i$.

DEMOSTRACIÓN: *(1)* Tomemos $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y supongamos que para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, x_i es un punto fijo de f_i y que $\omega(x_{i_0}, f_{i_0}) = X_{i_0}$. Sea $(y_1, \ldots, y_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Veamos que $(y_1, \ldots, y_m) \in \omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{U}$ y $k \in \mathbb{N}$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un abierto U_i de X_i tal que $(y_1, \ldots, y_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, existe $l \geqslant k$ tal que $f_{i_0}^l(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por otra parte, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, como x_i es un punto fijo y $x_i \in U_i$, $f_i^l(x_i) \in U_i$. Así, $(\prod_{i=1}^m f_i)^l((x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $(y_1, \ldots, y_m) \in \omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)$ y así, $\omega((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) = \prod_{i=1}^m X_i$.

(2) Supongamos que x_{i_0} es un punto transitivo. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U}$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto U_i de X_i tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis, existe $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f_{i_0}^l(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por otro lado, ya que para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, x_i es un punto fijo de f_i, se tiene que $f_i^l(x_i) \in U_i$. Así,

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^l ((x_1, \ldots, x_m)) \in \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \mathcal{U}.$$

Finalmente, $\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{O}((x_1, \ldots, x_m), \prod_{i=1}^m f_i)$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$ y así $(x_1 \ldots, x_m)$ es un punto transitivo de $\prod_{i=1}^m f_i$. □

Teorema 4.3. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sean $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$ e $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_0\}$, sea*

$x_i \in X_i$ un punto fijo de f_i. Si x_{i_0} es un punto recurrente, casi-periódico o no errante de f_{i_0}, entonces $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto recurrente, casi-periódico o no errante de $\prod_{i=1}^m f_i$, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que x_{i_0} es un punto recurrente de f_{i_0}. Sea Ω un subconjunto abierto de $\prod_{i=1}^m X_i$ tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto U_i de X_i tal que $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega$. Por hipótesis, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}^{k_{i_0}}(x_{i_0}) \in U_{i_0}$. Por otro lado, ya que para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, x_i es un punto fijo, se tiene que $f_i^{k_{i_0}}(x_i) \in U_i$. Consecuentemente, $(\prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}})((x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{U}$, es decir, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}((x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{U} \subseteq \Omega$. Por lo tanto, $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto recurrente de $\prod_{i=1}^m f_i$.

La prueba para puntos casi-periódicos y no errantes es similar a la dada para puntos recurrentes. $\square$

Teorema 4.4. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. Se tiene que $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN exacta si y sólo si f_i es AAN exacta, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN exacta. Sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, y U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0}. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, sean $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. De este modo, $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^k (\mathcal{U}) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^k (\mathcal{V}) \neq \emptyset,$$

es decir, $(\prod_{i=1}^m f_i^k(U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m f_i^k(V_i)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0}) \neq \emptyset$ y así, f_{i_0} es AAN exacta.

Ahora supongamos que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es AAN exacta. Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Por hipótesis, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{k_i}(U_i) \cap f_i^{k_i}(V_i) \neq \emptyset$. Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $l_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $k = k_i + l_i$ y así,

$$f_i^k(U_i) \cap f_i^k(V_i) = f_i^{l_i}(f_i^{k_i}(U_i) \cap f_i^{k_i}(V_i)) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, $(\prod_{i=1}^m f_i^k(U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m f_i^k(V_i)) \neq \emptyset$. Finalmente, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{V}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\Omega_1) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\Omega_2) \neq \emptyset$ y así, $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN exacta. $\square$

Teorema 4.5. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, y sea $\mathcal{M}$ una de las siguientes clases de funciones: completamente exactas, AAN fuertemente transitivas, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas o fuertemente producto transitivas. Si $\prod_{i=1}^m f_i \in \mathcal{M}$, entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i \in \mathcal{M}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, U_{i_0} y V_{i_0} subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0}, y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, sean $U_i = X_i$ y $V_i = X_i$. Se tiene que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i$ son subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es completamente exacta. De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}((\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{V})) \neq \emptyset$. Esto es

$$\operatorname{int}\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i^k(U_i)\right) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i^k(V_i)\right)\right) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, $\left(\prod_{i=1}^m \operatorname{int}\left(f_i^k(U_i)\right)\right) \cap \left(\prod_{i=1}^m \operatorname{int}\left(f_i^k(V_i)\right)\right) \neq \emptyset$, lo cual implica que $\operatorname{int}(f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0})) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f_{i_0} es completamente exacta.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN fuertemente transitiva. De aquí, se tiene que $\bigcup_{k=1}^\infty(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\mathcal{U}) = \prod_{i=1}^m X_i$. Sea $x_{i_0} \in X_{i_0}$, y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}\setminus\{i_0\}$, sea $x_i \in X_i$. Claramente $\varphi = (x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. Luego, por hipótesis, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}(\mathcal{U})$, esto es, $\varphi \in \prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(U_i)$. Por lo tanto, $x_{i_0} \in f_{i_0}^{k_{i_0}}(U_{i_0}) \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty f_{i_0}^k(U_{i_0})$ y así, f_{i_0} es AAN fuertemente transitiva.

La prueba para la clase de las funciones muy fuertemente transitivas es similar a la dada para la clase de las funciones AAN fuertemente transitivas.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta transitiva. Luego, $\bigcup_{k=1}^\infty(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^k(\mathcal{U}) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^k(\mathcal{V}))$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$. Sea W_{i_0} un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0} y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}\setminus\{i_0\}$, sea $W_i = X_i$. Notemos que $\mathcal{W} = \prod_{i=1}^m W_i$ es un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. Consecuentemente, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{k_{i_0}}(\mathcal{U}) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{k_{i_0}}(\mathcal{V})) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$, o bien, $(\prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(U_i) \cap \prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(V_i)) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. En consecuencia, $(f_{i_0}^{k_{i_0}}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{k_{i_0}}(V_{i_0})) \cap W_{i_0} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^\infty(f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0}))$ es denso en X_{i_0} y así, f_{i_0} es exacta transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente exacta transitiva. De aquí,

$$\bigcup_{k=1}^\infty\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^k(\mathcal{U}) \cap \left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^k(\mathcal{V})\right) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

Sea $x_{i_0} \in X_{i_0}$, y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}\setminus\{i_0\}$, sea $x_i \in X_i$. Así, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi = (x_1, \ldots, x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}(\mathcal{U}) \cap (\prod_{i=1}^m f_i)^{k_{i_0}}(\mathcal{V})$, esto es, $\varphi \in (\prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(U_i)) \cap (\prod_{i=1}^m f_i^{k_{i_0}}(V_i))$. Lo cual implica que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{k_{i_0}}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{k_{i_0}}(V_{i_0})$. Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^\infty(f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0})) = X_{i_0}$ y así, f_{i_0} es fuertemente exacta transitiva.

Supongamos que $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente producto transitiva. Luego, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Por el Teorema 3.8, se tiene que $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva. Finalmente, por el tercer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que $f_{i_0}^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, f_{i_0} es fuertemente producto transitiva. $\square$

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico con X_i +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i [**11**, pág. 493]. En [**11**, Teorema 4.10], A. Rojas, F. Barragán y S. Macías, demostraron que: si para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, caótica, órbita-transitiva, estríctamente órbita-transitiva, ω-transitiva, TT_{++}, Touhey, scattering, un F-sistema o suavemente mezclante, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ tiene la misma propiedad. En los Teoremas 4.8, 4.9 y 4.10, presentamos una forma alternativa de [**11**, Teorema 4.10] cuando $\mathcal{M}$ es una de las siguientes clases de funciones: transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva, caótica, TT_{++}, Touhey o un F-sistema. Específicamente, reemplazamos la condición "para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es +invariante sobre subconjuntos abiertos bajo f_i y $f_i \in \mathcal{M}$" por "para todo $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, f_i es mezclante, y f_{i_0} es sobreyectiva, continua y transitiva (respectivamente, débilmente mezclante, totalmente transitiva o TT_{++})" (Teorema 4.8), "para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, f_i es mezclante y $\mathrm{Per}(f_i)$ es denso en X_i, y f_{i_0} es sobreyectiva, continua y caótica (respectivamente, un F-sistema)" (Teorema 4.9) y "para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, f_i es continua y mezclante, y $\mathrm{Per}(f_i)$ es denso en X_i, y f_{i_0} sobreyectiva, continua y Touhey" (Teorema 4.10). Más aún, exploramos las siguientes clases de funciones: AAN exactas, completamente exactas, AAN fuertemente transitivas, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas y fuertemente producto transitivas, obteniendo resultados análogos a los presentados en [**11**, Teorema 4.10].

Teorema 4.6. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sean $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ y f_{i_0} sobreyectiva, y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, sea f_i exacta. Si f_{i_0} es AAN fuertemente transitiva, fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN fuertemente transitiva, fuertemente transitiva, muy fuertemente transitiva, fuertemente exacta transitiva o fuertemente producto transitiva, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f_{i_0} es AAN fuertemente transitiva. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío U_i de X_i tal que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega$. Ya que para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, f_i es exacta, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^l(U_i) = X_i$, para cada $l \geqslant N_i$. Por hipótesis, $\bigcup_{k=1}^\infty f_{i_0}^k(U_{i_0}) = X_{i_0}$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}\}$. En consecuencia, $\bigcup_{k=1}^\infty f_{i_0}^{N+k}(U_{i_0}) = X_{i_0}$. Finalmente, si $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(U_{i_0})$, y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, $x_i \in f_i^{N+k_{i_0}}(U_i)$. De este modo, $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(U_i)$, esto es

$$(x_1, \ldots, x_m) \in \left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{N+k_{i_0}} (\mathcal{U}) \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty \left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^k (\Omega).$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es AAN fuertemente transitiva.

La prueba para la clase de las funciones muy fuertemente transitivas y fuertemente transitivas es similar a la dada para la clase de las funciones AAN fuertemente transitivas.

Supongamos que f_{i_0} es fuertemente exacta transitiva. Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Ya que para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, f_i es exacta, existen $N_i^1, N_i^2 \in \mathbb{N}$ tales que $f_i^{k_1}(U_i) = X_i$ y $f_i^{k_2}(V_i) = X_i$, para todo $k_1 \geqslant N_i^1$ y $k_2 \geqslant N_i^2$. Por hipótesis, $\bigcup_{k=1}^\infty (f_{i_0}^k(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^k(V_{i_0})) = X_{i_0}$. Sea $N = \max\{N_i^1, N_i^2 : i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}\}$. Notemos que $\bigcup_{k=1}^\infty (f_{i_0}^{N+k}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{N+k}(V_{i_0})) = X_{i_0}$. Sea $(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, existe $k_{i_0} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_0} \in f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(V_{i_0})$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, $x_i \in f_i^{N+k_{i_0}}(U_i) \cap f_i^{N+k_{i_0}}(V_i)$. En consecuencia,

$(x_1,\ldots,x_m)\in\prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(U_i)\cap\prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(V_i)$, es decir

$$(x_1,\ldots,x_m)\in\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{N+k_{i_0}}(\mathcal{U})\cap\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{N+k_{i_0}}(\mathcal{V}).$$

Esto implica que

$$(x_1,\ldots,x_m)\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^k(\Omega_1)\cap\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^k(\Omega_2)\right).$$

Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente exacta transitiva.

Supongamos que f_{i_0} es fuertemente producto transitiva. Así, $f_{i_0}^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva para todo $k\in\mathbb{Z}_+$. Además, por [**11**, Teorema 4.3], para cada $i\in\{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, $f_i^{\times k}$ es exacta. Por el primer párrafo de la prueba de este teorema, tenemos que $\prod_{i=1}^m f_i^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva, o bien, por el Teorema 3.8, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{\times k}$ es AAN fuertemente transitiva para cada $k\in\mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es fuertemente producto transitiva. $\square$

Teorema 4.7. *Para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$, sea (X_i,f_i) un sistema dinámico, sea f_{i_0} continua y exacta transitiva, para algún $i_0\in\{1,\ldots,m\}$, y para cada $i\in\{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$ sea f_i exacta. Se tiene que $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta transitiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U}=\prod_{i=1}^m U_i\subseteq\Omega_1$ y $\mathcal{V}=\prod_{i=1}^m V_i\subseteq\Omega_2$. Dado que para cada $i\in\{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, f_i es exacta, existen $N_i^1,N_i^2\in\mathbb{N}$ tales que $f_i^{k_1}(U_i)=X_i$, para cada $k_1\geqslant N_i^1$ y $f_i^{k_2}(V_i)=X_i$, para todo $k_2\geqslant N_i^2$. Por otro lado, puesto que f_{i_0} es exacta transitiva, $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f_{i_0}^k(U_{i_0})\cap f_{i_0}^k(V_{i_0}))$ es denso en X_{i_0}. Sea $N=\max\{N_i^1,N_i^2: i\in\{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}\}$. Como $f_{i_0}^N$ es continua, se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty}(f_{i_0}^{N+k}(U_{i_0})\cap f_{i_0}^{N+k}(V_{i_0}))$ es denso en X_{i_0}. Sea Ω_3 un subconjunto abierto no vacío de $\prod_{i=1}^m X_i$. De este modo, para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$, existe un subconjunto abierto no vacío W_i de X_i tal que $\mathcal{W}=\prod_{i=1}^m W_i\subseteq\Omega_3$. En consecuencia, existen $k_{i_0}\in\mathbb{N}$ y $x_{i_0}\in X_{i_0}$ tales que $x_{i_0}\in f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(U_{i_0})\cap f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(V_{i_0})\cap W_{i_0}$. Por otro lado, para cada $i\in\{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, $f_i^{N+k_{i_0}}(U_i)=X_i$ y $f_i^{N+k_{i_0}}(V_i)=X_i$. Finalmente, para todo $i\in\{1,\ldots,m\}\backslash\{i_0\}$, sea $x_i\in W_i$. Notemos que $(x_1,\ldots,x_m)\in(\prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(U_i))\cap(\prod_{i=1}^m f_i^{N+k_{i_0}}(V_i))$, es decir,

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_m)&\in\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{N+k_{i_0}}(\mathcal{U})\cap\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{N+k_{i_0}}(\mathcal{V})\right)\cap\mathcal{W}\\ &\subseteq\left(\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{N+k_{i_0}}(\Omega_1)\cap\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{N+k_{i_0}}(\Omega_2)\right)\cap\Omega_3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty}((\prod_{i=1}^m f_i)^k(\Omega_1)\cap(\prod_{i=1}^m f_i)^k(\Omega_2))$ es denso en $\prod_{i=1}^m X_i$ y así, $\prod_{i=1}^m f_i$ es exacta transitiva. $\square$

Teorema 4.8. *Para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sea f_{i_0} una función continua y sobreyectiva, para algún $i_0 \in \{1,\dots,m\}$, y para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$, sea f_i mezclante. Si f_{i_0} es transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva o TT_{++}, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva, débilmente mezclante, totalmente transitiva o TT_{++}, respectivamente.*

Demostración: Supongamos que f_{i_0} es transitiva. Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. Para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Dado que para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para todo $k \geqslant N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}\}$. Es claro que $f_{i_0}^N$ es sobreyectiva y continua, lo cual implica que $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})$ es un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0}. Por hipótesis, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}^l(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}) \neq \emptyset$. De aquí, $f_{i_0}^N(f_{i_0}^l(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})) = f_{i_0}^{N+l}(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$. Por otro lado, para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$, $f_i^{N+l}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Consecuentemente, existe $(x_1,\dots,x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i^{N+l}(U_i)) \cap \mathcal{V} = ((\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\mathcal{U})) \cap \mathcal{V}$ y así, $((\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\Omega_1)) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es transitiva.

Supongamos que f_{i_0} es débilmente mezclante. Sea Ω_1, Ω_2, Σ_1 y Σ_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i^1, U_i^2, V_i^1 y V_i^2 de X_i tales que $\mathcal{U}_1 = \prod_{i=1}^m U_i^1 \subseteq \Omega_1$, $\mathcal{U}_2 = \prod_{i=1}^m U_i^2 \subseteq \Omega_2$, $\mathcal{V}_1 = \prod_{i=1}^m V_i^1 \subseteq \Sigma_1$ y $\mathcal{V}_2 = \prod_{i=1}^m V_i^2 \subseteq \Sigma_2$. Puesto que para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$, f_i es mezclante, existen $N_i^1, N_i^2 \in \mathbb{N}$ tales que $f_i^{k_1}(U_i^1) \cap V_i^1 \neq \emptyset$ y $f_i^{k_2}(U_i^2) \cap V_i^2 \neq \emptyset$, para todo $k_1 \geqslant N_i^1$ y $k_2 \geqslant N_i^2$. Sea $N = \max\{N_i^1, N_i^2 : i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}\}$. Como $f_{i_0}^N$ es sobreyectiva y continua, se tiene que $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}^1)$ y $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}^2)$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X_{i_0}. Por hipótesis, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f_{i_0}^l(U_{i_0}^1) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}^1) \neq \emptyset$ y $f_{i_0}^l(U_{i_0}^2) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}^2) \neq \emptyset$. Esto implica que $f_{i_0}^{N+l}(U_{i_0}^1) \cap V_{i_0}^1 \neq \emptyset$ y $f_{i_0}^{N+l}(U_{i_0}^2) \cap V_{i_0}^2 \neq \emptyset$. Por otra parte, para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$, $f_i^{N+l}(U_i^1) \cap V_i^1 \neq \emptyset$ y $f_i^{N+l}(U_i^2) \cap V_i^2 \neq \emptyset$. Consecuentemente, existen $(x_1,\dots,x_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{V}_1$ y $(y_1,\dots,y_m) \in (\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{V}_2$ y así, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\Omega_1) \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$ y $(\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\Omega_2) \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es débilmente mezclante.

Supongamos que f_{i_0} es totalmente transitiva. Sean $s \in \mathbb{N}$, Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Dado que para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geqslant N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}\}$. Es claro que $f_{i_0}^{sN}$ es sobreyectiva y continua y así, $f_{i_0}^{-sN}(V_{i_0})$ es un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0}. Por hipótesis, puesto que $f_{i_0}^s$ es transitiva, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $(f_{i_0}^s)^l(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{-sN}(V_{i_0}) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $f_{i_0}^{sN+sl}(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$. Por otro lado, para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$, $f_i^{sN+sl}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Luego, existe

$$(x_1,\dots,x_m) \in \left(\prod_{i=1}^m f_i^{sN+sl}(U_i)\right) \cap \left(\prod_{i=1}^m V_i\right) = \left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^{sN+sl} (\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$$

y así, $((\prod_{i=1}^m f_i)^s)^{N+l}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Finalmente, $((\prod_{i=1}^m f_i)^s)^{N+l}(\Omega_1) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\left(\prod_{i=1}^m f_i\right)^s$ es transitiva y así, $\prod_{i=1}^m f_i$ es totalmente transitiva.

Supongamos que f_{i_0} es TT_{++}. Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Puesto que para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geqslant N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}\}$. Note que f_{i_0} es sobreyectiva y continua, lo cual implica que $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})$ es un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0}. Más aún, como f_{i_0} es TT_{++}, se tiene que $n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}))$ es infinito. Sea $l \in n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}))$. Se tiene que, $f_{i_0}^l(U_{i_0}) \cap f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $f_{i_0}^{N+l}(U_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$. Por otra parte, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, $f_i^{N+l}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$. De lo anterior, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{N+l}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y así, $N + l \in n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\Omega_1, \Omega_2)$. Finalmente, ya que $n_{f_{i_0}}(U_{i_0}, f_{i_0}^{-N}(V_{i_0}))$ es infinito, se tiene que $n_{\prod_{i=1}^m f_i}(\Omega_1, \Omega_2)$ es infinito. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es TT_{++}. □

Como una consecuencia de [**11**, Teorema 3.15] y del Teorema 4.8, se sigue el resultado siguiente.

Teorema 4.9. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sea f_{i_0} continua y sobreyectiva para algún $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, sea f_i mezclante y* $\mathrm{Per}(f_i)$ *denso en X_i. Si f_{i_0} es caótica o un F-sistema, entonces $\prod_{i=1}^m f_i$ es caótica o un F-sistema, respectivamente.*

Teorema 4.10. *Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico, sea f_{i_0} sobreyectiva, continua y Touhey para algún $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, y para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, sea f_i continua y mezclante y* $\mathrm{Per}(f_i)$ *denso en X_i. Se tiene que $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey.*

Demostración: Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos no vacíos de $\prod_{i=1}^m X_i$. De aquí, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subconjuntos abiertos no vacíos U_i y V_i de X_i tales que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^m U_i \subseteq \Omega_1$ y $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m V_i \subseteq \Omega_2$. Ya que para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, f_i es mezclante, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $k \geqslant N_i$. Sea $N = \max\{N_i : i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}\}$. Notemos que $f_{i_0}^N$ es sobreyectiva y continua, lo cual implica que $f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})$ es un subconjunto abierto no vacío de X_{i_0}. Por hipótesis, existe un punto periódico $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y $k_{i_0} \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f_{i_0}^{k_{i_0}}(x_{i_0}) \in f_{i_0}^{-N}(V_{i_0})$. Se sigue que, $f_{i_0}^{N+k_{i_0}}(x_{i_0}) \in V_{i_0}$. Por otra parte, para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, $f_i^{N+k_{i_0}}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ y así, $U_i \cap f_i^{-(N+k_{i_0})}(V_i)$ es un subconjunto abierto no vacío de X_i. Más aún, ya que para cada $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i_0\}$, $\mathrm{Per}(f_i)$ es denso en X_i, se tiene que, existe $x_i \in U_i \cap f_i^{-(N+k_{i_0})}(V_i)$ tal que $x_i \in \mathrm{Per}(f_i)$. Finalmente, $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega_1$, $(\prod_{i=1}^m f_i)^{N+k_{i_0}}((x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{V} \subseteq \Omega_2$ y por [**11**, Teorema 3.3], parte (4), $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto periódico de $\prod_{i=1}^m f_i$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^m f_i$ es Touhey. □

5. Conclusiones

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea (X_i, f_i) un sistema dinámico. En los teoremas 4.4 y 4.5, se verificó que si la función producto $\prod_{i=1}^m f_i$, pertenece a alguna de las siguientes clases de funciones: AAN exactas, completamente exactas, AAN fuertemente transitivas, muy fuertemente transitivas, exacta transitivas, fuertemente exacta transitivas o fuertemente producto transitivas, entonces, para cada

f_{i_0} +	f_i, para cada $i \in \{1,\dots,m\}\backslash\{i_0\}$ $\Rightarrow$	$\prod_{i=1}^{m} f_i$
AAN exacta	AAN exacta	AAN exacta Teorema 4.4
AAN fuertemente transitiva y sobreyectiva	exacta	AAN fuertemente transitiva Teorema 4.6
fuertemente transitiva y sobreyectiva	exacta	fuertemente transitiva Teorema 4.6
muy fuertemente transitiva y sobreyectiva	exacta	muy fuertemente transitiva Teorema 4.6
fuertemente exacta transitiva y sobreyectiva	exacta	fuertemente exacta transitiva Teorema 4.6
fuertemente producto transitiva y sobreyectiva	exacta	fuertemente producto transitiva Teorema 4.6
exacta transitiva y continua	exacta	exacta transitiva Teorema 4.7
transitiva, continua y sobreyectiva	mezclante	transitiva Teorema 4.8
débilmente mezclante, continua y sobreyectiva	mezclante	débilmente mezclante Teorema 4.8
totalmente transitiva, continua y sobreyectiva	mezclante	totalmente transitiva Teorema 4.8
TT_{++}, continua y sobreyectiva	mezclante	TT_{++} Teorema 4.8
caótica, continua y sobreyectiva	mezclante y $\text{Per}(f_i)$ denso en X_i	caótica Teorema 4.9
un F-sistema, continua y sobreyectiva	mezclante y $\text{Per}(f_i)$ denso en X_i	un F-sistema Teorema 4.9
Touhey, continua y sobreyectiva	continua y mezclante y $\text{Per}(f_i)$ denso en X_i	Touhey Teorema 4.10

FIGURA 3. Resúmen de resultados

$i \in \{1,\dots,m\}$, f_i pertenece a la misma clase. Más aún, para el caso de la clase de las funciones AAN exactas, el recíproco es verdadero (Teorema 4.4).

Para el resto de clases no fue posible demostrar la contrarrecíproca, sin embargo, al pedir más propiedades a las funciones, es posible establecer otras relaciones entre clases. En el cuadro de la Figura 3, hemos resumido dichos resultados.

Agradecimientos: Los autores agradecemos al revisor o a la revisora el tiempo dedicado a la lectura de este escrito y sus valiosas recomendaciones que sin duda alguna, mejoraron la presentación de este capítulo.

Bibliografía

[1] E. Akin, J. D. Carlson, *Conceptions of topological transitivity,* Topology Appl. **159(12)** (2012), 2815–2830.

[2] E. Akin, J. Auslander and A. Nagar, *Variations on the concept of topological transitivity,* Studia Math. **235(3)** (2016), 225–249.

[3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos,* Amer. Math. Monthly, **99(4)** (1992), 332–334.

[4] F. Barragán y A. Rojas, *Propiedades dinámicas en productos.* Capítulo 8 en Topología y sus Aplicaciones 8. Editores: Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras y Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, BUAP, Manuales y Textos, 2021.

[5] E. Bilokopytov and S. F. Kolyada, *Transitive maps on topological spaces,* Ukr. Math. J. **65(9)** (2014), 1293–1318.

[6] C. R. Borges, Elementary Topology and Applications, World Scientific, Singapore, 2000.

[7] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[8] J. H. Mai and W. H. Sun, *Transitivities of maps of general topological spaces,* Topology Appl. **157(5)** (2010), 946–953.

[9] A. Rojas, A. L. Kantún-Montiel, J. N. Méndez-Alcocer y V. M. Méndez-Salinas, *Más nociones relacionadas con la transitividad topológica.* Capítulo 6 en Topología y sus Aplicaciones 9. Editores: Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Raúl Escobedo Conde y María de Jesús López Toriz. Dirección General de Publicaciones, BUAP, Manuales y Textos, 2023.

[10] A. Rojas, A. L. Kantún, J. N. Méndez y V. M. Méndez, *Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products II,* Glas. Mat. **59(79)** (2024), 147–169.

[11] A. Rojas, F. Barragán and S. Macías, *Conceptions on topological transitivity in products and symmetric products,* Turk. J. Math. **44(2)** (2020), 491–523.

[12] P. Touhey, *Yet another definition of chaos,* Am. Math. Mon. **104(5)** (1997), 411–414.

Correo electrónico:

arojas@unpa.edu.mx (Anahí Rojas),
alkantun@unpa.edu.mx (Aura L. Kantún Montiel),
jmendez@unpa.edu.mx (José N. Méndez Alcocer),
vmendez@unpa.edu.mx (Víctor M. Méndez Salinas).

CAPÍTULO 10

Ejemplos de continuos semi-Kelley

María de Jesús López Toriz, Ivón Vidal Escobar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

1. Introducción

En 1998, J. J. Charatonik y W. J. Charatonik definieron la propiedad de semi-Kelley en continuos (un *continuo* es un espacio métrico con más de un punto, compacto y conexo), véase Definición 3.3. La propiedad de semi-Kelley es, de hecho, una propiedad más débil que la propiedad de Kelley, la cual fue introducida por J. L. Kelley en 1942, en [**12**, Propiedad 3.2, pág. 26]. J. J. Charatonik y W. J. Charatonik probaron que todo continuo con la propiedad de Kelley tiene la propiedad de semi-Kelley (véase Corolario 3.4), y que el recíproco de esto no se cumple (véase Ejemplo 3.7).

En el año 2013, en el taller anual de investigación en Hiperespacios y Teoría de Continuos, Alejandro Illanes plateó el siguiente problema:

¿Existe un continuo X con la propiedad de semi-Kelley tal que $X \times [0, 1]$ no tiene la propiedad de semi-Kelley?

Este problema propició el interés de investigadores mexicanos por los continuos con la propiedad de semi-Kelley. El lector puede consultar los siguientes artículos referentes al tema: [**1**], [**2**], [**3**], [**8**], [**10**] y [**16**].

La idea de este capítulo es mostrar ejemplos de continuos con la propiedad de semi-Kelley y sin esta propiedad.

2. Preliminares

Sea (X, d) un *continuo*, es decir, un espacio métrico con más de un punto, compacto y conexo, se considera la colección de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X, denotada y definida por

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

dotada con la *métrica de Hausdorff*, la cual definimos a continuación: para $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, la *nube* de radio ε alrededor de A, la cual denotamos y definimos por

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Ahora, definimos la función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ por

$$H(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\},$$

para cada $A, B \in 2^X$. En [**11**, Teorema 2.2] se prueba que H es una métrica para 2^X. Así, a la colección 2^X equipada con esta métrica se conoce como el *hiperespacio de cerrados* de X.

Otro hiperespacio muy conocido es

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$$

considerado como subespacio de 2^X, el cual se conoce como el *hiperespacio de subcontinuos* de X. Es conocido que si X es un continuo, entonces 2^X también es un continuo, este hecho está probado en [**14**, Teorema (1.13)]. Sobre los hiperespacios 2^X y $C(X)$ se conocen muchas propiedades básicas, para un recuento véase [**11**] y [**14**].

En 1942, J. L. Kelley introduce el concepto de *propiedad de Kelley* para continuos, originalmente era conocida como *propiedad 3.2*, [**12**, pág. 26], que a continuación enunciamos:

Definición 2.1. *Sea X un continuo con métrica d, diremos que X tiene la* propiedad de Kelley *si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$, si $d(x, y) < \delta$ entonces para todo subcontinuo K de X con $x \in K$, existe un subcontinuo L de X tal que $y \in L$ y $H(K, L) < \varepsilon$.*

En 1977, R. W. Wardle en [**17**, II, págs. 291–292] considera la definición de la propiedad de Kelley de manera puntual, esto es:

Definición 2.2. *Sean X un continuo y un punto $a \in X$, diremos que X tiene la* propiedad de Kelley en *x si para cada subcontinuo K de X con $x \in K$ y para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto x, existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converge a K tal que $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Un continuo tiene la propiedad de Kelley si el continuo tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos.*

Un continuo X es *localmente conexo en punto $p \in X$* si para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, existe V un subconjunto abierto conexo de X tal que $p \in V \subset U$. En [**7**, Corolario 38, pág. 129] muestran que si X es un continuo X localmente conexo en punto $p \in X$, entonces X tiene la propiedad de Kelley en p. En [**13**] se proporciona una demostración con todos los detalles de este resultado.

3. Continuos semi-Kelley

En 1998, J. J. Charatonik y W. J. Charatonik introducen el concepto *semi-Kelley* para continuos [**6**, Definición 3.16], para esto definen el siguiente concepto auxiliar, el cual esta involucrado en la definición de semi-Kelley y juega un papel importante en la investigación de continuos semi-Kelley.

Definición 3.1. *Sea K un subcontinuo de un continuo X. Un subcontinuo $M \subset K$ se llama* continuo límite maximal de *K si existe una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a M tal que, para cada sucesión $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de X, con $M_n \subset M'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, si $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $M' \in C(K)$, entonces $M' = M$.*

El siguiente resultado relaciona el concepto de continuo limite maximal con continuos con la propiedad de Kelley.

Teorema 3.2. [**6**, Teorema 3.11] *Si X es un continuo, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) *X tiene la propiedad de Kelley.*
(2) *Para cada subcontinuo K de X, se tiene que K es el único continuo límite maximal de K.*

La definición de J. J. Charatonik y W. J. Charatonik de un continuo *semi-Kelley* es la siguiente:

Definición 3.3. *Un continuo X tiene la* propiedad de semi-Kelley*, o bien X es un continuo* semi-Kelley*, si para cada subcontinuo K de X, se tiene que si M y L son continuos límite maximal de K, entonces $M \subset L$ o bien $L \subset M$.*

Como corolario al Teorema 3.2 obtenemos que todo continuo con la propiedad de Kelley, tiene la propiedad de semi-Kelley.

Corolario 3.4. *Si X es un continuo con la propiedad de Kelley, entonces X tiene la propiedad de semi-Kelley.*

El Ejemplo 3.7 muestra que el recíproco del Corolario 3.4 no se cumple.

En 2024, M. Chacón-Tirado, M. de J. López e I. Vidal-Escobar en [**4**, Teorema 2.1] presentan una equivalencia a la propiedad de semi-Kelley; la cual nos permite verificar de manera más sencilla que un continuo tenga esta propiedad. Para dar esta equivalencia necesitamos la siguiente definición:

Un continuo X es *irreducible entre p y q* si $p, q \in X$ y ningún subcontinuo propio de X contiene a los puntos p y q. Se dice que X es *irreducible* si existen puntos p y q en X tales que X es irreducible entre p y q. Dados un continuo X y puntos $p, q \in X$, existe un subcontinuo de X el cual es irreducible entre p y q; así cualquier continuo no degenerado (es decir, un continuo con más de un punto) contiene un continuo no degenerado irreducible [**15**, 4.35 (b)].

El siguiente resultado es la equivalencia de continuo semi- Kelley que M. Chacón-Tirado, M. de J. López e I. Vidal-Escobar en [**4**, Teorema 2.1] presentan. En [**5**, Teorema 4.3] se proporciona una demostración con todos los detalles de este resultado.

Teorema 3.5. *Sea X un continuo. Se tiene que X es semi-Kelley si y sólo si para cada $x, y \in X$, para cada $I \in C(X)$ irreducible entre los puntos x y y, y para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto a existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o para cada sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto y existe una sucesión $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $y_n \in L_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Observación 3.6. *Sea X un continuo. Para probar que X tiene la propiedad de semi-Kelley usando la equivalencia del Teorema 3.5 basta considerar los puntos $x, y \in X$ como puntos de no conexidad local.*
En efecto. Dados $x, y \in X$ y $I \in C(X)$ irreducible entre los puntos x y y. Si x es un punto de conexidad local de X, por [**7**, Corolario 38, pág. 129] *X tiene la propiedad de Kelley en el punto x, luego por la Definición 2.2 tenemos que para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto x existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

en $C(X)$ que converge a I tal que $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Lo último es la condición deseada en la equivalencia del Teorema 3.5. Por tal si x o y son puntos de conexidad local se obtiene la condición de la equivalencia del Teorema 3.5, luego basta considerar los puntos $x, y \in X$ como puntos de no conexidad local para probar que X tiene la propiedad de semi-Kelley.

Dados dos puntos distintos en el plano Cartesiano, digamos $a, b \in \mathbb{R}^2$, vamos a denotar el segmento de recta con puntos extremos a y b por ab.

Ejemplo 3.7. *Sean $a = (0,0)$, $b = (1,0)$, $c = (2,0)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $b_n = (1, \frac{1}{n})$. Definamos $X = ac \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} ab_n)$ (ver Figura 1). El continuo X es conocido como abanico armónico con pata límite alargada.*

Vamos a probar que el continuo X no tiene la propiedad de Kelley y sí tiene la propiedad de semi-Kelley.

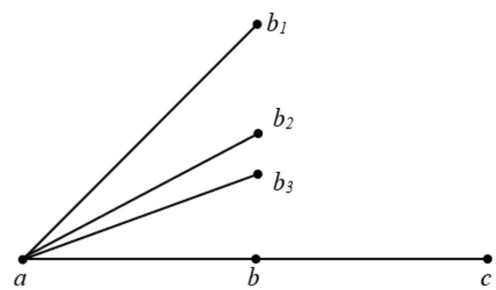


FIGURA 1. Abanico armónico con pata límite alargada

En efecto. Vamos a probar que X no tiene la propiedad de Kelley en el punto b. Para esto consideremos la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en X la cual converge al punto b y el continuo $K = bc$. Es claro que no existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converja a K tal que $b_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, X no tiene la propiedad de Kelley en el punto b.

Por otro lado, en [**5**, Ejemplo 2.7, pág. 134] se muestra que si $d = (\frac{1}{2}, 0)$, $M = db$ y $K = dc$, entonces M es un subcontinuo límite maximal de K. De hecho, no es fácil verificar que X es un continuo semi-Kelley con la Definición 3.3. Usando el Teorema 3.5 y la Observación 3.6 la prueba de este hecho es más sencilla de verificar. Notemos que los puntos de no conexidad local de X son los que pertenencen a $ab \setminus \{a\}$. Sean $x, y \in ab \setminus \{a\}$ puntos cualesquiera y I un continuo irreducible entre los puntos x e y, sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X convergentes a x e y, respectivamente. Note que $I \subset ab$. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in ab$ para cada $n \geqslant N$, definimos $I_n = \{x_n\}$ si $n < N$ y $I_n = x_n y$ para cada $n \geqslant N$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I. Similarmente si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in ab$ para cada $n \geqslant N$. Sean $n_1 < n_2 < \cdots$ en $\mathbb{N}$, tales que $x_{n_i} \notin ab$, sin perder generalidad, supongamos que $x_{n_i} \in ab_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in ab_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco ab es y. Definimos $I_n = x_n y$ si $n \notin \{n_1, n_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Por lo tanto, el continuo abanico armónico con pata límite alargada tiene la propiedad de semi-Kelley.

Ejemplo 3.8. *Sean $a = (0,0)$, $b = (1,0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $b_n = (1, \frac{1}{n})$ y $a_n = (0, -\frac{1}{n})$. Definamos $X = ab \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} ab_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} ba_n)$ (ver Figura 2). El continuo X es conocido como doble abanico armónico.*

Vamos a probar que el continuo X tiene la propiedad de semi-Kelley.

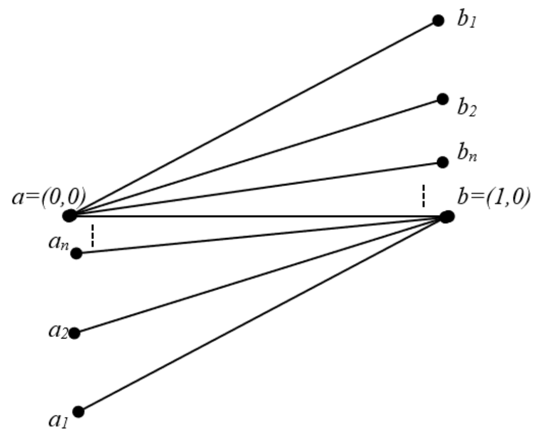


FIGURA 2. continuo doble abanico armónico

En efecto. Vamos a usar la equivalencia del Teorema 3.5 y la Observación 3.6 para probar que el continuo X tiene la propiedad de semi-Kelley. Notemos que los puntos de no conexidad local de X son los que pertenencen a ab. Sean $x, y \in ab$ puntos cualesquiera y I un continuo irreducible entre los puntos x e y, sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X convergentes a x e y, respectivamente.

Note que $I \subset ab$. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in ab$ para cada $n \geqslant N$, definimos $I_n = \{x_n\}$ si $n < N$ y $I_n = x_n y$ para cada $n \geqslant N$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I. Similarmente, si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in ab$ para cada $n \geqslant N$. Sean $n_1 < n_2 < \cdots$ en $\mathbb{N}$ tales que $x_{n_i} \notin ab$, sin perder generalidad, supongamos que $x_{n_i} \in ab_{n_i}$ (similarmente si $x_{n_i} \in ba_{n_i}$), sea $y'_{n_i} \in ab_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco ab es y. Definimos $I_n = x_n y$ si $n \notin \{n_1, n_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Por lo tanto, el continuo doble abanico armónico tiene la propiedad de semi-Kelley.

Ejemplo 3.9. *Sean $u = (0,0)$, $a = (1,0)$, $b = (2,0)$, $v = (3,0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n = (1, \frac{1}{n})$ y $b_n = (2, \frac{1}{n})$. Definamos $X = uv \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} ua_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} vb_n)$ (ver Figura 3). Vamos a probar que el continuo X no tiene la propiedad de semi-Kelley.*

En efecto. Vamos a usar la equivalencia del Teorema 3.5 para probar que el continuo X no tiene la propiedad de semi-Kelley. Para esto consideremos los puntos $a, b \in X$ y I el continuo irreducible entre los puntos a y b. Las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X son sucesiones convergente a a y b, respectivamente. Es claro que no existe una sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in I_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o $b_n \in I_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, X no tiene la propiedad de semi-Kelley.

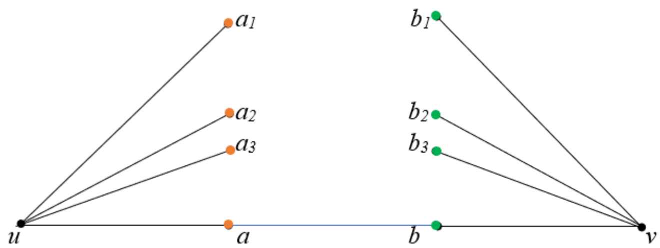


FIGURA 3. X

En los siguientes ejemplos no daremos una descripción algebráica de los puntos que forman el continuo, nos basaremos en la descripción del continuo dada por su figura. El siguiente ejemplo es un continuo, no arco conexo, que no tiene la propiedad de semi-Kelley.

Ejemplo 3.10. *Consideremos X el continuo de la Figura 4, el cual es una compactación del intervalo $(0,1]$ con residuo arco. Vamos a probar que el continuo X no tiene la propiedad de semi-Kelley.*

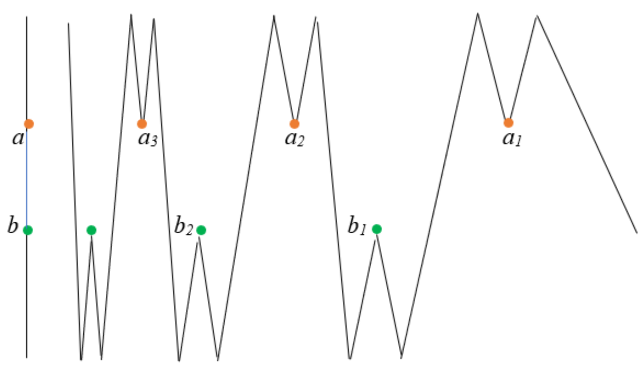


FIGURA 4. X

En efecto. Vamos a usar la equivalencia del Teorema 3.5 para probar que el continuo X no tiene la propiedad de semi-Kelley. Para esto consideremos $a, b \in X$ como en la Figura 4. Sea I el continuo irreducible entre los puntos a y b, sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X convergentes a los puntos a y b, respectivamente, como se muestran en la Figura 4. Es claro que no existe una sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in I_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o $b_n \in I_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual, X no tiene la propiedad de semi-Kelley.

El siguiente ejemplo es un continuo que no tiene la propiedad de semi-Kelley.

Ejemplo 3.11. *Consideremos X el continuo de la Figura 5. Como se ilustra en la Figura 5 la sucesión de arcos $\{vc_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al tríodo simple $wu \cup vc$. Vamos a probar que el continuo X no tiene la propiedad de semi-Kelley.*

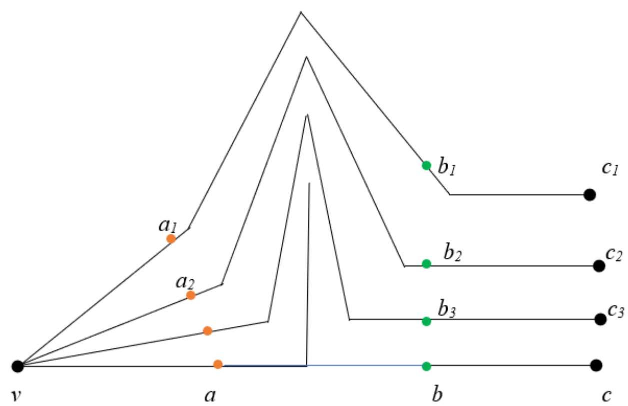


FIGURA 5. X

En efecto. Vamos a usar la equivalencia del Teorema 3.5 para probar que el continuo X no tiene la propiedad de semi-Kelley. Para esto consideremos $a, b \in X$ como en la Figura 5. Sea I el continuo irreducible entre los puntos a y b, sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X convergentes a los puntos a y b, respectivamente, como se muestran en la Figura 5. Note que no existe una sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a I tal que $a_n \in I_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o $b_n \in I_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, X no tiene la propiedad de semi-Kelley.

El continuo del siguiente ejemplo contiene al continuo del Ejemplo 3.11 y tiene la propiedad de semi-Kelley, este continuo está construido en $\mathbb{R}^3$ y satisface que los arcos en color azul no intersectan a los arcos en color negro (véase la Figura 6). Dados dos puntos distintos en el el espacio Euclidiano, digamos $a, b \in \mathbb{R}^3$, vamos a denotar el segmento de recta con puntos extremos a y b por ab.

Ejemplo 3.12. *Consideremos X el continuo de la Figura 6. Como se ilustra en la Figura 6 la sucesión de arcos $\{vc_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al tríodo simple $wu \cup vc$ y la sucesión de arcos $\{v_n u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al arco vu. Vamos a probar que el continuo X tiene la propiedad de semi-Kelley.*

*En efecto.*Vamos a usar la equivalencia del Teorema 3.5 y la Observación 3.6 para probar que el continuo X tiene la propiedad de semi-Kelley. Notemos que los puntos de no conexidad local de X son los que pertenencen a $vc \cup uw \setminus \{v\}$. Sean $x, y \in vc \cup uw \setminus \{v\}$ puntos cualesquiera y I un continuo irreducible entre los puntos x y y, sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X convergentes a x e y, respectivamente.

Note que $I \subset vc \cup uw$. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in vc \cup uw$ para cada $n \geqslant N$, definimos $I_n = \{x_n\}$ si $n < N$ y $I_n = x_n y$ para cada $n \geqslant N$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I. Similarmente si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in vc \cup uw$ para cada $n \geqslant N$. Sean $n_1 < n_2 < \dots$ en $\mathbb{N}$ tales que $x_{n_i} \notin vc \cup uw$, sin perdida de generalidad, supongamos $x_{n_i} \in vc_{n_i} \cup c_{n_i} v_{n_i}$, y sean $m_1 < m_2 < \dots$ en $\mathbb{N}$ tales que $y_{m_i} \notin vc \cup uw$, sin perdida de generalidad, supongamos $y_{m_i} \in vc_{m_i} \cup c_{m_i} v_{m_i}$. Vamos a considerar los siguientes casos:

Caso i. Suponga que $x, y \in vu$.

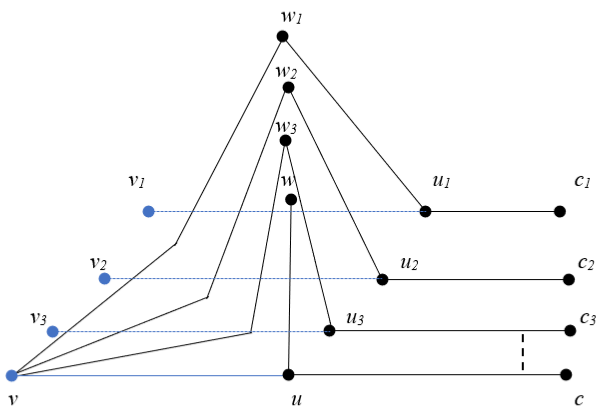


FIGURA 6. X

Supongamos que $x \in vy$. Sin perdida de generalidad supongamos que $x_{n_i} \in vw_{n_i}$ o $x_{n_i} \in v_{n_i}c_{n_i}$, si $x_{n_i} \in vw_{n_i}$ sea $y'_{n_i} \in vw_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco vu es y y si $x_{n_i} \in v_{n_i}c_{n_i}$ sea $y'_{n_i} \in v_{n_i}c_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco vu es y. Definimos $I_n = x_n y$ si $n \notin \{n_1, n_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso ii. Suponga que $x, y \in uw$.

Supongamos que $x \in wy$. Sin perdida de generalidad supongamos que $x_{n_i} \in vw_{n_i}$ o $x_{n_i} \in w_{n_i}u_{n_i}$, si $x_{n_i} \in vw_{n_i}$ sea $y'_{n_i} \in vw_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco uw es y y si $x_{n_i} \in w_{n_i}u_{n_i}$ sea $y'_{n_i} \in w_{n_i}u_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco uw es y. Definimos $I_n = x_n y$ si $n \notin \{n_1, n_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso iii. Suponga que $x, y \in uc$.

Supongamos que $x \in yc$. Sin perdida de generalidad supongamos que $x_{n_i} \in u_{n_i}c_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in u_{n_i}c_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco uc es y. Definimos $I_n = x_n y$ si $n \notin \{n_1, n_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso iv. Suponga que $x \in vu$ y $y \in uc \setminus \{u\}$.

Sin perdida de generalidad supongamos que $y_{m_i} \in u_{m_i}c_{m_i}$, sea $x'_{n_i} \in v_{m_i}c_{m_i}$ tal que la proyección natural de x'_{n_i} en el arco vu es x. Definimos $I_n = xy_n$ si $n \notin \{m_1, m_2, \dots\}$ y $I_n = x'_n y_n$ si $n \in \{m_1, m_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso v. Suponga que $x \in uw$ y $y \in uc \setminus \{u\}$.

Sin perdida de generalidad supongamos que $y_{m_i} \in u_{n_i}c_{n_i}$, sea $x'_{n_i} \in w_{n_i}c_{n_i}$ tal que la proyección natural de x'_{n_i} en el arco vu es x. Definimos $I_n = xy_n$ si $n \notin \{m_1, m_2, \dots\}$ y $I_n = x'_n y_n$ si $n \in \{m_1, m_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso vi. Suponga que $x \in vu \setminus \{u\}$ y $y \in uw$.

Sin perdida de generalidad supongamos que $x_{n_i} \in vw_{n_i}$ o $x_{n_i} \in v_{n_i}c_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in vw_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco uw es y y si $x_{n_i} \in v_{n_i}c_{n_i}$ sea $y'_{n_i} \in w_{n_i}c_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco uw es y. Definimos

$I_n = x_n y$ si $n \notin \{n_1, n_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I.

De los casos $i - vi$ concluimos que el continuo X tiene la propiedad de semi-Kelley.

Un continuo X es *hereditariamente semi-Kelley* si cada subcontinuo de X tiene la propiedad de semi-Kelley. Puesto que el continuo del Ejemplo 3.12 contiene al continuo del Ejemplo 3.11 y este último no tiene la propiedad de semi-Kelley, el continuo del Ejemplo 3.12 no es hereditariamente semi-Kelley. El siguiente ejemplo es un continuo hereditariamente semi-Kelley.

Ejemplo 3.13. *Consideremos X el continuo de la Figura 7. Como se ilustra en la figura las sucesiones $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a v, las sucesiones $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a e y la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a. Vamos a probar que el continuo X tiene la propiedad de semi-Kelley.*

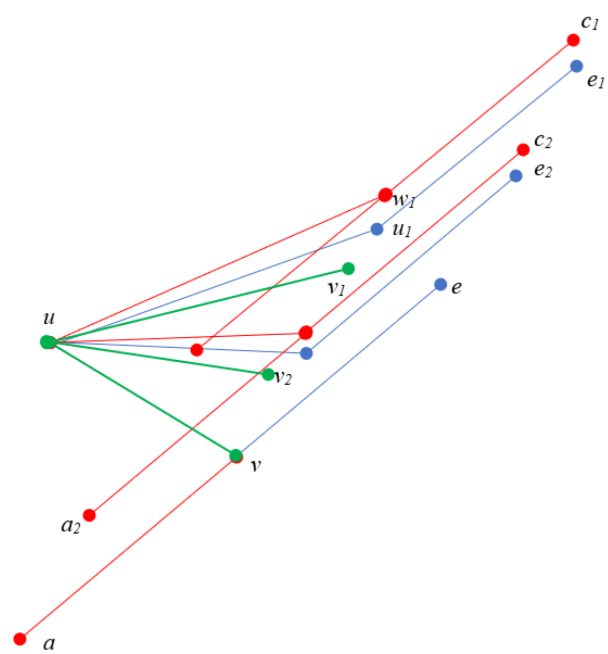


FIGURA 7. X

En efecto. Vamos a usar la equivalencia del Teorema 3.5 y la Observaciń 3.6 para probar que el continuo X tiene la propiedad de semi-Kelley. Notemos que los puntos de no conexidad local de X son los que pertenencen a $uv \cup ae \setminus \{u\}$. Sean $x, y \in uv \cup ae \setminus \{u\}$ puntos cualesquiera y I un continuo irreducible entre los puntos x e y, sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X convergente a x e y, respectivamente.

Note que $I \subset uv \cup ae$. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in uv \cup ae$ para cada $n \geqslant N$, definimos $I_n = \{x_n\}$ si $n < N$ y $I_n = x_n y$ para cada $n \geqslant N$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al continuo I. Similarmente si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in uv \cup ae$ para cada $n \geqslant N$. Sean $n_1 < n_2 < \dots$ en $\mathbb{N}$ tales que $x_{n_i} \notin uv \cup ae$, y $m_1 < m_2 < \dots$ en $\mathbb{N}$ tales que $y_{m_i} \notin uv \cup ae$. Vamos a considerar los siguientes casos:

Caso i. Suponga que $x, y \in uv \setminus \{u\}$.

Supongamos que $x \in uy \setminus \{u\}$. Sin perdida de generalidad supongamos que $x_{n_i} \in uv_{n_i}$ o $x_{n_i} \in uu_{n_i}$ o $x_{n_i} \in uw_{n_i}$. Si $x_{n_i} \in uv_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in uv_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco uv es y, si $x_{n_i} \in uu_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in uu_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco uv es y, si $x_{n_i} \in uw_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in uw_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco vu es y. Definimos $I_n = x_n y$ si $n \notin \{n_1, n_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso ii. Suponga que $x, y \in ve$.

Supongamos que $x \in ye$. Sin perdida de generalidad supongamos que $x_{n_i} \in w_{n_i} c_{n_i}$ o $x_{n_i} \in u_{n_i} e_{n_i}$. Si $x_{n_i} \in w_{n_i} c_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in w_{n_i} c_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco ve es y, si $x_{n_i} \in uu_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in u_{n_i} e_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco ve es y. Definimos $I_n = x_n y$ si $n \notin \{n_1, n_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso iii. Suponga que $x, y \in av$.

Supongamos que $x \in ay$. Sin perdida de generalidad supongamos que $x_{n_i} \in a_{n_i} w_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in a_{n_i} w_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco vu es y. Definimos $I_n = x_n y$ si $n \notin \{n_1, n_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso iv. Suponga que $x \in uv$ y $y \in ve \setminus \{v\}$.

Sin perdida de generalidad supongamos que $y_{m_i} \in ue_{n_i}$ o $y_{m_i} \in uc_{n_i}$. Si $y_{m_i} \in ue_{n_i}$ sea $x'_{n_i} \in ue_{n_i}$ tal que la proyección natural de x'_{n_i} en el arco uv es x, si $y_{m_i} \in uc_{n_i}$, sea $x'_{n_i} \in uc_{n_i}$ tal que la proyección natural de x'_{n_i} en el arco uv es x. Definimos $I_n = xy_n$ si $n \notin \{m_1, m_2, \dots\}$ y $I_n = x'_n y_n$ si $n \in \{m_1, m_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso v. Suponga que $x \in uv \setminus \{u\}$ y $y \in av \setminus \{v\}$.

Sin perdida de generalidad supongamos que $y_{m_i} \in ua_{n_i}$, sea $x'_{n_i} \in ua_{n_i}$ tal que la proyección natural de x'_{n_i} en el arco uv es x. Definimos $I_n = xy_n$ si $n \notin \{m_1, m_2, \dots\}$ y $I_n = x'_n y_n$ si $n \in \{m_1, m_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al continuo I.

Caso vi. Suponga que $x \in av \setminus \{v\}$ y $y \in ve$.

Sin perdida de generalidad supongamos que $x_{m_i} \in ua_{n_i}$, sea $y'_{n_i} \in a_{n_i} c_{n_i}$ tal que la proyección natural de y'_{n_i} en el arco $a_{n_i} c_{n_i}$ es y. Definimos $I_n = xy_n$ si $n \notin \{m_1, m_2, \dots\}$ y $I_n = x_n y'_n$ si $n \in \{m_1, m_2, \dots\}$. Note que la sucesión $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al continuo I.

De los casos $i - vi$ concluimos que el continuo X tiene la propiedad de semi-Kelley. Siguiendo las mismas ideas de esta prueba, se puede probar que cualquier subcontinuo de X tiene la propiedad de semi-Kelley y por tanto X es un continuo hereditariamente semi-Kelley.

Concluimos que el Teorema 3.5 y la Observación 3.6 son muy utiles para probar que un continuo tiene la propiedad de semi-Kelley. De este modo los lectores jóvenes pueden verificar fácilmente qué continuos satisfacen la propiedad de semi-Kelley y así, realizar una investigación en este tema.

Agradecimientos: Una parte esencial para la publicación de este libro es, sin duda, la labor invaluable de las(os) árbitras(os). Las autoras le agradecen su valioso tiempo, trabajo y sus comentarios, para que nuestros queridos lectores disfruten del contenido de este capítulo.

La segunda autora agradece al CONAHCYT por el apoyo en el programa Estancias Posdoctorales por México Convocatoria 2023(1).

Bibliografía

[1] I. D. Calderón-Camacho, E. Castañeda-Alvarado, C. Islas-Moreno, D. Maya-Escudero and F. J. Ruiz-Montañez. *Being semi-Kelley does not imply semi-smoothness*, Questions Answers Gen. Topology 32 (2014), 73–77.

[2] E. Castañeda-Alvarado and I. Vidal-Escobar. *Property of being semi-Kelley for the cartesian products and hyperspaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 58 (2017), 359–369.

[3] M. Chacón-Tirado, D. Embarcadero-Ruiz, J. A. Naranjo-Murillo and I. Vidal-Escobar. *Semi-Kelley compactifications of (0, 1]*, Colloq. Math. 168 (2022), no. 2, 325–340.

[4] M. Chacón-Tirado, M. de J. López, I. Vidal-Escobar. *A property equivalent to being semi-Kelley*, Topology Appl. 350 (2024), 108901.

[5] M. Chacón-Tirado, M. de J. López Toriz, I. Vidal-Escobar. *Equivalencias de Kelley y semi-Kelley en continuos.* Capítulo 9 en Topología y sus aplicaciones 10. Editores: J. Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Raúl Escobedo Conde, María de Jesús López Toriz. Dirección General de Publicaciones, Manuales y textos, BUAP, 2024.

[6] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik. *A weaker form of the property of Kelley*, Topology Proc. 23, (1998), 69–99.

[7] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik. *Smoothness and the property of Kelley*, Commet. Math. Univ. Caroline, 41 (2000), 123–132.

[8] L. Fernández, I. Puga. *On semi-Kelley continua*, Houston J. Math. 45 (2019), No. 1, 307–315.

[9] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[10] A. Illanes, *Semi-Kelley continua*, Colloq. Math. 163 (2021), No. 1, 53–69.

[11] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[12] J. L. Kelley. *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52, (1942), 22–36.

[13] A. Y. Munive Mena. *Suavidad y la Propiedad de Kelley.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemerita Universidad Autónoma de Puebla, 2024.

[14] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978. Reprinted in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.

[15] S. B. Nadler, Jr. *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[16] A. Santiago-Santos and I. Vidal-Escobar. *Property of being semi-Kelley is a sequentially strong Whitney reversible property*, Topology Appl. 224 (2018) 153–158.

[17] R. W. Wardle. *On a property of J. L. Kelley*, Houston J. Math. vol. 3, no. 2, (1977), 291–299.

Correos electrónicos:
`mjlopez@fcfm.buap.mx` (María de Jesús López Toriz),
`pvidal@fcfm.buap.mx`, `piveavis@hotmail.com` (Ivón Vidal Escobar)

CAPÍTULO 11

Fundamentos topológicos en el análisis de complejidad de algoritmos

Netzahualcóyotl Castañeda Roldán[1]
Raúl Escobedo Conde
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México
José Margarito Hernández Morales[2]
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapan de León, México

1. Introducción

Un algoritmo es un procedimiento sistemático predefinido que resuelve una determinada tarea paso a paso. Los algoritmos se encuentran en casi todos los ámbitos de la vida cotidiana; sin embargo es en la informática y los programas de software en donde su aplicación alcanza una mayor relevancia. Algunos ejemplos conocidos son: el algoritmo de búsqueda secuencial de un elemento en un conjunto de datos, los algoritmos de ordenación, el algoritmo de un navegador que determina la clasificación de los resultados de las búsquedas, así como los algoritmos utilizados por las agencias de noticias, etc. Ahora, para realizar una tarea, en la mayoría de las ocasiones ésta se puede hacer de varias maneras, y para cada una de ellas se puede implementar un algoritmo, de tal forma que puede haber varios algoritmos que realizan una misma tarea. De este modo surge la pregunta: ¿Cuál algoritmo es el más conveniente? La respuesta a esta pregunta es dada mediante lo que se conoce como la complejidad de algoritmos.

La complejidad algorítmica representa la cantidad de recursos, ya sea temporales o espaciales, que necesita un algoritmo para resolver un problema y que por tanto permite determinar el grado de eficiencia y conveniencia de dicho algoritmo.

[1]Este autor recibió apoyo del CONAHCYT mediante una estancia posdoctoral.
[2]Este autor recibió apoyo del CONAHCYT mediante una beca sabática.

En la mayoría de los trabajos sobre complejidad de algoritmos se considera la complejidad temporal y este trabajo no es la excepción. El tiempo empleado por un algoritmo se mide por la cantidad de pasos o acciones que éste utiliza para realizar la tarea en cuestión, considerando que la medida del tiempo debe ser independiente de la máquina, del lenguaje de programación, el compilador y de cualquier otro elemento, ya sea de software o de hardware, que influya en el análisis. Para conseguir esta independencia, la medida abstracta consiste en considerar el número de pasos que se efectúan al ejecutarse el algoritmo. Es claro que este tiempo por lo general depende de n, el tamaño de los datos que se consideran, y al procesar un gran número de datos, lo que importa para la eficiencia es el comportamiento asintótico. De manera breve, se puede definir la «complejidad» como la cantidad de recursos necesarios para efectuar un cálculo. Así, el tiempo requerido para que se ejecute un algoritmo es una función del tamaño de los datos considerados. Por esta razón la complejidad de un algoritmo se expresa o representa como una sucesión $f(n)$ (o $g(n)$, $T(n)$, $h(n)$, ...). El estudio de la eficiencia de los algoritmos es muy importante y no puede ser eliminado por el argumento: «las computadoras del futuro serán tremendamente rápidas y por lo tanto no es importante que el algoritmo sea eficiente».

Para saber el grado de complejidad que puede tener un determinado problema, generalmente se utiliza el modelo computacional de la máquina de Turing, con el cual se obtiene una clasificación de los problemas con base en el grado de complejidad inherente para resolverlos.

El espacio cuasi-mtrico $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ de funciones de complejidad tiene su origen en las ciencias de la computación así como en topología. Scott y Strachey [**18**] iniciaron el estudio de la semántica denotacional y la teora de dominios, con el objetivo de dar un sustento riguroso a los conceptos utilizados en los lenguajes de programación, y en el desarrollo de modelos matemáticos para ellos. La completación de órdenes parciales juega un papel importante en la teoría de dominios.

El objetivo que perseguimos en este trabajo de divulgación es presentar de manera detallada los fundamentos sobre la completación topológica según Smyth [**19**] de un espacio cuasi-uniforme que, aplicada a los espacios de complejidad de algoritmos, sirve para obtener la complejidad de ciertos tipos de algoritmos. Esta última parte ha sido desarrollada inicialmente por Schellekens [**16**] y posteriormente por el mismo Schellekens junto con S. Romaguera y sus colaboradores [**7**], [**14**].

La división de la presentación del trabajo en seis secciones (aparte de esta introducción) la hemos hecho pensando en que de esta manera, al lector le pueda resultar más fácil la comprensión de la mencionada teoría. La segunda sección cubre una parte de la notación que se usa en este capítulo, así como los preliminares sobre la complejidad asintótica de algoritmos y el tipo de algoritmos conocido como «divide y vencerás». También se menciona, después de la definición de los órdenes de complejidad, el impacto que tiene la teoría aquí presentada, en cuanto a la eficiencia computacional de los algoritmos. La tercera sección se dedica al tratamiento de los espacios cuasi-uniformes, que son espacios más generales que los espacios cuasi-mtricos, a los que está dedicada la cuarta sección. En la quinta sección se desarrolla la teoría sobre los objetos pricipales de este trabajo, que son el espacio de complejidad de algoritmos y su espacio dual. La sexta sección está dedicada a la aplicación de la teoría de los espacios de complejidad para obtener el orden de complejidad de algoritmos del tipo divide y vencerás. Finalmente, en la séptima sección, nuevamente se aplica la teoría de los espacios de complejidad, ahora para la obtención del orden de complejidad de algoritmos divide y vencerás probabilistas.

2. Preliminares

En este trabajo, los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$ y $(0,\infty]$ denotan a los conjuntos de los enteros positivos, números reales no negativos y números reales positivos extendidos, respectivamente. Usamos la notación $\mathcal{O}$ (O mayúscula), o (o minúscula), Ω (Omega mayúscula) y Θ (Zeta) con el significado estándar que ŝtos símbolos tienen en las ciencias computacionales. El significado del símbolo ω (omega minúscula) dependerá del contexto. Cuando ω aparece sola, denota al conjunto de los enteros no negativos, mientras que la notación $\omega(g)$, donde g es una sucesión de números reales, indica un conjunto de sucesiones en el sentido de cotas asintóticas con el que se usa regularmente en las ciencias de la computación. Esto se explicará con detalle más adelante. Si $a,b \in \mathbb{R}$, las notaciones $a \vee b$ y $a \wedge b$ significan $max\,\{a,b\}$ y $min\,\{a,b\}$, respectivamente. Como es usual, el símbolo $\circ$ indica composición de relaciones. Las letras $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ se usan para denotar cuasi-uniformidades, mientras que U, V indican entornos pertenecientes a ellas. Para la contención de conjuntos (ya sea estricta o no) utilizamos indistintamente los símbolos $\subset$ y $\subseteq$, mientras que $<_U$ denota la contención fuerte de conjuntos con respecto al entorno U. La letra $\mathcal{F}$ generalmente indica un filtro y $\mathcal{B}$ representa una base de filtro o de una cuasi-uniformidad o de una topología. Si (X,τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, la cerradura y el interior de A con respecto a la topología τ se denotan por $cl_\tau(A)$ e $int_\tau(A)$, respectivamente. Para cada punto $x \in X$, $\mathcal{N}(x)$ representa al filtro de vecindades de x. Las letras O, O' indican abiertos en un espacio topológico. El símbolo $\leqslant_\tau$ denota el preorden de especialización determinado por τ en X, donde $x \leqslant_\tau y$ si y sólo si $x \in cl_\tau(\{y\})$. La completación de un espacio uniforme o cuasi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ se representa como $\left(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}\right)$, mientras que para la completación de Smyth [**19**] de un espacio cuasi-uniforme topológico $(X,\mathcal{U},\tau)$ utilizamos la notación $\left(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}},\widetilde{\tau}\right)$ [**21**]. El espacio de funciones de complejidad y su espacio dual se indican con los símbolos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$, respectivamente, mientras que el mapeo de inversión entre ellos se representa como Ψ.

Por lo general, los problemas de cómputo pueden presentarse en instancias de tamaño muy grande, teóricamente ilimitado. En la práctica es de gran interés estudiar las funciones de complejidad para valores de n muy grandes [**8**]. Esto nos lleva a considerar la eficiencia asintótica de los algoritmos, es decir, el comportamiento de la función de complejidad $T(n)$ cuando $n \to \infty$. En el análisis asintótico de la complejidad, lo más importante es el orden de crecimiento de las funciones. Esto significa que, dadas dos funciones $f(n)$ y $g(n)$, hay que considerar qué tan rápido crece cada una de ellas con respecto a la otra cuando el valor de n se hace arbitrariamente grande.

Estrictamente hablando, los valores de $T(n)$ son números enteros positivos, ya que representan el número de pasos básicos que realiza un algoritmo durante su ejecución. Con el propósito de poder utilizar en el análisis asintótico de la complejidad todas las herramientas del álgebra de funciones, incluyendo las propiedades de las funciones logarítmicas, se trabaja con funciones asintóticamente positivas y de valores reales.

Definición 2.1 (Funciones reales asintóticamente positivas)**.**

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N),\ f(n) > 0 \right\}$$

Definición 2.2 (Notación O)**.** *Si $g \in \mathcal{A}$, entonces*

$$O(g) = \left\{ f \in \mathcal{A} \mid (\exists c, n_0 > 0)(\forall n \geqslant n_0),\ 0 < f(n) \leqslant c \cdot g(n) \right\}.$$

En la notación O (**O mayúscula**), la función g es una cota superior asintótica para las funciones $f \in O(g)$. A partir de cierto punto n_0, los valores de $f(n)$ no superan a un múltiplo constante de $g(n)$. Por ejemplo, la complejidad del peor caso posible del ordenamiento por inserción es $O(n^2)$. Abusando de la notación, a veces se escribe $f(n) = O(g(n))$ en vez de $f \in O(g)$. Se dice que f es de un orden menor o igual al orden de g. Si f es una función constante, entonces $f \in O(1)$. Como la notación O indica una cota superior, cuando esa cota se aplica al tiempo de corrida del peor caso de un algoritmo, automáticamente se aplica también para cualquier configuración de los datos de entrada [**5**]. Esto implica que la complejidad del algoritmo de ordenamiento por inserción es $O(n^2)$.

Definición 2.3 (Notación Ω)**.** *Si $g \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\Omega(g) = \left\{ f \in \mathcal{A} \mid (\exists c, n_0 > 0)(\forall n \geqslant n_0),\ 0 < c \cdot g(n) \leqslant f(n) \right\}.$$

En la notación Ω (**Omega mayúscula**), la función g es una cota inferior asintótica para las funciones $f \in \Omega(g)$. A partir de algún punto n_0, los valores de $f(n)$ no caen por debajo de un múltiplo constante de $g(n)$. Dada una función $f \in \mathcal{A}$, si $f \notin \Omega(1)$, esto es equivalente a decir que $f(n)$ tiene una subsucesión que tiende a cero. Como la notación Ω indica una cota inferior, si dicha cota se aplica al tiempo de corrida del mejor caso posible de un algoritmo, entonces también se aplica para cualquier otra configuración de los datos de entrada. Como ejemplo particular, la complejidad del algoritmo de ordenamiento por inserción es $\Omega(n)$, además de ser también $O(n^2)$. Las notaciones O y Ω están relacionadas mediante la siguiente propiedad: $f \in O(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$.

Definición 2.4 (Notación Θ)**.** *Si $g \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\Theta(g) = \left\{ f \in \mathcal{A} \mid (\exists c_1, c_2, n_0 > 0)(\forall n \geqslant n_0),\ 0 < c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n) \right\}.$$

En la notación Θ (**Zeta**), la función g da una cota asintótica justa (también llamada exacta) para las funciones $f \in \Theta(g)$ ya que estas funciones quedan acotadas tanto superior como inferiormente por múltiplos constantes de la función g. En otras palabras, a la derecha de n_0, la gráfica de $f(n)$ queda arriba de $c_1 g(n)$ y abajo de $c_2 g(n)$ Por ejemplo, cualquier función constante pertenece a $\Theta(1)$. Si la función $f(n)$ es un polinomio de grado k, entonces $f(n) \in \Theta(n^k)$. Con esta notación también se acostumbra escribir $f(n) = \Theta(g(n))$ en vez de $f \in \Theta(g)$. Este uso se extiende incluso a expresiones como: $5n^2 + 3n + 1 = 5n^2 + \Theta(n)$.

Teorema 2.5. [**5**] *$\forall g \in \mathcal{A},\ \Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$.*

Si g es una cota superior asintótica de f, es decir que $f \in O(g)$, puede ser que g sea una cota exacta (en caso de que $f \in \Theta(g)$), o puede ser que no lo sea (si $f \notin \Theta(g)$). La siguiente notación define una clase de funciones para las que g es una cota superior asintótica pero que no es exacta.

Definición 2.6 (Notación o)**.** *Si $g \in \mathcal{A}$, entonces*

$$o(g) = \left\{ f \in \mathcal{A} \mid (\forall c > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \geqslant n_0),\ 0 < f(n) < c \cdot g(n) \right\}.$$

En este caso se dice que f es «asintóticamente menor» que g. La definición de la notación o (**o minúscula**) se parece a la de la notación O pero hay una diferencia importante que radica en el cuantificador del factor constante $c > 0$. Si $f \in O(g)$, la desigualdad $f(n) \leqslant c \cdot g(n)$ se debe cumplir a partir de algún punto n_0 para *alguna* constante $c > 0$. En cambio, si $f \in o(g)$, para *toda* constante $c > 0$ se cumple la desigualdad $f(n) < c \cdot g(n)$ a partir de algún punto n_0 (que depende de c). Por ejemplo, tomando $c = 1$ y $n_0 = 3$, se comprueba que $3n = O(n^2)$. Sin embargo, $3n^2 \neq o(n^2)$ ya que (tomando, digamos $c = 2$) no hay ningún valor $n > 0$ para el que se cumpla $3n^2 < 2n^2$. Similarmente a los casos anteriores, aquí también es común abusar de la notación escribiendo $f(n) = o(g(n))$ en lugar de $f \in o(g)$. Nótese que $o(g) \subseteq O(g) \setminus \Omega(g)$. En la notación o, el valor de $f(n)$ se vuelve cada vez más insignificante comparado con $g(n)$ al crecer la n [**5**]. Es decir que

$$f \in o(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Definición 2.7 (Notación ω)**.** *Si $g \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\omega(g) = \left\{ f \in \mathcal{A} \mid (\forall c > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \geqslant n_0),\ 0 < c \cdot g(n) < f(n) \right\}.$$

En este caso se dice que f es «asintóticamente mayor» a g. La notación ω (**omega minúscula**) indica una cota inferior asintótica que no es exacta. Por ejemplo, $3n^2 = \omega(n)$ pero $3n^2 \neq \omega(n^2)$. Similarmente al caso de las notaciones O y Ω, hay una relación estrecha entre la notación o y la notación ω ya que $f \in \omega(g) \Leftrightarrow g \in o(f)$. Además se cumple lo siguiente

$$f \in \omega(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

El análisis tradicional de la complejidad clasifica a las funciones al nivel de sus cotas asintóticas O, o, Θ, Ω y ω. Sin embargo, como se verá más adelante, la cuasi-métrica $d_{\mathcal{C}}$ del espacio de complejidad proporciona una forma más refinada de comparar la eficiencia computacional entre dos algoritmos dados. Esto se hace cuantificando sistemáticamente qué tanto una función de complejidad domina a otra en términos de mejoramiento relativo, acumulando las diferencias existentes para cada tamaño n de los datos de entrada del problema. Por esta razón, la cuasi-métrica $d_{\mathcal{C}}$ presenta implicaciones prácticas para la selección del algoritmo más eficiente, ya que las diferencias pequeñas tienen un efecto acumulativo, aunque sea entre funciones que tengan el mismo orden asintótico de complejidad. Esto puede resultar particularmente útil cuando dos algoritmos con la misma complejidad asintótica se desempeñan de forma diferente en diferentes rangos prácticos de valores del tamaño de la entrada. Incluso se podría considerar la posibilidad de utilizar la cuasi-métrica $d_{\mathcal{C}}$ en el diseño de algoritmos adaptivos, que pueden ir eligiendo diferentes algoritmos para procesar los datos, de acuerdo a cómo se vayan presentando sus características estructurales en tiempo real.

2.1. Algoritmos del tipo «divide y vencerás». Los algoritmos del tipo conocido como «divide y vencerás» tienen una estrategia que consiste en dividir el problema en subproblemas de menor tamaño y resolverlos de forma separada. El objetivo de esta reducción es que los subproblemas en los que se divide el problema original sean suficientemente simples para ser resueltos de forma sencilla, y posteriormente obtener la solución total del problema combinando las soluciones parciales. Esta es la estrategia que siguen los algoritmos recursivos: el problema se va reduciendo sucesivamente hasta llegar al caso base cuya solución es conocida, y a partir de allí se construye la solución del problema total. Un ejemplo de este tipo de algoritmos es la búsqueda binaria: en cada paso la lista de búsqueda se divide en dos partes, por lo que la longitud de cada parte se va reduciendo sucesivamente a la mitad hasta obtener listas de un solo elemento, que es el caso base para este algoritmo. La naturaleza recursiva de los algoritmos del tipo «divide y vencerás» facilita la obtención de funcionales de mejora (definidos en la sección 5) en el espacio $\mathcal{C}$. La iteración de estos funcionales, junto con la completitud de $\mathcal{C}$, permiten obtener cotas asintóticas para las funciones de complejidad de este tipo de algoritmos. Por esta razón, se puede afirmar que el análisis de complejidad de los algoritmos «divide y vencerás» es el que mejor se adapta a las técnicas presentadas en este trabajo.

2.2. Otros tipos de algoritmos. Además del tipo «divide y vencerás» hay varios otros tipos de algoritmos. Algunos de los principales son: los algoritmos voraces, los de programación dinámica, los de retroceso, los de ramas y acotación, los de recorrido de grafos, los de programación lineal y optimización convexa, los de tiempo real, los de fuerza bruta, los algoritmos aleatorizados y los de aproximación, así como los algoritmos paralelos y distribuidos. Cada uno de los tipos mencionados cuenta con enfoques específicos para determinar su complejidad asintótica. Por ejemplo, los algoritmos voraces van tomando decisiones que son localmente óptimas en cada paso del proceso, con la meta de llegar a una solución que sea óptima para el problema global. Esto se alcanza cuando el problema que resuelve el algoritmo cumple con las propiedades llamadas «de la elección ávida» y «de la subestructura optimal», que se definen formalmente en la teoría de matroides. La mayoría de estos tipos de algoritmos y las técnicas que han dado los mejores resultados en la determinación de sus funciones de complejidad, se cubren con detalle en la referencia [**5**], que es un libro bastante extenso, con muchos ejemplos y con explicaciones claras. Después de ver la definición del espacio $\mathcal{C}$ en la sección 5, el lector se dará cuenta de que este espacio incluye a las funciones de complejidad de todos los algoritmos no triviales, independientemente del tipo bajo el que estén clasificados.

3. Espacios cuasi-uniformes

Una *cuasi-uniformidad* $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X es un filtro sobre $X \times X$, que satisface (i) todo elemento $U \in \mathcal{U}$ es una relación reflexiva sobre X, y (ii) $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U} : V \circ V \subseteq U$. Los elementos de $\mathcal{U}$ son llamados *entornos*. Cuando adicionalmente $\mathcal{U}$ tiene la propiedad (iii) $\forall U \in \mathcal{U} : U^{-1} \in \mathcal{U}$, entonces es llamada una *uniformidad* sobre X. El par $(X, \mathcal{U})$ es un *espacio cuasi-uniforme* (o un *espacio uniforme*, cuando $\mathcal{U}$ es una uniformidad). Para una presentación completa de la teoria de los espacios quasi-uniformes, recomendamos consultar [**6**]. Ahora, si $\mathcal{U}$ es una cuasi-uniformidad, $\mathcal{U}^{-1} = \{U^{-1} \mid U \in \mathcal{U}\}$ es tambiń una cuasi-uniformidad llamada la *cuasi-uniformidad conjugada* de $\mathcal{U}$. De tal manera que $\mathcal{U}$ es una uniformidad si y sólo si $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$. Una función $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ entre dos espacios cuasi-uniformes es llamada *cuasi-uniformemente continua* cuando $\forall V \in \mathcal{V}, \exists U \in \mathcal{U} : (x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V$, para todo par $(x, y) \in X \times X$. En el caso en que existe una función biyectiva f entre los espacios cuasi-uniformes $(X, \mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{V})$, de tal manera que f y f^{-1} son cuasi-uniformemente continuas, f es llamada un *cuasi-unimorfismo* y se dice que los espacios son *cuasi-isomorfos*.

Un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ de una cuasi-uniformidad es una *base* de $\mathcal{U}$ cuando $\forall U \in \mathcal{U}, \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq U$. En tal caso decimos que $\mathcal{B}$ *genera* a $\mathcal{U}$. Una uniformidad $\mathcal{U}$ siempre tiene como una de sus bases a la familia $\mathcal{B} = \{U \cap U^{-1} \mid U \in \mathcal{U}\}$, la cual consta de relaciones simt́ricas ($V = V^{-1}$). Si $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de $X \times X$, entonces existe una cuasi-uniformidad $\mathcal{U}$ sobre X generada por $\mathcal{B}$ si y sólo si (i) $\mathcal{B}$ es una base de filtro en $X \times X$, (ii) cada U_i, $i \in I$ es una relación reflexiva sobre X, y (iii) $\forall i \in I, \exists j \in I : U_j \circ U_j \subseteq U_i$. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cuasi-uniformidades sobre X, en donde $\mathcal{B}_1$ es una base para $\mathcal{U}$, y $\mathcal{B}_2$ es una base para $\mathcal{V}$, decimos que $\mathcal{B}_1$ es más *fina* que $\mathcal{B}_2$ (y que $\mathcal{B}_2$ es mas *gruesa* que $\mathcal{B}_1$) si cada elemento de $\mathcal{B}_2$ contiene un elemento de $\mathcal{B}_1$. Así, $\mathcal{U}$ es más fina que $\mathcal{V}$, siempre que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ es una cuasi-uniformidad, entonces la familia $\mathcal{B} = \{U \cap U^{-1} \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una uniformidad, la cual se denota por $\mathcal{U}^s$.

La topología $\tau(\mathcal{U})$ *inducida* por una cuasi-uniformidad $\mathcal{U}$ sobre X es la única topología en donde, para cada $x \in X$, su filtro de vecindades $\mathcal{N}(x)$ tiene como base a $\{U(x) \mid U \in \mathcal{U}\}$, siendo $U(x) = \{y \in X | (x, y) \in U\}$. $\tau(\mathcal{U})$ es llamada la *topología cuasi-uniforme*. Si τ es una topología sobre X, entonces $\mathcal{U}$ se dice que es *compatible* con τ siempre que $\tau = \tau(\mathcal{U})$. En este caso decimos que el espacio (X, τ) *admite* a la cuasi-uniformidad $\mathcal{U}$.

En cualquier espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$, la relación $\bigcap \mathcal{U}$ sobre X es un preorden, al que se conoce como el *preorden cuasi-uniforme* o el *preorden asociado* a $\mathcal{U}$ y se le denota por $\leqslant_{\mathcal{U}}$. Cuando $\leqslant_{\mathcal{U}}$ es un orden parcial, la topología $\tau(\mathcal{U})$ es T_0, mientras que si $\leqslant_{\mathcal{U}}$ resulta ser la identidad sobre X, entonces $\tau(\mathcal{U})$ es T_1.

En cuestión de completación: en un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$, se dice que una red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es de Cauchy, si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $\alpha_0 \in I$, tal que si $\alpha, \beta \geqslant \alpha_0$, entonces $(x_\alpha, x_\beta) \in U$. Similarmente, un filtro $\mathcal{F}$ en X se dice que es de Cauchy, si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{F}$, tal que para $x, y \in F$, se tiene $(x, y) \in U$. Una red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge a un punto $x_0 \in X$, si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $\alpha_0 \in I$, tal que si $\alpha \geqslant \alpha_0$, entonces $(x_\alpha, x_0) \in U$, mientras que un filtro $\mathcal{F}$ converge a $x_0 \in X$, siempre que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $F \in \mathcal{F}$, tal que si $x \in F$, entonces $(x, x_0) \in U$.

Teorema 3.1 ([**9**], [**10**])**.** *Cada filtro (red) convergente en un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es un filtro (una red) de Cauchy. Lo inverso no es necesariamente cierto.*

DEMOSTRACIÓN: Daremos la demostración para filtros, para redes la demostración es muy parecida. Sea $\mathcal{F}$ un filtro convergente a $x \in X$. Por la definición de filtro convergente, $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{N}(x)$, el filtro de vecindades uniformes de x. Como todo refinamiento de un filtro de Cauchy es también de Cauchy. solamente se necesita probar que $\mathcal{N}(x)$ es de Cauchy. Sea $U \in \mathcal{U}$ un entorno de X. Para este U existe $V \in \mathcal{U}$, simétrico ($V = V^{-1}$), que cumple $V \circ V \subseteq U$. Dados $u, v \in X$ tales que $(x, u), (x, v) \in V$, por simetría se tiene $(u, x), (x, v) \in V$, lo que implica $(u, v) \in V \circ V \subseteq U$. Como $V(x) \in \mathcal{N}(x)$ y se ha probado que $V(x) \times V(x) \subseteq U$, se sigue que $\mathcal{N}(x)$ es de Cauchy. $\square$

Un ejemplo de que el resultado inverso no se cumple, es el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, con la uniformidad que tiene como base a los conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : |x - y| < \frac{1}{n}\}$.

Para espacios uniformes hay solo una noción de completez.

Definición 3.2. *Un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es completo si cada red de Cauchy (o filtro de Cauchy) en X es convergente.*

El concepto de red incluye al de sucesión, de tal manera que una sucesión de Cauchy en un espacio uniforme completo $(X, \mathcal{U})$ es convergente; sin embargo, en un espacio uniforme toda sucesión de Cauchy puede ser convergente y el espacio no ser completo. De esta manera se tiene el concepto más débil de completez: un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es llamado *secuencialmente completo* si en ste cada sucesión de Cauchy es convergente.

Ahora, si un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ no es completo, entonces ste se puede sumergir densamente en otro espacio uniforme que si lo sea. Dicha propiedad, conocida como «la completación canónica de un espacio uniforme», es un resultado clásico en la teoría de los espacios uniformes.

Definición 3.3. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Un espacio uniforme $(\hat{X}, \hat{\mathcal{U}})$ es la completación de $(X, \mathcal{U})$, si:*

(1) $(\hat{X}, \hat{\mathcal{U}})$ es un espacio uniforme completo.
(2) $(X, \mathcal{U})$ con la topología inducida por su estructura uniforme es homeomorfo a un subespacio denso de $(\hat{X}, \hat{\mathcal{U}})$, donde en ste último se considera la topología inducida por la cuasi-uniformidad $\hat{\mathcal{U}}$.

Si consideramos a la clase de todos los filtros de Cauchy en un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$, ste es parcialmente ordenado con el orden parcial de la contención.

Teorema 3.4 ([**9**], [**10**])**.** *Cada filtro de Cauchy en un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ contiene a un único filtro de Cauchy minimal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una base para el filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en X. Para cada par $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, hay $B_3 \in \mathcal{B}$ y $U_3 \in \mathcal{U}$, que satisfacen: $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ y $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. Por lo anterior, es claro que $U_3(B_3) \subset U_1(B_1) \cap U_2(B_2)$. Por lo cual, la familia $\{U(B)\}$, $U \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{B}$ es una base de filtro. Ahora, si $U \in \mathcal{U}$ es un entorno simtrico, por ser $\mathcal{F}$ de Cauchy existe $F \in \mathcal{F}$ para el cual $F \times F \subset U$. Por tanto $U(F) \times U(F) \subset U$, probando así que $\{U(B)\}$ es una base de filtro y es más gruesa que $\mathcal{B}$. Para ver que el filtro que tiene como base a $\{U(B)\}$ es minimal en la cadena que contiene a $\mathcal{F}$, sea $\mathcal{G}$ un filtro más fino que $\mathcal{F}$. Eligiendo $C \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{F}$ y $U, V \in \mathcal{U}$, que cumplan $V \circ V \subset U$, $C \times C \subset V$ y $B \times B \subset V$, entonces $B \times C \subset V \circ V \subset U$. Puesto que $C \in \mathcal{B}$, se tiene $C \cap B \neq \emptyset$ y entonces $C \subset U(B)$, o lo que es lo mismo, que $U(B) \in \mathcal{G}$. La unicidad de este filtro minimal es clara. □

La propiedad de ser de Cauchy, tanto para redes como para filtros se preserva bajo funciones uniformemente continuas.

Teorema 3.5 ([**9**], [**10**])**.** *Si $(X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ es una función uniformemente continua entre dos espacios uniformes, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una red de Cauchy y $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en X, entonces las correspondientes imagenes en Y son de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN: Si V es un entorno en $\mathcal{V}$, existe un entorno $U \in \mathcal{U}$, para el cual: si $(x, y) \in U$, entonces $(f(x), f(y)) \in V$. Por lo cual si $\alpha_0 \in I$ y $K \in \mathcal{K}$ son tales que $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \in U$ para $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant \alpha_0$ y $K \times K \subset U$, entonces siempre que $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant \alpha_0$ y $(x, y) \in K \times K$, se tiene $(f(x_{\alpha_1}), f(x_{\alpha_2})) \in V$ y $(f(x), f(y)) \in f(K) \times f(K) \subset V$. □

Proposición 3.6 ([**10**])**.** *Si A es un subconjunto denso del espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$, entonces X es completo si y sólo si, dado cualquier filtro de Cauchy en A, su extensión a X es convergente.*

La importancia del siguiente resultado en este trabajo, así como su análogo en espacios cuasi-uniformes, es debida a su aplicación en los espacios de complejidad que detallamos más adelante.

Teorema 3.7 ([**9**], [**10**]). *Si A es un subconjunto denso del espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ y f es una función uniformemente continua de A en un espacio uniforme $(Y, \mathcal{V})$ que es Hausdorff y completo, entonces existe una extensión uniformemente continua $\hat{f}$ de f a todo X.*

Demostración: Si $x \in X$, existe en A una red $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ convergente a x. Según sabemos, $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ es de Cauchy. Por el teorema anterior, $(f(x_\alpha))_{\alpha\in I}$ es tambiń una red de Cauchy en Y, la cual, por la completez es convergente a un único punto en Y. Si denotamos a este límite por $\hat{f}(x) = lim f(x_\alpha)$, entonces $\hat{f}$ está bien definida sobre todo X, ya que si dos redes diferentes convergen a x, entonces las correspondientes redes imágenes convergen al mismo valor en Y. Claramente $\hat{f}(x) = f(x)$ para cada $x \in A$. Para ver que $\hat{f}$ es uniformemente continua, sea V un entorno simťrico de Y. Dado que $f : A \to Y$ es uniformemente continua, existe un entorno $U \in \mathcal{U}$ tal que $W = (A \times A) \cap U$ es un entorno de la uniformidad en A y siempre que $(x, y) \in W$, entonces $(f(x), f(y)) \in V$. Podemos suponer que V es cerrado (en la topología producto de $Y \times Y$, determinada por la topología uniforme de Y inducida por $\mathcal{U}$). Luego, por la definición de $\hat{f}$ se tiene $(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) \in V$, siempre que $(x, y) \in U$. □

Corolario 3.8. *Si $(X, \mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{V})$ son dos espacios uniformes, con Y Hausdorff y completo, entonces toda función uniformemente continua $f : X \to Y$ puede extenderse de manera única a una función uniformemente continua $\hat{f} : \hat{X} \to Y$.*

Para el caso de la uniformidad asociada a una cuasi-uniformidad, una sucesión (x_n) en X es llamada una sucesión $\mathcal{U}^s$-Cauchy si

$$\forall U \in \mathcal{U}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que, si } n, m \geqslant n_0, \text{ entonces } (x_n, x_m) \in U.$$

Un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$ es llamado bicompleto si y sólo si el espacio uniforme asociado $(X, \mathcal{U}^s)$ es completo. De tal manera que la bicompletación de un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$ es un espacio cuasi-uniforme bicompleto $(Y, \mathcal{V})$ que tiene un subespacio $\tau(\mathcal{V})$-denso que es cuasi-isomorfo uniformemente a $(X, \mathcal{U})$. Los espacios cuasi-uniformes cuya topología asociada es T_0 tienen una única bicompletación cuya topología asociada es tambiń T_0 [**6**].

Sin embargo, a pesar de la existencia de la bicompletación, para los espacios cuasi-uniformes $(X, \mathcal{U})$ en general, la situación con respecto a la completez no es tan satisfactoria como en el caso particular de los espacios uniformes. No existe una noción suficientemente aceptable del concepto de completez dentro de la categoría de los espacios cuasi-uniformes: En esta categoría

1) Objetos: espacios cuasi-uniformes $(X, \mathcal{U})$.
2) Morfismos: funciones cuasi-uniformemente continuas.

La razón de lo anterior es que, para que un espacio cuasi-uniforme $(\hat{X}, \hat{\mathcal{U}})$ sea una completación del espacio $(X, \mathcal{U})$, debe existir un sumergimiento $i : X \to \hat{X}$, de tal manera que se cumpla la propiedad universal. Dado un espacio cuasi-uniforme completo Y y cualquier morfismo $f : X \to Y$, debe existir una extensión única de f, es decir $\hat{f} : \hat{X} \to Y$, tal que $\hat{f} \circ i = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "\widehat{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Como ejemplo de un espacio cuasi-uniforme en el que lo anterior no sucede, considere al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales con la uniformidad $\mathcal{U}$, cuyos entornos son los subconjuntos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que contienen a la gráfica del orden $\leqslant$ [**19**]. Consideraciones simples indican que la completación de este espacio debe ser $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ con la cuasi-uniformidad inducida por el orden extendido. Tomemos ahora a $Y = [0,1]$ con la cuasi-uniformidad generada por los entornos $V_\epsilon = \{(x,y)|x < y+\epsilon\}$. Para ver que la propiedad universal no se cumple, observemos que la función cuasi-uniformemente continua $f : X \to Y$, dada por $f(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, tiene para cada $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ una extensión $\hat{f}_x : \hat{\mathbb{N}} \to Y$, dada por $\hat{f}_x(\infty) = x$ y $\hat{f}_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. En conclusión, no existe una completación de este espacio en el sentido indicado.

El mismo ejemplo proporciona una motivación para la completación de Smyth. Obsérvese que la topología generada por el orden en $\hat{\mathbb{N}}$ no es la misma que la topología inducida por la uniformidad. De hecho, la primera es la topología de Scott en donde $\{\infty\}$ no es abierto. Si pedimos adicionalmente a los morfismos que estos sean continuos con respecto a esta topología, entonces de todos los $\hat{f}_x$, el único que satisface ser continuo es $\hat{f}_{\frac{1}{2}}$.

Como se ha mencionado, una de las ideas sobre la completación de un espacio cuasi-uniforme ha sido desarrollada por Michael Smyth [**19**], en el marco de los espacios cuasi-uniformes topológicos. En dicho trabajo, Smyth definió una completación para algunos espacios cuasi-uniformes (llamados Smyth-completables) en cuatro etapas. Primero definió el concepto de espacios cuasi-uniformes topológicos y a cada espacio cuasi-uniforme le asoció de manera canónica un espacio cuasi-uniforme topológico. En segundo lugar, a cada espacio cuasi-uniforme topológico le asoció un espacio sintopológico. Estos espacios, también llamados sintopogénicos, habían sido estudiados con anterioridad por Császár. En tercer lugar, Smyth construyó una completación para los espacios sintopológicos. El cuarto paso es, una vez completado el espacio sintopológico, regresar a los espacios cuasi-uniformes topológicos y determinar si el espacio resultante se puede obtener o no de forma canónica a partir de un espacio cuasi-uniforme. En caso afirmativo, al espacio cuasi-uniforme original se le llama Smyth-completable. Por otra parte, Sunderhauf [**21**] mostró que la completación de Smyth se puede llevar a cabo, con los mismos resultados, completamente dentro de la categoría de los espacios cuasi-uniformes topológicos, sin necesidad de recurrir a los espacios sintopológicos. En el presente trabajo exponemos una parte del desarrollo dado por Sunderhauf.

Definición 3.9 ([**21**]). *Un* **espacio cuasi-uniforme topológico** *está formado por una tercia $(X, \mathcal{U}, \tau)$, en donde $(X, \mathcal{U})$ es un espacio cuasi-uniforme y τ es una topología que se relaciona con $\mathcal{U}$ mediante los siguientes axiomas:*

(A1) $(\forall O \in \tau)(\forall x \in O)(\exists U \in \mathcal{U})(\exists O' \in \tau) : x \in O',\ U[O'] \subset O$.

(A2) $(\forall U \in \mathcal{U})(\exists V \in \mathcal{U}, V \subset U) : \forall x \in X,\ V^{-1}(x)$ *es cerrado en* τ.

(A3) $(\forall U \in \mathcal{U})(\exists V \in \mathcal{U}) : \forall O \in \tau,\ V(O) \subset int_\tau U(O)$.

El significado de estos axiomas es que, mediante śtos el comportamiento de la topología y la cuasi-uniformidad es adecuado para cuestiones de completez. El interés recae en la acción de los entornos sobre los conjuntos abiertos por medio de $O \longmapsto U(O)$ y no en la acción sobre los puntos $x \longmapsto U(x)$. De tal manera que la relación $U(O) \subset O^{'}$ entre conjuntos abiertos tiene especial interés. Para una interpretación de los axiomas anteriores, veamos la noción de contención fuerte.

Definición 3.10. *En un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$, dados los subconjuntos A, B de X y un entorno U, se dice que A está contenido U-fuertemente en B y se denota por $A <_U B$, si:*

$$\exists O, O^{'} \in \tau : A \subset O \subset U(O) \subset O^{'} \subset B.$$

En particular, si $O, O^{'} \in \tau$, entonces $O <_U O^{'}$ si y sólo si $U(O) \subset O^{'}$.

Ya con esta definición, el axioma (A1) se interpreta de la forma:

$$\forall O \in \tau \forall x \in O \exists U \in \mathcal{U} : \{x\} <_U O.$$

Smyth [**19**] introdujo un axioma llamado «de interpolación» que, en términos de la contención fuerte con respecto a entornos, se expresa de la manera siguiente:

$$(INT)\ \forall U \in \mathcal{U}\ \exists V \in \mathcal{U}\ \forall O, O^{'} \in \tau\ \exists P \in \tau :\ O <_U O^{'} \Longrightarrow O <_V P <_V O^{'}.$$

El axioma (A3) es más fuerte que el axioma de interpolación.

Teorema 3.11 ([**21**])**.** *Dado un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$ y una topología τ en X, entonces $(A3)$ implica (INT).*

Demostración: Dado el entorno U, podemos elegir a W, con $W \circ W \subset U$. Ahora basta con aplicar $(A3)$ a W, para encontrar $V \subset W$, y este entorno satisface la conclución de (INT). □

De hecho, $(A3)$ puede reescribirse de la forma:

$$(\forall U \in \mathcal{U})(\exists V \in \mathcal{U})(\forall O \in \tau) : O <_V U(O).$$

Lo anterior se puede traducir esencialmente en que: los entornos lo que hacen es agrandar a los conjuntos abiertos de una manera uniforme. El segundo axioma, aunque no es muy intuitivo, puede traducirse en que si los puntos x y y en X satisfacen que siempre que $\{x\} <_U O$, entonces $y \in O$. Esto permite definir la U-cercanía entre puntos de X.

$$\widehat{U} = \{(x, y) : \forall O, \{x\} <_U O \Longrightarrow y \in O\}.$$

Ya con esta noción de cercanía, se tiene:

Teorema 3.12 ([**21**])**.** *Si $\mathcal{U}$ es una cuasi-uniformidad y τ una topología en X, entonces $(A2)$ es equivalente a: $(A2)'$ $\{\widehat{U} : U \in \mathcal{U}\}$ es una base de $\mathcal{U}$.*

Demostración: Que $(A2)$ implica $(A2)'$ es claro, ya que para cada $U \in \mathcal{U}$ se tiene $U \subset \widehat{U}$, probando así que $\{\widehat{U} : U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{U}$. Ahora, dado un entorno U, podemos elegir otro entorno U_1 de acuerdo a $(A2)$ y un U_2 de tal manera que $U_2 \circ U_2 \subset U_1$. Enseguida aplicamos nuevamente $(A2)$ a U_2 para obtener V y ver que $\widehat{V} \subset U$. Si suponemos que $(x, y) \notin U$, entonces $(x, y) \notin U_1$, luego $x \in O = X - U_1^{-1}(y)$, el cual es τ-abierto. Haciendo $O^{'} = X - V^{-1}(y)$, este tambiń es τ-abierto. Si probamos que $V(O) \subset O^{'}$, entonces $\{x\} <_V O^{'}$, con lo cual se tendrá $(x, y) \notin \widehat{U}$. Para establecer la contención, si $z \in V(O) - O^{'} = V(O) \cap V^{-1}(y)$, existe $a \in O$ que satisface $(a, z) \in V$, y tambiń $(z, y) \in V$, por lo que $(a, y) \in V \circ V$, lo que a su vez implica que $(a, y) \in U_2 \circ U_2$, y por tanto $(a, y) \in U_1$. Pero esto último significa que $a \in U_1^{-1} \cap O$, contradiciendo su definición.

Para la implicación inversa: dado el entorno U, se define

$$\bar{U} = \{(x, y) | x \in Cl_\tau U^{-1}(y)\}.$$

Claramente, $U \subset \bar{U}$. Más aún:

$$\begin{aligned}(x, y) \in \bar{U} &\iff \forall O,\ (x \in O \Longrightarrow O \cap U^{-1}(y) \neq \emptyset) \\ &\iff \forall O,\ (x \in O \Longrightarrow y \in U(O)) \\ &\Longrightarrow (x, y) \in \widehat{U}.\end{aligned}$$

De modo que $\bar{U} \subset \widehat{U}$. Ahora, como $\{\widehat{U}\}$ es una base para $\mathcal{U}$, entonces tambiń lo es $\{\bar{U}\}$. Finalmente, como $\bar{U}^{-1}(x) = cl_\tau(U^{-1}(x))$ para cada $x \in X$, ńta es una base que satisface $(A2)$. □

Un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$ se puede considerar como un espacio cuasi-uniforme topológico, simplemente asociándolo con la terna $(X, \mathcal{U}, \tau_{\mathcal{U}})$, que se obtiene agregándole a $(X, \mathcal{U})$ la topología cuasi-uniforme $\tau_{\mathcal{U}}$. La demostración del resultado siguiente es inmediata.

Proposición 3.13 ([**21**]). *(1) Si $(X, \mathcal{U})$ es un espacio cuasi-uniforme, entonces $(X, \mathcal{U}, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio cuasi-uniforme topológico. (2) Si $(X, \mathcal{U}, \tau)$ es un espacio cuasi-uniforme topológico, entonces $\tau \subset \tau_{\mathcal{U}}$.*

A los morfismos en la categoría de los espacios cuasi-uniformes topológicos los denotaremos por ECUT-morfismos, y son definidos enseguida.

Definición 3.14. *Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre los espacios cuasi-uniformes topológicos $(X, \mathcal{U}, \tau_x)$ y $(Y, \mathcal{V}, \tau_y)$ es un ECUT-morfismo, si satisface:*

(C1) es τ_x, τ_y-continua.
(C2) es $\mathcal{U}, \mathcal{V}$-cuasi-uniformemente continua.

La siguiente proposición establece otra caracterización de los ECUT-morfismos.

Proposición 3.15. *Un mapeo $f : X \longrightarrow X'$ entre los espacios cuasi-uniformes topológicos $(X, \mathcal{U}, \tau)$ y $(X', \mathcal{U}', \tau')$ es un ECUT-morfismo si y sólo si:*

$$(C) \quad (\forall U' \in \mathcal{U}')(\exists U \in \mathcal{U}) : \forall N', M' \in \tau'; N' <_{U'} M' \Longrightarrow f^{-1}(N') <_U f^{-1}(M').$$

Demostración: $(C1) \wedge (C2) \Rightarrow (C)$: Si U' es dado, basta tomar a U de acuerdo a la definición de función uniformemente continua para obtener el resultado deseado en (C).

$(C) \Rightarrow (C1)$: Si O' es una vecindad abierta de $f(x)$, para $x \in X$. Por $(A1)$ existe N', con $\{f(x)\} \subset N' <_{U'} O'$ para algún entorno U'. Eligiendo ahora a U según (C), se obtiene $f^{-1}(N') <_U f^{-1}(O')$. En particular, $f^{-1}(O')$ es una vecindad abierta de x.

$(C) \Rightarrow (C2)$: Dado U', obtenemos V' de acuerdo a $(A2)'$; esto es, que satisface $\hat{V}' \subset U'$, luego podemos elegir a V de acuerdo a (C). Este entorno satisface $(x, y) \in V \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U'$. Ya que si no sucede que $(f(x), f(y)) \in U'$, entonces $(f(x), f(y)) \notin \hat{V}'$. De tal manera que deben existir conjuntos N' y M' en τ', con $\{f(x)\} \subset N' < V'M'$ y $f(y) \notin M'$. Pero entonces, se tendría $f^{-1}(N') <_V f^{-1}(M')$, lo cual es contradictorio, ya que en tal caso $x \in f^{-1}(N')$ y $f(y) \notin f^{-1}(M')$ o, equivalentemente $(x, y) \notin V$. □

En un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$, un conjunto A es llamado U-pequeño con respecto a x si $A \subset U(x)$.

Para que en un espacio cuasi-uniforme un filtro $\mathcal{F}$ sea de Cauchy, se requiere que para cada entorno U exista un punto $x \in X$, de tal manera que todos los conjuntos que sean U-pequeños con respecto a x, pertenezcan al filtro. Sin embargo, este concepto en términos de conjuntos pequeños no es adecuado en un espacio cuasi-uniforme topológico, ya que $U(x)$ no necesariamente es una τ-vecindad de x. Por lo tanto, en vez de requerir que $U(x)$ sea un miembro del filtro se deben de considerar las U-vecindades de x, es decir, conjuntos O τ-abiertos que satisfagan $\{x\} <_U O$.

Definición 3.16. *Un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio cuasi-uniforme topológico $(X, \mathcal{U}, \tau)$ se dice que es de Cauchy, si:*

$$(Cy) \qquad (\forall U \in \mathcal{U})(\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in F)(\forall O \in \tau): \ \{x\} <_U O \Longrightarrow O \in \mathcal{F}.$$

Ahora abordemos la noción de convergencia de filtros. El concepto usual de decir que un filtro $\mathcal{F}$ converge a x si $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$ es tambiń muy débil. Para ilustrar lo anterior, considere el caso en que existe un elemento más pequeño $\perp$ en X. En tal caso $\mathcal{N}(\perp) = \{X\}$ y entonces para todo filtro $\mathcal{F}$ se tendrá $\mathcal{F} \longrightarrow \perp$. Lo cual significaría que cualquier espacio cuasi-uniforme con un elemento mínimo es completo. Por esta razón se introduce el siguiente concepto con la intención de fortalecer la noción de convergencia.

Definición 3.17. *Un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio cuasi-uniforme topológico $(X, \mathcal{U}, \tau)$ es llamado redondo, si:*

$$(rd) \qquad (\forall A \in \mathcal{F})(\exists F \in \mathcal{F})(\exists U \in \mathcal{U}) : F <_U A.$$

Obsérvese que como consecuencia de esta definición, un filtro redondo $\mathcal{F}$ tiene una base de conjuntos τ-abiertos.

Ya con este nuevo concepto: un espacio cuasi-uniforme topológico es completo si cada filtro $\mathcal{F}$ de Cauchy redondo coincide con el filtro de vecindades de un único punto x.

Para que esta definición de convergencia tenga sentido, es necesario que los filtros de vecindades en un espacio cuasi-uniforme topológico sean de Cauchy redondos, lo cual se cumple por el axioma $(A1)$.

En un espacio cuasi-uniforme topológico $(X, \mathcal{U}, \tau)$ se define el siguiente concepto que es de utilidad en el proceso de completación. Para cada $A \subset X$:

$$\widetilde{A} := \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es un filtro de Cauchy redondo y } A \in \mathcal{F}\}.$$

De esta forma $\widetilde{X}$ es el conjunto de todos los filtros de Cauchy redondos y es el conjunto que sirve para la completación de X. Para verlo, primero introducimos una cuasi-uniformidad en $\widetilde{X}$. Para $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \widetilde{X}$ y $U \in \mathcal{U}$, se define

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widetilde{U} \iff \forall F, F' \in \mathcal{F} : \ F <_U F' \implies F' \in \mathcal{G}.$$

Mediante esta relación en $\tilde{X}$:

Teorema 3.18 ([**12**], [**21**])**.** *El conjunto $\{\widetilde{U} : U \in \mathcal{U}\}$ es base para una cuasi-uniformidad $\widetilde{\mathcal{U}}$ en $\widetilde{X}$*

Demostración: Es claro que $\Delta_{\widetilde{X}} \subset \tilde{U}$, para cada $U \in \mathcal{U}$. Además, también es claro que, de $V \subset U \implies \widetilde{V} \subset \widetilde{U}$ se deduce que $\widetilde{V \cap U} \subset \widetilde{V} \cap \widetilde{U}$, y por tanto las relaciones $\widetilde{U}$ forman una base de filtro. Ahora solo resta, para un entorno $\tilde{U}$, encontrar otro entorno $\widetilde{V}$, tal que $\widetilde{V} \circ \widetilde{V} \subset \widetilde{U}$. Pero no es dificil obtener este $\widetilde{V}$, basta aplicar (INT) a $\widetilde{U}$. □

Mediante lo anterior, la propiedad de Cauchy puede ahora reescribirse como:

$$(Cy) \qquad (\forall U \in \mathcal{U})(\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in F): \ (\mathcal{N}(x), \mathcal{F}) \in \widetilde{U}.$$

Ahora solamente falta por definir la topología $\tilde{\tau}$. Para ello se procede de la siguiente manera.

Teorema 3.19 ([**12**], [**21**]). *El conjunto* $\{\widetilde{O} : O \in \tau\}$ *es una base para una topología* $\widetilde{\tau}$*, que es* T_0*.*

Demostración: Basta con mostrar que el conjunto $\{\widetilde{O} : O \in \tau\}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Para ello, sólo hay que observar que $\widetilde{O \cap O'} \subset \widetilde{O} \cap \widetilde{O'}$. El axioma de separación T_0 se satisface, ya que $\mathcal{F} \in \widetilde{O} \Longleftrightarrow O \in \mathcal{F}$ y porque dos filtros tienen las mismas vecindades si y sólo si son iguales uno al otro. □

Nótese que

$$\bigcup_{i \in I} \widetilde{O_i} \subset \widetilde{\bigcup_{i \in I} O_i}$$

es siempre verdadero, aunque la contención inversa no necesariamente se cumple. Sin embargo, el conjunto del lado derecho no es mucho más grande que el del lado izquierdo, según el siguiente resultado.

Lema 3.20. *Si* U *es un entorno cualquiera en* $(X, \mathcal{U}, \tau)$*, entonces*

$$\widetilde{\bigcup_{i \in I} O_i} \subset \widetilde{U}(\bigcup_{i \in I} \widetilde{O_i}).$$

Demostración: Supóngase que $\mathcal{F}$ está en $\widetilde{\bigcup_{i \in I} O_i}$, es decir $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{F}$. Puesto que $\mathcal{F}$ es de Cauchy, existe $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$, tal que $(\mathcal{N}(x), \mathcal{F}) \in \widetilde{U}$. Como x está en alguno de los O_i, se tiene $\mathcal{N}(x) \in \bigcup_{i \in I} \widetilde{O_i}$ y por tanto $\mathcal{F} \in \widetilde{U}(\bigcup_{i \in I} \widetilde{O_i})$. □

Enseguida se menciona un resultado que se utiliza para probar que, con los $\widetilde{X}$, $\widetilde{\mathcal{U}}$ y $\widetilde{\tau}$ así definidos, la terna $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\tau})$ es un espacio cuasi-uniforme topológico.

Lema 3.21. *Si* $(X, \mathcal{U}, \tau)$ *es un espacio cuasi-uniforme topológico, entonces:*

(1) $(x, y) \in U \Rightarrow (\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)) \in \widetilde{U}$
(2) $A <_U B \Longleftrightarrow \widetilde{A} <_{\widetilde{U}} \widetilde{B}$
(3) $U(\widetilde{\bigcup_{i \in I} O_i}) \subset \widetilde{U} \circ \widetilde{U}(\bigcup_{i \in I} \widetilde{O_i})$.

Teorema 3.22 ([**12**], [**21**]). $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\tau})$ *es un espacio cuasi-uniforme topológico.*

Demostración: Para $(A1)$: Supóngase que $F \in Q \in \widetilde{\tau}$. Luego, existe un $O \in \tau$ con $F \in \widetilde{O} \subset Q$. Ahora, puesto que $O \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es redondo, existe $N \in \mathcal{F}$ y un entorno U para los cuales $N <_U O$, y de tal manera que $\mathcal{F} \in \widetilde{N} <_{\widetilde{\mathcal{U}}} \widetilde{O} \subset Q$.

$(A2)'$ Claramente $\widetilde{U} \subset \hat{\widetilde{U}}$. Además:

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \hat{\widetilde{U}} \Longleftrightarrow \forall Q, E \in \tilde{\tau} : \mathcal{F} \in E \ \wedge \widetilde{U}(E) \subset Q \Longrightarrow \mathcal{G} \in Q$$

$$\Longleftrightarrow \forall \widetilde{O}, \widetilde{N} \in \tilde{\tau} : \mathcal{F} \in \widetilde{N} \ \wedge \widetilde{U}(\widetilde{N}) \subset \widetilde{O} \Longrightarrow \mathcal{G} \in \widetilde{O}$$

$$\Longleftrightarrow \forall O, N \in \tau : N \in \mathcal{F} \ \wedge U(N) \subset O \Longrightarrow O \in \mathcal{G}$$

$$\Longleftrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widetilde{U}.$$

Así, $\widetilde{U} = \hat{\widetilde{U}}$ y por tanto se cumple $(A2)'$.

Finalmente, para $(A3)$: Supóngase que $\widetilde{\mathcal{U}}$ está dado. Eligiendo a V de tal forma que $\widetilde{V} \circ \widetilde{V} \subset \widetilde{U}$, y luego un W de acuerdo a $(A3)$ para X, si $Q = \bigcup_I \widetilde{O}_i$ es arbitrario y $O = \bigcup_I O_i$, entonces por $(A3)$ existe un $N \in \tau$ que satisface $W(O) \subset N \subset V(O)$, y entonces $\widetilde{W}(\widetilde{Q}) \subset \widetilde{W}(\widetilde{O}) \subset \widetilde{N} \subset \widetilde{V(O)}$. Aplicando el inciso (3) del lema 3.21, se obtiene $\widetilde{W}(\widetilde{Q}) \subset \widetilde{N} \subset \widetilde{V} \circ \widetilde{V}(Q) \subset \widetilde{U}(Q)$. Lo anterior prueba $(A3)$.

$\square$

Proposición 3.23. *Dado un espacio cuasi-uniforme topológico* $(X, \mathcal{U}, \tau)$ *tal que la topología* τ *es* T_0*, el mapeo*

$$i : X \longrightarrow \widetilde{X} \quad \textit{dado por} \quad x \longrightarrow \mathcal{N}(x)$$

es un ECUT-morfismo y, más aún, $X \cong i(X) \subset \widetilde{X}$.

Demostración: Si τ es T_0, claramente, siempre que $x \neq y$ se tiene $\mathcal{N}(x) \neq \mathcal{N}(y)$, probando así la inyectividad de i. Suponiendo ahora que $O \in \tau$, entonces $i^{-1}(\widetilde{O}) = \{x : O \in \mathcal{N}(x)\} = O$, por lo cual i es topológicamente continua. Haciendo $j : X \longrightarrow i(X)$ la correstricción de i sobre su imagen, entonces $j(O) = \{\mathcal{N}(x) : x \in O\} = \{\mathcal{N}(x) : \mathcal{N}(x) \in \widetilde{O}\} = \widetilde{O} \cap i(X)$, por lo que j es un mapeo abierto, y entonces un homeomorfismo topológico. La continuidad cuasi-uniforme de i, está dada por el inciso (1) del lema 3.21. Mientras que, por

$$(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)) \in \widetilde{U} \Longleftrightarrow \forall O, N \in \tau : (N \in \mathcal{N}(x)) \ \wedge (U(N) \subset O) \Longrightarrow O \in \mathcal{N}(y)$$

$$\Longleftrightarrow \forall O, N \in \tau : (x \in N) \ \wedge (U(N) \subset O) \Longrightarrow y \in O$$

$$\Longleftrightarrow (x, y) \in \hat{U},$$

y el axioma $(A2)$, $j^{-1} : i(X) \longrightarrow X$ es cuasi-uniformemente continua. $\square$

Para poder probar la completez de $\widetilde{X}$, veamos antes algo más sobre filtros redondos en $\widetilde{X}$.

Lema 3.24. *Para todo filtro redondo* $\mathcal{F}$ *en* $\widetilde{X}$ *existe una base que consiste de conjuntos abiertos de la forma* $\widetilde{O}$*, con* $O \in \tau$.

Demostración: Para $F \in \mathcal{F}$, por ser $\mathcal{F}$ redondo existe $Q = \bigcup_I \widetilde{O}_i \in \mathcal{F}$ y un entorno U, con $\widetilde{U}(Q) \subset \mathcal{F}$. Para $O = \bigcup_I O_i$ se tiene que $Q \subset \widetilde{O}$, y por tanto $\widetilde{O} \in \mathcal{F}$. Ahora podemos aplicar el lema 3.20 y obtenemos $\widetilde{O} \subset \widetilde{U}(Q) \subset F$, que prueba lo deseado. $\square$

Ya con este resultado se puede probar el siguiente teorema muy importante para los propósitos de este trabajo.

Teorema 3.25 ([**12**], [**21**]). *El espacio cuasi-uniforme topológico* $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\tau})$ *es completo.*

DEMOSTRACIÓN: Supóngase que $\mathcal{F}$ es un filtro redondo de Cauchy sobre $\widetilde{X}$. Haciendo

$$\mathcal{F}_0 = \{O : \widetilde{O} \in \mathcal{F}\}.$$

Por el lema inmediato anterior, $\mathcal{F}_0$ es una base de filtro. Más aún, el filtro $\langle \mathcal{F}_0 \rangle$ es redondo y de Cauchy. Verifiquemos esto.

(rd): Aplicando el lema 3.24 y la redondez de $\mathcal{F}$ a un $O \in \mathcal{F}_0$, para obtener un $U \in \mathcal{U}$ y un $\widetilde{N} \in \mathcal{F}$, con $\widetilde{U}(\widetilde{N}) \subset \widetilde{O}$.

(Cy): Suponiendo que $O \in \mathcal{F}_0$ y $U \in \mathcal{U}$, podemos elegir $V \in \mathcal{U}$ con $\widetilde{V} \circ \widetilde{V} \subset \widetilde{U}$. Puesto que $\mathcal{F}$ es de Cauchy y $\widetilde{O} \in \mathcal{F}$, existe un filtro $\mathcal{G} \in \widetilde{O}$, con

$$\mathcal{G} \in \psi \ \wedge \ \widetilde{V}(\psi) \subset \phi \Longrightarrow \phi \in \mathcal{F}.$$

Para este $\mathcal{G}$, en particular

$$M \in \mathcal{G} \ \wedge \ V(M) \subset N \Longrightarrow N \in \mathcal{F}_0, \text{ por lo que } (\mathcal{G}, \langle \mathcal{F}_0 \rangle) \in \widetilde{V}.$$

Ahora, como $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X y $O \in \mathcal{G}$, debe existir un $x \in O$, para el cual $(\mathcal{N}(x), \mathcal{G}) \in \widetilde{V}$. Entonces, de $(\mathcal{N}(x), \mathcal{G}) \in \widetilde{V}$ y $(\mathcal{G}, \langle \mathcal{F}_0 \rangle) \in \widetilde{V}$ se tiene $(\mathcal{N}(x), \langle \mathcal{F}_0 \rangle) \in \widetilde{U}$. Por lo tanto $\langle \mathcal{F}_0 \rangle$ es de Cauchy. Probemos que $\langle \mathcal{F}_0 \rangle \in \widetilde{X}$. Dado que $\langle \mathcal{F}_0 \rangle \in \widetilde{O} \iff O \in \langle \mathcal{F}_0 \rangle \iff \widetilde{O} \in \mathcal{F}$, se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{N}(\langle \mathcal{F}_0 \rangle)$. Así, se ha probado la completez de $\widetilde{X}$. □

Lo que resta ahora es probar la propiedad universal. Probemos primero la unicidad de una extensión.

Lema 3.26. *Si $f : (X, \mathcal{U}, \tau) \longleftrightarrow (X', \mathcal{U}', \tau')$ es un ECUT-morfismo, en donde la topología τ' es T_0, entonces existe a lo más un $g : \widetilde{X} \longrightarrow X'$, que satisface $f = g \circ i$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{F} \in \widetilde{X}$, hacemos

$$E(\mathcal{F}) = \{A' \subset X' : (\exists N' \in \tau')(\exists U \in \mathcal{U}'), \text{ con } f^{-1}(N') \in \mathcal{F} \text{ y } N' <_{\mathcal{U}'} A'\}.$$

Probaremos que cualquier extensión g de f debe satisfacer $\mathcal{N}(g(\mathcal{F})) = E(\mathcal{F})$, y puesto que τ' es T_0, esto probará que g es único.

Para $\subset$: Suponiendo que O' es una vecindad de $g(\mathcal{F})$, por $(A1)$ debe existir un entorno U' y una vecindad N' de $g(\mathcal{F})$ con $N' <_{U'} O'$. Resta por mostrar que si $f^{-1}(N') \in \mathcal{F}$, entonces $O' \in E(\mathcal{F})$. Por la continuidad de g, el conjunto $g^{-1}(N')$ es una vecindad de $\mathcal{F}$, por lo que existe $O \in \tau$ para el cual $\mathcal{F} \in \widetilde{O} \subset g^{-1}(N')$. Ahora, $O = i^{-1}(\widetilde{O}) \subset i^{-1} \circ g^{-1}(N') = f^{-1}(N')$, ya que $g \circ i = f$. Puesto que $O \in \mathcal{F}$, tenemos $f^{-1}(N') \in \mathcal{F}$.

Para $\supset$: Supóngase que $A' \in E(\mathcal{F})$. Por la definición, deben existir N', M' y U' con $f^{-1}(N') \in \mathcal{F}$ y $N' <_{U'} M' \subset A'$. Puesto que g es un ECUT-morfismo, por la proposición 3.15 debe existir un entorno U que satisface $g^{-1}(N') <_{U'} g^{-1}(M')$. Haciendo $Q = g^{-1}(N') = \bigcup_I \widetilde{O}_i$ y $O = \bigcup_I O_i$, se debe tener $\widetilde{O} \subset \widetilde{U}(Q) \subset g^{-1}(M')$, por el lema 3.20. Más aun, $O = i^{-1}(Q) = i^{-1} \circ g^{-1}(N') = f^{-1}(N') \in \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F} \in \widehat{O}$, por lo que $g(\mathcal{F}) \in g(\widetilde{O}) \subset M' \subset A'$ en donde A' es una vecindad de $g(\mathcal{F})$. □

Teorema 3.27 ([**12**], [**21**]). *Si $f : (X, \mathcal{U}, \tau) \longleftrightarrow (X', \mathcal{U}', \tau')$ es un ECUT-morfismo y $(X', \mathcal{U}', \tau')$ es un espacio completo, entonces existe exactamente una extensión de f,*

$$\widetilde{f} : (\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\tau}) \longleftrightarrow (X', \mathcal{U}', \tau'),$$

que satisface $f = \widetilde{f} \circ i$.

DEMOSTRACIÓN: Proponemos dar la definición de la extensión de f mediante:

$$\widetilde{f} : \mathcal{F} \longmapsto x' \text{ en donde } x' \text{ es tal que } \mathcal{N}(x') = E(\mathcal{F}).$$

Para ver que esta definición tiene sentido, primero veamos que $E(\mathcal{F})$ es un filtro redondo de Cauchy. Si $M' \in E(\mathcal{F})$, esto significa que existen $N' \in \tau'$ y $U' \in \mathcal{U}'$, para los cuales $f^{-1}(N') \in \mathcal{F}$ y $N' <_{U'} M'$.

(rd): Dado U', podemos elegir V' de acuerdo a (INT). De tal manera que existe O', tal que $N' <_{V'} O' <_{V'} < M'$. En particular, $O' \in E(\mathcal{F})$.

(Cy): Dado V' elijamos a W' de acuerdo a (INT) y luego un W de acuerdo a (C) para f. Puesto que $\mathcal{F}$ es de Cauchy y $N = f^{-1}(N') \in \mathcal{F}$, existe $x \in N$ con $(\mathcal{N}(x), \mathcal{F}) \in \widetilde{W}$. Ahora, $f(x) \in N'$ y este punto satisface la condición de Cauchy, ya que si $f(x) \in Q' <_{V'} P'$, por (INT), existe O', con $Q' <_{W'} O' <_{W'} P'$. Ahora, por (C), se tiene $f^{-1}(Q') <_W f^{-1}(O')$ y entonces $f^{-1}(O') \in \mathcal{F}$, puesto que $x \in f^{-1}(Q')$ y $(\mathcal{N}(x), \mathcal{F}) \in \widetilde{W}$. Por lo anterior, $P' \in E(\mathcal{F})$ con lo cual queda satisfecha la propiedad de Cauchy.

Por todo lo anterior, la función $\widetilde{f}$ está bien definida. Ahora vamos a probar que es un ECUT-morfismo. Si U' es dado, elegimos un V' de acuerdo a (INT), y luego un V por la aplicación de (C) para f. Suponiendo que $N' <_{U'} M'$, vamos a mostrar que $f^{-1}(N') <_{\widetilde{V}} f^{-1}(M')$. Para ello, por la elección de V', existe O' con $N' <_{V'} O' <_{V'} M'$ y por la elección de V se tiene $f^{-1}(N') <_V f^{-1}(O')$. Con esto ltimo probaremos que

$$\widetilde{f}^{-1}(N') \subset \widetilde{f^{-1}(N')} <_{\widetilde{V}} \widetilde{f^{-1}(O')} \subset \widetilde{f}^{-1}(M'),$$

con lo cual el objetivo quedará establecido. Para la primera inclusión: si $\mathcal{F} \in \widetilde{f}^{-1}(N')$, entonces $N' \in E(\mathcal{F})$, luego $f^{-1}(N') \in \mathcal{F}$ y por tanto $\mathcal{F} \in \widetilde{f^{-1}(N')}$. La inclusión fuerte es válida por el lema 3.20. Ahora, si $\mathcal{F} \in \widetilde{f^{-1}(O')}$, se tiene que $f^{-1}(O') \in \mathcal{F}$ y entonces por definición $M' \in E(\mathcal{F})$, y por tanto $\mathcal{F} \in \widetilde{f}^{-1}(M')$. Esto establece que $\widetilde{f}$ satisface (C).

Ahora sólo falta ver que la función $\widetilde{f}$ es efectivamente una extensión de f. Para ello, si $x \in X$:

$$\begin{aligned} A' \in E(\mathcal{N}(x)) &\Longleftrightarrow (\exists N')(\exists U') : x \in f^{-1}(N') \wedge N' <_{U'} A' \\ &\Longleftrightarrow (\exists N')(\exists U') : f(x) \in N' \wedge N' <_{U'} A' \\ &\Longleftrightarrow (\exists U') : \{f(x)\} <_{U'} A' \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in Int_\tau(A'). \end{aligned}$$

Así $E(\mathcal{N}(x)) = \mathcal{N}(f(x))$, y por lo tanto $\widetilde{f}(i(x)) = f(x)$ para todo $x \in X$. □

En resumen, para cualquier espacio cuasi-uniforme topológico $(X, \mathcal{U}, \tau)$ existe un superespacio completo $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\tau})$, que se construye de una manera estándar, de tal modo que cualquier morfismo de X a un espacio completo Y se extiende de una forma única a su completación $\widetilde{X}$.

Como hemos visto, un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$ es un caso particular de espacio cuasi-uniforme topológico, observándolo de la forma $(X, \mathcal{U}, \tau_{\mathcal{U}})$. En este caso el concepto de filtro de Cauchy se simplifica de la manera siguiente.

Proposición 3.28. *Un filtro $\mathcal{F}$ en el espacio cuasi-uniforme topológico $(X, \mathcal{U}, \tau)$ es de Cauchy, si y sólo si*

$$(Cy - CU) \qquad\qquad (\forall U)(\forall A \in \mathcal{F})(\exists x \in A) : U(x) \in \mathcal{F}.$$

Demostración: Dado que $\{x\} <_U O \Longrightarrow U(x) \subset O$, la implicación $(Cy - CU) \Longrightarrow (Cy)$ es trivialmente válida. Para la implicación inversa, dado U, se obtiene V con $V \circ V \subset U$ y $V(x)$ abierto para cada $x \in X$. Para cada $A \in \mathcal{F}$ existe $x \in A$ que satisface (Cy) para V. Ahora, como $x \in O = V(x)$ y $V(O) = V \circ V(x) \subset U(x)$, se llega a $\{x\} <_V U(x)$, y por tanto $U(x) \in \mathcal{F}$. □

El procedimiento para la completación de un espacio cuasi-uniforme es tambiń un poco más fácil. Es simple ver que los entornos U para los cuales $U(x)$ es abierto para cada $x \in X$ forman una base de la cuasi-uniformidad. Para estos entornos

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widetilde{U} \Longleftrightarrow (\forall A \subset X), A \in \mathcal{F} \Rightarrow U(A) \in \mathcal{G}.$$

Aunque un espacio cuasi-uniforme es un espacio cuasi-uniforme topológico, con $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$, éste no es necesariamente el caso para su completación.

Definición 3.29. *Un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$ es llamado S-completable si la completación de Smyth del espacio $(X, \mathcal{U}, \tau_{\mathcal{U}})$ resulta ser tambiń un espacio cuasi-uniforme. Esto es $\widetilde{\tau_{\mathcal{U}}} = \tau_{\widetilde{\mathcal{U}}}$.*

La siguiente proposición es un criterio de cuándo un espacio cuasi-uniforme es S-completable. Para ello, recordemos que un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$ es llamado estable si para cualquier entorno U el conjunto $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} U(A)$ es tambiń un elemento de $\mathcal{F}$.

Proposición 3.30. *Un espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U})$ es S-completable si y sólo si todo filtro redondo de Cauchy es estable.*

Demostración: Por la proposición 3.13 la inclusión $\widetilde{\tau_{\mathcal{U}}} \subset \tau_{\widetilde{\mathcal{U}}}$ es siempre verdadera.

Sólo si: Dados un filtro $\mathcal{F}$ y un entorno U arbitrarios, por hipótesis $\widetilde{U}(\mathcal{F})$ es una $\widetilde{\tau_{\mathcal{U}}}$-vecindad de $\mathcal{F}$, por lo que existe $N \in \mathcal{F}$ que satisface $\widetilde{N} \subset \widetilde{U}(\mathcal{F})$. Luego $\widetilde{N} \subset \widetilde{U}(\widetilde{F})$ donde $N \subset U(F)$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Así $N \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, y por tanto el filtro es estable.

Si: Para no perder de vista el objetivo, tenemos que mostrar la inclusión faltante $\tau_{\widetilde{\mathcal{U}}} \subset \widetilde{\tau_{\mathcal{U}}}$, lo cual queda establecido si para U y $\mathcal{F}$ arbitrarios mostramos que existe un $O \in \tau_{\mathcal{U}}$, para el cual $\mathcal{F} \in \widetilde{O} \subset \widetilde{U}(\mathcal{F})$. Para probar lo anterior, elijamos a $V \subset U$ tal que $V(x)$ es abierto para cada $x \in X$. Definiendo $O = Int_{\tau_{\mathcal{U}}} \bigcap_{F \in \mathcal{F}} V(F)$. Por estabilidad y redondez, $\mathcal{F} \in \widetilde{O}$. Más aún $\widetilde{O} \subset \widetilde{U}(\mathcal{F})$, ya que si $\mathcal{G} \in \widetilde{O}$, entonces $V(F) \in \mathcal{G}$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Dado que todos los $V(F)$ son abiertos, se cumple $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widetilde{V}$. Puesto que $V \subset U$, se tiene que el filtro $\mathcal{G}$ es un elemento de $\widetilde{U}(\mathcal{F})$. □

En **[21]** y **[22]** se obtiene una respuesta parcial al problema de la S-completación de un espacio cuasi-uniforme asumiendo la condición extra de S-completabilidad del espacio cuasi-uniforme, mencionando que esta suposición está justificada ya que la mayoría de los espacios considerados tienen esta propiedad de ser S-completables. Entendiendo que un espacio cuasi-uniforme es S-completable si su completación dentro de la clase de los espacios cuasi-uniformes topológicos es también un espacio cuasi-uniforme.

De hecho, los espacios cuasi-uniformes S-completables han sido caracterizados por Sünderhauf **[22]**, probando que éstos tienen una S-completación cuasi-uniformemente equivalente a su bicompletación **[6]**. De esta manera, los espacios

S-completables son aquellos espacios cuasi-uniformes cuya S-completación en la categoría de los espacios cuasi-uniformes topológicos está también en la categoría de los espacios cuasi-uniformes.

4. Espacios cuasi-métricos

Definición 4.1. *Dado un conjunto X no vacío, una* **métrica** *sobre un conjunto X, es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $\forall x, y, z \in X$:*

(1) $d(x,x) = 0$,

(2) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$,

(3) $[\ d(x,y) = 0 = d(y,x)\ ] \Longrightarrow x = y$,

(4) $d(y,x) = d(x,y)$.

Si sólo se satisfacen las condiciones (1), (2) y (3), d es llamada una **cuasi-métrica**. *Una* **seudométrica** *si se satisfacen las condiciones (1), (2) y (4). Una* **cuasi-seudométrica** *cuando satisface las condiciones (1) y (2). El par (X, d) recibe el nombre de espacio métrico, cuasi-métrico, seudométrico o cuasi-seudométrico según sea el caso. Con frecuencia se trabaja con cuasi-seudométricas* **extendidas**, *entendiendo en estos casos que la cuasi-seudométrica puede tomar el valor $+\infty$ para algunos pares $(x, y) \in X \times X$.*

Fletcher y Lindgren [**6**], al igual que Kelly [**11**], usan el término cuasi-métrica para referirse a una cuasi-métrica T_1, es decir a una cuasi-métrica que cumple con la condición $\forall x, y \in X : d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. No es difícil ver que en este caso, el espacio métrico (X, d) es T_1, más aún, es T_2 y por tanto es una condición más fuerte que (3), ya que con esta condición (3) únicamente se asegura que el espacio (X, d) es T_0, pero no necesariamente T_1. Algunos autores (por ejemplo [**4**]) utilizan el término «semimétrica» para referirse a las seudométricas. La **conjugada** de una cuasi-seudométrica d es la cuasi-seudométrica d^{-1} definida como $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$, para $x, y \in X$. A partir de las cuasi-seudométricas d y d^{-1}, la función $d^s(x, y) = \max\{d(x, y), d^{-1}(x, y)\}$, con $x, y \in X$, es una seudométrica sobre X, que se llama la **seudométrica inducida** por d. Claramente, la seudométrica d^s es una métrica si y sólo si d es una cuasi-métrica. Las desigualdades siguientes son trivialmente ciertas,

$$d(y,x) \leqslant d^s(x,y) \quad \text{y} \quad d^{-1}(x,y) \leqslant d^s(x,y). \tag{11.1}$$

Si la pareja (X, d) es un espacio cuasi-seudométrico, se construye la **cuasi-uniformidad asociada**, $\mathcal{U}_d$, utilizando como base la familia de relaciones $\beta = \left\{\ U_n \mid n \in \mathbb{N}\ \right\}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \left\{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < 2^{-n}\right\}.$$

Es fácil comprobar que la continuidad cuasi-uniforme para los espacios cuasi-seudométricos se caracteriza de la siguiente manera:

Lema 4.2. *Dada una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ entre espacios cuasi-seudométricos, ésta es cuasi-uniformemente continua con respecto a $\mathcal{U}_{d_X}$ y $\mathcal{U}_{d_Y}$, si y sólo si, para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ siempre que $d_X(x, y) < \delta$, para todo $x, y \in X$.*

En este tipo de espacios cuasi-uniformes (los espacios cuasi-seudométricos) el preorden asociado $\leqslant_d = \leqslant_{\Psi_d}$ es caracterizado por $x \leqslant_d y$ si y sólo si $d(x,y) = 0$. Cuando d es una cuasi-métrica, el preorden $\leqslant_d$ es un orden parcial. Si el espacio $(X, \tau(d))$ es T_1, entonces $\leqslant_d$ es la relación de identidad en X. Se dice [**17**] que un espacio cuasi-seudométrico (X,d) es **dirigido** cuando el conjunto preordenado $(X, \leqslant_d)$ es dirigido. Asimismo, se dice [**15**] que un espacio cuasi-métrico (X,d) **tiene un máximo** (res. **mínimo**) si y sólo si su orden parcial asociado $\leqslant_d$ tiene un máximo (resp. mínimo). Sean (X,d) un espacio cuasi-métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. La función f se llama **creciente** (resp. **decreciente**, **estricamente creciente**, **estrictamente decreciente**) si y sólo si, para todos $x, y \in X$, la desigualdad $x \leqslant_d y$ implica que $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$, $f(x) < f(y)$, $f(x) > f(y)$).

Lema 4.3 ([**17**])**.** *Si (X,d) es un espacio cuasi-métrico con $x, y, u, v \in X$, entonces*

$$(u \leqslant_d x \quad \text{y} \quad y \leqslant_d v) \Rightarrow d(u,v) \leqslant d(x,y).$$

Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios cuasi-seudométricos (X, d_X) y (Y, d_Y) se llama **inmersión isométrica** si y sólo si

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y).$$

Una **isometría** es una inmersión isométrica biyectiva.

Toda isometría entre espacios métricos es una equivalencia uniforme con respecto a las uniformidades inducidas por las métricas correspondientes. Dado un espacio cuasi-seudométrico (X,d), una función $f : X \to X$ se llama una **contracción** si y sólo si:

$$\exists c < 1 : \forall x, y \in X, \ d(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d(x,y).$$

Un espacio métrico X es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión en X tiene una subsucesión de Cauchy. En un espacio cuasi-seudométrico (X,d), para $x \in X$ y $r > 0$, los conjuntos

$$B_d(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \quad \text{y} \quad B_d[x,r] = \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}$$

se llaman: la **bola abierta** con centro en x y de radio r, y la **bola cerrada** con centro en x y de radio r, respectivamente. Si d es una cuasi-seudométrica en un conjunto X, la base $\beta = \{B(x,r) \mid x \in X, \ r > 0\}$ genera una topología que se llama la **topología inducida** por d y se denota por $\tau(d)$.

Kelly [**11**] ha estudiado las propiedades de los espacios bitopológicos de la forma $\left(X, \tau(d), \tau\left(d^{-1}\right)\right)$ y considera a este espacio como la estructura topológica natural asociada a la cuasi-seudométrica d. En este contexto de los espacios bitopológicos:

Lema 4.4. [**11**] *Si d es una cuasi-seudométrica en X, entonces d y d^{-1} son cuasi-métricas T_1 si y sólo si $\left(X, \tau(d), \tau\left(d^{-1}\right)\right)$ es Hausdorff por pares.*

En donde, un espacio bitopológico (X, τ_1, τ_2) es Hausdorff por pares, si para cada par $x, y \in X$ existen conjuntos U, τ_1-abierto y V, τ_2-abierto, con $U \cap V = \emptyset$.

Lema 4.5. [**3**] *Si (X,d) es un espacio cuasi-métrico, entonces*

1. *La topología $\tau(d)$ es T_0.*
2. *$\tau(d)$ es T_1 si y sólo si $\forall x \neq y : d(x,y) > 0$.*

Como bien sabemos, un espacio topológico (X, τ) se llama **metrizable** si existe una métrica d en X tal que $\tau = \tau(d)$. Los conceptos correspondientes para cuasi-métricas, seudométricas y cuasi-seudométricas se definen de manera similar.

El concepto de espacio cuasi-métrico pesable fue definido por Matthews [**13**] en su estudio topológico de la semántica de redes de flujo de datos, enfocándose en topologías que no son de Hausdorff [**12**], [**16**].

Definición 4.6. *Un espacio cuasi-métrico* (X, d) *es llamado* **pesable** *si existe una función* $w : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$*, tal que*

$$\forall x, y \in X : d(x, y) + w(x) = d(y, x) + w(y).$$

A w *se le llama* **función de peso** *y al valor* $w(x)$ *se le dice el* **peso** *de* x*.*

Se utiliza la notación (X, d, w) para referirse a un espacio cuasi-métrico pesable con una función de peso w. No es difícil verificar que si (X, d, w) es un espacio cuasi-métrico pesable, entonces la función de peso w es decreciente con respecto al preorden cuasi-métrico.

En un espacio cuasi-métrico (X, d), para $A, B \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$, la notación $A <_\varepsilon B$ significa

$$\forall x, y \in X, \ \left[x \in A \ \text{ y } \ d(x, y) < \varepsilon\right] \Rightarrow y \in B.$$

En este caso se dice que A está contenido en B con margen ε.

Otra caracterización en términos de unión de bolas abiertas es como sigue

$$\forall M, N \subseteq X, \ M <_\varepsilon N \iff \bigcup_{x \in M} B(x, \varepsilon) \subseteq N.$$

En un espacio cuasi-métrico las bases de un filtro redondo se caracterizan de la siguiente manera: una base de filtro $\mathcal{B}$ en un espacio cuasi-métrico (X, d) es **redonda** si cumple

$$(\forall B \in \mathcal{B})(\exists A \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0) : A <_\varepsilon B.$$

Sea (X, d) un espacio cuasi-seudométrico y sea τ la topología generada por d, el espacio (X, d) se llama **interpolativo** si cumple

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A, B \in \tau : \exists C \in \tau : A <_\varepsilon B \Rightarrow A <_\delta C <_\delta B.$$

Si $(x_n)_n$ es una sucesión en un espacio cuasi-seudométrico (X, d), entonces $(x_n)_n$ se llama:

- d^s**-Cauchy** si
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \forall n, m \geqslant n_0, \ d^s\left(x_n, x_m\right) < \varepsilon.$$
- **K-Cauchy por la izquierda** si
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \forall m \geqslant n \geqslant n_0, \ d\left(x_n, x_m\right) < \varepsilon.$$
- **K-Cauchy por la derecha** si
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \forall m \geqslant n \geqslant n_0, \ d\left(x_m, x_n\right) < \varepsilon.$$

Similarmente para una red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ en X, esta es llamada:

- d^s**-Cauchy** si
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha_0 \in I) : \forall \alpha, \beta \geqslant \alpha_0, \ d^s\left(x_\alpha, x_\beta\right) < \varepsilon.$$
- **K-Cauchy por la izquierda** si
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha_0 \in I) : \forall \alpha \geqslant \beta \geqslant n_0, \ d\left(x_\beta, x_\alpha\right) < \varepsilon.$$

- **K-Cauchy por la derecha** si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha_0 \in I) : \forall \alpha \geqslant \beta \geqslant \alpha_0,\ d\left(x_\alpha, x_\beta\right) < \varepsilon.$$

De acuerdo a esta definición, se tiene:

(i) d^s-Cauchy $\Rightarrow$ K-Cauchy por la izquierda.
(ii) d^s-Cauchy $\Rightarrow$ K-Cauchy por la derecha.
(iii) $(x_n)_n$ $((x_\alpha)_{\alpha\in I})$ es d^s-Cauchy si y sólo si es K-Cauchy por la izquierda y por la derecha.

En el caso de que (X, d) es un espacio cuasi-seudométrico, como ya se ha mencionado, la familia $\mathcal{B} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde $U_n = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < 2^{-n}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es una base para una cuasi-uniformidad $\mathcal{U}_d$ sobre X, llamada la *cuasi-uniformidad generada por d*. La cuasi-seudométrica d^{-1} genera a la cuasi-uniformidad $\mathcal{U}^{-1}$, y la seudométrica inducida d^s genera a la uniformidad $\mathcal{U}^s$. En el caso en que d es una seudométrica, entonces $d = d^{-1}$ y $\mathcal{U}_d$ es una uniformidad. La topología inducida por una cuasi-seudométrica d es idéntica a la inducida por la cuasi-uniformidad generada por d, es decir $\tau(d) = \tau(\mathcal{U}_d)$. Una cuasi-uniformidad $\mathcal{U}$ es llamada cuasi-seudometrizable si existe una cuasi-seudométrica d para la cual $\mathcal{U} = \mathcal{U}_d$. En tal caso la topología cuasi-uniforme $\tau(\mathcal{U})$ que genera $\mathcal{U}$ también es seudometrizable, ya que $\tau(\mathcal{U}) = \tau(\mathcal{U}_d)$. Sin embargo, la metrizabilidad de una topología uniforme no implica la metrizabilidad de la uniformidad que la generó [**20**]. Es decir, hay ejemplos de uniformidades $\mathcal{U}$ que generan una topología $\tau(\mathcal{U})$ que es metrizable pero la uniforfmidad $\mathcal{U}$ no es metrizable. Un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es **metrizable** si existe una métrica d definida en X y que genere a $\mathcal{U}$. En este caso también se dice que la uniformidad $\mathcal{U}$ es metrizable y se le conoce como la **uniformidad métrica** asociada a d. Una condición necesaria y suficiente, relacionada con cuasi-uniformidades, para que un espacio topológico sea cuasi-seudometrizable se menciona en el resultado siguiente.

Teorema 4.7. *Un espacio topológico (X, τ) es cuasi-seudometrizable si y sólo si existe una cuasi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X que genera a τ y que tiene una base numerable. El espacio (X, τ) es cuasi-metrizable si y sólo si es cuasi-seudometrizable y T_1.*

En la sección 3, se cubrió el concepto de espacio cuasi-uniforme S-completable y se dio una caracterización de los espacios S-completables en términos de filtros redondos de Cauchy estables 3.30. Enseguida se da un teorema que asegura que mediante una condición suficiente, un espacio cuasi-métrico es S-completable.

Teorema 4.8 ([**12**]). *Si (X, d, φ) es un espacio cuasi-métrico pesable con función peso φ, entonces el espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U}_d)$ es S-completable.*

Demostración: Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ una red K-Cauchy por la izquierda en X. Para $\beta \in D$, hagamos $F_\beta = \{x_\alpha : \alpha \in D \text{ y } \alpha \geqslant \beta\}$ y formemos el filtro $\mathcal{F}$ generado por la familia $\{F_\beta : \beta \in D\}$. Fijando $\epsilon > 0$ vamos a mostrar que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} B_\epsilon(F) \in \mathcal{F}$. Asúmase lo contrario. Eligiendo un elemento arbitrario $\gamma_0 \in D$, vamos a definir de manera inductiva sucesiones $(\alpha(n))$, $(\beta(n))$, $(\gamma(n))$ de elementos en D. Supóngase que para algún $n \in \mathbb{N}$ hemos definido para $k < n$ los elementos $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\gamma(k)$ en D, de tal manera que $\gamma(k-1) \leqslant \alpha(k) \leqslant \beta(k) \leqslant \gamma(k)$. Elegimos ahora a $\alpha(n)$ tal que $\alpha(n) \geqslant \gamma(n-1)$ y $d(x_\alpha, x_{\alpha'}) < 2^{-n}$ siempre que $\alpha, \alpha' \in D$ y $\alpha(n) \leqslant \alpha \leqslant \alpha'$. Despues hallamos un $\beta(n) \in D$ tal que $\beta(n) \geqslant \alpha(n)$ y $x_{\beta(n)} \notin \bigcap_{F\in\mathcal{F}} B_\epsilon(F)$. Finalmente se elige $\gamma(n) \in D$ de forma que $\gamma(n) \geqslant \beta(n)$ y $x_{\beta(n)} \notin B_\epsilon(F_{\gamma(n)})$, completando así la definición inductiva. Por la construcción se tiene,

$$(1) \quad d(x_{\beta(k)}, x_{\beta(s)}) < 2^{-k} \quad y \quad (2) \quad d(x_{\beta(s)}, x_{\beta(k)}) > \epsilon$$

siempre que $k, s \in \mathbb{N}$ y $k < s$. Se sigue de la primera desigualdad y de la definición de función peso, que la sucesión $(\varphi(x_{\beta(s)}))_s$ es acotada. Eligiendo una subsucesión de esta última sucesión, vemos que las condiciones (1) y (2) aplicadas a los elementos de esta subsucesión contradicen la definición de ser φ una función peso. Deducimos entonces que debe existir un $\beta_1 \in D$ tal que $F_{\beta_1} \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} B_\epsilon(F)$. Por tanto $\mathcal{F}$ es un filtro K-Cauchy por la izquierda redondo y estable en X. Se sigue que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy sobre el espacio uniforme asociado $\left(X, \mathcal{U}_d^s\right)$. Concluimos que el espacio cuasi-uniforme $(X, \mathcal{U}_d)$ es S-completable. □

5. Espacios de complejidad

El espacio cuasi-métrico $(\mathcal{C}, d_\mathcal{C})$ de funciones de complejidad fue introducido por Schellekens [**16**]. Haciendo la convención de que $1/\infty = 0$,

$$\mathcal{C} = \left\{ f : \omega \longrightarrow (0, \infty] \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} < \infty \right\},$$

con la cuasi-métrica definida por

$$d_\mathcal{C}(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left[\left(\frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} \right) \vee 0 \right],$$

y especificando una función de peso $w_\mathcal{C}$ en este espacio, mediante

$$w_\mathcal{C}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)}.$$

Después de que Schellekens definió el espacio de complejidad, Romaguera y Schellekens [**14**] introdujeron el espacio cuasi-métrico de complejidad dual $\mathcal{C}^*$, con el objetivo de obtener resultados adicionales sobre las propiedades cuasi-métricas y topológicas del espacio de complejidad. El espacio de complejidad dual es un cono (o espacio semilineal) normado asimétricamente [**4**], mientras que el espacio de complejidad original no admite esta estructura.

$$\mathcal{C}^* = \left\{ f : \omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f(n) < \infty \right\}.$$

Aquí la cuasi-métrica está definida mediante

$$d_{\mathcal{C}^*}(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} [(g(n) - f(n)) \vee 0].$$

Y también han definido una función de peso $w_{\mathcal{C}^*}$ para $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$,

$$w_{\mathcal{C}^*}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f(n).$$

De esta manera, $(\mathcal{C}, d_\mathcal{C})$ y $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$ son espacios cuasi-métricos pesables y, por lo tanto, son Smyth-completables.

Si denotamos por $u(x)$ a la norma asimétrica en $\mathbb{R}$ definida como $u(x) = x \vee 0 = max\{x, 0\}$, entonces $\mathcal{C}^*$ resulta ser un cono normado asimétricamente por la función real no negativa $q_{\mathcal{C}^*}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} u(f(n))$, de tal forma que la cuasi-métrica $d_{\mathcal{C}^*}$ puede obtenerse de la norma asimétrica $q_{\mathcal{C}^*}$ de la manera siguiente:

$$d_{\mathcal{C}^*}(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} u(g(n) - f(n))$$

para cada $f, g \in \mathcal{C}^*$.

Además de la suma para sucesiones en ambos espacios $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$, se tienen las operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ definidas de manera puntual. Dado un valor cualquiera $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, usaremos la notación $\overline{c}$ para representar a la función constante $\overline{c}(n) = c$, para todo $n \in \omega$. Si $n \in \mathbb{N}$, la notación $\widehat{n}$ indica a la sucesión f tal que $f(k) = 1$ si $k < n$ y $f(k) = 0$ si $k \geqslant n$, es decir, que tiene n números 1's inicialmente, seguida por la sucesión $\overline{0}$. La función $\overline{0}$ es el elemento mínimo de $\mathcal{C}^*$ y corresponde directamente al mínimo $\perp$ de los dominios semánticos.

En [**16**], Schellekens da las razones heurísticas para definir a la cuasi-métrica d_C del modo que lo hizo. Su definición está motivada por el siguiente argumento. Si P y Q son dos algoritmos, P con función de complejidad $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ y Q con función de complejidad $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, entonces para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ se podría usar la diferencia $f(n) - g(n)$ para cuantificar el beneficio obtenido (en términos de reducción de complejidad) al remplazar el algoritmo P por el algoritmo Q. Si en vez de simplemente utilizar esa diferencia, la remplazamos por el cociente $\frac{f(n)-g(n)}{f(n)}$, obtenemos una medida del progreso relativo al algoritmo inicial P. Sin embargo, si $f(n)$ toma un valor muy grande comparado con el valor de $g(n)$, esta última expresión tiende a 1, pues $1 - \frac{g(n)}{f(n)} \longrightarrow 1$ cuando $\frac{g(n)}{f(n)} \longrightarrow 0$. Dado que se busca poder distinguir el nivel de beneficio para distintos valores de $g(n)$ (aún cuando se tengan valores de $f(n)$ muy grandes), se reemplaza la última expresión por $\frac{f(n)-g(n)}{f(n)g(n)} = \frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)}$.

La asimetría de d_C ocasiona cierta pérdida de información. Sin embargo éste es un costo necesario pues es precisamente la ausencia de simetría lo que permite elegir al algoritmo más eficiente. Por ejemplo, si el algoritmo Q es más eficiente que P en todas las entradas, esto significa que para toda n, $g(n) < f(n)$ y por lo tanto $d_{\mathcal{C}}(g, f) = 0$. Nótese que esto último también muestra que la cuasi-métrica $d_{\mathcal{C}}$ no es T_1.

Como puede observarse, en el espacio de complejidad $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$, el preorden cuasi-métrico coincide con el orden parcial entre sucesiones reales. Esto es

$$[f \leqslant_d g \Leftrightarrow f \leqslant g] \equiv [f \leqslant_d g \Leftrightarrow \forall n \in \omega,\ f(n) \leqslant g(n)].$$

Mientras que en el espacio de complejidad dual $(\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*})$ se tiene

$$[f \leqslant_{d^*} g \Leftrightarrow g \leqslant f] \equiv [f \leqslant_{d^*} g \Leftrightarrow \forall n \in \omega,\ g(n) \leqslant f(n)].$$

Hay algunas variaciones posibles para definir el espacio de complejidad. En [**16**], Schellekens empieza definiendo la distancia de complejidad solamente entre funciones de complejidad de programas escritos en un mismo lenguaje de programación y que calculen la misma función parcial recursiva. Después, generaliza esa primera definición y da la que hemos presentado arriba, donde $\mathcal{C}$ abarca a todas las funciones de complejidad e incluso, como él mismo lo indica, a funciones que no necesariamente representan la complejidad de algún algoritmo.

Usamos el simbolo $\mathcal{C}_0^*$ para denotar el subconjunto de $\mathcal{C}^*$ formado por las funciones estrictamente positivas. En ambos espacios (en el espacio de complejidad original y en el dual) indicamos el orden puntual por $\leqslant$. Un funcional $\xi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es *monótono* si $\xi f \leqslant \xi g$ siempre que $f \leqslant g$, para todo par $f, g \in \mathcal{C}$. Los funcionales monótonos en $\mathcal{C}^*$ se definen de la misma forma. Dada una función $g \in \mathcal{C}$, un funcional $\xi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es llamado *un funcional de mejora con respecto a g* siempre que se satisface $\forall n \in \omega : \xi^{n+1} g \leqslant \xi^n g$. Si el funcional ξ is monótono, para que éste sea un funcional de mejora con respecto a g, basta con verificar que $\xi g \leqslant g$.

El *mapeo de inversión* $\Psi : (\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*}) \to (\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ es el mapeo que invierte a cada una de las sucesiones f, esto es: $\Psi(f) = 1/f$, donde la sucesión $1/f$ está definida puntualmente (recordemos la convención de que $1/0 = \infty$). El mapeo Ψ es una isometría, ya que es una biyección que satisface $d_{\mathcal{C}}\big(\Psi(f), \Psi(g)\big) = d_{\mathcal{C}^*}(f, g)$. Esto permite transportar algunas propiedades del espacio dual al espacio de complejidad (aquellas que se mantienen bajo isometría).

En [**14**], Romaguera y Schellekens demuestran que $\mathcal{C}^*$, el espacio dual de complejidad, es bicompleto. Como sabemos, todos los espacios cuasi-métricos pesables son S-completables [**12**]. Además, también se sabe que la completación de Smyth de un espacio cuasi-uniforme S-completable es cuasi-uniformemente equivalente a su bicompletación [**22**]. Lo anterior implica que $\mathcal{C}^*$ es Smyth-completo, por lo que el espacio de complejidad $\mathcal{C}$ también es Smyth-completo, en virtud de la isometría dada entre estos dos espacios por el mapeo de inversión Ψ. Como se verá en las próximas dos secciones, la S-completitud de $\mathcal{C}$ es crucial para poder asegurar la existencia de puntos fijos de algunos funcionales en $\mathcal{C}$ que están asociados con las ecuaciones de recurrencia de ciertos algoritmos del tipo «divide y vencerás».

Como se ha mencionado, la distancia de complejidad $d_{\mathcal{C}}(f, g)$ entre dos funciones $f, g \in \mathcal{C}$ mide el progreso relativo que se hace al bajar la complejidad remplazando un programa P con función de complejidad f por un programa Q con función de complejidad g. Esta misma cantidad se puede expresar como $d_{\mathcal{C}^*}\big(\Psi^{-1}(f), \Psi^{-1}(g)\big)$. Además, si $f, g \in \mathcal{C}^*$, la igualdad $d_{\mathcal{C}^*}(f, g) = 0$ se puede interpretar como que Q es más eficiente que P.

6. Orden de algoritmos divide y vencerás

Con la finalidad de aplicar la teoría al análisis del algoritmo *Mergesort*, que es un algoritmo de ordenamiento basado en comparaciones y es del tipo «divide y vencerás», Schellekens introduce otras variantes del espacio de complejidad, como veremos un poco más adelante.

Los algoritmos divide y vencerás, lo que hacen esencialmente es dividir recursivamente un problema en subproblemas. Se resuelve cada uno de éstos separadamente por el mismo algoritmo y finalmente se combinan las soluciones de los subroblemas para obtener la solución del problema original. La estrategia divide y vencerás es una técnica ampliamante utlizada en el diseño de algoritmos eficientes [**1**]. Por lo general, la función de complejidad f de un algoritmo del tipo «divide y vencerás» es la solución de una ecuación de recurrencia T de la forma $T(1) = c$,

$$\text{y} \quad T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + h(n) \quad \text{para} \quad n > 1,$$

donde $a > 1$ representa el número de subproblemas en que se divide el problema dado, b representa el tamaño de cada subproblema, mientras que $h(n)$ representa el tiempo necesario para combinar las soluciones parciales y construir la solución al problema de tamaño n.

Como el caso base de la ecuación de recurrencia T está dado para $n = 1$ en vez de $n = 0$, la primera adaptación es cambiar el dominio de las funciones de ω a $\mathbb{N}$. Es común suponer que los algoritmos del tipo «divide y vencerás» siempre terminan, así que sus funciones de complejidad nunca toman el valor ∞. Por esta razón la segunda adaptación consiste en quitar dicho valor de su codominio. Para los algoritmos de ordenamiento basados en comparaciones, Schellekens toma como medida de complejidad el número de comparaciones que realiza el algoritmo para ordenar completamente una lista de longitud n. Además hace la suposición de que todos estos algoritmos empiezan encontrando la longitud de la lista de entrada y terminan inmediatamente si dicha longitud es menor que 2. Esto implica que en tales casos no se realiza ninguna comparación y por lo tanto se tiene $f(1) = 0$. Claramente, las listas de longitud 1 son los únicos casos en que estas funciones de complejidad pueden valer cero. Aún así, considerando tales casos, el codominio de las funciones queda como $[0, \infty)$.

En concreto, para cada número real $c \geqslant 0$, se define el espacio $\mathcal{C}_c$ como sigue

$$\mathcal{C}_c = \left\{ f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty) \;\middle|\; \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{f(n)} < \infty,\ f(1) = c \ \text{ y } (f(n) > 0 \text{ si } n > 1) \right\}.$$

La condición de convergencia de la serie garantiza la convergencia de las series que se usan en la demostración del teorema 6.1. La condición ($f(n) > 0$ si $n > 1$) es necesaria para evitar la división entre cero, como se muestra enseguida. Dado que en $\mathcal{C}_c$ existe la posibilidad de que las funciones tomen el valor 0 (cuando $n = 1$ y $c = 0$), hay que formular la definición de la cuasimétrica $d_{\mathcal{C}}$ de modo que se pueda aplicar a estos casos en $\mathcal{C}_c$. Esto se hace con la expresión

$$d_{\mathcal{C}_c}(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left\{ \begin{matrix} 0 & si & f(n) \leqslant g(n) \\ \frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} & si & f(n) > g(n) \end{matrix} \right\}.$$

Por simplicidad, abusamos de la notación y no escribiremos el segundo subíndice, «c», ya que ambas cuasimétricas funcionan de la misma forma y la única diferencia entre ellas radica en sus dominios de aplicación, lo que será claro por el contexto en cada instancia particular. Para establecer algunas propiedades de las recurrencias asociadas a los algoritmos del tipo «divide y vencerás», Schellekens define el espacio $\mathcal{C}_c \mid b$, otra variante del espacio de complejidad. Para cada número natural $b > 1$ se tiene

$$\mathcal{C}_c \mid b = \left\{ f : \left\{ b^k \mid k \in \omega \right\} \longrightarrow [0, \infty) \mid \exists g \in \mathcal{C}_c, \forall k \in \omega, f(b^k) = g(b^k) \right\}.$$

Esto quiere decir que las funciones pertenecientes a $\mathcal{C}_c \mid b$ son las restricciones de funciones en $\mathcal{C}_c$ al subconjunto de números naturales formado por las potencias del número b, es decir restringidas al dominio $\left\{1, b, b^2, ..., b^k, ...\right\}$. En el espacio $\mathcal{C}_c \mid b$ también se puede aplicar la cuasimétrica $d_{\mathcal{C}}$.

Teorema 6.1 (Mapeo de contracción). *Sea T la ecuación de recurrencia dada por*

$$T(n) = \begin{cases} c & si \quad n = 1. \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + h(n) & si \quad n > 1. \end{cases}$$

y Φ_T el funcional inducido por T en el espacio $\mathcal{C}_c \mid b$, es decir, $\Phi_T : \mathcal{C}_c \mid b \longrightarrow \mathcal{C}_c \mid b$, con

$$[\Phi_T f](n) = \begin{cases} c & si \quad n = 1. \\ a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + h(n) & si \quad n > 1. \end{cases}$$

Entonces Φ_T es un mapeo de contracción con respecto a $d_{\mathcal{C}}$ si y sólo si $a > 1$, en cuyo caso la constante de contracción es $\frac{1}{a}$.

Como ejemplo del funcional de inversión $\Psi : (\mathcal{C}^*, d_{\mathcal{C}^*}) \to (\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$, si denotamos simplemente por Φ al funcional Φ_T del teorema 6.1, es posible definir un funcional correspondiente $\Phi^* : \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}^*$ mediante la composición $\Phi^* = \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi$ (con la convención de que $\frac{1}{\infty} = 0$) [**14**]. Si $f \in \mathcal{C}^*$, se tiene

$$\left[\Phi^*(f)\right](n) = \begin{cases} \frac{1}{c}, & n = 1, \\ \frac{f(\frac{n}{b})}{a + h(n) f(\frac{n}{b})}, & n \in \left\{b^k \mid k \geqslant 1\right\}. \end{cases}$$

El siguiente resultado juega un papel crucial en la obtención de una aplicación de la S-completación de un espacio cuasi-uniforme.

Proposición 6.2. *Una ecuación de recurrencia ε de un algoritmos divide y vencerás tiene una solución única. Si f es la solución de ε y ϕ_ε es el funcional asociado a esta ecuación, entonces: siempre que ϕ_ε sea un funcional de mejora con respecto a una función g, se debe tener $f \leqslant g$.*

Demostración: Si f es la solución a la ecuación ε, se debe tener $\phi_\varepsilon(f) = f$. Luego, $\widetilde{\phi_\varepsilon}([(f)_n]) = [\phi_\varepsilon^n((f)_n)] = [(f)_n]$. Esto significa que f es un punto fijo de $\widetilde{\phi_\varepsilon}$. Por el Teorema 6.1, ϕ_ε es un mapeo de contracción sobre $\mathcal{C}_c$, y por el Teorema de extensión 3.27, $\phi_\varepsilon(f) = f$ se extiende de manera única a un mapeo contracción $\widetilde{\phi_\varepsilon}$ sobre $\widetilde{\mathcal{C}_c}$. Por el Teorema de Banach, $\widetilde{\phi_\varepsilon}$ tiene un único punto fijo, que es solución la ecuación ε. Esto es,

$$Fix(\widetilde{\phi_\varepsilon}) = [\phi_\varepsilon^n((f)_n)] = [(f)_n].$$

Ahora, si ϕ_ε es un funcional de mejora con respecto a la función g, entonces: $\forall n > 0$, $\phi_\varepsilon g \leqslant_d g$. En particular $lim_n d(\phi_\varepsilon^n g, g) = 0$ y entonces también se tiene $lim_n \widetilde{d}([(\phi_\varepsilon g)_n], [(g)_n]) = 0$. Por tanto, $\widetilde{d}([(f)_n], [(g)_n]) = 0$, es decir que $f \leqslant g$. $\square$

Corolario 6.3. *Si una ecuación de recurrencia ε, correspondiente a un algoritmo divide y vencerás, tiene como solución a una función f, y ϕ_ε es el funcional asociado a esta ecuación, entonces siempre que ϕ_ε sea un funcional de mejora con respecto a una función g, se tiene $f \in O(g)$.*

7. Orden de algoritmos divide y vencerás probabilistas

Los algoritmos del tipo «divide y vencerás probabilistas» tienen una estructura recursiva que sirve como base para establecer relaciones de recurrencia [**1**], [**8**]. Dada una ecuación de recurrencia T, a ésta se le asocia un funcional que tiene un único punto fijo f_T, mismo que es la solución de la recurrencia correspondiente. Esto se logra construyendo un funcional monótono Φ_T asociado a una relación de recurrencia dada T, para el que existe una función de complejidad g tal que $g \leqslant \Phi_T g$. Dada la completitud según Smyth [**19**] del espacio (C, d_C), la secuencia de iteraciones $(\Phi_T^k g)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en (C, d_C^s) a alguna función $f_T \in C$ la cual es el único punto fijo del funcional Φ_T, y por lo tanto también es la solución a la ecuación de recurrencia T. Además, si Φ_T es un funcional de mejora para alguna $g \in C$, entonces $f_T \leqslant g$, lo que implica $f_T(n) \in O(g(n))$, especificando así el orden de complejidad de f_T.

Observación 7.1. *En* [**7**]*, al estudiar algunos tipos de algoritmos «divide y vencerás probabilistas», los autores utilizan la notación $\mathcal{C}_0$ con un significado diferente al que le da Schellekens en* [**16**]*. En lo sucesivo, $\mathcal{C}_0$ denota el subespacio de $\mathcal{C}$ formado por las funciones que toman solamente valores finitos, es decir,*

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ f \in \mathcal{C} \mid \forall n \in \omega : f(n) < \infty \right\}.$$

Proposición 7.2. [**7**] *Si $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funcional monótono creciente y $g \in \mathcal{C}$ es una función tal que $g \leqslant \Phi g$, entonces:*

(1) $\exists f \in \mathcal{C} : \lim_{k\to\infty} (d_{\mathcal{C}})^s \left(f, \Phi^k g\right) = 0$,

(2) $\forall k \in \omega : \Phi^k g \leqslant f \leqslant \Phi f$.

Proposición 7.3. [**7**] *Si $(f_k)_k$ es una sucesión en $\mathcal{C}_0$ y $f \in \mathcal{C}_0$ es una función para la cual $\lim_{k\to\infty} (d_{\mathcal{C}})^s (f, f_k) = 0$, entonces la sucesión $(f_k)_k$ converge puntualmente a f con respecto a la métrica Euclideana. Es decir, dado $n \in \omega$ y $\varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall k \geqslant k_0$, $\left|f(n) - f_k(n)\right| < \varepsilon$.*

Teorema 7.4. [**7**] *Sea T una ecuación de recurrencia y sea $n_0 \geqslant 2$ tal que para $n \geqslant n_0$,*

$$T(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n) T(k),$$

donde $u \in \mathcal{C}_0$ y $(v_k)_k$ es una sucesión de funciones positivas definidas sobre $\mathbb{N}$ para las cuales

$$\exists K > 0 : \forall n > n_0, \sum_{k=n_0}^{n-1} v_k(n) \leqslant K.$$

El funcional $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, definido para toda $f \in \mathcal{C}$ mediante

$$\Phi f(n) = \begin{cases} T(1) & si \quad n = 0, \\ T(n) & si \quad 1 \leqslant n \leqslant n_0 - 1, \\ u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n) f(k) & si \quad n \geqslant n_0, \end{cases}$$

tiene un punto fijo único $f_T \in \mathcal{C}_0$ que es la solución de T. Además, si Φ es de mejora con respecto a alguna $g \in \mathcal{C}$, entonces $f_T \leqslant g$ y por lo tanto $f_T \in O(g)$.

Demostración: Por construcción es claro que Φf está en $\mathcal{C}$, puesto que $u \in \mathcal{C}$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\Phi f(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{u(n)} < \infty.$$

Más aún, Φ es un operador monótono creciente puesto que para $f \leqslant g$, se tiene

$$\Phi f(n) = \Phi g(n), \quad \text{para } n = 0, 1, ..., n_0 - 1$$

$$\text{y } \Phi f(n) \leqslant u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n) f(k) \quad \text{si } n \geqslant n_0.$$

Ahora consideremos la función $g : \omega \longrightarrow (0, \infty)$ definida por $g(0) = T(1)$, $g(n) = T(n)$, si $n = 1, ..., n_0 - 1$ y $g(n) = u(n)$ para todo $n \geqslant n_0$. Puesto que $u \in \mathcal{C}_0$, se sigue que $g \in \mathcal{C}_0$. Además, $g(n) = \phi g(n)$ para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$, y también $g(n) \leqslant \Phi g(n)$ para todo $n \geqslant n_0$, dada la construcción de Φ. Podemos aplicar ahora la proposición 7.2, para asegurar que,

(1) $\exists f_T \in \mathcal{C} : \lim_{k\to\infty} (d_{\mathcal{C}})^s \left(f_T, \Phi^k g\right) = 0$,
(2) $\forall k \in \omega : \Phi^k g \leqslant f_T \leqslant \Phi f_T$.

Nuevamente, por la construcción de Φ y por el hecho de que $g \in \mathcal{C}_0$, se deduce que $\Phi^k g \in \mathcal{C}_0$ para toda $k \in \omega$.

Finalmente vamos a mostrar que $f_T \in \mathcal{C}_0$. Si asumimos lo contrario, sea j el primer entero no negativo tal que $f_T(j) = \infty$. Puesto que $f_T \leqslant \Phi f_T$, se sigue que $\Phi f_T(j) = \infty$ y $j \geqslant n_0$. Por otra parte

$$\Phi f_T(j) = u(j) + \sum_{k=1}^{j-1} v_k(j) f(k) < \infty.$$

Esto último es una contradicción. Concluimos que $f_T \in \mathcal{C}_0$. Aplicando la proposición 7.3 se concluye que la sucesión $(\Phi^k g)_k$ es puntualmente convergente a f_T. Enseguida vamos a ver que f_T es un punto fijo de Φ. Para esto, recordemos que para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$ se tiene $\Phi f_T(n) = \Phi g(n)$. Por lo que, dada la condición (2) y la definición de g, se obtiene $f_T(n) = \Phi f_T(n) = \Phi g(n)$, para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$. Por lo tanto $\Phi g(n_0) = \Phi f_T(n_0)$. Nuevamente de (2) se sigue que $f_T(n_0) = \Phi f_T(n_0)$.

Ahora, para un $n > n_0$ y un $\epsilon > 0$ dado, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\Phi f_T(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n) f_T(k) < u(n) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n) f_T(k) + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n)(\epsilon + \Phi^j g(k))$$
$$= \epsilon \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n) + \Phi^{j+1} g(n) \leqslant K\epsilon + f_T(n).$$

Por lo anterior, $\Phi f_T(n) \leqslant f_T(n)$. así entonces f_T es un punto fijo de Φ y por tanto es una solución para la ecuación de recurrencia T. Para mostrar que f_T es el único punto fijo de Φ, supongamos que existe otro $f_T' \in \mathcal{C}$, tal que $\Phi f_T'(n) = f_T'(n)$. En tal caso, se debería cumplir $f_T'(n) = f_T(n)$ para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$, que por construcción implica $\Phi f_T'(n_0) = \Phi f_T(n_0)$, es decir, $f_T'(n_0) = f_T(n_0)$, para $n > n_0$ y se sigue de manera inductiva que $f_T'(n) = f_T(n)$. Finalmente, suponiendo que Φ es un funcional de mejora con respecto a alguna $g \in \mathcal{C}$, entonces $\Phi g \leqslant g$, por lo que $f_T(n) = \Phi g(n) \leqslant g(n)$ para $n = 0, 1, ..., n_0 - 1$. Luego, se obtiene:

$$f_T(n_0) = u(n_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k(n_0) f_T(k) \leqslant u(n_0) + \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k(n_0) g(k) = \Phi g(n_0) \leqslant g(n_0).$$

Nuevamente, por inducción sobre n se deduce que $f_T(n) = g(n)$ para $n > n_0$.

□

Cuando se hace el análisis de un algoritmo divide y vencerás probabilista por medio de una ecuación de recurrencia, se obtiene una ecuación de la forma:

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \sum_{k=1}^{n-1} q(n,k) T(k),$$

en donde $T(1) \geqslant 0$, $c_1 > 0$, $2c_1 + c_2 > 0$ y las $q(n,k)$ (con $1 \leqslant k < n \in \mathbb{N}$) son funciones no negativas y proporcionales a la probabilidad de que la división de una tarea de tamaño n se haga en subtareas de tamaño k. Nótese que $T(2) = 2c_1 + c_2 + q(2,1)T(1) > 0$ y por lo tanto $T(n) > 0$ para todo $n \geqslant 2$.

Las siguientes funciones, en donde $\alpha > 0$, son típicas para $q(n,k)$.

$$(A) \quad \frac{\alpha}{n}, \qquad (B) \quad \frac{2\alpha(n-k)}{n(n+1)}, \qquad (C) \quad \frac{\alpha}{n}\sum_{k=k+1}^{n}\frac{1}{j}, \qquad (D) \quad \frac{2\alpha(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}.$$

Estas funciones aparecen en los algoritmos divide y vencerás probabilistas relacionados con árboles de búsqueda binaria, búsqueda completamente especificada en árboles cuádruples 2-d, consultas de coincidencia parcial en árboles cuádruples 2-d y clasificación rápida de mediana de tres Quicksort, respectivamente.

Como ilustración vemos el análisis de complejidad de un algoritmo divide y vencerás probabilista para el caso en que $q(n,k)$ es de la forma (A).

La ecuación de recurrencia T correspondiente es

$$T(n) = c_1 n + c_2 + \frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n-1} T(k), \quad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Podemos asumir que $T(1) > 0$, y entonces T satisface las condiciones del teorema 7.4, con $n_0 = 2$, $u \in \mathcal{C}_0$, cumpliendo $u(0) = u(1) = c > 0$ para c arbitrario, $u(n) = c_1 n + c_2$ para toda $n \geqslant 2$, y $v_k(n) = \alpha/n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por todo lo anterior T tiene una solución única $f_T \in \mathcal{C}_0$.

Ahora vamos a obtener una clase de funciones de complejidad para las cuales Φ asociado con T es un funcional de mejora. Para este fin, escribimos para $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} T(n+1) &= c_1(n+1)+c_2+\frac{\alpha}{n+|}\sum_{k=1}^{n} T(k) = c_1(n+1)+c_2+\frac{\alpha}{n+|}\left(T(n)+\sum_{k=1}^{n-1} T(k)\right) \\ &= c_1(n+1)+c_2+\frac{\alpha}{n+|}\left(T(n)+\frac{n}{\alpha}(T(n)-(c_1(n+1)+c_2)\right) \\ &= h(n+1)+\frac{n+\alpha}{n+1}T(n), \end{aligned}$$

en donde

$$h(n+1) = c_1(n+1)+c_2-\frac{n(c_1 n+c_2)}{n+1} = \frac{c_1(2n+1)+c_2}{n+1}, \ \text{ para todo } n \geqslant 2.$$

Por tanto, se tiene

$$T(2) = 2c_1 + c_2 + \frac{\alpha}{2}T(1), \ \text{ y } T(n) = h(n) + \frac{n+\alpha-1}{n}T(n-1), \ \text{ para toda } n \geqslant 3.$$

Así, Φ se puede expresar como

$$\Phi f(0) = \Phi f(1) = T(1), \ \ \Phi f(2) = T(2) \text{ y } \Phi f(n) = h(n) + \frac{n+\alpha-1}{n} f(n-1),$$

$$\text{para } n \geqslant 3, \ \text{ con } h(n) = \frac{c_1(2n-1)+c_2}{n}.$$

Luego, para $g \in \mathcal{C}$ que satisfaga $T(n) \leqslant g(n)$, $n = 0,1,2$, y

$$\frac{c_1(2n-1)+c_2}{n} + \frac{n+\alpha-1}{n} g(n-1) \leqslant g(n), \ \text{ para } n \geqslant 3, \tag{11.1}$$

se sigue que $\Phi g \leqslant g$, por lo que Φ es un funcional de mejora con respecto a g, y por el teorema 7.4 la solución f_T de la ecuación de recurrencia T verifica $f_T \leqslant g$.

Finalmente vamos a aplicar estos métodos para deducir que, para $0 < \alpha \leqslant 2$, $f_T \in \mathcal{O}(n \log_a n)$ para cualquier $a > 1$.

Observemos que para $K, r > 0$ y $a > 1$, una doble aplicación de la regla de L'Hôpital nos lleva a:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{K[x^2(\log_a x - \log_a(x-1)) + \log_a(x-1)]}{rx} = \frac{K}{r \cdot \ln a}.$$

Luego, para $K > r \cdot \ln a$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geqslant n_0$,

$$Kn \log_a n > \frac{n+1}{n} K(n-1) \log_a(n-1) + \frac{rn+s}{n}.$$

Aplicando esta última desigualdad al caso particular $r = 2c_1$ y $s = c_2 - c_1$ obtenemos, para $0 < \alpha \leqslant 2$, que

$$Kn \log_a n > \frac{n+\alpha-1}{n} K(n-1) \log_a(n-1) + \frac{c_1(2n-1)+c_2}{n},$$

siempre que $n \geqslant n_0$. Por esto último la ecuación 11.1 se satisface para $g(n) = Kn \log_a n$, con $K > 2c_1 \cdot \ln a$, y $n \geqslant n_0$. Concluimos así que $f_T(n) \in \mathcal{O}(n \log_a n)$, siempre que $0 < \alpha < 2$.

Agradecimientos: Los autores le agradecen a los árbitros las revisiones detalladas que realizaron sobre el manuscrito original, así como sus sugerencias y comentarios, que ayudaron a mejorar la exposición de los temas aquí tratados.

Bibliografía

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft y J. D. Ullman. *Estructuras de datos y algoritmos.* Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1988.

[2] N. C. Castañeda Roldán. Sobre la estructura de los espacios de complejidad de algoritmos y temas afines. *Tesis doctoral.* Huajuapan de León, Oax.: Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Física y Matemáticas, junio de 2023.

[3] S. Cobzaş. Completeness in quasi-metric spaces and Ekeland Variational Principle. *Topology and its Applications* 58 (2011), 1073–1084.

[4] S. Cobzaş. *Functional analysis in asymmetric normed spaces.* Frontiers in Mathematics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

[5] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest y C. Stein, *Introduction to Algorithms*, Second edition, Prentice-Hall of India, New Delhi, 2004.

[6] P. Fletcher and W. F. Lindgren. *Quasi-uniform spaces.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 77. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1982.

[7] L. M. García-Raffi, S. Romaguera and M. P. Schellekens. Applications of the complexity space to the general probabilistic divide and conquer algorithms. *J. Math. Anal. Appl* 348 (2008), no. 1, 346-355.

[8] R. P. Grimaldi. *Matemáticas discreta y combinatoria: introducción y aplicaciones.* Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington México, 1998.

[9] T. Husain. *Topology and Maps.* First edition. Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, Vol.5. Plenum Press, New - York London, 1977

[10] I. M. James. *Topological and uniform spaces.* First edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York 1987.

[11] J. C. Kelly. Bitopological spaces. *Proc. London Math. Soc.* 3 (1963), no. 13, 71-89.

[12] H. P. A. Künzi. Nonsymmetric topology. *Topology with applications (Szekszárd, 1993).* 303-338. Bolyai Soc. Math. Stud., 4, *János Bolyai Math. Soc., Budapest*, 1995.

[13] S. G. Matthews. Partial metric topology. *Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992)*, 183-197. Ann. New York Acad. Sci., 728, *New York Acad. Sci., New York*, 1994.

[14] S. Romaguera and M. Schellekens. Quasi-metric properties of complexity spaces. *Topology Appl.* 98 (1999), no. 1-3, 311-322.

[15] S. Romaguera and M. Schellekens. Duality and quasi-normability for complexity spaces. *Applied General Topology* 3 (2002), no. 1, 91-112.
[16] M. Schellekens. The Smyth completion: a common foundation for denotational semantics and complexity analysis. *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, 1 (1995) 535-556.
[17] M. Schellekens. On upper weightable spaces. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 806 (1996), no. 1, 348-363.
[18] D. S. Scott and C. Strachey. Toward a mathematical semantics for computer languages. *Proc. Symp. on Computers and Automata, volume 21 of Microwave Research Institute Symposia Series*. Polytechnic Institute of Brooklyn, 1971. Same text as *Tech. Mono. PRG-6*, Programming Research Group, University of Oxford, 1971.
[19] M. B. Smyth. Completeness of quasi-uniform and syntopological spaces. *J. London Math. Soc.*, (2) 49 (1994), no. 2, 385-400.
[20] L. A. Steen and J. A. Seebach. *Counterexamples in Topology*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications. New York, 1995.
[21] P. Sünderhauf. The Smyth-completion of a quasi-uniform space. *Semantics of programming languages and model theory (Schloß Dägstuhl, 1991)*, 189–212, Algebra Logic Appl., 5, *Gordon and Breach, Montreux*, 1993.
[22] P. Sünderhauf. Quasi-uniform completeness in terms of Cauchy nets. *Acta Mathematica Hungarica* 69 (1995), no. 1-2, 47-54.

Correos electrónicos:
netzac@fcfm.buap.mx (Netzahualcóyotl Castañeda Roldán)
escobedo@fcfm.buap.mx (Raúl Escobedo Conde)
jmhm@mixteco.utm.mx (José Margarito Hernández Morales)

CAPÍTULO 12

Bases de Hamel para los números reales, $\mathbb{R}$

Carlos Eduardo Cervantes Tlatempa,
Alexis Chávez Cortés y Fernando Hernández Hernández
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Michoacán, México

1. Introducción

Obviamente, la primera estructura matemática importante que conocemos es el sistema de los números reales. Muchos de nosotros creemos, de manera algo ingenua, que los comprendemos desde los primeros años, pero con el tiempo nos damos cuenta de todo lo que realmente desconocemos sobre los números reales, $\mathbb{R}$. La segunda estructura significativa que encontramos es la de un espacio vectorial, muy ligada, por cierto, a los números reales. Los cursos elementales de álgebra lineal se centran principalmente en espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo de los números reales (o de los números complejos, $\mathbb{C}$). Pocas veces se nos habla de un espacio concreto de dimensión infinita: por ejemplo, los números reales, $\mathbb{R}$, como espacio vectorial sobre el campo de los números racionales, $\mathbb{Q}$.

En esta nota, presentamos algunos aspectos que consideramos interesantes sobre el hecho de que los números reales son un espacio vectorial sobre los números racionales. Todos los resultados presentados se pueden encontrar en algún lugar de los textos citados al final en la bibliografía. La segunda sección comienza de manera muy elemental, presentando algunas aplicaciones inmediatas y diferentes bases algebraicas para los números reales como espacio vectorial sobre los racionales; es decir, bases con diversas propiedades que suelen aparecer en el estudio topológico o analítico. La tercera sección aborda bases algebraicas para otros espacios vectoriales, y en la cuarta sección presentamos una base algebraica conexa de un espacio popular. También incluimos un Apéndice que complementa el teorema de Erdös y Kakutani, teorema 2.6.

Hemos tratado de hacer esta nota autocontenida en su mayor parte, del lector solamente suponemos cierta madurez matemática y conocimientos básicos de álgebra lineal, cálculo, topología y los principales aspectos de teoría de conjuntos.

Nuestra notación es la usual a la de textos que tratan con nociones topológico conjuntistas. Por ejemplo, nosotros denotamos al conjunto de los números naturales indistintamente por $\mathbb{N}$ o por el símbolo del primer ordinal infinito, ω. Para nosotros los números ordinales son conjuntos bien ordenados cuyos elementos son los números ordinales más pequeños. Con esta idea en mente, se puede pensar que la Hipótesis del Continuo es la afirmación de que existe una biyección (y por lo tanto una enumeración) entre $\mathbb{R}$ y ω_1, el primer ordinal no numerable. En otras palabras, CH dice que es posible considerar una enumeración $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de $\mathbb{R}$, de modo tal que para cada $\beta < \omega_1$ se tiene que $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ es un conjunto numerable (o sea, biyectable con $\mathbb{N}$).

2. $\mathbb{R}$ tiene dimensión infinita sobre $\mathbb{Q}$

Como es bien sabido, si F es un campo, entonces un *espacio vectorial* sobre F es un conjunto V, con una operación binaria (suma) que lo convierte en un grupo abeliano; además hay una *multiplicación por escalar*; es decir, hay una función con dominio $F \times V$ y rango contenido en V; o sea que es una función, $\langle s, v\rangle \mapsto s \cdot v \in V$, la cual tiene las siguientes propiedades: para cualesquiera $v, w \in V$ y cualesquiera $s, t \in F$: $1_F \cdot v = v$, $(s \cdot t) \cdot v = s \cdot (t \cdot v)$, $s \cdot (v + w) = s \cdot v + s \cdot w$ y $(s + t) \cdot v = s \cdot v + t \cdot v$. Entonces es muy fácil convencerse de que si tomamos a $F = \mathbb{Q}$ y a $V = \mathbb{R}$, obtenemos un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. También, si tomamos a $F = \mathbb{R}$, claramente $V = \mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ que tiene dimensión 1.

El matemático alemán Georg Hamel, en 1905, publicó un artículo titulado «Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$» («Una base de todos los números y las soluciones discontinuas de la ecuación funcional $f(x+y) = f(x) + f(y)$»), donde introdujo formalmente el concepto de lo que hoy se conoce como base de Hamel.

En su artículo, Hamel mostró que cualquier espacio vectorial tiene una base, siempre y cuando se acepte el Axioma de Elección, un principio fundamental tanto para la teoría de conjuntos como para muchas otras ramas de las matemáticas. Algunas equivalencias del Axioma de Elección son el lema de Kuratowski-Zorn y teorema del Buen Orden, el teorema de Tychonoff para el producto de espacios compactos, etc. También se demostró que el hecho de que todo espacio vectorial tenga una base de Hamel es igualmente equivalente al Axioma de Elección. Sin embargo, que $\mathbb{R}$ tenga una base de Hamel como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ es una afirmación más débil que el Axioma de Elección. Por ejemplo, es relativamente consistente ZF más el Axioma de Elecciones Dependientes más el hecho de que $\mathbb{R}$ tenga una base de Hamel sobre $\mathbb{Q}$; pero que aún así $\mathbb{R}$ no tenga un buen orden. Remitimos al lector interesado en esta afirmación a [**27**].

Como primer instancia para mostrar enormes diferencias a lo acostumbrado en los cursos elementales de álgebra lineal, probaremos que la dimensión de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ es infinita. Supongamos lo contrario, digamos que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = n$, para algún $n \in \omega$. Consideremos el número de Euler, e, y el conjunto $\{1, e, e^2, \ldots, e^n\}$ que es linealmente dependiente (teorema 5.1, capítulo 3, [**19**]). Así existen números racionales (algunos distintos de cero) $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, tales que

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0.$$

Pero se sabe que e es un número trascendental (teorema 2.1, capítulo 2, [**25**]). Así tenemos que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \neq n$ para todo $n \in \omega$. Por lo tanto el espacio vectorial de números reales sobre el campo de los números racionales no es de dimensión finita.

Ahora probaremos que la dimensión de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ es de hecho la máxima posible, $\mathfrak{c}$.

Si H es una base para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, note que el conjunto

$$B = \{h_0 q_0 + \ldots + h_n q_n : n \in \omega \wedge (\forall i \leqslant n)(h_i \in H \wedge q_i \in \mathbb{Q})\}$$

de todas las combinaciones $\mathbb{Q}$-lineales finitas de elementos de H tiene la misma cardinalidad que H puesto que[1]

$$|B| = |[H]^{<\omega} \times [\mathbb{Q}]^{<\omega}| = |H \times \mathbb{Q}| = |H|.$$

Ya que H genera a $\mathbb{R}$, se sigue que $|H| = \mathfrak{c}$.

Como una primera aplicación trivial del hecho de que existe una base de Hamel para $\mathbb{R}$, considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, observe que $\mathbb{R}^2$ también puede considerarse como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ y que, obviamente, tendrá la misma dimensión que $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, así que son isomorfos como espacios vectoriales (corolario 4.3, capítulo 3 de [**19**]).

De aquí se deduce que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son isomorfos como grupos aditivos. Además, esto no es exclusivo para $n = 2$; en realidad, el mismo método demuestra que todos los grupos $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, son isomorfos como grupos aditivos.

Antes de adentrarnos en la teoría, veamos algo práctico sobre las bases de Hamel.

Ejemplo 2.1. [**6**] Sea $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [0, 1]$ con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $n \geqslant 3$. Consideremos las distancias entre pares de elementos de S. Si cada distancia que aparece, excepto la distancia 1, ocurre al menos dos veces, entonces S está compuesto únicamente por números racionales.

En efecto, suponga que no es así y considere a H, una base de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Entonces, para cada elemento $x_k \in S$ tenemos:

$$x_k = \sum_{i \leqslant m} q_{k,i} \cdot h_i,$$

donde $q_{k,i} \in \mathbb{Q}$ y $h_i \in H$, para todo $i \leqslant m$ (Aquí m es un natural suficientemente grande de modo que cada vector x_k, para $k \leqslant n$, pueda expresarse como única combinación lineal de longitud a lo más m).

Entonces, debido a la suposición, existen $h_i \notin \mathbb{Q}$ y $q_{k,i} \neq 0$. Denotemos $\Lambda = \{q_{k,i} : k \leqslant n\}$ y notemos que $0 \in \Lambda$, ya que $x_0 = 0$.

Definamos $\check{q} = \min \Lambda$ y $\hat{q} = \max \Lambda$, cumpliéndose que $\check{q} < \hat{q}$ (pues, de lo contrario, tendríamos $\check{q} = \hat{q} = 0$, lo que implicaría $\Lambda = \{0\}$, y esto sería una contradicción).

Tomemos los siguientes conjuntos:

$$\hat{X} = \{x_k : q_{k,i} = \hat{q} \wedge 0 \leqslant k \leqslant n\} \quad y \quad \check{X} = \{x_k : q_{k,i} = \check{q} \wedge 0 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Sean $x \in \hat{X}$, $y \in \check{X}$. Entonces, de acuerdo con la condición inicial (ya que al menos uno no es racional), existen x_r, x_s con $0 \leqslant r, s \leqslant n$ tales que $x - y = x_r - x_s$ y

[1] Recuerde que para un conjunto infinito A, la familia de todos los subconjuntos finitos de A se denota mediante el símbolo $[A]^{<\omega}$, y tiene el mismo tamaño que A.

$\{x, y\} \neq \{x_r, x_s\}$. Esto significa que $\hat{q} - \check{q} = q_{r,i} - q_{s,i}$, lo que implica $q_{r,i} = \hat{q}$ y $q_{s,i} = \check{q}$; es decir, $x_r \in \hat{X}$ y $x_s \in \check{X}$.

Ahora, basta tomar $x = \max \hat{X}$, $y = \min \check{X}$ y obtener una contradicción, ya que esto implica que $x_r = x$, $x_s = y$, por lo que se sigue $\{x, y\} = \{x_r, x_s\}$.

Esta sección también está dedicada a construir algunas bases de Hamel con diversos tipos de propiedades, algunas muy interesantes, como la de ser cerradas bajo potencias enteras: ¡no sólo positivas!

Teorema 2.2. *Existe una base de Hamel H para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que*

$$(h \in H) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{Z})(h^n \in H).$$

DEMOSTRACIÓN: Primero, introduciremos alguna notación de interés. Si $M \subseteq \mathbb{R}$, $F(M)$ es el campo generado por M, $A(M)$ es el conjunto de números algebraicos sobre M. Es claro que si $|M| < \mathfrak{c}$, entonces también $|F(M)| < \mathfrak{c}$ y $|A(M)| < \mathfrak{c}$.

Sea $\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, con $r_0 = 1$, una enumeración. Por recursión se construirán sucesiones transfinitas de números reales $\{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y $\{z_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ con las siguientes propiedades:

Si $H_\alpha = \{y_\xi^k : k \in \mathbb{Z} \wedge \xi \leqslant \alpha\} \cup \{z_\xi^k : k \in \mathbb{Z} \wedge \xi \leqslant \alpha\}$, entonces para cada $\alpha < \mathfrak{c}$:

2.1 H_α es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente,

2.2 $(\forall \xi \leqslant \alpha)(r_\xi \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(H_\alpha))$.

Haga $y_0 = z_0 = 1$; entonces $H_0 = \{1\}$ satisface 2.1 y 2.2. Suponga que para $\beta < \mathfrak{c}$ se han definido $\{y_\xi : \xi < \beta\}$ y $\{z_\xi : \xi < \beta\}$ de modo que 2.1 y 2.2 se cumplen para cada $\alpha < \beta$. Sea r_γ el primer elemento tal que $r_\gamma \notin L_\beta := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\bigcup\{H_\alpha : \alpha < \beta\})$. Por 2.2, $\beta \leqslant \gamma$; además, como L_β tiene tamaño menor que $\mathfrak{c}$, existe y_β trascendente sobre $B_\beta = F(L_\beta \cup \{r_\gamma\})$; defina $z_\beta = r_\gamma - y_\beta$. Ahora, es claro que 2.2 se cumple para H_β.

Si H_β no es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente, existen $h_0, h_1, \ldots, h_m \in \bigcup\{H_\alpha : \alpha < \beta\}$ y racionales $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{Q}$; además de polinomios $p_i, q_i \in \mathbb{Q}[x]$, con $i \in \{0, 1\}$, de modo que, haciendo $y = y_\beta, z = z_\beta$, se tiene

$$(*) \qquad p_0(y) + p_1(z) + q_0(1/y) + q_1(1/z) + \sum_{j=0}^{m} s_j h_j = 0.$$

Pongamos $k_i = \deg(q_i)$, $i \in \{0, 1\}$, y multiplique $(*)$ por $y^{k_0} z^{k_1}$ para obtener:

$$(p_0(y) + p_1(z) + d) y^{k_0} z^{k_1} + \tilde{q}_0(y) z^{k_1} + \tilde{q}_1(z) y^{k_0} = 0,$$

donde $d \in L_\beta$; o bien[2]

$$z^{k_1} \tilde{q}_0(y) = -(p_0(y) + p_1(z) + d) y^{k_0} z^{k_1} - y^{k_0} \tilde{q}_1(z).$$

Note que, $\tilde{q}_0(y) \neq 0$ puesto que y es trascendente sobre $A_\beta = F(L_\beta)$; además y^{k_0} divide a $(p_0(y) + p_1(z) + d) y^{k_0} z^{k_1}$ y también divide a $y^{k_0} q_1(z)$, por lo que divide a su resta. Pero y^{k_0} no divide a z^{k_1}, entonces y^{k_0} divide a $\tilde{q}_0(y)$ sobre A_β. Más aún, como $\tilde{q}_0 \in \mathbb{Q}[x]$, pues $\tilde{q}_0(y) = q_0(1/y) y^{k_0}$, entonces y^{k_0} divide a $\tilde{q}_0$ sobre $\mathbb{Q}$, y como $\deg(\tilde{q}_0) \leqslant k_0$ se sigue que

$$\tilde{q}_0(x) = a_0 x^{k_0}.$$

donde $a_0 \in \mathbb{Q}$. Así, $q_0(x)$ es un polinomio constante.

[2]Observe que $\tilde{q}_i$ es básicamente q_i; aunque como polinomios están "al revés".

Análogamente se obtiene que $q_1(x)$ es constante, y $(*)$ se convierte en

$$(**) \qquad p_0(y) + p_1(z) + d' = 0, \text{ con } d' \in L_\beta.$$

Como y es trascendente sobre B_β, $\deg(p_0) = \deg(p_1) = m$. Suponga que $m > 0$, y escriba

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{m} a_{i,j}x^j.$$

donde $i \in \{0, 1\}$, cada $a_{i,j} \in \mathbb{Q}$, y $a_{i,m} \neq 0$. El lado izquierdo de la ecuación $(**)$ se puede reescribir como

$$b_0 + b_1y + \ldots + b_my^m.$$

con cada $b_i \in L_\beta$. Entonces, en particular se tiene que $b_{m-1} = 0$. Si $m > 1$, entonces $b_{m-1} = a_{0,m-1} \pm (mr_\gamma a_{1,m} + a_{2,m-1}) = 0$, y de esta manera, $r_\gamma \in \mathbb{Q}$, lo que es imposible. Y si $m = 1$, se tiene que $b_0 = d + a_{0,0} + a_{1,0}r_\gamma = 0$; o sea que $r_\gamma \in L_\beta$, contrario a su definición.

Así que $m = 0$, y de $(*)$ se sigue que $\bigcup\{H_\alpha : \alpha < \beta\}$ es un subconjunto $\mathbb{Q}$-linealmente dependiente, contradiciendo la condición (2.1). Por tanto, H_β es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente. Y de esta forma, $H = \bigcup\{H_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ es una base para $\mathbb{R}$ que cumple lo requerido. □

Sería natural buscar bases de Hamel cerradas bajo otras operaciones aritméticas. Lamentablemente en [**22**] se muestra que no existen bases de Hamel cerradas bajo producto.

Las bases de Hamel son subconjuntos extraños de los números reales; en los siguientes resultados se verá que ellas están presentes en todo subconjunto abierto y también en los conjuntos perfectos (*id est*, cerrados sin puntos aislados). Para más información sobre subconjuntos especiales de $\mathbb{R}$ se puede consultar [**4**] o muchas otras fuentes alternativas.

Teorema 2.3. *Todo subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$ contiene una base de Hamel.*

La idea de la demostración es tomar un intervalo pequeño dentro del conjunto abierto y ajustar los elementos de una base inicial para que queden dentro de ese intervalo. Luego, se construyen nuevos conjuntos que generan todo $\mathbb{R}$ como espacio vectorial, garantizando que la base final esté contenida en el conjunto abierto original (véase [**12**]).

Con este resultado vemos que las bases de Hamel no son subconjuntos tan raros en $\mathbb{R}$. De hecho, hasta conjuntos con interior vacío pueden contener una, como veremos ahora.

Teorema 2.4. *El conjunto de Cantor contiene una base de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, y por tanto todo conjunto perfecto contiene una base de Hamel.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathscr{C}$ el conjunto de Cantor, consistente de los números $0, 1$ y todos los $x \in (0, 1)$ cuya representación ternaria no incluye 1 o que no termina en una sucesión infinita de 2.

Sea $x \in [0, 1]$ y considere su representación ternaria $x = (0.d_1d_2\ldots)_3$. Para cada $n \in \omega$ defina:

$$a_n = \begin{cases} d_n, & \text{si } d_n \neq 1, \\ 0, & \text{si } d_n = 1, \end{cases} \quad y \quad b_n = \begin{cases} 0, & \text{si } d_n \neq 1, \\ 2, & \text{si } d_n = 1. \end{cases}$$

Sean $a, b \in [0,1]$ tales que $a = (0.a_1a_2\ldots)_3$ y $b = (0.b_1b_2\ldots)_3$. Note que $a, b \in \mathscr{C}$ y además $x = a + \frac{1}{2}b$. Por lo que x se representó como una combinación $\mathbb{Q}$-lineal de elementos en $\mathscr{C}$.

Ahora considere $y \in \mathbb{R}$ y note que existe $n_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que ${}^{y}/_{n_0} \in [0,1]$. Por lo anterior, existen a_y y b_y tales que $y = n_0(a_y + {}^{1}/_{2}b_y)$. Así, $\mathscr{C}$ contiene una base de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. □

Se deduce inmediatamente que la base hallada en el resultado anterior es un subconjunto medible según Lebesgue. Vale preguntarse también si existirán bases de Hamel que sean conjuntos de Borel, o conjuntos analíticos. Recuerde que la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a los intervalos abiertos, y que un subconjunto de $\mathbb{R}$ se dice analítico si es la imagen continua de un subconjunto de Borel. Resulta que las bases de Hamel para $\mathbb{R}$ no pueden ser conjuntos de esos dos tipos. Antes de probarlo veamos lo siguiente:

Sea H una base de Hamel para $\mathbb{R}$, enumerada como $H = \{h_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y, sin pérdida de generalidad, suponga que $h_0 = 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea $a_\alpha(x)$ el coeficiente de h_α en su representación como combinación lineal de elementos de H. Para $r \in \mathbb{Q}$, defina

$$A_r = \{x \in \mathbb{R} : a_0(x) = r\}.$$

Note que $A_r = A_0 + r$, $A_r \cap A_s = \emptyset$ si $r \neq s$, y que $\bigcup\{A_r : r \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$. Si A_0 fuera medible según Lebesgue, también lo sería cada A_r, y como $\bigcup\{A_r : r \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$, al menos uno de los conjuntos A_r, y por lo tanto A_0, debe tener medida positiva. Se sigue que el conjunto $A_0 - A_0 = \{x - y : x, y \in A_0\}$ contiene un intervalo abierto alrededor del 0 (véase [**30**]). Por lo que, debido a la densidad de $\mathbb{Q}$, existen $x, y \in A_0$ con $x - y \neq 0$ y tales que $x - y \in \mathbb{Q}$.

Pero $a_0(x) = a_0(y) = 0$, y entonces tanto x como y son irracionales, una contradicción. Así que el conjunto A_0 no puede ser medible según Lebesgue. Con esto en cuenta, probemos el siguiente resultado:

Teorema 2.5. *Si H es una base de Hamel para $\mathbb{R}$, entonces H no puede ser un conjunto de Borel ni puede ser un conjunto analítico.*

Demostración: Sin perder generalidad, suponga que $1 \in H$. Sea $K = H \setminus \{1\}$. Para cada $n \in \omega$ y cada $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^{n+1}$, defina $f_{\mathbf{r}} : K^{n+1} \to \mathbb{R}$ por:

$$f_{\mathbf{r}}(k_0, k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i \leqslant n} r_i k_i.$$

Claro que $f_{\mathbf{r}}$ es una función continua, para cada $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^{n+1}$. Si H es un conjunto de Borel o analítico, entonces K y K^{n+1} también lo son. Y por tanto, para cada $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^{n+1}$, $f_{\mathbf{r}}[K^{n+1}]$ es un conjunto analítico.

Del hecho que H es una base de Hamel, y de que $1 \notin K$, se sigue que

$$A_0 = \bigcup\{f_{\mathbf{r}}[K^{n+1}] : n \in \omega \wedge \mathbf{r} \in \mathbb{Q}^{n+1}\}.$$

Por lo que A_0 es un conjunto analítico y entonces es medible según Lebesgue, contrario a lo que se mostró anteriormente. □

Más aún, es posible construir una partición de $\mathbb{R}$ que consista de subconjuntos $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Esta afirmación puede encontrarse, bajo una obvia modificación, dentro de la demostración del siguiente resultado que presentamos.

Teorema 2.6 (Erdös-Kakutani). CH *equivale a la afirmación: Existe una familia numerable* $\{H_n : n \in \omega\}$ *de bases de Hamel para* $\mathbb{R}$ *de modo que*

$$\bigcup\{H_n : n \in \omega\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Demostración: Suponga primero que H es una base ordenada de Hamel para $\mathbb{R}$ definida por $H = \{h_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere su expresión única como combinación lineal

$$x = \sum_{i=0}^{n} q_i h_{\alpha_i},$$

donde $n \in \omega$ y $q_i \in \mathbb{Q}$ para cada $i \leqslant n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \omega_1$.

Dado un subconjunto finito de $\mathbb{Q}$, $A \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$, suponga que $A = \{r_k : k \leqslant n\}$, con $n \in \omega$. Defínase al subconjunto $R_A \subseteq \mathbb{R}$ por

$$x \in R_A \Leftrightarrow x = \sum_{k=0}^{n} r_k h_{\alpha_k}.$$

Luego, $\mathbb{R} = \{0\} \cup \bigcup\{R_A : A \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}\}$. Por lo que basta probar la afirmación para cada R_A. Tome cualquier $\alpha < \omega_1$, y sea $R_A^\alpha \subseteq R_A$ definido como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = r_0 h_{\alpha_0} + \cdots + r_n h_{\alpha_n},$$

donde $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \alpha_n(x) = \alpha$.

Note que, como α es numerable, sólo se pueden tomar una cantidad numerable de ordinales menores a α, por lo que R_A^α es un subconjunto numerable. Escriba $R_A^\alpha = \{x_{A,m}^\alpha : m \in \omega\}$. Para cada $m \in \omega$, defina

$$S_{A,m} = \{x_{A,m}^\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Observe que el conjunto $S_{A,m}$ selecciona el m-ésimo elemento de cada R_A^α, por lo que si $x, y \in S_{A,m}$ son distintos, entonces $\alpha_n(x) \neq \alpha_n(y)$. Es claro también que $R_A = \bigcup_{m\in\omega} S_{A,m}$.

Veamos que cada conjunto $S_{A,m}$ es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente.

En efecto, si $S_{A,m}$ no lo fuera, existen $k \in \omega$, $x_i \in S_{A,m}$ y $p_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, para cada $i \leqslant k$, tales que

$$(\circ) \qquad \sum_{i \leqslant k} p_i x_i = 0.$$

Puesto que, para cada $i \leqslant k$, $x_i = r_0 h_{\alpha_{i,0}} + \cdots + r_n h_{\alpha_{i,n}}$; entonces $(\circ)$ adquiere la forma:

$$(\circ\circ) \qquad \sum_{i \leqslant k} \sum_{j \leqslant n} p_i r_j h_{\alpha_{i,j}} = 0.$$

Por lo que existe $i_0 \leqslant k$ tal que $\alpha^* = \alpha_n(x_{i_0}) > \alpha_n(x_i)$, para cada $i \leqslant k$, $i \neq i_0$. Así, el término con h_{α^*} en la ecuación $(\circ\circ)$ no se cancela, pues aparece una única vez, una contradicción.

Luego para cada $S_{A,m}$ tomamos una extensión $\tilde{S}_{A,m}$ a una base de Hamel. De esta forma, cada R_A se descompone en una cantidad numerable de subconjuntos que son bases de Hamel, y en consecuencia CH implica la afirmación del enunciado.

Por el contrario, supongamos que la afirmación del enunciado es verdadera, probaremos la Hipótesis del Continuo a partir de ella. Lo haremos mostrando que, bajo la suposición, la gráfica completa de tamaño $2^{\aleph_0}$ es la unión de una cantidad numerable de árboles (véase teorema A.9).

Sea $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\omega} M_n$ una descomposición del conjunto de todos los números reales en una cantidad numerable de conjuntos, cada uno de los cuales consta de números $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Podemos suponer que M_0 tiene tamaño $2^{\aleph_0}$ por el teorema de König (véase por ejemplo [**9**], p. 245).

Sea G una gráfica completa de número cardinal $2^{\aleph_0}$, la podemos tomar como sigue:

$$G = \{\,\{x, y\} : x, y \in M_0 \wedge x < y\}.$$

Tomemos los siguientes conjuntos: $G_n = \{\,\{x, y\} : x < y \wedge y - x \in M_n\}$. Claramente tenemos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Veamos que cada G_n es un árbol, para esto supongamos que G_n contiene un polígono cerrado. Sean $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} = x_1$ los vértices de este polígono. Entonces tenemos

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k} \pm |x_i - x_{i+1}| = 0.$$

Tenemos que para cada $i \leqslant k$, $x_i \in M_0$ y además $|x_i - x_{i+1}| \in M_n$. Así se tiene que todos los números $|x_i - x_{i+1}|$ son distintos. Pero esto es una contradicción, ya que M_n consiste de números $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Por lo tanto, la afirmación del enunciado implica CH. $\square$

3. Otras bases en espacios de Banach

El conjunto de números reales no es simplemente un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$; por lo aprendido en cursos elementales sobre las propiedades del valor absoluto, $|\cdot|$, sabemos que de hecho él define una métrica que es completa; no llega a ser una norma completa pues $\mathbb{Q}$ no es completo. Así, $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ tiene estructura parecida a la de espacio de Banach. Recuerde que una *norma* en un espacio vectorial X (sobre $\mathbb{R}$) es una función $\|\cdot\|$ de X en $\mathbb{R}$ tal que para cada $x \in X$, $\|x\| \geqslant 0$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si x es el elemento neutro respecto de la suma en X, para todo $x \in X$ y todo $c \in F$ se cumple $\|cx\| = |c|\|x\|$, y para cualesquiera $x, y \in X$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Es un ejercicio rutinario demostrar que toda norma sobre X induce una métrica para X. Un espacio normado que es completo (como espacio métrico) se denomina *espacio de Banach*. Cabe resaltar que en un espacio normado confluyen dos estructuras de diversa naturaleza: una algebraica, la de espacio vectorial, y una topológica como espacio métrico.

Ligando esta sección a lo que anteriormente se ha tratado, y como aplicación del bien conocido teorema de Categorías de Baire, estudiaremos la cardinalidad de una base de Hamel para un espacio de Banach.

Proposición 3.1. *En un espacio de Banach de dimensión infinita, ninguna base de Hamel es numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Considere X, un espacio como en la hipótesis, y suponga que tiene una base de Hamel numerable, a saber $H = \{h_n : n \in \omega\}$.

Note que entonces $X = \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{span}(\{h_k : k \leqslant n\})$. O sea que X es la unión numerable de subespacios propios de dimensión finita.

Pero se sabe que todo subespacio propio de un espacio normado tiene interior vacío, y que los subespacios de dimensión finita de un espacio de Banach son conjuntos cerrados (teoremas 7.1.2 y 7.4.3 de [**13**]). De esta manera se tiene que X es magro, lo que es absurdo por el teorema de Baire. Así que X no tiene dimensión numerable. □

Es interesante entonces notar que no hay espacios normados de dimensión numerable que sean completos. Fortaleceremos este primer resultado.

Note primero que X debe tener cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$, pues todo espacio normado es completamente regular, por ser métrico, y es fácilmente conexo por su estructura vectorial.

Proposición 3.2. *Si H es una base de Hamel para X, entonces*

$$|X| = \max\{\mathfrak{c}, |H|\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se tiene que

$$|X| = |[\mathbb{R}]^{<\omega} \times [H]^{<\omega}| = |\mathbb{R} \times H| = \max\{\mathfrak{c}, |H|\}$$

puesto que H es una base de Hamel para X. □

Es interesante notar que de esta proposición se desprende que los espacios clásicos: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ℓ_2 así como todos los ℓ_p, para $p \in [1, \infty]$, son isomorfos como espacios vectoriales.

El siguiente lema es de carácter puramente auxiliar, por lo que se omitirá su demostración, véase teorema 1.a.5 de [**20**]. Recuerde que una sucesión de elementos de X es *básica* si todo elemento del subespacio cerrado generado por ella se puede representar por una única combinación lineal infinita de elementos de la sucesión.

Lema 3.3. *Todo espacio de Banach X de dimensión infinita admite una sucesión básica.*

Se sigue inmediatamente que si una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ es básica, entonces si $\{c_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión cualquiera de escalares, si $\sum_{n\in\omega} c_n x_n = 0$ implica que $c_n = 0$ para cada $n \in \omega$.

Veamos un breve recordatorio para el siguiente resultado relevante. Una familia $\mathscr{I} \subseteq [\omega]^\omega$ se llama *familia independiente* si, siempre que se tengan dos subfamilias $S, T \subseteq \mathscr{I}$ finitas y disjuntas, se cumple que:

$$\left| \bigcap_{X\in S} X \setminus \bigcup_{Y\in T} Y \right| = \aleph_0.$$

Existen familias independientes de tamaño $\mathfrak{c}$, originalmente eso fue publicado en [**5**], actualmente las familias independientes son objetos combinatorios muy útiles; en [**21**] pueden encontrarse diversos métodos de construcción.

Teorema 3.4. *Toda base de Hamel para un espacio de Banach de dimensión infinita X, tiene cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$.*

DEMOSTRACIÓN: Suponga que $\{x_n : n \in \omega\}$ es una sucesión básica para X, sea $\mathscr{I}$ una familia independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$ y considere la función inyectiva $\zeta : \mathscr{I} \to X$ definida como

$$\zeta(Z) = \sum_{k\in\omega} \frac{\chi_Z(k)}{2^k} \cdot x_k;$$

donde χ_Z es la función característica de $Z \in \mathscr{I}$. Note que por construcción los vectores en $\{\zeta(Z) : Z \in \mathscr{I}\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$: en efecto, si se toman distintos $Z_0, \dots, Z_m \in \mathscr{I}$, entonces para cualquier $k \in \omega$ y para cada $i \leqslant m$ existe un $k' > k$ de modo que para todo $j \neq i$, $\chi_{Z_i}(k') \neq \chi_{Z_j}(k')$, de aquí que los vectores $\zeta(Z_0), \dots, \zeta(Z_m)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Para cada $y \in X$ existen únicos $h_{\alpha_0}, \dots, h_{\alpha_{n(y)}} \in H$ con $\alpha_j < \alpha_{j+1}$, y tal que $s_0, \dots, s_{n(y)} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, de modo que

$$y = \sum_{j=0}^{n(y)} s_j h_{\alpha_j}.$$

Así que la función $\varphi : X \to [\mathbb{R}]^{<\omega} \times [H]^{<\omega}$ dada por

$$\varphi(y) = \Big((s_0, \dots, s_{n(y)}), (h_{\alpha_0}, \dots, h_{\alpha_{n(y)}})\Big)$$

es una biyección, y la composición $\varphi \circ \zeta : \mathscr{I} \to [\mathbb{R}]^{<\omega} \times [H]^{<\omega}$ es inyectiva. Por otro lado, ya que $|\mathscr{I}| = \mathfrak{c}$ y $|[H]^{<\omega}| < \mathfrak{c}$, por el principio de casillas existe un subconjunto infinito $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{I}$ de modo que $p_2 \circ \varphi \circ \zeta : \mathscr{C} \to [H]^{<\omega}$ es constante (p_2 denota la proyección sobre la segunda coordenada).

Así, denote por $W_0 = \langle p_2 \circ \varphi \circ \zeta[\mathscr{C}] \rangle$ el correspondiente subespacio de dimensión finita. Y dado que ζ es inyectiva, $\zeta[\mathscr{C}] \subseteq W_0$ es un conjunto infinito de vectores linealmente independientes, lo que es una contradicción. $\square$

Se deduce inmediatamente de estos dos previos resultados una propiedad muy útil y conveniente de las bases de Hamel en espacios de Banach de dimensión infinita.

Corolario 3.5. *Si H es una base de Hamel para un espacio de Banach X, entonces $|X| = |H|$.*

Continuamos esta sección con el siguiente resultado; nuevamente pone de manifiesto que el Axioma de Elección es necesario para establecer la propiedad de Baire en subconjuntos de $\mathbb{R}$. Recuerde que un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene la *propiedad de Baire* si su diferencia con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es pequeña en el sentido de la categoría; es decir, si $X \triangle U$ es un conjunto magro para algún $U \subseteq \mathbb{R}$ que es abierto.

Proposición 3.6. *Si todo subconjunto de los números reales tuviera la propiedad de Baire, entonces no existe una base de Hamel para $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que H es una base de Hamel, y sin pérdida de generalidad $1 \in H$.

Si $\vec{q} = \langle q_0, \dots, q_n \rangle$ es una sucesión de números racionales, entonces sea:

$$A_{\vec{q}} = \Big\{x \in \mathbb{R} : (\exists \{h_1, \dots, h_n\} \subseteq H)\ (x = q_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i h_i)\Big\}.$$

Para algún $\vec{q} \in \mathbb{Q}^{<\omega}$, debe tenerse que $A_{\vec{q}}$ no es magro (de lo contrario, $\mathbb{R}$ sería magro). Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto y no vacío, tal que $A_{\vec{q}} \triangle U$ es magro. Elija $a, b, p \in \mathbb{R}$ tal que $p \neq 0$, $a + p < b$, y $(a, b + p) \subseteq U$. Entonces $(a, b) \setminus A_{\vec{q}}$ es magro; por lo tanto, $(a + p, b + p) \setminus (A_{\vec{q}} + p)$ también es magro, donde $A_{\vec{q}} + p$ es el desplazamiento $\{x + p : x \in A_{\vec{q}}\}$.

Sin embargo, si $x \in A_{\vec{q}} \cap (A_{\vec{q}} + p)$ se tiene que $x \in A_{\vec{q}}$ y $x - p \in A_{\vec{q}}$, pero su diferencia es racional (y distinta de cero), lo que no es posible. $\square$

La anterior es básicamente la demostración de que un conjunto de Vitali no tiene la propiedad de Baire. Considerar la propiedad de Baire en espacios de Banach nos ofrece una forma simple de encontrar bases de Hamel que sean de cierto modo conjuntos "pequeños".

Teorema 3.7. *Sea H una base de Hamel para un espacio de Banach X. Si H tiene la propiedad de Baire, entonces H es un conjunto magro.*

Demostración: Suponga que H no es magro. Entonces existe un subconjunto abierto $U \neq \emptyset$ de modo que $U \triangle H$ es magro. Claro que $U \cap H \neq \emptyset$, pues X es espacio métrico completo. Sea $z \in U \cap H$ y considere $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ una sucesión convergente a z. Sin pérdida de generalidad suponga que cada x_n necesita al menos cuatro sumandos para su representación en la base H. [3]

Puesto que U es abierto y $x_n \to z$, hay $j \in \omega$ tal que $(z+U) \cap \big(x_j + U\big) \neq \emptyset$. Y como $z \in U \cap H$, se sigue que $(z+H) \cap \big(x_j + H\big) \neq \emptyset$. Así, hay $v \in X$ tal que $k + h = v = x_j + h'$, donde $h, h' \in H$. Entonces $x_j = z + h - h'$, contradiciendo que H sea base. □

La riqueza de los espacios de Banach es tal que incluso sin acudir a la propiedad de Baire se pueden obtener bases de Hamel que sean conjuntos "pequeños pero bien acomodados". Veamos el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *Existe una base de Hamel para un espacio de Banach X que es un conjunto denso y magro. Más aún, existe una base de Hamel que es un conjunto denso en ninguna parte.*

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una base para la topología de X con cardinalidad mínima κ. Se construirá un subconjunto linealmente independiente $H' = \{h_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de modo que $h_\alpha \in B_\alpha$ y $\|h_\alpha\| \in \mathbb{Q}$ para cada $\alpha < \kappa$.

Tome $h_0' \in X$ cualquiera y considere $h_0 = {}^{h_0'}/_{\|h_0'\|}$; puesto que existe algún $B \in \mathcal{B}$ de modo que $h_0 \in B$, sin pérdida de generalidad suponga que $B = B_0$. Asuma que para $\beta < \kappa$, ya se construyó el subconjunto linealmente independiente $H_\beta = \{h_\alpha : \alpha < \beta\}$. Ya que $\beta < \kappa$ y se sabe que $\kappa \leqslant |X| = \dim(X)$ (ver cap. 1, §8 de **[18]**), entonces $B_\beta \nsubseteq \operatorname{span}(H_\beta)$, pues $\operatorname{span}(H_\beta)$ es subespacio propio de X. Sea $h \in B_\beta \setminus \operatorname{span}(H_\beta)$. Tome $q \in (\|h\| - \varepsilon, \|h\| + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$, donde $\varepsilon > 0$ es tal que $\mathbb{B}(h;\varepsilon) \subseteq B_\beta$. Entonces $h_\beta := q \cdot {}^{h}/_{\|h\|} \in B_\beta$ y $\|h_\beta\| \in \mathbb{Q}$.

Ahora, extienda H' con vectores unitarios a una base de Hamel H. Es claro que H es un subconjunto denso en X. Más aún, para cada $q \in \mathbb{Q}$, el conjunto $\{h \in H : \|h\| = q\}$ es denso en ninguna parte, pues está contenido en una esfera de radio q (que es un conjunto cerrado y con interior vacío). Se sigue que H es magro.

Luego, defina $\tilde{H} = \{{}^{h}/_{\|h\|} : h \in H\}$. Es claro que $\tilde{H}$ es una base de Hamel para X que es densa en ninguna parte. □

4. ¡Una base de Hamel conexa!

En esta sección veremos resultados sobre bases de Hamel para espacios de Banach. Nuestro objetivo es demostrar la existencia de bases de Hamel conexas y localmente conexas para espacios de Banach separables y de dimensión infinita. En particular esto será aplicado para establecer la existencia de bases de una sola pieza

[3] Dicha sucesión existe; a saber, tome una sucesión $y_n \to z$ y considere tres elementos $z_0, z_1, z_2 \in H$. Luego, $\big(y_n + {}^{z_0}/_{2^n} + {}^{z_1}/_{2^n} + {}^{z_2}/_{2^n}\big) \to z$.

en la esfera unitaria de los espacios ℓ_p con $p \in [1, +\infty)$. Para establecer lo deseado, primero probaremos algunos resultados para X, un espacio vectorial normado sobre el campo $\mathbb{R}$.

Como es habitual, $o(X)$ denota la cardinalidad de todos los subconjuntos abiertos de X. Naturalmente, $\dim X \leqslant |X| \leqslant o(X)$. Si X es separable, entonces $o(X) = |X| = \mathfrak{c}$ (ya que existe una base para la topología cuya cardinalidad es $\mathfrak{c}$). En particular, $o(X) = |X| = \dim X = \mathfrak{c}$ si X es un espacio de Banach separable y de dimensión infinita, esto por proposición 3.1.

Veamos algunos hechos básicos.

4.i Si el interior de $S \subseteq X$ no es vacío, entonces $\operatorname{span}(S) = X$.

4.ii Si U es un subconjunto abierto no vacío y L es un subespacio lineal de X, entonces $U \setminus L$ contiene un conjunto linealmente independiente de tamaño $\operatorname{codim} L$.

Para 4.i, observemos que si V es una bola abierta no vacía con centro en v, entonces $W = -v + V$ es una bola abierta alrededor de 0 y, por lo tanto, $\operatorname{span}(V) = \operatorname{span}(W) \supseteq \mathbb{R} \cdot W = X$. Es claro que 4.ii se deduce de 4.i y, además, notemos que 4.ii cubre el caso $L = X$ ya que $\operatorname{codim} X = 0$ y $\emptyset$ es linealmente independiente.

Lema 4.1. *Si $U \subseteq X$ es un conjunto abierto, convexo y no vacío, y si L es un subespacio lineal de X con* $\operatorname{codim} L \geqslant 2$*, entonces $U \setminus L$ es denso en U y conexo por caminos.*

Demostración: Sea L' cualquier complemento algebraico de L en X. Entonces, para cada $x \in X$ existe un par único $(u, v) \in L' \times L$ tal que $x = u + v$. Sean x_1 y x_2 puntos distintos en $U \setminus L$ y escribamos $x_j = u_j + v_j$ con $u_j \in L'$ y $v_j \in L$ para $j \in \{1, 2\}$. Dado que $x_1, x_2 \notin L$ tenemos que $u_1 \neq 0 \neq u_2$. Distinguimos dos casos:

Primero, supongamos que los vectores u_1 y u_2 son linealmente independientes. Entonces, tenemos que $tu_1 + (1-t)u_2$ nunca es cero para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, si $\ell(x, y)$ denota el segmento de línea recta que conecta $x \in X$ con $y \in X \setminus \{x\}$, se tiene que $\ell(x_1, x_2)$ es disjunto de L. Dado que U es convexo, $\ell(x_1, x_2) \subseteq U$ y, por lo tanto, $\ell(x_1, x_2)$ es un camino en $U \setminus L$ que conecta los puntos x_1 y x_2.

En segundo lugar, supongamos que los vectores u_1 y u_2 no son linealmente independientes. Equivalentemente, $u_1 = \lambda u_2$ para algún escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado que la dimensión algebraica (posiblemente finita) del espacio vectorial L' es mayor que 1, por 4.ii podemos elegir un punto $y \in U \setminus \operatorname{span}(L \cup \{u_1\})$.

Afirmamos que $\ell(y, x_j) \cap L = \emptyset$ para $j \in \{1, 2\}$. Entonces, dado que U es convexo, $\ell(x_1, y) \cup \ell(x_2, y)$ es un camino en $U \setminus L$ que conecta los puntos x_1 y x_2.

Supongamos por el contrario que $\ell(y, x_j) \cap L \neq \emptyset$ para algún $j \in \{1, 2\}$. Entonces, para algún $t \in [0, 1]$, el punto $ty + (1-t)x_j$ se encuentra en L, con $y = u_3 + v_3$ para $(u_3, v_3) \in L' \times L$. Así tenemos, $(tu_3 + (1-t)u_j) + (tv_3 + (1-t)v_j) \in L$ y esto sólo es posible si $tu_3 + (1-t)u_j = 0$, pero ya que $u_j \neq 0$ observamos que $t \neq 0$ y, por lo tanto, $u_3 \in \operatorname{span}(\{u_j\}) = \operatorname{span}(\{u_1\}) \subseteq \operatorname{span}(L \cup \{u_1\})$. Dado que trivialmente $v_3 \in \operatorname{span}(L \cup \{u_1\})$, concluimos que $y = u_3 + v_3$ se encuentra en $\operatorname{span}(L \cup \{u_1\})$ y esto no es posible.

En ambos casos, los puntos x_1 y x_2 pueden ser conectados por un camino en $U \setminus L$, lo que demuestra que $U \setminus L$ es conexo por caminos. En cuanto a la densidad, de 4.i se infiere que L no puede contener un conjunto abierto no vacío. Por lo tanto, $U \setminus L$ debe ser denso en U. $\square$

Ahora veamos un resultado que nos proporciona bases de Hamel conexas y localmente conexas.

Teorema 4.2. *Si $o(X) = |X| = \dim X$ entonces existe una familia $\mathscr{H}$ de bases de X tal que $|\mathscr{H}| = 2^{|X|}$ y cada elemento de $\mathscr{H}$ es un subconjunto conexo, localmente conexo y denso de X.*

Demostración: Suponga que $\dim X = |X| = \kappa$. Defina a la familia $\mathcal{G}$ como sigue:

$$\mathcal{G} := \{G \subseteq X : (\exists\, U_1, U_2 \subseteq X \text{ abiertos})\, (G = U_1 \setminus U_2 \ \wedge \ \dim \operatorname{span}(G) = \kappa)\}.$$

Trivialmente, $|\mathcal{G}| \leqslant o(X) = \kappa$. En virtud de 4.i, cada subconjunto abierto no vacío de X y cada bola cerrada no degenerada en X pertenece a la familia $\mathcal{G}$. Por consiguiente, $|\mathcal{G}| = o(X) = \kappa$. Así podemos escribir $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Sea ρ una función de elección definida sobre los subconjuntos no vacíos de X, entonces se tiene que $\rho(S) \in S$ para cada subconjunto no vacío $S \subseteq X$.

Ahora, por recursión definimos los puntos x_α en X para todo $\alpha < \kappa$. Supongamos que para $\xi < \kappa$ ya está definido un punto x_α para cada $\alpha < \xi$. Entonces definimos el punto x_ξ por

$$x_\xi := \rho\left[G_\xi \setminus \operatorname{span}(\{x_\alpha \mid \alpha < \xi\})\right].$$

Esta definición es correcta porque el conjunto $G_\xi \setminus \operatorname{span}(\{x_\alpha \mid \alpha < \xi\})$ es no vacío, ya que se tiene $|\operatorname{span}(\{x_\alpha \mid \alpha < \xi\})| < |\operatorname{span}(G_\xi)| = |G_\xi| = \kappa$.

De esta manera obtenemos puntos x_α para cada $\alpha < \kappa$; donde $x_\alpha \neq x_\beta$ siempre que $\alpha < \beta < \kappa$. En particular, $A := \{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de X con $|A| = \kappa$. Por construcción, para cada $\xi < \kappa$, el vector x_ξ es linealmente independiente de todos los vectores x_α $(\alpha < \xi)$. Por lo tanto, todo el conjunto A es linealmente independiente.

Sea K_0 el conjunto de todos los $\alpha \in \kappa$ tales que G_α es una bola abierta de X. Por supuesto, $|K_0| = \kappa$. Fijamos un vector $x_\beta \in A$ con $\beta \notin K_0$ y elegimos para cada $\alpha \in K_0$ un escalar $\lambda_\alpha \neq 0$ tal que ambos puntos x_α y $\tilde{x}_\alpha := x_\alpha + \lambda_\alpha x_\beta$ se encuentren en la bola G_α.

Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones de κ en X donde $f(\alpha) \in \{x_\alpha, \tilde{x}_\alpha\}$ para cada $\alpha \in K_0$ y $f(\alpha) = x_\alpha$ siempre que $\alpha \notin K_0$. Naturalmente, $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$. Por construcción, $f(\kappa) \cap G \neq \emptyset$ para cada $G \in \mathcal{G}$ y cada $f \in \mathcal{F}$.

Es evidente que para cada $f \in \mathcal{F}$ tenemos que $\operatorname{span}(A) = \operatorname{span}(f[\kappa])$ y $f[\kappa]$ es una base de $\operatorname{span}(A)$. Aplicando el lema de Zorn, podemos fijar un subconjunto Y de $X \setminus \operatorname{span}(A)$ tal que Y sea linealmente independiente y $\operatorname{span}(A \cup Y) = X$ (si $\operatorname{span}(A) = X$, entonces $Y = \emptyset$). Por consiguiente, $f[\kappa] \cap Y = \emptyset$ y $f[\kappa] \cup Y$ es una base del espacio vectorial X para cada $f \in \mathcal{F}$. Trivialmente, $f[\kappa] \neq g[\kappa]$ siempre que $f, g \in \mathcal{F}$ sean distintos. Por lo tanto, podemos estar seguros de que el tamaño de $\mathscr{H} := \{f[\kappa] \cup Y : f \in \mathcal{F}\}$ es igual a $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$.

Consideremos cualquier base $H \in \mathscr{H}$ de X. Por la definición de H, este interseca cada conjunto $G \in \mathcal{G}$ y, en particular, cada conjunto abierto no vacío. Por lo tanto, H es un subconjunto denso de X.

Veamos que H es tanto conexo como localmente conexo; notemos que X y todas las bolas abiertas en X son convexas. Por lo tanto, sólo necesitamos verificar lo siguiente.

- Sea $U \subseteq X$ convexo y abierto, entonces se tiene que $H \cap U$ es conexo.

Supongamos lo contrario, entonces existen conjuntos abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$ tales que:

(1) $U_1 \cap (H \cap U) \neq \emptyset$, $U_2 \cap (H \cap U) \neq \emptyset$,
(2) $(H \cap U) \subseteq U_1 \cup U_2$,
(3) $(H \cap U) \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$.

Dado que H es denso en X, de la última condición inferimos que $U \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$. Como U es conexo, $G := U \setminus (U_1 \cup U_2)$ no puede ser vacío. Así, $U \setminus G$ está separado por los conjuntos abiertos no vacíos $U \cap U_1$ y $U \cap U_2$, por lo tanto, $U \setminus G$ no es conexo.

Ahora, si S es un subconjunto denso y conexo, entonces cada subconjunto del espacio que contenga a S también es conexo. Por lo tanto, el subconjunto $U \setminus \operatorname{span}(G)$ del conjunto no conexo $U \setminus G$ no puede ser a la vez conexo y denso en U. Así, por lema 4.1, es imposible que $\operatorname{codim} \operatorname{span}(G) \geqslant 2$. Dado que $\dim X$ es infinito, de $\operatorname{codim} \operatorname{span}(G) < 2$ concluimos que $\dim \operatorname{span}(G) = \dim X$ y por lo tanto G pertenece a nuestra familia $\mathcal{G}$. En consecuencia, $H \cap G \neq \emptyset$. Pero esto es imposible ya que $H \cap U \subseteq U_1 \cup U_2$ y $G \subseteq U$. Así obtenemos lo deseado y esto concluye la prueba. $\square$

Notemos que $o(\ell_p) = |\ell_p| = \dim \ell_p = \mathfrak{c}$ para $p \in [1, +\infty)$. Usando teorema 4.2, obtenemos bases de Hamel conexas, localmente conexas y densas en ℓ_p.

Teorema 4.3. *Si $o(X) = |X| = \dim X$, entonces existe una base de X que es un subconjunto conexo y localmente conexo de la esfera unitaria $\mathbb{S}_X$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea φ la función continua que asigna $x \mapsto \|x\|^{-1} \cdot x$ de $X \setminus \{0\}$ a la esfera unitaria $\$_X$. Por lo tanto, $\varphi(S)$ es conexo siempre que S sea un subconjunto conexo de $X \setminus \{0\}$. Además, φ es una retracción (es decir, $\varphi \circ \varphi = \varphi$) y, por lo tanto, $\varphi(S)$ es localmente conexo siempre que S sea un subconjunto localmente conexo de $X \setminus \{0\}$, aplicando [**3**] 2.4.E.(c) y 6.3.3.(d). Es evidente que φ restringida a una base H de X es inyectiva y $\varphi(H)$ también es una base de X. Por lo tanto, usando el teorema 4.2 obtenemos lo deseado. $\square$

Respecto a la hipótesis de este teorema, el caso $o(X) = |X| = \dim X > \mathfrak{c}$ no es trivial porque si X es un espacio de Banach de manera que la mínima cardinalidad de una base para su topología es un cardinal límite fuerte de cofinalidad numerable, κ; entonces se sabe que $\kappa^{\aleph_0} = 2^{\kappa}$, véase [**14**, 5.23], y por lo tanto (véase [**3**, 4.1.H y 4.1.15]) tenemos $o(X) = 2^{\kappa} = \kappa^{\aleph_0} = |X| = \dim X$. Sin embargo, si $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ para la mínima cardinalidad de una base para la topología de X, entonces $o(X) = 2^{\kappa} > \kappa = \kappa^{\aleph_0} = |X| = \dim X$.

Para $\varphi(x) = \|x\|^{-1} \cdot x$ tenemos claramente que $\varphi(H_1) \neq \varphi(H_2)$ siempre que H_1 y H_2 sean bases distintas en $\mathscr{H}$. En consecuencia, si $o(X) = |X| = \dim X$, entonces existen $2^{|X|}$ bases de X que son subconjuntos conexos y localmente conexos de la esfera unitaria $\mathbb{S}_X$, además dichas bases son densas en ninguna parte.[4]

Ahora podríamos considerar cambiar las condiciones para obtener resultados similares a los anteriores, y aquí es donde entra la Hipótesis del Continuo. Si asumimos esta hipótesis y consideramos un espacio de Banach X con cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces podemos obtener una base de Hamel densa y conexa por caminos en X (véase [**23**]).

---

[4] Todos los resultados anteriores fueron obtenidos de [**17**].

5. ... y aún hay algo por hacer sobre bases de Hamel

Creemos que este tema es básicamente un tema elemental y muy interesante que aún tiene mucho por ofrecer. Hay multitud de preguntas que tienen que ver con consistencia e independencia relativa a esa de ZFC, ver por ejemplo [**1**] y [**27**]. Aquí incluimos algunas preguntas abiertas que no se alejan mucho de lo presentado en esta nota. Una que no hemos sido capaces de resolver es

Problema 5.1. *¿Qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ son incapaces de ser/contener bases de Hamel?*

Obviamente hay respuestas triviales, pero estamos interesados en conocer una caracterización topológica de aquellos subconjuntos que sí contienen bases de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$.

Por ejemplo, obviamente no puede ser un conjunto conexo o localmente conexo: ¿y subconjuntos típicos? ¿Puede una base de Hamel ser un conjunto de Bernstein o al menos cada conjunto de Bernstein sí contiene una base? En el teorema 3.7 de [**1**] se muestra que una base de Hamel no puede ser un subconjunto σ-compacto. En este mismo espíritu tenemos una pregunta planteada por Tomek Bartosziński y sus coautores,

Problema 5.2 (Bartosziński et. al.). *¿Existe un espacio de Banach en el que todas sus bases de Hamel sean magras?*

Antes, teorema 2.5, se mostró que una base de Hamel para $\mathbb{R}$ no puede ser un conjunto analítico, pero qué tal el complemento de uno o imagen continua de un conjunto coanalítico (i.e. el complemento de un conjunto analítico):

Problema 5.3. [**24**] *¿Puede una base de Hamel para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ ser un conjunto coanalítico o una imagen continua de un conjunto coanalítico?*

Como se ha mencionado antes, las familias independientes de subconjuntos de números naturales, así como las familias casi ajenas han resultado herramientas combinatorias muy útiles para realizar diversas construcciones. En esta misma nota hemos usado la primera clase de éstas familias para realizar construcciones de conjuntos de vectores linealmente independientes. También Bartoszyński y sus coautores plantean como su cuarta pregunta abierta: ¿Es cierto que todo espacio de Banach de cardinalidad κ admite una familia de 2^κ bases de Hamel que sean casi ajenas? En este contexto, casi ajenas significa que la intersección de dos de esas bases tiene cardinalidad menor que κ. En [**8**] se responde que no es decible en ZFC; es decir, hay modelos en los que para todo κ y todo espacio de Banach de esa cardinalidad posee una familia de 2^κ bases de Hamel casi ajenas; también hay modelos en los que para un κ hay un espacio de Banach que no tiene una familia grande de bases de Hamel casi ajenas. El concepto de casi ajeno puede ser modificado con facilidad; por ejemplo, podríamos decir que dos bases de Hamel H_0 y H_1 para un espacio X son *casi independientes* si la dimensión de $\operatorname{span}(H_0 \cap H_1)$ es finita. Nosotros preguntamos:

Problema 5.4. *Si X es un espacio de Banach de cardinalidad κ, ¿cuál es la mínima cardinalidad de una familia $\subseteq$-maximal de bases de Hamel casi independientes?*

Terminaremos esta lista de preguntas con otra que es simple de plantear. En el Corolario 3.5 hemos visto que si X es un espacio de Banach y $H \subseteq X$ es una base de Hamel, entonces $|X| = |H|$. En la literatura hay varias maneras de realizar la demostración de esta propiedad; pero todas dependen de la completez y no se sabe si el resultado sigue siendo válido en una clase más amplia de espacios. Más precisamente,

PROBLEMA 5.5. [**8**] *Si H es una base de Hamel para un espacio vectorial de dimensión infinita X que es separable y completo como espacio métrico; ¿debe ser que $|H| = \mathfrak{c}$?*

Apéndice

Gráficas completas no numerables

Presentaremos un resultado importante que se ha usado anteriormente para establecer una equivalencia de CH (véase [**2**]). Aunque este resultado queda fuera de nuestros intereses principales, creemos que es necesario incluirlo para completar y dar por finalizado nuestro trabajo.

Primero daremos algunas definiciones.

Definición A.6. *Una gráfica es un par ordenado $G = (V, E)$ que comprende:*

- *V, un conjunto de vértices (también llamados nodos o puntos);*
- *$E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V \text{ y } x \neq y\}$, un conjunto de aristas (también llamado segmento), que son pares no ordenados de vértices (es decir, una arista está asociada con dos vértices distintos).*

A su vez, una gráfica G se dice completa si cada par de puntos de G está conectado por un único segmento, y una subgráfica se dice conexa si para cada par de vértices en ella existe un camino poligonal que los conecta. Dos segmentos $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\} \in G$ son consecutivos si $\alpha = \gamma \wedge \beta \neq \delta$ o $\beta = \delta \wedge \alpha \neq \gamma$.

Definición A.7. *Un árbol T es una gráfica conexa que no contiene ciclos, equivalentemente G se llama un árbol si no contiene ningún polígono cerrado.*

Definición A.8. *Sea T un árbol, para cada $S \subseteq T$ conexo y algún vértice fijo α_s de un segmento en S, diremos que:*

- *$\{\alpha, \beta\} \in S$ tiene grado 1 si $\alpha = \alpha_s$, y si ya hemos definido hasta el grado n, entonces $\{\alpha, \beta\} \in S$ tiene grado $n+1$ si existe $\gamma < \alpha$ tal que $\{\gamma, \alpha\} \in S$ tiene grado n y $\{\alpha, \beta\}$ no tiene ya asignado un grado menor o igual a n.*
- *De manera análoga, $\{\alpha, \beta\} \in S$ tiene grado -1 si $\beta = \alpha_s$, y si ya hemos definido hasta el grado $-n$, entonces $\{\alpha, \beta\} \in S$ tiene grado $-(n+1)$ si existe $\beta < \gamma < \kappa$ tal que $\{\beta, \gamma\} \in S$ tiene grado $-n$ y $\{\alpha, \beta\}$ no tiene ya asignado un grado mayor o igual a $-n$.*

Usaremos la notación $\deg(S, \{\alpha, \beta\})$ para denotar el grado del segmento $\{\alpha, \beta\}$ con respecto del subconjunto conexo S.

Teorema A.9 (Erdös-Kakutani)**.** *Una gráfica completa G de número cardinal κ (es decir, el número cardinal de los vértices es κ) puede ser separada en una cantidad numerable de árboles si y sólo si $\kappa \leqslant \aleph_1$.*

DEMOSTRACIÓN: El resultado es claro para gráficas completas de cardinalidad a lo más numerable, entonces sólo lo probaremos para la gráfica completa de cardinalidad ω_1. Primero probaremos que la gráfica G completa de número cardinal $\aleph_1$

puede ser separada en una cantidad numerable de árboles. Podemos suponer que G está representada por un sistema de segmentos

$$G = \{\{\alpha, \beta\} : \omega \leqslant \alpha < \beta < \omega_1\}.$$

Para cualquier $\omega \leqslant \beta < \omega_1$, tomemos una una función biyectiva $f_\beta : \beta \to \omega$ y el siguiente conjunto $G_n = \{\{\alpha, \beta\} : f_\beta(\alpha) = n\}$, es claro que $G = \bigcup_{n\in\omega} G_n$. Además para cada G_n y $\beta < \omega_1$, existe un único $\alpha < \beta$ tal que $\{\alpha, \beta\} \in G_n$ (usando que la función f_β es biyectiva). También de esto se sigue que si α_0 es cualquiera de los nodos de G_n, entonces hay una sucesión finita $\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_k = \omega$ de modo que $f_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i) = n$, para $1 \leqslant i \leqslant k$. Por lo tanto cada G_n es un subconjunto conexo de G y así un árbol.

Para el otro caso, tomemos G la gráfica completa de número cardinal κ y $G = \bigcup_{n\in\omega} T_n$, donde cada T_n es un árbol. Podemos suponer nuevamente que G está representada por un sistema de segmentos

$$G = \{\{\alpha, \beta\} : \omega \leqslant \alpha < \beta < \kappa\}.$$

Considere la descomposición (no necesariamente numerable) de cada T_n en sus componentes conexas, $T_n = \bigcup_{\xi<\lambda} T_n(\xi)$; donde λ es la cantidad de componentes conexas de T_n.

Definimos los siguientes conjuntos

$$T_n^+(\xi) = \left\{\{\alpha, \beta\} : \deg(T_n(\xi), \{\alpha, \beta\}) > 0\right\},$$
$$T_n^-(\xi) = \left\{\{\alpha, \beta\} : \deg(T_n(\xi), \{\alpha, \beta\}) < 0\right\}.$$

Para esto notemos lo siguiente:

6.1 Cualquier par de segmentos consecutivos de la gráfica $T_n^+(\xi)$ son de la forma: $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\}$ con $\alpha < \beta, \gamma < \delta$ y $\beta \neq \delta$, ya que si existieran $\alpha \neq \gamma$ tal que $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \beta\} \in S$ podríamos obtener caminos poligonales hacia α_s y por tanto tener un polígono en S, lo que no es posible.

6.2 Cualquier par de segmentos consecutivos de la gráfica $T_n^-(\xi)$ son de la forma: $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\}$ con $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$ y $\alpha \neq \gamma$.

Ahora definimos

$$T_n^+ = \bigcup_{\xi<\lambda} T_n^+(\xi), \quad T_n^- = \bigcup_{\xi<\lambda} T_n^-(\xi).$$

Así obtenemos una descomposición de $T_n = T_n^+ \cup T_n^-$, donde T_n^+ y T_n^- cumplen las observaciones 6.1 y 6.2 respectivamente.

De lo anterior obtenemos, $G = \bigcup_{n\in\omega} T_n^+ \cup T_n^-$.

Observamos que las siguientes observaciones se siguen de 6.1 y 6.2 respectivamente.

6.3 Para cualquier $\alpha < \kappa$, existe un único $\beta < \alpha$ tal que $\{\beta, \alpha\} \in T_n^+$.

6.4 Para cualquier $\alpha < \kappa$, existe un único $\alpha < \beta < \kappa$ tal que $\{\alpha, \beta\} \in T_n^-$.

Tomando los siguientes conjuntos,

$$T^+ = \bigcup_{n\in\omega} T_n^+, \quad T^- = \bigcup_{n\in\omega} T_n^-.$$

Notamos que satisfacen claramente las siguientes condiciones:

6.5 Para cualquier $\alpha < \kappa$, el conjunto de todos los $\beta < \alpha$ tal que $\{\beta, \alpha\} \in T^+$ es numerable.

6.6 Para cualquier $\alpha < \kappa$, el conjunto de todos los $\alpha < \beta$ tal que $\{\alpha, \beta\} \in T^-$ es numerable.

De esto se sigue fácilmente por el mismo argumento que en ([**28**], p. 9) que el número cardinal κ de todos los puntos $\alpha < \kappa$, es como máximo $\aleph_1$. $\square$

Agradecimientos: Los autores agradecen a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y a su programa Verano Nicolaita durante el cual este trabajo fue realizado. Asimismo agradecemos a Carlos López Callejas y a Luis David Reyes Saenz por valiosos comentarios que nos ayudaron a mejorar la primera versión. Bien merecido también es nuestro agradecimiento a la persona anónima que ha realizado el arbitraje de esta nota; su fino y pronto trabajo además de mejorar nuestro escrito, también permitirá que aparezca en el volumen de este año de Topología y sus Aplicaciones.

Bibliografía

[1] T. Bartoszyński, et al. *On bases in Banach spaces*, Studia Mathematica **170.2**, p. 147-171; 2005.

[2] P. Erdös, S. Kakutani. *On non-denumerable graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (6), p. 457-461, June 1943.

[3] R. Engelking. *General Topology, revised and completed edition*, Heldermann, 1989.

[4] A. Flores Ferrer, F. Hernández Hernández, C. Martínez Lázaro, L. A. Martínez Pérez, A. Torres Ayala. *Topología y sus aplicaciones 1*, Textos Científicos, BUAP, pp. 167-186, 2012.

[5] G. Fichtenholz, L. Kantorovitch. *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Mathematica **5**, p. 69-98; 1935.

[6] D. Grozev, *Dragomir Grozev's math blog.* `https://tinyurl.com/4bkb7rc3`

[7] L. Halbeisen, N. Hungerbühler. *The cardinality of Hamel Bases of Banach spaces*, East-West Journal of Mathematics **2**, p. 153-159, 2000.

[8] L. Halbeisen. *Families of almost disjoint Hamel bases*, Extracta Mathematicae 20 (2005) 199-202.

[9] F. Hernández-Hernández. *Teoría de Conjuntos: una introducción*, Aportaciones Matemáticas **13**, Instituto de Matemáticas UNAM, 2021.

[10] F. Hernández-Hernández y M. Ibarra Contreras. *Introducción a la Teoría de la Medida*, Aportaciones Matemáticas **42**, Instituto de Matemáticas UNAM, 2018.

[11] F. Hernández-Hernández. *Curso de Topología: un enfoque conjuntista*, Aportaciones Matemáticas **43**, Instituto de Matemáticas UNAM, 2019.

[12] J. S. Higdon. *A note on Hamel bases.* Tesis de maestría, University of Tennessee, 2008, `https://trace.tennessee.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1431&context=utk_gradthes`.

[13] I. L. Iribarren. *Topología de Espacios Métricos*, Limusa-Wiley, 1973.

[14] T. Jech. *Set Theory*, 3rd ed., Springer, 2002.

[15] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

[16] G. Kuba. *Transfinite dimensions*, arXiv:2010.01983 [math.GM], 2020.

[17] G. Kuba. *Connected Hamel bases in Hilbert spaces*, arXiv:2402.07678 [math.FA], 2024.

[18] K. Kunen, J. E. Vaughan. *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, 1984.

[19] S. Lang. *Algebra*, Revised 3rd ed., Springer-Verlag, 2002.

[20] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I: Sequences Spaces*, Springer-Verlag, 1977.

[21] C. López-Callejas. *Familias independientes: cardinalidad y estructura*, ICBI-BD-UAEH, 2018, `http://dgsa.uaeh.edu.mx:8080/bibliotecadigital/handle/231104/2159`.

[22] R. D. Mabry. *No nontrivial Hamel basis is closed under multiplication*, Aequat. Math. **71**, p. 294-299, 2006.

[23] E. H. Merryman. *An arcwise connected dense Hamel basis for Hilbert space*, Proc. Am. Math. Soc. **26** (1), pp. 126-128, 1970.

[24] M.G. Nadkarni, V.S. Sunder, *Hamel bases and measurability.* Mathematics Newsletter 14, 2004.
[25] A. N. Parshin, R. Shafarevich. *Number Theory IV: Transcendental Numbers*, Springer, 1997.
[26] A. Ríos Herrejón. *Una introducción a los espacios vectoriales de dimensión infinita*, Miscelanea Matemática 75 (2022) 71-86.
[27] R. Schindler, L. Wu, L. Yu. *Hamel bases and the principle of dependent choice*, To appear, 2024.
[28] W. Sierpiński. *Hypothèse du continu*, Chelsea Publishing Company, 1934.
[29] M. Spivak. *Calculus*, 3rd ed., Reverté, 2014.
[30] K. Stromberg. *An elementary proof of Steinhaus's Theorem*, Proc. Am. Math. Soc. **36** (1), 1972.

Correos electrónicos:
chaiiimath@gmail.com (Carlos Eduardo Cervantes Tlatempa)
alexischavez2599@gmail.com (Alexis Chávez Cortés)
fernando.hernandez@umich.mx (Fernando Hernández Hernández)

Topología y sus aplicaciones 11
José Juan Angoa Amador
Agustín Contreras Carreto
Raúl Escobedo Conde
María de Jesús López Toriz
Editores
El cuidado editorial estuvo a cargo
de la Dirección General de Publicaciones
Formato: PDF
Peso: 2.2 Mb